1 Filtration de Harder-Narasimhan

Ici V est un e.v. de dimension n sur un corps k et K est une extension de k.

Proposition 1. *Tout objet $V = (V, \mathcal{F}_V)$ de* $\mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)$ *admet une unique filtration (dans cette catégorie) $({}^{\alpha}V)_{\alpha\in\mathbb{Q}}$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, l'objet $gr^{\alpha}(V)$ est semi-stable de pente α. De plus, cette filtration est* fonctorielle *en $(V, \mathcal{F}_V)$,* i.e. *tout morphisme $f : (V, \mathcal{F}_V) \longrightarrow (W, \mathcal{F}_W)$ envoie ${}^{\alpha}V$ dans ${}^{\alpha}W$.*

Démonstration. Démontrons l'existence d'une telle filtration par récurrence sur la dimension de V. Remarquons d'abord que l'ensemble des nombres rationels α qui sont la pente d'un sous-objet de V est fini, vue la formule qui définit le degré. On peut donc considérer son maximum, disons $\alpha_{\max}$. N'importe quel sous-objet de pente $\alpha_{\max}$ est alors trivialement semi-stable. Vérifions l'existence d'un unique tel sous-objet *maximal* ${}^{\alpha_{\max}}V$. Il suffit pour cela de voir que si U, W sont de pente $\alpha_{\max}$ alors leur somme $U + W$ aussi. Considérons le morphisme somme $U \oplus W \xrightarrow{f} V$. On sait que $U \oplus W$ est semi-stable de pente $\alpha_{\max}$, donc $\mu(coim\ f) \geqslant \alpha_{\max}$. Il s'ensuit que $\mu(U + W) = \mu(im\ f) \geqslant \alpha_{\max}$ et par conséquent $\mu(U + W) = \alpha_{\max}$. Maintenant, V est semi-stable si et seulement si $V = {}^{\alpha_{\max}}V$ et dans ce cas l'existence de la filtration est triviale. Dans le cas contraire, on pose $V' := V/{}^{\alpha_{\max}}V$. Montrons que sa pente maximale vérifie $\alpha'_{\max} < \alpha_{\max}$. En effet tout sous-objet W' de V' est de la forme $W/{}^{\alpha_{\max}}V$ pour un sous-objet W de V, de sorte que, puisque $\mu(W) < \mu({}^{\alpha_{\max}}V) = \alpha_{\max}$, on a par l'inégalité de convexité $\mu(W) > \mu(W')$ et donc $\mu(W') < \alpha_{\max}$. Il ne reste plus qu'à remonter la filtration déjà connue sur V' par hypothèse de récurrence à V.

