TD n°3.

Exercice 1. Soit $V \subset \mathbb{A}^n$ une sous-variété fermée et $P \in V$ un point régulier. Si H est un hyperplan affine passant par P et ne contenant pas T_PV, montrer que chaque composante irréductible de $V \cap H$ passant par P est lisse en P.

Solution. Comme P est régulier, il appartient à une unique composante irréductible de V, et puisque l'énoncé ne porte que sur les composantes de $V \cap H$ passant par P, on peut supposer V irréductible. Puisque $H = P + T_PH$ ne contient pas $P + T_PV$, a fortiori H ne contient pas V. Donc, si H est le lieu d'annulation de $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ de degré 1, on a $f_{|V} \neq 0$. Puisque $f(P) = 0$, $f_{|V}$ n'est pas inversible non plus, donc on sait que toutes les composantes irréductibles de $V \cap H$ sont de dimension $\dim V - 1$. Soit W une telle composante. Il faut démontrer que T_PW est de dimension $\dim V - 1$. Or $T_PW = T_PV \cap \mathrm{Ker}(f^\circ) = T_PV \cap T_PH$ où f° est la partie linéaire de f. Comme T_PH est un hyperplan ne contenant pas T_PV, on a bien $\dim_k T_PW = \dim_k T_PV - 1 = \dim V - 1 = \dim W$.

Exercice 2. Soient V, W deux variétés et $P \in V$, $Q \in W$. Montrer que $T_{(P,Q)}(V \times W) = T_PV \oplus T_QW$.

Exercice 3. Soit $C, C' \subset \mathbb{A}^2$ les courbes d'équations respectives $Y^2 - X^2(X+1)$ et XY. Montrer que leurs anneaux locaux complétés en $O = (0,0)$ sont isomorphes.

Exercice 4. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des entiers > 1 de pgcd 1 dans $\mathbb{Z}$. Notons $\varphi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^n$ le morphisme $t \mapsto (t^{a_1}, \cdots, t^{a_n})$.

a) Montrer que φ est fini et en conclure que l'image de φ est une courbe irréductible fermée C dans $\mathbb{A}^n$.
b) Montrer que I_C est engendré par les binômes $X^{\vec{n}} - X^{\vec{m}}$, où $\vec{n} = (n_1, \cdots, n_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\sum_i a_i n_i = \sum_i a_i m_i$.
c) Calculer l'espace tangent à C en O.
d) Trouver $(a_1, \cdots, a_n)$ tel que C ne peut pas se plonger dans $\mathbb{A}^{n'}$ avec $n' < n$.

Solution.

a) Le morphisme $\varphi^* : k[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow k[T]$ est donné par $X_i \mapsto T^{a_i}$. Or $k[T]$ est déjà un module de type fini sur son sous-anneau $k[T^a]$, donc l'est aussi a fortiori sur son sous-anneau $k[T^{a_1}, \cdots, T^{a_n}]$. Donc φ est un morphisme fini et on sait que son image C est fermée. Celle-ci est irréductible puisque $\mathbb{A}^1$ l'est, et de dimension $\leqslant \dim \mathbb{A}^1 = 1$. Or $\dim C \neq 0$ puisque C n'est pas un singleton, donc $\dim C = 1$.
b) Pour $\vec{n} = (n_1, \cdots, n_n) \in \mathbb{N}^n$, notons $\alpha(\vec{n}) := \sum_i a_i n_i$ Clairement, les $X^{\vec{n}} - X^{\vec{m}}$ avec $\alpha(\vec{n}) = \alpha(\vec{m})$ sont dans I_V. Notons J l'idéal qu'ils engendrent et supposons que $I_C \supsetneq J$. Ordonnons $\mathbb{N}^n$ de manière lexicographique (par exemple), et prenons $f \in I_C \setminus J$ de multidegré minimal pour cet ordre. Soit $\vec{n}$ ce multidegré et $a_{\vec{n}}$ le coefficient de $X^{\vec{n}}$ dans f. Puisqu'on a $f(T^{a_1}, \cdots, T^{a_n}) = 0$, il doit y avoir au moins un autre monôme $X^{\vec{m}}$ avec $\alpha(\vec{m}) = \alpha(\vec{n})$ apparaissant avec degré non nul dans f. Posons alors $g := f - a_{\vec{n}}(X^{\vec{n}} - X^{\vec{m}})$. Alors $g \in I_V$ et son multidegré est plus petit que celui de f, donc $g \in J$ et $f \in J$: contradiction.
c) On a $d_O(X^{\vec{n}}) = 0$ dès que $\sum_i n_i > 1$. Notons $\alpha(\mathbb{N}^n)$ le sous-monoïde de $\mathbb{N}$ engendré par les a_i et $A \subset \alpha(\mathbb{N}^n)$ le sous-ensemble des éléments "irréductibles", i.e. qui ne sont pas somme de deux éléments non nuls de $\alpha(\mathbb{N}^n)$. Alors T_OC est le noyau commun des formes linéaires suivantes : dX_i pour i tel que $a_i \in \alpha(\mathbb{N}^n) \setminus A$, et $dX_i - dX_j$ pour i, j tels que $a_i = a_j \in A$.
d) Prenons $a_i := n + i$. On a alors $A = \{n+1, \cdots, 2n\} = \{a_i, i = 1, \cdots, n\}$ et les a_i sont tous distincts, donc $T_OC = k^n$. Mais l'espace tangent d'une sous-variété de $\mathbb{A}^{n'}$ est de dimension $\leqslant n'$, donc C ne se plonge pas dans $\mathbb{A}^{n'}$ pour $n' < n$.

