Représentations l-modulaires et Décomposition de la série principale du groupe p-adique $GL(2, F)(l \neq p)$

Chakhar Abdelkarim
sous la direction de M. J-F Dat

20/09/2009

Résumé

L'objet de ce mémoire est d'étudier et classifier les représentations lisses de la série principale du groupe $GL(2,F)$, F étant un corps p-adique. Il s'agit de représentations sur un corps C algébriquement clos de caractéristique l, avec pour seule condition $l \neq p$. Nous suivons de près l'article de M-F Vignéras, Représentations de $GL(2,F)$ en caractéristique l, F un corps p-adique et $p \neq l$ [Vignéras1].

1 Notations et Introduction

F désigne un corps p-adique, c'est à dire, une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F qui est un anneau de valuation discrète, $\wp$ son unique idéal premier et ϖ une uniformisante de F. Soit v_F la valuation discrète normalisée de F (i.e $v_F(F^*) = \mathbb{Z}$) et $\|.\|_F := q^{-v_F(\cdot)}$ la valeur absolue correspondante.

On note $G = GL(2,F)$. Certains sous-groupes de G jouent un rôle primordial dans la théorie :

-$B = \left\{ s = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} ; s \in G \right\}$ est le sous-groupe de Borel standard de G.

-$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; x \in F \right\}$ est le radical unipotent de B.

-$T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} ; \alpha \text{ et } \beta \text{ sont dans } F^* \right\} \simeq F^* \times F^*$ est un tore déployé maximal. On a $B \simeq N \ltimes T$.

-$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a \in F^* \text{ et } x \in F \right\} \simeq N \ltimes F^*$ est le sous-groupe mirabolique de G. La compréhension des représentations de M joue un rôle décisif dans la classification des représentations irréductibles de G.

-$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a \in F^* \right\} \simeq F^*$ est un sous-groupe de M.

-$Z = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} ; a \in F^* \right\} \simeq F^*$ est le centre de G.

Le groupe de Weyl de G associé au couple (B,T) est le groupe $\{I_2, \omega\}$, où I_2 est la matrice identité et $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc la décomposition de Bruhat : $G = B \coprod B\omega B$, cette réunion étant disjointe. Autrement dit, le groupe de Weyl donne un système de représentants des doubles classes $B \setminus G/B$.

-$K_0 = GL(2,\mathcal{O})$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de G. On a par ailleurs la décomposition d'Iwasawa : $G = BK_0$.

-$K_j = I_2 + \varpi^j \mathcal{M}(2, \mathcal{O})(j \geq 1)$ sont des sous-groupes ouverts compacts de G qui forment une base de voisinages de I_2. Notons $\Omega = \{K_j\,;\, j \in \mathbb{N}\}$ cette base.

Les représentations que nous considérons ici ont une propriété particulère que voici :

Definition 1 *:*

Soit V une représentation de G. On dit que V est lisse si le stabilisateur dans G de tout vecteur v est un sous-groupe ouvert.

Etant donné que les sous-groupes ouverts et compacts forment une base de voisinage de l'élément neutre de G, on a la formulation équivalente suivante : (π, V) est lisse si et seulement si, pour tout vecteur v dans V, il existe un sous-groupe ouvert et compact K de G tel que $\pi(k)(v) = v$ pour tout $k \in K$.
Si on note V^K le sous-espase des vecteurs v qui sont fixés par K, alors $V = \bigcup_{K\in\Omega} V^K$: V est donc limite projective de ses sous-espaces d'invariants V^K.
Un caractère de G est une représentation lisse de G de dimension 1. De manière équivalente, un caractère χ est un morphisme de groupe G dans C^*, le groupe multiplicatif des inversibles de C, qui a un noyau ouvert dans G.

Definition 2 *:*
Une représentation (π, V) est admissible si V^K est de dimension finie sur C pour tout $K \in \Omega$.

Ainsi, une représentation admissible est une limite de sous-espaces de dimensions finies. C'est donc une condition de finitude très utile, notamment lorsque le groupe a une base de voisinages de l'unité dénombrable, ce qui est evidemment le cas de $GL(2, F)$.

2 Réciprocité de Frobenius et foncteur de Jacquet

Soit H un sous-groupe fermé de G. Rappelons la définition de l'induction : si (τ, W) est une représentation lisse de H, on considère l'espace $Ind_H^G(\tau, W)$ des fonctions $f : G \longrightarrow W$ qui vérifie les deux conditions suivantes :
1)$f(hg) = \tau(h)(f(g))$, $\forall h \in H$ et $\forall g \in G$.
2)Il existe un sous-groupe ouvert K(dépendant de f) tel que $f(gk) = f(g)$, $\forall k \in K$ et $\forall g \in G$.

Si on considère sur $Ind_H^G(\tau, W)$ l'action de G par translation à droite, la condition 2) fait de lui une représentation lisse de G. En réalité, Ind_H^G est un foncteur de $Rep^\infty(H)$ dans $Rep^\infty(G)$ et on a le théorème suivant qui montre que Ind_H^G est un adjoint à droite du foncteur de restriction des représentations lisses de G à H :

Théorème 3 *:*
Soit H un sous-groupe fermé de G, (τ, W) est une représentation lisse de H et (π, V) une représentation lisse de G. On a un H-morphisme :

$$\begin{aligned} Ind_B^G \tau &\xrightarrow{\alpha_\tau} W \\ f &\longmapsto f(1) \end{aligned}$$

qui fait de la flèche canonique :

$$\begin{array}{ccc} Hom_G(\pi, Ind_B^G \tau) & \longrightarrow & Hom_H(\pi_{|H}, \tau) \\ \phi & \longmapsto & \alpha_\tau \circ \phi \end{array}$$

un isomorphisme fonctorielle en π et en τ. $\diamond$

Preuve 1 *:*
Soit $f : V \longrightarrow W$ un morphisme dans $Rep^\infty(H)$. On définit un morphisme $f_* : V \longrightarrow Ind_H^G(\tau, W)$ dans $Rep^\infty(G)$ par :

$$\begin{array}{rcl} f_*(v) : G & \longrightarrow & W \\ g & \longmapsto & f(\pi(g)(v)) \end{array}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un morphisme de G-modules de V dans $Ind_H^G(\tau, W)$:

$$\begin{array}{rcl} [f_*(v)](hg) & = & f(\pi(h)(\pi(g)(v))) \\ & = & \tau(h)(f(\pi(g)(v))) \\ & = & \tau(h)(f_*(v)(g)) \end{array}$$

Si $v \in V^K$, alors, $\forall k \in K$,

$$\begin{array}{rcl} (k.f_*(v))(g) & = & f_*(v)(gk) \\ & = & f(\pi(g)(\pi(k)(v))) \\ & = & f(\pi(g)(v)) \\ & = & f_*(v)(g) \end{array}$$

et donc $f_*(v) \in (Ind_H^G \tau)^K$.

$$\begin{array}{rcl} f_*(\pi(g)(v))(g') & = & f(\pi(g')(\pi(g)(v))) \\ & = & f(\pi(g'g)(v)) \\ & = & f_*(v)(g'g) \\ & = & [g.f_*(v)](g') \end{array}$$

Il s'agit donc bien d'un morphisme dans $Rep^\infty(G)$ et on voit que c'est l'inverse de $\phi \longmapsto \alpha_\tau \circ \phi$. $\diamond$

Considérons maintenant le sous-espace $ind_H^G\tau$ de $Ind_H^G\tau$ des applications $f \longrightarrow W$ qui sont à support compact modulo H, c'est à dire, nulle en dehors d'une partie HC de G, où C est un ensemble compact de G. Cette construction devient particulièrement interressante lorsque le sous-groupe H est ouvert. Sous cette condition, considérons le H-morphisme

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\alpha_\tau^c} & ind_H^G\tau \\ w & \longmapsto & f_w \end{array}$$

où le support de f_w est contenu dans H et $f_w(h) = \tau(h)(w), h \in H$.