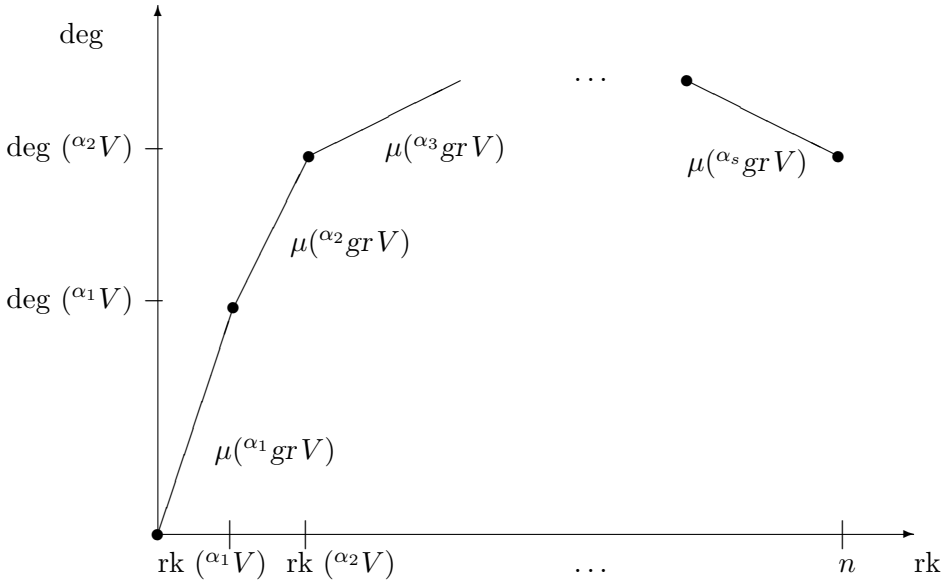
Montrons maintenant que cette filtration est fonctorielle. L'unicité en résultera. Soit donc $f : V \longrightarrow W$ un morphisme dans $\mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)$, et $({}^{\alpha}V)_{\alpha\in\mathbb{Q}}$, $({}^{\alpha}W)_{\alpha\in\mathbb{Q}}$ deux filtrations comme dans l'énoncé. Supposons que f n'est pas compatible à ces filtrations et soit α_0 un rationnel tel que $f({}^{\alpha_0}V)$ ne soit pas inclus dans ${}^{\alpha_0}W$. Alors l'ensemble $\{\beta \in \mathbb{Q},\ f({}^{\alpha_0}V) \subset {}^{\beta}W\}$ a un plus grand élément β_0, qui est un saut de ${}^{\bullet}W$, et f induit un morphisme non nul ${}^{\alpha_0}V \xrightarrow{\neq 0} gr^{\beta_0} W$. Maintenant l'ensemble $\{\alpha \geqslant \alpha_0, \text{t.q.} {}^{\alpha}V \xrightarrow{\neq 0} gr^{\beta_0} W\}$ a aussi un plus grand élément α_1 qui est un saut pour ${}^{\bullet}V$. Ainsi f induit un morphisme non nul $gr^{\alpha_1} V \longrightarrow gr^{\beta_0} W$, ce qui d'après la proposition 1 est impossible puisqu'ils sont semisimples de pentes respectives $\alpha_1 > \beta_0$. □

Remarque. La construction de la filtration montre que $gr^{\alpha} V$ s'identifie au plus grand sous-objet de pente maximale de $V/{}^{\alpha+}V$.

La filtration de Harder-Narsimhan permet d'associer à $V \in \mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)$ un élément de l'ensemble $(\mathbb{Q}^n)_+ = \{(x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n) \in \mathbb{Q}^n\}$ appelé son *HN-vecteur* $\mathrm{HN}(V, \mathcal{F})$ (c'est donc le "type" de la filtration de HN). Si $\{\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_s\}$ est l'ensemble des sauts de la filtration de Harder-Narasimhan de V, avec multiplicités $m_i = \dim\ gr^{\alpha_i}(V)$, alors

$$\mathrm{HN}(V) = (\alpha_1^{(m_1)}, \alpha_2^{(m_2)}, \ldots, \alpha_s^{(m_s)}) \in (\mathbb{Q}^n)_+.$$

Ici l'exposant (m_i) indique que le nombre correspondant est répété m_i fois. On représente habituellement le HN-vecteur par son *HN-polygone* :



Proposition 2. *Soit V' un sous-object de $V \in \mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)$. Le point $p(V') = (\mathrm{rk}V', \deg V')$ est sous le HN-polygone de V.*

Démonstration. Par récurrence sur la longueur de la filtration de Harder-Narasimhan de V. La récurrence commence pour V semi-stable, où l'assertion découle de la définition de semi-stabilité. Soit α_1 la plus grande pente d'un sous-objet de V, de sorte que $^{\alpha_1}V$ est le dernier pas non nul de la filtration.

Si $V' \subseteq {}^{\alpha_1}V$, l'assertion découle de la semi-stabilité de $^{\alpha_1}V$. Supposons donc le contraire, de sorte qu'en particulier on a $\mu(V') < \alpha_1$.

Si $V' \supseteq {}^{\alpha_1}V$ alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-objet $V'/{}^{\alpha_1}V$ de $V/{}^{\alpha_1}V$ en remarquant que le HN-polygone de V est la concaténation de celui de $^{\alpha_1}V$ avec celui de $V/{}^{\alpha_1}V$, tandis que le point $p(V')$ est l'extrémité de la ligne brisée passant par l'origine, le point $p(^{\alpha_1}V)$ et le point $p(^{\alpha_1}V) + p(V'/{}^{\alpha_1}V)$.