Exercice 5. Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ un morphisme dominant entre variétés irréductibles.

a) Montrer que $\dim(V) \geqslant \dim(W)$.
b) Montrer que pour tout $Q \in W$, on a $\dim(\varphi^{-1}(Q)) \geqslant \dim V - \dim W$.

c) Montrer que l'ensemble des $Q \in W$ où l'inégalité de b) est une égalité contient un ouvert non vide.

Solution. a) On a $\mathcal{O}(W) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$ donc $\mathcal{M}(W) \hookrightarrow \mathcal{M}(V)$ donc $\dim W \leqslant \dim V$.

b) On peut remplacer W par un ouvert dense U_W contenant Q et V par $\varphi^{-1}(U_W)$. Puis, comme toute composante irréductible de $\varphi^{-1}(Q)$ rencontre un ouvert affine de V, on peut aussi restreindre la source de φ à un tel ouvert. En particulier, on peut donc supposer V et W affines. Mieux, en utilisant la proposition 2.1.8 du cours, on peut supposer qu'il existe $f_1, \cdots, f_{d_W} \in \mathcal{O}(W)$ telles que $\{Q\} = W_{(f_1,\cdots,f_{d_W})}$, où $d_W := \dim W$. Mais alors $\varphi^{-1}(Q) = V_{(\varphi^* f_1,\cdots,\varphi^* f_{d_W})}$ donc toutes ses composantes irréductibles sont de dimension $\geqslant \dim V - d_W$ d'après le corollaire 2.1.6 du cours.

c) Comme pour le b), il suffit de savoir traiter le cas où V et W sont affines. On a alors une inclusion $\mathcal{O}(W) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$. Donnons-nous des éléments $y_1, \cdots, y_e \in \mathcal{O}(V)$ formant une base de transcendance de $\mathcal{M}(V)$ sur $\mathcal{M}(W)$ (donc $e + d = \dim V$), et des éléments $y_{e+1}, \cdots, y_n$ tels que $\mathcal{O}(V)$ soit engendrée par tous les y_i en tant que $\mathcal{O}(W)$-algèbre. Pour tout $i = e+1, \cdots, n$, il existe un polynôme non nul $f_i \in \mathcal{O}(W)[Y_1 \cdots, Y_{e+1}]$

$$f_i(y_1, \cdots, y_e, y_i) = 0.$$

Pour tout $Q \in W$, on peut spécialiser le polynôme f_i en $f_{i,Q} \in k[Y_1, \cdots, Y_{e+1}]$ en réduisant les coefficients modulo $\mathfrak{m}_Q$. Alors, en notant $y_{i,Q}$ l'image de y_i dans $\mathcal{O}(V)/\mathfrak{m}_Q\mathcal{O}(W)$, on a l'égalité

$$f_{i,Q}(y_{1,Q}, \cdots, y_{e,Q}, y_{i,Q}) = 0.$$

De plus, la k-algèbre $\mathcal{O}(V)/\mathfrak{m}_Q\mathcal{O}(W)$ est engendrée par les $y_{i,Q}$.
Soit alors $U \subset W$ le lieu des points Q où tous les $f_{i,Q}$ sont *non nuls*. C'est un ouvert non vide de W. Pour tout $Q \in U$, et toute composante irréductible $X \subset \varphi^{-1}(Q)$, les égalités ci-dessus assurent que le degré de transcendence de $\mathcal{M}(X)$ sur k est $\leqslant e$. Donc pour tout $Q \in U$, on a $\dim(\varphi^{-1}(Q)) = e = \dim V - \dim W$.