Proposition 4 *:*
1)Le morphisme $\alpha_\tau : w \longmapsto f_w$ réalise un isomorphisme entre W et l'espace des fonctions $f \in ind_H^G\tau$ telles que $suppf \subseteq H$.
2)Si $\mathcal{W}$ désigne une base de W et $\mathcal{G}$ un système représentatif des classes de $H \setminus G$, alors l'ensemble $\{g.f_w; w \in \mathcal{W}, g \in \mathcal{G}\}$ est une base de ind_H^G.

Preuve 2 *:*
Le premier point est clair. Pour la seconde affirmation, il suffit de remarquer que le quotient H/G est discret, H étant ouvert, et donc le support de tout élément de ind_H^G est une réunion finie de classes Hg et que sur chacune de ces classes, la restriction d'une fonction f est égale à $g.f_w$, pour $w = f(1)$ $\diamond$

On peut prouver, en suivant la méthode du théorème précédent, le résultat suivant qui montre que ind_H^G est cette fois un adjoint à gauche du foncteur de restriction :

Théorème 5 *:*
Soit H un sous-groupe ouvert de G, (τ, W) est une représentation lisse de H et (π, V) une représentation lisse de G. Le H-morphisme :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\alpha_\tau^c} & ind_H^G\tau \\ w & \longmapsto & f_w \end{array}$$

donne un isomorphisme canonique :

$$\begin{array}{ccc} Hom_G(ind_B^G\tau, \pi) & \longrightarrow & Hom_H(\tau, \pi_{|H}) \\ \phi & \longmapsto & \phi \circ \alpha_\tau^c \end{array}$$

qui est fonctorielle en π et en τ. $\diamond$

Preuve 3 *:*
Si Φ est un H-moorphisme $W \longrightarrow V$, il existe, d'après la proposition précédente un unique G-morphisme $\Phi_* : ind_H^G \longrightarrow V$ tel que $\Phi_*(f_w) = \Phi(w)$ pour tout $w \in W$. On vérifie donc aisément que c'est l'inverse de $\phi \longmapsto \phi \circ \alpha_\tau^c$. $\diamond$

Une propriété importante des deux foncteurs d'induction est la suivante :

Proposition 6 *: Ind_H^G et ind_H^G sont des foncteurs additifs exacts.*

Remarque 7 *: Cette propriété d'exactitude est vraie pour ces deux foncteurs, même lorsque H n'est pas ouvert.*

Il existe une version pertinente de la réciprocité de Frobenius qui est particulièrement adaptée à la situation des groupes réductifs et qui va permettre de donner les grandes lignes de la classification.

Partons d'une représentation (π, V) et considérons le sous-espace

$$V(N) = \langle \pi(n)(v) - v\, ;\, n \in N,\, v \in V \rangle$$

C'est un N-sous-espace de V, puisque N est abélien. En fait, il est un B-invariant :

$$\begin{aligned} \pi(b)(\pi(n)(v) - v) &= \pi(bnb^{-1}b)(v) - \pi(b)(v) \\ &= \pi(n')(v') - v' \in V(N) \end{aligned}$$

puisque $n' = \pi(bnb) \in N$ (N est normal dans B).Donc vu comme représentation de B, V passe au quotient via $V(N)$ pour donner le B-module V_N, sur lequel l'action de N est triviale. Donc c'est juste une représentation π_N de T. On l'appelle l'espace des coinvariants de N.On a ainsi la version suivante de la réciprocité de Frobenius :

$$Hom_G(\pi, Ind_B^G\chi) \simeq Hom_T(\pi_N, \chi) \qquad (1)$$

où χ est un caractère non ramifié de B . (π_N, V_N) est appelé le module de Jacquet de (π, V). On a la caractérisation suivante :

Théorème 8 *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
-V_N est non nul.
-(π, V) est dans la série principale i.e, (π, V) est isomorphe à une sous-représentation d'une induite parabolique $Ind_B^G\chi$, pour un caractère χ de T.
$\diamond$

Démonstration 1 *Supposons que π soit principale. D'après (1) , le groupe $Hom_T(\pi_N, \chi)$ est non trivial, pour un certain caractère χ de T. En particulier, V_N est non nul.*

Réciproquement, supposons que V_N ne soit pas nul, et montrons que π_N admet un T-quotient irréductible : ce sera donc un caractère χ de T, en vertu du lemme de Schur, T étant abélien. Le T-morphisme de passage au quotient $\pi_N \to \chi$, donne via l'isomorphisme de Frobenius, un élément non nul de $Hom_G(\pi, Ind_B^G\chi)$, donc injectif puisque π est irréductible.

Fixons un vecteur v non nul de V. Comme π est irréductible, tout élément de V est combinaison linéaire finie d'élément de la forme $\pi(g)v$. Soit K un sous-groupe ouvert compact qui fixe v. Alors $K_0 \bigcap K$ est un sous-groupe ouvert compact de K_0 et il est donc d'indice fini. Soient $\pi(k_1)v, \cdots, \pi(k_r)v$ des éléments qui représentent l'action de K_0 sur v. D'après la décomposition d'Iwasawa $G = BK_0$, on voit que V est de type fini sur B, et donc c'est aussi le cas de V_N qui est un quotient de V. Ceci prouve V_N est un T-module de type fini.

Considérons une famille génératrice $\{u_1, \cdots, u_t\}$ qui engendre V_N sur T et qui soit minimale pour cette propriété. Par le lemme de Zorn, la famille $\mathcal{F}$ des T-sous-modules W de V_N qui contiennent $u_1, \cdots, u_{t-1}$, et tels que $u_t \notin W$, admet un élément maximal U, et donc V_N/U est un quotient irréductible. $\diamond$

L'importance de ce théorème réside dans le fait qu'il permet de réduire la classification de la première famille de représentations irréductibles, les représentations principales, à l'étude des représentations de la forme $Ind_B^G(\chi)$, pour un caractère χ de T.

3 Mesure de Haar et Dualité

Soit (π, V) une représentation lisse de G. On note $V^* = Hom_C(V, C)$ le dual algébrique de V et

$$\begin{aligned} V^* \times V &\longrightarrow C \\ (v^*, v) &\longmapsto \langle v^*, v \rangle \end{aligned}$$

le crochet de dualité canonique. V^* est muni d'une structure de représentation π^* de la manière suivante :

$$\langle \pi^*(g)(v^*), v \rangle \quad = \quad \left\langle v^*, \pi(g^{-1})(v) \right\rangle$$

$\forall g \in G$, $v^* \in V^*$ et $v \in V$. En général, V^* n'est pas lisse, et donc on doit prendre la partie lisse de V^* :

$$\begin{aligned} \check{V} &= (V^*)^\infty \\ &= \bigcup\nolimits_{K \in \Omega} (V^*)^K \end{aligned}$$

C'est un sous-espace G-invarient, et on obtient donc une représentation lisse de G.

