1 Filtrations

Soit k un corps commutatif. Nous fixons d'abord quelques conventions sur les filtrations que nous considèrerons.

Par *filtration* d'un e.v. V (de dimension finie) sur k, nous entendrons une $\mathbb{Q}$-filtration **décroissante, exhaustive, séparée, et semi-continue supérieurement**. Nous noterons V^x ou $\mathcal{F}^x V$ le s.e.v correspondant à $x \in \mathbb{Q}$. La condition de semi-continuité signifie que pour tout x on a $V^x = \bigcap_{y<x} V^y$.

On définit le *gradué* par $gr_{\mathcal{F}}(V) = \bigoplus_{x\in\mathbb{Q}} gr^x_{\mathcal{F}}(V)$ où $gr^x_{\mathcal{F}}(V) = (\sum_{y>x} V^y)/V^x$. Comme V est supposé de dimension finie, il n'y a qu'un nombre fini de sauts.

Construction. Rappelons quelques constructions avec les filtrations :
- *filtrations induites sur les sous-quotients*
- *produits tensoriels, duaux, puissances symétriques, extérieures*
- *décalage, homothétie*

Un morphisme d'e.v. filtrés est une application linéaire qui respecte les filtrations. La catégorie ainsi obtenue est k-linéaire et "**quasi-abélienne**". Ceci signifie que tout morphisme $f : V \longrightarrow W$ possède un noyau et un conoyau (et donc une image et une coimage). Par contre, en général, le morphisme canonique $coim\,(f) \longrightarrow im\,(f)$ n'est pas un isomorphisme d'espaces filtrés, bien que l'application linéaire sous-jacente soit inversible. En fait ce morphisme canonique est un isomorphisme si et seulement si f est *strictement compatible* aux filtrations, ce qui signifie que pour tout x on a $V^x \cap f(W) = f(W^x)$. Comme toutes les catégories quasi-abéliennes elle a une structure naturelle de catégorie "exacte". Une suite $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\varphi'} V \xrightarrow{\varphi"} V'' \longrightarrow 0$ est dite *exacte* si φ' est un noyau de φ'' et φ'' est un conoyau de φ'. Ceci équivaut à demander que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, la suite $0 \longrightarrow V'^x \xrightarrow{\varphi'} V^x \xrightarrow{\varphi''} V''^x \longrightarrow 0$ soit exacte.

Définition. Soit $(V, \mathcal{F})$ un e.v. filtré, on lui associe
- Son degré $\deg(V, \mathcal{F}) := \sum_{x\in\mathbb{Q}} x\dim(gr^x_{\mathcal{F}}(V))$
- Son rang $\mathrm{rk}(V, \mathcal{F}) := \dim(V)$
- Sa pente $\mu(V, \mathcal{F}) := \frac{\deg(V,\mathcal{F})}{\mathrm{rk}(V,\mathcal{F})}$.

Remarquons que pour un objet de dimension 1, le degré et la pente coïncident avec l'unique saut x de la filtration. Voici quelques autres propriétés :

Propriétés.
1. *Le degré est additif sur les suites exactes. En particulier, si U est un sous-objet de V, alors on a* $\min(\mu(U), \mu(V/U)) \leqslant \mu(V) \leqslant \max(\mu(U), \mu(V/U))$.
2. $\mu(V \otimes W) = \mu(V) + \mu(W)$.
3. $\mu(\bigwedge^k V) = k\mu(V)$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant \dim(V)$ *et* $\mu(\mathrm{Sym}^k V) = k\mu(V)$ *pour tout* $k \geqslant 0$.
4. $\mu(V^*) = -\mu(V)$.
5. *Si $f : V \longrightarrow W$ est un morphisme de noyau et conoyau nuls (*i.e *dont l'application linéaire sous-jacente est inversible) alors $\mu(V) \leqslant \mu(W)$. Si de plus on a égalité des pentes, alors f est un isomorphisme. En particulier pour tout morphisme f on a $\mu(coim\,(f)) \leqslant \mu(im\,(f))$.*

6. $\mu(V, \mathcal{F}(c)) = \mu(V, \mathcal{F}) + c$ *et* $\mu(V, \lambda\mathcal{F}) = \lambda\mu(V, \mathcal{F})$.

