

Cours fondamental de M2

Introduction à la théorie des Schémas

Jean-François Dat

2025-2026

Dans ce cours, on s'appuiera sur les contenus des cours “Variétés Algébriques” et “Co-homologie et faisceaux”. En particulier, on suppose une bonne familiarité avec les notions catégoriques de base (limites, colimites, foncteurs adjoints, etc.), avec la notion de faisceaux sur un espace topologique, et avec les constructions d'algèbre commutative de base (localisation et produits tensoriels inclus).

Voici quelques références :

[GW] Ulrich Görtz et Torsten Wedhorn, Algebraic Geometry I : Schemes, Springer

[SP] The Stack Project, <https://stacks.math.columbia.edu/>

[D] Antoine Ducros, <https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/Cours-schemas.pdf>

1 Schémas

1.1 Quelques limitations du langage des variétés

1.1.1 Problèmes sur k algébriquement clos : produits fibrés. Soit k un corps algébriquement clos. Les principes fondateurs du langage des variétés algébriques sont les suivants :

— Si $V \subset k^n$ est un sous-ensemble algébrique, on peut retrouver l'ensemble V à partir de son algèbre de fonctions polynomiales $\mathcal{O}(V)$, de deux manières :

i) $V \leftrightarrow \text{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathcal{O}(V), k)$ où on envoie v sur le morphisme d'évaluation ev_v en v .

ii) $V \leftrightarrow \text{Max}(\mathcal{O}(V))$ où on envoie v sur l'idéal maximal $\mathfrak{m}_v = \text{Ker } \text{ev}_v$

La première bijection marche (quasi)tautologiquement si k est un corps quelconque.

La seconde utilise le Nullstellensatz et l'hypothèse k algébriquement clos.

— Si $W \subset k^m$ est un autre sous-ensemble algébrique, alors l'application $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ est une bijection entre applications polynomiales $V \rightarrow W$ et morphismes de k -algèbres $\mathcal{O}(W) \rightarrow \mathcal{O}(V)$.

Ces principes déplacent le focus sur les algèbres du type $\mathcal{O}(V)$ qui sont toutes les k -algèbres de type fini *réduites*. À une telle algèbre A , on associe une “variété affine” $(V, \mathcal{O}_V)$ où $V = \text{Max}(A)$ muni de la topologie de Zariski, et $\mathcal{O}_V$ est un faisceau de fonctions à

valeurs dans k . Puis on peut définir une variété (sur k) comme un espace annelé localement isomorphe à une variété affine.

Par construction, la catégorie des variétés affines sur k est anti-équivalente à celle des k -algèbres de type fini. En particulier, on dispose de produits fibrés : étant donnés $V \rightarrow Z$ et $W \rightarrow Z$ deux morphismes de variétés, leur produit fibré $V \times_Z W$ est donné par la k -algèbre réduite $(\mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}(Z)} \mathcal{O}(W))_{\text{red}}$. Voici deux cas particuliers importants de cette construction :

- *Intersections* : si $V, W \subset Z$ sont deux sous-variétés affines fermées (concrètement, deux sous-ensembles algébriques), le produit fibré ci-dessus n'est autre que l'intersection $V \cap W$. Regardons l'exemple instructif suivant : $Z = \mathbb{A}^2$, V la parabole V_{Y-X^2} . Lorsque W est l'axe des ordonnées V_X ou celui des abscisses V_Y , l'intersection est évidemment la variété singleton $\{(0,0)\}$. Pourtant le calcul des produits tensoriels nous dit plus : d'un côté on a $\mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}(Z)} \mathcal{O}(V_X) = k$, de l'autre on a $\mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}(Z)} \mathcal{O}(V_Y) = k[X]/(X^2)$. On voit ici que la présence de nilpotents a une interprétation géométrique claire : le contact entre V et V_Y est "tangent", i.e. a une multiplicité, que le produit tensoriel voit, mais que l'algèbre réduite perd.
- *Fibres d'un morphisme* : Si $V \xrightarrow{\varphi} Z$ est un morphisme et $W = \{z\}$ est un point, le produit fibré n'est autre que la "fibre" $\varphi^{-1}(z)$ (au moins ensemblistement). Reprenons pour V la parabole $V_{Y-X^2} \subset \mathbb{A}^2$, notons Z l'axe des Y , i.e. $Z = V_X$, et considérons le morphisme de projection φ le long de V_Y . Alors pour tout $z = (0, y) \in Z$, on a $\mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}(Z)} \mathcal{O}(W) = k[X]/(X^2 - y)$, qui est toujours de dimension 2 sur k . Mais cette algèbre n'est réduite que si $z \neq (0,0)$ (la fibre $\varphi^{-1}(z)$ a alors cardinal 2) et non-réduite si $z = (0,0)$ (la fibre a cardinal 1). Dans ce cas, passer à l'algèbre réduite fait encore perdre de l'information et donne l'impression que la cardinalité des fibres "saute", alors que cela se corrige si on tient compte de la multiplicité, laquelle est visible avant réduction.

