Cours introductif de M2
Variétés algébriques

Jean-François Dat

2022-2023

L'étude des solutions de systèmes d'équations polynomiales dans un espace affine ou un espace projectif soulève des questions de natures diverses.

Par exemple, si les équations sont à coefficients entiers, l'existence même de solutions entières ou rationnelles est en général un problème difficile et, lorsqu'elles existent, on s'intéresse à leur "répartition" parmi les solutions complexes. On peut aussi s'intéresser au comptage des solutions à valeurs dans un corps fini. Ces questions sont de nature *arithmétique*. Même dans le cas d'une seule équation en une variable, elles sont non triviales et ont par exemple donné naissance à la théorie de Galois des extensions de corps.

D'un autre côté, si on s'intéresse aux solutions complexes ou plus généralement dans un corps algébriquement clos, alors l'existence est un problème "facile à décider" grâce au *Nullstellensatz* que l'on énoncera plus loin. Les ensembles de solutions sont souvent infinis et la question est plus d'étudier leur "forme", leur "régularité", leurs éventuels "invariants topologiques". D'où des questions de nature *géométrique*. Noter que dans le cas d'une équation à une variable, le dénombrement des solutions est bien connu mais déjà un peu subtil, puisqu'il fait intervenir une notion de "multiplicité".

Il se trouve que ces deux problèmes sont intimement liés : la géométrie influe sur les propriétés arithmétiques. Par exemple, la célèbre conjecture de Mordell prouvée par Faltings affirme qu'une courbe algébrique définie sur $\mathbb{Q}$ (ie par un système d'équations polynomiales à coefficients rationnels) n'a qu'un nombre fini de $\mathbb{Q}$-points (ie de solutions rationnelles) dès que son "genre topologique" est $\geqslant 2$.

Le langage des variétés algébriques est en quelque sorte le premier que les mathématiciens ont utilisé pour appréhender ces questions. Comparé à celui des schémas, il a l'avantage de rester proche des problèmes initiaux et de l'intuition "géométrique" habituelle. Il reste suffisant aussi pour quelques questions d'arithmétique, comme illustré dans le cours "courbes elliptiques" par exemple. Il devient insuffisant lorqu'on veut travailler sur un anneau comme $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ou même un corps imparfait, ou lorsqu'on s'intéresse aux "problèmes de modules", c'est-à-dire aux variétés qui classifient des variétés d'un certain type (mais là, même le langage des schémas devient parfois insuffisant...).

Table des matières

1 Variétés affines

On désigne par k un corps, qu'on supposera assez rapidement algébriquement clos. Les géomètres préfèreront penser à $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et les arithméticiens penseront aussi à $k = \mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}$ ou $k = \mathbb{F}_p, \overline{\mathbb{F}}_p$.

1.1 Polynômes et fonctions polynomiales

Une fonction $f : k^n \longrightarrow k$ est dite *polynomiale* si elle est de la forme

$$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,\cdots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

pour des éléments $a_{i_1,\cdots,i_n} \in k$ presque tous nuls. L'ensemble $\mathcal{O}(k^n)$ de toutes les fonctions polynomiales sur k^n est stable par addition et multiplication ; c'est une *sous-k-algèbre* de la k-algèbre k^{k^n} de toutes les fonctions $k^n \longrightarrow k$.

Il convient a priori de la distinguer de la k-algèbre "abstraite" des polynômes en n indéterminées $X_1, \cdots X_n$, que l'on note $k[X_1, \cdots, X_n]$. Celle-ci est caractérisée par la propriété universelle suivante : *pour toute k-algèbre commutative A et toute famille d'éléments $a_1, \cdots, a_n \in A$, il existe un unique morphisme de k-algèbres*

$$\varphi : k[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow A \textit{ tel que } \varphi(X_i) = a_i \textit{ pour chaque } i = 1, \cdots, n.$$

On note en général $\varphi = \mathrm{ev}_{a_1,\cdots,a_n}$ et on l'appelle "morphisme d'évaluation". Concrètement, on construit $k[X_1, \cdots, X_n]$ comme le k-ev de base la famille des "monômes" $X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ où $(i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, et on étend par linéarité la multiplication évidente des monômes.

Par la propriété universelle appliquée à $A = k$, tout point $(x_1, \cdots, x_n) \in k^n$ donne un morphisme d'évaluation $\mathrm{ev}_{x_1,\cdots,x_n} : k[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow k$. Pour un polynôme $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ on notera aussi simplement

$$f(x_1, \cdots, x_n) := \mathrm{ev}_{x_1,\cdots,x_n}(f) \in k,$$

ce qui définit une fonction sur k^n, laquelle est manifestement polynomiale. Le lien entre fonctions polynomiales et polynômes se voit aussi en appliquant la propriété universelle ci-dessus à $A = k^{k^n}$ et $a_i := i-$eme fonction coordonnée $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$. Elle nous fournit un morphisme de k-algèbres

$$\mathrm{ev} : k[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow \mathcal{O}(k^n)$$

qui est manifestement *surjectif.* On prendra garde au fait que si k est fini, ce morphisme n'est pas injectif, par exemple $X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$ s'envoie sur la fonction nulle sur $\mathbb{F}_p$. Néanmoins, comme on supposera souvent notre corps k *algébriquement clos*, donc infini, le lemme suivant nous dit qu'on pourra "abuser" en confondant fonctions polynomiales et polynômes :

1.1.1 Lemme.– *Si k est infini,* ev *est un isomorphisme.*

Démonstration. Il faut voir que si $f \neq 0$, alors il existe un point $(x_1, \cdots, x_n) \in k^n$ tel que $f(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$. Si $n = 1$, cela résulte du fait que $k[X]$ est principal, donc f n'a qu'un nombre fini de facteurs irréductibles. Or, toute racine de f dans k fournit un tel facteur irréductible, donc f n'a qu'un nombre fini de racines dans k. On raisonne alors par récurrence. Supposons la propriété voulue démontrée pour $n-1$ et écrivons $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i X_n^i$ avec $f_i \in k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$. On a $f \neq 0 \Rightarrow \exists i, f_i \neq 0$. Pour un tel i, il existe donc $x_1, \cdots, x_{n-1} \in k^{n-1}$ tels que $f_i(x_1, \cdots, x_{n-1}) \neq 0$. Mais alors le polynôme $g = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x_1, \cdots, x_{n-1}) X_n^i \in k[X_n]$ est non nul, donc il existe $x_n \in k$ tel que $g(x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$. $\square$

On suppose dorénavant que k est infini.

1.1.2 Remarque.– On aperçoit déjà la "dualité" entre espaces et algèbres de fonctions qui va nous occuper dans ce chapitre. En effet, si l'algèbre $\mathcal{O}(k^n)$ est définie à partir de l'espace k^n, on peut "retrouver" ensemblistement k^n à partir de son algèbre de fonctions via les bijections réciproques $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{O}(k^n), k) \simeq k^n$ données par $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \mathrm{ev}_{x_1,\cdots,x_n}$ et $\varphi \mapsto (\varphi(X_1), \cdots, \varphi(X_n))$.

1.2 Sous-ensembles algébriques

Fixons k et n. À un ensemble $F \subset \mathcal{O}(k^n)$ de fonctions polynomiales on associe le lieu des zéros communs de ces fonctions dans k^n :

$$V_F := \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in k^n, \forall f \in F, f(x) := f(x_1, \cdots, x_n) = 0\}.$$

Un tel sous-ensemble de k^n est dit "algébrique".

Exemples. –
— Si F ne contient que des polynômes de degré au plus 1, resp. *homogènes* de degré 1 (i.e. des combinaisons linéaires des coordonnées), alors V_F est un sous-espace affine de k^n, resp. un sous-espace vectoriel de k^n.
— Si $n = 1$ et $f \neq 0$, alors $V_{\{f\}}$ est fini, éventuellement vide (par exemple si $k = \mathbb{R}$ et $f = X^2 + 1$). Si $k = \mathbb{C}$ ou plus généralement si k est algébriquement clos, V_f est toujours non vide.
— Si $n = 2$, $f \neq 0$ et $k = \mathbb{R}$, $V_{\{f\}}$ est en général une "courbe" (par exemple $f = X^2 + Y^2 - 1$ définit un cercle), mais est parfois fini (par exemple $f = X^2 + Y^2$ définit le singleton $\{(0, 0)\}$) ou vide ($f = X^2 + Y^2 + 1$). En revanche, si $k = \mathbb{C}$, $V_{\{f\}}$ est toujours non vide et infini, et c'est "intuitivement" une surface réelle, ou plutôt une courbe complexe.
— Plus généralement, si $f \neq 0$, $V_{\{f\}}$ est appelée "hypersurface" de k^n.
— Tout singleton est un sous-ensemble algébrique. En effet, si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ alors $\{x\} = V_F$ avec $F = \{X_1 - x_1, \cdots, X_n - x_n\}$.

Bien-sûr, plusieurs ensembles F différents peuvent définir le même lieu V_F. Pour commencer, on remarque que V_F ne dépend que de l'idéal $I = \langle F \rangle$ de $\mathcal{O}(k^n)$ engendré par F.

1.2.1 Rappel– Si A est un anneau noethérien, alors $A[X]$ est noethérien aussi. En particulier, $k[X_1, \cdots, X_n]$ est noethérien.

Puisque $\mathcal{O}(k^n)$ est un anneau *noethérien*, tous ses idéaux sont de type fini, donc on voit que *tout sous-ensemble algébrique peut être défini par une famille finie de polynômes.*

Néanmoins, deux idéaux peuvent donner le même sous-ensemble algébrique, par exemple $I = (X_1, X_2)$ et $I' = (X_1, X_2^2)$ définissent tous deux le singleton $V = \{(0, 0)\}$ du plan k^2. Plus généralement, rappelons la définition du *radical* d'un idéal I :

$$\sqrt{I} := \{f \in I, \exists n \in \mathbb{N}, f^n \in I\},$$

qui est aussi un idéal, et qui a la propriété d'être *radiciel*, i.e. qui vérifie l'égalité $I = \sqrt{I}$.

Exercice. – Vérifier que $V_I = V_{\sqrt{I}}$.

Lorsque k n'est pas algébriquement clos, il est généralement très difficile de déterminer si $V_I = V_{I'}$. Déjà pour $n = 1$ et $k = \mathbb{R}$, on voit que $I = (X^2 + 1)$ et $I' = (X^2 + 2)$ donnent $V_I = V_{I'} = \emptyset$. En revanche :

Exercice. – Si $n = 1$ et k est algébriquement clos, et si $I, I' \subset k[X]$ sont radiciels tels que $V_I = V_{I'}$, alors montrer que $I = I'$. Plus précisément, montrer que l'application $I \mapsto V_I$ est une bijection décroissante entre idéaux radiciels de $k[X]$ et sous-ensembles algébriques de k, dont la bijection réciproque est donnée par $V \mapsto I_V := \{f \in k[X], \forall x \in V, f(x) = 0\}$. [On commencera par vérifier que I est radiciel ssi son générateur unitaire f est sans racine multiple].

Nous verrons plus loin que cet énoncé est encore vrai pour $n > 1$, et est une conséquence du *Nullstellensatz* de Hilbert.

1.2.2 Définition.– *Soit $V \subset k^n$ un sous-ensemble algébrique. Une fonction $f : V \longrightarrow k$ est dite* polynomiale *(ou* régulière*) si elle est la restriction à V d'une fonction polynomiale sur k^n.*

Les fonctions polynomiales sur V forment une sous-k-algèbre notée $\mathcal{O}(V)$ de la k-algèbre de toutes les fonctions sur V. Par définition, l'application de restriction $f \mapsto f_{|V}$ définit un morphisme de k-algèbre $\mathcal{O}(k^n) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ *surjectif*. On note I_V son noyau, i.e.

$$I_V = \{f \in \mathcal{O}(k^n), \forall x \in V, f(x) = 0\}$$

et on a donc $\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(k^n)/I_V$. En utilisant la propriété universelle des quotients, on déduit de la remarque 1.1.2 des bijections réciproques

$$V \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{O}(V), k)$$

qui montrent comment récupérer l'ensemble V "abstrait" à partir de l'algèbre $\mathcal{O}(V)$. Voici un autre point de vue :

1.2.3 Remarque.– Si V est un singleton, alors on a manifestement $\mathcal{O}(V) = k$, et donc I_V est un idéal *maximal* de corps résiduel k. Concrètement, si $V = \{x\}$ avec $x = (x_1, \cdots, x_n)$, alors $I_V = \mathfrak{m}_x := (X_1 - x_1, \cdots, X_n - x_n)$. Réciproquement, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}(k^n)$ de corps résiduel k, alors le morphisme de passage au quotient $\pi : \mathcal{O}(k^n) \longrightarrow \mathcal{O}(k^n)/\mathfrak{m} = k$ fournit un point $x := (\pi(X_1), \cdots, \pi(X_n)) \in k^n$ et on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ et $V_{\mathfrak{m}} = \{x\}$. Ceci établit une bijection entre l'ensemble k^n et l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{O}(k^n)$ de corps résiduel k. Si maintenant $V \subset k^n$ est un sous-ensemble algébrique quelconque, alors un point x est dans V si et seulement si son idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ contient I_V. On obtient donc une bijection

$$V \leftrightarrow \{\text{id. max. de } \mathcal{O}(V) \text{ de corps résiduel } k\}$$

Exercice : expliciter le lien avec la bijection au-dessus de la remarque.

1.2.4 REMARQUE.– *Pour tout sous-ensemble algébrique $V \subset k^n$, on a $V_{I_V} = V$.* En effet, l'inclusion $V \subset V_{I_V}$ est tautologique et, pour l'autre inclusion, on sait que V est de la forme V_I pour un idéal I, lequel est par définition contenu dans I_V, donc $V = V_I \supset V_{I_V}$.

1.3 Topologie de Zariski

Rappel d'algèbre commutative. – On rappelle que la somme et le produit de deux idéaux I, I' d'un anneau commutatif A sont définis par

$$I + I' = \{i + i', i \in I, i' \in I'\} \text{ et } I.I' = \langle ii', i \in I, i' \in I' \rangle \text{ (idéal engendré).}$$

On a alors $II' \subset I \cap I'$ et $I + I' = \langle I \cup I' \rangle$. Plus généralement, on définit la somme et le produit d'une famille *finie* d'idéaux de manière évidente. Dans le cas d'une famille *quelconque* d'idéaux $(I_r)_{r \in R}$, on définit la somme par la formule

$$\sum_{r \in R} I_r = \bigcup_{S \subset R \text{ fini}} \sum_{s \in S} I_s$$

qui est encore un idéal de A.

1.3.1 LEMME.– *i) Si $I \subset I'$ alors $V_I \supset V_{I'}$.*

ii) Si $(I_r)_{r \in R}$ est une famille quelconque d'idéaux, alors $V_{\sum_r I_r} = \bigcap_r V_{I_r}$.

iii) On a $V_I \cup V_{I'} = V_{I \cap I'} = V_{II'}$

Démonstration. i) est immédiat et ii) est facile, ainsi que les inclusions $V_I \cup V_{I'} \subset V_{I \cap I'} \subset V_{II'}$. Pour voir la dernière inclusion, soit $x \in V_{II'} \setminus V_I$. Fixons $f \in I$ telle que $f(x) \neq 0$. Alors pour toute $g \in I'$ on a $fg \in II'$ donc $0 = (fg)(x) = f(x)g(x)$ donc $g(x) = 0$, et il s'ensuit que $x \in V_{I'}$. □

Exercice. – Montrer que iii) ne se généralise pas à une famille quelconque d'idéaux.

1.3.2 COROLLAIRE.– *Les sous-ensembles algébriques de k^n sont les fermés d'une topologie sur l'ensemble k^n, appelée* topologie de Zariski.

Pour expliciter les ouverts de cette topologie, introduisons la notation suivante :

1.3.3 NOTATION.– Pour $f \in \mathcal{O}(k^n)$, on note $U_f := k^n \setminus V_{\{f\}} = \{x \in k^n, f(x) \neq 0\}$.

Puisque complémentaire d'un fermé, U_f est manifestement un ouvert de Zariski de k^n. De tels ouverts sont appelés *principaux* (parfois aussi *standards*). Les ouverts principaux sont stables par intersection, puisque $U_f \cap U_g = U_{fg}$. Par ailleurs tout ouvert de Zariski U est réunion d'ouverts principaux : en effet, U est par définition le complémentaire d'un ensemble algébrique V_I et on a $V_I = \bigcap_{f \in I} V_{\{f\}}$, de sorte que $U = \bigcup_{f \in I} U_f$. En fait, U est même réunion *finie* d'ouverts principaux puisque si $I = (f_1, \cdots, f_m)$, alors $U = \bigcup_{i=1}^m U_{f_i}$.

Remarque. – Si $n = 1$, alors les ouverts de Zariski sont les complémentaires d'ensembles finis. On voit en particulier que deux ouverts non vides ont toujours une intersection énorme ! Cette topologie est donc loin d'être séparée.

Remarque. – Si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les fonctions polynomiales sont continues, donc les fermés de Zariski sont des fermés au sens de la topologie métrique usuelle et, de même, les ouverts de Zariski sont ouverts au sens usuel. En revanche, une boule ouverte n'est pas un ouvert de Zariski en général. On dit que la topologie de Zariski est *strictement plus grossière* que la topologie usuelle.

Remarque. – Muni de la topologie de Zariski, k^n n'est pas séparé (cf ci-dessus), *mais* satisfait au second axiome de la définition de compacité : *tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini* (encore une grosse différence avec la topologie usuelle) : on dit que k^n est *quasi-compact.* En effet, quitte à raffiner, on peut supposer que le recouvrement est formé d'ouverts principaux, i.e. $k^n = \bigcup_{r \in R} U_{f_r}$, de sorte que $\emptyset = V_{\langle f_r, r \in R\rangle}$. Or, par noethériannité, l'idéal $\langle f_r, r \in R\rangle$ engendré par les f_r est de type fini donc il existe $S \subset R$ fini tel que $\langle f_r, r \in R\rangle = \langle f_s, s \in S\rangle$. On a alors $\emptyset = V_{\langle f_s, s \in S\rangle}$ et finalement $k^n = \bigcup_{s \in S} U_{f_s}$.

Voici encore une différence importante avec les topologies métriques :

Lemme. – *L'ensemble k^n muni de la topologie de Zariski est* noethérien*, au sens où toute suite décroissante de fermés de Zariski est stationnaire.*

Démonstration. Si $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors la suite d'idéaux $(I_{V_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc stationnaire. Mais on a vu précédemment que $V_i = V_{I_{V_i}}$ pour tout i, donc $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est stationnaire aussi. □

Exercice. – Soit $S \subset k^n$ un ensemble quelconque et $I_S := \{f \in \mathcal{O}(k^n), \forall x \in S, f(x) = 0\}$. Montrer que V_{I_S} est l'adhérence de S pour la topologie de Zariski.

Bien-sûr, chaque sous-ensemble algébrique $V \subset k^n$ est naturellement muni de la topologie induite. Les fermés de V sont alors de la forme V_J pour un idéal $J \supset I_V$ et sont donc associés aux idéaux de $\mathcal{O}(V)$.

Lemme. – *Pour un espace topologique X, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) X n'est pas réunion de deux fermés propres.

ii) Deux ouverts non vides de X ont une intersection non vide.

iii) Tout ouvert de X est dense.

La preuve est laissée en exercice.

1.3.4 Définition.– *Un espace topologique qui vérifie les propriétés du lemme ci-dessus est dit* irréductible.

Exemples. –
- Dans la droite k, les fermés propres non vides sont les sous-ensembles finis. Un tel fermé est donc irréductible si et seulement si c'est un singleton et, en général, ses composantes irréductibles coïncident avec ses composantes connexes.

— Dans le plan k^2, le fermé défini par (XY) est réunion de l'axe des X (défini par l'idéal (Y)) et l'axe des Y (défini par l'idéal (X)) et n'est donc pas irréductible. Ses composantes irréductibles sont les deux axes.
— Dans k^3, les composantes irréductibles du fermé défini par l'idéal (XY, XZ) sont le plan d'équation $x = 0$ et l'axe des x.

1.3.5 Lemme.– *Un sous-ensemble algébrique $V \subset k^n$ est irréductible si et seulement si son algèbre de fonctions polynomiales $\mathcal{O}(V)$ est intègre (ou de manière équivalente, son idéal I_V est premier).*

Démonstration. Supposons $\mathcal{O}(V)$ non intègre et soient $f, g \in \mathcal{O}(V)$ deux fonctions *non nulles* telles que $fg = 0$. Alors manifestement, $V = V_f \cup V_g$ mais $V_f \neq V$ et $V_g \neq V$, donc V n'est pas irréductible. Réciproquement, si $V = V_I \cup V_J$ est réunion de deux fermés propres, alors $V = V_{IJ}$, donc $IJ = (0)$. Or $I \neq (0)$ et $J \neq (0)$ (puisque les fermés sont propres), donc $\mathcal{O}(V)$ n'est pas intègre. □

1.3.6 Proposition.– *Un sous-ensemble algébrique $V \subset k^n$ est réunion finie de fermés irréductibles.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un contre-exemple, i.e. un sous-ensemble algébrique qui n'est pas réunion finie de fermés irréductibles. Comme toute suite décroissante de sous-ensembles algébriques est stationnaire, il existe alors un contre-exemple minimal W pour l'inclusion. Ce W n'est évidemment pas irréductible, donc il peut s'écrire comme réunion $W = W_1 \cup W_2$ de fermés propres. Par minimalité de W, W_1 et W_2 sont réunions finies de fermés irréductibles, donc W aussi : contradiction. □

1.3.7 Définition.– *On appelle* composante irréductible *de V tout fermé irréductible maximal pour l'inclusion.*

Un ensemble algébrique a donc un nombre fini de composantes irréductibles, et est réunion de ces composantes.

1.3.8 Rappel– Si A est un anneau factoriel (UFD), alors $A[X]$ est aussi factoriel. En particulier, $k[X_1, \cdots, X_n]$ est factoriel.

Exercice. – Soit $f \in \mathcal{O}(k^n)$ et $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles (avec les f_i deux à deux non associés). Montrer que $V_f = \bigcup_i V_{f_i}$. Est-il toujours vrai que les V_{f_i} sont des composantes irréductibles de V ?

Exercice. – Montrer que si $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ sont deux sous-ensembles algébriques, alors leur produit $V \times W \subset k^{n+m}$ est un sous-ensemble algébrique.

1.4 Quelques conséquences du Nullstellensatz

Comme son nom l'indique, le "Théorème des zéros" de Hilbert est un résultat d'existence de solutions d'un système d'équations polynomiales. Plus précisément, il affirme que, *si k est algébriquement clos*, alors pour tout idéal *propre* I de $\mathcal{O}(k^n)$, on a $V_I \neq \emptyset$. Si on analyse un peu cet énoncé, on voit en utilisant l'existence d'idéaux maximaux dans tout anneau (non constructif à cause du lemme de Zorn) qu'il suffit de le montrer pour I idéal maximal. Lorsque $I = \mathfrak{m}$ est un idéal maximal dont le corps résiduel est k (i.e. tel que $k \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k^n)/\mathfrak{m}$), on a déjà vu que $V_\mathfrak{m}$ est un singleton, donc en particulier non vide. Réciproquement, si $V_\mathfrak{m} \neq \emptyset$, on a vu que tout $x \in V_\mathfrak{m}$ définit un morphisme de k-algèbres $\mathrm{ev}_x : \mathcal{O}(k^n)/\mathfrak{m} \longrightarrow k$, et puisque $\mathcal{O}(k^n)/\mathfrak{m}$ est un corps, un tel morphisme doit être bijectif, i.e. le corps résiduel de $\mathfrak{m}$ est k. Le théorème des zéros se réduit donc à l'énoncé purement algebrique suivant : *si k est algébriquement clos, alors le corps résiduel d'un idéal maximal de $k[X_1, \cdots, X_n]$ est k.* Un peu plus généralement, voici une version du Nullstellensatz :

1.4.1 Théorème.– *Sur un corps k quelconque, tout corps quotient K de $k[X_1, \cdots, X_n]$ est de dimension finie sur k.*

Si k est algébriquement clos, la seule extension finie de k est k lui-même, d'où le théorème d'existence de zéros voulu.

Démonstration. Notons x_i l'image de X_i dans K. Il s'agit de montrer que tous les x_i sont algébriques sur k.

Lorsque k est indénombrable, voici un argument de cardinalité rapide : K est de dimension au plus dénombrable comme k-ev, alors qu'un corps de fractions rationnelles $k(T)$ est de dimension au moins la cardinalité de k puisque la famille des $\frac{1}{T-\lambda}$, $\lambda \in k$ est libre.

Dans le cas général, on peut raisonner par récurrence sur n (avec k variable). Si $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Notons $k(x_1)$ le sous-corps de K engendré par k et x_1. Alors K est un quotient de $k(x_1)[X_2, \cdots, X_n]$ donc, par hypothèse de récurrence, K est une extension finie de $k(x_1)$. Choisissons alors une base $\beta_1 := 1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ de K sur $k(x_1)$. La multiplication dans K est déterminée par les formules $\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^m a_{ijk}\beta_k$ avec $a_{ijk} \in k(x_1)$. Par ailleurs, écrivons chaque $x_1, \cdots, x_n$ sous la forme $x_i = \sum_{j=1}^m b_{ij}\beta_j$ avec $b_{ij} \in k(x_1)$. Soit alors $A := k[a_{ijk}, b_{ij}]_{i,j,k}$ la sous-k-algèbre de $k(x_1)$ engendrée par les a_{ijk} et les b_{ij}. Alors $A\beta_1 \oplus \cdots \oplus A\beta_m$ est une sous-k-algèbre de K contenant les x_i, donc $A\beta_1 \oplus \cdots \oplus A\beta_m = K$. Puisque $\beta_1 = 1$ et les β_i sont $k(x_1)$-linéairement indépendants, on en déduit que $A = k(x_1)$. On conclut alors à l'aide de l'exercice ci-dessous. □

Exercice. – Montrer que le corps $k(T)$ des fractions rationnelles en T n'est pas une k-algèbre de type fini (i.e. engendrée par un nombre fini d'éléments en tant que k-algèbre).