Soit $K \in \Omega$. On montre que(voir [Bu-He, (2.3) *page* 16]) V^K a un unique K-complément dans V qui est

$$V(K) = \langle \pi(k)(v) - v\,;\, k \in K\ ,\ v \in V \rangle$$

Donc, si $\check{v} \in (\check{V})^K$, alors $\langle \check{v}, V(K) \rangle = 0$ et donc $\check{v} \in (\check{V})^K$ est entièrement détérminée par son action sur V^K, et on a un isomorphisme $(\check{V})^K \simeq (V^K)^*$, ce qui permet d'établir que le G-morphisme canonique $\kappa : V \longrightarrow V^{**}$ est injectif, à valeurs dans $\check{\check{V}}$ et on a la proposition suivante qui donne un critère d'admissibilité :

Proposition 9 *: κ est un isomorphisme ssi π est admissible.*

On en déduit que le foncteur contravariant

$$\begin{array}{ccc} Rep^\infty(G) & \longrightarrow & Rep^\infty(G) \\ (\pi, V) & \longmapsto & (\check{\pi}, \check{V}) \end{array}$$

est exact, et on a finalement :

Théorème 10 *Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G. Alors (π, V) est irréductible ssi $(\check{\pi}, \check{V})$ est irréductible.* $\diamond$

Une mesure de Haar (à gauche) μ_G sur G à valeurs dans $\mathbf{C}$ est une forme linéaire non nulle sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ des fonctions lisse(ie. localement constantes) à supports compacts, qui soit invariante par translation à gauche par G, ie. si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et si $g \in G$, alors $\mu_G(g.f) = \mu_G(f)$ où $g.f$ est la fonction :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & f(g^{-1}x) \end{array}$$

On note alors

$$\mu_G(f) := \int_G f(g) d\mu_G(g), f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$$

Si D est une partie ouverte compacte de G, alors $\mathbf{1}_D \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Notons dans ce cas

$$vol(D, \mu_G) := \mu_G(\mathbf{1}_D)$$

Même si cette notion a une importance centrale dans la théorie, il n'est pas question ici de donner un exposé complet sur le sujet. Nous nous contenterons donc de citer les résultats essentielles d'existence et d'unicité, ainsi que leurs propriétés qui seront utilisées dans la suite. Une bonne référence est le livre de M-F. Vignéras [Vignéras2, *pages* 11 *à* 17], dans le cas le plus général.

Théorème 11 *Sous l'hypothèse $l \neq p$ (ce qui revient à dire que q est inversible dans $\mathbf{C}$, puisque ce dernier est un corps), le groupe additif $(F,+)$, le groupe multiplicatif $(F^*,\times)$ et le groupe $G = GL(2,F)$ admettent des mesures de Haar, uniques, à multiplication par des scalaires non nuls près. Tout sous-groupe fermé de G admet une mesure de Haar. Plus généralement, $GL(n,F)$ et tout groupe réductif p-adique ont des mesures de Haar.* $\diamond$

Soit $\mathcal{R}$ l'action de G sur $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ par translation à droite. Puisque $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ commutent, la forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_c^\infty(G) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ f & \longmapsto & \mu_G(\mathcal{R}_g(f)) \end{array}$$

est une mesure de Haar à gauche sur G, et il existe donc une constante $\delta_G(g)$ telle que

$$\delta_G(g)\int_G f(xg)d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

δ_G est en fait un morphisme lisse $G \longrightarrow \mathbf{C}^*$. On dit qu'un groupe, muni d'une mesure de Haar est unimodulaire si δ_G est le morphisme trivial. Ceci est équivalent à dire que toute mesure de Haar à gauche est aussi une mesure de Haar à droite, ie. invariante aussi par translation à droite par G. les groupes compacts, abéliens, ou réductifs p-adiques sont tant d'exemples de groupes unimodulaires.

On montre aussi que le module de B est donné par la formule suivante :

$$\delta_B(s) = \|d/a\|_F = q^{-v_F(d/a)}$$

avec $s = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Voici à présent un résultat dont on se servira abondamment dans la suite :

Théorème 12 ***(Théorème de Dualité)***

Soit H un sous-groupe fermé de G et (τ, W) une représentation lisse de H. Il existe un isomorphisme canonique

$$\check{ind_H^G\tau} \simeq Ind_H^G \delta_{H\backslash G} \otimes \check{\tau}$$

où $\delta_{H\backslash G} = \delta_H^{-1}(\delta_{G|H} : H \longrightarrow \mathbf{C}^*($ c'est ce qu'on appelle une mesure semi-invariante sur le quotient $H)$. Ce morphisme ne dépend que des choix de δ_H et δ_G. $\diamond$

Etant donné que $B \setminus G$ est compact(décomposition d'Iwasawa), $ind_B^G = Ind_B^G$. Comme, en plus, G est unimodulaire, ie. $\delta_G \equiv 1$, on a finalement dans ce cas :

$$\check{ind_B^G\tau} \simeq Ind_B^G \delta_B^{-1} \otimes \check{\tau}$$

Pour conclure, nous donnons une version du critère de restriction-induction(critère de Mackey) qui est plus adaptée à la situation des modules de Jacquet :

Théorème 13 *Soit (σ, W) une représentation lisse de T, qu'on étend à B comme avant. Notons $(\pi, X) = Ind_B^G(\sigma, W)$. On a une suite exacte :*

$$(0) \longrightarrow \sigma^\omega \otimes \delta_B^{-1} \longrightarrow (Ind_B^G \chi)_N \xrightarrow{\alpha_\sigma} \sigma \longrightarrow (0)$$

dans laquelle $\alpha_\sigma : (\pi_N, X_N) \longrightarrow (\sigma, W)$ provient du morphisme de Frobenius $f \longmapsto f(1)$ par passage aux quotients. $\diamond$

Preuve 4 *Par définition, X est l'espace des fonctions lisses $f : G \to W$ telles que $f(bg) = \sigma(b)f(b)$, $b \in B$, $g \in G$. Soit $V = \ker \alpha_\sigma$. Donc V est une représentation lisse de B et on a donc une suite exacte*

$$0 \to V_N \to X_N \to W \to 0$$

Montrons que $V_N = \delta_B^{-1} \otimes \chi^\omega$:
On rappelle que $G = B \coprod B\omega N$. Soit $f \in X$. $f \in V$ si et seulement si $suppf \subset B\omega N$. Plus précisement :

***Lemme 14** :*
Soit $f \in X$. $f \in V \Leftrightarrow$ il existe un sous-groupe ouvert compact N_0 de N tel que supp$(f) \subseteq B\omega N_0$.

***Démonstration 2** :*
Soit $f \in X$. On a $f(b) = \chi(b)f(1)$, $\forall b \in B$. Donc

$$f \in V \Longleftrightarrow f_{|B} \equiv 0 \Leftrightarrow \textit{supp}(f) \subseteq B\omega N$$

Par ailleurs, on sait que f est fixée par un sous-groupe $K \in G$. Donc f s'annule aussi, sur un sous-groupe de la forme BN_0', où N_0' est un sous-groupe ouvert compact de $N' = N^\omega$.La formule, pour $x \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B\omega \begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montre alors que f s'annule aussi en dehors de $B\omega N_0$ où $N_0 = (N_0^{'})^\omega$. $\diamond$

Soit $f \in V$. Grâce à ce lemme, on peut définir une fonction $f_N : T \to W$ par

$$f_N(x) = \int_N f(x\omega n)dn = \sigma(x)f_N(1),\ x \in T$$

D'après un résultat qui sera mentionné dans la section (6)(Le sous-groupe mirabolique), le noyau de l'application $f \mapsto f_N$ est $V(N)$ et alors

$f \mapsto f_N(1)$ est une bijection de V_N dans W. En prenant $t \in T$ et $f \in V$, on a

$$\begin{aligned}(tf)_N(x) &= \int_N f(x\omega nt)dn \\ &= \delta_B(t^{-1}) \int_N f(xt^{\omega}\omega n)dn = \delta_B(t^{-1})(t^{\omega} f_N)(x)\end{aligned}$$

Par conséquent, $f \mapsto f_N(1)$ est un B-morphisme $V \to \sigma^{\omega} \otimes \delta_B^{-1}$ induisant un isomorphisme $V_N \cong \sigma^{\omega} \otimes \delta_B^{-1}$. $\diamond$

4 Lemme de Schur

Le résultat que nous montrons dans cette section est un outil indispensable pour la classification que nous avons en vue. Commençons par une définition :

Definition 15 *Soit (π, V) une représentation lisse de G et χ un caractère de Z. On dit que π admet χ pour caractère central si Z agit sur V par χ : $\forall v \in V$, $\forall z \in Z$ $\pi(z)(v) = \chi(z)v$.*

On va prouver ici que toute représentation irréductible de G admet un caractère central.