Dans les deux cas, on voit qu'on perd de l'information en se limitant aux algèbres réduites. On pourrait donc imaginer une théorie des variétés "avec nilpotents", où les k -variétés affines formeraient une catégorie anti-équivalente à celle des k -algèbres de type fini. Sur le modèle précédent, on souhaiterait donc associer à une telle algèbre A , un espace annelé $\text{Spm}(A) = (V, \mathcal{O}_V)$ avec $V = \text{Max}(A)$. Notons que V ne distingue pas A de A_{red} , et c'est le faisceau $\mathcal{O}_V$ qui doit le faire. Pour cela, ce faisceau ne peut plus être un faisceau de fonctions à valeurs dans k , mais un faisceau de k -algèbres "abstrait" dont les sections globales redonnent A . Par exemple, si $A = k[\varepsilon] = k[X]/(X^2)$ l'algèbre des "nombres duaux", V est un point et $\mathcal{O}_V(V) = A$. La construction du fibré tangent à l'aide des nombres duaux devient alors interne à la catégorie : le fibré tangent d'une variété (avec ou sans nilpotents) $(V, \mathcal{O}_V)$ est l'ensemble $\text{Hom}(\text{Spm}(k[\varepsilon]), (V, \mathcal{O}_V))$. Plus généralement, une telle théorie avec nilpotents permet déjà d'étudier les déformations "infinitésimales" des variétés.

Néanmoins, nous ne ferons pas une telle construction, d'une part car celle des schémas est beaucoup plus générale, mais aussi car ce cadre se heurtera toujours aux deux remarques suivantes :

- Si A est une k -algèbre de type fini, ses anneaux locaux $A_{\mathfrak{m}}$, qui apparaissent comme

tiges du faisceau structural $\mathcal{O}_V$, ne sont plus de type fini sur k .

- Pire, il existe des variétés quasi-projectives dont la k -algèbre des sections globales $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ n'est pas de type fini.

1.1.2 Les corps non algébriquement clos. Lorsqu'on veut travailler sur un corps k non algébriquement clos parfait, par exemple $k = \mathbb{Q}$ ou un corps de nombre, on peut parfois se satisfaire du langage des variétés sur une clôture algébrique et de l'action de Galois sur ces variétés lorsqu'elles sont "définies sur k ". Cela revient à regarder les solutions d'un système polynomial non pas dans k^n , mais dans $(k')^n$ pour toute extension algébrique de k . En d'autres termes, étant donné une k -algèbre réduite A , on peut travailler avec les deux types d'objets suivants :

- i) $\text{Max}(A \otimes_k \bar{k})$ muni de son action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Notons qu'on retrouve $\text{Max}(A)$ comme l'ensemble quotient par cette action de Galois.
- ii) $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, \bar{k})$ muni de son action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. C'est une donnée équivalente à celle du foncteur $k' \mapsto \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k')$ sur les extensions finies de k . Lorsque $k' \subset k$, on retrouve $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k')$ comme ensemble des points fixes sous $\text{Gal}(\bar{k}/k')$.

Néanmoins, lorsque le corps k n'est pas parfait, on se heurte au fait que $A \otimes_k \bar{k}$ n'est plus forcément réduite.