Avant d'en tirer quelques conséquence sur les sous-ensembles algébriques, nous avons besoin de quelques corollaires algébriques :

1.4.2 Corollaire.– *Soit $\varphi : A \longrightarrow A'$ un morphisme de k-algèbres* de type fini. *Alors l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$ d'un idéal maximal de A' est un idéal maximal de A.*

Démonstration. Notons $\mathfrak{m} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$ l'image inverse de $\mathfrak{m}'$ dans A. Par propriété universelle des quotients, φ induit un morphisme *injectif* de k-algèbres $\bar{\varphi} : A/\mathfrak{m} \hookrightarrow A'/\mathfrak{m}'$. Or, puisque A' une k-algèbre de type fini, le Nullstellensatz nous dit que le corps résiduel $A'/\mathfrak{m}'$ est de dimension finie sur k. Il s'ensuit que la k-algèbre intègre $A/\mathfrak{m}$ est aussi de dimension finie, donc c'est un corps (exercice). $\square$

1.4.3 Proposition.– *Soit A une k-algèbre de type fini et I un idéal de A. Alors $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m}\supset I} \mathfrak{m}$, i.e. $\sqrt{I}$ est l'intersection des idéaux maximaux contenant I.*

Démonstration. Quitte à remplacer A par A/I, il suffit de le prouver pour $I = (0)$, auquel cas $\sqrt{0}$ est l'ensemble des éléments nilpotents de A. Comme un idéal maximal est radiciel, l'inclusion $\sqrt{0} \subset \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$ est vraie sans hypothèse sur l'anneau A. Pour prouver l'autre inclusion, if faut, étant donné $f \in A$ non nilpotent, trouver un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $f \notin \mathfrak{m}$. Or, pour un tel f, l'anneau $A' := A[f^{-1}] = A[X]/(Xf-1)$ est non nul, donc contient un idéal maximal $\mathfrak{m}'$. Puisque A' est de type fini comme k-algèbre, le corollaire précédent assure que l'image inverse $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{m}'$ dans A est un idéal maximal de A. Mais l'image de f dans $A/\mathfrak{m} \subset A'/\mathfrak{m}'$ est non nulle (puisqu'inversible dans $A'/\mathfrak{m}'$), donc $f \notin \mathfrak{m}$. $\square$

1.4.4 Corollaire.– *Soient I, I' deux idéaux de $\mathcal{O}(k^n)$. Alors $V_I = V_{I'} \Leftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{I'}$.*

Démonstration. L'implication $\Leftarrow$ est claire. Supposons donc $V_I = V_{I'}$. D'après la remarque 1.2.3 et le Nullstellensatz, on sait maintenant que les points de k^n sont en bijection avec les idéaux maximaux de $\mathcal{O}(k^n)$ via les applications $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ et $\mathfrak{m} \mapsto V_{\mathfrak{m}}$. Via ces bijections, les points de V_I correspondent aux idéaux maximaux qui contiennent I. On a donc $\sqrt{I} = \bigcap_{x\in V_I} \mathfrak{m}_x$, d'où le corollaire annoncé. $\square$

1.4.5 Corollaire.– *Supposons k algébriquement clos et fixons n. Alors les applications $I \mapsto V_I$ et $V \mapsto I_V$ induisent des bijections réciproques*

$$\{\textit{idéaux radiciels de } \mathcal{O}(k^n)\} \longleftrightarrow \{\textit{sous-ensembles algébriques de } k^n\}.$$

$$\{\textit{idéaux premiers de } \mathcal{O}(k^n)\} \longleftrightarrow \{\textit{sous-ensembles algébriques irréductibles de } k^n\}.$$

De plus, pour un sous-ensemble algébrique V,
- *les composantes irréductibles de V correspondent aux idéaux premiers* minimaux *de $\mathcal{O}(V)$.*
- *les points de V correspondent aux idéaux maximaux de $\mathcal{O}(V)$.*

Démonstration. Pour un sous-ensemble algébrique V, l'idéal I_V est bien radiciel puisque l'algèbre de fonctions $\mathcal{O}(V)$ est évidemment réduite. De plus, on a déjà vu que, sans hypothèse sur k, on a $V_{I_V} = V$. Réciproquement, si I est un idéal, l'égalité $V_{I_{V_I}} = V_I$ et le corollaire précédent impliquent que $\sqrt{I_{V_I}} = \sqrt{I}$. Or, I_{V_I} est radiciel par construction donc, si I est radiciel, on a bien $I_{V_I} = I$. Les autres assertions en découlent. $\square$

Remarque. – Si on se donne un ensemble $F = \{f_1, \cdots, f_m\} \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ de polynômes, la réponse au problème d'existence de solutions apportée par le Nullstellensatz est la suivante : on a $V_F = \emptyset$ si et seulement si il existe des polynômes $g_1, \cdots g_m$ tels que $1 = \sum_{i=1}^m g_i f_i$.

1.5 Applications polynomiales

Vu notre définition des sous-ensembles algébriques, ces objets sont par nature *plongés* dans un espace affine ambiant k^n. On aimerait étudier ces objets *indépendamment de leur plongement*. Par exemple, une droite de k^2 et une droite de k^3 devraient évidemment être "isomorphes" en tant qu'objets géométriques. Voici une notion naïve naturelle de "morphisme" dans ce contexte :

1.5.1 DÉFINITION.– *Soient $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ deux sous-ensembles algébriques. Une application $V \longrightarrow W$ est dite polynomiale si c'est la restriction à V d'une application polynomiale $k^n \longrightarrow k^m$, i.e. de la forme $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$ avec $f_1, \cdots, f_m \in \mathcal{O}(k^n)$.*

Exercice. – Montrer qu'une application polynomiale est continue pour la topologie de Zariski sur V et W.

Soit $\varphi : k^n \longrightarrow k^m$ une application polynomiale comme ci-dessus. Par composition, on obtient une application $\varphi^* : \mathcal{O}(k^m) \longrightarrow \mathcal{O}(k^n)$, $f \mapsto \varphi^*(f) := f \circ \varphi$, qui est visiblement un morphisme de k-algèbres. Réciproquement on retrouve φ à partir de φ^* par la formule $\mathfrak{m}_{\varphi(x)} = (\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x)$, où $\mathfrak{m}_y$ désigne l'idéal maximal associé à y. Si $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ sont des sous-ensembles algébriques, on a

$$\varphi(V) \subset W \Rightarrow I_V \supset \varphi^*(I_W).$$

Il s'ensuit que si $\varphi(V) \subset W$, alors φ^* induit par passages aux quotients un morphisme

$$\varphi^* : \mathcal{O}(W) = \mathcal{O}(k^m)/I_W \longrightarrow \mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(k^n)/I_V.$$

On suppose dorénavant que le corps k est algébriquement clos. La proposition suivante est à la base de toute l'approche moderne de la géométrie algébrique.

1.5.2 PROPOSITION.– *L'application $\varphi \mapsto \varphi^*$ induit une bijection*

$$\text{App.Pol.}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{k-\text{alg}}(\mathcal{O}(W), \mathcal{O}(V)).$$

Démonstration. On a déjà vu ci-dessus que cette application est injective puisqu'on retrouve φ à partir de φ^*. Construisons la bijection réciproque. Soit $\psi : \mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$. Pour chaque $x \in V$ il existe un unique élément $\varphi(x) \in W$ tel que $\mathfrak{m}_{\varphi(x)} = \psi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$. Reste à prouver que l'application $\varphi : V \longrightarrow W$ ainsi obtenue est bien polynomiale. Pour cela, on utilise la propriété universelle des algèbres de polynômes afin de compléter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} k[X_1,\cdots,X_m] \arrow[r, dashed, "\tilde{\psi}"] \arrow[d, "\pi_W"'] & k[X_1,\cdots,X_n] \arrow[d, "\pi_V"] \\ \mathcal{O}(W) \arrow[r, "\psi"'] & \mathcal{O}(V) \end{tikzcd}.$$

Comme ci-dessus, $\tilde{\psi}$ induit une application $\tilde{\varphi} : k^n \longrightarrow k^m$, laquelle induit l'application $\varphi : V \longrightarrow W$. Il reste donc à montrer que $\tilde{\varphi}$ est polynomiale. Or, posons $f_j := \tilde{\psi}(X_j) \in \mathcal{O}(k^n)$. L'égalité $\mathfrak{m}_{\tilde{\varphi}(x)} = \tilde{\psi}^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ assure que $\tilde{\psi}(X_j - \tilde{\varphi}(x)_j) = f_j - \tilde{\varphi}(x)_j \in \mathfrak{m}_x$, c'est-à-dire $f_j(x) - \tilde{\varphi}(x)_j = 0$. On a donc $\tilde{\varphi}(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ pour tout $x \in k^n$, donc $\tilde{\varphi}$ est bien polynomiale. □

Pour celles et ceux qui connaissent le langage des catégories, les "applications" $V \mapsto \mathcal{O}(V)$ et $\text{App.Pol.}(V,W) \longrightarrow \text{Hom}_{k-\text{alg}}(\mathcal{O}(W), \mathcal{O}(V))$ définissent un foncteur contravariant de la catégorie des k-ensembles algébriques munis des applications polynomiales vers la catégorie des k-algèbres. On peut alors résumer la discussion précédente ainsi :

1.5.3 PROPOSITION.– *Le foncteur $V \mapsto \mathcal{O}(V)$ induit une équivalence de catégories contravariante entre k-ensembles algébriques et k-algèbres* réduites de type fini.

Démonstration. La proposition précédente nous dit que ce foncteur est pleinement fidèle. Pour l'essentielle surjectivité, soit A une k-algèbre réduite de type fini. Puisque A est de type fini, il existe n et un morphisme surjectif de k-algèbres $k[X_1, \cdots, X_n] \twoheadrightarrow A$. Soit I son noyau et $V_I \subset k^n$ le sous-ensemble algébrique associé. Comme A est réduite, on a $I = \sqrt{I}$ donc $I = I_{V_I}$ et $A = \mathcal{O}(V_I)$. □

Ces résultats permettent de changer de perspective : l'objet intrinsèque sous-jacent à un sous-ensemble algébrique est son algèbre de fonctions polynomiales. Toute présentation de cette algèbre comme quotient d'une algèbre de polynômes (i.e tout choix d'un ensemble fini de générateurs) fournit un plongement de l'objet intrinsèque comme sous-ensemble algébrique d'un espace affine.

Voici un corollaire dont une preuve plus élémentaire serait fastidieuse. Rappelons que le produit tensoriel $A \otimes_k B$ de deux k-algèbres commutatives A et B est encore une k-algèbre commutative. De plus, ce produit tensoriel satisfait la propriété universelle suivante : pour toute k-algèbre commutative C, on a une bijection

$$\text{Hom}_{k-\text{alg}}(A \otimes_k B, C) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{k-\text{alg}}(A, C) \times \text{Hom}_{k-\text{alg}}(B, C)$$

qui envoie $\psi : A \otimes_k B \longrightarrow C$ sur $(\psi \circ (\text{id} \otimes 1), \psi \circ (1 \otimes \text{id}))$. En termes "catégoriques", le produit tensoriel est donc un *coproduit* dans la catégorie des k-algèbres. En fait, c'en est un aussi dans la catégorie des k-algèbres réduites :

LEMME. – *Si A et B sont des k-algèbres réduites avec k algébriquement clos, alors $A \otimes_k B$ est réduite.*

Démonstration. Soit $(b_i)_{i\in I}$ une k-base de B. Un élément $x \in A\otimes_k B$ s'écrit alors de manière unique $x = \sum_i a_i \otimes b_i$ avec $a_i \in A$ et les a_i presque tous nuls. Supposons x nilpotent. Alors pour tout morphisme de k-algèbres $A \xrightarrow{\pi} k$, on a $\pi \otimes \mathrm{id}(x) = \sum_i \pi(a_i)b_i$ nilpotent dans B, donc nul, donc $\pi(a_i) = 0$ pour tout i. Puisque k est algébriquement clos, le corps résiduel de tout idéal maximal de A est k. On a donc $a_i \in \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m} = \sqrt{(0)} \subset A$, mais comme A est réduit, il s'ensuit que $a_i = 0$, et finalement $x = 0$. □

1.5.4 COROLLAIRE.– *La catégorie des sous-ensembles algébriques admet des produits finis. De plus, si V, W sont deux ensemble algébriques, on a $\mathcal{O}(V \times W) \simeq \mathcal{O}(V) \otimes_k \mathcal{O}(W)$.*

Par exemple, on sait que $k[X_1, \cdots , X_n] \otimes_k k[X_{n+1}, \cdots , X_{n+m}] = k[X_1, \cdots , X_{n+m}]$, ce qui confirme l'intuition que k^{n+m} doit être un produit de k^n et k^m dans la catégorie des ensembles algébriques. Plus généralement, si $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$, on a vu précédemment que le produit ensembliste $V \times W \subset k^{n+m}$ est un sous-ensemble algébrique.

Exercice. – Vérifier que ce produit ensembliste est bien le produit catégorique.

Exercice. – Soient A, B deux k-algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos. Montrer directement que $\mathrm{Max}(A \otimes_k B) = \mathrm{Max}(A) \times \mathrm{Max}(B)$. Est-ce encore vrai si k n'est pas algébriquement clos ? Est-ce encore vrai si on remplace Max par Spec ?

Certaines propriétés topologiques de φ se lisent sur φ^*. Par exemple :

Exercice. – Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ une application polynomiale. Montrer que l'adhérence de Zariski $\overline{\varphi(V)}$ de $\varphi(V)$ dans W est le fermé défini par l'idéal $\mathrm{Ker}\, \varphi^*$.

En particulier, on voit que $\varphi(V)$ est dense si et seulement si φ^* est injectif. Dans ce cas, on dit que φ *est dominant.*

En général, l'image d'un morphisme n'est pas fermée (ni ouverte). Néanmoins, voici un cas important où l'image est fermée.

1.5.5 DÉFINITION.– *On dit qu'un morphisme (=application polynomiale) $\varphi : V \longrightarrow W$ est* fini *si $\varphi^* : \mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ fait de $\mathcal{O}(V)$ un module de type fini sur $\mathcal{O}(W)$.*

Remarquons que, puisque $\mathcal{O}(V)$ est une k-algèbre de type fini, donc a fortiori une $\mathcal{O}(W)$-algèbre de type fini, φ est fini si et seulement si φ^* est *entier* (au sens où tout élément de $\mathcal{O}(V)$ est annulé par un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathcal{O}(W)$).

1.5.6 LEMME.– *L'image d'un morphisme fini $\varphi : V \longrightarrow W$ est fermée.*

Démonstration. Quitte à remplacer W par $\overline{\varphi(V)}$, on peut supposer φ dominant et il s'agit alors de montrer que φ est surjectif. Dans ce cas φ^* est une injection $\mathcal{O}(W) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$ et on doit montrer que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}(W)$, il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}'$ de $\mathcal{O}(V)$ tel que $\mathfrak{m}' \cap \mathcal{O}(W) = \mathfrak{m}$. Il suffit donc de prouver que $\mathfrak{m}\mathcal{O}(V) \neq \mathcal{O}(V)$ (car alors tout idéal maximal de $\mathcal{O}(V)$ contenant $\mathfrak{m}\mathcal{O}(V)$ conviendra). Supposons $\mathfrak{m}\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(V)$. Comme $\mathcal{O}(V)$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}(W)$, le lemme de Nakayama nous dit alors qu'il existe $f \in \mathcal{O}(W)\backslash\mathfrak{m}$ tel que $f\mathcal{O}(V) = 0$. Mais ceci contredit le fait que $\mathcal{O}(W)$ s'injecte dans $\mathcal{O}(V)$ (par exemple $f.1 = f \neq 0$). $\square$

1.6 Faisceaux de fonctions régulières

En géométrie différentielle, les objets de base sont les espaces affines $\mathbb{R}^n$ et leurs ouverts, que l'on recolle via la notion d'atlas. En géométrie algébrique, les objets de base sont plutôt les ensembles algébriques. Pour créer d'autres objets "par recollement", le langage utilisé n'est pas celui des atlas mais celui des *espaces annelés*, qui sont des couples formés d'un espace topologique et d'un *faisceau de fonctions "régulières"*. Le langage des faisceaux "abstraits" sera développé en détail dans le cours sur les schémas. Ici, nous pouvons nous contenter pour l'instant de la définition suivante :

1.6.1 DÉFINITION.– *Soit X un espace topologique. Un faisceau de fonctions $\mathcal{A}$ sur X à valeurs dans k est la donnée, pour chaque ouvert $U \subset X$, d'une sous-k-algèbre $\mathcal{A}(U) \subset k^U$, de sorte que pour tout recouvrement ouvert $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et toute fonction $f \in k^U$, on a*

$$f \in \mathcal{A}(U) \Leftrightarrow \forall i \in I, f_{|U_i} \in \mathcal{A}(U_i).$$

Remarque. – Les éléments de $\mathcal{A}(U)$ sont parfois appelés "sections de $\mathcal{A}$ sur U" et, lorsque $U = X$, on parle de "sections globales". On trouve dans la littérature diverses notations pour les ensembles de sections ; les plus courantes sont

$$\mathcal{A}(U) = \Gamma(U, \mathcal{A}) = H^0(U, \mathcal{A}).$$

Nous allons associer à tout sous-ensemble algébrique $V \subset k^n$ un faisceau de fonctions $\mathcal{O}_V$, dites fonctions "régulières".

1.6.2 DÉFINITION.– *Soit $U \subset V$ un ouvert et $f : U \longrightarrow k$ une fonction.*

— *f est dite* régulière au point *$x \in U$ s'il existe $g \in \mathcal{O}(V)$, $h \in \mathcal{O}(V)$ telle que $h(x) \neq 0$, et un voisinage ouvert $U' \subset U$ de x tels que $f_{|U'} = \frac{g_{|U'}}{h_{|U'}}$.*

— *f est dite régulière si elle est régulière en tout point.*

Notons qu'une fonction régulière est continue pour la topologie de Zariski. Posons

$$\mathcal{O}_V(U) := \{\text{fonctions régulières } f : U \longrightarrow k\}.$$

L'avantage de cette définition, c'est que la propriété de faisceau est immédiate à vérifier, vue la nature locale de la notion de régularité. Ainsi $U \mapsto \mathcal{O}_V(U)$ est un faisceau de fonctions. L'inconvénient, c'est que le calcul de ces algèbres de fonctions n'est pas toujours simple. Le résultat suivant est fondamental.

1.6.3 PROPOSITION.– *Soit U un ouvert principal et $h \in \mathcal{O}(V)$ telle que $U = U_h$. Alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_V(U) &= \left\{ f : U \longrightarrow k, \exists g \in \mathcal{O}(V), \exists n \in \mathbb{N}, f = \frac{g_{|U}}{(h_{|U})^n} \right\}. \\ &\simeq \mathcal{O}(V)[h^{-1}]. \end{aligned}$$

Rappelons que la notation $\mathcal{O}(V)[h^{-1}]$ désigne la localisation de $\mathcal{O}(V)$ en la partie multiplicative engendrée par h. En particulier, lorsque $h = 1$, on retrouve bien $\mathcal{O}_V(V) = \mathcal{O}(V)$.

Démonstration. Commençons par justifier le second isomorphisme. Par restriction des fonctions, on a bien un morphisme de k-algèbres

$$\mathcal{O}(V) \longrightarrow \left\{ f : U \longrightarrow k, \exists g \in \mathcal{O}(V), \exists n \in \mathbb{N}, f = \frac{g_{|U}}{(h_{|U})^n} \right\}$$

qui envoie h sur un élément inversible, donc se prolonge en un morphisme

$$\mathcal{O}(V)[h^{-1}] \longrightarrow \left\{ f : U \longrightarrow k, \exists g \in \mathcal{O}(V), \exists n \in \mathbb{N}, f = \frac{g_{|U}}{(h_{|U})^n} \right\}$$

qui est manifestement surjectif. Vérifions qu'il est aussi injectif : si $\frac{g}{h^n}$ est dans le noyau, alors g est aussi dans le noyau, i.e. $g_{|U_h} \equiv 0$, donc hg est la fonction nulle sur V, i.e. $hg = 0$ dans $\mathcal{O}(V)$, et il s'ensuit que $g = 0$ dans le localisé $\mathcal{O}(V)[h^{-1}]$. Donc le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.

Prouvons maintenant la première égalité. Seule l'inclusion $\subset$ est non triviale. Soit donc $f : U \longrightarrow k$ une fonction régulière. Puisque U est quasicompact, il existe un recouvrement ouvert fini $U = \bigcup_{i=1}^r U_i$ et des fonctions $g_i, h_i \in \mathcal{O}(V)$ telles que $f_{|U_i} = \frac{g_{i|U_i}}{h_{i|U_i}}$. Puisque h_i ne s'annule pas sur U_i, le fermé défini par l'idéal $(h_1, \cdots, h_r)$ est contenu dans $V_{\{h\}} = V \setminus U$, donc $h \in \sqrt{(h_1, \cdots, h_r)}$, i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \cdots, a_r \in \mathcal{O}(V)$ telles que $h^n = \sum_{i=1}^r a_i h_i$.

Dans le cas où V est irréductible, on peut alors conclure facilement. En effet, la fonction $f.h^n$ coïncide, sur l'intersection $\bigcap_{i=1}^r U_i$, avec la fonction polynomiale $g = \sum_i a_i g_i \in \mathcal{O}(V)$. Or, puisque V, et donc U est irréductible, l'ouvert $\bigcap_{i=1}^r U_i$ est dense dans U, donc ces deux fonctions continues coïncident sur U tout entier, et on a bien $f = \frac{g_{|U}}{(h_{|U})^n}$.

Dans le cas général, on commence par montrer qu'on peut supposer $U_i = U_{h_i}$. Pour cela, on peut déjà supposer que les U_i ont été choisis principaux, disons $U_i = U_{h'_i}$. On a alors $V_{h_i} \subset V_{h'_i}$, donc $\sqrt{(h_i)} \supset \sqrt{(h'_i)}$ et il existe donc $n_i \in \mathbb{N}$ et $b_i \in \mathcal{O}(V)$ tels que $(h'_i)^{m_i} = b_i h_i$. Il s'ensuit que $f = \frac{g'_{i|U_i}}{(h'_i)^{m_i}_{|U_i}}$ avec $g'_i = g_i b_i$. On peut donc remplacer h_i par $(h'_i)^{m_i}$ et on a alors bien $U_i = U_{h_i}$.

Si j est un autre indice, on a donc $U_i \cap U_j = U_{h_i h_j}$, et l'égalité des fonctions $\frac{g_i}{h_i}$ et $\frac{g_j}{h_j}$ sur $U_{h_i h_j}$ équivaut à l'égalité $(h_i g_j - h_j g_i)_{|U_{h_i h_j}} \equiv 0$, donc à l'égalité $h_i h_j (h_i g_j - h_j g_i) \equiv 0$ sur V et finalement à l'égalité

$$h_i^2 h_j g_j = h_j^2 h_i g_i \text{ dans } \mathcal{O}(V).$$

Il s'ensuit que la fonction $f h_i^2$ coïncide avec la fonction $h_i g_i$ *sur chaque ouvert* U_j ,et donc sur U en entier. Reste maintenant à choisir n et $a_1, \cdots, a_r \in \mathcal{O}(V)$ tels que $h^n = \sum_{i=1}^r a_i h_i^2$ (en remarquant que $U_i = U_{h_i^2}$). On obtient alors que $f h^n$ coïncide avec $g := \sum_i a_i h_i g_i$ sur U, i.e. $f = \frac{g_{|U}}{(h_{|U})^n}$ comme voulu. □

Voici un exemple de calcul pour un ouvert non principal.

Exercice. – Soit $V := k^2$ et $U = k^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que $\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}(k^2)$.

1.6.4 DÉFINITION.– *Soit X un espace topologique et $\mathcal{O}_X$ un faisceau de fonctions à valeurs dans k sur X. Pour un point $x \in X$, on note*

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{U, x\in U} \mathcal{O}_X(U)$$

la k-algèbre des "germes de fonction" dans $\mathcal{O}_X$.

1.6.5 PROPOSITION.– *Soit V un ensemble algébrique et $x \in V$ correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}(V)$. Alors $\mathcal{O}_{V,x} = \mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_x}$ (le localisé en la partie multiplicative complémentaire de $\mathfrak{m}_x$).*

Démonstration. Considérons le morphisme canonique $\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ qui envoie donc une fonction polynomiale f sur son germe f_x en x. Si $h \in \mathcal{O}(V) \setminus \mathfrak{m}_x$, alors $h(x) \neq 0$, donc la restriction de h à un voisinage ouvert U convenable de x est inversible. Par conséquent le germe h_x de h est inversible dans $\mathcal{O}_{V,x}$. Par propriété universelle des localisés, il s'ensuit que le morphisme canonique se prolonge en un morphisme

$$\mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_x} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}.$$

Surjectivité : par définition, un germe est représenté par un couple (U, f) avec $x \in U$ et f régulière sur U. Quitte à prendre U plus petit, on peut supposer f de la forme $\frac{g_{|U}}{h_{|U}}$ avec h ne s'annulant pas sur U, donc en particulier pas sur x. On a donc $f_x = \frac{g_x}{h_x}$ et le morphisme ci-dessus est surjectif.

Injectivité : soit $f \in \mathcal{O}(V)$ telle que $f_x = 0$. Il existe donc U voisinage ouvert de x tel que $f_{|U} \equiv 0$. Soit $W := V \setminus U$. Alors $f.I_W = (0)$. Or, I_W contient une fonction g ne s'annulant pas en x, i.e. $g \in \mathcal{O}(V) \setminus \mathfrak{m}_x$. L'égalité $fg = 0$ implique que l'image de f dans le localisé $\mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_x}$ est nulle. D'où l'injectivité du morphisme ci-dessus. □

1.7 Variétés algébriques

1.7.1 *Espaces k-annelés.* Un couple $(X, \mathcal{O}_X)$ formé d'un espace topologique X et d'un faisceau de fonctions à valeurs dans k est appelé *espace k-annelé*. Un morphisme d'espace k-annelés entre $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est une application continue $\varphi : X \longrightarrow Y$ telle que pour tout ouvert $U \subset Y$ et toute fonction $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, la fonction $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow k$ appartient à $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. On obtient ainsi un morphisme de k-algèbre

$$\varphi_U^* : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$$

pour tout ouvert U de Y. On en déduit, pour tout $x \in X$, un morphisme entre germes de fonctions :

$$\varphi_x^* : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}.$$

Nous avons associé à tout ensemble algébrique un espace k-annelé. Il est clair que toute application polynomiale entre sous-ensembles algébriques induit un morphisme des espaces k-annelés associés.

LEMME. – *Soient $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ deux sous-ensembles algébriques. L'application ci-dessus est une bijection*

$$\mathrm{App.Pol}(V,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{esp.ann.}}((V,\mathcal{O}_V),(W,\mathcal{O}_W)).$$

Démonstration. On a une application $\varphi \mapsto \varphi_W^*$:

$$\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{esp.ann.}}((V,\mathcal{O}_V),(W,\mathcal{O}_W)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{O}(W),\mathcal{O}(V))$$

dont la composée avec l'application de l'énoncé est la bijection

$$\mathrm{App.Pol}(V,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{O}(W),\mathcal{O}(V))$$

de la proposition 1.5.2. Il nous suffira donc de montrer que l'application $\varphi \mapsto \varphi_W^*$ est injective. Or ceci est clair, puisqu'on retrouve l'application φ à partir de la formule $\mathfrak{m}_{\varphi(x)} = (\varphi_W^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x)$. □

1.7.2 DÉFINITION.– *Une variété (algébrique) affine est un espace k-annelé isomorphe à un sous-ensemble algébrique $V \subset k^n$ muni de son faisceau de fonctions régulières $\mathcal{O}_V$. Un morphisme de variétés affines est un morphisme d'espaces k-annelés.*

On obtient donc une catégorie définie comme sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces k-annelés. Par construction et par le lemme précédent, les trois catégories suivantes sont équivalentes :
— La catégorie k-Var des k-variétés affines
— La catégorie des k-ensembles algébriques munis des applications polynomiales.
— La catégorie k-Alg$^{\mathrm{opp}}$ opposée des k-algèbres réduites de type fini.