Proposition 16 *Pour tout $K \in \Omega$, le quotient G/K est dénombrable.*

Preuve 5 *Montrons tout d'abord que si cela est le cas pour un sous-groupe particulier K_0, alors il en est de même pour tout $K \in \Omega$.*
En effet, supposons que G/K_0 soit dénombrable et soit K un autre sous-groupe ouvert compact de G et posons $H = K \cap K_0$.

On a une application surjective

$$\begin{aligned} G/H &\longrightarrow G/K \\ gH &\longmapsto gK \end{aligned}$$

et donc il suffit de montrer que G/H est dénombrable. De même, on a une deuxième application surjective

$$\begin{aligned} G/H &\xrightarrow{p} G/K_0 \\ gH &\longmapsto gK_0 \end{aligned}$$

et donc $G/H = \bigcup_{gK_0 \in G/K_0} p^{-1}(\{gK_0\})$. Maintenant, pour tout $g \in G$, $p^{-1}(\{gK_0\})$ est fini et $\left|p^{-1}(\{gK_0\})\right| = [K_0 : H]$.

Il suffit donc de traiter le cas $K_0 = GL(2, \mathcal{O})$. Pour cela, on va utiliser une nouvelle décomposition, la décomposition de Cartan : soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \varpi^a & 0 \\ 0 & \varpi b \end{pmatrix}$ *, avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $a \leq b$ (pour une démonstration de cette décomposition, voir le premier exposé de Corrine Blondel [Blondel, page 8]). Elle exprime le fait que $\mathcal{A}$ est un système de représentants des doubles classes $K_0 \backslash G/K_0$. Plus précisement, on a une réunion disjointe*

$$G = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} K_0 a K_0$$

Maintenant, on voit que $K_0 \backslash G/K_0$ est dénombrable, et chaque double classe $K_0 g K_0$ contient un nombre fini de classes à gauche $g' K_0$, par compacité de K_0, d'ou l'assertion. $\diamond$

Proposition 17 *Soit V une représentation lisse irréductible de G. Alors la dimension de V est au plus dénombrable.*

Preuve 6 *Soit $v \in V$ un vecteur non nul de V. Le sous-espace de V engendré par les translatés $\pi(g)(v)$ de v est stable par $\pi(G)$ et donc c'est V tout entier puisque V est irréductible. Soit maintenant $K \in \Omega$ tel que $v \in V^K$. Alors, la famille $\{\pi(g)(v)\,;\, g \in G/K\}$ est une famille génératrice de V, qui est dénombrable d'après la proposition précédente.* $\diamond$

Théorème 18 ***(Lemme de Schur)***

Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Supposons que $\mathbf{C}$ *est non dénombrable.*

Alors, $End_G V = \mathbf{C}$, autrement dit tout endomorphisme de V qui commute à l'action de G est une homothétie. $\diamond$

Preuve 7 *Soit $v \neq 0$ dans V. On définit un morphisme $\Theta : End_G V \longrightarrow V$ par $f \longmapsto f(v)$.*

Le fait qu'il s'agit de G-endomorphismes et que V est irréductible assure l'injectivité de ce morphisme, et donc $End_G V$ est une algèbre à division de dimension au plus dénombrable sur $\mathbf{C}$.

Supposons que $\psi \in End_G V$ ne soit pas scalaire. Il engendre un sous-corps $C(\psi)$ de $End_G V$.

$\mathbf{C}$ *est algébriquement clos, et donc la famille $\left\{(\psi - \lambda)^{-1}; \lambda \in C\right\}$ est linéairement indépendante et contenue dans ce sous-corps, ce qui est impossible.* $\diamond$

Le problème est donc résolu pour $\mathbb{C}$ et pour $\overline{\mathbb{Q}_l}$, mais pas pour $\overline{\mathbb{F}_l}$ ou $\overline{\mathbb{Q}}$.

Proposition 19 *: Si (π, V) est une représentation lisse, irréductible et admissible, alors elle vérifie le lemme de Schur.*

Preuve 8 *:*

Soit $K \in \Omega$ tel que $V^K \neq (0)$. Si Φ est un G-endomorphisme de (π, V), $\Phi(V^K) \subseteq V^K$ et donc Φ induit par restriction un endomorphisme sur le $\mathbf{C}$*-espace vectoriel non trivial V^K. Comme* $\mathbf{C}$ *est algébriquement clos, Φ admet un vecteur propre $v \neq 0$ associé à une valeur propre λ. On voit donc que $Ker(\Phi - \lambda.Id_V) \neq (0)$, et comme V est irréductible, $Ker(\Phi - \lambda.Id_V) = V$ et on a bien prouvé que $\Phi = \lambda.Id_V$.* $\diamond$

Le théorème suivant est un résultat profond de la théorie des représentations des groupes réductifs p-adiques :

Théorème 20 *:*

Toute représentation lisse irréductible de G est admissible. $\diamond$

Nous admettons ce théorème dans le cas général. Nous en donnons tout de même une preuve qui couvre largement les représentations qui nous intérressent, à savoir, les représentations de la série principale : Ce sont des représentations irréductibles qu'on peut plonger dans des représentations induites à partir de sous-groupes de G. Pour une démonstration de ce théorème, on peut consulter [Bu-He] où [Vignéras2](la première référence est plus précise puisqu'elle traite exclusivement le cas $GL(2, F)$).

Théorème 21 *:*

Soit (σ, U) une représentation lisse du sous-groupe fermé H de G. Si $H \setminus G/K$ est fini pour un $K \in \Omega$, et si U est de dimension finie, Alors $Ind_B^G(\sigma, U)$ est admissible. $\diamond$

Preuve 9 *:*

En procédant de la même façon que lorsqu'on a montré que G/K est dénombrable pour tout K, on montre ici qu'il suffit qu'un seul $K \in \Omega$ vérifie la propriété requise pour qu'elle soit valide pour tout K. Ensuite, notant $X = Ind_H^G\sigma$, on voit que

$$X^K \quad = \quad \{f \in X / f(hgk) = \sigma(h)(f(g)); \forall h \in H, g \in G, k \in K\}$$

Ainsi, sur la double classe HgK, f est entièrement détérminée par sa valeur en g. Si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de U, et si $\{g_1, \ldots, g_m\}$ est un système de représentants des doubles classes $H \setminus G/K$, alors l'ensemble des fonctions $f_{i,j}$ définies par

$$\begin{array}{rcl} f_{i,j} : G & \longrightarrow & U \\ f(hg_ik) & = & \sigma(h)(w_j) \\ f(x) & = & 0 \text{ si } x \notin Hg_iK \end{array}$$

pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$, est une base de X^K, qui est donc de dimension finie égale à nm. $\diamond$

5 Caractères de G :

Commençons par classifier les représentations lisses de dimensions finies :

Proposition 22 *:*
Soit (π, V) une représentation lisse, irréductible et de dimension finie de G. Alors $\dim_C V = 1$ et il existe un caractère χ de F^* tel que $\pi = \chi \circ det$.

