INTRODUCTION À LA THÉORIE ALGÉBRIQUE DES NOMBRES

TN 1
Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$.

(1) Trouver une base de $\mathcal{O}_K$ sur $\mathbb{Z}$, calculer $\mathrm{disc}(\mathcal{O}_K)$, et donner un polynôme f tel que $\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{Z}[X]/(f(X))$.

(2) Décomposer les idéaux (2), (3), (5) et (7) en produit d'idéaux premiers et donner des générateurs pour chaque facteur.

(3) Calculer le groupe de classes de $\mathcal{O}_K$ et donner un idéal représentatif de chaque classe d'idéaux [On rappelle la constante de Minkowski $M_K = (\frac{4}{\pi})^{r_2} \frac{n!}{n^n} |D_K|^{1/2}$ d'un corps de nombres].

(4) Calculer le groupe des unités de $\mathcal{O}_K$.

(5) Trouver toutes les solutions de l'équation diophantienne $y^2 + y + 2 = x^5$ pour $x, y \in \mathbb{Z}$.

TN 2
Soit K un corps de nombres et $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que $K = \mathbb{Q}[\alpha]$. Notons $f_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier.

(1) On suppose que p ne divise pas le discriminant du polynôme f_α. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.
   (a) p est non ramifié et inerte dans $\mathcal{O}_K$.
   (b) f_α est irréductible dans $\mathbb{Q}_p[X]$.
   (c) f_α est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

(2) On supprime l'hypothèse sur p. Quelles sont les implications qui restent vraies (justifier) et celles qui ne le sont plus (trouver un contre-exemple).

TN 3
Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{5})$.

(1) K est-il Galoisien sur $\mathbb{Q}$? Si oui, quel est le groupe de Galois ?

(2) Montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

(3) Quels sont les premiers p qui se ramifient dans K ? Avec quel indice de ramification ?

(4) Montrer que K est partout non ramifié au-dessus de $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Rappeler pourquoi tout corps de degré > 1 est ramifié au-dessus de $\mathbb{Q}$.