TD n°3.

Exercice 1. Soit V une variété algébrique, W une variété *affine* et $\varphi_1, \varphi_2 : V \longrightarrow W$ deux morphismes.

a) Montrer que $\{P \in V, \varphi_1(P) = \varphi_2(P)\}$ est fermé dans V.

b) En déduire que s'il existe un ouvert dense U de V tel que $(\varphi_1)_{|U} = (\varphi_2)_{|U}$, alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

c) Montrer que, sur l'ensemble des couples (U, φ) formés d'un ouvert U dense dans V et d'un morphisme $\varphi : U \longrightarrow W$, la relation $(U, \varphi) \sim (U', \varphi') \Leftrightarrow \varphi_{|U\cap U'} = \varphi'_{|U\cap U'}$ est bien une relation d'équivalence.

d) Supposons $W = \mathbb{A}^1$ et notons $\mathcal{M}(V)$ l'ensemble des applications rationnelles $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ (i.e. des classes d'équivalence de couples (U, φ) comme ci-dessus).

i) Montrer que $\mathcal{M}(V)$ est une k-algèbre.

ii) Si $V_1, \cdots, V_r$ sont les composantes irréductibles de V, alors $\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(V_r)$.

Solution. a) Choisissons un plongement fermé $\psi : W \subset \mathbb{A}_n$. Alors les $\psi \circ \varphi_i$ sont des morphismes donnés chacun par n fonctions régulières $f_{i,1}, \cdots, f_{i,n} : W \longrightarrow \mathbb{A}^1 = k$. On a donc

$$\{P \in V, \varphi_1(P) = \varphi_2(P)\} = \bigcap_{j=1}^{n} (f_{1,j} - f_{2,j})^{-1}(O)$$

qui est une intersection de fermés puisque toute fonction régulière est continue.

c) Clair, après avoir vérifié que l'intersection de deux ouverts denses U et U' est un ouvert dense. Pour cela, soit $\mathcal{U}$ un ouvert non vide. Alors $(U \cap U') \cap \mathcal{U} = U' \cap (U \cap \mathcal{U})$. Or, U dense $\Rightarrow U \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, et comme $U \cap \mathcal{U}$ est ouvert, U' dense $\Rightarrow U' \cap (U \cap \mathcal{U}) \neq \emptyset$. Donc $U \cap U'$ est dense.

d)ii) Posons $U_i := V_i \setminus (\bigcup_{j\neq i} V_j)$. C'est un ouvert non vide contenu dans V_i, donc dense dans V_i. En particulier on a $\mathcal{M}(U_i) = \mathcal{M}(V_i)$. De plus l'ouvert $U := \bigcup_i U_i$ est dense dans V, donc $\mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(V)$. Mais U est une réunion disjointe $U = \bigsqcup_i U_i$, donc pour tout ouvert $U' \subset U$ dense, on a $U' = \bigcup_i U'_i$ donc $\Gamma(U', \mathcal{O}_V) = \prod_i \Gamma(U'_i, \mathcal{O}_V)$, et finalement $\mathcal{M}(U) = \prod_i \mathcal{M}(U_i)$.

Exercice 2. Soit V une variété algébrique irréductible et $\mathcal{M}(V)$ son corps de fonctions rationnelles.

a) Montrer que pour tout P, on a une inclusion naturelle $\mathcal{O}_{V,P} \subset \mathcal{M}(V)$.

b) Montrer que pour tout ouvert U, on a $\Gamma(U, \mathcal{O}_V) = \bigcap_{P\in U} \mathcal{O}_{V,P}$, l'intersection étant prise dans $\mathcal{M}(V)$.

c) Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ un morphisme. Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si φ est un homéomorphisme et $\varphi_P^* : \mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$ est un isomorphisme de k-algèbres pour tout point P de V.

Exercice 3. Soit V une variété algébrique. Pour $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ non nulle, on note $U_f := \{P \in V, f(P) \neq 0\}$. Donc U_f est un ouvert mais n'est a priori pas affine puisque V ne l'est pas nécessairement.

a) Montrer que $\Gamma(U_f, \mathcal{O}_V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)[f^{-1}]$.

b) Montrer que si $f_1, \cdots, f_r \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ engendrent l'idéal unité, et si les ouverts U_{f_i} sont des variétés affines, alors V est affine. Plus précisément, le morphisme canonique $V \xrightarrow{\gamma_V} \mathrm{Spm}(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))$ est un isomorphisme.

