Sorbonne Université
Master Mathématiques fondamentales

Faculté des Sciences et Ingénierie
2021–2022

Variétés algébriques

Examen du 26 Octobre 2021. Durée 3h00.

Pas de document autorisé.

Exercice 1 (Le théorème de Chevalley)**.** Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble $C \subset X$ est dit *constructible* s'il est réunion finie d'ensembles localement fermés (i.e. intersections d'un ouvert et d'un fermé).

i. Montrer que l'ensemble des sous-ensembles constructibles de X est stable par intersections finies, réunions finies, et passage au complémentaire.

ii. Si C' est constructible dans C et C est constructible dans X, montrer que C' est constructible dans X.

iii. Montrer que l'image du morphisme $\mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$, $(x, y) \mapsto (x, xy)$ est constructible mais pas localement fermée.

iv. Soit $A \subset B$ deux anneaux intègres. À l'aide du lemme de normalisation de Noether appliqué à la $\mathrm{Frac}(A)$-algèbre $\mathrm{Frac}(A) \otimes_A B$, montrer qu'il existe $h \in A$ et un anneau C compris entre $A[h^{-1}]$ et $B[h^{-1}]$ tels que

- C est isomorphe à une $A[h^{-1}]$-algèbres de polynômes, et
- $B[h^{-1}]$ est un module de type fini sur C.

v. En déduire que l'image $\varphi(V)$ d'un morphisme dominant $\varphi : V \longrightarrow W$ entre variétés irréductibles contient un ouvert non vide de W.

vi. Plus généralement, pour un morphisme quelconque $\varphi : V \longrightarrow W$ entre variétés algébriques, montrer que $\varphi(V)$ contient un ouvert dense de $\overline{\varphi(V)}$.

vii. Montrer finalement que l'image d'un morphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ entre variétés algébriques est constructible dans W (on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de V).

Exercice 2 (Invariants)**.** Soit A un anneau commutatif intègre et G un groupe fini agissant sur A par automorphismes d'anneaux. On note A^G le sous-anneau des points fixes sous G.

i. Montrer que A est entier sur A^G. Hint : pour $a \in A$, on pourra considérer le polynôme $f_a(T) = \prod_{g \in G}(T - g.a) \in A[T]$.

ii. Montrer que $\mathrm{Frac}(A^G) = \mathrm{Frac}(A)^G$, et A intégralement clos $\Rightarrow A^G$ intégralement clos.

On suppose dorénavant que A est une k-algèbre de type fini.

iii. Montrer que A est un A^G-module de type fini.

TSVP

iv. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des générateurs de la k-algèbre A, et soit B la sous-k-algèbre de A engendrée par tous les coefficients des polynômes f_{x_i}. Montrer que A^G est un B-module de type fini, puis en déduire que A^G est une k-algèbre de type fini.

Posons maintenant $V = \mathrm{Spm}(A)$ et munissons-le de l'action de G par automorphismes de variétés induite par celle sur A. Posons $V_G := \mathrm{Spm}(A^G)$ et notons $\pi : V \longrightarrow V_G$ le morphisme induit par l'incusion $A^G \subset A$.

v. Montrer que π est un quotient "géométrique" au sens suivant : il est surjectif, ses fibres sont les G-orbites, l'image d'un ouvert par π est un ouvert, et pour $U \subset V_G$ ouvert et $f : U \longrightarrow k$, on a $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{V_G}) \Leftrightarrow \pi^* f \in \Gamma(\pi^{-1}U, \mathcal{O}_V)$.

vi. Montrer que π est un quotient "catégorique" au sens suivant : pour toute variété W et tout morphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ tel que $\forall g \in G, \varphi \circ g = \varphi$, il existe une unique factorisation $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ avec $\bar{\varphi} : V_G \longrightarrow W$ un morphisme de variétés.

Supposons maintenant que V est une variété *quelconque* munie d'une action de G par automorphismes de variétés. Munissons l'ensemble quotient V/G de sa topologie quotient et du faisceau de fonctions "quotient" donné par $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{V/G}) \Leftrightarrow \pi^* f \in \Gamma(\pi^{-1}U, \mathcal{O}_V)$.

vii. Si V est réunion finie d'ouverts *affines G-stables*, montrer que V/G est une variété, et que c'est aussi un quotient "catégorique".

viii. Supposons V projective. Montrer que tout sous-ensemble fini de V est contenu dans un ouvert affine de V. En déduire que toute G-orbite est contenue dans un ouvert affine G-stable de V. En conclure que V/G est une variété, et montrer qu'elle est complète.

Exercice 3 (Automorphismes de $\mathbb{P}^2$)**.** On veut montrer que les automorphismes de $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ sont linéaires, i.e. $\mathrm{Aut}_{k-\mathrm{var}}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}_2(k)$ et $\mathrm{Aut}_{k-\mathrm{var}}(\mathbb{P}^2) = \mathrm{PGL}_3(k)$.

i. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(k)$ agit transitivement sur les triplets de points distincts de $\mathbb{P}^1$.

ii. Montrer qu'un automorphisme de $\mathbb{P}^1$ qui fixe $0, 1$ et ∞ est l'identité. En conclure que $\mathrm{Aut}_{k-\mathrm{var}}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}_2(k)$.

iii. Soit maintenant θ un automorphisme de $\mathbb{P}^2$. En utilisant le théorème de Bézout, montrer que l'image par θ d'une droite est une droite.

iv. Montrer que $\mathrm{PGL}_3(k)$ agit transitivement sur les quadruplets "génériques" de $\mathbb{P}^2$ (i.e. 4 points 3 à 3 non alignés).

v. Montrer qu'un automorphisme de $\mathbb{P}^2$ qui fixe un quadruplet $\{A, B, C, D\}$ générique et envoie les droites sur des droites est l'identité. Pour cela :

   (a) Montrer en utilisant ii. qu'un tel automorphisme fixe, points par points, les droites (AB) et (CD).

   (b) Pour $P \notin (AB) \cup (CD)$, trouver deux droites d'intersection $\{P\}$ et stables par l'automorphisme. En conclure que P est fixe.

vi. En conclure que $\mathrm{Aut}_{k-\mathrm{var}}(\mathbb{P}^2) = \mathrm{PGL}_3(k)$.

Question supplémentaire : essayer de généraliser à $n > 2$...