1.1.3 Les anneaux généraux. Il y a de nombreuses raisons de vouloir une théorie qui fonctionne sur des anneaux plus généraux tels que $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_p$, ou leurs extensions finies. Par exemple, en théorie des nombres on s'intéresse aux systèmes d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On peut alors bien-sûr regarder les solutions de ces systèmes à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}$, ou dans les $\overline{\mathbb{F}}_p$, et obtenir ainsi une variété algébrique pour chacun de ces corps. Mais cette famille de variétés isolées les unes des autres ne contient pas toute l'information du système, puisque par exemple on perd alors la possibilité de réduire modulo p les solutions. La théorie des schémas permet justement d'interpoler entre toutes ces variétés, en proposant un objet qui les contient (grosso-modo) toutes. Soit $A := \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_m)$ l'anneau de type fini associé au système d'équations. Comme dans le cas des variétés, on a deux points de vue :

- i) Le point de vue *espaces annelés*. Ici le spectre maximal ne convient pas car il n'est pas fonctoriel. Par exemple l'image réciproque de l'idéal $(X - 1)$ par l'inclusion $\mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Q}[X]$ est un idéal premier mais pas maximal. Pour cette raison, la théorie des schémas considère le spectre $\text{Spec}(A)$ de tous les idéaux premiers. On le munira d'une topologie de Zariski et d'un faisceau de fonctions.
- ii) Le point de vue du "foncteur des solutions" $R \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-alg}}(A, R)$ qui envoie un anneau sur l'ensemble des solutions du système $f_1, \dots, f_m$ dans R .

Le lemme de Yoneda nous dit que le second point de vue est plus ou moins tautologique, au sens où $A \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-alg}}(A, -)$ est une anti-équivalence de la catégorie **Ann** des anneaux sur celle des foncteurs covariants **Ann** $\longrightarrow$ **Ens**. Il est tout à fait possible de définir un schéma comme un foncteur covariant admettant un recouvrement ouvert (en un sens à définir) par

des foncteurs représentables. Cette approche est développée par exemple dans [Demazure-Gabriel, Groupes Algébriques, 1970], chapitre 3. Nous suivrons néanmoins l'approche plus traditionnelle du premier point de vue, et reviendrons un peu plus tard au second.

En attendant, voici un exemple historique dû à Grothendieck, d'application de la théorie des schémas (et même schémas formels) à une question purement de variétés. Le problème était de calculer le groupe fondamental “modéré” de $X_k = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p , c'est-à-dire la partie première à p du groupe de Galois de l'extension maximale de $k(X)$ non ramifiée au-dessus des places associées à $0, 1$, et ∞ . L'idée de Grothendieck était, étant donné un revêtement Galoisien d'ordre premier à p de X_k , de le relever “canoniquement” à X_A , où $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local intègre noethérien complet de caractéristique nulle et de corps résiduel $A/\mathfrak{m} = k$. Après passage au corps des fractions de A , on se retrouve dans le cas d'un corps de caractéristique nulle, que l'on comprend bien. Le “relèvement” de X_k à X_A utilise toute la puissance du langage des schémas et de sa variante schémas formels.

1.2 Spectre d'un anneau commutatif, aspects topologiques

Sauf mention du contraire, tous les anneaux sont commutatifs et unitaires.

1.2.1 Définition et fonctorialité. Soit A un anneau, on note $\text{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A . Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, l'image réciproque par φ d'un idéal premier est un idéal premier, d'où une application

$$\text{Sp } \varphi := \varphi^{-1} : \text{Spec}(B) \longrightarrow \text{Spec}(A), \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}).$$

Exemples. – i) Si $\pi_I : A \twoheadrightarrow A/I$ est la projection canonique, $\text{Sp } \pi_I$ est injective d'image

$$V_I := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A), \mathfrak{p} \supseteq I\}$$

ii) Si $\iota_S : A \longrightarrow S^{-1}A$ est le morphisme canonique vers le localisé de A en une partie multiplicative $S \subset A$, $\text{Sp } \iota_S$ est injective et identifie

$$\text{Spec}(S^{-1}A) \leftrightarrow \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Le cas où $S = A \setminus \mathfrak{p}$ pour un idéal premier mérite une mention spéciale. On note généralement $A_{\mathfrak{p}} := S^{-1}A$ et on a

$$\text{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) \leftrightarrow \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A, \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}.$$

iii) En combinant les deux exemples ci-dessus on voit si φ est le morphisme canonique $A \longrightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ alors $\text{Sp } \varphi$ envoie l'unique idéal premier (0) de $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ sur $\mathfrak{p}$.