Supposons donc que V' ne contient pas $^{\alpha_1}V$ et posons $V'' = V' + {}^{\alpha_1}V$. On a

$$\deg V'' \geqslant \deg V' + \deg {}^{\alpha_1}V - \deg(V' \cap {}^{\alpha_1}V),$$

comme on le voit en appliquant l'inégalité $\mu(coim\ f) \leqslant \mu(im\ f)$ au morphisme somme $V' \oplus {}^{\alpha_1}V \xrightarrow{f} V$. De plus on sait que $\mu(V') < \alpha_1$ et $\mu(V' \cap {}^{\alpha_1}V) \leqslant \alpha_1$. On en déduit alors que $\mu(V'') > \mu(V')$. Il s'ensuit que le point $p(V')$ est sous le segment $[0, p(V'')]$ et par conséquent sous le HN-polygone de V puisqu'on a déjà vu que le point $p(V'')$ est sous le HN-polygone de V. □

Remarque. Plus généralement, si $V_\bullet : 0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_l = V$ est un drapeau de V dans $\mathrm{Fil}_K(\mathrm{Vec}_k)$, alors le polygone passant par l'origine et les points $p(V_i), i = 1, \cdots, l$ est sous le HN-polygone de V, avec les mêmes extrémités. De plus, d'après la remarque précédente, si ce polygone coïncide avec le HN-polygone alors $V_\bullet$ est le drapeau de la filtration de Harder-Narasimhan.

2 Stratification de Harder-Narasimhan

Ici, V est toujours un e.v. de dimension n sur un corps k. On munit $(\mathbb{Q}^n)_+$ de l'ordre de *dominance* défini par $(x_1,\dots,x_n) \leqslant (x'_1,\dots,x'_n)$ si et seulement si pour tout $r = 1,\cdots,n$ on a $\sum_{i=1}^r x_i \leqslant \sum_{i=1}^r x'_i$ avec égalité pour $r = n$. Ces inégalités reviennent à demander que le polygône convexe associé à $(x_1,\dots,x_n)$ soit au-dessous de celui associé à $(x'_1,\dots,x'_n)$ avec mêmes extrémités.

Théorème 1. *Supposons le corps k fini. Soit X un k-schéma de type fini et $\mathcal{F}$ une filtration sur $V\otimes_k\mathcal{O}_X$. L'application de X dans $(\mathbb{Q}^n)_+$ qui à x associe le HN-vecteur (ou le HN-polygone) de $(V,\mathcal{F}_x)$ est semi-continue supérieurement.*

On a donc une stratification localement fermée $X = \bigsqcup_{H\in(\mathbb{Q}^n)_+} X_H$ selon le type de la filtration de Harder-Narasimhan. Bien-sûr seul un sous-ensemble fini de $(\mathbb{Q}^n)_+$ contribue. Un élément minimal de cet ensemble correspond à un ouvert du lieu semi-stable. Lorsque X est connexe, il n'y a qu'un seul élément minimal.

Démonstration. Soit $H \in (\mathbb{Q}^n)_+$. Par définition de la filtration de HN et par la proposition 2, on a $\mathrm{HN}(V,\mathcal{F}_x) \leqslant H$ si et seulement si pour tout k-sev W de V le point $(\mathrm{rk}(W),\deg(W,\mathcal{F}_x))$ est sous le polygone associé à H.

