TD n°1.

Exercice 1. Soit $S \subset k^n$ un ensemble quelconque et $I_S := \{f \in \mathcal{O}(k^n), \forall x \in S, f(x) = 0\}$. Montrer que V_{I_S} est l'adhérence de S pour la topologie de Zariski.

Exercice 2. Montrer que si $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ sont deux sous-ensembles algébriques, alors leur produit $V \times W \subset k^{n+m}$ est un sous-ensemble algébrique.

Exercice 3. Supposons k infini. Montrer que la topologie de Zariski sur k^{n+m} n'est pas la topologie produit de la topologie de Zariski sur k^n par celle sur k^m.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{O}(k^n)$ et $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles (avec les f_i deux à deux non associés). Montrer que $V_f = \bigcup_i V_{f_i}$. Est-il toujours vrai que les V_{f_i} sont des composantes irréductibles de V ?

Exercice 5. Supposons k algébriquement clos. Montrer qu'un sous-ensemble algébrique $V \subset k^n$ a un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont en bijection avec les idempotents primitifs de $\mathcal{O}(V)$.

Exercice 6. On suppose k algébriquement clos.
i) Soit $C \subset k^3$ l'image de l'application $t \mapsto (t, t^2, t^3)$. Montrer que C est algébrique, calculer I_C et montrer que $\mathcal{O}(C) \simeq k[X]$.
ii) Soit $C \subset k^2$ l'image de l'application $t \mapsto (t^2, t^3)$. Montrer que C est algébrique, calculer I_C et montrer que $\mathcal{O}(C)$ n'est pas isomorphe à $k[X]$.

Exercice 7. Soit $V \subset k^n$ un sous-ensemble algébrique et $f \neq 0$ une fonction polynomiale sur V. On note U_f l'ouvert de V associé. Montrer que l'application $U_f \longrightarrow k^{n+1}$, $x \mapsto (x, f(x)^{-1})$ est injective et que son image W_f est un sous-ensemble algébrique de k^{n+1}. Calculer $\mathcal{O}(W_f)$ (on pourra commencer par le cas $V = k^n$).

Exercice 8. Montrer que l'image de l'application $(x, y) \mapsto (x, xy)$, $k^2 \longrightarrow k^2$ n'est ni fermée ni ouverte.

Exercice 9. Dans k^3 soit V le sous-ensemble algébrique défini par l'idéal $(X^2 - YZ, XZ - X)$. Trouver les composantes connexes de V et leurs idéaux premiers associés.

Exercice 10. Soient $f, g \in k[X, Y]$ irréductibles et non associés.

a) Montrer qu'il existe $d \in k[X]$ *non nul* et $a, b \in k[X, Y]$ tels que $af + bg = d$ dans $k[X, Y]$.
b) En déduire que l'image de $V_{(f,g)}$ par la première projection $k^2 \longrightarrow k$ est finie, puis que $V_{(f,g)}$ est fini.
c) En utilisant la théorie du résultant (cf exercice suivant), montrer qu'on peut choisir d de degré $\leqslant \deg(f)\deg(g)$.
d) Montrer finalement que $|V_{(f,g)}| \leqslant \deg(f)\deg(g)$.

Exercice 11 (Résultant)**.** Soit A un anneau commutatif et $f, g \in A[X]$ de degrés respectifs p et q. Notons $A[X]_{<n}$ le A-module libre des polynômes de degré $< n$ et considérons l'application A-linéaire

$$A[X]_{<p} \times A[X]_{<q} \longrightarrow A[X]_{<p+q} : (u, v) \mapsto uf + vg.$$

On note $\mathrm{Res}_X(f, g)$ son déterminant dans les bases $\{1, \cdots, X^{p-1}\} \sqcup \{1, \cdots, X^{q-1}\}$ et $\{1, \cdots, X^{p+q-1}\}$.

a) Montrer qu'il existe u, v dans $A[X]_{<p} \times A[X]_{<q}$ tels que $uf + vg = \mathrm{Res}_X(f, g)$.
b) Supposons que $A = k[X_1, \cdots, X_n]$ et que f et g soient *homogènes* de degrés p et q, en tant que polynômes en $X, X_1, \cdots, X_n$. Alors montrer que $\mathrm{Res}_X(f, g)$ est homogène de degré pq.

Exercice 12. Soit $f \in k[X, Y]$ irréductible de degré $\leqslant 2$ avec k algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$. Montrer que $\mathcal{O}(V_f)$ est isomorphe à $k[T]$ ou à $k[T, T^{-1}]$.