Démonstration. i) : Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, la suite $0 \longrightarrow gr^x_{\mathcal{F}'}(V') \longrightarrow gr^x_{\mathcal{F}}(V) \longrightarrow gr^x_{\mathcal{F}''}(V'') \longrightarrow 0$ est exacte. L'additivité des degrés en résulte. Les inégalités suivent.

Pour la suite, on peut remarquer que, moyennant le choix d'une base adaptée à la filtration, tout e.v. filtré est isomorphe à un objet *standard* (unique à isomorphisme près), *i.e.* de la forme $(k^{I_V}, \mathcal{F}_{\varphi_V})$ où I_V est un ensemble fini muni d'une application $\varphi_V : I_V \longrightarrow \mathbb{Q}$ et la filtration est donnée par $\mathcal{F}^x_{\varphi_V}(K^I) = K^{\varphi_V^{-1}([x,+\infty[)}$. On a alors $\deg(V, \mathcal{F}) = \sum_{i\in I} \varphi_V(i)$.

ii) Comme modèle standard de $V \otimes W$, on peut prendre $I_{V\otimes W} = I_V \times I_W$ et $\varphi_{V\otimes W}(i, j) = \varphi_V(i) + \varphi_W(j)$. On en déduit que $\deg(V \otimes W) = |I_W| \deg(V) + |I_V| \deg(W)$.

iii) Comme modèle standard de $\bigwedge^k V$ on peut prendre pour $I_{\bigwedge^k V}$ l'ensemble des sous-ensembles de cardinal k de I_V et pour $\varphi_{\bigwedge^k V}$ l'application $J \subset I_V \mapsto \sum_{j\in J} \varphi_V(j)$. On obtient alors la formule $\deg(\bigwedge^k V) = C^{k-1}_{n-1} \deg(V)$.

Pour $\mathrm{Sym}^k V$, on peut prendre pour $I_{\mathrm{Sym}^k V}$ l'ensemble des multiensembles de cardinal k formés d'éléments de I_V avec $\varphi_{\mathrm{Sym}^k V}$ l'application $J \mapsto \sum_{j\in J} \varphi_V(j)$. L'ensemble $I_{\mathrm{Sym}^k V}$ est de cardinal C^k_{n+k-1} et on obtient la formule $\deg(\mathrm{Sym}^k V) = (\sum_{i=0}^k iC^{k-i}_{n+k-i-1}) \deg(V)$.

iv) Ici on peut prendre $I_{V^*} = I_V$ et $\varphi_{V^*} = -\varphi_V$.

v) L'inégalité est triviale lorsque V est de dimension 1. On se ramène à ce cas en prenant la puissance extérieure maximale de V et W. Alternativement, une "transformation d'Abel" donne la formule

$$\deg(V, \mathcal{F}) = x_r \dim(V^{x_r}) + \sum_{i=1}^{r} (x_i - x_{i+1}) \dim(V^{x_i})$$

où $\{x_1 > x_2 > \ldots > x_r\}$ est un ensemble de rationels contenant les sauts de la filtration de V. Cette formule et son analogue pout W montrent l'inégalité cherchée, et montrent que l'égalité implique que f est un isomorphisme (*i.e.* que $f(V^x) = W^x$ pour tout x.

vi) est élémentaire. □

2 La catégorie $\mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)$

Soit $K \supset k$ une extension de corps. On note $\mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)$ la catégorie

- dont les objets sont les couples $(V, \mathcal{F})$ avec V un k-e.v. de dimension finie et $\mathcal{F}$ une filtration de $V_K := V \otimes_k K$ par des K-s.e.v.
- dont les morphismes sont les applications k-lineaires dont le changement de base à K respecte les filtrations.

Comme précédemment il s'agit d'une catégorie k-linéaire quasi-abélienne et tensorielle, mais *pas abélienne*. Lorsqu'il n'y a pas ambiguité sur la filtration on prendra la liberté de noter V pour $(V, \mathcal{F})$ et $\mu(V)$ pour $\mu(V_K, \mathcal{F})$.