Notation : nous noterons $\mathbb{A}_k^n$ ou $\mathbb{A}^n$ la variété affine $(k^n, \mathcal{O}_{k^n})$, et on l'appellera "espace affine" de dimension n.

1.7.3 *Spectres maximaux.* On peut construire directement le foncteur k-Alg$^{\mathrm{opp}} \longrightarrow k$-Var sans passer par les ensembles algébriques. En effet, si A est une k-algèbre (réduite de type fini), on note $V := \mathrm{Spm}(A)$ l'ensemble de ses idéaux maximaux et on le munit de la topologie de Zariski, dont les fermés sont les $V_I := \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(A), \mathfrak{m} \supset I\}$ et dont une base d'ouverts est donnée par les ouverts "principaux" $U_f := \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(A),\ f \notin \mathfrak{m}\}$. Comme A est de type fini sur k algébriquement clos, le Nullstellensatz implique que $A/\mathfrak{m} = k$ (canoniquement). Un élément f de A fournit donc une fonction $\mathrm{Spm}(A) \longrightarrow k$ qui envoie $\mathfrak{m}$ sur $\overline{f} \in A/\mathfrak{m} = k$. On dit alors qu'une fonction $f : U \subset \mathrm{Spm}(A) \longrightarrow k$ est régulière si tout point $\mathfrak{m} \in U$ admet un voisinage U' tel que $f_{|U'} = \frac{g_{|U'}}{h_{|U'}}$ avec $g, h \in A$. On obtient un faisceau de fonctions sur $\mathrm{Spm}(A)$. L'espace annelé est alors une variété algébrique affine. On obtient un isomorphisme avec un sous-ensemble algébrique en choisissant une présentation $k[X_1, \cdots, X_n] \twoheadrightarrow A$.

1.7.4 *Sous-variétés.* Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace k-annelé, $\mathcal{O}_X$ se restreint en un faisceau de fonctions sur tout ouvert U, d'où un espace annelé $(U, (\mathcal{O}_X)_{|U})$. Si $Y \subset X$ est fermé, on le munit du faisceau des fonctions $\mathcal{O}_Y$ qui sont localement restriction de fonctions dans $\mathcal{O}_X$.

En déroulant les définitions, on constate que si $(X, \mathcal{O}_X)$ est une variété algébrique affine, alors $(Y, \mathcal{O}_Y)$ aussi. Concrètement, si $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Spm}(A)$ et $Y = V_I$ pour un idéal $I \subset A$, alors $(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathrm{Spm}(A/\sqrt{I})$.

Lorsque U est un ouvert principal, on a encore un résultat similaire :

LEMME. – *Un ouvert principal U d'une variété affine V est encore une variété affine. Plus précisément, si $(V, \mathcal{O}_V) = \mathrm{Spm}(A)$ et $U = U_f$ pour $f \in A \setminus \{0\}$, alors $(U, (\mathcal{O}_V)_{|U}) = \mathrm{Spm}(A[f^{-1}])$ et l'inclusion $U \subset V$ correspond au morphisme canonique $A \longrightarrow A[f^{-1}]$.*

Démonstration. Le morphisme $\mathrm{Spm}(A[f^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spm}(A)$ induit un homéorphisme de $\mathrm{Spm}(A[f^{-1}])$ sur U_f. La définition des fonctions régulières montre que les faisceaux coïncident. □

En revanche, lorsque U n'est pas principal, $(U, \mathcal{O}_U)$ n'est pas toujours une variété affine.

Exemple. – Soit $U := \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{A}^2$. On a calculé (cf exercice précédent) que l'homorphisme de restriction $\Gamma(\mathbb{A}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ est un isomorphisme. Si U était une variété affine, l'inclusion $U \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ devrait donc être un homéomorphisme, mais ce n'est même pas une bijection.

C'est là une première motivation pour élargir le langage et pouvoir parler de "recollement" de variétés affines.

1.7.5 DÉFINITION.– *Une variété algébrique (sur k) est un espace k-annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ qui admet un recouvrement ouvert fini $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ tel que $(U_i, (\mathcal{O}_X)_{|U_i})$ soit une variété algébrique affine (sur k). Un morphisme entre variétés algébriques est un morphisme d'espaces k-annelés.*

Il découle de la discussion précédente que tout fermé, resp. tout ouvert, d'une variété algébrique est encore une variété algébrique. Nous verrons un peu plus loin de nombreux autres exemples de variétés algébriques non affines. En attendant, voici une autre illustration du rôle particulier joué par les variétés affines.

1.7.6 PROPOSITION.– *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété algébrique et $(V, \mathcal{O}_V) = \mathrm{Spm}(A)$ une variété algébrique affine. Alors l'application*

$$\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{esp.ann.}}((X, \mathcal{O}_X), \mathrm{Spm}(A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)),\ \varphi \mapsto \varphi_V^*$$

est bijective.

Démonstration. Construisons la bijection réciproque. Soit $\psi : A \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme de k-algèbres. Pour tout point $x \in X$, l'application $f \mapsto \psi(f)(x)$ est un morphisme de k-algèbres $A \longrightarrow k$ dont le noyau est un idéal maximal que l'on note $\varphi(x)$. On obtient donc une application $X \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Spm}(A)$. Notons que si U est un ouvert de X tel que $(U, (\mathcal{O}_X)_{|U})$ soit une variété affine, alors $\varphi_{|U}$ est l'application associée au morphisme composé $A \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, donc on sait que $\varphi_{|U}$ induit un morphisme d'espaces k-annelés $(U, (\mathcal{O}_X)_{|U}) \longrightarrow \mathrm{Spm}(A)$. Comme X est réunion de tels ouverts, φ est bien un morphisme d'espaces k-annelés. $\square$

1.7.7 *Construction de variétés par patching.* Soit X un ensemble, muni d'un recouvrement (ensembliste) $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$. Supposons que chaque X_i est muni d'une topologie et d'un faisceau de fonctions "régulières" $\mathcal{O}_{X_i}$. On peut alors munir X de la topologie telle que $U \subset X$ ouvert $\Leftrightarrow \forall i, U \cap U_i$ ouvert dans U_i, et du faisceau de fonctions $\mathcal{O}_X$ tel que $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \{f : U \longrightarrow k, \forall i, f_{|U \cap U_i} \in \Gamma(U \cap U_i, \mathcal{O}_{U_i})\}$.

Par construction, chaque inclusion $X_i \hookrightarrow X$ est alors un morphisme d'espaces k-annelés $(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$. Cependant, pour que ce morphisme soit une *immersion ouverte* (i.e. pour que X_i soit ouvert dans X, que sa topologie soit induite par celle de X, et que $\mathcal{O}_{X_i} = (\mathcal{O}_X)_{|X_i}$), il faut et il suffit d'avoir les conditions de cohérence suivantes :

i) $\forall i, j$, $X_i \cap X_j$ est ouvert dans X_i et dans X_j.

ii) $\forall i, j$ les topologies de X_i et X_j induisent la même topologie sur $X_i \cap X_j$

iii) $\forall i, j$ on a $(\mathcal{O}_{X_i})_{|X_i \cap X_j} = (\mathcal{O}_{X_j})_{|X_i \cap X_j}$.

Si ces trois conditions sont réunies et si chaque $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ est une variété algébrique affine, alors $(X, \mathcal{O}_X)$ est une variété algébrique.

1.7.8 PROPOSITION.– *La catégorie des variétés affines admet des produits finis. De plus, l'ensemble sous-jacent à la variété produit $(V, \mathcal{O}_V) \times (W, \mathcal{O}_W)$ est le produit cartésien $V \times W$.*

Démonstration. Nous allons d'abord utiliser la technique du patching pour munir $V \times W$ d'une structure de variété algébrique. Il faudra ensuite vérifier que la variété obtenue satisfait bien la propriété universelle des produits.

Choisissons des recouvrements $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$ et $W = \bigcup_{j=1}^s W_j$ par des sous-variétés ouvertes affines. On a donc un recouvrement ensembliste $V \times W = \bigcup_{i,j} V_i \times W_j$. On sait que le produit ensembliste $V_i \times W_j$ est sous-jacent d'une variété affine qui est le produit de V_i et W_j dans la catégorie des variétés affines. Concrètement, on a $\mathcal{O}(V_i \times W_j) = \mathcal{O}(V_i) \otimes_k \mathcal{O}(W_j)$. Par ailleurs, il est clair que $(V_i \times W_j) \cap (V_{i'} \times W_{j'}) = (V_i \cap V_{i'}) \times (W_j \cap W_{j'})$ est ouvert dans $V_i \times W_j$ et $V_{i'} \times W_{j'}$, i.e. la propriété i) ci-dessus est satisfaite. Reste à comparer les topologies et les faisceaux de fonctions. Pour cela, il suffit de montrer que pour toute sous-variété ouverte *affine* U_V de $V_i \cap V_{i'}$ et toute sous-variété ouverte *affine* U_W de $W_j \cap W_{j'}$, chacun des deux morphismes de variétés affines $U_V \times U_W \longrightarrow V_i \times W_j$ et $U_V \times U_W \longrightarrow V_{i'} \times W_{j'}$ est une *immersion ouverte.* C'est l'objet du lemme suivant :

LEMME. – *Si $\iota_V : U_V \hookrightarrow V$ et $\iota_W : U_W \hookrightarrow W$ sont des immersions ouvertes entre variétés affines, alors $\iota_V \times \iota_W : U_V \times U_W \longrightarrow V \times W$ est une immersion ouverte.*

Démonstration. Puisqu'une composition d'immersions ouvertes est une immersion ouverte, il suffit de le démontrer pour $U_W = W$ (et $\iota_W = \mathrm{id}_W$). Démontrons d'abord le cas particulier où $U_V = U_h$ est l'ouvert principal associé à une fonction $h \in \mathcal{O}(V)$ et ι_V est l'inclusion de U_h dans V. On a alors

$$\mathcal{O}(U_h \times W) = \mathcal{O}(U_h) \otimes_k \mathcal{O}(W) = \mathcal{O}(V)[h^{-1}] \otimes_k \mathcal{O}(W) = (\mathcal{O}(V) \otimes_k \mathcal{O}(W))[(h \otimes 1)^{-1}]$$

et le morphisme $U_h \times W \longrightarrow V \times W$ est donné par le morphisme canonique $\mathcal{O}(V) \otimes_k \mathcal{O}(W) \longrightarrow (\mathcal{O}(V) \otimes_k \mathcal{O}(W))[(h \otimes 1)^{-1}]$, ce qui identifie $U_h \times W$ à la sous-variété ouverte principale de $V \times W$ associée à la fonction $h \otimes 1$.

Revenons au cas général en recouvrant la sous-variété ouverte affine U_V par des ouverts principaux U_h. Par ce qui précède, les $U_h \times W$ forment un recouvrement de $U_V \times W$ par des variétés ouvertes principales, et la restriction de $\iota_V \times \mathrm{id}_W$ à $U_h \times V$ est une immersion ouverte de $U_h \times V$ dans $V \times W$. On en conclut que $\iota_V \times \mathrm{id}_W$ est une immersion ouverte. □

À ce stade, nous avons montré que les conditions i), ii) et iii) de 1.7.7 s'appliquent au recouvrement de $V \times W$ par les $V_i \times W_j$, d'où une structure de variété algébrique sur $V \times W$, dans laquelle les $V_i \times W_j$ sont des sous-variétés ouvertes affines.

Par construction, les projections $V \times W \xrightarrow{\pi_V} V$ et $V \times W \xrightarrow{\pi_W} W$ sont des morphismes de variétés, puisque leur restriction à un $V_i \times W_j$ en est un. On a donc, pour toute variété algébrique X, une application $\psi \mapsto (\pi_V \circ \psi, \pi_W \circ \psi)$:

$$\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{var}}(X, V \times W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{var}}(X, V) \times \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{var}}(X, W),$$

et nous devons montrer qu'elle est bijective. Pour cela, il suffit de montrer que pour toute paire $\varphi_V : X \longrightarrow V$ et $\varphi_W : X \longrightarrow W$ de morphismes, l'application $\psi := (\varphi_V, \psi_W) : X \longrightarrow V \times W$ est un morphisme de variétés. Posons $X_{ij} := \psi^{-1}(V_i \times W_j) = \varphi_V^{-1}(V_i) \cap \varphi_W^{-1}(W_j)$. Les X_{ij} forment un recouvrement ouvert de X, et il suffit de montrer que $\psi_{|X_{ij}}$ est un morphisme de variétés. En fait, il suffit de montrer que pour tout ouvert affine $U \subset X_{ij}$, la restriction $\psi_{|U} : U \longrightarrow V \times W$ est un morphisme de variétés. Or, elle se factorise en $U \longrightarrow V_i \times W_j \hookrightarrow V \times W$. Le second morphisme est une immersion ouverte par construction de $V \times W$ et le premier morphisme est un morphisme de variétés puisque U est affine et $V_i \times W_j$ est un produit dans la catégorie des variétés affines. □

2 Géométrie des variétés algébriques

2.1 Dimension

La théorie de la dimension en géométrie algébrique est beaucoup plus délicate qu'en géométrie différentielle où elle est donnée par l'algèbre linéaire. L'intuition nous dicte quelques propriétés que devrait avoir une telle théorie :

i) La dimension de l'espace affine $\mathbb{A}_k^n$ devrait être n.

ii) Si V est irréductible et $W \subset V$ est défini par une seule fonction $f \in \mathcal{O}(V)$ (non nulle et non inversible), alors on devrait avoir $\dim(W) = \dim(V) - 1$, comme en algèbre linéaire.

iii) En conséquence de ii), la dimension de V irréductible devrait être la longueur de toute chaîne *maximale* $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_d \neq \emptyset$ de fermés irréductibles.

On peut en effet définir la dimension d'un espace topologique noethérien comme le supremum des longueurs des chaînes d'irréductibles comme ci-dessus. Mais nous allons plutôt partir d'une analogie avec l'algèbre linéaire : la dimension d'un espace vectoriel coïncide avec le cardinal d'une famille linéairement indépendante "maximale" de formes linéaires. Ici, nous allons remplacer l'indépendance linéaire des formes linéaires par l'indépendance *algébrique* des fonctions polynomiales.

2.1.1 DÉFINITION.– *Soit V une variété affine irréductible.*

i) On note $\mathcal{M}(V) := \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(V))$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{O}(V)$ et on l'appelle "corps des fonctions rationnelles sur V".

ii) On pose $\dim(V) := \mathrm{deg.tr.}(\mathcal{M}(V)/k)$ (le degré de transcendance).

Soit maintenant V une variété affine quelconque.

iii) On pose $\dim(V) := \max\{\dim(W), W \subset V \text{ irréductible}\}$.

iv) On dit que V est "pure" si toutes ses composantes irréductibles ont même dimension.

Voici quelques conséquences immédiates de cette définition :
— Puisque $\mathcal{M}(\mathbb{A}^n_k) = k(X_1, \cdots, X_n)$, on a bien $\dim(\mathbb{A}^n_k) = n$.
— Si U est un ouvert principal d'une variété irréductible V, alors on a $\mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(V)$ donc $\dim(U) = \dim(V)$.
— Si $\varphi : V \longrightarrow W$ est un morphisme fini et dominant (donc surjectif) entre variétés affines irréductibles, alors $\mathcal{M}(V)$ est une extension finie de $\mathcal{M}(W)$ donc $\dim(V) = \dim(W)$.

De plus, on a le cas particulier suivant de la propriété ii) désirée ci-dessus.

2.1.2 LEMME.– *Soit $f \in \mathcal{O}(k^n)$ non constant. Alors V_f est de pure dimension $n-1$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{O}(k^n)$ est factoriel, on sait que $V_f = \bigcup_{i=1}^r V_{f_i}$ où $f_1, \cdots, f_r$ sont les facteurs irréductibles de f. On peut donc supposer f irréductible, auquel cas $\mathcal{O}(V_f)$ est une k-algèbre intègre engendrée par les images x_i des indéterminées X_i. Quitte à renuméroter les indéterminées, on peut aussi supposer que $f \notin k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$. Cela implique que, à l'intérieur du corps $\mathcal{M}(V)$, l'élément x_n est algébrique sur le sous-corps $k(x_1, \cdots, x_{n-1})$ de $\mathcal{M}(V)$. Mais cela implique aussi que aucun multiple de f n'est dans $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$, i.e. la restriction de la projection $\mathcal{O}(k^n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(V)$ à $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$ est injective. Par conséquent la famille $x_1, \cdots, x_n$ est algébriquement indépendante, et donc $\mathrm{deg.tr.}(\mathcal{M}(V)) = n-1$. $\square$

Exercice. – Montrer la réciproque : tout irréductible $V \subset k^n$ de codimension 1 est de la forme V_f avec f irréductible dans $\mathcal{O}(k^n)$.

Pour passer de l'espace affine à une variété affine quelconque, un outil important est le lemme de normalisation de Noether.

2.1.3 THÉORÈME.– *Soit V une variété affine irréductible. Il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ et un morphisme fini et surjectif $V \longrightarrow \mathbb{A}^d_k$. On a alors $d = \dim(V)$.*

Démonstration. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des générateurs de la k-algèbre $\mathcal{O}(V)$. La théorie des extensions de corps nous assure que l'on peut extraire de cette famille une base de transcendance de $\mathcal{M}(V)$ sur k. Ainsi, quitte à renuméroter ces générateurs, il existe $d \leqslant n$ tel que

i) $x_1, \cdots, x_d$ sont algébriquement indépendants sur k, et

ii) $x_{d+1}, \cdots, x_n$ sont *algébriques* sur $k(x_1, \cdots, x_d)$.

L'idée est alors de modifier $x_1, \cdots, x_d$ de sorte que $x_n, \cdots, x_{d+1}$ soient *entiers* sur $k[x_1, \cdots, x_d]$. Alors $\mathcal{O}(V)$ sera un module de type fini sur sa sous-algèbre $k[x_1, \cdots, x_d]$, laquelle s'identifie à l'algèbre de polynômes $k[X_1, \cdots, X_d]$, d'où un morphisme $V \longrightarrow \mathbb{A}^d_k$ fini et dominant (et donc surjectif puisqu'un morphisme fini a une image fermée).

Commençons par x_n. Puisqu'il est algébrique sur $k(x_1, \cdots, x_d)$, il existe un polynôme

$$f = a_m T^m + \cdots + a_0 \in k[X_1, \cdots, X_d, T]$$

tel que $f(x_1, \cdots, x_d, x_{n+1}) = 0$. Si a_m est constant non nul, alors x_n est entier sur $k[x_1, \cdots, x_d]$ et il n'y a rien à faire. Sinon, écrivons $f = \sum_{h=1}^r f_h$ avec f_h *homogène* de degré h et $f_r \neq 0$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_d \in k$, on calcule que

$$f_h(X_1 + \lambda_1 T, \cdots, X_d + \lambda_d T, T) = f_h(\lambda_1, \cdots, \lambda_d, 1)T^h + \text{ termes de degré } < h \text{ en } T$$

et il s'ensuit que

$$f(X_1 + \lambda_1 T, \cdots, X_d + \lambda_d T, T) = f_r(\lambda_1, \cdots, \lambda_d, 1)T^r + \text{ termes de degré } < r \text{ en } T.$$

Comme k est infini, on peut choisir $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ tels que $f_r(\lambda_1, \cdots, \lambda_d, 1) \neq 0$. Posons alors $x'_i := x_i - \lambda_i x_n$ pour $i = 1, \cdots, d$. Cette famille est encore algébriquement indépendante et x_n est entier sur $k[x'_1, \cdots, x'_d]$. On conclut en réitérant ce procédé avec x_{n-1},...,x_{d+1}. □

Remarque. – La preuve montre plus précisément que si V est un sous-ensemble algébrique irréductible de k^n, il existe une projection linéaire $k^n \twoheadrightarrow k^d$ qui induit par restriction un morphisme fini et surjectif $V \longrightarrow k^d$.

Exercice. – Montrer que le produit $V \times W$ de deux variétés affines irréductibles V et W est irréductible et que $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$.

2.1.4 COROLLAIRE.– *Soit V une variété affine irréductible et $f \in \mathcal{O}(V)$ non nulle et non inversible. Alors V_f est de pure dimension* $\dim(V) - 1$.

Démonstration. On commence par se ramener au cas où V_f est irréductible. Pour cela, il suffit de remarquer que si Z est une composante irréductible de V_f, alors il existe un ouvert U de V, que l'on peut supposer principal, tel que $U \cap V_f = U \cap Z \neq \emptyset$. Alors $U \cap Z$ est le fermé de U défini par l'image de f dans $\mathcal{O}(U)$ et est aussi un ouvert principal de Z, donc de même dimension que Z. Ceci, appliqué à chaque composante irréductible de V_f nous ramène au cas où V_f est irréductible, ce que nous supposons dorénavant.

Choisissons maintenant un morphisme surjectif fini $\pi : V \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$, d'où un morphisme injectif et entier $\pi^* : k[X_1, \cdots, X_d] \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$. Notons $\mathfrak{p} := \sqrt{(f)}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}(V)$ tel que $V_f = V_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_0 := (\pi^*)^{-1}(\mathfrak{p})$, qui est un idéal premier de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^d)$. Alors π se restreint en un morphisme fini surjectif $V_\mathfrak{p} \twoheadrightarrow V_{\mathfrak{p}_0}$, donc $\dim(V_\mathfrak{p}) = \dim(V_{\mathfrak{p}_0})$. Il nous suffira donc d'exhiber $f_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^d)$ telle que $V_{\mathfrak{p}_0} = V_{f_0}$, pour conclure grâce au lemme précédent traitant du cas $V = \mathbb{A}^d$.

Pour cela, posons $f_0 := N_{\mathcal{M}(V)/k(X_1,\cdots,X_n)}(f)$ (la norme de f pour l'extension de corps $\mathcal{M}(V) \supset k(X_1, \cdots, X_n)$). Comme $f \in \mathcal{O}(V)$ est entier sur $k[X_1, \cdots, X_d]$, les coefficients du polynôme caractéristique $\chi(T)$ de la multiplication par f dans $\mathcal{M}(V)$ vu comme $k(X_1, \cdots, X_d)$-espace vectoriel sont aussi entiers sur $k[X_1, \cdots, X_d]$, et donc appartiennent à $k[X_1, \cdots, X_d]$ puisque cet anneau est intégralement clos. Il s'ensuit que $f_0 = \pm\chi(0)$ appartient à $k[X_1, \cdots, X_d]$ et est divisible par f dans $\mathcal{O}(V)$ (puisque $\chi(f) = 0$). Montrons que $\mathfrak{p}_0 = \sqrt{(f_0)}$. Puisque f divise f_0, on a $(f_0) \subset (f) \cap k[X_1, \cdots, X_d] \subset \mathfrak{p} \cap k[X_1, \cdots, X_d] = \mathfrak{p}_0$, donc $\sqrt{(f_0)} \subset \mathfrak{p}_0$. Réciproquement, si $g \in \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap k[X_1, \cdots, X_d] = \sqrt{(f)} \cap k[X_1, \cdots, X_d]$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $g^m \in (f) \cap k[X_1, \cdots, X_d]$. En prenant la norme, on obtient $g^{me} \in (f_0)$, où e est le degré de l'extension $\mathcal{M}(V) \supset k(X_1, \cdots, X_n)$). D'où $\mathfrak{p}_0 \subset \sqrt{(f_0)}$. $\square$

Il découle de ce résultat que si $W \subsetneq V$ avec V irréductible, on a $\dim(W) < \dim(V)$. On laisse en exercice les corollaires suivants :

2.1.5 COROLLAIRE.– *Soit V une variété affine irréductible. Alors* $\dim(V)$ *est la longueur de toute chaîne* maximale *de sous-variétés irréductibles $V \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_d \supsetneq \emptyset$.*

2.1.6 COROLLAIRE.– *Soit V affine irréductible de dimension d et $f_1, \cdots, f_r \in \mathcal{O}(V)$. Si $V_{f_1,\cdots,f_r} \neq \emptyset$, alors toutes ses composantes irréductibles sont de dimension $\geqslant d - r$.*

2.1.7 COROLLAIRE.– *Soient V, W deux sous-variétés irréductibles de $\mathbb{A}^n$ d'intersection non vide. Toute composante irréductible Z de $V \cap W$ vérifie* $\dim(Z) \geqslant \dim(V) + \dim(W) - n$ *(autrement dit* $\operatorname{codim}(Z) \leqslant \operatorname{codim}(V) + \operatorname{codim}(W)$*).*

Pour déduire ce dernier corollaire du précédent, on observe que l'intersection $V \cap W$ dans $\mathbb{A}^n$ s'identifie à l'intersection $\Delta \cap (V \times W)$ dans $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ avec Δ la "diagonale" définie par les n équations $X_i - Y_i$, $i = 1, \cdots, n$.

Exercice. – Soit $H \subset \mathbb{A}^4$ l'hypersurface définie par $X_1X_4 - X_2X_3$. Montrer que c'est une variété irréductible qui contient les plans V et W définis respectivement par les idéaux (X_1, X_3) et (X_2, X_4). Calculer les codimensions de V, W et $V \cap W$ dans H et en conclure que l'inégalité précédente n'est pas vraie dans H. Où la preuve précédente coince-t-elle ?

Remarquer aussi que l'inégalité du corollaire 1.8.6 est stricte dans l'exemple suivant : $V := H$ comme dans l'exercice ci-dessus, $r = 2$, $f_1 = X_1$ et $f_2 = X_3$.

Exercice. – Toujours dans le même exemple montrer que $V_{(X_1,X_3)}$ ne peut pas être défini par une seule équation dans H.

