INTRODUCTION À LA THÉORIE ALGÉBRIQUE DES NOMBRES

TN 1

Soit $K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

(1) Montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ et calculer le discriminant $D_K = \mathrm{disc}(\mathcal{O}_K/\mathbb{Z})$.

(2) Décomposer les idéaux (2), (3), (5) et (7) en produit d'idéaux premiers, en donnant des générateurs pour chaque facteur. Trouver un premier totalement décomposé dans $\mathcal{O}_K$.

(3) Montrer que $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K) = 1$.

(4) Calculer $\mathcal{O}_K^\times$. On pourra montrer que $1 - \sqrt[3]{2}$ est une unité fondamentale.

TN 2

Soit K un corps de nombres.

(1) Fixons $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ et notons $P_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$. Entre les trois affirmations suivantes, quelles sont les implications vraies (justifier) et celles qui ne le sont pas (trouver un contre-exemple).

  (a) p est inerte dans $\mathcal{O}_K$.

  (b) P_α est irréductible dans $\mathbb{Q}_p[X]$.

  (c) P_α est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

(2) Montrer que si K est Galoisienne et s'il existe un premier p inerte dans $\mathcal{O}_K$, alors $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est cyclique.

(3) Trouver un polynôme cyclotomique Φ_n dont l'image dans $\mathbb{F}_p[X]$ est réductible *pour tout* nombre premier p. Justifier.

(4) Montrer que si K est Galoisienne et s'il existe un premier p totalement ramifié dans $\mathcal{O}_K$, alors $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est résoluble.

TN 3

(1) Soit $(K, |.|)$ un corps non archimédien complet. Montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$. Montrer alors que $|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n| \leqslant \mathrm{Max}\{|a_n|,\, n \in \mathbb{N}\}$ avec égalité si le Max est atteint pour un seul n dans $\mathbb{N}$.

(2) Soit p un nombre premier et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. On note $|.|$ la norme p-adique normalisée par $|p| = p^{-1}$. On pose aussi $D := \{x \in \overline{\mathbb{Q}}_p, |1 - x| < 1\}$ et $D_p := \{x \in \overline{\mathbb{Q}}_p, |1 - x| < p^{1/(1-p)}\}$.

(a) Montrer que la série

$$\log(x) := -\sum_{n\geqslant 1} \frac{(1-x)^n}{n}$$

converge pour $x \in D$, et que $|\log(x)| = |1-x|$ si $x \in D_p$.

(b) Montrer que si $x, y \in D$ on a $xy \in D$ et $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(3) Soit ζ_n une racine primitive n-ème de 1. Montrer que $\zeta_n \in D$ si et seulement si n est une puissance de p. Dans ce cas montrer que $\log(\zeta_{p^r}) = 0$.

(4) Soit maintenant $x \in D$ tel que $\log(x) = 0$. Montrer que $\forall r \in \mathbb{N}$, $x^{p^r} \in D$ et $\log(x^{p^r}) = 0$. Montrer qu'il existe r tel que $x^{p^r} \in D_p$ et en déduire que $x^{p^r} = 1$.