TD n°2.

Exercice 1. Soient A, B deux k-algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos. Montrer directement que $\mathrm{Max}(A \otimes_k B) = \mathrm{Max}(A) \times \mathrm{Max}(B)$. Est-ce encore vrai si k n'est pas algébriquement clos ? Est-ce encore vrai si on remplace Max par Spec ?

Exercice 2. Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ une application polynomiale. Montrer que l'adhérence de Zariski $\overline{\varphi(V)}$ de $\varphi(V)$ dans W est le fermé défini par l'idéal $\mathrm{Ker}\, \varphi^*$.

Exercice 3. Montrer que les fibres d'un morphisme fini sont finies, puis donner un exemple d'un morphisme qui n'est pas fini mais dont les fibres sont toutes finies.

Exercice 4. Soient V, W deux variétés affines irréductibles. Montrer que $V \times W$ est irréductible.

Exercice 5. Soient $V_1, \cdots, V_r$ des variétés affines. Montrer que la réunion disjointe $\coprod_{i=1}^r V_i$ est encore une variété affine. Quel est son algèbre de fonctions ?

Exercice 6. On appelle *groupe algébrique affine* une variété affine G munie d'une loi associative donnée par un morphisme de variétés $G \times G \longrightarrow G$, d'un élément neutre e pour cette loi, et dont l'inverse est aussi donné par un morphisme de variétés $G \longrightarrow G$.

a) Montrer que k, $k^\times$ et $\mathrm{GL}_n(k)$ sont des groupes algébriques, ainsi que les groupes classiques $SL_n(k)$, $SO_n(k)$ et $Sp_{2n}(k)$

b) Soit G une variété d'algèbre de fonctions $A := \mathcal{O}(G)$, et soit e un point de G correpondant à un morphisme $A \xrightarrow{\varepsilon} k$. Expliciter les conditions sur un morphisme de k-algèbres $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_k A$ pour que le morphisme de variétés $G \times G \longrightarrow G$ correspondant soit une loi associative d'élément neutre e. Puis expliciter les conditions sur un morphisme de k-algèbres $\iota : A \longrightarrow A$ pour qu'il définisse l'inverse pour la loi associée à Δ.

c) Calculer l'algèbre A et les morphismes ε, Δ et ι pour $G = k$ (groupe additif), $G = k^\times$ (groupe multiplicatif) et $G = \mathrm{GL}_n(k)$.

La donnée $(A, \varepsilon, \Delta, \iota)$ est appelée “algèbre de Hopf”. Celle de (A, ε, Δ) est appelée “bigèbre”.