En d'autres termes, si $f_H : [0,\mathrm{rk}(V)] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction dont le graphe est le HN-polygone de H, on a :

$$\mathrm{HN}(V,\mathcal{F}_x) \leqslant H \text{ si et seulement si } (\forall W \subset V, \deg(W,\mathcal{F}_x) \leqslant f_H(\mathrm{rk}(W))).$$

Pour W fixé, on a déjà vu que la fonction $x \mapsto \deg(V,\mathcal{F}_x)$ est semi-continue supérieurement, donc le lieu des points x tels que $\deg(W,\mathcal{F}_x) > f_H(\mathrm{rk}(W)))$ est fermé. Comme il n'y a qu'un nombre fini de sev W de V, on en déduit que le lieu des x tels que $\mathrm{HN}(V,\mathcal{F}_x) \leqslant H$ est ouvert. □

Remarque. Cette stratification n'a pas les jolies propriétés que l'on pourrait espérer. Par exemple l'inclusion $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_H} \subseteq \bigcup_{H'\geqslant H} \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{H'}$ peut être stricte. Pire, l'adhérence d'une strate n'est pas nécessairement une union de strates. Il peut aussi arriver que $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{H'} \cap \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_H} = \emptyset$ pour $H' > H$.

Dorénavant, on se concentrera sur le cas "universel" $X = \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)$ pour un type de filtration $\nu = (\nu(1)^{(m_1)},\cdots,\nu(r)^{(m_r)}) \in (\mathbb{Q}^n)_+$ sur V fixé. Rappelons que les filtrations de type ν sont toutes de degré $|\nu| = \sum_{j=1}^r m_j\nu(j)$.

Nous allons raffiner la stratification précédente en utilisant uin invariant plus fin que le HN-vecteur, mais auparavant nous devons rappeler un peu de théorie de Schubert classique. Soit $V_\bullet : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_l = V$ un drapeau de V. On note $n_\bullet = (n_1,\cdots,n_r)$ sa "dimension", *i.e.* $n_i = \dim gr_i(V_\bullet)$, qui est une *partition* de n. Une filtration $\mathcal{F}$ sur V_K induit sur chaque $gr_i(V_\bullet)_K$ une filtration $\mathcal{F}_i$. Si $\mathcal{F}$ est de type ν alors la collection $\nu_\bullet = (\nu_1,\cdots,\nu_l) \in (\mathbb{Q}^{n_\bullet})_+ := \prod_{i=1}^l (\mathbb{Q}^{n_i})_+$ des types ν_i des $\mathcal{F}_i$ forme une "$n_\bullet$-partition" de ν. Ceci signifie que, si l'on écrit chaque ν_i sous la forme $(\nu(1)^{(m_{i1})},\cdots,\nu(r)^{(m_{ir})}) \in (\mathbb{Q}^{n_i})_+$, on a pour chaque $j = 1,\cdots r$ l'égalité $\sum_{i=1}^l m_{ij} = m_j$.

Remarquons que l'ensemble des $n_\bullet$-partitions de ν est fini. On le munit de l'ordre partiel défini par

$$\nu'_\bullet \preceq \nu_\bullet \Longleftrightarrow (\forall j = 1,\cdots,r, \forall i = 1,\cdots,l,\ \sum_{j'\leqslant j}\sum_{i'\leqslant i} m'_{i'j'} \geqslant \sum_{j'\leqslant j}\sum_{i'\leqslant i} m_{i'j'}).$$

Puis on note $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$ le lieu des points $x \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(V, \nu)$ tels que la filtration $\mathcal{F}_x$ induise sur chaque $gr_i(V_\bullet)_{\kappa(x)}$ une filtration de type ν_i.

Lemme 1. *Comme ci-dessus, on fixe un drapeau $V_\bullet$ de dimension $n_\bullet$.*

1. *L'application $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V, \nu) \longrightarrow \{n_\bullet\text{-partitions de } \nu\}$ qui à x associe le type de la filtration induite par $\mathcal{F}_x$ sur $gr(V_\bullet)$ est semi-continue supérieurement. En particulier, pour toute $n_\bullet$-partition $\nu_\bullet \in (\mathbb{Q}^{n_\bullet})_+$ de ν, le lieu $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$ est localement fermé et on a*

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)} \subseteq \bigsqcup_{\nu'_\bullet \preceq \nu_\bullet} \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu'_\bullet).$$

2. *Munissons $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$ de la structure de sous-schéma réduit. Alors $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$ est un espace homogène sous le stabilisateur $P(V_\bullet)$ de $V_\bullet$ dans $GL(V)$ et le morphisme naturel*

$$\pi : \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet) \longrightarrow \prod_{i=1}^{l} \boldsymbol{\mathcal{F}}(gr_i(V_\bullet), \nu_i)$$

est un fibré vectoriel de rang $\frac{1}{2}\sum_{i \neq i'} \sum_{j \neq j'} m_{ij} m_{i'j'}$.