Preuve 10 *:*
Montrons tout d'abord qu'il existe un vecteur v non nul fixé par $\pi(N)$. La restriction de π à N est une représentation lisse de N. Comme $\dim_C V$ est fini, elle contient une représentation irréductible de N, c'est à dire une droite Cv (lemme de Schur) sur laquelle l'action de N est donnée par un caractère ψ de F :

$$\pi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})(v) = \psi(x)v$$

Remarquons que si le vecteur v' est colinéaire à v, N agit sur Cv' par ψ aussi.
Soit $a \in F^*$. On vérifie par un calcul facile que l'action de N sur le vecteur $v' = \pi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})(v)$ est donnée par le caractère $x \longmapsto \psi(a^{-1}x)$ de F :

$$\begin{aligned}
\psi(a^{-1}x).v' &= \pi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})(\psi(a^{-1}x).v) \\
&= \pi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})(v) \\
&= \pi(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})(v) \\
&= \pi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})(v) \\
&= \pi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})(v')
\end{aligned}$$

Si ψ était non trivial, le morhisme

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \widehat{F} \\ a & \longmapsto & (a\psi : x \mapsto \psi(ax)) \end{array}$$

donne un isomorphisme $F \simeq \widehat{F}$ dans le cas $l \neq p$ [Bu-He, page 11], ce qui implique que V contient une infinité de caractères de N, et ceci contredit la dimension finie de V, grâce à la remarque faite un peu plus haut. Donc

ψ est trivial et v est un vecteur fixé par N. Comme v est fixé par un sous-groupe ouvert H, son stabilisateur contient donc un sous-groupe de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j\mathcal{O} & 1 \end{pmatrix}$ *pour j assez grand. D'après la formule*

$$\begin{pmatrix} 1 & -b^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b^{-1} \end{pmatrix}$$

on voit que le stabilisateur de v contient un élément de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b^{-1} \\ b & 0 \end{pmatrix}$ *pour un $b \in \varpi^j\mathcal{O}$, $b \neq 0$. Comme le conjugué de N par un tel élément est le sous-groupe $N^\omega = N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F & 1 \end{pmatrix}$ des matrices unipotentes inférieures, on en déduit que v est stable sous l'action de $SL(2,F)$(calcul facile qu'on peut trouver dans [Blondel, $2^{\text{ème}}$ éxposé page 3]). Le sous-espace non nul V^N est donc fixé aussi par $SL(2,F)$ et il est stable sous G, puisque $SL(2,F)$ est normal dans G : c'est donc V tout entier et (π,V) passe au quotient pour donner une représentation toujours irréductible de $G/SL(2,F) \simeq F^*$, donc un caractère de F^*(lemme de Schur), et finalement $\pi = \phi \circ \det$ pour un certain caractère ϕ de F^*, ce qui achève la démonstration.*

6 Le sous-groupe mirabolique

Soit (π,V) une représentation lisse de N. Généralisons la construction du foncteur de Jacquet. Pour η caracère de N, soit $V(\eta)$ le sous-espace de V engendré par les vecteurs $\pi(n)(v) - \eta(n)v$, $n \in N$ et $v \in V$. C'est un N-sous-espace de (π,V) et l'action de N sur le quotient $V_\eta = V/V(\eta)$ est donnée par η : c'est l'unique N-quotient maximal sur lequel l'action de N est par η. Lorsque η est le caractère trivial, nous avons noté $V(\eta) = V_N$ et $V_\eta = V_N$. On peut prouver [Bu-He, page 56] que l'opération $(\pi,V) \longmapsto V_\eta$ définit un foncteur exact de $Rep^\infty(N)$ dans $C-ev$, la catégorie des C-espaces vectoriels.

Proposition 23 :
Soit (π,V) une représentation lisse de G. Si $v \in V$ est non nul, il existe un caractère η de N tel que $v \notin V_\eta$.

Preuve 11 *: Voir [Bu-He, page 58].*

Corollaire 24 *: Si $V_N = (0)$ et $V_\eta = (0)$ pour un caractère non trivial η de N, alors $V = (0)$.* $\diamond$

Preuve 12 *: La proposition précédente implique que si cela est le cas pour tout les caractères de N, alors effectivement $V = (0)$. Maintenant, le sous-*

groupe $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a \in F^* \right\} \simeq F^*$ *agit sur les caractères non triviaux de* N *de la façon suivante : soit* ψ *un caractère non trivial de* N *et soit* $s = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Via l'identification canonique* $x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de* F *avec* N, *notons* $\psi(x) := \psi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. *Alors, il est clair que* $a\psi(x) = \psi(ax) = \psi(s \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s^{-1})$. *Comme* ψ *est non trivial, cet isomorphisme montre que l'action de* S *sur le groupe des caractères de* N *est transitive.*

Si ϕ *est un autre caractère non trivial de* N, *alors on montre que* $\pi(s)(V(\psi)) = V(\phi)$, *avec* $s \in S$ *vérifiant* $\phi = s\psi$, *en ayant à l'esprit l'identification précédente. Alors,* $\forall n \in N$ *et* $\forall v \in V$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\pi(s)(\pi(n)(v) - \psi(n)(v)) &= \pi(sns^{-1})(\pi(s)(v)) - \psi(n).\pi(s)(v) \\
&= \pi(sns^{-1})(v') - \psi(n).v' \\
&= \pi(sns^{-1})(v') - \psi(s^{-1}sns^{-1}s))v' \\
&= \pi(n')(v') - \psi(s^{-1}n's))v' \\
&= \pi(n')(v') - \phi(n'))v'
\end{aligned}$$

Donc, si $V(\psi) = V$, *alors* $V(\phi) = \pi(s)(V(\psi)) = \pi(s)(V) = V$ *et donc* $V_\psi = (0) \Longleftrightarrow V_\phi = (0)$. $\diamond$

Nous donnons maintenant sans preuve le résultat principal qui va nous être d'une grande utilité d dans la section suivante. Pour une preuve détaillée, on peut consulter [*Bu-He, page* $58 - 61$].

Théorème 25 *Soit* η *un caractère non trivial de* N *et* (π, V) *une représentation lisse de* M *:*
-$ind_N^M \eta$ *est irréductible sur* M.

-*Le* N-*morphisme de passage au quotient* $s : V \longrightarrow V_\eta$ *donne, via la réciprocité de Frobenius* $Hom_N(V_{|N}, V_\eta) \simeq Hom_M(V, Ind_N^M V_\eta)$ *un* M-*morphisme :*

$$\begin{aligned}
\Theta : V &\longrightarrow Ind_N^M \eta \\
v &\longmapsto \Theta(v) : m \longmapsto s(\pi(m)(v))
\end{aligned} \qquad (3)$$

qui induit un isomorphisme

$$V(N) \simeq ind_N^M V_\eta$$

Par conséquent :

-*soit* $\dim V = 1$, *et* π *est l'inflation à* M *d'un caractère de* $S = M/N \simeq F^*$.

-soit V est de dimension infinie et $\pi \simeq ind_N^M \eta$ pour un caractère η non trivial de N.

Dans le premier cas, $\dim V_N = 1$ *et* $V_\eta = (0)$ *pour tout* η *non trivial. Dans le second cas,* $V_N = (0)$ *et* $\dim V_\eta = 1$. $\diamond$

7 Décomposition de la série principale :

Cette section représente le coeur de ce mémoire. Nous donnons ici une classification complète des représentations principales de G en fonction de la congruence de q modulo l(on suppose $l \neq 2$).

***Théorème 26** :*

Soit $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ un caractère de T, avec χ_1 et χ_2 deux caractères de F^*. Posons $X = Ind_B^G \chi$.
(1) X est réductible $\Leftrightarrow \chi_1 \chi_2^{-1} = 1$ ou $\chi_1 \chi_2^{-1} = \|.\|_F^2$
(2) Supposons que X soit réductible. Alors :
-La longueur de X est majorée par 3.
-X contient un caractère $\Leftrightarrow \chi_1 \chi_2^{-1} = 1$.
-La longueur de X est égale à 3 $\Leftrightarrow q = -1[l]$: dans ce cas, X contient le caractère trivial, le caractère $\varepsilon = (-1)^{val(det(.))}$ et une représentation π_1 de dimension infinie et cuspidale. X est indécomposable.
-Lorsque la longueur est 2, alors X est semi-simple $\Leftrightarrow q = 1[l]$. $\diamond$

***Démonstration 3** :*

Considérons $V = \{f \in X / f(1) = 0\}$. C'est un sous-espace B-invariant de X.
Nous avons une suite exacte de B-modules :

$$(0) \to V \to X \xrightarrow{\alpha} \mathbf{C} \to (0)$$

où $\alpha : f \mapsto f(1)$ est le B-morphisme de Frobenius et $\mathbf{C}$ est muni de l'action de χ. D'après le lemme de restriction-inductions $V \simeq \delta_B^{-1} \otimes \chi^\omega$.

