TD n°5.

Partout, k est un corps algébriquement clos.

Exercice 1. a) Soit $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{A}^d$ un morphisme fini surjectif et $D \subset \mathbb{A}^d$ une droite. Montrer que pour toute composante irréductible C de $\varphi^{-1}(D)$, on a $\varphi(C) = D$ et $\dim(C) = 1$.

b) Soit V une variété irréductible, $U \subset V$ un ouvert, et $Q \in V \setminus U$ un point. Montrer qu'il existe une sous-variété fermée $C \subset V$ irréductible de dimension 1 telle que $P \in C$ et $C \cap U \neq \emptyset$.

Exercice 2. Montrer que tout sous-ensemble fini $S \subset \mathbb{P}^n$ est contenu dans un ouvert principal. Montrer aussi que pour chaque $P \in S$ il existe un hyperplan H tel que $H \cap S = \{P\}$.

Exercice 3. Soient C, C' deux courbes irréductibles lisses et complètes.

a) Montrer qu'un morphisme $C \longrightarrow C'$ est surjectif si et seulement si il est non constant.

b) Montrer que toute application rationnelle $f : C - - > C'$ est représentée par un unique morphisme $\varphi : C \longrightarrow C'$.

c) Montrer que l'application $\varphi \mapsto \varphi^* : \text{Mor.Surj.}(C, C') \longrightarrow \text{Hom}_{k-\text{alg}}(\mathcal{M}(C'), \mathcal{M}(C))$ est bijective.

d) Montrer que l'application $\text{Mor.Surj.}(C, \mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathcal{M}(C) \setminus k$ qui envoie φ sur la fonction rationnelle $\varphi_{|\varphi^{-1}(\mathbb{A}^1)} : C \longrightarrow k$ est une bijection.

Exercice 4. Soit C une courbe complète irréductible et lisse. Nous allons montrer que C est projective. Nous fixons pour cela un recouvrement $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$ de C par des courbes ouvertes affines.

a) Montrer que pour chaque i, il existe une courbe irréductible projective $\bar{C}_i$ et un morphisme $C \xrightarrow{\varphi_i} \bar{C}_i$ dont la restriction à C_i est une immersion ouverte $C_i \hookrightarrow \bar{C}_i$.

b) Posons $\bar{C}$ l'adhérence de l'image du morphisme produit $\varphi : C \longrightarrow \prod_{i=1}^r \bar{C}_i$.

   i) Montrer que $\bar{C}$ est une courbe irréductible projective et que $C \xrightarrow{\varphi} \bar{C}$ est birationnel et surjectif.

   ii) Montrer que pour tout $P \in C$, le morphisme $\varphi^* : \mathcal{O}_{\bar{C},\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P}$ est un isomorphisme.

c) Montrer que φ est un isomorphisme (utiliser l'exercice précédent).

Exercice 5. a) Montrer que le foncteur contravariant $C \longrightarrow \mathcal{M}(C)$ de la catégorie des courbes irréductibles lisses et complètes munies des morphismes surjectifs dans la catégorie des extensions de k de type fini et degré de transcendence 1 est une anti-équivalence de catégories. (utiliser les deux exercices précédents).

b) Soit K un corps de degré de transcendance 1 et C_K "la" courbe lisse complète telle que $\mathcal{M}(C_K) = K$.

   i) Montrer que l'application $P \mapsto \text{ord}_P$ est une bijection de C_K sur l'ensemble des valuations discrètes $v : K \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ sur K.

   ii) Pour $f \in K \backslash k$, notons $C_{K,f}$ l'ouvert de définition de f, i.e. l'ensemble des $P \in C_K$ tels que $f \in \mathcal{O}_{C_K,P}$. Montrer que $C_{K,f}$ est affine et $\mathcal{O}(C_{K,f})$ est la clôture intégrale de $k[f]$ dans K.

Exercice 6. On dit qu'un morphisme $V \xrightarrow{\varphi} W$ est fini s'il existe un recouvrement de W par des ouverts affines U_i tel que $\varphi^{-1}(U_i)$ est affine et $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(U_i))$ est un $\mathcal{O}(U_i)$-module de type fini. Montrer que tout morphisme surjectif entre courbes complètes lisses est fini.