Démonstration. On a déja vu que les fonctions $x \mapsto \dim(\mathcal{F}_x^{\nu(j)} V_{i,\kappa(x)})$ pour $i = 1, \cdots, l$ et $j = 1, \cdots, r$ sont semi-continues supérieurement. Or, si $x \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$ on a $\dim(\mathcal{F}_x^{\nu(j)} V_{i,\kappa(x)}) = \sum_{j' \leqslant j} \sum_{i' \leqslant i} m_{i'j'}$. Ceci prouve le point 1.

Pour l'homogénéité du point 2, soient x et y deux K-points de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$. Choisissons des K-décompositions $V_K = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant l,\, 1 \leqslant j \leqslant r} V^x_{i,j}$ et $V_K = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant l,\, 1 \leqslant j \leqslant r} V^y_{i,j}$ telles que $V_{i,K} = \bigoplus_{i' \leqslant i,\, j'} V^x_{i',j'} = \bigoplus_{i' \leqslant i,\, j'} V^y_{i',j'}$ et $\mathcal{F}_x^{\nu(j)} V_K = \bigoplus_{i',\, j' \leqslant j} V^x_{i',j'}$ et $\mathcal{F}_y^{\nu(j)} V_K = \bigoplus_{i',\, j' \leqslant j} V^y_{i',j'}$. Alors on peut trouver $g \in GL(V)(K)$ tel que pour tous i, j, on ait $g(V^x_{i,j}) \subseteq V^y_{i,j}$. On a alors $g(x) = y$ et $g(V_i) = V_i$ pour tout i, *i.e* $g \in P(V_\bullet)(K)$.

Pour étudier la réduction π, on se ramène par récurrence et dévissage au cas où $l = 2$, *i.e.* $V_\bullet = 0 \subset V_1 \subset V_2 = V$. Dans ce cas, simplifions les notations : posons $\boldsymbol{\mathcal{F}} := \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$, $\boldsymbol{\mathcal{F}}_1 := \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_1, \nu_1)$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}_2 := \boldsymbol{\mathcal{F}}(V/V_1, \nu_2)$ et notons $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les filtrations universelles respectives. Soit U un ouvert de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_1 \times \boldsymbol{\mathcal{F}}_2$. À toute $\mathcal{O}_U$-section ι de la projection $V \otimes \mathcal{O}_U \longrightarrow (V/V_1) \otimes \mathcal{O}_U$ on associe la filtration $\mathcal{F}_1 \oplus \iota(\mathcal{F}_2)$ sur $V \otimes \mathcal{O}_U$, ce qui définit une section de la projection $\pi^{-1}(U) \longrightarrow U$. Deux section ι et ι' comme ci-dessus définissent la même filtration (et donc la même section de $\pi^{-1}(U) \longrightarrow U$) si et seulement si la différence $\iota - \iota' \in Hom((V/V_1) \otimes \mathcal{O}_U, V_1 \otimes \mathcal{O}_U)$ respecte les filtrations $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Enfin toute filtration $\mathcal{F}$ sur U est localement de la forme $\mathcal{F}_1 \oplus \iota(\mathcal{F}_2)$. On en déduit que le faisceau des sections de π est principal homogène sous le fibré vectoriel

$$Hom((V/V_1) \otimes \mathcal{O}_U, V_1 \otimes \mathcal{O}_U) / Hom_{\text{filt}}((V/V_1) \otimes \mathcal{O}_U, V_1 \otimes \mathcal{O}_U).$$

Le rang se calcule de manière élémentaire.