1ère étape :

***Proposition 27** :*
$W = V(N)$ est irréductible sur B.

***Démonstration 4** :*

Nous allons montrer que $V(N)$ est irréductible sur le groupe mirabolique M. On peut d'ores et déjà remarquer que $W(N) = W$ et $W_N = (0)$, d'après le lemme

***Lemme 28** :*

A tout $f \in V$, on associe $f_N \in \mathcal{C}_c^\infty(N)$ définie par $f_N(n) = f(\omega n)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} V & \to & \mathcal{C}_c^\infty(N) \\ f & \mapsto & f_N \end{array}$$

est un N-isomorphisme.

Démonstration 5 :

Comme dans le lemme de restriction-induction, on observe que si $f \in V$, le support de f est inclus dans un certain $B\omega N_0$, pour un sous-groupe ouvert compact N_0 de N. Le reste est evident. $\diamond$

Si $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(N)$ et $a \in F^*$, on définit $a\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(N)$ par :

$$a\Phi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \chi_2(a)\Phi(\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Ceci donne une action de $\mathcal{S} \simeq F^*$ sur $\mathcal{C}_c^\infty(N)$, compatible, via le morphisme Φ, avec celle de $\mathcal{S}$ sur V. On obtient donc une structure de M-module sur $\mathcal{C}_c^\infty(N)$ telle que Φ devienne cette fois un M-isomorphisme. Soit η un caractère non-trivial de N. On a un automorphisme linéaire $f \mapsto \eta f$ de $V = \mathcal{C}_c^\infty(N)$ qui envoie $V(N)$ sur $V(\eta)$, et donc $\dim_C V_\eta = \dim_C V_N = 1$. On a une suite exacte

$$(0) \to W = V(N) \hookrightarrow V \to V_N \to (0)$$

qui induit une suite exacte

$$(0) \to W_\eta \to V_\eta \to (V_N)_\eta \to (0)$$

Mais, comme N agit trivialement sur V_N et que η est non trivial, on conclut que $(V_N)_\eta = (0)$ et donc $W_\eta \simeq V_\eta \simeq \eta$. D'après le résultat de la section précédente sur le groupe mirabolique, $W = W(N) \simeq ind_N^M \eta$, qui est bien irréductible. $\diamond$

Corollaire 29 :

$Ind_B^G \chi$ est de longueur 3 dans $Rep^\infty(B)$ ou $Rep^\infty(M)$. De plus, deux facteurs de compositions sont des caractères et le troisième est de dimension infinie. En particulier, la longueur de X dans $Rep^\infty(G)$ est au plus 3. $\diamond$

2ème étape

Lemme 30 :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\chi_1 = \chi_2$.

(2)X contient un sous-espace X_0, N-invariant de dimension 1(ie.un caractère de N).

Lorsque ces conditions sont vérifiées, X_0 est unique, il est stable sous G et $X_0 \cap V = (0)$. De plus, l'action de G sur X_0 est donnée par le caractère $\Phi \circ \det$ où $\Phi = \chi_1 = \chi_2$.

Démonstration 6 *:*

Si $\chi_1 = \chi_2 = \Phi$*, alors* $X \simeq (\Phi \circ \det) \otimes Ind_B^G 1_T$*. Il suffit de considérer le cas* $X = Ind_B^G 1_T$*. Le sous-espace des fonctions constantes est alors un* G*-sous-espace et tout ses éléments sont fixes sous l'action de* G*.*

Réciproquement, supposons que $f \in X$ *engendre un* N*-sous-espace de dimension* 1*. L'action de* N *sur* f *(par translation à droite evidemment) est donnée par un caractère. Le support de* f *est* B*-invariant par translation à gauche à cause de la relation* $f(bx) = \chi(b)f(x)$*, donc* $supp(f)$ *est soit* G *soit* $B\omega N$*. Le second cas ne peut se produire car dans ce cas, la lissité de* f *implique* $f(\omega) = 0$ *et* $f = 0$ *ce qui est impossible. Donc* $suppf = G$ *et on voit déjà que* $f \notin V$*. Le* N*-morphisme canonique* $X \to X/V \simeq \mathbf{C}$*(muni de l'action du caractère* χ*) identifie* $\mathbf{C}.f$ *avec son image dans* $\mathbf{C}$ *: Si* $\lambda f \in V \Rightarrow \lambda = 0$ *d'après ce qui précède.*

Mais l'action de N *sur* X/V *est triviale. On en déduit que* N *fixe* f*, dans l'action de translation à droite. Soit* $x \in F^*$ *et considérons l'identité :*
$\omega \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix}$
Pour $v_F(x) << 0$*,* $v_F(x^{-1}) >> 0$ *et donc* f *est fixé par* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix}$*.*
Comme f *est fixé déjà par* N*, on a*

$$\begin{aligned} f(\omega) &= f(\begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}) \\ &= f(\begin{pmatrix} -x^{-1} & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}) = \chi_1(-x^{-1})\chi_2(x)f(1) \\ &= \chi_1(-1)(\chi_1^{-1}\chi_2)(x)f(1) \end{aligned}$$

Ceci permet de prouver que $\chi_1 = \chi_2$*(avec* $n << 0$ *on voit déjà que* $\chi_1^{-1}\chi_2(\varpi) = 1$ *et on conclut en remarquant que pour* $u \in U_F := \Omega \setminus \wp$*, si on choisit* $n << 0$*, alors* $\chi_1^{-1}\chi_2(u\varpi^n) = 1 = \chi_1^{-1}\chi_2(\varpi)^n\chi_1^{-1}\chi_2(u) = \chi_1^{-1}\chi_2(u)$*) , et que* $f(g) = \Phi(\det g)f(1), \forall g \in G$ *et que* $X_0 = \mathbf{C}.f$ *est l'unique* G*-sous-espace de* X *de dimension* 1*.* $\diamond$

3ème étape : Fin de la décomposition :

Supposons que X *ne soit pas réductible. Sa longueur* l *est donc soit* 2 *soit* 3*. Remarquons tout d'abord, que si* Φ *est un caractère de* F^**, alors*

$$\Phi.Ind_B^G\chi := (\Phi \circ \det) \otimes Ind_B^G\chi \simeq Ind_B^G(\Phi\chi_1 \otimes \Phi\chi_2)$$

D'après le corollaire de la première étape, X *admet soit un* G*-sous-espace de dimension* 1*, soit un* G*-quotient de dimension* 1*.*

1er cas : X admet un sous-espace de dimension 1*, un caractère de* G *et on est dans les hypothèses du lemme de l'étape* 2 *:* $\chi_1 = \chi_2 = \Phi$ *et* $X \simeq \Phi.Ind_B^G 1_T$*.*

