Mémoire de Master

Pseudoreprésentations à valeurs dans des groupes réductifs non connexes

Arnaud ETEVE

Sous la direction de Jean-François DAT
Professeur de Mathématiques à Sorbonne Université.
Chercheur à l'IMJ-PRG, projet formes automorphes.

Département de Mathématiques IMJ-PRG
Sorbonne Université

Date de Soutenance : 16/09/2019
Jury : Jean-François DAT
Benoît STROH

Remerciements

Je souhaiterai remercier Jean-François Dat pour avoir accepté d'encadrer mon mémoire, pour ses conseils et sa disponibilité.

Abstract

Dans ce mémoire, on étudie les classes de conjugaisons de morphismes complètement réductibles $\Gamma \to H(k)$ pour Γ un groupe quelconque, H un groupe réductif et k un corps algébriquement clos. On montre en particulier que ces morphismes sont uniquement paramétrés par leurs "traces" et on étudie comme sont reliés l'espace des représentations avec l'espace des traces.

Table des matières

Introduction

Soit k un corps algébriquement clos, H un groupe réductif sur k et Γ un groupe abstrait. On étudie les classes de conjugaison de morphismes $\Gamma \to H$ qui sont complètement réductifs comme dans les articles [Laf12] et [BHKT16], ces deux articles établissent une correspondance entre ces classes de conjugaisons de morphismes et un ensemble de données que l'on appellera pseudocaractères. Ces deux articles montrent le théorème suivant :

Théorème 0.1. *Il y a une bijection naturelle entre les classes de conjugaison de morphismes $\Gamma \to H$ qui sont complètement réductibles et les pseudocaractères de Γ dans H,*

en supposant dans [Laf12] que k est de caractéristique 0 et dans [BHKT16] que H est connexe sans hypothèse de caractéristique sur k. Des notes informelles de X. Zhu m'ont été transmises, leur objectif est de formaliser le contexte de cette équivalence (et en particulier la notion de pseudocaractère). Le premier but de ce mémoire est de généraliser ce théorème sans hypothèse de caractéristique et de connexité (section 6.1) sur k dans ce nouveau contexte puis d'étudier les généralisations de ce théorème :

(i). Lorsque Γ correspond au k-points d'un groupe algébrique (section 6.2).

(ii). Si on rajoute des hypothèses topologiques sur k et Γ (section 6.3).

(iii). Si on ne demande plus que k soit algébriquement clos (section 6.4).

(iv). Si k est en fait un anneau d'entier d'un corps local de caractéristique 0 (section 6.5).

(v). En montrant que l'équivalence est préservée par déformation (en ajoutant une hypothèse d'irréductibilité) (section 6.6).

La plupart de ces généralisations sont déjà traitées dans [Laf12] et [BHKT16], il s'agit ici de les généraliser dans le cas où H est non connexe et en caractéristique quelconque.

Une fois ceci établi, on montre la représentabilité du foncteur des pseudocaractères (section 7.1) et on le compare au quotient $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0$ (section 7.3), ces deux schémas ayant les même k-points pour k algébriquement clos, cette idée est issus des notes informelles de X. Zhu.

La structure de ce mémoire est la suivante, les deux premières sections ont pour but de rappeler et clarifier le formalisme et le langage des groupes réductifs et en particulier celui des groupes non connexe. La troisième section est un ensemble de résultats de théorie des invariants qui seront utilisés dans le reste du mémoire. On étudie ensuite la notions de complète réducibilité dans le cas des groupes non connexes. La cinquième section met en place le formalisme des pseudocaractères. Dans la sixième section, on montre la généralisation du théorème de Lafforgue au cas k de caractéristique quelconque et H non connexe et dans la dernière section on étudie l'espace des pseudocaractères et on le compare à l'espace des pseudoreprésentations de Γ dans H.

1 Préliminaires

1.1 Notations de théorie des catégories

Les symboles : Ens, Top, Gp, Ab, Mon, A-Mod, A-Alg,Sch, S-Sch, GpProfini,GpReductif$_k$ désignent respectivement les catégories des ensembles,des espaces topologiques, des groupes, des groupes abéliens, des monoïdes, des A-modules (pour A un anneau commutatif), des A-algèbres, des schémas, des S-schéma pour S un schéma, des groupes profinis et des groupes réductifs définis sur k. Si de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories quelconques, on note $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, et $S \in \mathcal{C}$ un objet, on notera $\mathcal{C}/S$ la catégorie des S-objets de $\mathcal{C}$. De plus étant donné une catégorie $\mathcal{C}$ et $T \in \mathcal{C}$, on notera $h_T = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(.,T) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ le foncteur de Yoneda.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec des produits fibrés et $S \in \mathcal{C}$ un objet, un S-objet en groupe de $\mathcal{C}$ est un objet $G \in \mathcal{C}/S$ muni de trois S-morphismes :