□

Remarque. Le sous-schéma $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$ est appelé "cellule de Bruhat" ou "cellule de Schubert", et son adhérence $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)}$ est une "variété de Schubert". Voici une manière plus habituelle de regarder cette décomposition de Bruhat, et qui se généralise à un groupe réductif quelconque.

Choisissons une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V, de sorte que $GL(V)$ s'indentifie à GL_n, et de sorte que pour $i = 1, \cdots, l$, on a $V_i = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{n_1+n_2+\cdots+n_i})$. Ainsi le groupe $P_{V_\bullet}$

s'identifie au groupe des matrices triangulaires sup par blocs de tailles $n_1, n_2, \cdots, n_l$ (un sous-groupe parabolique). Notons $\mathcal{F}_0$ la filtration de type ν sur V définie par $\mathcal{F}_0^{\nu(j)}V = \mathrm{Vec}(e_1, \cdots, e_{m_1+m_2+\cdots+m_j})$. Elle définit un k-point x_0 de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)$ dont le stabilisateur Q_ν dans $GL(V)$ s'identifie au groupe des matrices triangulaires sup par blocs de tailles $m_1, n_2, \cdots, m_r$. L'action de $GL(V)$ induit alors un isomorphisme $GL_n/Q_\nu \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)$.

Soit $w_{\nu_\bullet} \in \mathfrak{S}_n$ la permutation "de longueur minimale" *rappeler ce que c'est* telle que $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r) = w(\nu)$, faisant agir ici $\mathfrak{S}_n$ par permutations sur $\mathbb{Q}^n$. Notons encore w la matrice permutation de taille $n \times n$ qui lui est associée. Alors $w.x_0 \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet) = P_{V_\bullet} w.x_0$, ou encore

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet) = P_{V_\bullet} w_{\nu_\bullet} Q_\nu / Q_\nu.$$

On peut alors vérifier que le degré du fibré vectoriel du point 2 est la longueur $l(w_{\nu_\bullet})$ de $w_{\nu_\bullet}$.

On peut enfin remarquer que l'on a une bijection $\nu_\bullet \longleftrightarrow w$ entre l'ensemble des $n_\bullet$-partitions de ν et l'ensemble $(\prod_i \mathfrak{S}_{n_i})\backslash\mathfrak{S}_n/(\prod_j \mathfrak{S}_{m_j})$. L'ordre que l'on a défini sur les $n_\bullet$ partition est induit par l'ordre de Bruhat sur $\mathfrak{S}_n$.

Remarque. La stratification de Bruhat a de bonnes propriétés. Par homogénéité, on voit que l'adhérence s'une strate est une union de strates. En fait, on peut montrer que l'inclusion $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)} \subseteq \bigsqcup_{\nu'_\bullet \preceq \nu_\bullet} \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu'_\bullet)$ est une égalité, c'est-à-dire que $\nu'_\bullet \preceq \nu_\bullet \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu'_\bullet) \subseteq \overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)}$. On procède en deux étapes :

i) : tout d'abord on traite le cas où $\nu_\bullet$ et $\nu'_\bullet$ sont "adjacentes", c'est-à-dire qu'il existe (i_1, j_1) et (i_2, j_2) avec $i_1 < i_2$ et $j_1 < j_2$ tels que

$$m'_{ij} - m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (i_1, j_1) \text{ ou } (i,j) = (i_2, j_2) \\ -1 \text{ si } (i,j) = (i_1, j_2) \text{ ou } (i,j) = (i_2, j_1) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas, soit x_0 un point de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu'_\bullet)$ de corps résiduel κ. On commence par choisir une décomposition $V_\kappa = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant l,\, 1 \leqslant j \leqslant r} V_i^j$ telle que $V_{i,\kappa} = \bigoplus_{i' \leqslant i,\, j'} V_{i'}^{j'}$ et $\mathcal{F}_{x_0}^{\nu(j)} V_\kappa = \bigoplus_{i',\, j' \leqslant j} V_{i'}^{j'}$. Comme $m'_{i_1 j_1} > 0$ et $m'_{i_2 j_2} > 0$ on peut choisir deux décompositions $V_{i_1}^{j_1} = W_{i_1}^{j_1} \oplus \kappa.v_{i_1}^{j_1}$ et $V_{i_2}^{j_2} = W_{i_2}^{j_2} \oplus \kappa.v_{i_2}^{j_2}$. Enfin on définit une $\mathbb{A}^1_\kappa$-famille de filtrations de type ν par

