Sorbonne Université | Faculté des Sciences et Ingénierie
Master Mathématiques fondamentales | 2023–2024

Variétés algébriques

Examen du 24 Octobre 2023. Durée 3h00.

Pas de document autorisé.

On fixe un corps algébriquement clos k. Toutes les variétés sont des k-variétés.

Exercice 1. Notons O le point $(0,0)$ du plan $\mathbb{A}^2$ et $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$ son idéal maximal. Posons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} := \{((x,y),[\lambda:\mu]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1,\ \mu x = \lambda y\} \\
&\mathbb{E}_\lambda := \{((x,y),[\lambda:\mu]) \in \mathbb{E}, \lambda \neq 0\},\ \mathbb{E}_\mu := \{((x,y),[\lambda:\mu]) \in \mathbb{E}, \mu \neq 0\} \\
&\pi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{A}^2 \text{ la restriction de la première projection } \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^2.
\end{aligned}$$

i. Montrer que $\mathbb{E}$ est un fermé irréductible dans $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. On le munit de la structure de sous-variété fermée. Montrer que $\mathbb{E}_\lambda$ et $\mathbb{E}_\mu$ sont des ouverts affines de $\mathbb{E}$. Est-ce que $\mathbb{E}$ est une variété affine ? (regarder $\pi^{-1}(\{O\})$).

ii. Montrer que π induit un isomorphisme $\pi^{-1}(\mathbb{A}^2 \setminus \{O\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^2 \setminus \{O\}$, puis en déduire que π^* induit un isomorphisme $\mathcal{M}(\mathbb{A}^2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathbb{E})$.

iii. Identifions $\mathcal{M}(\mathbb{E})$ à $k(X,Y)$ grâce à π^*, et posons $T = \frac{Y}{X}$. Calculer $\mathcal{O}(\mathbb{E}_\lambda)$ et $\mathcal{O}(\mathbb{E}_\mu)$ comme sous-anneaux de $k(X,Y)$, puis vérifier que leurs idéaux respectifs $\mathfrak{m}\mathcal{O}(\mathbb{E}_\lambda)$ et $\mathfrak{m}\mathcal{O}(\mathbb{E}_\mu)$ sont principaux. Observer que $\mathbb{E}_\lambda \simeq \mathbb{E}_\mu \simeq \mathbb{A}^2$.

Soit $f \in k[X,Y]$ irréductible et sans terme constant, et $C_f := \{(x,y) \in \mathbb{A}^2, f(x,y) = 0\}$ le fermé associé dans $\mathbb{A}^2$. On note $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ la décomposition de f en somme de polynômes homogènes (avec $\deg f_n = n$), et on on pose r le plus petit n tel que $f_n \neq 0$.

iv. Montrer que C_f est une courbe irréductible passant par O.

v. Montrer que $\pi^{-1}(C_f)$ est une courbe avec deux composantes irréductibles, qui sont $\tilde{C}_f := \overline{\pi^{-1}(C_f \setminus \{O\})}$ et $\pi^{-1}(\{O\}) = \{O\} \times \mathbb{P}^1$.

vi. Calculer l'idéal annulateur de $\tilde{C}_f \cap \mathbb{E}_\lambda$ dans $\mathcal{O}(\mathbb{E}_\lambda)$, et idem pour $\mathbb{E}_\mu$.

vii. Montrer que $\tilde{C}_f \cap \pi^{-1}(\{O\}) = \{O\} \times \{[\lambda:\mu] \in \mathbb{P}^1,\ f_r(\lambda,\mu) = 0\}$. Interpréter cet ensemble en termes du cône tangent de C_f en O.

viii. Si O est un point régulier de C_f, montrer que π induit un isomorphisme $\tilde{C}_f \xrightarrow{\sim} C_f$.

ix. Supposons O singulier dans C_f, et notons $I_f := \tilde{C}_f \cap \pi^{-1}(\{O\})$. Montrer que l'ensemble des points de I_f qui sont singuliers dans $\tilde{C}_f$ est

$$\{O\} \times \left\{ [\lambda:\mu] \in \mathbb{P}^1,\ f_r(\lambda,\mu) = \frac{\partial f_r}{\partial X}(\lambda,\mu) = \frac{\partial f_r}{\partial Y}(\lambda,\mu) = f_{r+1}(\lambda,\mu) = 0 \right\}$$

suite au verso

x. Montrer que $\tilde{C}_f \longrightarrow C_f$ est une désingularisation de C_f lorsque $f = Y^2 - X^3 + X^2$ et $f = Y^2 - X^3$. Construire une désingularisation de C_f lorsque $f = Y^2 - X^5$.

On généralise la construction de $\mathbb{E}$ en posant :

$$\mathbb{E}^n := \left\{((x_1, \cdots, x_n), [\lambda_1 : \cdots : \lambda_n]) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1},\ \forall i, j,\ \lambda_j x_i = \lambda_i x_j\right\}.$$

xi. Montrer que $\mathbb{E}^n$ est fermé irréductible dans $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, que la projection $\pi : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ est un isomorphisme au-dessus de $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$, et que chaque ouvert $\mathbb{E}^n_{\lambda_i}$ défini par la condition $\lambda_i \neq 0$ est isomorphe à $\mathbb{A}^n$.

xii. Supposons $\mathrm{char} k \neq 2$ et $n > 2$. Posons $f = \sum_{i=1}^n X_i^2$ et notons $V_f \subset \mathbb{A}^2$ le fermé associé.

(a) Montrer que V_f est une variété irréductible de dimension $n-1$ et que $O = (0, \cdots, 0)$ est son seul point singulier.

(b) Notons $\tilde{V}_f := \overline{\pi^{-1}(V_f \setminus \{O\})}$. Calculer l'idéal annulateur de $\tilde{V}_f \cap \mathbb{E}^n_{\lambda_i}$ pour tout i, puis montrer que π induit une désingularisation $\tilde{V}_f \longrightarrow V_f$.

(c) Montrer que V_f est normale (et donc on ne pouvait pas désingulariser V_f par normalisation).

Exercice 2. On appelle *groupe algébrique* une variété munie d'une loi associative $V \times V \longrightarrow V$ qui est un morphisme, d'un élément neutre $e \in V$, et d'une application "inverse" $V \longrightarrow V$ qui est un morphisme.

i. Soient V, W deux variétés irréductibles et $V \times W \xrightarrow{\varphi} Z$ un morphisme de variétés avec Z séparée. On suppose que V est *complète* et qu'il existe $w_0 \in W$ et $z_0 \in Z$ tels que $\varphi(V \times \{w_0\}) = \{z_0\}$.

(a) Soit U un voisinage ouvert *affine* de z_0 dans Z. Montrer que le sous-ensemble $\{w \in W, \varphi(V \times \{w\}) \subset U\}$ est un ouvert dense de W.

(b) On suppose de plus qu'il existe $v_0 \in V$ tel que $\varphi(\{v_0\} \times W) = \{z_0\}$. Montrer que $\varphi(V \times W) = \{z_0\}$.

(c) Montrer sur un exemple que l'hypothèse de complétude sur V est essentielle pour avoir (a) et (b).

ii. Soit V un groupe algébrique qui est une variété complète. Montrer que la loi de V est commutative. On dit que V est une *variété abélienne*.

iii. Soient V, V' deux variétés abéliennes. Montrer que tout morphisme de variétés $V \longrightarrow V'$ est la composée d'un morphisme de groupes algébriques et d'une translation.