Exercice 6. Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ un morphisme dominant et fini de variétés irréductibles, avec W normale.

a) Pour tout $Q \in W$, montrer que $|\varphi^{-1}(Q)| \leqslant [\mathcal{M}(V) : \mathcal{M}(W)]$.

b) Montrer que l'ensemble des $Q \in W$ où l'inégalité de a) est une égalité est un ouvert, et qu'il est non vide si $\mathcal{M}(V)$ est séparable sur $\mathcal{M}(W)$.

Solution. a) On a déjà vu pour un morphisme fini que $|\varphi^{-1}(Q)|$ est le nombre r_Q d'idéaux maximaux de la k-algèbre de dimension finie $\mathcal{O}(V)/\mathfrak{m}_Q\mathcal{O}(V)$. Il faut donc montrer que $r_Q \leqslant r := [\mathcal{M}(V) : \mathcal{M}(W)]$. Pour cela, notons $\chi_f(T) \in \mathcal{M}(W)[T]$ le polynôme caractéristique de la multiplication par $f \in \mathcal{M}(V)$ sur $\mathcal{M}(V)$, vu comme endomorphisme $\mathcal{M}(W)$-linéaire. C'est donc un polynôme de degré r qui annule f. Comme $\mathcal{O}(V)$ est entier sur $\mathcal{O}(W)$, on sait que pour $f \in \mathcal{O}(V)$, les coefficients de $\chi_f(T)$ sont aussi entiers sur $\mathcal{O}(W)$. Puisque $\mathcal{O}(W)$ est supposé intégralement clos, on a donc $\chi_f(T) \in \mathcal{O}(W)[T]$. Il s'ensuit que tout élément de la k algèbre $\mathcal{O}(V)/\mathfrak{m}_Q\mathcal{O}(V)$ est annulé par un polynôme de degré r dans $k[T]$. Or, soit $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_{r_Q}$ les idéaux maximaux de $\mathcal{O}(V)/\mathfrak{m}_Q\mathcal{O}(V)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_{r_Q} \in k$ deux à deux distincts. Le théorème des restes chinois nous dit qu'il existe $f \in \mathcal{O}(V)$ tel que $\bar{f} \equiv \lambda_i \mod \mathfrak{m}_i$ pour tout i. Le polynôme minimal d'un tel $\bar{f}$ est donc divisible par $\prod_i (T - \lambda_i)$. On en déduit $r_Q \leqslant r$.

b) Supposons qu'il existe Q tel que $r_Q = r$ et soit $f \in \mathcal{O}(V)$ comme au a). Alors la réduction modulo $\mathfrak{m}_Q$ de $\chi_f(T) \in \mathcal{O}(W)[T]$ est un polynôme séparable, donc le discriminant $\delta \in \mathcal{O}(W)$ de $\chi_f(T)$ est non nul. En particulier, $\chi_f(T)$ est aussi le polynôme minimal de f sur $\mathcal{M}(W)$, donc f est un élément primitif de l'extension $\mathcal{M}(W) \subset \mathcal{M}(V)$, i.e. $\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}(W)[f]$. Il s'ensuit que $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}(W)[f]) = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(V))$, donc on peut trouver $h \in \mathcal{O}(W)$ telle que $\mathcal{O}(W)[h^{-1}][f] = \mathcal{O}(V)[h^{-1}]$ (en d'autres termes φ est fini et "libre de rang r" au-dessus de l'ouvert $h \neq 0$ dans W). Mais alors, pour tout Q' dans l'ouvert $h.\delta \neq 0$ de W, la réduction modulo $\mathfrak{m}_{Q'}$ de $\chi_f(T)$ est séparable, et est le polynôme caractéristique de $\bar{f} \in \mathcal{O}(V)/\mathfrak{m}_{Q'}\mathcal{O}(V)$. Comme $\dim_k(\mathcal{O}(V)/\mathfrak{m}_{Q'}\mathcal{O}(V)) = r$, c'est donc encore son polynôme minimal, donc $r_{Q'} \geqslant r$, et finalement $r_{Q'} = r$ vu qu'on a déjà l'autre inégalité.
Reste à prouver l'existence d'au moins un Q, lorsque l'extension $\mathcal{M}(W) \subset \mathcal{M}(V)$ est séparable. Dans ce cas, on sait que l'extension admet des éléments primitifs, et on peut en choisir un, disons f, dans $\mathcal{O}(V)$. Alors comme ci-dessus, il existe $h \in \mathcal{O}(W)$ tel que $\mathcal{O}(W)[h^{-1}][f] = \mathcal{O}(V)[h^{-1}]$. Soit $\delta \in \mathcal{O}(W)$ le discriminant de $\chi_f(T)$. Alors, comme ci-dessus, tout Q dans l'ouvert $h.\delta \neq 0$ de W convient.