Solution. a) On donne la preuve dans le cas V irréductible par simplicité : dans ce cas, tous les espaces de fonctions sont plongés dans $\mathcal{M}(V)$. Par exemple, si $V = \bigcup_{i=1}^r U_i$ est un recouvrement ouvert de V, on a $\Gamma(V, \mathcal{O}_V) = \bigcap_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}_V)$ (intersection dans $\mathcal{M}(V)$). De même on a $\Gamma(U_f, \mathcal{O}_V) = \bigcap_i \Gamma(U_f \cap U_i, \mathcal{O}_V)$. Si maintenant les U_i sont supposés affines, on sait que $\Gamma(U_f \cap U_i, \mathcal{O}_V) = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_V)[f^{-1}]$. Il s'agit donc de montrer

$$\left(\bigcap_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}_V)\right)[f^{-1}] = \bigcap_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}_V)[f^{-1}],$$

ce qui est élémentaire.

b) On a $\gamma_V(U_f) \subset \mathrm{Spm}(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))_f$ (l'ouvert principal de $\mathrm{Spm}(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))$ défini par f). D'après le a), on a $\mathrm{Spm}(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))_f = \mathrm{Spm}(\Gamma(U_f, \mathcal{O}_V))$. Donc, si U_f est affine, γ_V induit un isomorphisme de la sous-variété ouverte U_f de V sur la sous-variété ouverte $\mathrm{Spm}(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))_f$ de $\mathrm{Spm}(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))$. Maintenant, si $f_1, \cdots, f_n$ engendrent l'idéal unité, alors les U_{f_i} recouvrent V et les $\mathrm{Spm}(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))_{f_i}$ recouvrent $\mathrm{Spm}(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))$. Donc γ_V est un isomorphisme.

Exercice 4. Soit W une variété algébrique. Notons $\Delta_W \subset W \times W$ la "diagonale" de W.

a) Montrer que Δ_W est un sous-ensemble fermé si W est affine et un sous-ensemble localement fermé en général.

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (on dit alors que W est *quasi-séparée*) :

   i) Δ_W est fermé dans $W \times W$.

   ii) Pour toute paire de morphismes de variétés $\varphi, \varphi' : V \longrightarrow W$, l'ensemble $\{P \in V, \varphi(P) = \varphi'(P)\}$ est fermé.

   iii) Pour toute paire d'ouverts affines $U, U' \subset W$, l'intersection $U \cap U'$ est encore affine, et le morphisme évident $\mathcal{O}(U) \otimes_k \mathcal{O}(U') \longrightarrow \mathcal{O}(U \cap U')$ est surjectif.

c) On considère l'espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ obtenu en recollant deux copies de $\mathbb{A}^n$ le long de $\mathbb{A}^n \setminus \{O\}$. Formellement, on part de $Y := \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n \times \{1, 2\}$ que l'on munit de la relation d'équivalence qui identifie les points $(P, 1)$ et $(P, 2)$ lorsque $P \neq O$, puis on note X l'espace topologique quotient (i.e. $U \subset X$ est ouvert ssi $\pi^{-1}(U) \subset Y$ est ouvert) muni du faisceau de fonctions induit (i.e. $f : U \subset X \longrightarrow k$ est déclarée régulière ssi $f \circ \pi \in \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$). Montrer que $(X, \mathcal{O}_X)$ est une variété algébrique non quasi-séparée.