(i). Un morphisme de multiplication : $m : G \times_S G \to G$,

(ii). Un morphisme d'inversion : $i : G \to G$,

(iii). Un neutre : $e_G : S \to G$. En particulier e_G est une section du morphisme structural de G comme S-schéma,

tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
G \times_S G \times_S G \arrow[r, "{(m,\mathrm{id}_G)}"] \arrow[d, "{(\mathrm{id}_G,m)}"'] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\
G \times_S G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \times_S G \arrow[r, "{(e_G,\mathrm{id}_G)}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & G \times_S G \arrow[d, "m"] & G \times_S S \arrow[l, "{(\mathrm{id}_G,e_G)}"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& G &
\end{tikzcd}
.$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "{(i,\mathrm{id}_G)}"] \arrow[d] & G \times_S G \arrow[d, "m"] & G \arrow[l, "{(\mathrm{id}_G,i)}"'] \arrow[d] \\
S \arrow[r, "e_G"'] & G & S \arrow[l, "e_G"]
\end{tikzcd} \tag{1}$$

En particulier soit T un S-objet, alors $G(T) = \mathrm{Hom}_S(T,G) \in \mathrm{Gp}$. Et donc le foncteur de Yoneda $h_G : \mathcal{C}/S \to \mathrm{Ens}$ se factorise en $\mathcal{C}/S \to \mathrm{Gp} \xrightarrow{U} \mathrm{Ens}$ où U est l'oubli $\mathrm{Gp} \to \mathrm{Ens}$. On notera encore $h_G : \mathcal{C}/S \to \mathrm{Gp}$ le foncteur innduit.

Réciproquement si $F : \mathcal{C}/S \to \mathrm{Gp}$ est un foncteur contravariant tel que $U \circ F : \mathcal{C}/S \to \mathrm{Ens}$ est représentable par un objet H, alors F défini une structure de $\mathcal{C}/S$-groupe canonique sur H. Pour tout S-objet T soit $m(T) : F(T) \times F(T) \to F(T)$ la loi de groupe de $F(T)$, comme F est un foncteur pour tout S-morphisme $T' \to T, F(T) \to F(T')$ est un morphisme de groupe donc $T \to m(T)$ est une transformation naturelle de foncteur, de même on définit les morphismes d'inversion i et neutre e_F, comme $U \circ F$ est représentable et U commute aux produits fibrés, on obtient des morphismes encore notés m, i et e_H respectivement $H \times_S H \to H, H \to H$ et $S \to H$. Comme pour tout $T, m(T), i(T)$ et $e(F)$ vérifent les axiomes de groupes les diagrammes (1) commutent quand on remplace

G par $F(T)$ et (m, i, e_G) par $(m(T), i(T), e_F(T))$. Donc les transformations naturelles (m, i, e_F) font commuter les diagrammes (1) et par lemme de Yoneda les S-morphisme (m, i, e_H) vérifient les même relations, ce qui définit la stucture de groupe sur H.

Soit G_1 et G_2 deux S-objet en groupes un morphisme de S-objet en groupe est une flèche $f \in \mathrm{Hom}_S(G_1, G_2)$ telle que $fm_{G_2} = m_{G_1}(f, f)$. On définit alors la catégorie des S-objets en groupe $S - \mathrm{Gp}$ et la construction précédente donne une équivalence de catégories :

$$S\text{-Gp} \simeq \{F \in h_S\text{-Gp tel que } U \circ F \text{ soit représentable}\}. \tag{2}$$

Définition 1.1. Soit G un S-objet en groupe et X un S-objet, une action à gauche de G sur X est un morphisme $\mu : G \times_S X \to X$ tel que les diagrammes suivant commutent :

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S X \arrow[r, "(m_G, \mathrm{id}_X)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_G, \mu)"'] & G \times_S X \arrow[d, "\mu"] \\ G \times_S X \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \times_S X \arrow[r, "(e_G, \mathrm{id}_X)"] \arrow[dr, "\simeq"'] & G \times_S X \arrow[d, "\mu"] \\ & X \end{tikzcd} . \tag{3}$$

Remarque 1.2. Par le lemme de Yoneda, il est équivelent de donner une action à gauche de G sur X et de donner un morphisme $\mu : G \times_S X \to X$ tel que pour tout S-objet T le morphisme $\mu(T) : G(T) \times_{S(T)} X(T) \to X(T)$ soit une action action à gauche de $G(T)$ sur $X(T)$ dans la catégorie des $S(T)$-ensembles.