2.1.8 PROPOSITION.– *Si $W \subset V$ sont deux variétés affines irréductibles, alors en notant $r := \mathrm{codim}_V(W)$, il existe $f_1, \cdots, f_r \in \mathcal{O}(V)$ telles que W soit une composante irréductible de $V_{(f_1,\cdots,f_r)}$, et que toutes les autres composantes irréductibles de $V_{(f_1,\cdots,f_r)}$ soient de codimension r.*

Démonstration. Choisissons une chaîne maximale de fermés irréductibles $V \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_r = W$, de sorte que $\mathrm{codim}_V(V_s) = s$. On construit par récurrence sur s une famille $f_1, \cdots, f_s$ telle que $V_s \subset V_{(f_1,\cdots,f_s)}$ et toute composante irréductible de $V_{(f_1,\cdots,f_s)}$ est de codimension s. Pour $s = 1$, il suffit de choisir $f_1 \in I_{V_1} \setminus \{(0)\}$ d'après le premier corollaire ci-dessus. Supposons $f_1, \cdots, f_{s-1}$ construites ; le problème est alors de trouver $f_s \in I_{V_s}$ telle que f_s ne soit pas identiquement nulle sur chaque composante irréductible de $V_{(f_1,\cdots,f_{s-1})}$. Notons donc $Y_1, \cdots, Y_m$ les composantes irréductibles de $V_{(f_1,\cdots,f_{s-1})}$. Choisissons pour chaque $k = 1, \cdots, m$

- une fonction $a_k \in I_{V_s}$ qui n'est pas identiquement nulle sur la composante Y_k (ce qui est possible puisque Y_k n'est pas contenue dans V_s), et
- une fonction b_k non identiquement nulle sur Y_k mais nulle sur tous les $Y_{k'}$, $k' \neq k$ (possible puisque Y_k n'est pas contenue dans la réunion des $Y_{k'}$) .

Alors la fonction $f_s := \sum_k a_k b_k$ convient. En effet, $f_s \in I_{V_s}$ et, pour tout $k = 1, \cdots, m$, on a $(f_s)_{|Y_k} = (a_k)_{|Y_k}(b_k)_{|Y_k}$ non identiquement nulle sur Y_k (puisque Y_k est irréductible et donc $\mathcal{O}(Y_k)$ intègre). $\square$

Ceci nous amène à la terminologie suivante.

2.1.9 DÉFINITION.– *Soit $V \subset \mathbb{A}^n$ une sous-variété fermée irréductible de codimension r. On dit que V est une*

- intersection complète ensembliste *s'il existe $f_1, \cdots, f_r \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tels que $V = V_{f_1,\cdots,f_r}$.*
- intersection complète (schématique) *s'il existe $f_1, \cdots, f_r$ tels que $I_V = (f_1, \cdots, f_r)$.*
- intersection complète localement au point *x s'il existe un voisinage ouvert affine U de x tel que $U \cap V$ soit intersection complète (schématique) dans U.*

La proposition précédente implique que tout point $x \in V$ admet un voisinage ouvert affine tel que $U \cap V$ soit intersection complète *ensembliste* dans U. On verra que si x est un point "non-singulier" de V, alors V est intersection complète localement en x. En général, il est difficile de vérifier si une sous-variété est intersection complète. Par exemple, on peut montrer qu'une courbe spatiale image de $t \mapsto (t^a, t^b, t^c)$ est intersection complète ensembliste mais en général pas schématique.

2.1.10 *Définition de $\mathcal{M}(V)$ et* $\dim V$ *pour une variété algébrique quelconque.* Posons

$$\mathcal{M}'(V) := \{(U,f), U \subset V \text{ ouvert dense et } f \in \mathcal{O}_V(U)\} / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $(U,f) \sim (U',f')$ si et seulement si il existe $U'' \subset U \cap U'$ ouvert dense tel que $f_{|U''} = f'_{|U''}$. Cet ensemble est une k-algèbre. Par exemple, la multiplication est donnée par $\overline{(U,f)}.\overline{(U',f')} = \overline{(U \cap U', f_{|U\cap U'} f'_{|U\cap U'})}$.

Lorsque V est irréductible, $\mathcal{M}'(V)$ est même un corps. En effet, pour $\overline{(U,f)}$ avec $f \neq 0$, l'ouvert $U_f \subset U$ où f ne s'annule pas est non-vide, *donc dense*, et l'élément $\overline{(U_f, (f_{|U_f})^{-1})}$ est inverse de $\overline{(U,f)}$. On peut donc poser $\dim V = \text{deg.tr.}_k(\mathcal{M}'(V))$.

Si, en plus d'être irréductible, V est affine, alors l'application $\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{M}'(V)$ qui envoie $f \in \mathcal{O}(V)$ sur $\overline{(V,f)}$ se prolonge canoniquement en un morphisme de k-algèbres $\mathcal{M}(V) \hookrightarrow \mathcal{M}(V')$ qui est en fait un isomorphisme (grâce à la proposition 1.6.3), de sorte qu'on retrouve la définition précédente dans ce cas. Pour cette raison, *on notera dorénavant* $\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}'(V)$ *pour une variété quelconque.*

Pour V quelconque, la construction de $\mathcal{M}(V)$ montre que pour tout ouvert dense $U \subset V$, l'application de restriction $\mathcal{M}(V) \longrightarrow \mathcal{M}(U)$ est un isomorphisme. On en déduit facilement que, en notant $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$ la décomposition de V en réunion de composantes irréductibles, on a un isomorphisme $\mathcal{M}(V) = \prod_{i=1}^r \mathcal{M}(V_i)$.

2.2 Applications (bi)rationnelles

Soient V et W deux variétés irréductibles (pas nécessairement affines). Une application rationnelle $\Phi : V \dashrightarrow W$ est une classe d'équivalence de couples (U,φ) formés d'un ouvert non vide $U \subset V$ et d'un morphisme $U \xrightarrow{\varphi} W$, et où on déclare que $(U,\varphi) \sim (U',\varphi')$ s'il existe $U'' \subset U \cap U'$ ouvert dense tel que $\varphi_{|U''} = \varphi'_{|U''}$.

Exemple. – Si $W = k$, on parle de "fonction rationnelle", et l'ensemble des telles "fonctions" est le corps $\mathcal{M}(V)$ introduit précédemment.

On dit que Φ est dominante si l'une de ses réprésentantes $\varphi : U \longrightarrow W$ est dominante (auquel cas toutes ses représentantes le sont). Dans ce cas, puisque $\mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(V)$, on obtient un morphisme (injectif) de k-algèbres $\Phi^* : \mathcal{M}(W) \hookrightarrow \mathcal{M}(V)$.

2.2.1 Lemme.– *l'application* $\Phi \mapsto \Phi^*$ *induit une bijection*

$$\text{App.rat.dom}(V,W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{k-\text{alg}}(\mathcal{M}(W), \mathcal{M}(V)).$$

Démonstration. Comme la source et la cible sont invariants par passage à des ouverts non vides, on peut supposer V et W affines. Soit $\Psi : \mathcal{M}(W) \longrightarrow \mathcal{M}(V)$ un morphisme de k-algèbre. Puisque $\mathcal{O}(W)$ est une k-algèbre de type fini, il existe $h \in \mathcal{O}(V)$ tel que $\Psi(\mathcal{O}(W)) \subset \mathcal{O}(V)[h^{-1}] \subset \mathcal{M}(V)$. On en déduit un morphisme de variétés $\varphi_h : U_h \longrightarrow W$ où U_h est l'ouvert principal de V défini par $h \neq 0$. La classe d'équivalence de (U_h, φ_h) ne dépend visiblement pas de h et définit donc une application rationnelle $\Phi : V \dashrightarrow W$ telle que $\Psi = \Phi^*$. Par construction, la composée dans l'autre sens est aussi l'identité, on a donc construit la bijection réciproque. $\square$

Les applications rationnelles dominantes se composent de manière évidente, et on peut considérer la catégorie dont les objets sont les variétés irréductibles et les morphismes sont les applications rationnelles. D'après le lemme précédent, cette catégorie est anti-équivalente à la catégorie des extensions de type fini du corps k. On dit que V et W sont *birationnelles* si elles sont isomorphes dans cette catégorie, i.e. $\mathcal{M}(V) \simeq \mathcal{M}(W)$.

2.2.2 LEMME.– *Deux variétés irréductibles V et W sont birationnelles si et seulement si elles contiennent deux ouverts affines $U_V \subset V$ et $U_W \subset W$ isomorphes.*

Démonstration. L'assertion “si” étant claire, supposons $\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}(W)$ et prouvons l'assertion “seulement si”. Quittes à les remplacer par des ouverts non vides, on peut supposer V et W affines. Alors, comme dans la preuve précédente, il existe $h_W \in \mathcal{O}(W)$ telle que $\mathcal{O}(V) \subset \mathcal{O}(W)[h_W^{-1}]$ et $h_V \in \mathcal{O}(V)$ telle que $\mathcal{O}(W) \subset \mathcal{O}(V)[h_V^{-1}]$. On a alors aussi $\mathcal{O}(V)[h_V^{-1}] \subset \mathcal{O}(W)[h_W^{-1}][h_V^{-1}]$ et $\mathcal{O}(W)[h_W^{-1}] \subset \mathcal{O}(V)[h_V^{-1}][h_W^{-1}]$, d'où l'on tire que $\mathcal{O}(V)[h_V^{-1}][h_W^{-1}] \subset \mathcal{O}(W)[h_W^{-1}][h_V^{-1}]$ et $\mathcal{O}(W)[h_W^{-1}][h_V]^{-1} \subset \mathcal{O}(V)[h_V^{-1}][h_W^{-1}]$, donc finalement $\mathcal{O}(V)[h_V^{-1}][h_W^{-1}] = \mathcal{O}(W)[h_W^{-1}][h_V^{-1}]$. Mais $\mathcal{O}(V)[h_V^{-1}][h_W^{-1}]$ est l'algèbre de fonctions régulières d'un ouvert affine $U_V \subset V$ et $\mathcal{O}(W)[h_W^{-1}][h_V^{-1}]$ est celle d'un ouvert affine $U_W \subset W$. $\square$

2.2.3 PROPOSITION.– *Toute variété irréductible V de dimension d est birationnelle à une hypersurface $H \subset \mathbb{A}^{d+1}$.*

Démonstration. La théorie des extensions de corps nous dit que $\mathcal{M}(V)$ admet une base de transcendance, i.e. une famille $x_1, \cdots, x_d$ telle que $\mathcal{M}(V)$ est une extension finie séparable de $k(x_1, \cdots, x_d)$. Le théorème de l'élément primitif nous dit alors qu'une telle extension est monogène, disons engendrée par un élément x_{d+1}. Il existe alors un polynôme $f \in k[X_1, \cdots, X_{d+1}]$, que l'on peut supposer irréductible, et tel que $f(x_1, \cdots, x_{d+1}) = 0$. Ce polynôme définit une hypersurface $H := V_f \subset k^{d+1}$, et le morphisme $\mathcal{O}(H) = k[X_1, \cdots, X_{d+1}]/(f) \longrightarrow \mathcal{M}(V)$ qui envoie X_i sur x_i induit un isomorphisme $\mathcal{M}(H) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(V)$. $\square$

2.3 Le théorème de constructibilité de Chevalley

L'exemple du morphisme $k^2 \longrightarrow k^2$, $(x, y) \mapsto (x, xy)$, montre que l'image d'un morphisme n'est pas nécessairement une sous-variété (localement fermée) de la cible. Le théorème de Chevalley montre que l'image ne peut quand-même pas être trop méchante.

2.3.1 *Ensembles constructibles.* Si X est un espace topologique, on dit qu'un sous-ensemble $C \subset X$ est constructible s'il est réunion finie de sous-ensembles localement fermés (i.e. intersection d'un ouvert et d'un fermé). En d'autres termes, l'ensemble $\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ des sous-ensembles constructibles de X est le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ stable par réunions et intersections finies et passage au complémentaire, et contenant l'ensemble des ouverts de X. De plus, si $Y \in \mathcal{C}(X)$ est muni de la topologie induite, on a $\mathcal{C}(Y) \subset \mathcal{C}(X)$ (via l'inclusion $\mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(X)$ évidente).

2.3.2 THÉORÈME.– *Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ un morphisme de variétés. Alors l'image d'un sous-ensemble constructible de V est constructible dans W.*

Avant de commencer la preuve, faisons quelques réductions.

i) Puisqu'un constructible est réunion finie de sous-variétés (localement fermées), il suffit de montrer que pour tout $\varphi : V \longrightarrow W$, l'image $\varphi(V) \subset W$ est constructible.

ii) Puisque W est réunion finie de sous-variétés ouvertes *affines*, et qu'un ensemble $X \subset W$ est constructible si et seulement si ses traces sur les ouverts d'un recouvrement sont constructibles, il suffit de prouver i) dans le cas où W est affine.

iii) Pour la même raison, on peut aussi supposer V affine.

iv) Puisque V est réunion finie de composantes irréductibles, on peut supposer V irréductible.

v) Enfin, quitte à remplacer W par sa sous-variété fermée $\overline{\varphi(V)}$, et puisqu'un constructible d'un fermé est constructible, on peut supposer que φ est dominant.

Ceci motive le résultat suivant, qui est le lemme-clef.

2.3.3 LEMME.– *Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ un morphisme dominant entre variétés affines irréductibles. Alors $\varphi(V)$ contient un ouvert de W.*

Démonstration. Posons $K := \mathcal{M}(W)$. Le lemme de normalisation de Noether appliqué à la K-algèbre de dimension finie $R = K \otimes_{\mathcal{O}(W),\varphi^*} \mathcal{O}(V)$ nous dit qu'elle est engendrée par une famille d'éléments $x_1, \cdots, x_n \in R$ telle que $x_1, \cdots, x_m$ sont algébriquement indépendants sur K et $x_{m+1}, \cdots, x_n$ sont entiers sur $K[x_1, \cdots, x_m]$. En particulier, pour $j > m$, il existe un polynôme unitaire $P_j \in K[x_1, \cdots, x_m][T]$ tel que $P_j(x_j) = 0$. On peut alors trouver $h \in \mathcal{O}(W)$ telle que

i) les x_i appartiennent à $\mathcal{O}(W)[h^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}(W),\varphi^*} \mathcal{O}(V) \simeq \mathcal{O}(V)[(\varphi^* h)^{-1}]$

ii) les P_j appartiennent à $\mathcal{O}(W)[h^{-1}][x_1, \cdots, x_m][T]$

On a alors deux inclusions

$$\mathcal{O}(W)[h^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{O}(W)[h^{-1}][x_1, \cdots, x_m] \subset \mathcal{O}(V)[(\varphi^* h)^{-1}]$$

où $\mathcal{O}(W)[h^{-1}][x_1, \cdots, x_m]$ est une algèbre de polynômes sur $\mathcal{O}(W)[h^{-1}]$ et $\mathcal{O}(V)[(\varphi^* h)^{-1}]$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}(W)[h^{-1}][x_1, \cdots, x_m]$.

Soit U_h l'ouvert principal de W défini par h. On a donc $\mathcal{O}(W)[h^{-1}] = \mathcal{O}(U_h)$. De plus, son image réciproque $\varphi^{-1}(U_h)$ est l'ouvert principal de V défini par $\varphi^* h$, donc $\mathcal{O}(V)[(\varphi^* h)^{-1}] = \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U_h))$. Les deux inclusions ci-dessus montrent que le morphisme $\varphi_{|\varphi^{-1}(U_h)} : \varphi^{-1}(U_h) \longrightarrow U_h$ se factorise en

$$\varphi^{-1}(U_h) \longrightarrow U_h \times \mathbb{A}^m \longrightarrow U_h$$

où le premier morphisme est fini dominant (donc surjectif) et le second morphisme est la première projection, donc est aussi surjectif. Il s'ensuit que $U_h \subset \varphi(V)$. □

2.3.4 *Fin de la preuve du théorème 2.3.2.* On démontre par récurrence sur $\dim(V)$ que l'image de tout morphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ de source affine V est constructible dans la cible W. On a vu qu'on pouvait supposer V irréductible et φ dominant. Le lemme ci-dessus nous fournit alors un ouvert $U \subset W$ inclus dans $\varphi(V)$. On a donc $\varphi(V) = U \cup \varphi(V \setminus \varphi^{-1}(U))$. Or, $V \setminus \varphi^{-1}(U)$ est un fermé propre de V, donc ses composantes irréductibles sont de dimension $< \dim(V)$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $\varphi(V \setminus \varphi^{-1}(U))$ est constructible, et on en déduit que $\varphi(V)$ l'est aussi.

2.4 Espaces (co)tangents

Notre premier but va être de trouver une définition raisonnable d'*espace tangent* pour une variété algébrique affine. Une première inspiration vient du calcul différentiel. Au moins pour $k = \mathbb{R}$, on sait que la tangente au point (a, b) à une courbe plane définie par une équation $f(x, y) = 0$ avec f différentiable est la droite d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial X}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial Y}(a, b)(y - b) = 0.$$

Bien-sûr, pour que cette équation définisse une droite, il faut que $(\frac{\partial f}{\partial X}(a, b), \frac{\partial f}{\partial Y}(a, b)) \neq (0, 0)$. Si $f \in k[X, Y]$ est irréductible, alors on a au moins $(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}) \neq (0, 0)$ dans $k[X, Y]$. On déduit d'un exercice du TD que le sous-ensemble algébrique défini par l'idéal $(f, \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})$ est fini, et donc que l'équation ci-dessus est bien une droite, sauf éventuellement en un nombre fini de points. Ces points seront dit "singuliers".

En s'inspirant de cet exemple simple, on est amené à la définition suivante :

2.4.1 Définition.– *Soit $V \subset k^n$ un sous-ensemble algébrique et $P = (a_1, \cdots, a_n)$ un point de V. On définit l'espace affine tangent $T_P^a V$ à V en P comme le sous-espace affine de k^n solution du système linéaire suivant :*

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}(P)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial X_n}(x_n - a_n),\ f \in I_V.$$

On note $T_P V$ le sous-espace vectoriel de k^n tel que $T_P^a V = P + T_P V$. Le point P est dit non-singulier *(ou* régulier*, ou* lisse*, ou même* simple*) si $\dim(T_P V) = \dim(V)$.*

Exemple. – Soit $V \subset k^2$ la courbe définie par $Y^2 - X^3$. L'espace affine tangent au point $P = (1, 1)$ est la droite d'équation $-3x + 2y = -1$. L'espace affine tangent au point $O = (0, 0)$ est le plan k^2 tout entier. Le point O est donc singulier.

Il est d'usage de noter $dx_1, \cdots, dx_n$ la *base duale* de la base canonique de k^n, et de poser $d_P f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(P).dx_i$, qui est donc une forme linéaire sur k^n. Alors

$$T_P V = \bigcap_{f \in I_V} \mathrm{Ker}(d_P f).$$

En utilisant la formule $d_P(fg) = f(P)d_Pg + g(P)d_Pf$, on voit qu'on a aussi $T_PV = \bigcap_{k=1}^r \mathrm{Ker}(d_Pf_k)$ pour tout ensemble de générateurs $\{f_1, \cdots, f_r\}$ de I_V. En d'autres termes, T_PV est le noyau de la *matrice Jacobienne*

$$\mathrm{Jac}_P(f_1, \cdots, f_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial X_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial X_n}(P) \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a $\dim T_PV = n - \mathrm{rang}(\mathrm{Jac}_P(f_1, \cdots, f_r))$. Comme le rang d'une matrice est la taille maximale d'un mineur non nul, et qu'un tel mineur est une fonction polynomiale en les entrées de la matrice, on constate :

LEMME. – *Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\{P \in V, \dim(T_PV) \geqslant s\}$ est fermé dans V.*

Nous verrons plus loin que le minimum de la fonction $P \mapsto \dim(T_PV)$ est $d = \dim V$, ce qui grâce au lemme ci-dessus implique que l'ensemble des points réguliers de V est *un ouvert dense* de V.

Auparavant, explicitons la fonctorialité de T_PV. Soit $\varphi : k^n \longrightarrow k^m$ une application polynomiale, dont on note les composantes $\varphi_1, \cdots, \varphi_m \in \mathcal{O}(k^n)$. Pour $P \in k^n$, notons $T_P\varphi$ l'application linéaire $k^n \longrightarrow k^m$ dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1}(P) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_n}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial X_1}(P) & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial X_n}(P) \end{pmatrix}$$

LEMME. – *Si $\varphi(V) \subset W$, alors $T_P\varphi(T_PV) \subset T_{\varphi(P)}W$.*

Démonstration. Comme en calcul différentiel, on a pour tout $i = 1, \cdots, n$ et toute fonction $f \in \mathcal{O}(k^m)$ les formules

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial X_i}(P) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(P) \cdot \frac{\partial f}{\partial X_j}(\varphi(P)),$$

que l'on peut résumer en $d_P(f \circ \varphi) = d_{\varphi(P)}f \circ T_P(\varphi)$. Supposons de plus que $f \in I_W$. Alors $f \circ \varphi \in I_V$ donc $T_PV \subset \mathrm{Ker}\, d_P(f \circ \varphi)$ et par conséquent $T_P\varphi(T_PV) \subset \mathrm{Ker}\, d_{\varphi(P)}f$. Ceci étant vrai pour toute fonction $f \in I_W$, on a bien $T_P\varphi(T_PV) \subset T_{\varphi(P)}W$. $\square$

L'approche ci-dessus est familière en calcul et géométrie différentielle. Elle a ici le gros inconvénient de dépendre a priori du plongement de V dans un espace affine k^n. Par exemple, il n'est pas clair à ce stade que si φ induit un isomorphisme de variétés, alors $T_P\varphi$ est un isomorphisme sur les espaces tangents... On voudrait donc une définition plus intrinsèque, ne dépendant que de $\mathcal{O}(V)$ et du point P. En fait, l'espace tangent en P ne devrait dépendre que de l'anneau local $\mathcal{O}_{V,P}$ des germes de fonctions régulières en P.

La seconde inspiration vient encore de la géométrie différentielle : on peut voir les champs de vecteurs comme des dérivations de l'algèbre des fonctions C^∞ et, plus localement, les vecteurs tangents en P comme des dérivations scalaires de l'algèbre des germes de fonctions C^∞ en P. Voici une définition algébrique de dérivation.

2.4.2 Définition.– *Soit A une k-algèbre et M un A-module. Une dérivation de A à valeurs dans M est une application k-linéaire $\partial : A \longrightarrow M$ telle que*

$$\forall f, g \in A,\ \partial(fg) = f\partial g + g\partial f.$$

On note $\mathrm{Der}_k(A, M)$ *le k-ev de ces dérivations.*

Soit alors P un point d'une variété affine V, qui correspond donc à un morphisme de k-algèbres $\pi_P : \mathcal{O}(V) \longrightarrow k$, $f \mapsto f(P)$, lequel se prolonge en $\mathcal{O}_{V,P} \xrightarrow{\pi_P} k$ (dont le noyau est l'unique idéal maximal de l'anneau $\mathcal{O}_{V,P}$ des germes de fonctions en P). Via π_P, on peut considérer k comme un $\mathcal{O}(V)$-module ou un $\mathcal{O}_{V,P}$-module, que l'on notera k_P pour lever toute ambiguïté. Il est alors naturel de vouloir considérer

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,P}, k_P) = \{\partial \in \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{ev}}(\mathcal{O}_{V,P}, k),\ \forall f, g \in \mathcal{O}_{V,P},\ \partial(fg) = f(P)\partial g + g(P)\partial f\}$$

comme l'espace tangent "abstrait" de V en P. Remarquons que si $\varphi : V \longrightarrow W$ est un morphisme de variétés, alors la composition avec $\mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$ fournit une application k-linéaire

$$D_P\varphi :\ \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,P}, k_P) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{W,\varphi(P)}, k_{\varphi(P)}).$$

2.4.3 Remarque.– Comme $\mathcal{O}_{V,P}$ est une localisation de $\mathcal{O}(V)$, l'application de restriction induit un isomorphisme

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,P}, k_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(V), k_P).$$

En effet, la formule $\partial\frac{f}{g} = \frac{g(P)\partial f - f(P)\partial g}{g(P)^2}$ montre l'injectivité, et aussi la surjectivité après avoir vérifié que ça ne dépend pas d'un représentant de $\frac{f}{g}$.

Soit $V = \mathbb{A}^n$ et $P = (a_1, \cdots, a_n)$. Notons

$$\frac{\partial}{\partial X_{i\,|P}} :\ k[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow k, f \mapsto \frac{\partial f}{\partial X_i}(P).$$

Alors les $\frac{\partial}{\partial X_{i\,|P}}$, $i = 1, \cdots, n$, forment une k-base de $\mathrm{Der}_k(k[X_1, \cdots, X_n], k_P)$. En effet, une dérivation est entièrement déterminée par ses valeurs sur des générateurs de l'algèbre. Ici, la restriction aux polynômes homogènes de degré 1 donne donc une injection

$$\mathrm{Der}_k(k[X_1, \cdots, X_n], k_P) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_k(kX_1 \oplus \cdots \oplus kX_n, k)$$

et les formules $\frac{\partial X_j}{\partial X_i}(P) = \delta_{ij}$ montrent que c'est un isomorphisme, et que la famille des $\frac{\partial}{\partial X_{i\,|P}}$ est duale de celle des X_i.

2.4.4 Lemme.– *Soit $V \subset k^n$ un sous-ensemble algébrique et $P \in V$. Notons $\alpha_{\mathbb{A}^n,P}$: $\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(k^n), k_P) \xrightarrow{\sim} k^n$ l'isomorphisme qui envoie la base $\left(\frac{\partial}{\partial X_{i\,|P}}\right)_{i=1,\cdots,n}$ sur la base ca-*

nonique. Alors on a une factorisation :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(k^n), k_P) \arrow[r, "\sim", "\alpha_{\mathbb{A}^n,P}"'] & k^n \\
\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(V), k_P) \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "\sim", "\alpha_{V,P}"'] & T_P V \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

De plus, pour toute application polynomiale $V \subset k^n \xrightarrow{\varphi} W \subset k^m$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(V), k_P) \arrow[r, "\sim", "\alpha_{V,P}"'] \arrow[d, "D_P\varphi"'] & T_P V \arrow[d, "T_P\varphi"] \\
\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(W), k_{\varphi(P)}) \arrow[r, "\sim", "\alpha_{W,\varphi(P)}"'] & T_{\varphi(P)} W
\end{tikzcd}$$

Démonstration. La flèche verticale de gauche du premier diagramme est induite par le morphisme $\mathcal{O}(k^n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(V)$ de k-algèbres. Elle est donc injective, et son image est

$$\{\partial \in \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(k^n), k_P), \forall f \in I_V, \partial f = 0\}.$$

L'image de ce sous-espace par $\alpha_{\mathbb{A}^n,P}$ est, par définition :

$$\left\{ (x_i)_{i=1,\cdots,n} \in k^n, \forall f \in I_V, \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial X_i}_{|P}(f) = 0 \right\}$$

qui n'est autre que $T_P V$. Pour le second diagramme, il suffit de vérifier que la matrice donnant $D_P\varphi$ dans les bases $\frac{\partial}{\partial X_i}$ est celle donnée pour $T_P\varphi$, ce qui est un calcul direct. □

Ce lemme donne donc une définition intrinsèque de l'espace tangent comme espace de dérivations, et implique en particulier que si une application polynomiale φ induit un isomorphisme de variétés, alors $T_P\varphi$ induit un isomorphisme des espaces tangents. Voici un exemple d'application :

Exercice. – Soit $V \subset k^2$ le sous-ensemble algébrique réunion des deux axes de coordonnées et de la droite diagonale $x = y$. Et soit $W \subset k^3$ la réunion des trois axes de coordonnées. Montrer que le lieu singulier est le singleton origine dans chacun des cas, calculer les espaces tangents en ce point et en conclure que V et W ne sont pas des variétés isomorphes.

