TD n°2.

Exercice 1. Soient A, B deux k-algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos. Montrer directement que $\mathrm{Max}(A \otimes_k B) = \mathrm{Max}(A) \times \mathrm{Max}(B)$. Est-ce encore vrai si k n'est pas algébriquement clos ? Est-ce encore vrai si on remplace Max par Spec ?

Exercice 2. Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ une application polynomiale. Montrer que l'adhérence de Zariski $\overline{\varphi(V)}$ de $\varphi(V)$ dans W est le fermé défini par l'idéal $\mathrm{Ker}\, \varphi^*$.

Exercice 3. Montrer que les fibres d'un morphisme fini sont finies, puis donner un exemple d'un morphisme qui n'est pas fini mais dont les fibres sont toutes finies.

Solution. On peut se ramener à $\varphi : V \longrightarrow W$ morphisme fini entre variétés affines. Soit $Q \in W$ et $\mathfrak{m}_Q \subset \mathcal{O}(W)$ son idéal maximal. On a $\varphi^{-1}(\{Q\}) = V_I$ où $I = \varphi^*(\mathfrak{m}_Q)\mathcal{O}(V)$ (l'idéal de $\mathcal{O}(V)$ engendré par $\varphi^*(\mathfrak{m}_Q)$). Autrement dit, $\varphi^{-1}(\{Q\})$ est l'ensemble des idéaux maximaux de la k-algèbre $A = \mathcal{O}(V)/\varphi^*(\mathfrak{m}_Q)\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}(W)} (\mathcal{O}(W)/\mathfrak{m}_Q)$. Puisque $\mathcal{O}(V)$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}(W)$, cette algèbre A est un module de type fini sur $\mathcal{O}(W)/\mathfrak{m}_Q = k$, i.e. une k-algèbre de dimension finie. Une telle algèbre possède au plus $\dim_k(A)$ idéaux maximaux, en vertu du théorème des restes chinois.
L'inclusion $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ a des fibres finies (ou vides) mais n'est pas un morphisme fini puisque $k[X, X^{-1}]$ n'est pas un $k[X]$-module de type fini.

Exercice 4. Soient V, W deux variétés affines irréductibles. Montrer que $V \times W$ est irréductible.

Solution. Posons $A := \mathcal{O}(V)$ et $B := \mathcal{O}(W)$, qui sont des k-algèbres intègres. Il faut montrer que $A \otimes_k B$ est intègre. Prenons une k-base $(b_i)_{i \in I}$ de B et écrivons deux éléments $x, x' \in A \otimes_k B$ sous la forme (unique) $x = \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i$ et $x' = \sum_{i \in I} a'_i \otimes b'_i$ avec $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ et $(a'_i)_{i \in I} \in A^I$ presque nulles. Supposons que $xx' = 0$ dans $A \otimes_k B$. Alors, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, correspondant à un morphisme $\pi_\mathfrak{m} : A \twoheadrightarrow k$, on a $(\pi_\mathfrak{m} \otimes \mathrm{id})(xx') = (\sum_i \pi_\mathfrak{m}(a_i) b_i)(\sum_i \pi_\mathfrak{m}(a'_i) b'_i) = 0$ dans B. Comme B est intègre, on en conclut que $\sum_i \pi_\mathfrak{m}(a_i) b_i = 0$ ou $\sum_i \pi_\mathfrak{m}(a'_i) b'_i = 0$, et puisque $(b_i)_{i \in I}$ est k-linéairement indépendante, il s'ensuit que

$$(\forall i \in I, a_i \in \mathfrak{m}) \text{ ou } (\forall i \in I, a'_i \in \mathfrak{m}).$$

Mais ceci signifie que $V = V_{(a_i)_{i \in I}} \cup V_{(a'_i)_{i \in I}}$. Par irréductibilité de V, on a $V = V_{(a_i)_{i \in I}}$ ou $V = V_{(a'_i)_{i \in I}}$. Si, par exemple, $V = V_{(a_i)_{i \in I}}$, alors l'idéal engendré par $(a_i)_{i \in I}$ est nul, et donc tous les a_i sont nuls et $x = 0$.

Exercice 5. Soient $V_1, \cdots, V_r$ des variétés affines. Montrer que la réunion disjointe $\coprod_{i=1}^r V_i$ est encore une variété affine. Quel est son algèbre de fonctions ?

Solution. La catégorie des k-algèbres réduites de type fini admet des produits finis (qui sont les produits cartésiens habituels). Par l'anti-équivalence de catégories entre variétés affines et algèbres réduites de type fini, on en déduit que la variété dont l'algèbre est $\mathcal{O}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(V_r)$ est un coproduit des V_i. Mais on a déjà vu (en termes d'idempotents) que l'ensemble sous-jacent de cette variété est bien la réunion disjointe des V_i.

Exercice 6. On appelle *groupe algébrique affine* une variété affine G munie d'une loi associative donnée par un morphisme de variétés $G \times G \longrightarrow G$, d'un élément neutre e pour cette loi, et dont l'inverse est aussi donné par un morphisme de variétés $G \longrightarrow G$.

a) Montrer que k, $k^\times$ et $\mathrm{GL}_n(k)$ sont des groupes algébriques, ainsi que les groupes classiques $SL_n(k)$, $SO_n(k)$ et $Sp_{2n}(k)$

b) Soit G une variété d'algèbre de fonctions $A := \mathcal{O}(G)$, et soit e un point de G correpondant à un morphisme $A \xrightarrow{\varepsilon} k$. Expliciter les conditions sur un morphisme de k-algèbres $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_k A$ pour que le morphisme de variétés $G \times G \longrightarrow G$ correspondant soit une loi associative d'élément neutre e. Puis expliciter les conditions sur un morphisme de k-algèbres $\iota : A \longrightarrow A$ pour qu'il définisse l'inverse pour la loi associée à Δ.

c) Calculer l'algèbre A et les morphismes ε, Δ et ι pour $G = k$ (groupe additif), $G = k^\times$ (groupe multiplicatif) et $G = \mathrm{GL}_n(k)$.

La donnée $(A, \varepsilon, \Delta, \iota)$ est appelée "algèbre de Hopf". Celle de (A, ε, Δ) est appelée "bigèbre".

Solution. c) Pour $G = k$ (notation usuelle $G = \mathbb{G}_a$ pour "groupe additif"), on a $A = k[X]$, $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, et $\varepsilon(X) = -X$.
Pour $G = k^\times$ (notation usuelle $G = \mathbb{G}_m$ pour "groupe multiplicatif"), on a $A = k[X, X^{-1}]$, $\Delta = X \otimes X$, et $\varepsilon(X) = X^{-1}$.
Pour $G = \mathrm{GL}_n(k)$, on a $A = k[X_{11}, \cdots, X_{nn}][\det^{-1}]$ où det est le déterminant de la matrice $(X_{ij})_{i,j}$. On a aussi $\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^n X_{ik} \otimes X_{kj}$, et ε envoie X_{kl} sur $(-1)^{k+l} \frac{\det_{kl}}{\det}$ où $\det_{kl}$ est le déterminant de la matrice $(X_{ij})_{i,j}$ privée de sa ligne k et de sa colonne l.