1.2 Notations et résultats de théorie des groupes algébriques

Soit S un schéma, un S-schéma en groupe est un S-objet en groupe dans la catégorie S-Sch, de plus si G est un S-schéma en groupe et $T \to S$ est un morphisme de schéma, on notera $G_T = G \times_S T$ le changement de base à T, alors G_T est un T-schéma en groupe. Pour tout S-schéma en groupe G, on dira que G est affine, propre, de type fini, étale, ...si le schéma sous-jacent l'est. Un groupe algébrique est un k-schéma en groupe de type fini sur un corps k. Dans le reste de cette section on énumérera les propriétés des groupes algébriques qui seront utiles par la suite, les preuves sont dans [Mil17].

On fixe k un corps et G un k-groupe algébrique.On identifiera le morphisme neutre $e_G : \mathrm{Spec}(k) \to G$, avec son image $e \in G$.

Théorème 1.3 ([Mil17] Proposition 1.28)**.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*). *G est lisse.*

(*ii*). *Le point e est un point lisse de G.*

(*iii*). *L'anneau local $\mathcal{O}_{G,e}$ est régulier.*

(*iv*). *G est géométriquement réduit.*

Théorème 1.4 ([Mil17], Proposition 1.29 à 1.36 et 2.37)**.** *Soit X un k-schéma de type fini, il existe un unique k-schéma étale $\pi_0(X)$ et un morphisme $X \to \pi(X)$ ayant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme $u : X \to S$ où S est un k-schéma étale, il existe un unique morphisme $\overline{u} : \pi_0 \to X$ faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "u"'] & \pi_0(X) \arrow[d, "\overline{u}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Le schéma $\pi_0(X)$ vérifie de plus les propriétés suivantes :

(i). Pour toute extension k' de k, $\pi_0(X_{k'}) = (\pi_0(X))_{k'}$.

(ii). Pour tout X, Y de type fini sur $k, \pi_0(X \times Y) \simeq \pi_0(X) \times \pi_0(Y)$.

(iii). Les fibres du morphisme $X \to \pi_0(X)$ sont les composantes connexes de X.

Si G est un k-groupe algébrique alors $\pi_0(G)$ est un k-groupe algébrique étale, de plus les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i). G est irréductible.

(ii). G est connexe.

(iii). G est géométriquement connexe.

(iv). $\pi_0(G) \simeq \mathrm{Spec}(k)$.

Définition 1.5 ([Mil17] 1.f)**.** Soit G un groupe algébrique, un sous groupe algébrique H de G est un sous schéma fermé tel que pour tout k-schéma $T, H(T)$ est un sous groupe de $G(T)$.

Le sous groupe H est distingué si pout tout $T, H(T)$ est disintgué dans $G(T)$.

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes algébriques, le noyau de $f, \mathrm{Ker}(f)$ est le sous-groupe distingué $\mathrm{Spec}(k) \times_{G'} G$. En particulier pour tout k-schéma $T, \mathrm{Ker}(f)(T)$ est le noyau de $G(T) \to G'(T)$.

Un suite courte

$$e \to H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{f} Q \to e \tag{4}$$

est exacte si j est un isomorphisme de H sur $\mathrm{Ker}(f)$ et si f est fidèlement plat.

Théorème 1.6 ([Mil17], Proposition 2.37)**.** *Soit G un groupe un algébrique, le composante connexe qui contient e est notée G^0, il jouit des propriétés suivantes :*

(i). Le sous groupe G^0 est distingué.

(ii). G^0 s'insère dans la suite exacte suivante :

$$e \to G^0 \subset G \to \pi_0(G) \to e \tag{5}$$

où le deuxième morphisme est le morphisme canonique de $G \to \pi_0(G)$.

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes algébriques alors f induit des morphismes, $G^0 \to (G')^0$ et $\pi_0(G) \to \pi_0(G')$.