Définition. Un objet $V = (V, \mathcal{F})$ est dit *semi-stable* (resp, *stable*) si pour tout sous-objet W de V on a $\mu(W) \leqslant \mu(V)$ (resp $\mu(W) < \mu(V)$ lorsque $W \neq V$).

D'après la pté i) ci-dessus ceci équivaut à demander que pour tout objet quotient W de V on ait l'inégalité $\mu(W) \geqslant \mu(V)$.

Proposition 1. *Soient V et W deux objets semi-stables de* $\mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)$.

1. *Si* $\mu(V) > \mu(W)$ *alors* $\mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)(V,W) = 0$.
2. *Si* $\mu(V) = \mu(W) = \mu$ *alors tout morphisme* $f \in \mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)(V,W)$ *est strictement compatible aux filtrations, et on a* $\mu(ker\ f) = \mu(coker\ f) = \mu(im\ f) = \mu(coim\ f)$.

En particulier, la sous-catégorie pleine des objets semi-stables de pente μ *est abélienne, artinienne, et stable par extensions. De plus, ses objets simples sont les objets stables de pente* μ.

Démonstration. i) découle des deux formulations équivalentes de la semi-stabilité (par les sous-objets et par les quotients).

ii) On a les inégalités $\mu(V) \leqslant \mu(coim\ f) \leqslant \mu(im\ f) \leqslant \mu(W)$. Les deux extrêmes par définition de la semi-stabilité et celle du milieu par la pté vi) plus haut. On en déduit que $\mu(coim\ f) = \mu(im\ f) = \mu$, donc le morphisme canonique $coim\ f \longrightarrow im\ f$ est un isomorphisme et f est strictement compatible aux filtrations. De plus on en tire aussi $\mu(ker\ f) = \mu$ et $\mu(coker\ f) = \mu$.

Il s'ensuit que la catégorie des objets semi-stables de pente μ est abélienne. Soit V une extension de V'' par V' semi-stables de pente μ. Alors V est de pente μ et si U est un sous-objet de V, on a $\mu(U) \leqslant \max(\mu(U \cap V'), \mu(U/(U \cap V')))$ avec $\mu(U \cap V') \leqslant \mu$ et $\mu(U/(U \cap V') \leqslant \mu(im\,(U \longrightarrow V'') \leqslant \mu$. □

Nous montrerons plus tard que la catégorie des objets semi-stables de pente nulle est aussi stable par produit tensoriel. C'est une catégorie *tannakienne*.

Variantes : gardons l'extension $k \subset K$. Dans ce qui précède on peut remplacer la catégorie Vec_k des k-e.vs par une catégorie k-linéaire, de préférence tensorielle et exacte. Par exemple la catégorie des k-représentations d'un groupe, d'un carquois, ou la catégorie des k-ev filtrés. On peut alors modifier la définition de la pente en tenant compte de ces structures supplémentaires (voir ci-dessous un exemple avec les SHM).

On peut aussi considérer des objets munis de plusieurs filtrations. Le degré d'un tel objet est défini comme la somme des $\deg(V, \mathcal{F}_i)$.

3 Théorie de Hodge

3.1 Variétés complexes

Soit X une variété algébrique propre et lisse sur $\mathbb{C}$. On dispose de plusieurs théories cohomologiques à appliquer à X.

- La cohomologie singulière $H^*_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ (de l'esp. topologique $X(\mathbb{C})$). C'est un e.v. gradué de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.
- La cohomologie de De Rham $H^*_{\mathrm{dR}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ de la variété différentiable $X(\mathbb{C})$. C'est un e.v. gradué de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
- La cohomologie de De Rham $H^*_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C})$ de la variété algébrique X, définie comme l'hypercohomologie (cohérente) du complexe de De Rham $\mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_X^{\dim(X)}$. C'est un e.v. gradué de dimension finie sur $\mathbb{C}$, muni de la *filtration de Hodge* $\mathcal{F}_{\mathrm{Hg}}$ définie comme la $\mathbb{Z}$-filtration d'aboutissement de la suite spectrale d'hypercohomologie.