Voici une application plus fondamentale :

2.4.5 PROPOSITION.– *Soit V une variété irréductible de dimension d. Pour tout P, on a $\dim T_P(V) \geqslant d$ avec égalité pour P dans un ouvert dense.*

Démonstration. On sait déjà que $\{P \in V, \dim T_P V \geqslant d\}$ est fermé, donc il nous suffira de montrer que $\{P \in V, \dim T_P V = d\}$ est un ouvert dense (ie non vide). D'après la proposition 2.2.3, il existe un ouvert affine $U \subset V$, un ouvert affine U' d'une hypersurface irréductible $H \subset \mathbb{A}^{d+1}$ et un isomorphisme $\varphi : U \xrightarrow{\sim} U'$. Pour $P \in U$, comme $\mathcal{O}_{V,P} = \mathcal{O}_{U,P}$, on a $T_P U = T_P V$, donc $T_P V \simeq T_{\varphi(P)} U' = T_{\varphi(P)} H$. Il suffit donc de prouver le résultat voulu pour $V = H = V_f$ où $f \in k[X_1, \cdots, X_{d+1}]$ est irréductible. Dans ce cas, on a $T_P H = \mathrm{Ker}(d_P f)$ avec $d_P f = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{\partial f}{\partial X_i}(P) dx_i$. Si la fonction polynomiale $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ est nulle sur V, alors f divise $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ dans $k[X_1, \cdots, X_{d+1}]$ donc, pour des raisons de degré en X_i, on a $\frac{\partial f}{\partial X_i} = 0$. Puisque f n'est pas constante, il doit exister i tel que $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ est non identiquement nulle sur V. Alors df est non identiquement nulle sur V et l'ensemble $\{P \in V, d_P f \neq 0\} = \{P \in V, \dim T_P V = d\}$ est ouvert non vide. □

En particulier, le lieu singulier d'une variété algébrique est un fermé propre.

Puisqu'on est arrivé à une caractérisation intrinsèque ne faisant intervenir que l'anneau local en le point considéré, on peut définir l'espace tangent pour une variété algébrique quelconque :

2.4.6 Définition.– *Soit V une variété algébrique et $P \in V$. On définit l'espace tangent $T_P V$ comme l'espace des dérivations* $\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,P}, k_P)$.

Comme ci-dessus, tout morphisme $V \xrightarrow{\varphi} W$ induit une application k-linéaire $T_P\varphi : T_P V \longrightarrow T_{\varphi(P)} W$.

Le lemme suivant montre comment calculer concrètement l'espace tangent.

2.4.7 Lemme.– *Soit A une k-algèbre et $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal de corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$. Alors l'application $\partial \mapsto \overline{\partial} := \partial_{|\mathfrak{m}}$ induit un isomorphisme de k-ev*

$$\mathrm{Der}_k(A, A/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{ev}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k).$$

Démonstration. Notons $\bar{f}$ l'image dans $k = A/\mathfrak{m}$ de $f \in A$. La formule $\partial(fg) = \bar{f}\partial g + \bar{g}\partial f$ montre que $\partial_{|\mathfrak{m}^2} = 0$, d'où l'existence de $\overline{\partial} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow k$. Dans l'autre sens, partons de $\theta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow k$ et posons $\partial(f) := \theta(f - \bar{f}) \in k$ (ici on voit $\bar{f}$, un élément du corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ comme un élément du corps des constantes $k \subset A$ grâce à l'identification canonique $k = A/\mathfrak{m}$). Alors l'égalité

$$fg - \bar{f}\bar{g} = \bar{f}(g - \bar{g}) + \bar{g}(f - \bar{f}) + (f - \bar{f})(g - \bar{g})$$

montre que ∂ est une dérivation $A \longrightarrow A/\mathfrak{m}$. On vérifie aisément que ces deux applications sont des bijections réciproques. □

Exercice. – Le lecteur attentif aura remarqué que l'isomorphisme $\mathrm{Der}_k(A_\mathfrak{m}, A/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, A/\mathfrak{m})$ implique que le morphisme $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow (\mathfrak{m}A_\mathfrak{m})/(\mathfrak{m}A_\mathfrak{m})^2$ est un isomorphisme de k-ev. Justifier directement ce dernier fait.

Le lemme ci-dessus justifie la terminologie "espace cotangent" pour l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_{V,P}/\mathfrak{m}_{V,P}^2$ (où P est un point d'une variété V et $\mathfrak{m}_{V,P}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{V,P}$. Ses éléments sont analogues aux "formes différentielles" en géométrie différentielle.

Exemple. – Dans le cas de $\mathbb{A}^n$ et $P = (a_1, \cdots, a_n)$, on a $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n,P} = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$ et on vérifie facilement que les n éléments $dx_i := (X_i - a_i) \bmod (\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n,P})^2$ forment une k-base de $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n,P}/\mathfrak{m}^2_{\mathbb{A}^n,P}$. Soit alors $f \in \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n,P}$, et notons $d_P f$ l'image de f dans le cotangent $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n,P}/\mathfrak{m}^2_{\mathbb{A}^n,P}$. Le choix de cette notation n'est pas arbitraire, puisqu'on calcule que $d_P f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(P) dx_i$. Supposons maintenant $P \in V \subset \mathbb{A}^n$. On a alors $I_V \subset \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n,P}$ et, soit directement, soit en utilisant notre première définition de $T_P V$, on obtient un isomorphisme

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n,P}/(\mathfrak{m}^2_{\mathbb{A},P} + I_V) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_{V,P}/\mathfrak{m}^2_{V,P}.$$

2.5 Points non-singuliers

2.5.1 *Paramètres locaux.* Soit P un point d'une variété algébrique irréductible V de dimension d. Le lemme de Nakayama implique que la dimension de $\mathfrak{m}_{V,P}/\mathfrak{m}^2_{V,P}$ est aussi le nombre minimal de générateurs de $\mathfrak{m}_{V,P}$ en tant que $\mathcal{O}_{V,P}$-module. Plus précisément, une famille $f_1, \cdots, f_r \in \mathfrak{m}_{V,P}$ est génératrice si et seulement si son image $d_P f_1, \cdots, d_P f_r$ engendre k-linéairement $\mathfrak{m}_{V,P}/\mathfrak{m}^2_{V,P}$.

Si P est un point non-singulier de V, on appelle *famille de paramètres locaux en P* toute famille $f_1, \cdots, f_d$ telle que $(d_P f_1, \cdots, d_P f_d)$ soit une base de $\mathfrak{m}_{V,P}/\mathfrak{m}^2_{V,P}$.

LEMME. – *Si $(f_1, \cdots, f_d)$ sont des paramètres locaux en un point non-singulier P, alors il existe un voisinage ouvert affine U de P tel que chaque f_i est le germe d'une fonction régulière $f_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_V)$ et $V_{(f_1,\cdots,f_d)} \cap U = \{P\}$.*

Démonstration. Choisissons un voisinage ouvert affine U' tel que les f_i soient les germes de fonctions régulières $f_i \in \Gamma(U', \mathcal{O}_V)$. Le lieu d'annulation $Z := V_{(f_1,\cdots,f_d)} \subset U'$ contient donc P et, par le paragraphe précédent, on a $T_P Z = \mathfrak{m}_{V,P}/(\mathfrak{m}^2_{V,P} + (f_1, \cdots, f_d)) = 0$. Donc toute composante irréductible passant par P est de dimension 0, donc égale à $\{P\}$. Il suffit donc de prendre pour U un ouvert affine contenu dans le complémentaire dans U' de la réunion des autres composantes irréductibles de Z. $\square$

Si U et $f_1, \cdots, f_d$ sont comme dans le lemme, on obtient un morphisme $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{A}^d$ en envoyant X_i sur f_i. Soit O l'origine de $\mathbb{A}^d$. On a $\varphi(P) = O$ et $T_P\varphi$ est un isomorphisme. Le lemme dit aussi que $\varphi^{-1}(O) = \{P\}$. Si on est sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le théorème d'inversion locale nous donne l'existence d'un ouvert analytique $\mathcal{U} \subset U$ (i.e. pour la topologie métrique usuelle) tel que φ réalise un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image. En géométrie algébrique, on ne dispose pas d'un résultat analogue. En général, le morphisme induit par φ entre germes $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^d,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$ n'est pas un isomorphisme et, pire, on ne peut même pas trouver d'ouvert $U' \subset U$ tel que $\varphi_{|U'}$ soit injective. Les "paramètres locaux" sont donc des analogues imparfaits des "coordonnées locales" en géométrie différentielles.

Exemple. – Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ la courbe définie par $f = Y^2 - X^3 + X$. Elle est non-singulière au point $O = (0, 0)$ et dy est une base de $\mathfrak{m}_{C,O}/\mathfrak{m}^2_{C,O}$. La seconde projection $C \longrightarrow \mathbb{A}^1$ donnée par $k[Y] \longrightarrow k[X, Y]/(f)$ envoie O sur O et induit un isomorphisme sur les espaces tangents en O. Mais *elle n'induit pas un isomorphisme* $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,O} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{C,O}$, puisqu'elle n'induit déjà pas un isomorphisme des corps de fonctions $\mathcal{M}(\mathbb{A}^1) = k(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(C) = k(Y)[X]/(f)$. De plus, un point de $\mathbb{A}^1$ a génériquement trois antécédents dans C. Comme les ouverts de C sont les complémentaires d'ensembles finis, on voit qu'il n'existe aucun ouvert $U \subset C$ tel que $\varphi_{|U}$ soit injective.

Cet exemple montre aussi pourquoi l'approche par atlas de cartes de la géométrie différentielle ne fonctionne pas en géométrie algébrique : une courbe non-singulière comme C ci-dessus *n'est pas* isomorphe à un recollement d'ouverts de $\mathbb{A}^1$.

2.5.2 *Anneaux locaux : gradués et complétés.* Soit A un anneau et I un idéal de A. La suite $(I^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'idéaux de A est décroissante et on note

$$\mathrm{gr}_I(A) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n/I^{n+1} = A/I \oplus I/I^2 \oplus \cdots$$

le A-module gradué associé. Ce A-module est en fait une A/I-algèbre graduée, la structure d'anneau étant induite par la multiplication $I^n \times I^m \longrightarrow I^{n+m}$. Par ailleurs, on obtient en passant aux quotients un système projectif $A/I \leftarrow A/I^2 \leftarrow \cdots$ dont on note la limite

$$\widehat{A_I} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A/I^n = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A/I^n,\ a_{n+1} \equiv a_n \bmod I^n \right\}.$$

Exemple. – Soit $A = k[X_1, \cdots, X_d]$ et $I = \mathfrak{m} := (X_1, \cdots, X_d)$. Notons A_n le sous-k-ev des polynômes homogènes de degré n dans A. On vérifie aisément que $\mathfrak{m}^n$ est engendré par A_n, et que la projection $\mathfrak{m}^n \longrightarrow \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ induit un isomorphisme k-linéaire $A_n \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$. On voit donc que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est isomorphe à une algèbre de polynôme (avec la graduation habituelle). Voici une reformulation plus intrinsèque : le morphisme de k-ev $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ induit, par propriété universelle des algèbres symétriques, un morphisme (gradué et surjectif)

$$\mathrm{Sym}_k^\bullet(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$$

et ce morphisme est ici un isomorphisme. Quant au complété, on retrouve ici une des définitions possible d'une k-algèbre de séries formelles :

$$\widehat{A_{\mathfrak{m}}} = k[[X_1, \cdots, X_n]] = \left\{ \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,\cdots,i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \right\}.$$

Notons que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ et $\widehat{A_{\mathfrak{m}}}$ ne dépendent que de l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ et que $\widehat{A_{\mathfrak{m}}}$ est lui-même local : son unique idéal maximal est $\mathfrak{m}\widehat{A_{\mathfrak{m}}} = (X_1, \cdots, X_n)$.

Il se trouve que ces deux jolies formes pour le gradué et le complété de l'anneau local de l'espace affine en un point sont vraies pour l'anneau local de tout point non-singulier d'une variété algébrique.

2.5.3 PROPOSITION.– *Soit P un point non-singulier d'une variété V de dimension d, et soient $f_1, \cdots, f_d \in \mathfrak{m}_{V,P}$ des paramètres locaux en P. Alors on a un isomorphisme*

$$k[[X_1, \cdots, X_d]] \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{V,P}, \ X_i \mapsto f_i.$$

Plus généralement, si $\varphi : V \longrightarrow W$ est un morphisme tel que $\varphi(P)$ est non-singulier et $T_P\varphi$ est un isomorphisme, alors $\varphi_P^* : \mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$ induit un isomorphisme entre anneaux locaux complétés $\widehat{\mathcal{O}}_{W,\varphi(P)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{V,P}$, ainsi qu'entre anneaux gradués $\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\,\widehat{\mathcal{O}}_{V,P}$.

Démonstration. Notons d'abord que, puisque $\varphi_P^*(\mathfrak{m}^n_{W,\varphi(P)}) \subset \mathfrak{m}^n_{V,P}$, le morphisme φ_P^* induit bien un morphisme entre complétés $\widehat{\varphi}_P^* : \widehat{\mathcal{O}}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{V,P}$ ainsi d'ailleurs qu'un morphisme entre gradués $\mathrm{gr}\,\varphi_P^* : \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_{W,\varphi(P)}} \mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_{V,P}} \widehat{\mathcal{O}}_{V,P}$. De plus, si $T_P\varphi$ est *injectif*, alors φ_P^* induit une surjection sur les cotangents $\mathfrak{m}_{W,\varphi(P)}/\mathfrak{m}^2_{W,\varphi(P)} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_{V,P}/\mathfrak{m}^2_{V,P}$, et donc aussi des surjections $\mathfrak{m}^n_{W,\varphi(P)}/\mathfrak{m}^{n+1}_{W,\varphi(P)} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}^n_{V,P}/\mathfrak{m}^{n+1}_{V,P}$ pour tout n et, par dévissage, des surjections $\mathfrak{m}^n_{W,\varphi(P)}/\mathfrak{m}^m_{W,\varphi(P)} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}^n_{V,P}/\mathfrak{m}^m_{V,P}$ pour tout $n < m$, donc $\mathrm{gr}\,\varphi_P^*$ et $\widehat{\varphi}_P^*$ sont surjectifs aussi.

Supposons maintenant que $W = \mathbb{A}^d$ avec $\varphi(P) = O$, et que $T_P\varphi$ est un isomorphisme. On peut ramener le cas général à cette situation en choisissant des paramètres locaux de W en $\varphi(P)$. Or, on vient de voir que $\widehat{\varphi}_P^* : k[[X_1, \cdots, X_d]] \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{V,P}$ est surjectif, et il faut voir que ce morphisme est injectif. On peut utiliser pour cela la notion de *dimension de Krull* d'un anneau noethérien. C'est par définition la longueur maximale d'une chaîne $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ d'idéaux premiers propres. Comme une telle chaîne dans $\mathcal{O}_{V,P}$ correspond à une chaîne de fermés irréductibles dans un voisinage ouvert de P dans V, on voit que $\dim(\mathcal{O}_{V,P}) = \dim V = d$. Nous admettrons ici que pour un anneau local $(A, \mathfrak{m})$ noethérien, le complété $\widehat{A}$ est aussi noethérien et $\dim A = \dim \widehat{A}$. Alors l'égalité $\dim k[[X_1, \cdots, X_d]] = \dim \widehat{\mathcal{O}}_{V,P}$, la surjectivité de $\widehat{\varphi}_P^*$, et le fait que tout quotient non trivial de $k[[X_1, \cdots, X_d]]$ est de dimension $< d$, impliquent que $\widehat{\varphi}_P^*$ est injective.

Enfin, il est facile de voir par dévissage que $\widehat{\varphi}_P^*$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{gr}\,\varphi_P^*$ est un isomorphisme. □

Exemple. – Considérons l'application polynomiale $\varphi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$, $x \mapsto (x+1)^2 - 1$. On a $\varphi(O) = O$ et $T_O\varphi$ est la multiplication par 2, donc est un isomorphisme dès que k est de caractéristique $\neq 2$. Le morphisme $\varphi_O^* : k[X]_{(X)} \longrightarrow k[X]_{(X)}$ est donné par $X \mapsto (X+1)^2 - 1 = X(X+2)$ et n'est pas un isomorphisme car il n'y a pas d'élément $f \in Xk[X]_{(X)}$ tel que $(f+1)^2 - 1 = X$ (puisque $X+1$ n'est pas un carré dans $k(X)$). En revanche, cette équation est soluble dans $k[[X]]$: on a $f + 1 = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \cdots$ (développement en série formelle de $(1+X)^{\frac{1}{2}}$), et il s'en suit que le morphisme $\widehat{\varphi}_O^* : k[[X]] \longrightarrow k[[X]]$ est un isomorphisme.

2.5.4 *Anneaux locaux réguliers.* Dans la preuve précédente, on a défini la *dimension de Krull* d'un anneau noethérien comme la longueur maximale d'une chaîne $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ d'idéaux premiers propres. Notons que dans une telle chaîne de longueur maximale, on a $\mathfrak{p}_0 = (0)$ si (et seulement si) A est intègre. Si A est de plus *local* d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on dit que A est régulier si $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(A)$.

Exercice. – Soit P un point d'une variété algébrique V, montrer que $\dim \mathcal{O}_{V,P} = \dim V$. En déduire que P est non-singulier si et seulement si $\mathcal{O}_{V,P}$ est un anneau régulier.

On peut montrer qu'un anneau local régulier est intègre, intégralement clos, et même factoriel. En dimension 1 on a même mieux :

2.6 Désingularisation de courbes

2.6.1 LEMME.– *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau noethérien local intègre de dimension 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A est régulier

ii) A est principal (et donc un anneau de valuation discrète).

iii) A est normal (i.e. intégralement clos).

Démonstration. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Si A est régulier, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension 1, donc $\mathfrak{m}$ est principal, engendré par n'importe quel élément ϖ dont l'image dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est non nul. Soit alors $N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varpi^n A$. On a $\mathfrak{m}N = \varpi N = N$, donc, puisque N est de type fini comme A-module (A est noethérien), le lemme de Nakayama implique que $N = 0$. Il s'ensuit que tout élément non nul $a \in A$ s'écrit de manière unique $a = \varpi^n u$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et $u \in A^\times$. En particulier les idéaux de A sont les $\varpi^n A$ et sont tous principaux.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Si un élément $\frac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(A)$ avec $(a, b) = A$ est annulé par $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in A[X]$, alors $b|a^n$ ce qui implique $b \in A^\times$ et $\frac{a}{b} \in A$. Donc A est normal

iii) $\Rightarrow$ *i)*. Puisque $\dim(A) > 0$, on a $\mathfrak{m} \neq (0)$ donc $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$ par Nakayama. Fixons donc $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. On a $\dim(A/(x)) = \dim(A) - 1 = 0$, donc $A/(x)$ est artinien. Plus précisément, $\mathfrak{m}/(x)$ est l'unique idéal premier de $A/(x)$ et donc est égal au nil-radical de $A/(x)$, i.e. tous les éléments de $\mathfrak{m}/(x)$ sont nilpotents. Comme $\mathfrak{m}$ est de type fini, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^n \cdot \mathfrak{m}/(x) = (\mathfrak{m}/(x))^{n+1} = 0$. Soit $y \in \mathfrak{m}$ tel que $\mathfrak{m}\bar{y} = 0$ dans $A/(x)$. On a donc $y\mathfrak{m} \subset xA$. Pour $z \in \mathfrak{m}$, si $yz = xa$, on ne peut avoir $a \in A^\times$ puisque $x \notin \mathfrak{m}^2$, donc $a \in \mathfrak{m}$, et il s'ensuit que $y\mathfrak{m} \subset x\mathfrak{m}$. Considérons alors l'endomorphisme A-linéaire $\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$, $z \mapsto \frac{yz}{x}$. Cet endomorphisme est annulé par un polynôme unitaire $P(X)$ à coefficients dans A (grâce à Cayley-Hamilton) donc on a $P(\frac{y}{x}) = 0$ dans le localisé $A[x^{-1}] \subset \mathrm{Frac}(A)$, et l'élément $\frac{y}{x}$ de $\mathrm{Frac}(A)$ est entier sur A, donc appartient à A puisque A est normal. On a donc $y \in Ax$ et $\bar{y} = 0$. En notant $M[\mathfrak{m}]$ la $\mathfrak{m}$-torsion d'un module M (i.e. le sous-module tué par tous les éléments de $\mathfrak{m}$), ceci montre que $(\mathfrak{m}/(x))[\mathfrak{m}] = 0$. Mais alors, $\mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{m}/(x))[\mathfrak{m}^2] \subset (\mathfrak{m}/(x))[\mathfrak{m}] = 0$ donc $(\mathfrak{m}/(x))[\mathfrak{m}^2] = 0$ puis, par récurrence, $(\mathfrak{m}/(x))[\mathfrak{m}^m] = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. En particulier, on a $\mathfrak{m}/(x) = (\mathfrak{m}/(x))[\mathfrak{m}^n] = 0$, et donc $\mathfrak{m} = (x)$ et A est régulier. □

Remarque. – Pour un anneau local de dimension > 1, être normal est bien plus faible qu'être régulier. Par exemple, l'anneau local en O de $V = V_{XY-Z^2}$ n'est pas régulier mais on peut montrer qu'il est intégralement clos.

2.6.2 *Anneaux de valuation discrète.* Un anneau qui vérifie les conditions du lemme est appelé *anneau de valuation discrète*, et un élément $\varpi \in A$ générateur de $\mathfrak{m}$ est appelé *uniformisante* de A. La terminologie provient de la théorie des valuations des corps. Définissons en effet une fonction $v : \mathrm{Frac}(A) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ en envoyant 0 sur ∞ et $x \neq 0$ sur l'unique entier $v(x)$ tel que $x \in A^\times \varpi^{v(x)}$. On a alors les propriétés suivantes :
— $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$
— $v(xy) = v(x) + v(y)$
— $v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$.
De plus on retrouve A par l'égalité $A = \{x \in \mathrm{Frac}(A), v(x) \geqslant 0\}$. La fonction v est un exemple de valuation au sens suivant :

DÉFINITION. – *Soit K un corps. Une valuation (de rang 1) est une fonction $v : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui vérifie les trois propriétés ci-dessus. Elle est dite "discrète" si $v(K^\times)$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$, et "discrète normalisée" si $v(K^\times) = \mathbb{Z}$.*

Réciproquement, si K est un corps muni d'une valuation discrète normalisée v, on a :
— $A := \{x \in K, v(x) \geqslant 0\}$ est un anneau de valuation discrète (appelé "l'anneau de la valuation v"), d'idéal maximal $\mathfrak{m} := \{x \in K, v(x) > 0\}$.
— $A^\times = \{x \in K, v(x) = 0\}$ et $\varpi \in K$ est uniformisante de A si et seulement si $v(\varpi) = 1$,
— K est le corps des fractions de A.
On verra plus loin comment définir une structure de variété algébrique lisse de dimension 1 sur l'ensemble de toutes les valuations discrètes (normalisées) d'une extension de k de degré de transcendance 1.

2.6.3 *Désingularisation de courbes.* Le dernier lemme nous dit qu'une courbe C est lisse en un point P si et seulement si l'anneau local $\mathcal{O}_{C,P}$ est normal. Cela n'est pas nécessairement une manière efficace de vérifier si un point est bien régulier, mais cela suggère une manière d"'effacer" les points singuliers : en prenant la clôture intégrale. On a besoin du lemme de finitude suivant :

THÉORÈME. – *Soit A une k-algèbre intègre de type fini et L une extension finie de $K := \mathrm{Frac}(A)$. Alors la clôture intégrale B de A dans L est un A-module de type fini (et donc aussi une k-algèbre de type fini).*

Démonstration. Par le théorème de normalisation de Noether, A est un module de type fini sur une sous-algèbre A' isomorphe à une algèbre de polynômes, ce qui nous ramène au cas où $A = k[X_1, \cdots, X_n]$ est une algèbre de polynômes.

Notons L_{sep} la sous-extension de L séparable maximale sur K. Si on est en caractéristique 0, on a $L_{\mathrm{sep}} = L$ et on peut passer au paragraphe suivant. Sinon, il existe une puissance q de la caractéristique telle que $L^q \subset L_{\mathrm{sep}}$. Soit alors $K' := K(X_1^{1/q}, \cdots, X_n^{1/q})$ et $L' := K'L$ le corps composé de K' et L dans une clôture algébrique de K (on choisit des plongements). Puisque k est parfait, $x \mapsto x^q$ induit un isomorphisme de l'extension $K' \subset L'$ sur l'extension $K \subset KL^q$, donc en particulier L' est séparable sur K'. Par ailleurs, la clôture intégrale de A dans K' est visiblement $A' := k[X_1^{1/q}, \cdots, X_n^{1/q}]$ qui est un A-module de type fini. D'après le "cas séparable" traité ci-dessous, la clôture intégrale B' de A' dans L' est un A'-module de type fini, donc aussi un A-module de type fini, et finalement $B \subset B'$ est aussi un A-module de type fini par Noetheriannité de A.

Reste à traiter le cas où l'extension $L \supset K$ est séparable. Notons $n = [L : K]$. La séparabilité de l'extension signifie que la forme bilinéaire $\theta_{L/K} : L \times L \longrightarrow K$, $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$ est non dégénérée. Soit alors $b_1, \cdots, b_n$ une base de L sur K contenue dans B (existe car $L = \mathrm{Frac}(B)$). On a donc $M := \bigoplus_i Ab_i \subset B$. Soit $b_1^*, \cdots, b_n^*$ la base duale pour la forme non dégénérée $\theta_{L/K}$. Pour tout $b \in B$, on a

$$b = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}_{L/K}(bb_i) b_i^*.$$

Mais, comme on l'a déjà rappelé, $\mathrm{Tr}_{L/K}(bb_i)$ est entier sur A (comme somme de conjugués de bb_i qui est entier), donc appartient à A qui est normal. Donc $B \subset M' := \bigoplus_i Ab_i^*$. □

Soit maintenant C une courbe algébrique affine d'algèbre de fonctions régulières $A := \mathcal{O}(C)$. Notons $\widetilde{A}$ la clôture intégrale de A dans $\mathrm{Frac}(A) = \mathcal{M}(C)$ (on dit aussi que $\widetilde{A}$ est *la normalisation* de A). D'après le théorème, c'est une k-algèbre de type fini. Soit $\tilde{C}$ la variété algébrique (irréductible) $\mathrm{Max}(\widetilde{A})$. D'après le théorème, le morphisme $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ est fini, et donc surjectif puisqu'il est dominant. En particulier, $\tilde{C}$ est une courbe. Comme les localisés d'un anneau normal sont normaux, $\tilde{C}$ est une courbe lisse. De plus, soit U un ouvert affine de C sans points singuliers. Les localisés de $\mathcal{O}(U)$ sont tous normaux, donc $\mathcal{O}(U)$ est normal. Comme la clôture intégrale commute à la localisation, $\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ est la normalisation de $\mathcal{O}(U)$, donc est égal à $\mathcal{O}(U)$. En d'autres termes, π est un isomorphisme au-dessus de U et donc, au-dessus de tout le lieu non-singulier $C_{\mathrm{reg}} \subset C$.