Théorème-Définition 1.7 ([Mil17], Sections 1.J et 1.K)**.** Soit G un schéma en groupe sur un corps k, et H un sous groupe on définit deux foncteurs représentables $\mathrm{Z}_G(H)$ et $\mathrm{N}_G(H)$ qui sont respectivement normalisateurs et centralisateur de H dans G. Pour tout k-schéma T on pose :

$$\mathrm{N}_G(H)(T) = \{g \in G(T), gH_Tg^{-1} = H_T\}$$
$$\mathrm{Z}_G(H)(T) = \{g \in G(T), ghg^{-1} = h, \forall T' \to T, h \in H_T(T')\}$$

On note de plus $\mathrm{Z}(G) = \mathrm{Z}_G(G)$.

Théorème 1.8 ([Mil17], Theorem 7.2)**.** *Soit G un groupe algébrique et X un schéma de type fini séparé sur k sur lequel G agit. Notons $\mu : G \times X \to X$ l'action, alors le foncteur $T \mapsto \{x \in X(T), \mu(g, x_{T'}) = x_{T'}, \forall T' \to T\}$ est représentable par un sous schéma fermé que l'on notera X^G, c'est le lieu des points fixes de l'action de G.*

Définition 1.9 ([Mil17], 7.6)**.** Soit G et X comme précédemment et $x \in X(k)$, alors le foncteur $T \mapsto \{g \in G(T), gx_T = g_T\}$ est représentable par un sous schéma en groupe noté G_x, c'est le groupe d'isotropie de x ou le stabilisateur de x.

1.3 Action des tores et concentrateurs

Soit k un corps et k^a une cloture algébrique de k. Les groupes algébriques et schémas considérés sont définis au dessus de k. Tous les groupes algébriques considérés sont affines.

Définition 1.10. Le groupe $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(k[T, T^{-1}])$ est le groupe algébrique correspondant au foncteur suivant : $T \to \mathcal{O}(T)^\times$. Un tore T est un groupe algébrique tel que $T_{k'} \simeq \mathbb{G}_m^n$ où $n = \dim(T)$ pour une extension finie séparable k'. On dira que T est déployé si cet isomorphisme est défini au dessus de k.

Soit G un groupe algébrique, un caractère de G est un morphisme $G \to \mathbb{G}_m$, un cocaractère de G est un morphisme $\mathbb{G}_m \to G$. On note $X(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m), Y(G) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G)$ les groupes de caractères et cocaractères définis au dessus de k et $X^*(G) = \mathrm{Hom}(G_{k^a}, (\mathbb{G}_m)_{k^a}), Y^*(G) = \mathrm{Hom}((\mathbb{G}_m)_{k^a}, G_{k^a})$ ceux définis au dessus de k^a.

On renvoie au chapitre 4 et 12 de [Mil17] pour les propriétés des tores et de leurs représentations.

Théorème 1.11 ([Mil17], Theorem 13.1)**.** *Soit T un tore qui agit sur un schéma lisse X, alors X^T est lisse.*

Définition 1.12 (Limite d'un morphisme)**.** Soit X un schéma séparé, et $\phi : \mathbb{A}^1 - \{0\} \to X$ un morphisme, comme X est séparé et $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ est schématiquement dense dans $\mathbb{A}^1$, il existe au plus un morphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{A}^1 \to X$ qui prolonge ϕ. On note alors $\lim_{t \to 0} \phi = \tilde{\phi}(0)$.

Théorème-Définition 1.13 (Concentrateur d'un sous schéma fermé, [Mil17] 13.31)**.** Soit X un schéma algébrique affine lisse muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ et $Z \subset X$ un sous schéma fermé lisse de X, alors il existe un unique sous schéma fermé $X(Z)$ vérifiant

$$X(Z)(k^a) = \{x \in X(k^a) \text{ tel que } \lim_{t \to 0} tx \text{ existe et soit dans } Z\} \quad (6)$$

Soit maintenant G un groupe algébrique lisse et $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un cocaractère, λ définit une action de $\mathbb{G}_m$ sur G par conjugaison. On note alors $P_\lambda = G(G)$ le concentrateur de $G, L_\lambda = G^{\mathbb{G}_m}$ et $U_\lambda = G(e)$ le concentrateur de e.

Théorème 1.14 ([Mil17], 13.d). *Les sous schémas $P_\lambda, L_\lambda et U_\lambda$ sont des sous groupes de G qui vérifient les propriétés suivantes :*

(i). Pour tout $g \in P_\lambda(T), \lim_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda(t^{-1}) \in L_\lambda$ et l'application $P_\lambda \to L_\lambda$ définie sur les T-points comme $g \mapsto \lim_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda(t^{-1})$ est un morphisme de groupes, on la note c_λ.