$$\mathcal{F}_{x_t}^{\nu(j)} := \begin{cases} \mathcal{F}_{x_0}^{\nu(j)} \text{ si } j < j_1 \\ (\bigoplus_{i',\, j' \leqslant j,\, j' \neq j_1} V_{i'}^{j'}) \oplus W_{i_1}^{j_1} \oplus \kappa.(v_{i_1}^{j_1} + t v_{i_2}^{j_2}) \text{ si } j_1 \leqslant j < j_2 \\ \mathcal{F}_{x_0}^{\nu(j)} \text{ si } j > j_2 \end{cases}$$

puis on vérifie que pour $t \neq 0$, x_t est dans $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet)$.

ii) : on ramène le cas général au cas adjacent en montrant que l'on peut trouver une suite $\nu_\bullet = \nu_\bullet^1 \preceq \nu_\bullet^2 \preceq \cdots \preceq \nu_\bullet^s = \nu'_\bullet$ telle que $\nu_\bullet^k$ et $\nu_\bullet^{k+1}$ sont adjacentes pour tout $1 \leqslant k < s$.

Nous allons maintenant définir une stratification de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)$ qui raffine la stratification par le HN-vecteur.

Définition. Un *HN-type* est une partition $\nu_\bullet \in (\mathbb{Q}^{n_\bullet})_+$ de ν telle que $\frac{|\nu_1|}{n_1} > \frac{|\nu_2|}{n_2} > \cdots > \frac{|\nu_l|}{n_l}$. Son *HN-vecteur* $H_{\nu_\bullet}$ est l'élément $(|\nu_1|^{(n_1)}, \cdots, |\nu_l|^{(n_l)})$ de $(\mathbb{Q}^n)_+$. On note $\Gamma(V,\nu)$ l'ensemble des HN-types.

Si $\mathcal{F}$ est une filtration de V_K pour une extension K de k, la filtration de Harder-Narasimhan de $(V,\mathcal{F})$ détermine un drapeau $V_\bullet$, appelé "HN-drapeau" de $(V,\mathcal{F})$. Soit $\nu_\bullet$ le type de la filtration induite par $\mathcal{F}$ sur $gr(V_\bullet)$. Comme $\frac{|\nu_i|}{n_i} = \mu(gr_i(V_\bullet),\mathcal{F})$, on voit que $\nu_\bullet$ est un HN-type, appelé "le HN-type de $(V,\mathcal{F})$". Notons que la filtration de Harder Narasimhan de $(V,\mathcal{F})$ est entièrement déterminée par la donnée du HN-drapeau et du HN-vecteur (ou HN-polygone), donc *a fortiori* par la donnée du HN-drapeau et du HN-type. Par ailleurs, la donnée du HN-type détermine la "dimension" $n_\bullet$ du HN-drapeau.

Dans la suite on notera

- $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet}$ le lieu des points x de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)$ tels que le HN-type de $(V,\mathcal{F}_x)$ soit $\nu_\bullet$. Il est contenu dans $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{H_{\nu_\bullet}}$ et stable sous l'action du groupe fini $GL(V)(k)$.
- $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet,V_\bullet}$ le lieu des points x de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)$ tels que le HN-type de $(V,\mathcal{F}_x)$ soit $\nu_\bullet$ et le HN-drapeau de $(V,\mathcal{F}_x)$ soit $V_\bullet$. C'est un sous-ensemble de la cellule de Bruhat $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet,\nu_\bullet)$ stable sous l'action du groupe fini $P(V_\bullet)(k)$, stabilisateur du drapeau $V_\bullet$ dans $GL(V)(k)$ et on a une bijection

$$GL(V)(k) \times^{P(V_\bullet)(k)} \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet,V_\bullet} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet}. \tag{1}$$