Exercice. – Vérifier que la normalisation commute à la localisation (i.e. si A est un anneau intègre et $S \subset A$ une partie multiplicative, alors $S^{-1}\widetilde{A} = \widetilde{S^{-1}A}$ dans $\mathrm{Frac}(A)$.) Vérifier aussi que A intègre est normal si et seulement si tous ses localisés en les idéaux maximaux sont normaux.

Exemple. – Considérons la cubique plane $C \subset \mathbb{A}^2$ d'équation $Y^2 - X^2(X+1)$. Elle passe par $O = (0,0)$ et ce point est singulier. Dans $\mathcal{M}(C)$, la fonction rationnelle $t := \frac{y}{x}$ vérifie l'équation $t^2 = x + 1$, donc appartient à $\widetilde{\mathcal{O}(C)}$. En fait, les égalités $x = t^2 - 1$ et $y = tx$ montrent que $\mathcal{M}(C) = k(t)$, donc la normalisation de $\mathcal{O}(C)$ est $k[t]$. On en déduit que $\tilde{C} = \mathbb{A}^1$ et le morphisme de normalisation (ie de désingularisation) est donné par $\varphi(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$. On observe que la préimage de 0 est $\{1, -1\}$. Bien-sûr en dehors de ces deux points, φ est un isomorphisme $\mathbb{A}^1 \setminus \{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} C \setminus \{O\}$.

Exercice. – Dans le cas de la cubique à point de rebroussement ("cusp") d'équation $Y^2 - X^3$, calculer le morphisme de désingularisation et vérifier en particulier que c'est un homéomorphisme.

Remarque. – En général, il n'est pas toujours si facile de calculer une normalisation.

Remarque. – Une variété irréductible V est dite *normale* si ses anneaux locaux sont normaux en tout point. En général, une telle variété n'est pas lisse, mais on peut montrer que son lieu singulier est de codimension $\geqslant 2$.

2.7 Points singuliers, cône tangent

Reprenons l'exemple des deux cubiques planes singulières en O ci-dessus. Dans chacun des cas, l'espace tangent T_OC est le lieu d'annulation de la partie linéaire de l'équation $f = Y^2 - X^3$ ou $g = Y^2 - X^2(X+1)$, qui est nulle, de sorte que $T_OC = T_O\mathbb{A}^2 = k^2$ ne nous apporte pas d'autre information que la non-régularité du point. Néanmoins, on peut remarquer que la "forme" de la singularité peut se lire sur la partie quadratique. Dans le cas de f, la partie quadratique est Y^2, qui définit la droite "tangente" au point de rebroussement. Dans le cas de g, la partie quadratique est $(X-Y)(X+Y)$ qui définit la réunion des "tangentes" aux deux "branches" passant par le point singulier O.

Plus généralement, un polynôme $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ de terme constant nul s'écrit de manière unique $\sum_{r>0} f^{(r)}$ avec $f^{(r)}$ homogène de degré r. On note $f^\flat := f^{(r)}$ avec r le plus petit entier tel que $f^{(r)} \neq 0$, et on appelle $f^\flat$ la "partie principale" de f. On a donc que l'hypersurface $V_f \subset \mathbb{A}^n$ est non-singulière en O si et seulement si $f^\flat = f^{(1)}$, auquel cas $T_OV_f = V_{f^\flat}$. Si $\deg(f^\flat) > 1$, $V_{f^\flat}$ n'est plus un espace linéaire, mais reste un cône (i.e. stable par homothétie) de sommet O. Intuitivement, c'est le cône qui "approxime" au mieux V dans un voisinage de O.

2.7.1 DÉFINITION.– *Soit $V \subset \mathbb{A}^n$ passant par O. Notons $I_V^\flat$ l'idéal engendré par les $f^\flat$, $f \in I_V$. On appelle* cône tangent *à V en O et on note C_OV la sous-variété $V_{I_V^\flat} \subset \mathbb{A}^n$ définie par l'idéal $I_V^\flat$.*

Remarquons que le cône tangent est toujours inclus dans l'espace tangent, par construction. Comme notre première définition d'espace tangent, cette définition a l'avantage d'avoir un sens géométrique assez clair, et l'inconvénient de dépendre du fait que V est plongé dans $\mathbb{A}^n$. Avant de donner une définition intrinsèque, voyons comment ce cône est transporté par un morphisme.

Supposons donc donné un morphisme $\varphi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ de composantes $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ avec $\varphi_i \in k[X_1, \cdots, X_n]$. Notons $\varphi^\flat := (\varphi_1^\flat, \cdots, \varphi_m^\flat) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ le morphisme donné par les parties principales.

LEMME. – *Soit $V \subset \mathbb{A}^n$ et $W \subset \mathbb{A}^m$ des variétés telles que $\varphi(V) \subset W$. Alors $\varphi^\flat(C_OV) \subset C_OW$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour toute $f \in I_W$, on a $(f \circ \varphi)^\flat = f^\flat \circ \varphi^\flat$. □

Cherchons maintenant une définition intrinsèque. On a déjà une définition intrinsèque de l'espace tangent et, comme on l'a remarqué, le cône tangent est naturellement un sous-ensemble algébrique de l'espace tangent, défini par des fonctions polynomiales.

Un point clef ici est que la k-algèbre des fonctions polynomiales sur un k-espace vectoriel E de dimension finie est canoniquement l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}_k(E^*)$ sur le dual $E^* := \mathrm{Hom}_k(E, k)$ de E.

Rappelons que l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}_k(E^*)$ est le quotient de l'algèbre tensorielle (non commutative)

$$T^\bullet(E^*) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E^* \otimes_k \cdots \otimes_k E^*, \text{ munie du produit par concaténation}$$

par l'idéal bilatère engendré par les $x \otimes y - y \otimes x$. C'est une k-algèbre commutative munie d'un plongement $E^* \hookrightarrow \mathrm{Sym}_k(E^*)$ et caractérisée par la propriété universelle que *toute application k-linéaire $E^* \longrightarrow A$, avec A une k-algèbre commutative, se prolonge uniquement en un morphisme de k-algèbres* $\mathrm{Sym}(E^*) \longrightarrow A$.

Pour tout choix de base $x_1, \cdots, x_n$ de E^*, on a alors un unique isomorphisme de k-algèbres $k[X_1, \cdots, X_n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}_k(E^*)$ tel que $X_i \mapsto x_i$.

Dans la situation qui nous intéresse, on a identifié $T_O V$ à $\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,O}, k)$ et $\mathfrak{m}_{V,O}/\mathfrak{m}_{V,O}^2$ au dual de $\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,O}, k)$. Donc $\mathrm{Sym}_k(\mathfrak{m}_{V,O}/\mathfrak{m}_{V,O}^2)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $T_O V$. De plus, le morphisme évident $\mathfrak{m}_{V,O}/\mathfrak{m}_{V,O}^2 \hookrightarrow \mathrm{gr}\, \mathcal{O}_{V,O}$ fournit par propriété universelle un morphisme de k-algèbres *surjectif*

$$\mathrm{Sym}_k(\mathfrak{m}_{V,O}/\mathfrak{m}_{V,O}^2) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\, \mathcal{O}_{V,O}.$$

En particulier, $\mathrm{gr}\, \mathcal{O}_{V,O}$ est une k-algèbre de type fini. Notons qu'elle n'est pas nécessairement réduite, mais nous abuserons un peu des notations en notant $\mathrm{Spm}(\mathrm{gr}\, \mathcal{O}_{V,O}) := \mathrm{Spm}((\mathrm{gr}\, \mathcal{O}_{V,O})_{\mathrm{red}})$ le spectre maximal de son algèbre réduite.

Définition. – *Le cône tangent intrinsèque de V en O est la variété algébrique affine* $\mathrm{Spm}(\mathrm{gr}\, \mathcal{O}_{V,O})$.

Le morphisme surjectif ci-dessus fait de $\mathrm{Spm}(\mathrm{gr}\, \mathcal{O}_{V,O})$ une sous-variété fermée de l'espace affine $\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,O}, k)$.

Lemme. – *L'isomorphisme k-linéaire $\alpha_{V,O} : \mathrm{Der}_k(V, O) \xrightarrow{\sim} T_O V$ du lemme 2.3.4 induit un isomorphisme de variétés* $\mathrm{Spm}(\mathrm{gr}\, \mathcal{O}_{V,O}) \xrightarrow{\sim} C_O V$. *Plus précisément, on a un isomorphisme*

$$k[X_1, \cdots, X_n]/I_V^\flat \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\, \mathcal{O}_{V,O}$$

qui envoie X_i sur son image dans $\mathfrak{m}_{V,O}/\mathfrak{m}_{V,O}^2$.

Démonstration. Par construction, la k-algèbre des fonctions sur $C_O V$ est $k[X_1, \cdots, X_n]/\sqrt{I_V^\flat}$, mais on peut identifier $C_O V$ au spectre maximal de la k-algèbre $k[X_1, \cdots, X_n]/I_V^\flat$. Ainsi l'isomorphisme d'algèbres annoncé implique, en passant aux algèbres réduites, l'isomorphisme de variétés voulu. Prouvons donc l'isomorphisme d'algèbres.

Puisque l'idéal $I_V^\flat$ est homogène, on a $I_V^\flat = \bigoplus_m (I_V^\flat \cap k[X_1, \cdots, X_n]_m)$, d'où une graduation

$$k[X_1, \cdots, X_n]/I_V^\flat = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} k[X_1, \cdots, X_n]_m/(I_V^\flat \cap k[X_1, \cdots, X_n]_m).$$

On a déjà identifié $k[X_1, \cdots, X_n]_m \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}^m_{\mathbb{A}^n,O}/\mathfrak{m}^{m+1}_{\mathbb{A}^n,O}$. Par ailleurs, on a

$$\mathfrak{m}^m_{\mathbb{A}^n,O}/(\mathfrak{m}^{m+1}_{\mathbb{A}^n,O} + I_V \cap \mathfrak{m}^m_{\mathbb{A}^n,O}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}^m_{V,O}/\mathfrak{m}^{m+1}_{V,O}.$$

Or, on a aussi

$$\mathfrak{m}^{m+1}_{\mathbb{A}^n,O} + I_V \cap \mathfrak{m}^m_{\mathbb{A}^n,O} = \mathfrak{m}^{m+1}_{\mathbb{A}^n,O} + I_V^\flat \cap \mathfrak{m}^m_{\mathbb{A}^n,O},$$

d'où un isomorphisme $k[X_1, \cdots, X_n]_m/(I_V^\flat \cap k[X_1, \cdots, X_n]_m) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}^m_{V,O}/\mathfrak{m}^{m+1}_{V,O}$ puis, en sommant

$$k[X_1, \cdots, X_n]/I_V^\flat \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} \mathcal{O}_{V,O},$$

comme voulu. □

Bien-sûr, tout morphisme de variétés $\varphi : V \longrightarrow W$ induit pour tout $P \in V$ un morphisme $\operatorname{gr}\varphi_P^* : \operatorname{gr}\mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \operatorname{gr}\mathcal{O}_{V,P}$ et donc un morphisme des cônes tangents $\operatorname{gr}\varphi$. On laisse le lecteur se convaincre que, lorsque φ provient d'une application polynomiale $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ telle que $\varphi(V) \subset W$, ce morphisme correspond à celui noté $\varphi^\flat$ plus haut via les isomorphismes du lemme ci-dessus.

Exemple. – Dans le cas de la courbe $C = V_{Y^2-X^3}$, on a donc $\operatorname{gr}\mathcal{O}_{C,O} = k[X,Y]/(Y^2)$ qui n'est pas réduite. Dans l'étude des singularités, le 2 a son importance et s'interprète comme une "multiplicité".

Remarque. – Un point P est non-singulier si et seulement si $C_PV = T_PV$, si et seulement si $\operatorname{gr}\mathcal{O}_{V,P}$ est une algèbre de polynômes. En général, on peut montrer que $\dim \operatorname{gr}\mathcal{O}_{V,P} = \dim \mathcal{O}_{V,P} = \dim V$ (si V irréductible).

DÉFINITION. – *On dit qu'un morphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ est étale au point P, si $\operatorname{gr}\varphi_P^* : \operatorname{gr}\mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \operatorname{gr}\mathcal{O}_{V,P}$ est un isomorphisme, ou de manière équivalente, si $\widehat{\varphi}_P^* : \widehat{\mathcal{O}}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{V,P}$ est un isomorphisme.*

Les morphismes étales ont une importance capitale en géométrie algébrique. Ils jouent le rôle des isomorphismes locaux en topologie, en particulier ils sont ouverts, et permettent de définir une théorie cohomologique très utile, qui remplace la cohomologie singulière des variétés topologique. Par ailleurs, les morphismes finis et étales sont les analogues des revêtements en topologie et permettent de définir un groupe fondamental.

2.8 Et le fibré tangent ?

Le fibré tangent joue un rôle important en géométrie différentielle. En géométrie algébrique aussi, on peut mettre "en famille" les espaces (co)tangents d'une variété. Le point clef, dû à Kähler, est l'existence d'une dérivation "universelle".

2.8.1 LEMME.– *Soit A une k-algèbre. Le foncteur $M \mapsto \mathrm{Der}_k(A, M)$ des A-modules dans les k-ev est représentable par un couple $(\Omega_{A/k}, \partial_{\mathrm{univ}})$.*

Démonstration. Donnons la construction. Soit I le noyau du morphisme de multiplication $A \otimes_k A \xrightarrow{\mu} A$. Remarquer que I est un $A \otimes_k A$-module, donc un A-module de deux manières, a priori distinctes. Le quotient I/I^2 est aussi un $A \otimes_k A$-module mais dont l'action de $A \otimes_k A$ se factorise par A via μ, donc c'est un A-module, sans ambiguïté. Posons

$$\Omega_{A/k} := I/I^2 \text{ et } \forall f \in A,\ \partial_{\mathrm{univ}}(f) := (f \otimes 1 - 1 \otimes f) \bmod I^2.$$

On vérifie sans peine que ∂_{univ} est bien une dérivation, d'où, pour tout A-module M, une flèche

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(A, M), \quad \theta \mapsto \partial_{\mathrm{univ}} \circ \theta.$$

Dans l'autre sens, soit $\partial \in \mathrm{Der}_k(A, M)$ et notons $d : A \otimes_k A \longrightarrow M$ l'unique morphisme de A-modules tel que $d(a \otimes b) = a\partial b$ (ici $A \otimes_k A$ est vu comme A-module via $\mathrm{id} \otimes 1$). Alors la restriction $d_{|I}$ est A-linéaire pour les deux actions de A sur I (à gauche, par construction, et à droite, par calcul : si $x = \sum_k a_k \otimes b_k \in I$, alors $d(x) + d(x^t) = \partial(\sum_k a_k b_k) = 0$ où $x^t = \sum_k b_k \otimes a_k$, donc $d((1 \otimes a)x) = -d((a \otimes 1)x^t) = -a.d(x^t) = a.d(x)$). Il s'ensuit que si $x \in I$ et $y \in A \otimes_k A$, on a $d(yx) = \mu(y)d(x)$ et, en particulier, $d_{|I^2} = 0$. Donc $d_{|I}$ se factorise par un morphisme A-linéaire $\Omega_{A/k} \longrightarrow M$. On vérifie que cette construction est inverse de la précédente. $\square$

Notons que ces constructions sont valables si k est remplacé par n'importe quel anneau commutatif. En l'absence d'ambiguïté, nous abrégerons $\Omega_A := \Omega_{A/k}$. On l'appelle "module des différentielles de Kähler de A".

Exemple. – Soit $A = k[X_1, \cdots, X_n]$. Posons $df := \partial_{\mathrm{univ}}(f)$. On calcule que Ω_A est le A-module libre de base $dX_1, \cdots, dX_n$ et que $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$.

Exercice. – Vérifier que $\Omega_{S^{-1}A/k} \simeq S^{-1}\Omega_{A/k} (:= S^{-1}A \otimes_A \Omega_{A/k})$ si $S \subset A$ est une partie multiplicative.

2.8.2 *Module cotangent et espaces cotangents.* Soit A une k-algèbre et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A de corps résiduel $A/\mathfrak{m} = k$. On a donc

$$\mathrm{Der}_k(A, A/\mathfrak{m}) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, k) = \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{m}}(\Omega_A \otimes_A A/\mathfrak{m}, k).$$

En comparant avec 2.4.7 on en déduit un isomorphisme

$$\Omega_A \otimes_A A/\mathfrak{m} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Ω_A est donc un A-module dont la réduction modulo chaque $\mathfrak{m}$ maximal redonne le cotangent en $\mathfrak{m}$. Pour cette raison, on l'appelle aussi "module cotangent".

2.8.3 *Fibré tangent.* Considérons maintenant la A-algèbre symétrique $\mathrm{Sym}_A(\Omega_A)$. Comme précédemment, elle est munie d'un morphisme de A-modules $\Omega_A \longrightarrow \mathrm{Sym}_A(\Omega_A)$ qui est universel pour les morphismes de A-modules de Ω_A dans une A-algèbre commutative. On en déduit (on peut aussi le déduire de la construction via l'algèbre tensorielle) un isomorphisme

$$\mathrm{Sym}_A(\Omega_A) \otimes_A A/\mathfrak{m} = \mathrm{Sym}_{A/\mathfrak{m}}(\Omega_A \otimes_A A/\mathfrak{m}) \simeq \mathrm{Sym}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \subset A$ de corps résiduel k.

Supposons maintenant que $A = \mathcal{O}(V)$ pour une variété affine V. Et notons

$$\mathcal{T}V := \mathrm{Spm}(\mathrm{Sym}_A(\Omega_A)).$$

C'est une variété affine au-dessus de V, plus précisément, elle est munie du morphisme $\tau : \mathcal{T}V \longrightarrow V$ tel que τ^* est le morphisme structurel $A \longrightarrow \mathrm{Sym}_A(\Omega_A)$.

Si $P \in V$ correspond à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, alors la fibre $\tau^{-1}(P)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(P) &= \{\mathfrak{n} \in \mathrm{Spm}(\mathrm{Sym}_A(\Omega_A)), \mathfrak{n} \supset \tau^*(\mathfrak{m})\} \\ &= \mathrm{Spm}(\mathrm{Sym}_A(\Omega_A) \otimes_A A/\mathfrak{m}) = \mathrm{Spm}(\mathrm{Sym}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)) \simeq T_P V \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{T}V$ est une variété qui "met ensemble" tous les espaces tangents de V.

Exemple. – Si $V = \mathbb{A}^n$, on a vu que Ω_A est libre de rang n sur A, et il s'ensuit que $\mathrm{Sym}_A(\Omega_A)$ est une algèbre de polynômes sur A. Dans ce cas $\mathcal{T}V$ est une fibration "triviale" au sens où il existe un isomorphisme $\mathcal{T}V \xrightarrow{\sim} V \times \mathbb{A}^n$ avec τ donné par la première projection.

Le lemme suivant montre que, sur une variété lisse, la fibration $\mathcal{T}V \longrightarrow V$ est "localement triviale".

Lemme. – *Soit P un point régulier d'une variété algébrique V. Il existe un voisinage ouvert affine lisse $U \subset V$ de P et des fonctions $f_1, \cdots, f_d \in \mathcal{O}(U)$ telles que les $\partial_{\mathrm{univ}} f_i$ forment une base du $\mathcal{O}(U)$-module $\Omega_{\mathcal{O}(U)}$.*

Démonstration. On sait déjà que l'on peut trouver un voisinage ouvert affine lisse $U \subset V$ de P et des fonctions $f_1, \cdots, f_d \in \mathcal{O}(U)$ dont les germes en P sont des paramètres locaux. Considérons l'unique morphisme de $\mathcal{O}(U)$-modules

$$\delta_U : \mathcal{O}(U)^d \longrightarrow \Omega_{\mathcal{O}(U)}, \ e_i \mapsto \partial_{\mathrm{univ}} f_i,$$

où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{O}(U)^d$. Par construction, δ est surjectif après réduction modulo $\mathfrak{m}_{U,P}$. Par Nakayama, δ est donc surjectif après localisation en $\mathfrak{m}_{U,P}$, i.e. induit $\delta_{U,P} : \mathcal{O}_{U,P}^d \twoheadrightarrow \Omega_{\mathcal{O}_{U,P}}$. Le lemme ci-dessous appliqué au conoyau de $\delta_{U,P}$ nous dit qu'il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ non nulle en P telle que δ est surjectif après inversion de h, i.e. on a

$$\delta_{U_h} : \mathcal{O}(U_h)^d = \mathcal{O}(U)[h^{-1}]^n \twoheadrightarrow \Omega_{\mathcal{O}(U)}[h^{-1}] = \Omega_{\mathcal{O}(U_h)}.$$

Alors δ_{U_h} est surjectif après réduction modulo $\mathfrak{m}_{U_h,Q}$ pour tout $Q \in U_h$ donc, par égalité des dimensions, est un isomorphisme après réduction modulo tous les $\mathfrak{m}_{U_h,Q}$. En particulier, son noyau est inclus dans $\bigcap_{Q\in U_h} \mathfrak{m}_{U_h,Q}\mathcal{O}(U_h)^d = 0$ (puisque $\mathcal{O}(U_h)$ est réduite), et donc δ_{U_h} est un isomorphisme, comme voulu. $\square$

LEMME. – *Si M est un module de type fini sur A noethérien, et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier tel que $M_\mathfrak{p} = M \otimes_A A_\mathfrak{p} = 0$, alors il existe $h \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $M[h^{-1}] := M \otimes_A A[h^{-1}] = 0$.*

Démonstration. Puisque M est de type fini, il existe un morphisme surjectif $A^m \twoheadrightarrow M$. Puisque A est noethérien le noyau K de ce morphisme est de type fini, donc il existe un morphisme surjectif $A^n \twoheadrightarrow K$. En notant $\theta : A^n \longrightarrow A^m$ la composée avec l'inclusion $K \subset A^m$, on a alors présenté M comme le conoyau de δ, i.e. $M = \mathrm{Coker}(\delta)$. Comme la localisation $N \mapsto N_\mathfrak{p}$ est un foncteur exact des A-modules dans les $A_\mathfrak{p}$-modules, on a $M_\mathfrak{p} = \mathrm{Coker}(\delta_\mathfrak{p})$ où $\delta_\mathfrak{p} : A_\mathfrak{p}^n \longrightarrow A_\mathfrak{p}^m$ est donné par la “même” matrice que δ. Le fait que $M_\mathfrak{p} = 0$ nous dit qu'il existe un mineur de taille $m \times m$ dans la matrice de δ qui est inversible dans $A_\mathfrak{p}$. Notons $h \in A$ ce mineur. Puisqu'il est inversible dans $A_\mathfrak{p}$, on a $h \in A\setminus\mathfrak{p}$, et bien-sûr, h est inversible dans $A[h^{-1}]$. Mais h est aussi un mineur de taille $m \times m$ de la matrice de $\delta_h : A[h^{-1}]^n \longrightarrow A[h^{-1}]^m$, donc δ_h est surjective et $M[h^{-1}] = \mathrm{Coker}(\delta_h) = 0$ comme voulu. $\square$

2.8.4 *Fonctorialité.* Donnons-nous de plus un morphisme $W \xrightarrow{\varphi} V$ entre variétés affines et notons $\varphi^* : A \longrightarrow B$ le morphisme des k-algèbres de fonctions. Pour tout B-module M, on a une application de restriction $\partial \mapsto \varphi^*\partial$, $\mathrm{Der}_k(B, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(A, M)$, d'où une application fonctorielle en M :

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}_B(\Omega_B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, M) = \mathrm{Hom}_B(\Omega_A \otimes_A B, M).$$

Par le lemme de Yoneda, on en déduit un morphisme de B-modules

$$\Omega_\varphi : \Omega_A \otimes_A B \longrightarrow \Omega_B,$$

qui induit à son tour un morphisme de B-algèbres $\mathrm{Sym}_A(\Omega_A) \otimes_A B \longrightarrow \mathrm{Sym}_B(\Omega_B)$, d'où un morphisme $\mathcal{T}\varphi : \mathcal{T}W \longrightarrow \mathcal{T}V$ au-dessus de $\varphi : W \longrightarrow V$.

LEMME. – *Si V, W sont lisses et φ est étale, alors Ω_φ est un isomorphisme et $\mathcal{T}\varphi$ identifie $\mathcal{T}W$ au produit fibré $\mathcal{T}V \times_V W$.*

Démonstration. Cela se déduit du lemme précédent avec le même genre d'arguments. $\square$

Au contraire, si φ est une immersion fermée, alors $B = A/J$ pour un idéal J et les applications $\mathrm{Der}_k(B, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(A, M)$ sont toutes injectives. Il s'ensuit que Ω_φ est surjectif, ainsi que le morphisme $\Omega_A \longrightarrow \Omega_{A/J}$ de A-modules qui lui est associé. Mais alors le morphisme

$$\mathrm{Sym}_A(\Omega_A) \longrightarrow \mathrm{Sym}_A(\Omega_{A/J}) = \mathrm{Sym}_{A/J}(\Omega_{A/J})$$

est surjectif aussi, donc le morphisme $\mathcal{T}\varphi$ est une immersion fermée $\mathcal{T}W \hookrightarrow \mathcal{T}V$.

Exemple. – Si $V \subset \mathbb{A}^n$, on a donc un plongement $\mathcal{T}V \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. En déroulant les définitions, on constate que $\mathcal{T}V$ est la sous-variété fermée de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ définie par les polynômes $f(X_1, \cdots, X_n)$ et $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_1, \cdots, X_n)Y_i$ où $f \in I_V$, et où les X_i sont les coordonnées sur le premier facteur et les Y_i sur le second facteur.