1.2.2 Topologie de Zariski. Les sous-ensembles V_I introduits ci-dessus satisfont les propriétés suivantes :

- $I \subseteq J \Rightarrow V_I \supseteq V_J$
- $V_{(0)} = \text{Spec} A, V_A = \emptyset$
- $V_{I+J} = V_I \cap V_J$ et, plus généralement, $V_{\sum_{r \in E} I_r} = \bigcap_{r \in E} V_{I_r}$
- $V_{IJ} = V_{I \cap J} = V_I \cup V_J$

En particulier $\{V_I, I \subset A\}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie sur $\text{Spec} A$, qu'on appelle topologie de Zariski.

Dans l'autre sens, à toute partie $V \subset \text{Spec} A$, on peut associer l'idéal $I_V := \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$. Par définition, V_{I_V} est le plus petit fermé contenant V , i.e. V_{I_V} est l'adhérence $\overline{V}$ de V pour la topologie de Zariski. In extenso, on a

$$(1.2.3) \quad \overline{V} = V_{I_V} = \left\{ \mathfrak{q} \in \text{Spec} A, \mathfrak{q} \supseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p} \right\}.$$

Par ailleurs, rappelons que pour tout anneau A et tout idéal I , on a $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq I} \mathfrak{p}$, et donc $V_I = \sqrt{I}$. Ceci montre que les applications $I \mapsto V_I$ et $V \mapsto I_V$ induisent des bijections décroissantes réciproques

$$\{\text{idéaux radiciels de } A\} \leftrightarrow \{\text{fermés de } \text{Spec} A\}.$$

Le cas particulier de (1.2.3) où $V = \{\mathfrak{p}\}$ est un singleton est remarquable. Dans ce cas, on a

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec} A, \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}\} = \pi^{-1} \text{Spec}(A/\mathfrak{p}), \text{ où } \pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{p}.$$

En particulier, le point $\mathfrak{p}$ est *fermé* (au sens où $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{p}\}$) si et seulement si $\mathfrak{p}$ est un idéal *maximal*. À l'autre extrême, si A est intègre et $\mathfrak{p} = (0)$, alors la partie $\overline{\{(0)\}}$ est dense dans $\text{Spec} A$, i.e. $\overline{\{(0)\}} = \text{Spec} A$. On dit que le point $\mathfrak{p} = (0)$ est **générique**.

Exemple. – Si A est une algèbre réduite sur un corps k algébriquement clos, l'ensemble $\text{Max}(A)$ utilisé dans la théorie des variétés est l'ensemble des points fermés de $\text{Spec} A$, et est dense dans $\text{Spec} A$. Si $A = k[X]$, $\text{Spec}(A) = \text{Max}(A) \sqcup \{(0)\}$ consiste de points fermés et d'un point générique (0) . Si $A = k[X, Y]$, les points de $\text{Spec} A$ sont d'une des formes suivantes :

- les points fermés $\text{Max}(A)$
- le point générique (0)
- les idéaux premiers non maximaux et non nuls. Ils correspondent aux courbes irréductibles de $\mathbb{A}^2$. Étant donné un tel $\mathfrak{p}$, les points fermés de l'adhérence $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ sont les points de la courbe associée à $\mathfrak{p}$ dans le langage des variétés.

Plus généralement, les points de $\text{Spec}(A)$ sont en bijection $\mathfrak{p} \leftrightarrow V_{\mathfrak{p}}^{\max} := V_{\mathfrak{p}} \cap \text{Max} A$ avec les sous-variétés fermées irréductibles de $\text{Max}(A)$. Les points de la sous-variété $V_{\mathfrak{p}}^{\max}$ sont les points fermés de l'adhérence $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V_{\mathfrak{p}}$, et l'adhérence de $V_{\mathfrak{p}}^{\max}$ dans $\text{Spec} A$ est $V_{\mathfrak{p}}$.

Exemple. – Les points fermés de $\text{Spec} \mathbb{Z}$ sont en bijection avec les nombres premiers p . L'idéal (0) est l'unique point non fermé, et il est générique. Plus généralement, les fermés

propres de $\text{Spec}\mathbb{Z}$ sont les ensembles finis d'idéaux maximaux, et tout ensemble infini est dense. En cela, $\text{Spec}\mathbb{Z}$ est intuitivement proche d'une courbe algébrique.