On sait aussi comparer ces théories cohomologiques :

- Le théorème de De Rham (intégration sur les cycles) fournit un isomorphisme "de périodes" $H^*_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathrm{dR}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$.

– Le lemme de Poincaré (le complexe de de Rham holomorphe est une résolution du faisceau constant) et le principe GAGA montrent que $H^*_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\otimes\mathbb{C}\simeq H^*_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C})$.

On associe ainsi à X un objet (gradué) $(H^*_{\mathrm{sing}},\mathcal{F}_{Hg})$ de $\mathrm{Fil}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}})$. Remarquons que $H^*_{\mathrm{sing}}\otimes\mathbb{C}$ est naturellement muni d'une action ($\mathbb{C}$-semi-lineaire et $\mathbb{R}$-linéaire) de la conjugaison complexe. La théorie de Hodge nous dit alors que la filtration de Hodge sur H^n_{sing} est *n-opposée* à sa conjuguée complexe. Ceci signifie que pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on a $\mathcal{F}^k_{Hg}H^n_{\mathrm{dR}}\oplus\overline{\mathcal{F}^{n-k+1}_{Hg}H^n_{\mathrm{dR}}}=H^n_{\mathrm{dR}}$.

La donnée d'une telle filtration est un avatar de la notion de "structure de Hodge pure de poids n". Plus précisément,

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et n un entier positif. Il revient au même de se donner une des trois structures suivantes :

1. une $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F}$ sur $V_{\mathbb{C}}$ qui soit n-opposée à sa conjuguée complexe.
2. une décomposition $V_{\mathbb{C}}=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}V^{p,n-p}_{\mathbb{C}}$ telle que $V^{p,n-p}_{\mathbb{C}}=\overline{V^{n-p,p}_{\mathbb{C}}}$ pour tout p.
3. une action algébrique de $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$ sur V dont la restriction à $\mathbb{G}_m$ est de poids n.

Une telle structure s'appelle "structure de Hodge pure de poids n".

On passe de 1 à 2 par les formules $\mathcal{F}^kV_{\mathbb{C}}=\bigoplus_{k\geqslant p}V^{p,n-p}_{\mathbb{C}}$ et $V^{p,n-p}_{\mathbb{C}}=\mathcal{F}^pV_{\mathbb{C}}\cap\overline{\mathcal{F}^{n-p}V_{\mathbb{C}}}$. Le passage de 2 à 3 est tautologique si l'on sait ce qu'est la restriction des scalaires. On voit bien sur 3 que les structures de Hodge pures de poids n forment une catégorie abélienne. En fait cela découle aussi de :

Proposition 2. *Soit $(V,\mathcal{F})$ un objet de $\mathrm{Fil}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}})$ dont la filtration est supportée par $\mathbb{Z}$. Alors c'est une SHP de pds n si et seulement si $(V,\mathcal{F})$ est un objet semi-stable de pente $n/2$.*

Démonstration. Soit W un sous-objet de V. Comme pour toute $\mathbb{Z}$-filtration, le degré de W est aussi donné par la formule

$$\deg(W_{\mathbb{C}},\mathcal{F})=p_0\dim(W)+\sum_{p_0<p<n-p_0+1}\dim(\mathcal{F}^pW_{\mathbb{C}})$$

pour n'importe quel p_0 tel que $\mathcal{F}^{p_0}V_{\mathbb{C}}=V_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{F}^{n-p_0+1}V_{\mathbb{C}}=0$. Comme $W_{\mathbb{C}}$ est stable par conjugaison complexe, on a $\dim(\mathcal{F}^pW_{\mathbb{C}})=\dim(\overline{\mathcal{F}^pV_{\mathbb{C}}}\cap W_{\mathbb{C}})$.