(ii). Le groupe U_λ est unipotent.

(iii). La suite suivante est exacte et scindée par l'inclusion $L_\lambda \subset P_\lambda$,

$$e \to U_\lambda \to P_\lambda \xrightarrow{c_\lambda} L_\lambda \to e. \tag{7}$$

1.4 Groupes réductifs

Le but de cette section est de fixer les conventions concernant les groupes réductifs, les principales références utilisées sont [Mil17] et [Con14].

Théorème-Définition 1.15 ([Mil17], 19.a et 19.b). Soit G un groupe algébrique affine lisse connexe sur un corps k,

(i). Il existe un unique sous groupe affine connexe lisse normal maximal résoluble de G, on l'appelle le radical de G, il est noté $R(G)$.

(ii). Il existe un unique sous groupe affine connexe lisse normal maximal unipotent de G, on l'appelle le radical unipotent de G, il est noté $R_u(G)$.

Définition 1.16. Soit k un corps et G un groupe algébrique affine lisse connexe sur k et notons $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.

(i). On dit que G est semisimple si $R(G_{\overline{k}})$ est trivial.

(ii). On dit que G est semisimple si $R_u(G_{\overline{k}})$ est trivial.

Définition 1.17. Soit G un groupe algébrique affine lisse sur un corps k, on dit que G est réductif si G^0 l'est.

Remarque 1.18. Comme la formation de G^0 commute aux changements de base, on a $(G^0)_{\overline{k}} = (G_{\overline{k}})^0$ et il n'y a pas de confusion possible quant aux définitions.

Définition 1.19. Soit S un schéma et G un schéma en groupe sur S qui est S-affine et lisse, on dit que G si pour tout point géométrique $\overline{s} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to S$ la fibre $G_{\overline{s}}$ est un groupe réductif connexe.

Théorème 1.20 ([Gro65] Tome3, 15-6-5). *Soit G un schéma en groupe lisse, S-affine et de présentation finie sur S, il existe un sous schéma en groupe ouvert $G^0 \subset G$ tel que pour tout point $s \in S$, G^0_s soit la composante neutre de G_s. La formation de G^0 commute avec tout changement de base.*

Définition 1.21. Soit G un schéma en groupe S-affine, lisse, de présentation finie sur S, on dit que G est réductif si G^0 l'est.

1.4.1 Données radicielles

La référence pour cette section est [Mil17] 21.c.

Soit H réductif connexe défini sur k-algébriquement clos.

Définition 1.22. Le rang de H est la dimension d'un tore maximal. Le rang semisimple de H est la dimension d'un tore maximal de $H/R(H)$.

Proposition 1.23 ([Mil17], Theorem 20.1)**.** *Supposons que H soit semisimple alors sont rang est > 0.*

Définition 1.24. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $(,)$ un produit scalaire sur V.

Soit $\alpha \in V$, on note $s_\alpha : V \to V$ la symétrie de vecteur α, alors $s_\alpha(x) = x - 2\frac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$.

Définition 1.25 (Système de Racines, [Mil17] C.12)**.** Un sous ensemble $R \subset V$ est un système de racines si

- (i). R est fini, engendre V et $0 \notin R$.
- (ii). Pour tout $\alpha \in R$, $s_\alpha(R) \subset R$.
- (iii). Pour tout $\alpha, \beta \in R$, $s_\alpha(\beta) - \beta$ est un multiple entier de α.

Le groupe de Weyl du système de racine, noté $W(R)$ est le sous groupe de $\mathrm{Aut}(V)$ engendré par les symétries s_α pour $\alpha \in R$, c'est un groupe fini.

Définition 1.26 (Données radicielles)**.** Un ensemble de données de racine est un quadruplet $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ tel que X et $X^\vee$ soient des $\mathbb{Z}$-modules libres finis en dualité parfaite, R et $R^\vee$ sont des sous ensembles finis de X et $X^\vee$ en bijection par $\alpha \leftrightarrow \alpha^\vee$ vérifiant :

- (i). $(\alpha, \alpha^\vee) = 2$ pour tout $\alpha \in R$.
- (ii). $s_\alpha(R) \subset R$ et $s_{\alpha^\vee}(R^\vee) \subset R^\vee$ pour tout $\alpha \in R$.

Le groupe de Weyl des données radicielles, noté $W(R)$ est le sous groupe de $\mathrm{Aut}(X)$ engendré par les symétries s_α pour $\alpha \in R$, c'est un groupe fini.