Théorème 2. *Soit $\nu_\bullet \in (\mathbb{Q}^{n_\bullet})_+$ un HN-type pour (V,ν) et $V_\bullet$ un drapeau de V de dimension $n_\bullet$.*

1. *L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet,V_\bullet}$ est l'image réciproque de $\prod_{i=1}^l \boldsymbol{\mathcal{F}}(gr_i(V_\bullet),\nu_i)^{\mathrm{ss}}$ par le morphisme de réduction $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet,\nu_\bullet) \longrightarrow \prod_{i=1}^l \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_i(V_\bullet),\nu_i)$. Il est donc localement fermé.*
2. *On a $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet,V_\bullet} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet} \cap \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet,\nu_\bullet) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{H_{\nu_\bullet}} \cap \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet,\nu_\bullet)$.*
3. *On a $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet,V_\bullet}} \setminus \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet,V_\bullet} \subset \bigcup_{H>H_{\nu_\bullet}} \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_H$.*
4. *L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet}$ est ouvert et fermé dans $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{H_{\nu_\bullet}}$, et l'application (1) est un homéomorphisme.*

Dans la suite on munira $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet}$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet,V_\bullet}$ des structures de sous-schémas réduits localement fermés de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)$.

Démonstration. Le point 1 découle de la définition de la filtration de HN et de son unicité.

Prouvons le point 2. Les inclusions $\subseteq$ sont triviales, il nous reste donc à prouver l'inclusion $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{H_{\nu_\bullet}} \cap \boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet,\nu_\bullet) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_{\nu_\bullet,V_\bullet}$. Or si x est dans l'intersection, le HN-polygone de $(V,\mathcal{F}_x)$ coïncide avec le polygone associé à $V_\bullet$, donc $V_\bullet$ est le HN-drapeau de $(V,\mathcal{F}_x)$ d'après la remarque page 2.

Prouvons maintenant le point 3. Remarquons ici que si $\nu'_\bullet$ est une $n_\bullet$-partition de ν, alors pour tout point x de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet,\nu'_\bullet)$ le degré de $(V_i,\mathcal{F}_x)$ est donné par la formule

$$\deg(V_i,\mathcal{F}_x) = \sum_{i'\leqslant i} |\nu'_{i'}| = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i'\leqslant i} m'_{i'j}\nu(j) = \sum_{j=1}^{r-1} (\nu(j)-\nu(j+1)) \left(\sum_{j'\leqslant j} \sum_{i'\leqslant i} m'_{i'j'} \right) + \nu(r)(\sum_{i'\leqslant i} n_{i'}).$$

Ainsi, si $\nu'_\bullet \preceq \nu_\bullet$, on voit que le polygone associé à $V_\bullet$ (qui interpole les points $(\mathrm{rk}(V_i),\deg(V_i,\mathcal{F}_x))$) est au-dessus du polygone convexe associé à $H_{\nu_\bullet}$, et strictement au-dessus si $\nu'_\bullet \neq \nu_\bullet$. D'après la remarque page 2 on obtient dans ce dernier cas l'inclusion

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet,\nu'_\bullet) \subseteq \bigcup_{H>H_{\nu_\bullet}} \boldsymbol{\mathcal{F}}(V,\nu)_H,$$

et dans le cas $\nu'_\bullet = \nu_\bullet$, on obtient l'inclusion

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet) \setminus (\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet) \cap \boldsymbol{\mathcal{F}}(V, \nu)_{H_{\nu_\bullet}}) \subseteq \bigcup_{H > H_{\nu_\bullet}} \boldsymbol{\mathcal{F}}(V, \nu)_H.$$

Or le point 2 nous dit que $\boldsymbol{\mathcal{F}}(V_\bullet, \nu_\bullet) \cap \boldsymbol{\mathcal{F}}(V, \nu)_{H_{\nu_\bullet}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(V, \nu)_{\nu_\bullet, V_\bullet}$.

La deuxième partie du point 4 est évidente et la première découle du point 3.

□