2.8.5 *Cône tangent global.* Soit V une variété affine d'anneau des fonctions A. Avec la notation du premier lemme de cette section $I = \mathrm{Ker}(A \otimes_k A \longrightarrow A)$, considérons la A-algèbre

$$\mathrm{gr}_I(A \otimes_k A) := A \oplus \Omega_{A/k} \oplus I^2/I^3 \oplus \cdots .$$

Son spectre maximal $\mathcal{C}V$ (plutôt celui de son algèbre réduite) est appelé "cône tangent global" de V. Comme dans le cas ponctuel, le morphisme surjectif

$$\mathrm{Sym}_A(\Omega_A) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_I(A \otimes_k A)$$

montre que $\mathcal{C}V$ est une sous-variété fermée de $\mathcal{T}V$.

3 Variétés projectives

Comme précédemment, k est un corps algébriquement clos.

3.1 L'espace projectif

On note $\mathbb{P}^n(k)$ le quotient de l'ensemble $k^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action de $k^\times$ par homothéties. Il s'identifie donc à l'ensemble des droites vectorielles de l'espace vectoriel k^n. La classe d'équivalence d'un point $\tilde{P} = (x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$ se note $P := [x_0 : \cdots : x_n]$ dans $\mathbb{P}^n(k)$. On appelle les x_i les "coordonnées homogènes" de P, bien qu'elles ne soient définies qu'à homothétie près.

Comme au moins une des coordonnées homogènes est non nulle, on a un recouvrement ensembliste

$$\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i \quad \text{avec} \quad U_i := \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k),\, x_i \neq 0\}.$$

De plus, pour tout $i = 0, \cdots, n$, on a une bijection

$$\psi_i : U_i \xrightarrow{\sim} k^n,\ [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}) \in k^n \quad \text{(pas d'indice } i).$$

On peut donc transporter par ψ_i^{-1} la topologie et le faisceau de fonctions de l'espace affine $\mathbb{A}^n$ et faire ainsi de U_i une variété algébrique affine.

Lemme. – *Il existe sur $\mathbb{P}^n(k)$ une unique structure de variété algébrique telle que chaque U_i soit une sous-variété ouverte.*

Démonstration. On utilise la technique du patching de 1.7.7. L'unicité est claire : si une telle structure existe, alors

— $U \subset \mathbb{P}^n(k)$ est ouvert si et seulement si chaque $U \cap U_i$ est ouvert dans U_i

— $f : U \longrightarrow k$ est régulière si et seulement si pour chaque i on a $f_{|U\cap U_i} \in \Gamma(U\cap U_i, \mathcal{O}_{U_i})$.

Pour l'existence, il faut vérifier les deux points suivants :

i) $U_i \cap U_j$ est ouvert dans U_i et dans U_j.

ii) $(\mathcal{O}_{U_i})_{|U_i\cap U_j} = (\mathcal{O}_{U_j})_{|U_i\cap U_j}$.

Par symétrie, on peut supposer $i = 0$. Les coordonnées de $\mathbb{A}^n$ transportées sur U_0 par la bijection ψ_0 sont alors les fonctions $P = [x_0, \cdots, x_n] \mapsto \frac{x_i}{x_0}$ pour $i = 1, \cdots, n$. On constate donc que $U_0 \cap U_j$ est l'ouvert principal où la coordonnée $\frac{x_j}{x_0}$ ne s'annule pas. D'où i).

Par construction, une fonction $f : U_0 \longrightarrow k$ est régulière si et seulement si il existe un polynôme $P \in k[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $f([x_0 : \cdots : x_n]) = P(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0})$. Puisque $U_0 \cap U_j$ est principal dans U_0, on en déduit que pour une fonction $f : U_0 \cap U_j \longrightarrow k$, on a

$$f \in \Gamma(U_0 \cap U_j, \mathcal{O}_{U_0}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists P \in k[X_1, \cdots, X_n], \exists r \in \mathbb{N}, \\ f([x_0 : \cdots : x_n]) = (\frac{x_j}{x_0})^{-r} P(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}) \end{array} \right. .$$

Pour exprimer cela de manière plus symétrique, introduisons le polynôme *homogénéisé de* P, i.e. l'unique polynôme $\tilde{P} \in k[X_0, \cdots, X_n]$ tel que

— $\tilde{P}$ est homogène de degré $\deg(P)$, et

— $\tilde{P}(1, X_1, \cdots, X_n) = P(X_1, \cdots, X_n)$.

Une fonction $f : U_0 \longrightarrow k$ est donc régulière si et seulement si il existe un polynôme *homogène* $\widetilde{P} \in k[X_0, \cdots, X_n]$ tel que $f([x_0 : \cdots : x_n]) = x_0^{-\deg(\tilde{P})}\tilde{P}(x_0, \cdots, x_n)$, et pour une fonction $f : U_0 \cap U_j \longrightarrow k$, on obtient la condition suivante :

$$f \in \Gamma(U_0 \cap U_j, \mathcal{O}_{U_0}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \tilde{P} \in k[X_0, \cdots, X_n] \text{ homogène}, \exists a, b \in \mathbb{Z},\ a + b + \deg(\tilde{P}) = 0 \\ f([x_0 : \cdots : x_n]) = {x_j}^a {x_0}^b \tilde{P}(x_0, \cdots, x_n) \end{array} \right. .$$

Par symétrie en les indices, pour tout couple i, j et toute fonction $f : U_0 \cap U_j \longrightarrow k$, on a donc

$$f \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_i}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \tilde{P} \in k[X_0, \cdots, X_n] \text{ homogène}, \exists a, b \in \mathbb{Z},\ a + b + \deg(\tilde{P}) = 0 \\ f([x_0 : \cdots : x_n]) = {x_j}^a {x_i}^b \tilde{P}(x_0, \cdots, x_n) \end{array} \right. .$$

La symétrie en i et j montre donc que $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_i}) = \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_j})$. Mais puisque $U_i \cap U_j$ est une variété affine (que ce soit en tant qu'ouvert principal de U_i ou en tant qu'ouvert principal de U_j), toute fonction régulière sur un ouvert de $U_i \cap U_j$ est localement un quotient de deux fonctions définies globalement sur $U_i \cap U_j$. En conséquence, l'égalité des sections globales implique que $(\mathcal{O}_{U_i})_{|U_i\cap U_j} = (\mathcal{O}_{U_j})_{|U_i\cap U_j}$ comme voulu. □

On notera $\mathbb{P}^n_k$ ou simplement $\mathbb{P}^n$ l'ensemble $\mathbb{P}^n(k)$ muni de sa structure de variété algébrique. Comme $U_0 \cap U_i$ est un ouvert dense de U_i pour chaque i, on voit que U_0 est un ouvert dense de $\mathbb{P}^n$. Il s'ensuit que *la variété* $\mathbb{P}^n$ *est irréductible et birationnelle à* $\mathbb{A}^n$*, donc en particulier de dimension* n.

Exercice. – Montrer que la projection $k^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ définit un morphisme $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, et qu'il s'agit d'un morphisme quotient, au sens où tout morphisme $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow V$ constant sur les classes d'homothétie se factorise par un unique morphisme $\mathbb{P}^n \longrightarrow V$.

3.1.1 *Fonctions régulières.* La preuve du lemme suggère d'exprimer le corps des fonctions $\mathcal{M}(\mathbb{P}^n)$ en termes de fractions rationnelles homogènes de degré 0 :

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^n) = k(X_0, \cdots, X_n)_0 := \left\{ \frac{F}{G}, \, F \text{ et } G \text{ homogènes de même degré} \right\},$$

dans lequel $\mathcal{O}(U_i)$ s'identifie à $k[X_0, \cdots, X_i^{\pm 1}, \cdots, X_n]_0$. Plus généralement, il sera souvent pratique de calculer un $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ comme un sous-anneau de $\mathcal{M}(\mathbb{P}^n)$. Par exemple, on a :

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}(U_i) = \bigcap_{i=0}^{n} k[X_0, \cdots, X_i^{\pm 1}, \cdots, X_n]_0 = k[X_0, \cdots, X_n]_0 = k.$$

Il n'y a donc aucune fonction régulière non constante sur $\mathbb{P}^n$. En particulier, tout morphisme $\mathbb{P}^n \longrightarrow V$ avec V affine est constant !

Pour un ouvert $U \subset \mathbb{P}^n$ quelconque, on a la caractérisation locale suivante des fonctions régulières, qui découle de celle sur les ouverts U_i :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \left\{ f : U \longrightarrow k, \left| \begin{array}{l} \forall P \in \mathbb{P}^n, \exists U' \subset U \text{ voisinage ouvert de P}, \\ \exists F, G \in k[X_0, \cdots, X_n] \text{ homogènes de même degré} \\ \text{tels que } G \text{ ne s'annule pas sur } U' \text{ et } f_{|U'} = \left(\frac{F}{G}\right)_{|U'} \end{array} \right. \right\}.$$

Dans l'expression ci-dessus, il est important de noter qu'on ne peut pas évaluer F ou G en un point $Q \in \mathbb{P}^n$ mais seulement leur quotient (car il est homogène de degré 0 donc de valeur indépendante du représentant $[x_0 : \cdots : x_n]$), mais en revanche la condition $G(Q) \neq 0$ est sans ambiguïté car elle ne dépend pas du représentant. Cela nous conduit à la définition suivante.

3.1.2 *Ouverts principaux.* Soit $F \in k[X_0, \cdots, X_n]$ un polynôme homogène. La condition $F(P) \neq 0$ ne dépend pas du choix d'un représentant $P = [x_0 : \cdots : x_n]$. On notera

$$U_F := \{P \in \mathbb{P}^n, F(P) \neq 0\}.$$

Par exemple, $U_i = U_{X_i}$ pour $i = 0, \cdots, n$.

Proposition. – *U_F est un ouvert affine de $\mathbb{P}^n$, dit "ouvert principal", et on a*

$$\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \left(k[X_0, \cdots, X_n][F^{-1}]\right)_0.$$

De plus, tout ouvert de $\mathbb{P}^n$ est réunion finie d'ouverts principaux.

Démonstration. Notons r le degré de F. Pour $i = 0, \cdots, n$, l'intersection $U_i \cap U_F$ est l'ouvert principal de U_i défini par la fonction (associée à) $X_i^{-r}F \in \mathcal{O}(U_i)$. Il s'ensuit que U_F est bien ouvert, et que

$$\Gamma(U_i \cap U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k[X_0, \cdots, X_i^{\pm 1}, \cdots, X_n]_0[(X_i^{-r}F)^{-1}] = \big(k[X_0, \cdots, X_n][X_i^{-1}, F^{-1}]\big)_0 .$$

On en déduit

$$\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \bigcap_{i=0}^{n} \big(k[X_0, \cdots, X_n][X_i^{-1}, F^{-1}]\big)_0 = \big(k[X_0, \cdots, X_n][F^{-1}]\big)_0 .$$

Par ailleurs, on sait que tout ouvert de U_i est réunion d'ouverts principaux (au sens affine), et ceux-ci sont de la forme $U_i \cap U_F$. En remarquant que $U_i \cap U_F = U_{F.X_i}$, on en déduit que tout ouvert de $\mathbb{P}^n$ est réunion finie d'ouverts principaux.

Reste à montrer que U_F est une variété affine. Ceci équivaut à montrer que le morphisme canonique $\varphi : U_F \longrightarrow \mathrm{Spm}(\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))$ (donné par la proposition 1.7.6 appliquée au morphisme identité de $\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$) est un isomorphisme de variétés. La restriction de ce morphisme à $U_F \cap U_i$ est donnée (toujours via la proposition 1.7.6) par le morphisme de restriction $\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \Gamma(U_F \cap U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$. On vient de voir que ce morphisme se prolonge en un isomorphisme $\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})[\tilde{x}_i^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Gamma(U_F \cap U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$, où $\tilde{x}_i := X_i^r F^{-1} \in \Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$. Comme on sait que $U_F \cap U_i$ est affine, on a $U_F \cap U_i = \mathrm{Spm}(\Gamma(U_F \cap U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))$, donc cela signifie que φ induit un isomorphisme de $U_F \cap U_i$ sur l'ouvert principal $\mathrm{Spm}(\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))_{\tilde{x}_i}$ de $\mathrm{Spm}(\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))$ associé à $\tilde{x}_i$. De même, φ induit des isomorphismes $U_F \cap U_i \cap U_j \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spm}(\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))_{\tilde{x}_i\tilde{x}_j}$. Il s'ensuit que φ induit un isomorphisme de U_F sur l'ouvert $\bigcup_{i=0}^n \mathrm{Spm}(\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))_{\tilde{x}_i}$ de $\mathrm{Spm}(\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))$. Reste donc à voir que les $\mathrm{Spm}(\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))_{\tilde{x}_i}$ recouvrent $\mathrm{Spm}(\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))$, i.e. que les $\tilde{x}_i$ engendrent l'idéal unité de $\Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$. Pour cela, remarquons qu'un monôme $X_0^{k_0} \cdots X_n^{k_n}$ de degré $r(n+1)$ est divisible par au moins un X_i^r, donc en particulier, puisque $F^{(n+1)}$ est homogène de degré $r(n+1)$, on a $F^{(n+1)} \in (X_0^r, \cdots, X_n^r)$. Il existe donc $F_0, \cdots, F_n$ homogènes de degré rn tels que $F^{(n+1)} = \sum_i F_i X_i^r$, ce qui implique $1 = \sum_i f_i \tilde{x}_i$ en posant $f_i := \frac{F_i}{F^n} \in \Gamma(U_F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$. $\square$

Exemple. – Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$ sur k^{n+1} induit une action de $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ sur $\mathbb{P}^n$ par automorphismes de variétés.

3.1.3 LEMME.– *La variété $\mathbb{P}^n$ est séparée, i.e. la diagonale Δ de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ est fermée.*

Démonstration. Comme $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ est recouvert par les ouverts affines $U_i \times U_j$, il suffit de montrer que $\Delta \cap (U_i \times U_j)$ est fermé dans $U_i \times U_j$. Or, $\Delta \cap (U_i \times U_j) = U_i \cap U_j$ est affine aussi. Il suffit donc de montrer que le morphisme évident $\mathcal{O}(U_i) \otimes_k \mathcal{O}(U_j) \longrightarrow \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ est surjectif. Comme ci-dessus, identifions les anneaux $\mathcal{O}(U_i)$, $\mathcal{O}(U_j)$ et $\mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ à des sous-k-algèbre du corps de fonctions $\mathcal{M}(\mathbb{P}^n) = k(X_0, \cdots, X_n)_0$ On a alors

$$\mathcal{O}(U_i \cap U_j) = k[X_0, \cdots, X_i^{\pm 1}, \cdots, X_j^{\pm 1}, \cdots, X_n]_0 = \mathcal{O}(U_i)_{X_j X_i^{-1}} = \mathcal{O}(U_j)_{X_i X_j^{-1}}.$$

En particulier toute $f \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ est de la forme $(X_j X_i^{-1})^{-n} g$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathcal{O}(U_i)$. Mais puisque $(X_j X_i^{-1})^{-n} = (X_i X_j^{-1})^n \in \mathcal{O}(U_j)$, le morphisme ci-dessus est bien surjectif. $\square$

3.2 Variétés projectives

On a vu que tout fermé d'une variété algébrique est naturellement équipé d'une structure de variété algébrique.

Définition. – *Une variété projective est une sous-variété fermée d'un espace projectif.*

La dernière proposition nous dit que tout fermé $V \subset \mathbb{P}^n$ est de la forme

$$V = V_{F_1,\cdots,F_r} := \{P \in \mathbb{P}^n, F_1(P) = \cdots = F_r(P) = 0\},$$

pour des polynômes *homogènes* $F_1, \cdots, F_r \in k[X_0, \cdots, X_n]$.

Comme dans le cas affine, plusieurs familles de polynômes peuvent donner le même fermé.

3.2.1 *Idéaux homogènes.*

Lemme. – *Soit $A_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ un anneau gradué (i.e. $A_n.A_m \subset A_{n+m}$) et I un idéal de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $I = \bigoplus (I \cap A_n)$,

ii) $\forall a = \sum_n a_n \in A$ *avec* $a_n \in A_n$, *on a* $a \in I \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in I$.

iii) I est engendré par une famille d'éléments homogènes *(i.e. appartenant à un A_n).*

Démonstration. Exercice. □

Un idéal d'un anneau gradué satisfaisant ces conditions est dit “homogène”. Voici quelques propriétés laissées en exercice :
— le quotient A/I est alors naturellement gradué, puisque $A/I = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n/(I \cap A_n)$.
— si un idéal homogène est de type fini en tant qu'idéal, alors il est engendré par une famille finie d'éléments homogènes.
— si I est homogène, alors $\sqrt{I}$ est homogène.
— si I, J sont homogènes, alors $I + J$, IJ et $I \cap J$ sont homogènes.
— un idéal homogène $\mathfrak{p}$ est premier si et seulement si pour tous $a, b \in A$ *homogènes*, on a $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$.

3.2.2 *Fermés de $\mathbb{P}^n$ et idéaux homogènes.* Si I est un idéal homogène de $k[X_0, \cdots, X_n]$, on lui associe le fermé

$$V_I := \{P \in \mathbb{P}^n(k), \forall F \in I \text{ homogène }, F(P) = 0\}.$$

On a les même propriétés que dans le cas affine : $I \subset J \Rightarrow V_I \supset V_J$, $V_{I\cap J} = V_I \cup V_J$, et $V_{\sum_k I_k} = \bigcap_k V_{I_k}$, qui montrent qu'on aurait pu définir directement la topologie de $\mathbb{P}^n$ comme on l'avait fait pour $\mathbb{A}^n$. Remarquons que $V_I = \pi(\tilde{V}_I \setminus \{0\})$, où π désigne la projection $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, et $\tilde{V}_I \subset \mathbb{A}^{n+1}$ est le fermé défini par I. Le Nullstellensatz montre alors que $V_I \neq \emptyset \Leftrightarrow \tilde{V}_I \neq \{(0, \cdots, 0)\} \Leftrightarrow \sqrt{I} \not\supseteq (X_0, \cdots, X_1)$.

Réciproquement, si $V \subset \mathbb{P}^n$, on lui associe l'idéal

$$I_V := I_{\pi^{-1}(V)} := \{f \in k[X_0, \cdots, X_n], \forall \tilde{P} \in \pi^{-1}(V), f(P) = 0\},$$

où π désigne la projection $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$.

LEMME. – *Les applications $I \mapsto V_I$ et $V \mapsto I_V$ induisent des bijections réciproques et décroissantes entre l'ensemble des idéaux homogènes radiciels de $k[X_0, \cdots, X_n]$ ne contenant pas $(X_0, \cdots, X_n)$ et l'ensemble des fermés non vides de $\mathbb{P}^n$. De plus, V est irréductible si et seulement si I_V est premier.*

Démonstration. Vérifions que I_V est homogène. Soit $f \in I_V$ et $f = \sum_n f_n$ sa décomposition en somme de polynômes homogènes. Pour $\lambda \in k^\times$, notons $f_\lambda(X_0, \cdots, X_n) := f(\lambda X_0, \cdots, \lambda X_n)$. Puisque $\pi^{-1}(V)$ est stable par homothéties, on a $f_\lambda \in I_V$. Or, $f_\lambda = \sum_n \lambda^n f_n$. Notons alors $N := \deg(f)$ et choisissons N scalaires distincts $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$. En inversant la matrice de Vandermonde associée, on exprime les f_n comme combinaisons linéaires des f_{λ_n} et on en déduit que $f_n \in I_V$ pour tout n. Le reste du lemme est laissé en exercice. $\square$

On prendra garde au fait qu'il n'y a qu'un seul idéal maximal homogène, à savoir $(X_0, \cdots, X_n)$. Il est raisonnable de déclarer qu'un idéal homogène est *propre* s'il ne contient pas $(X_0, \cdots, X_n)$, et *homogène maximal* s'il est maximal parmi les idéaux homogènes propres. Avec cette définition, les idéaux homogènes maximaux $\mathcal{M}$ contenant I_V correspondent bien aux points de V, mais les quotients $k[X_0, \cdots, X_n]/\mathcal{M}$ ne sont plus des corps !

Remarque. – Pour une sous-variété projective $V \subset \mathbb{P}^n$, la sous-variété affine $\tilde{V} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ définie par I_V est appelée "cône de V dans $\mathbb{A}^{n+1}$". On a $\tilde{V} = \pi^{-1}(V) \cup \{0\}$ et $V = \pi(\tilde{V}) = (\tilde{V} \setminus \{0\})/k^\times$.

Exemple. – Supposons $V = V_{F_1, \cdots, F_r}$ avec $F_1, \cdots, F_r$ homogènes de degré 1, i.e. des formes linéaires sur k^n. Alors $\tilde{V}$ est un sous-espace vectoriel de k^{n+1} et V est donc isomorphe à un espace projectif $\mathbb{P}^m$ avec $m = \dim_k(\tilde{V}) - 1$. Un tel V est appelé *sous-espace projectif* ou *sous-espace linéaire de* $\mathbb{P}^n$. Si $m = n - 1$, on parle d'*hyperplan.*

3.2.3 *Projectivisé d'un sous-ensemble algébrique affine.* Identifions $\mathbb{A}^n$ à la sous-variété ouverte $U_0 = U_{X_0}$. On s'intéresse ici à l'adhérence dans $\mathbb{P}^n$ d'une sous-variété affine $V \subset \mathbb{A}^n$. Le fermé complémentaire V_{X_0} est parfois appelé "hyperplan à l'infini". Notons que $x_1, \cdots, x_n$ forment un système de coordonnées projectives sur V_{X_0}, i.e. l'application $[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [x_1 : \cdots : x_n]$ est un isomorphisme de V_{X_0} sur $\mathbb{P}^{n-1}$.

Notation. – Si $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$, on note $f^* \in k[X_0, \cdots, X_n]$ l'unique polynôme homogène de même degré que f et tel que $f = f^*(1, X_1, \cdots, X_n)$. On note aussi $f^\sharp \in k[X_1, \cdots, X_n]$ la partie homogène de degré maximal de f. On a $f^\sharp = f^*(0, X_1, \cdots, X_n)$.

De plus, pour un idéal $I \subset k[X_1, \cdots, X_n]$, on note $I^* \subset k[X_0, \cdots, X_n]$ l'idéal homogène engendré par les f^*, $f \in I$ et, de même on définit un idéal homogène $I^\sharp \subset k[X_1, \cdots, X_n]$.

Enfin, on peut aussi "déhomogénéiser" un polynôme homogène $F \in k[X_0, \cdots, X_n]$ en posant $F_* := F(1, X_1, \cdots, X_n) \in k[X_1, \cdots, X_n]$. On a alors $(f^*)_* = f$ et $F = X_0^{\deg F - \deg F_*}(F_*)^*$.

Exemple. – Pour $n = 2$, on utilise en général X, Y plutôt que X_1, X_2 et on note Z pour X_0. Par exemple, si $I = (Y^2 - X^3 + X)$, alors $I^* = (ZY^2 - X^3 + XZ^2)$ et $I^\sharp = (X^3)$.

Exercice. – Montrer que $\sqrt{I^*} = (\sqrt{I})^*$.

LEMME. – *Notons $\overline{V}$ l'adhérence dans $\mathbb{P}^n$ d'une sous-variété fermée $V \subset \mathbb{A}^n = U_{X_0}$.*

i) $\overline{V_I} = V_{I^*}$ et $\overline{V_I} \cap V_{X_0} = \mathbb{P}^{n-1}$ est le fermé donné par l'idéal $I^\sharp$.

ii) $W \mapsto \overline{W}$ induit une bijection des composantes irréductibles de V sur celles de $\overline{V}$.

Démonstration. i) Il est clair que $\overline{V_I} \subset V_{I^*}$. Soit $F \in k[X_0, \cdots, X_n]$ homogène tel que $F_{|\overline{V_I}} = 0$. Alors $F_* = F(1, X_1, \cdots, X_n) \in I_{V_I} = \sqrt{I}$, donc $F = X_0^{\deg F - \deg F_*}(F_*)^* \in (I_V)^* = (\sqrt{I})^*$. Il s'ensuit que si W est un fermé de $\mathbb{P}^n$ contenant V alors $I_W \subset (\sqrt{I})^*$. Ainsi $V_{(\sqrt{I})^*}$ est le plus petit fermé contenant V, i.e. $\overline{V_I} = V_{(\sqrt{I})^*} = V_{\sqrt{I^*}} = V_{I^*}$ d'après l'exercice précédent. Le reste de i) est clair.

ii) Soit $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$ la décomposition de V en composantes irréductibles. On a $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^r \overline{V}_i$. Comme l'adhérence d'un ensemble irréductible est irréductible, chaque $\overline{V}_i$ est irréductible. De plus, aucun $\overline{V}_i$ n'est contenu dans la réunion des autres puisque $\overline{V}_i \cap U_{X_0} = V_i$. D'où ii). □

Remarque. – Même si I est radiciel, $I^\sharp$ n'a pas de raison de l'être. Dans l'exemple de la courbe C d'équation affine $Y^2 - X^3 + X$, on a $I^\sharp = (X^3)$, ce qui correspond au fait que $\overline{C}$ intersecte la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2$ en un seul point $[0 : 0 : 1]$ avec un "contact" d'ordre 3. En particulier, la droite à l'infini est tangente à la courbe $\overline{C}$.

3.2.4 *L'anneau gradué d'une sous-variété projective.* Soit $V \subset \mathbb{P}^n$ une sous-variété fermée. Posons $A(V) := k[X_0, \cdots, X_n]/I_V$. C'est une k-algèbre réduite graduée $A(V) = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} A(V)_m$ avec $A(V)_m = k[X_0, \cdots, X_n]_m/(I_V \cap k[X_0, \cdots, X_n]_m)$. En particulier, on a $A(V)_0 = k$ et $A(V)$ est engendrée par le k-ev de dimension finie $A(V)_1$ de ses éléments homogènes de degré 1.

Comme dans le cas affine, on peut retrouver l'ensemble V comme l'ensemble des idéaux homogènes *propres* maximaux (propre = ne contenant pas $A(V)_+ := \bigoplus_{n>0} A(V)_n$). La topologie de V est alors la topologie de Zariski dont les fermés sont les $V_I = \{\mathfrak{m} \supset I\}$ avec I idéal homogène, et une base d'ouverts est donnée par les ouverts "principaux" $U_f = \{\mathfrak{m}, f \notin \mathfrak{m}\}$ avec f homogène. De plus, un tel ouvert est en bijection avec $\mathrm{Spm}(A(V)[f^{-1}]_0)$ (les éléments de degré 0 dans la localisation), et ceci permet de retrouver la structure de variété de V comme recollement des U_{f_i} où les f_i sont choisis de sorte que $\sqrt{(f_1, \cdots, f_r)} = A(V)_+$ (par exemple, on peut prendre une base de $A(V)_1$, comme on l'a fait pour $\mathbb{P}^n$).