Exercice 7. a) Soit $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{A}^d$ un morphisme fini surjectif et $D \subset \mathbb{A}^d$ une droite. Montrer que pour toute composante irréductible C de $\varphi^{-1}(D)$, on a $\varphi(C) = D$ et $\dim(C) = 1$.

b) Soit V une variété irréductible, $U \subset V$ un ouvert, et $Q \in V \setminus U$ un point. Montrer qu'il existe une sous-variété fermée $C \subset V$ irréductible de dimension 1 telle que $P \in C$ et $C \cap U \neq \emptyset$.

Exercice 8. Montrer que tout sous-ensemble fini $S \subset \mathbb{P}^n$ est contenu dans un ouvert principal. Montrer aussi que pour chaque $P \in S$ il existe un hyperplan H tel que $H \cap S = \{P\}$.

Exercice 9. Soient C, C' deux courbes irréductibles lisses et complètes.

a) Montrer qu'un morphisme $C \longrightarrow C'$ est surjectif si et seulement si il est non constant.

b) Montrer que toute application rationnelle $f : C - - > C'$ est représentée par un unique morphisme $\varphi : C \longrightarrow C'$.

c) Montrer que l'application $\varphi \mapsto \varphi^*$: Mor.Surj.$(C, C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{M}(C'), \mathcal{M}(C))$ est bijective.

d) Montrer que l'application Mor.Surj.$(C, \mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathcal{M}(C) \setminus k$ qui envoie φ sur la fonction rationnelle $\varphi_{|\varphi^{-1}(\mathbb{A}^1)} : C \longrightarrow k$ est une bijection.

Exercice 10. Soit C une courbe complète irréductible et lisse. Nous allons montrer que C est projective. Nous fixons pour cela un recouvrement $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$ de C par des courbes ouvertes affines.

a) Montrer que pour chaque i, il existe une courbe irréductible projective $\bar{C}_i$ et un morphisme $C \xrightarrow{\varphi_i} \bar{C}_i$ dont la restriction à C_i est une immersion ouverte $C_i \hookrightarrow \bar{C}_i$.

b) Posons $\bar{C}$ l'adhérence de l'image du morphisme produit $\varphi : C \longrightarrow \prod_{i=1}^r \bar{C}_i$.

  i) Montrer que $\bar{C}$ est une courbe irréductible projective et que $C \xrightarrow{\varphi} \bar{C}$ est birationnel et surjectif.

  ii) Montrer que pour tout $P \in C$, le morphisme $\varphi^* : \mathcal{O}_{\bar{C}, \varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P}$ est un isomorphisme.

c) Montrer que φ est un isomorphisme (utiliser l'exercice précédent).

Exercice 11. a) Montrer que le foncteur contravariant $C \longrightarrow \mathcal{M}(C)$ de la catégorie des courbes irréductibles lisses et complètes munies des morphismes surjectifs dans la catégorie des extensions de k de type fini et degré de transcendence 1 est une anti-équivalence de catégories. (utiliser les deux exercices précédents).

b) Soit K un corps de degré de transcendance 1 et C_K "la" courbe lisse complète telle que $\mathcal{M}(C_K) = K$.

  i) Montrer que l'application $P \mapsto \mathrm{ord}_P$ est une bijection de C_K sur l'ensemble des valuations discrètes $v : K \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ sur K.

  ii) Pour $f \in K \setminus k$, notons $C_{K,f}$ l'ouvert de définition de f, i.e. l'ensemble des $P \in C_K$ tels que $f \in \mathcal{O}_{C_K,P}$. Montrer que $C_{K,f}$ est affine et $\mathcal{O}(C_{K,f})$ est la clôture intégrale de $k[f]$ dans K.

Exercice 12. On dit qu'un morphisme $V \xrightarrow{\varphi} W$ est fini s'il existe un recouvrement de W par des ouverts affines U_i tel que $\varphi^{-1}(U_i)$ est affine et $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(U_i))$ est un $\mathcal{O}(U_i)$-module de type fini. Montrer que tout morphisme surjectif entre courbes complètes lisses est fini.