Université Pierre et Marie Curie - Paris VI — Faculté de Mathématiques

Groupes Finis et Représentations — 2010–2011

Corrigé de l'examen du 29 avril 2011

Exercice 1. i. Plusieurs manières de voir que G n'a qu'un élément (le neutre). Par exemple : si la régulière est irréductible, alors c'est l'unique irréductible de G et G possède donc une unique classe de conjugaison, nécessairement égale à $\{e\}$. Ou encore : la régulière contient la droite stable $\mathbb{C}v$ engendrée par le vecteur fixe $v = \sum_g e_g$ donc par irréductibilité, $\mathbb{C}G$ est de dimension 1, et $G = \{e\}$.

ii. Si G n'est pas abélien, le nombre c de classes de conjugaison est strictement inférieur à $|G|$, donc le nombre d'irréductibles aussi. La relation $|G| = \sum_\rho \dim(\rho)^2$ montre alors que l'une des irréducibles ρ est de dimension au moins 2.

iii. Par hypothèse, G possède 2 classes de conjugaison. L'une étant le singleton $\{e\}$, l'autre sera notée c. On a $G = \{e\} \sqcup c$ donc $|G| = 1 + |c|$. Par ailleurs, $|c|$ divise $|G|$. La seule possibilité est donc $|c| = 1$.

Exercice 2. i. Il faut d'abord calculer le groupe dérivé $DS_n = [S_n, S_n]$ de S_n. Il est clair qu'il est contenu dans le groupe alterné A_n. Nous allons montrer qu'il lui est égal. Comme S_n est engendré par les transpositions, A_n est engendré par les produits de deux transpositions. Si $(i,j) \neq (k,l)$ on a $(i,j)(k,l) = \sigma.(i,j).\sigma^{-1}.(i,j)$ pour n'importe quel σ tel que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = l$. Par ailleurs, on a $(i,j)(j,k) = (i,k)(k,j)(i,k)^{-1}(k,j)^{-1}$. Ainsi A_n est contenu dans $[S_n, S_n]$. Finalement, les seules représentations de dimension 1 sont la trivial et la signature.

ii. V n'est pas irréductible puisqu'elle est de dimension $n > 1$ et contient le vecteur fixe $(1, 1, \cdots, 1)$.

iii. On rappelle ou on vérifie que $\chi_V(g)$ est le cardinal $\#\{1, \cdots, n\}^g$ de l'ensemble des points fixes de g dans $\{1, \cdots, n\}$. Par ailleurs, les conjugués de S_{n-1} sont les n fixateurs d'éléments de $\{1, \cdots, n\}$, et ceux qui contiennent g sont exactement les fixateurs des points fixes de g. De plus, S_{n-1} est égal à son normalisateur dans S_n. Ainsi $\chi_V(g) = \#\{xS_{n-1} \in S_n/S_{n-1},\, g \in xS_{n-1}x^{-1}\}$ et on retrouve le caractère induit annoncé.

iv. Il suffit de prouver que le produit scalaire $(\chi_V, \chi_\varepsilon)$ est nul. Or, par iii et le cours on a $(\chi_V, \chi_\varepsilon)_{S_n} = (1, \chi_{\varepsilon,|S_{n-1}})_{S_{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{g \in S_{n-1}} \varepsilon(g) = 0$.

Exercice 3. i. $\mathbb{C}G$ est évidemment engendrée par e_1 par exemple.

TSVP

ii. Soit $v \in V$ non nul. Le sous-espace engendré par les $\rho(g)(v)$, $g \in G$ est une sous-représentation non nulle de (V, ρ). Comme V est irréductible, elle est égale à V.

iii. (a) $\rho(g)\rho(f)\rho(g^{-1}) = \sum_{x \in G} f(x)\rho(gxg^{-1}) = \sum_{x \in G} f(g^{-1}xg)\rho(x) = \sum_{x \in G} f(x)\rho(x) = \rho(f)$.

(b) D'après (a) et le lemme de Schur, $\rho_i(f_j)$ est une homothétie. On la détermine en calculant sa trace. Or, on a

$$\mathrm{Tr}(\rho_i(f_j)) = \frac{\chi_{\rho_j}(e)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_i}(g)\chi_{\rho_j}(g^{-1}) = \frac{\chi_{\rho_j}(e)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_i}(g)\overline{\chi}_{\rho_j}(g) = \chi_{\rho_j}(e)(\chi_{\rho_i}, \chi_{\rho_j})$$

et on conclut grâce aux relations d'orthogonalité des caractères et à l'égalité $\chi_{\rho_i}(e) = \dim(V_i)$.

(c) Soit W la sous-représentation de $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$ engendrée par $v = v_1 + \cdots + v_k$. D'après (b), W contient les éléments $v_i = \rho(f_i)(v)$. Or d'après ii, chaque v_i engendre V_i en tant que représentation. Donc W contient les V_i et par suite $W = V$.

iv. Il suffit de prendre pour (V, ρ) une représentation triviale de dimension > 1. En effet, tout vecteur non nul de V appartient à une droite stable, donc n'engendre pas V en tant que représentation.