Université Pierre et Marie Curie - Paris VI | Faculté de Mathématiques
Master Mathématiques fondamentales | 2013–2014

Théorie algébrique des nombres

Examen du 21 Octobre 2013. Durée 3h00.

Exercice 1. Soit $q \in \mathbb{N}$ premier et K un sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_q)$ de degré $n := [K : \mathbb{Q}] > 1$.

i. Montrer que l'extension $K \supset \mathbb{Q}$ est Galoisienne de groupe de Galois cyclique.

ii. Montrer que $\{\text{premiers } p \text{ ramifiés dans } K\} = \{q\}$.

iii. Soit p premier distinct de q. Montrer que pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Max}(\mathcal{O}_K)$ contenant p, le degré résiduel $f(\mathfrak{p}|p)$ est l'ordre de $p^{[\mathbb{Q}(\zeta_q):K]}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 2. Soit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ sans facteur carré et $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. On se donne un premier p totalement décomposé dans $\mathcal{O}_K$ et on écrit $(p) = \mathfrak{p}.\mathfrak{p}'$ sa décomposition.

i. Supposons que $\mathfrak{p}^m$ soit principal, de la forme $\mathfrak{p}^m = (\alpha)$ pour un $\alpha \in \mathcal{O}_K$. Montrer que $\alpha \notin \mathbb{Z}$ et que $|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| = p^m$.

ii. Supposons de plus $d < 0$. Montrer alors que $p^m \geqslant |d|/4$. En déduire que $|\mathcal{C}\ell(\mathcal{O}_K)| \geqslant \log(|d|/4)/\log(p)$.

iii. Montrer qu'il existe une infinité de d comme ci-dessus tels que $d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$, et en conclure que le nombre de classes des corps quadratiques imaginaires n'est pas borné.

Exercice 3. Soit K un corps de nombres.

i. Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Max}(\mathcal{O}_K)$, et supposons que $\mathfrak{p}^m$ est principal. Trouver une extension L de K telle que $\mathfrak{p}.\mathcal{O}_L$ soit principal.

ii. Montrer qu'il existe une extention finie de K dans laquelle tout idéal de $\mathcal{O}_K$ devient principal.

Exercice 4. Montrer que le polynôme $(X^2-2)(X^2-17)(X^2-34)$ admet une racine dans $\mathbb{Z}_p$ pour tout premier p.

Exercice 5. Soit $f(X) = X^3 - 3X + 1$.

i. Montrer que f est irréductible.

ii. Soit $K = \mathbb{Q}[X]/(f)$ et $\alpha \in K$ l'image de X. Montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.

iii. Montrer que $\mathcal{O}_K$ est principal.