Sorbonne Université — Faculté des Sciences et Ingénierie
Master Mathématiques fondamentales — 2022–2023

Variétés algébriques

Examen du 26 Octobre 2022. Durée 3h00.

Pas de document autorisé.

On fixe une courbe projective lisse C sur un corps algébriquement clos k. Le but de l'examen est de montrer que C peut se plonger dans $\mathbb{P}^3$, i.e. il existe une immersion fermée $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$. Comme on sait déjà que C se plonge dans un $\mathbb{P}^n$, on va tenter de diminuer n.

Exercice 1. *Droites projectives.* On rappelle qu'une "droite" dans $\mathbb{P}^n$ est l'image par la projection $k^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ d'un sous-espace vectoriel (épointé) de k^{n+1} de dimension 2.

i. Étant donnés deux points distincts P, Q, montrer qu'il existe une unique droite projective $(PQ) \subset \mathbb{P}^n$ contenant P et Q. Si $P, Q \in U_F$ pour une forme linéaire $F \in k[X_0, \cdots, X_n]_1$, montrer qu'il y a un unique isomorphisme $\iota^F_{P,Q} : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} (PQ)$ tel que $\iota^F_{P,Q}(0) = P$, $\iota^F_{P,Q}(1) = Q$ et $\iota^F_{P,Q}(\infty) \in V_F$. Puis montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \iota^F : & ((U_F \times U_F) \setminus \Delta_{U_F}) \times \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^n \\ & (P, Q, x) & \mapsto & \iota^F_{P,Q}(x) \end{array}$$

est un morphisme. (Hint : on pourra se ramener à $F = X_0$ et expliciter ι^{X_0})

ii. Étant donné un point P et une droite vectorielle Ξ dans l'espace tangent $T_P\mathbb{P}^n$, montrer qu'il existe une unique droite projective $D_{P,\Xi} \subset \mathbb{P}^n$ contenant P et telle que $\Xi = T_P(D_{P,\Xi})$. Si $P \in U_F$ et $\xi \in \Xi \setminus \{0\}$, montrer qu'il y a un unique isomorphisme $\kappa^F_{P,\xi} : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} D_{P,\Xi}$ tel que $\kappa^F_{P,\xi}(0) = P$, $\kappa^F_{P,\xi}(\infty) \in V_F$ et $d_0\kappa^F_{P,\xi}(1) = \xi$, où on a identifié $T_0\mathbb{P}^1 = k$. Enfin, si $U \subset U_F$ est un ouvert et $\xi : U \longrightarrow \mathcal{T}\mathbb{P}^n$ est une section partout non nulle du fibré tangent, montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^n \\ (P, x) & \mapsto & \kappa^F_{P,\xi(P)}(x) \end{array}$$

est un morphisme.

Exercice 2. *Projections linéaires.* On suppose que C est contenue dans $\mathbb{P}^n$, mais pas dans l'hyperplan V_{X_0}. On note O un point de l'ouvert U_{X_0} non contenu dans C. Enfin, on identifie $V_{X_0} \subset \mathbb{P}^n$ à $\mathbb{P}^{n-1}$ via $[0 : x_1 : \cdots : x_n] \mapsto [x_1 : \cdots : x_n]$.

i. Pour tout $P \in \mathbb{P}^n(k)$ distinct de O, montrer que $V_{X_0} \cap (OP)$ est un singleton. Notons-le $\{\pi_O(P)\}$. Montrer que l'application $\pi_O := \mathbb{P}^n \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ ainsi obtenue est un morphisme de variétés.

ii. Montrer que $(\pi_O)_{|C}$ est injective si O n'appartient pas à $\mathrm{Sec}(C) := \bigcup_{P,Q \in C, P \neq Q} (PQ)$ (la réunion des sécantes à la courbe).

iii. Pour $P \in C$, montrer que $d_P((\pi_O)_{|C})$ est injective si O n'appartient pas à l'ensemble $\mathrm{Tan}(C) := \bigcup_{P \in C} D_{P,T_PC}$ (la réunion des tangentes à la courbe).

Exercice 3. *Estimation de dimensions.*

i. En utilisant la question i de l'exercice 1, montrer que $\dim(\overline{\mathrm{Sec}(C)}) \leqslant 3$.

ii. Soit $U \subset C \cap U_{X_i}$ un ouvert affine au-dessus duquel le fibré tangent $\mathcal{T}C$ est trivial. Construire un morphisme $U \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ tel que pour tout $P \in U$, l'image de $\{P\} \times \mathbb{P}^1$ est la tangente à C en P. En déduire que $\dim(\overline{\mathrm{Tan}(C)}) \leqslant 2$.

iii. Montrer que si $n \leqslant 4$, on peut trouver O tel que $(\pi_O)_{|C}$ est injective et $d_P((\pi_O)_{|C})$ est injective pour tout $P \in C$.

Le but des deux derniers exercices est de prouver qu'un π_O comme au iii de l'exercice 3 est une immersion fermée.

Exercice 4. *Immersions fermées.* Soit $\varphi : C \longrightarrow V$ un morphisme de C dans une variété.

i. Montrer que φ est une immersion fermée si et seulement si φ est injectif et, pour tout $P \in C$, le morphisme local $\varphi^* : \mathcal{O}_{V,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P}$ est surjectif.

ii. Soit P un point tel que l'application tangente $d_P\varphi : T_PC \longrightarrow T_{\varphi(P)}V$ est injective.

   (a) Montrer que $\mathfrak{m}_{C,P} = \varphi^*(\mathfrak{m}_{V,\varphi(P)}).\mathcal{O}_{C,P}$. Hint. Utiliser le lemme de Nakayama.

   (b) Si $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \{P\}$, montrer que $\varphi^* : \mathcal{O}_{V,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P}$ est surjectif *en admettant le iii de l'exercice 5* et à l'aide de Nakayama.

Exercice 5. *Ouverts affines et finitude.*

i. Soit $A \subset \mathcal{M}(C)$ une sous-k-algèbre de type fini telle que $\mathrm{Frac}(A) = \mathcal{M}(C)$. Si A est intégralement close, montrer que l'application birationnelle entre $\mathrm{Spm}A$ et C est représentée par un morphisme $\mathrm{Spm}A \longrightarrow C$, et que celui-ci est une immersion ouverte d'image $\{P \in C, A \subset \mathcal{O}_{C,P}\}$.

ii. Soit $\varphi : C \longrightarrow V$ un morphisme de variétés et $U \subset V$ un ouvert affine tel que $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$. Montrer que la composition des fonctions avec φ induit un morphisme de k-algèbres $\varphi^* : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{M}(C)$ et que $\varphi^{-1}(U) = \{P \in C, \varphi^*(\mathcal{O}(U)) \subset \mathcal{O}_{C,P}\}$. Si φ est non constant, utiliser i. pour en déduire que $\varphi^{-1}(U)$ est affine et que φ induit un morphisme *fini* $\varphi^{-1}(U) \longrightarrow U$.

iii. Comme en ii et soit $P \in C$ tel que $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \{P\}$. Montrer que $\mathcal{O}_{C,P}$ est un $\mathcal{O}_{V,\varphi(P)}$-module de type fini. Est-ce vrai sans l'hypothèse $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \{P\}$? Hint : considérer $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$, $z \mapsto z^2$ au point $P = 1$.

Exercice 6. Conclure !