Supposons d'abord que $(V,\mathcal{F})$ est une SH pure de poids n. Alors puisque $\mathcal{F}$ est n-opposée à sa conjuguée, l'égalité précédente implique $\dim(\mathcal{F}^pW_{\mathbb{C}})\leqslant(\dim(W)-\dim(\mathcal{F}^{n-p+1}W_{\mathbb{C}}))$ pour tout p, avec égalité lorsque $W=V$. On en déduit l'inégalité

$$\begin{aligned}\deg(W) &= p_0\dim(W)+\frac{1}{2}\left(\sum_{p_0<p<n-p_0+1}(\dim(\mathcal{F}^pW)+\dim(\mathcal{F}^{n-p+1}W_{\mathbb{C}}))\right)\\ &\leqslant p_0\dim(W)+\frac{1}{2}(n-2p_0)\dim(W)=\frac{n}{2}\dim(W)\end{aligned}$$

qui est une égalité si $W=V$. Ceci montre que $(V,\mathcal{F})$ est semi-stable de pente $n/2$.

Réciproquement, supposons $(V,\mathcal{F})$ semi-stable de pente $n/2$. Fixons $p\in\mathbb{Z}$ et montrons d'abord que $\mathcal{F}^pV_{\mathbb{C}}\cap\overline{\mathcal{F}^{n-p+1}V_{\mathbb{C}}}=0$. En effet soit $D_{\mathbb{C}}$ une droite complexe dans cette intersection. Il y a deux cas. Si $D_{\mathbb{C}}=\overline{D_{\mathbb{C}}}$ cette droite provient d'une droite réelle $D\subset V$. On a alors $\deg(D)\geqslant p$ et par conjugaison on a aussi $\deg(D)\geqslant n-p+1$, ce qui conjointement donne $\mu(D)=\deg(D)\geqslant\frac{n+1}{2}$, contredisant l'hypothèse sur $(V,\mathcal{F})$. Dans le deuxième cas, on

a $D \neq \overline{D}$. Alors la somme $D \oplus \overline{D}$ provient d'un plan réel W de V. Cette fois on voit que $\deg(W) \geqslant p + (n-p+1)$ donc $\mu(W) > n/2$, contredisant aussi l'hypothèse sur $(V, \mathcal{F})$.

Il reste encore à montrer que $\mathcal{F}^p V_{\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathcal{F}^{n-p+1} V_{\mathbb{C}}} = V_{\mathbb{C}}$, ce qui maintenant équivaut à l'égalité $\dim(\mathcal{F}^p V_{\mathbb{C}}) + \dim(\mathcal{F}^{n-p+1} V_{\mathbb{C}}) = n$, sachant que l'on vient de montrer l'inégalité $\dim(\mathcal{F}^p V_{\mathbb{C}}) + \dim(\mathcal{F}^{n-p+1} V_{\mathbb{C}}) \leqslant n$. Or si l'on insère ces inégalités (p variant) dans la formule du degré ci-dessus appliquée à V, on voit que pour obtenir $\mu(V) = n/2$ aucune de ces inégalité ne peut être stricte. $\square$

Lorsque X n'est plus supposée propre et lisse, la filtration de Hodge sur la cohomologie de de Rham n'est plus opposée à sa conjuguée complexe. Cependant Deligne a muni la cohomologie singulière d'une filtration fonctorielle WH^*_{sing} "par les poids" telle que sur chaque $(gr^W_n H^*_{\text{sing}})_{\mathbb{C}}$ la filtration induite par la filtration de Hodge soit n-opposée à celle induite par sa conjuguée complexe. Une telle donnée est appelée *structure de Hodge mixte*.

Si l'on définit le degré d'un objet $((V, W), \mathcal{F})$ de $\text{Fil}_{\mathbb{C}}(\text{Filvec}_{\mathbb{R}})$ comme la somme $\deg(V_{\mathbb{C}}, \mathcal{F}) + \frac{1}{2}\deg(V, W)$, on peut montrer comme ci-dessus qu'une SHM n'est autre qu'un objet semi-stable de pente nulle dans cette catégorie. Cela montre d'une nouvelle manière que les SHM forment une catégorie abélienne, et même Tannakienne, selon un résultat que l'on verra plus tard.

Ce lien entre Struc. de Hodge et filtrations semi-stables permettra une approche uniforme entre espaces de périodes "classiques" de Griffith en géométrie complexe et espaces de périodes p-adiques.