Solution. a) Le cas affine a déjà été vu à l'exercice 1. Soit $(P, P) \in \Delta_W$. Choisissons un ouvert affine U de W contenant P. Alors $U \times U$ est un ouvert de $W \times W$ contenant P, et on a $\Delta_W \cap (U \times U) = \Delta_U$. Choisissons maintenant un plongement fermé $U \subset \mathbb{A}^n$; on a $\Delta_U = \Delta_{\mathbb{A}^n} \cap (U \times U)$ (intersection dans $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$) et $\Delta_{\mathbb{A}^n}$ est fermé dans $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$, défini par les polynômes $X_i - Y_i$, $i = 1, \cdots, n$. Donc Δ_U est fermé dans $U \times U$, et il s'ensuit que Δ_W est localement fermé.

b) i)$\Rightarrow$ ii). Par définition du produit, l'application $(\varphi, \varphi') : V \longrightarrow W \times W$ est un morphisme, donc est continue, et l'ensemble considéré est $(\varphi, \varphi')^{-1}(\Delta_W)$, qui est bien fermé si Δ_W l'est.

ii)$\Rightarrow$ iii). Notons $\psi : U \cap U' \longrightarrow U \times U'$ le morphisme produit des deux inclusions de $U \cap U'$ dans U et U'. Il faut (et il suffit de) montrer que ψ induit un isomorphisme de $U \cap U'$ sur une sous-variété fermée de $U \times U'$; cela impliquera en effet que $U \cap U'$ est affine et que $\mathcal{O}(U \times U') \longrightarrow \mathcal{O}(U \cap U')$ est surjectif. Pour cela, appliquons ii) à $V = U \times U'$ avec $\varphi = \iota_U \circ \pi_1$ et $\varphi' = \iota_{U'} \circ \pi_2$, où $\iota_U : U \hookrightarrow W$ et $\iota_{U'} : U' \hookrightarrow W$ sont les morphismes d'inclusion (immersion ouvertes). On en déduit que $\psi(U \cap U')$ est fermé dans $U \times U'$. En d'autres termes, le morphisme ψ est une bijection de $U \cap U'$ sur la sous-variété fermée $\psi(U \cap U')$ de $U \times U'$ et, pour voir que c'est un isomorphisme, il faut voir que son inverse est un morphisme. Or, la projection $\pi_1 : U \times U' \longrightarrow U$ induit un morphisme de $\psi(U \cap U')$ dans U qui se factorise par $U \cap U'$, et on a $\pi_1 \circ \psi = \mathrm{id}_{U \cap U'}$. Ceci montre que la bijection inverse de ψ est un morphisme.

iii)$\Rightarrow$ i). Choisissons un recouvrement $W = \bigcup_{i=1}^r U_i$ de W par des ouverts affines. Alors $W \times W$ est recouvert par les ouverts affines $U_i \times U_j$, et il suffit de montrer que $\Delta_W \cap (U_i \times U_j)$ est fermé dans $U_i \times U_j$ pour tous i, j. Or, $\Delta_W \cap (U_i \times U_j)$ est l'image du morphisme $U_i \cap U_j \longrightarrow U_i \times U_j$, et l'hypothèse nous dit justement que ce morphisme est une immersion fermée (puisque morphisme entre variétés affines dont le morphisme d'anneaux associé est surjectif).

c) Si $n > 1$, l'intersection des deux ouverts $\mathbb{A}^n$ est $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ qui n'est pas affine. Si $n = 1$, cette intersection est bien affine mais le morphisme $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ est donné par $k[X, Y] \longrightarrow k[T, T^{-1}]$, $X \mapsto T$ et $Y \mapsto T$, qui n'est pas surjectif.

Exercice 5. Supposons k de caractéristique p. Montrer que l'application polynomiale $F : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1^p, \cdots, x_n^p)$ est un morphisme fini $\mathbb{A}_k^n \longrightarrow \mathbb{A}_k^n$, qui est un homéomorphisme de k^n sur k^n mais pas un isomorphisme de $\mathbb{A}_k^n$ sur $\mathbb{A}_k^n$. Soit $V \subset k^n$ un sous-ensemble algébrique. À quelle condition a-t-on $F(V) \subset V$?

Exercice 6. Soit $\varphi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ une application polynomiale de composantes $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$. On note $J \in k[X_1, \cdots, X_n]$ le déterminant de la matrice Jacobienne $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}\right)_{i,j}$.

a) Prouver que si φ est un isomorphisme, alors $J \in k^\times$.

b) La réciproque est-elle vraie ? (ne pas passer trop de temps sur cette question...)