Exemple. – Si A est un anneau de valuation discrète, $\text{Spec}A$ possède deux points. Le point générique (0) , et le point fermé $\mathfrak{m}$. On remarquera que $\text{Max}A$ n'est pas dense dans $\text{Spec}A$ dans ce cas. Dans la littérature Grothendieckienne, le spectre d'un a.v.d. est appelé *trait*.

Exemple. – Les points de $\text{Spec}\mathbb{Z}[X]$ sont de l'un des types suivants :

- le point générique (0)
- les points (p) pour p premier. On a $V_{(p)} \simeq \text{Spec}\mathbb{F}_p[X]$
- les points (f) pour f irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et de contenu 1.
- les points fermés, correspondant aux idéaux maximaux. Tous leurs corps résiduels sont de caractéristique positive. Ils sont denses dans $\text{Spec}\mathbb{Z}[X]$ (exercice).

Rappelons et introduisons un peu de vocabulaire

DÉFINITION. – Soit X un espace topologique.

- i) On dit que X est irréductible s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :
 - (a) X n'est pas réunion de deux fermés propres.
 - (b) Deux ouverts non vides de X ont une intersection non vide.
 - (c) Tout ouvert de X est dense.
- ii) Une composante irréductible de X est un fermé irréductible maximal de X . Un point $x \in X$ est dit maximal si $\overline{\{x\}}$ est une composante irréductible de X .
- iii) X est dit noethérien si toute suite décroissante de fermés est constante à partir d'un certain rang.
- iv) La dimension de X est le sup de l'ensemble des entiers n tels qu'il existe une chaîne de fermés irréductibles $X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X_n$.
- v) Si $x, y \in X$ vérifient $y \in \overline{\{x\}}$, on dit que
 - y est une spécialisation de x
 - x est une généralisation de y
- vi) X est dit quasi-compact si pour tout recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $X = \bigcup_{i \in J} U_i$.

LEMME. – Si X est un espace topologique noethérien, il possède un nombre fini de composantes irréductibles.

Démonstration. Il suffit de montrer que X est réunion d'un nombre fini de fermés irréductibles. Supposons que ce ne soit pas le cas et considérons l'ensemble de tous les fermés de X qui ne sont pas réunion finie de fermés irréductibles. Comme toute suite décroissante de fermés est stationnaire, cet ensemble possède un élément minimal W . Ce W n'est évidemment pas irréductible, donc il peut s'écrire comme réunion $W = W_1 \cup W_2$ de fermés propres. Par minimalité de W , W_1 et W_2 sont réunions finies de fermés irréductibles, donc W aussi : contradiction. $\square$

Dans $\text{Spec}A$, les fermés irréductibles sont ceux de la forme $V_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p}$ idéal premier de A . En particulier, $\text{Spec}A$ est irréductible si et seulement si le nilradical $\text{Nil}(A) = \sqrt{(0)}$ est un idéal premier de A . Plus généralement, les composantes irréductibles de $\text{Spec}A$ sont les $V_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p}$ idéal premier *minimal* de A . Si A est noethérien, $\text{Spec}A$ est un espace topologique noethérien et l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A est donc fini. Remarquons que tout fermé irréductible possède un (unique) point générique, celui de $V_{\mathfrak{p}}$ étant $\mathfrak{p}$.

REMARQUE. – Ceci peut être contre-intuitif :

- $\text{Spec}A$ peut être noethérien sans que A ne le soit. Exemple : $A = \mathbb{Q}[(X_n)_{n \in \mathbb{N}}]/(X_n^n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $\text{Spec}A$ peut être de dimension infinie même si A est noethérien, cf [SP] 110.16.

Exercice. – Soit A un anneau de valuation, c'est-à-dire un anneau intègre tel que pour tout $a \in \text{Frac}A$, on a $a \in A$ ou $a^{-1} \in A$. Montrer que l'ensemble des idéaux de A est totalement ordonné par inclusion et en déduire que $\overline{X} = \text{Spec}A$ est totalement ordonné par spécialisation : si $x, y \in X$, on a $x \in \overline{\{y\}}$ ou $y \in \overline{\{x\}}$.