Cette construction s'applique à toute k-algèbre graduée $A_\bullet$ réduite telle que $A_0 = k$ et engendrée par A_1 avec $\dim_k A_1$ finie, et fournit une variété algébrique $\mathrm{SpmHom}(A_\bullet)$ (spectre maximal homogène). De plus, tout morphisme surjectif $k[X_0, \cdots, X_n] \twoheadrightarrow A_\bullet$ de k-algèbres graduées induit une immersion fermée $\mathrm{SpmHom}(A_\bullet) \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. **Néanmoins, contrairement au cas affine, l'anneau gradué $A(V)$ n'est pas un invariant de la variété V, et de nombreux $A_\bullet$ ont le même spectre maximal homogène**.

Exemple. – Considérons l'application $\mathbb{P}^1(k) \longrightarrow \mathbb{P}^2(k)$, $[x:y] \mapsto [x^2 : xy : y^2]$. On vérifie facilement que c'est un morphisme de variétés (soit dans des cartes affines, soit en passant par les cônes), et même que c'est un isomorphisme de $\mathbb{P}^1$ sur la quadrique $C = V_{Y^2-XZ} \subset \mathbb{P}^2$, l'isomorphisme inverse envoyant $[x:y:z]$ sur $[x:y]$ ou $[y:z]$ selon que $x \neq 0$ ou $z \neq 0$. Mais l'anneau gradué $A(C) = k[X,Y,Z]/(XZ-Y^2)$ n'est pas isomorphe à $k[X,Y]$ (par exemple $\dim_k A(C)_1 = 3$.)

Remarque. – Si V est une variété projective irréductible, on a $\mathcal{M}(V) = \mathrm{Frac}(A(V))_0$, ce qui impose tout de même une contrainte sur les anneaux gradués possiblement associés à V.

3.2.5 *Produits de variétés projectives.* Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n+1}(k) \times \mathbb{A}^{m+1}(k) & \to & \mathbb{A}^{(n+1)(m+1)}(k) \\ ((x_0, \cdots, x_n), (y_0, \cdots, y_m)) & \mapsto & (x_0y_0, x_0y_1, \cdots, x_iy_j, \cdots, x_ny_{m-1}, x_ny_m) \end{array} .$$

On vérifie facilement qu'elle induit une application $\varphi : \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k) \longrightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m}(k)$ par passage aux quotients.

Lemme. – *L'application φ est une immersion fermée $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m}$, i.e. un morphisme de variétés algébriques qui induit un isomorphisme de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sur une sous-variété fermée de $\mathbb{P}^{nm+n+m}$.*

Démonstration. Que φ soit un morphisme découle du fait que les projections $\pi_k : \mathbb{A}^{k+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^k$ sont des morphismes quotients. On peut aussi le vérifier dans des cartes affines : en effet, on voit que $\varphi(U_{X_i} \times U_{Y_j}) \subset U_{T_{ij}}$ et que $\varphi_{|U_{X_i} \times U_{Y_j}}$ est un morphisme à valeurs dans $U_{T_{ij}}$ dont le morphisme de k-agèbres φ_{ij}^* associé est donnée par

$$\varphi_{ij}^* : \quad \begin{array}{ccc} k\left[\frac{T_{kl}}{T_{ij}}\right]_{(k,l)\neq(i,j)} & \to & k\left[\frac{X_k}{X_i}\right]_{k\neq i} \otimes_k k\left[\frac{Y_l}{Y_j}\right]_{l\neq j} \\ \frac{T_{kl}}{T_{ij}} & \mapsto & \frac{X_k}{X_i} \otimes \frac{Y_l}{Y_j} \end{array} .$$

En particulier, on voit que φ_{ij}^* est un morphisme surjectif, donc φ induit une immersion fermée de $U_{X_i} \times U_{Y_j}$ dans $U_{T_{ij}}$. Comme $\varphi^{-1}(U_{T_{ij}}) = U_{X_i} \times U_{Y_j}$, on en déduit successivement que φ est injective, d'image fermée, et donc une immersion fermée puisque localement immersion fermée. □

Corollaire. – *Un produit de variétés projectives est une variété projective.*

Démonstration. Découle du fait qu'un produit d'immersions fermées est une immersion fermée (exercice) et qu'une composition d'immersions fermées est une immersion fermée. □

3.3 Complétude (propreté)

On a vu que les variétés affines (et en fait toutes les variétés, vu notre définition) sont "quasi-compactes", et partagent donc une propriété avec les espaces topologiques compacts. Néanmoins, une propriété intéressante des espaces topologiques compact, dont l'analogue n'est pas vraie pour les variétés affines, est que l'image par toute application continue d'un compact est fermée.

Exemple. – Dans $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, le fermé d'idéal $(XY-1)$ s'envoie, par la première projection sur l'ouvert $X \neq 0$ de $\mathbb{A}^1$.

L'analogue de la compacité dans le monde des variétés algébriques est la complétude.

3.3.1 DÉFINITION.– *Une variété algébrique V est dite* complète *si elle est* séparée *(i.e. diagonale fermée) et si pour toute autre variété W, la projection $V \times W \longrightarrow W$ est fermée (i.e. envoie les fermés sur des fermés).*

Voici quelques propriété faciles :

LEMME. – *i) Une sous-variété fermée d'une variété complète est complète.*

ii) un produit de variétés complètes est une variété complète.

iii) Si $\varphi : V \longrightarrow W$ et un morphisme de source complète et cible séparée, alors l'image de φ est fermée dans W et, munie de sa structure de sous-variété fermée, est complète.

iv) Si V est complète et connexe, alors $\Gamma(V, \mathcal{O}_V) = k$.

Démonstration. On laisse i) et ii) en exercice. Pour iii), on factorise $\varphi : V \xrightarrow{(\mathrm{id}, \varphi)} V \times W \xrightarrow{\pi_2} W$ (on appelle (id, φ) le graphe de φ). Le morphisme (id, φ) induit une bijection de V sur son image et cette image est fermée dans $V \times W$ car $(\mathrm{id}, \varphi)(V) = (\varphi \times \mathrm{id})^{-1}(\Delta_W)$ et W est séparée. En particulier, puisque V est complète, $\varphi(V) = \pi_2((\mathrm{id}, \varphi)(V))$ est fermé dans W. De plus, pour toute autre variété W' et tout fermé $X \subset \varphi(V) \times W'$, l'image de X par la seconde projection est aussi l'image du fermé $(\varphi \times \mathrm{id}_{W'})^{-1}(X) \subset V \times W'$ par la seconde projection, donc est fermée, ce qui fait de $\varphi(V)$ une variété complète.

Remarque : Si on munit $(\mathrm{id}, \varphi)(V)$ de sa structure de sous-variété fermée, alors la première projection π_1 induit un morphisme $(\mathrm{id}, \varphi)(V) \longrightarrow V$ qui est la bijection inverse de (id, φ). Donc (id, φ) est une immersion fermée.

Pour iv), on se rappelle qu'une fonction régulière $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ est un morphisme $V \longrightarrow \mathbb{A}^1$. Son image doit être fermée et connexe dans $\mathbb{A}^1$ donc, si elle n'est pas constante, elle doit être surjective, mais ce n'est pas possible car alors la composée $V \longrightarrow \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ne serait pas d'image fermée. □

Les termes "compacité" et "complétude" font aussi penser à l'existence de limites. Le théorème suivant donne une caractérisation des variétés complètes dans cet esprit.

3.3.2 THÉORÈME.– *Une variété séparée V est complète si et seulement si pour toute courbe irréductible lisse C et tout point $P \in C$, tout morphisme $\varphi : C \setminus \{P\} \longrightarrow V$ admet* *un prolongement (unique) en un morphisme $C \longrightarrow V$.*

Démonstration. Supposons d'abord V complète et soit $\varphi : C^* := C \setminus \{P\} \longrightarrow V$ un morphisme comme dans l'énoncé. Considérons le morphisme $(\varphi, \iota) : C^* \longrightarrow V \times C$ où ι est l'inclusion de C^* dans C, et notons $X := \overline{(\varphi, \iota)(C^*)}$ l'adhérence de l'image de (φ, ι), qui est donc une variété irréductible. On a deux morphismes

$$C^* \xrightarrow{(\varphi,\iota)} X \xrightarrow{\pi_2} C$$

dont la composée est ι. Comme V est séparée, $(\varphi, \iota)(C^*)$ est fermée dans $V \times C^*$ car c'est aussi l'image réciproque de Δ_V par $\mathrm{id} \times \varphi : V \times C^* \longrightarrow V \times V$. Il s'ensuit que $(\varphi, \iota)(C^*) = (V \times C^*) \cap X$ est ouvert dans X, et plus précisément, que (φ, ι) induit une immersion ouverte de C^* dans X. En particulier X est de dimension 1, et birationnelle à C, i.e. $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(C)$. L'image $\pi_2(X)$ de X par la seconde projection π_2 contient C^* donc, puisque V est complète, est égale à C. Soit $Q \in X$ tel que $\pi_2(Q) = P$. Le morphisme local $\pi_{2,P}^* : \mathcal{O}_{C,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,Q}$ est injectif puisqu'il induit $\mathcal{M}(C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ sur le corps des fractions. Or, pour un anneau de valuation discrète $A \subset K = \mathrm{Frac}(A)$, tout anneau local $A \subset B \subset K$ tel que $\mathfrak{m}_A \subset \mathfrak{m}_B$ est égal à A (exercice). Donc, P étant régulier, $\pi_{2,P}^*$ est un isomorphisme $\mathcal{O}_{C,P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,Q}$. Soit alors $U_X \subset X$ un ouvert affine contenant Q. Puisque $\mathcal{O}(U_X)$ est une k-algèbre de type fini, il existe un ouvert principal U_C de C tel que $(\pi_{2,P}^*)^{-1}(\mathcal{O}(U_X)) \subset \mathcal{O}(U_C)$, d'où un morphisme $U_C \longrightarrow U_X \subset X$ qui envoie P sur Q. Ce morphisme se recolle avec l'inverse de π_2 sur C^* (c'est-à-dire (φ, ι)) et donne un morphisme $\psi : C \longrightarrow X$ qui envoie P sur Q. Mais alors $\bar{\varphi} := \pi_1 \circ \psi : C \longrightarrow V$ est un morphisme prolongeant φ comme voulu. Notons d'ailleurs que, comme ci-dessus, $(\bar{\varphi}, \mathrm{id}_C)(C)$ est fermé dans $V \times C$, ce qui montre que $(\bar{\varphi}, \mathrm{id}_C)(C) = \psi(C) = X$.

Supposons maintenant que V satisfait la propriété de prolongement des morphismes de courbes, et montrons que V est complète. Soit W une variété et $X \subset V \times W$ un fermé. Il faut montrer que $\pi_2(X)$ est fermé dans W. Notons qu'il suffit de traiter le cas où W est affine et X est irréductible, ce que nous supposerons dorénavant. Posons $Y := \overline{\pi_2(X)}$, qui est donc une variété affine irréductible. Alors π_2 induit un morphisme dominant $X \longrightarrow Y$, et le lemme de normalisation de Noether implique l'existence (cf preuve du lemme 2.3.3) d'un ouvert affine $U \subset Y$ au-dessus duquel π_2 se factorise en $\pi_2^{-1}(U) \xrightarrow{\theta} \mathbb{A}^d \times U \xrightarrow{\pi} U$ où θ est un morphisme fini, π est la projection, et $d := \dim X - \dim Y$.

On doit montrer que $\pi_2(X) = Y$. Fixons donc $Q \in Y$. Montrons d'abord qu'il existe une sous-variété fermée C_Y de Y irréductible, de dimension 1, contenant Q et intersectant U. Pour cela, choisissons un morphisme fini surjectif $Y \xrightarrow{\rho} \mathbb{A}^e$ et considérons une droite $D \subset \mathbb{A}^e$ passant par $\rho(Q)$ et un point $R \in \mathbb{A}^e$ dont la fibre $\rho^{-1}(R)$ est contenue dans U (i.e. un point de $\mathbb{A}^e \setminus \rho(Y \setminus U)$). Comme $e = \dim(Y)$ et D est définie par l'annulation de $e - 1$ fonctions dans $\mathbb{A}^e$, on sait que chaque composante irréductible C de $\rho^{-1}(D)$ a dimension $\geqslant 1$. Mais comme ρ est finie, $\rho_{|C} : C \longrightarrow D$ est aussi finie, donc on a $\dim C = 1$ et $\rho(C) = D$. Il ne reste plus qu'à prendre pour C_Y n'importe quelle composante irréductible de $\rho^{-1}(D)$ passant par Q.

Construisons maintenant une courbe fermée $C_X^0 \subset \pi_2^{-1}(U)$ qui relève $U \cap C_Y$, i.e. telle que $\pi_2(C_X^0) = U \cap C_Y$. Pour cela, il suffit de prendre n'importe quelle composante irréductible de $\theta^{-1}(\{0\} \times (U \cap C_Y))$ (par le même argument que précédemment, ces composantes ont nécessairement dimension 1 et se surjectent sur $U \cap C_Y$). Mais alors, π_2 induit un morphisme dominant de C_X^0 dans C_Y, donc on a une inclusion $\pi_2^* : \mathcal{M}(C_Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(C_X^0)$ qui est une extension de degré fini. Soit $\tilde{C}$ la normalisée de C_Y dans $\mathcal{M}(C_X^0)$, c'est-à-dire la courbe affine dont l'algèbre des fonctions $\mathcal{O}(\tilde{C})$ est la normalisation de $\mathcal{O}(C_Y)$ dans $\mathcal{M}(C_X^0)$. On sait que $\tilde{C} \xrightarrow{\nu} C_Y$ est fini dominant, donc surjectif, et il existe donc un point $P \in \tilde{C}$ qui s'envoie sur Q. Par ailleurs, $\mathcal{O}(C_X^0)$ est fini sur $\mathcal{O}(U \cap C_Y)$ donc contenu dans sa normalisation, qui n'est autre que $\mathcal{O}(C^*)$ où $C^* := \nu^{-1}(U \cap C_Y)$ (un ouvert de $\tilde{C}$). Cette inclusion nous fournit donc un morphisme $C^* \xrightarrow{\varphi} C_X^0$ birationnel tel que $\pi_2 \circ \varphi = \nu_{|C^*}$. Posons alors $C := C^* \cup \{P\}$, qui est un ouvert de $\tilde{C}$, et donc est une courbe irréductible et lisse. On dispose d'un morphisme $c_W : C \longrightarrow C_Y \hookrightarrow Y \hookrightarrow W$ et d'un morphisme $c_X^* : C^* \longrightarrow C_X^0 \hookrightarrow \pi_2^{-1}(U) \hookrightarrow X$. Par hypothèse sur V, la composée $\pi_1 \circ c_X^*$ se prolonge en un morphisme $c_V : C \longrightarrow V$. Mais alors le produit $(c_V, c_W) : C \longrightarrow V \times W$ a pour image une variété irréductible contenue dans l'adhérence de C_X^0, donc dans X, et on a $Q = \pi_2 \circ (c_V, c_W)(P)$, comme voulu (ouf !). $\square$

3.3.3 Corollaire.– *Les variétés projectives sont complètes.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathbb{P}^n$ est complète, ce qu'on peut faire par récurrence sur n. Soit donc C une courbe lisse irréductible, qu'on peut supposer affine, $P \in C$, et $\varphi : C^* := C \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ un morphisme. On doit montrer qu'on peut prolonger φ en P. Si $\varphi(C^*)$ est contenu dans un hyperplan $\mathbb{P}^{n-1}$, on utilise l'hypothèse de récurrence. Sinon, $\varphi(C^*)$ intersecte l'ouvert $U = U_{X_0 \cdots X_n}$ complémentaire de la réunion des hyperplans de coordonnées et donc l'ouvert $C' := \varphi^{-1}(U)$ de C^* est non vide. Comme U est affine avec $\mathcal{O}(U) = k[X_i X_j^{-1}]_{i,j}$, la restriction $\varphi_{|C'}$ est donnée par des fonctions $f_{ij} = \varphi^*(X_i X_j)^{-1} \in \Gamma(C', \mathcal{O}_C)$. Notons $v := \mathrm{ord}_P$ la valuation discrète de $\mathcal{M}(C)$ associée à P et choisissons k tel que $v(f_{k0})$ est minimal parmi les $v(f_{i0})$. Alors pour tout i on a $v(f_{ik}) = v(f_{k0}^{-1} f_{i0}) \geqslant 0$ et donc $f_{ik} \in \mathcal{O}_{C,P} \cap \Gamma(C', \mathcal{O}_C) = \Gamma(C' \cup \{P\}, \mathcal{O}_C)$. Les $X_i X_k^{-1}$ sont des coordonnées affines sur l'ouvert U_{X_k} de $\mathbb{P}^n$. Il y a donc un unique morphisme $C' \cup \{P\} \longrightarrow U_{X_k}$ donné par $w \mapsto [f_{0k}(w) : \cdots : f_{nk}(w)]$ (noter que $f_{kk} = 1$). Ce morphisme prolonge $\varphi_{|C'}$ et se recolle donc avec φ pour donner le prolongement $C \longrightarrow \mathbb{P}^n$ cherché. $\square$

3.4 Courbes projectives lisses

Récapitulons ce que l'on sait déjà sur les courbes. On sait que le corps de fonctions d'une courbe irréductible C est une extension de k de type fini et de degré de transcendance 1. On sait qu'une telle courbe est régulière en un point P si et seulement si $\mathcal{O}_{C,P}$ est intégralement clos dans $\mathcal{M}(C)$, auquel cas c'est un anneau de valuation discrète. Enfin, on a vu qu'il existe un morphisme fini birationnel $\tilde{C} \longrightarrow C$ avec $\tilde{C}$ lisse, obtenu par normalisation (on l'a construit dans le cas affine, mais la commutation de la normalisation à la localisation permet de recoller).

Nous allons commencer par montrer que, pour tout corps K de type fini et degré de transcendance 1 sur k, il existe une courbe projective lisse C telle que $\mathcal{M}(C) = K$.

3.4.1 *Construction d'une courbe abstraite.* Notons

$$C_K := \{\text{valuations } v : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}\}$$

et munissons cet ensemble de la topologie dont les ouverts sont les complémentaires d'ensemble finis. Pour $v \in C_K$ on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau de valuation, $\mathfrak{m}_v$ son idéal maximal et $k_v = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ son corps résiduel. Ce corps contient k par construction.

LEMME. – *C_K est infini. De plus :*
i) Pour toute valuation $v \in C_K$, on a $k = k_v$.
ii) Pour toute $f \in K^\times$, l'ensemble $\{v \in C_K, v(f) > 0\}$ est fini.

Démonstration. i) Puisque v est non triviale, il existe $f \in K$ tel que $v(f) > 0$. Puisque v est nulle sur k, l'élément f est transcendant sur k et engendre une algèbre $k[f]$ isomorphe à une algèbre de polynômes. L'extension $k(f) \subset K$ est finie, donc d'après le théorème 2.5.3, la clôture intégrale A de $k[f]$ est une k-algèbre de type fini de dimension 1 et de corps des fractions K. Puisque $k[f] \subset \mathcal{O}_v$ on a aussi $A \subset \mathcal{O}_v$. De plus, l'idéal $\mathfrak{m} := \{a \in A, v(a) > 0\}$ est un idéal maximal de A. En effet, c'est un idéal premier non nul (puisqu'il contient f) dans un anneau de dimension 1. Le localisé $A_\mathfrak{m}$ est donc un anneau de valuation discrète (puisque intégralement clos) contenu dans $\mathcal{O}_v$ et de corps des fractions K. Comme $\mathcal{O}_v \neq K$, on a donc $A_\mathfrak{m} = \mathcal{O}_v$. Il s'ensuit que $k_v = A/\mathfrak{m} = k$ par le Nullstellensatz et la type-finitude de A comme k-algèbre.

ii) On peut supposer $f \in K \setminus k$ et donc transcendant sur k. Le raisonnement du i) montre que $\{v \in C_K, v(f) > 0\}$ est en bijection avec $\{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A),\ f \in \mathfrak{m}\}$, lequel est fini puisque $A/(f)$ est de dimension 0 et de type fini sur k (c'est un fermé propre de la courbe affine associée à A).

Reste à montrer que C_K est infini, mais cela découle du fait que $\mathrm{Max}(A)$ l'est. $\square$

Soit maintenant U un ouvert de C_K (donc le complémentaire d'un ensemble fini). Posons

$$\mathcal{O}_K(U) := \{f \in K | \forall v \in U, v(f) \geqslant 0\} = \bigcap_{v \in U} \mathcal{O}_v.$$

D'après le i) du lemme précédent, on a une application

$$f \in \mathcal{O}_K(U) \ \mapsto\ (v \mapsto \bar{f} \in k = k_v)$$

de $\mathcal{O}_K(U)$ dans l'ensemble des fonctions $U \longrightarrow k$. D'après le ii) et le fait que U est infini, c'est une injection. On obtient ainsi un faisceau de fonctions sur C_K dont les anneaux locaux sont les anneaux de valuation discrète $\mathcal{O}_v$, $v \in C_K$. On a donc construit un espace k-annelé $(C_K, \mathcal{O}_K)$ dont le corps de fonctions rationnelles est manifestement K.

THÉORÈME. – *$(C_K, \mathcal{O}_K)$ est isomorphe à une courbe projective lisse.*

Démonstration. Soit $f \in K \setminus k$ et A la clôture intégrale de $k[f]$ comme dans la preuve précédente. Les arguments de cette preuve montrent aussi que l'application

$$C_{K,f} := \{v \in C_K, v(f) \geqslant 0\} \longrightarrow \mathrm{Max}(A),\ v \mapsto \mathfrak{m}_v \cap A$$

est une bijection de l'ouvert $C_{K,f}$ de C_K sur $\mathrm{Max}(A)$. C'est évidemment un homéomorphisme et il découle des définitions que les faisceaux de fonctions régulières se correspondent. On a donc un isomorphisme d'espaces k-annelés de $C_{K,f}$ sur la courbe affine $\mathrm{Max}(A)$. Si $C_{K,f} = C_K \setminus \{v_1, \cdots, v_r\}$ alors en choisissant des f_i tels que $v_i(f_i) > 0$, on obtient un recouvrement ouvert de C_K par les courbes affines $C_i := C_{K,f_i}$ et $C_0 := C_{K,f}$. En particulier, $(C_K, \mathcal{O}_K)$ est une courbe algébrique lisse.

Choisissons pour chaque i un plongement affine $C_i \subset \mathbb{A}^{n_i}$ (autrement dit une présentation $k[X_1, \cdots, X_{n_i}] \twoheadrightarrow A_i$) et notons $\bar{C}_i$ la fermeture de C_i dans $\mathbb{P}^{n_i}$ qui est une courbe projective de corps de fonctions rationnelles K. Puisque $\bar{C}_i$ est complète, il existe un morphisme $C_K \xrightarrow{\varphi_i} \bar{C}_i$ qui prolonge l'immersion ouverte $C_i \hookrightarrow \bar{C}_i$. On en déduit un morphisme $C_K \xrightarrow{\varphi} \prod_i \bar{C}_i$ et on note que $\prod_i \bar{C}_i$ est une variété projective. Soit C l'adhérence de $\varphi(C_K)$ dans $\prod_i \bar{C}_i$. C'est encore une courbe algébrique projective de corps de fonctions K. Nous allons montrer que φ induit un isomorphisme $C_K \xrightarrow{\sim} C$.

Pour cela considérons le morphisme local $\varphi_v^* : \mathcal{O}_{C,\varphi(v)} \longrightarrow \mathcal{O}_{C_K,v} = \mathcal{O}_v$. Il s'agit ici simplement d'une inclusion $\mathcal{O}_{C,\varphi(v)} \subset \mathcal{O}_v$ de deux sous-anneaux locaux de K. Lorsque $v \in C_i$, la projection $C \longrightarrow \bar{C}_i$ envoie $\varphi(v)$ sur v et fournit donc l'autre inclusion, de sorte que $\mathcal{O}_{C,\varphi(v)} = \mathcal{O}_v$. Soit maintenant P un point de C. Son anneau local $\mathcal{O}_{C,P}$ est contenu dans un anneau de valuation $\mathcal{O}_v$ (prendre la valuation associée à un idéal maximal de la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{C,P}$ dans K). Or, puisque $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{C,\varphi(v)}$, on a donc deux points P et $\varphi(v)$ de C tels que $\mathcal{O}_{C,P} \subset \mathcal{O}_{C,\varphi(v)}$. Alors $P = \varphi(v)$. En effet, on peut trouver une carte affine $\mathrm{Max}(A)$ de C contenant les deux points et ils correspondent alors à deux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ tels que $A_\mathfrak{m} \subset A_\mathfrak{n}$, ce qui implique $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$ et donc $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$. On a donc la surjectivité de φ. Son injectivité est claire. C'est donc une bijection et même un homéomorphisme. Puisque les morphismes sur les anneaux locaux sont des isomorphismes, on en conclut que φ est un isomorphisme. $\square$

3.4.2 Corollaire.– *Pour toute extension $K \supset k$ de type fini et degré de transcendance 1, il existe une courbe projective lisse de corps des fonctions rationnelles K.*

Ce résultat d'existence de courbes projectives lisses est complété par le résultat d'unicité suivant :

3.4.3 Proposition.– *Deux courbes projectives lisses C et C' de corps de fonctions rationnelles K sont isomorphes.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{M}(C) = \mathcal{M}(C')$, il existe des application birationnelles $f : C \dashrightarrow C'$ et $g : C' \dashrightarrow C$ "inverses" l'une de l'autre. Puisque C et C' sont complètes et lisses, elles se prolongent en des morphismes $\varphi : C \longrightarrow C'$ et $\psi : C' \longrightarrow C$. La composée $\psi \circ \varphi$ est alors l'identité sur un ouvert de C, donc sur tout C par densité et séparation. Idem pour $\psi \circ \varphi$. $\square$

Si maintenant on se donne une extension $K' \subset K$ entre extensions de k de type fini et degré de transcendance 1, alors on a vu qu'il lui correspond une application rationnelle dominante $C_K \longrightarrow C_{K'}$. Par complétude de $C_{K'}$ et lissité de C_K, celle-ci provient d'un morphisme (nécessairement unique). On obtient donc le résultat suivant :

3.4.4 Corollaire.– *La catégorie des courbes projectives lisses munies des morphismes dominants est anti-équivalente à la catégorie des extensions de k de type fini et degré de transcendance* 1.

Notons que, par complétude, un morphisme entre courbes projectives lisses est dominant si et seulement si il est surjectif si et seulement si il est non constant.

Un cas particulier important est le suivant : pour une courbe projective lisse C, on a une bijection

$$\mathcal{M}(C)^\times \leftrightarrow \{\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1 \text{ morphisme dominant}\},$$

qui à une fonction rationnelle $f : U \longrightarrow \mathbb{A}^1$ associe l'unique prolongement $\varphi_f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ donné par complétude de $\mathbb{P}^1$ et lissité de C.