TD n°3.

Exercice 1. Soit V une variété algébrique, W une variété *affine* et $\varphi_1, \varphi_2 : V \longrightarrow W$ deux morphismes.

a) Montrer que $\{P \in V, \varphi_1(P) = \varphi_2(P)\}$ est fermé dans V.

b) En déduire que s'il existe un ouvert dense U de V tel que $(\varphi_1)_{|U} = (\varphi_2)_{|U}$, alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

c) Montrer que, sur l'ensemble des couples (U, φ) formés d'un ouvert U dense dans V et d'un morphisme $\varphi : U \longrightarrow W$, la relation $(U, \varphi) \sim (U', \varphi') \Leftrightarrow \varphi_{|U\cap U'} = \varphi'_{|U\cap U'}$ est bien une relation d'équivalence.

d) Supposons $W = \mathbb{A}^1$ et notons $\mathcal{M}(V)$ l'ensemble des applications rationnelles $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ (i.e. des classes d'équivalence de couples (U, φ) comme ci-dessus).

   i) Montrer que $\mathcal{M}(V)$ est une k-algèbre.

   ii) Si $V_1, \cdots, V_r$ sont les composantes irréductibles de V, alors $\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(V_r)$.

Exercice 2. Soit V une variété algébrique irréductible et $\mathcal{M}(V)$ son corps de fonctions rationnelles.

a) Montrer que pour tout P, on a une inclusion naturelle $\mathcal{O}_{V,P} \subset \mathcal{M}(V)$.

b) Montrer que pour tout ouvert U, on a $\Gamma(U, \mathcal{O}_V) = \bigcap_{P\in U} \mathcal{O}_{V,P}$, l'intersection étant prise dans $\mathcal{M}(V)$.

c) Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ un morphisme. Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si φ est un homéomorphisme et $\varphi_P^* : \mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$ est un isomorphisme de k-algèbres pour tout point P de V.

Exercice 3. Soit V une variété algébrique. Pour $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ non nulle, on note $U_f := \{P \in V, f(P) \neq 0\}$. Donc U_f est un ouvert mais n'est a priori pas affine puisque V ne l'est pas nécessairement.

a) Montrer que $\Gamma(U_f, \mathcal{O}_V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)[f^{-1}]$.

b) Montrer que si $f_1, \cdots, f_r \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ engendrent l'idéal unité, et si les ouverts U_{f_i} sont des variétés affines, alors V est affine. Plus précisément, le morphisme canonique $V \xrightarrow{\gamma_V} \mathrm{Spm}(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))$ est un isomorphisme.

Exercice 4. Soit W une variété algébrique. Notons $\Delta_W \subset W \times W$ la “diagonale” de W.

a) Montrer que Δ_W est un sous-ensemble localement fermé.

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (on dit alors que W est *quasi-séparée*) :

   i) Δ_W est fermé dans $W \times W$.

   ii) Pour toute paire de morphismes de variétés $\varphi, \varphi' : V \longrightarrow W$, l'ensemble $\{P \in V,\ \varphi(P) = \varphi'(P)\}$ est fermé.

   iii) Pour toute paire d'ouverts affines $U, U' \subset W$, l'intersection $U \cap U'$ est encore affine, et le morphisme évident $\mathcal{O}(U) \otimes_k \mathcal{O}(U') \longrightarrow \mathcal{O}(U \cap U')$ est surjectif.

c) Montrer qu'une variété affine est quasi-séparée.

d) On considère l'espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ obtenu en recollant deux copies de $\mathbb{A}^n$ le long de $\mathbb{A}^n \setminus \{O\}$. Formellement, on part de $Y := \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n \times \{1, 2\}$ que l'on munit de la relation d'équivalence qui identifie les points $(P, 1)$ et $(P, 2)$ lorsque $P \neq O$, puis on note X l'espace topologique quotient (i.e. $U \subset X$ est ouvert ssi $\pi^{-1}(U) \subset Y$ est ouvert) muni du faisceau de fonctions induit (i.e. $f : U \subset X \longrightarrow k$ est déclarée régulière ssi $f \circ \pi \in \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$). Montrer que $(X, \mathcal{O}_X)$ est une variété algébrique non quasi-séparée.

Exercice 5. Supposons k de caractéristique p. Montrer que l'application polynomiale $F : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1^p, \cdots, x_n^p)$ est un morphisme fini $\mathbb{A}_k^n \longrightarrow \mathbb{A}_k^n$, qui est un homéomorphisme de k^n sur k^n mais pas un isomorphisme de $\mathbb{A}_k^n$ sur $\mathbb{A}_k^n$. Soit $V \subset k^n$ un sous-ensemble algébrique. À quelle condition a-t-on $F(V) \subset V$?

Exercice 6. Soit $\varphi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ une application polynomiale de composantes $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$. On note $J \in k[X_1, \cdots, X_n]$ le déterminant de la matrice Jacobienne $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}\right)_{i,j}$.

a) Prouver que si φ est un isomorphisme, alors $J \in k^\times$.

b) La réciproque est-elle vraie ? (ne pas passer trop de temps sur cette question...)