3.2 Variétés p-adiques

Soit maintenant X une variété algébrique propre et lisse sur une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$. On dispose alors de deux théories cohomologiques :

- La cohomologie étale p-adique $H^*_{\text{et}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$. C'est un $\mathbb{Q}_p$-ev gradué muni d'une action de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$.
- La cohomologie de de Rham algébrique $H^*_{\text{dR}}(X, K)$. C'est un K-e.v. gradué muni de la filtration de Hodge.

La théorie de Fontaine, Messing, Faltings, Kato, Tsuji etc. permet de comparer ces deux cohomologies, d'une manière analogue au théorème classique de de Rham, mais beaucoup plus compliquée. Regardons cela dans le cas où la variété X a bonne réduction, *i.e.* admet un modèle lisse $\mathcal{X}$ sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$. Notons $K_0 = W(k)_{\mathbb{Q}}$ le sous-corps absolument non ramifié maximal de K. Dans ce cas on dispose en plus de

- La cohomologie cristalline $H^*_{\text{cris}}(\mathcal{X}_k/K_0)$ qui est un K_0-ev muni d'un "Frobenius", *i.e.* un endomorphisme σ-linéaire bijectif φ,

ainsi que d'un isomorphisme de comparaison $H^*_{\text{cris}}(\mathcal{X}_k/K_0) \otimes K \xrightarrow{\sim} H^*_{\text{dR}}(X, K)$.

Les K_0-ev munis d'un Frobenius sont appelés *φ-modules filtrés* par Fontaine et *k-isocristaux* par Grothendieck. Ils forment une catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire tannakienne notée $\text{Isoc}(k)$. On leur associe aussi un *degré* défini comme la valuation du déterminant de φ.

Ainsi, à X supposée de bonne réduction on associe un objet $(H^*_{\text{cris}}(\mathcal{X}_k/K_0), \mathcal{F}_{Hg})$ dans $\text{Fil}_K(\text{Isoc}(k))$. Si l'on définit le degré d'un tel objet comme la somme du degré de la filtration et du degré de l'isocristal, alors on sait que l'objet $(H^*_{\text{cris}}(\mathcal{X}_k/K_0), \mathcal{F}_{Hg})$ est semi-stable de pente nulle, ou encore *faiblement admissible*.

Pour comparer cohomologies cristalline et étale, Fontaine a introduit un corps de "périodes cristallines" B_{cris} qui est aussi un K_0-ev muni d'un Frobenius et tel que son changement de base à K soit muni d'une filtration. Le théorème de comparaison prend alors la forme

d'un isomorphisme $H^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/K_0) \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}} \simeq H^*_{\mathrm{et}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}}$ compatible à toutes les structures en jeu (Galois, Frobenius, filtration).

Remarque. Ceci se généralise au cas où X a réduction semi-stable, en remplaçant la cohomologie cristalline par la cohomologie "log-cristalline". En général il n'y a pas d'analogue de la cohomologie cristalline, mais le théorème de comparaison "de Rham" plus le théorème "de Rham = potentiellement semi-stable" permettent de munir la cohomologie de de Rham d'une K_0-structure avec Frobenius. Celle-ci encore doit être semi-stable de pente nulle dans un certain sens.

Le corps B_{cris} permet aussi de passer directement de H^*_{cris} à H^*_{et}. En fait il fournit une équivalence de catégories tannakiennes entre la catégorie des représentations p-adiques "cristallines" de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et la catégorie des objets semistables de pente nulle de $\mathrm{Fil}_K(\mathrm{Isoc}(k))$. Par exemple on passe d'un isocristal filtré $(D, \mathcal{F})$ à sa représentation Galoisienne par la formule $V_{\mathrm{cris}}(D) = \mathcal{F}^0(D \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}})^{\varphi=1}$.

Ceci est une des motivations principales pour étudier les espaces de périodes p-adiques. En effet comme on le verra, un espace de période classifie les filtrations admissibles (de "type" fixé) d'un isocristal fixé. Par ce qui vient d'être brièvement exposé, on peut s'attendre à ce qu'il soit muni d'un faisceau étale p-adique lisse, dont la fibre en un point soit la représentation p-adique associée via le foncteur de Fontaine à l'isocristal correspondant à ce point.