2ème cas : X admet un G*-quotient de dimension finie. D'après le théorème*

de dualité, $\check{X} \simeq Ind_B^G \delta_B^{-1} \otimes \chi^{-1}$ *admet donc un sous-espace de dimension finie, et d'après le 1er cas* $(\delta_B^{-1} \otimes \chi^{-1})_1 = (\delta_B^{-1} \otimes \chi^{-1})_2$*. Comme* $\delta_B(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}) = \frac{\|t_2\|_F}{\|t_1\|_F}$*, on a* $\frac{\|.\|_F}{\chi_1} = \frac{1}{\chi_2\|.\|_F}$ *et alors* $\chi_1\chi_2^{-1} = \|.\|_F^2$*. Dans ce cas,* $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2 = \chi_2\|.\|_F^2 \otimes \chi_2$*. On a* $X \simeq (\chi_2\|.\|_F).Ind_B^G\delta_B^{-1}$ *et donc on peut se contenter d'étudier* $Ind_B^G 1_T$ *et* $Ind_B^G \delta_B^{-1}$*.*
- $l = 3$ *si et seulement si* $q = -1[l]$ *: Si* $q = -1[l]$*, alors* $Y = \check{X} = Ind_B^G\delta_B^{-1}$ *contient le caractère non trivial* $\varepsilon = (-1)^{-val(\det(.))}$*, et c'est donc un quotient irréductible de* X*, donc un facteur de composition. Le caractère trivial est toujours contenu dans* X*. Nous avons trouvé deux facteurs de composition de dimensions finies. Mais* X *est de dimension infinie et sa longueur est au plus 3 d'après la première étape de cette preuve. Il existe donc un troisième facteur qu'on note* π_1 *qui est de dimension infinie. Montrons que* π_1 *est cuspidale : On prend une suite de composition de la forme :*

$$\underbrace{0 \subsetneq \mathbf{1}_G}_{\mathbf{1}_G} \subsetneq V \subsetneq X$$

Si $V/1_G \simeq \varepsilon$*, alors, comme* $\varepsilon \neq 1_G$*, on a* $1_G \oplus \varepsilon \simeq V \subseteq X$ *ce qui implique que* X *contient* ε *et contredit le lemme et donc* $\pi_1 = V/1_G$ *et* $X/V = \varepsilon$*(Cet argument, qui n'est pas tout à fait evident, va être utiliser abondamment dans la suite, notamment lors de la comparaison des induites paraboliques. Il consiste à dire que toute suite exacte*

$$(0) \to \chi \to V \to \xi \to (0)$$

dans laquelle χ *et* ξ *sont deux caractères différents est scindée. Une preuve de ce fait a été suggérée par M. Dat). On a donc une suite exacte*

$$(0) \to V \to X \to \varepsilon \to (0)$$

qui donne par exactitude du facteur de Jacquet

$$(0) \to V_N \to X_N \to \varepsilon \to (0)$$

car l'action de N *dans* ε *est triviale :* $\varepsilon(N) = (-1)^{-v_F(\det(N))} = (-1)^{-v_F(1)} = 1$*. D'après le lemme de restriction-induction,*

$$(0) \to \delta_B^{-1} \to X_N \to 1_T \to (0)$$

et $\dim_{\mathbf{C}} X_N = 2$*. Donc* $\dim_{\mathbf{C}} V_N = 1$*.*
D'autre part, on a une autre suite exacte

$$(0) \to 1_G \to V \to \pi_1 \to (0)$$

qui induit

$$(0) \to 1_T \to V_N \to (\pi_1)_N \to (0)$$

et donc, comme $\dim_{\mathbf{C}} 1_T = \dim_{\mathbf{C}} V_N = 1$ *on en déduit que* $(\pi_1)_N = (0)$ *ie.* π_1 *est cuspidale.*

Réciproquement, si $l = 3$*, on sait d'après la 1ère étape qu'il existe un facteur* ξ *de dimension* 1*, différent de* $\mathbf{1}_G$*(une suite de composition dans* $Rep^\infty(G)$ *donne après restriction une suite de composition dans* $Rep^\infty(M)$ *ou dans* $Rep^\infty(B)$*). D'après l'étape 2,* ξ *est contenu dans* Y *ce qui implique que* $\|.\|_F = \|.\|_F^{-1}$ *sans que* $\|.\|_F = 1$*(car sinon, on aurait* $\xi = 1_G$*) et donc* $\|.\|_F^2 = 1$*,* $q = \pm 1[l]$ *et on doit donc avoir* $q = -1[l]$*. Etudions à présent le cas* $q \neq \pm 1[l]$*. On sait déjà que la longueur est égale à* 2*. Mais, on peut retrouver ce résultat d'une façon plus conceptuelle.*
Notons $St_G = X/1_G$*. Si* St_G *était réductible, il existerait un* G*-sous-espace* V *de* X *et une suite de composition*

$$(0) \subsetneq 1_G \subsetneq V \subsetneq X$$

et on a deux suites exactes

$$(0) \to V_N \to X_N \to (X/V)_N \to (0)$$

et

$$(0) \to 1_T \to V_N \to (V/1_G)_N \to (0)$$

$V_N \neq (0)$ *car* $V \hookrightarrow X$*. Si* $(X/V)_N = (0)$*, alors* X/V *serait cuspidale et on a un résultat rappelé dans l'article et le livre de Vignéras qui montre que dans le cas* $q \neq \pm 1[l]$ *les cuspidales sont des objets projections dans la catégorie* $Rep^\infty(G)$*.*
Donc la suite exacte

$$(0) \to V \to X \to X/V \to (0)$$

serait scindée et $X \simeq V \oplus X/V$ *contiendrait une cuspidale, ce qui est absurde. Ainsi,* $\dim_{\mathbf{C}} V_N = 1$ *et alors dans la 2ème suite exacte plus haut on doit avoir* $(V/1_G)_N = (0)$ *et donc* $V/1_G \hookrightarrow X/1_G = St_G$ *et* St_G *contient une cuspidale. Mais, ceci est impossible car*

$$(0) \to 1_T \to X_N \to (St_G)_N \to (0)$$

et donc $(St_G)_N \neq (0)$ *n'est pas elle même cuspidale.* St_G *est appelé la représentation de Steinberg.*
St_G *n'est pas isomorphe à une induite parabolique* $Ind_B^G \chi$*. En effet,* $\dim_{\mathbf{C}}(St_G)_N = 1$ *alors que* $\dim_{\mathbf{C}} Ind_B^G \chi = 2$*, pour tout caractère* χ *de* T*. C'est une représentation qui n'est pas non plus cuspidale. On l'appelle représentation spéciale de* G*.*
La discussion permet de montrer que ces représentations sont paramétrées par $(\Phi \circ \det) \otimes St_G$ *où* Φ *est un caractère de* F^**. On a vu que lorsque* $q = -1[l]$*,* $X/1_G$ *n'est pas irréductible, donc dans ce cas, il n'y a pas de représentations spéciale.*

La conclusion de cette discussion est que lorsque l ne divise pas $(q-1)q(q+1)$, la théorie est la même en caractéristique l ou en caractéristique 0.
Lorsque $q \neq \pm 1[l]$, X est indécomposable. En effet, si $X = V_1 \oplus V_2$ avec V_1 et V_2 irréductible, alors, forcément l'un des facteurs est $\mathbf{1}_G$. Mais alors, cela veut dire que $\mathbf{1}_G$ est un quotient de X, donc contenu dans Y, ce qui contredit le lemme.
Lorsque $q = 1[l]$, la longueur est 2, $\mathbf{1}_T$ est quotient de X, et que St_G est irréductible($q \neq -1[l]$), on a bien $X = 1_G \oplus St_G$ et X est semi-simple.
Le même argument permet de conclure que lorsque $q = -1[l]$, X est indécomposable.

8 Comparaison des induites paraboliques

Théorème 31 *:*
Soient χ et ξ deux caractères de T. Si n désigne la dimension de $Hom_G(Ind_B^G\chi, Ind_B^G\xi)$ sur $\mathbf{C}$, alors

$$n = \begin{cases} 0 & si\ \chi \neq \chi^\omega\delta_B^{-1}\ et\ \xi \notin \{\chi, \chi^\omega\delta_B^{-1}\} \\ 1 & si\ \chi \neq \chi^\omega\delta_B^{-1}\ et\ \xi \in \{\chi, \chi^\omega\delta_B^{-1}\} \\ 2 & si\ \chi = \chi^\omega\delta_B^{-1}\ ,\ \xi = \chi\ et\ q = 1[l] \\ 0 & si\ \chi = \chi^\omega\delta_B^{-1}\ ,\ \xi \neq \chi\ et\ q = 1[l] \\ 1 & si\ \chi = \chi^\omega\delta_B^{-1}\ et\ q \neq 1[l] \end{cases}$$

$\diamond$

Démonstration 7 *:*
Par le théroème de Réciprocité de Frobenius, on a

$$Hom_G(Ind_B^G\chi, Ind_B^G\xi) \simeq Hom_T((Ind_B^G\chi)_N, \xi)$$

D'après le lemme de restriction-induction, on a

$$(0) \to \chi^\omega \otimes \delta_B^{-1} \to (Ind_B^G\chi)_N \to \chi \to (0)$$

1) Si $\chi^\omega \otimes \delta_B^{-1} \neq \chi$, cette suite est scindée : $(Ind_B^G\chi)_N \simeq \chi \oplus \chi^\omega\delta_B^{-1}$ et on a donc

$$\begin{aligned} Hom_G(Ind_B^G\chi, Ind_B^G\xi) &\simeq Hom_T(\chi \oplus \chi^\omega\delta_B^{-1}, \xi) \\ &\simeq Hom_T(\chi, \xi) \oplus Hom_T(\chi^\omega\delta_B^{-1}, \xi) \end{aligned}$$

et les deux premiers cas en découlent.
2) Maintenant, $\chi^\omega\delta_B^{-1} = \chi$ implique que $\forall t, t' \in F^*$, on a $\chi_1(t)\chi_2(t') = \chi_1(t')\chi_2(t)\frac{\|t\|_F}{\|t'\|_F}$ et donc $\frac{\chi_1\chi_2^{-1}(t)}{\|t\|_F} = \frac{\chi_1\chi_2^{-1}(t')}{\|t'\|_F}$ ie. $\chi_1 = \chi_2.\|.\|_F$
<u>1er cas</u> : $q = 1[l]$:

Dans ce cas, $\chi_1 = \chi_2$ *car* $\|.\|_F = 1$*. Si* $\Phi = \chi_i$ *et si* $\Phi_G = \Phi \circ \det$*, on sait alors que*

$$\begin{aligned} X &\simeq \Phi.Ind_B^G 1_T \\ &\simeq \Phi_G \oplus (\Phi.St_G) \end{aligned}$$

(où la notation $\phi.\pi$ *signifie, dans toute la suite,* $(\phi \circ \det) \otimes \pi$ *pour tout caractère* ϕ *de* F^* *et toute représentation* π *de* G*)*
On a alors $Hom_G(Ind_B^G\chi, Ind_B^G\xi) \simeq Hom_G(\Phi_G, Ind_B^G\xi) \oplus Hom_G(\Phi_G \otimes St_G, Ind_B^G\xi)$*.*

D'après les résultats de la section précédente,

$$Hom_G(\phi_G, Ind_B^G\xi) \neq (0) \Longleftrightarrow \xi_1 = \xi_2 = \phi$$

Sous ces conditions, $\dim_{\mathbf{C}} Hom_G(\phi_G, Ind_B^G\xi) = 1$ *et* $Ind_B^G\xi = Ind_B^G\chi = \phi_G \oplus \phi.St_G$*.*

$$\begin{aligned} &Hom_G(Ind_B^G\chi, Ind_B^G\xi) \simeq End_G(\phi_G) \oplus End_G(\phi.St_G) \\ &\oplus Hom_G(\phi_G, \phi.St_G) \oplus Hom_G(\phi.St_G, \phi_G) \end{aligned}$$

et d'après le lemme de Schur, $\dim_{\mathbf{C}} End_G(\phi_G) = \dim_{\mathbf{C}} End_G(\phi.St_G) = 1$ *et il est évident que les deux autres facteurs sont triviaux. Donc, dans ce cas,* $\dim_{\mathbf{C}} Hom_G(Ind_B^G\chi, Ind_B^G\xi) = 2$*.*

Si maintenant $Hom_G(\phi_G, Ind_B^G\xi) = (0)$*, alors*

$$Hom_G(X, Y) = Hom_G(\phi.St_G, Y)$$

, avec $X = Ind_B^G\chi$ *et* $Y = Ind_B^G\xi$*.*

<u>Cas 1 :</u> $\xi_1 = \xi_2 = \phi' \neq \phi$

On voit que dans ce cas $Y \simeq \phi'_G \oplus \phi'.St_G$ *et donc*

$$Hom_G(X, Y) \simeq Hom_G(\phi.St_G, \phi'.St_G) = (0)$$

<u>Cas 2 :</u> $\xi_1 \neq \xi_2$*.*

Si $Hom_G(\phi.St_G, Y) \neq (0)$*, alors* Y *ne peut être irréductible car sinon elle serait aussitôt équivalente à une représentation spécial, ce qui est absurde. On en déduit donc que* Y *est réductible et on doit alors avoir, d'après les résultats précédents, soit* $\xi_1 = \xi_2$*, soit* $\xi_1 = \xi_2\|.\|_F = \xi_2$ *puisque ici* $q = 1[l]$*. Ceci est exclu par hypothèse ici.*
Ainsi, on a prouvé que dans ces deux cas, $Hom_G(X, Y) = (0)$*.*
<u>2 ème cas</u> : $q \neq 1[l]$

Ici X est irréductible car $\|.\|_F \neq 1$. Supposons que $Hom_G(X,Y)$ est non nul. Par le même argument qu'on vient d'utiliser, à savoir, que X ne peut pas être isomorphe à une $\phi.St_G$, on voit que Y est elle aussi irréductible, et donc, par le lemme de Schur, $Hom_G(X,Y) \simeq \mathbf{C}$ si $X \simeq Y$ et $Hom_G(X,Y) = (0)$ sinon. Il reste à voir quand est ce que $X \simeq Y$.
Si $X \simeq Y$ alors $X_N \simeq Y_N$ dans $Rep^\infty(T)$ et donc X_N contient le caractère $\xi^\omega \otimes \delta_B^{-1}$. Si $\xi^\omega \otimes \delta_B^{-1} \neq \chi^\omega \otimes \delta_B^{-1}$ (ie $\chi \neq \xi$), alors, comme $\dim_{\mathbf{C}} X_N = 2$, $X_N \simeq \chi \oplus \xi^\omega \delta_B^{-1}$ et donc

$$Hom_G(X,Y) \simeq Hom_T(\xi^\omega \delta_B^{-1}, \xi)$$

et donc finalement

$$n = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\ \chi = \chi^\omega \delta_B^{-1}\ ,\ \xi \notin \{\chi, \xi^\omega \delta_B^{-1}\}\ et\ q \neq 1[l] \\ 1 & si\ \chi = \chi^\omega \delta_B^{-1}\ ,\ \xi \in \{\chi, \xi^\omega \delta_B^{-1}\}\ et\ q \neq 1[l] \end{array} \right. \diamond$$

$\diamond$

Références

[Blondel] C. Blondel. *Les représentations lisses du groupe* $GL(2, \mathbb{Q}_p)$*(2 Exposés). Journées X-UPS, Ecole Polytechniques, Mai 2009.*

[Bu-He] COLIN J.BUSHNELL, GUY HENNIART *The Local Langlands Conjecture For GL(2)*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Renard] D. Renard. *Représentations des groupes réductifs p-adiques. Preprint, Janvier 2008.*

[Vignéras1] M-F. VIGNERAS. *M-F Vignéras, Représentation de* $GL(2, F)$ *en caractéristique* l*,* F *un corps p-adique et* $p \neq l$*. Compositio Mathematica 72(1989),33-66.*

[Vignéras2] M-F. VIGNERAS. *Représentations* l*-modulaires des groupes réductifs p-adiques avec* $l \neq p$*. Progress in Mathematics, Volume 137, Birkhauser-Boston, 1996.*