Définition 1.27 (Données radicielles basées)**.** Un ensemble de données radicielles basées est un sextuple $(X, R, \Delta, X^\vee, R^\vee, \Delta^\vee)$ que l'on notera plus souvent $(X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$, où $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ sont des données radicielles et $\Delta \subset R$ est une base de $X_\mathbb{Q}$ telle que toute racine $\alpha \in R$ soit une combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de Δ.

Définition 1.28. Un sous groupe connexe, maximal, lisse, résoluble B de G est appelé sous-groupe de Borel de G.

Une paire (B, T) où B est un Borel de G et $T \subset B$ un tore maximal de G (ou B) est appelée paire de Borel de G.

Proposition 1.29. *Toutes les paires de Borel de G sont conjuguées par $G(k)$.*

Soit (B,T) une paire de Borel de H. On note $X = \mathrm{X}(T)$ et $X^\vee = \mathrm{Y}(T)$, alors X et $X^\vee$ sont en dualité parfaite par

$$\begin{aligned} &X \times X^\vee \to \mathbb{Z} \\ &\quad (\chi, \lambda) \to n \text{ tel que } \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m, t \mapsto \chi(\lambda(t)) = t^n \end{aligned}$$

On note $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, et $\Phi = \Phi(H,T) \subset X$ les poids de l'action adjointe de T sur $\mathfrak{h}$. Comme T est un tore il est linéairement réductif, et

$$h = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{h}_\alpha \tag{8}$$

De plus d'après [Mil17], 21.11.(e), pour tout $\alpha \in \Phi$ il existe un unique $\alpha^\vee \in X^\vee$ tel que $s_\alpha(x) = x - (x, \alpha^\vee)\alpha$, on note $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee, \alpha \in \Phi\}$.

Théorème 1.30. *Le quadruplet $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ sont des données radicielles, ce sont les données radicielles de H.*

Théorème 1.31. *Le choix de B correspond au choix d'une base Δ faisant de $(X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$ des données radicielles basées. Ce Δ est donné par $\Delta = \{\alpha, U_\alpha \subset B\}$.*

Théorème 1.32. *Pour toutes données radicielles basées $(X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$ il existe un groupe réductif H défini sur k muni d'une paire de Borel (B,T) tel que $(X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$ soit les données radicielles basées de H pour la paire de Borel (B,T).*

A toute données radicielles basées $\mathcal{R} = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$ on associe un graphe, D, appelé de le diagramme de Dynkin de $\mathcal{R}$ dont les sommets sont les éléments de Δ et entre deux sommets α et β il y a $n(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha^\vee)$ arêtes. On note $\mathrm{Aut}(D)$ les automorphismes de graphes de D.

Théorème 1.33. *On note D le diagramme de Dynkin associé à H. Le groupe des automorphismes de H se décompose de la manière suivante :*

$$e \to \mathrm{Inn}(H) \to \mathrm{Aut}(H) \to \mathrm{Aut}(D) \to e \tag{9}$$

1.4.2 Paraboliques et Lévis

Soit k un corps et H un groupe réductif connexe sur k, la référence pour cette section est [Mil17], chapitre 17.

Définition 1.34. Soit T un tore maximal de G, on note $W(G,T) = W$ lorsqu'aucune confusion n'est possible le groupe $\pi_0(\mathrm{N}_G(T)) = \mathrm{N}_G(T) / \mathrm{Z}_G(T)$, on l'appelle le groupe de Weyl de (G,T).

Théorème-Définition 1.35. Un sous groupe parabolique P de H est un sous groupe vérifiant l'une des propositions équivalentes suivantes :

(i). P contient un sous groupe de Borel.

(ii). La variété H/P est complète.

(iii). Il existe $\lambda \in \mathrm{Y}(H)$ tel que $P = P_\lambda$.

Définition 1.36. Soit P un sous groupe parabolique, un sous groupe de Lévi L de P est un supplémentaire de $R_u(P)$ dans P. C'est à dire que $L \simeq P/R_u(P)$ et $P = L \rtimes R_u(P)$.

On dira aussi que L est un Lévi de P. De manière plus générale on dira que L est un sous groupe de Lévi de H (ou simplement Lévi de H), s'il existe un sous groupe parabolique de H dont L est un Lévi.

On appellera paire de Lévi (P, L) une paire de sous groupes où P est un parabolique de H et L est un Lévi de P.

Proposition 1.37. *Pour tout parabolique P, il existe un sous groupe de Lévi de P et tous les Lévis de P sont conjugués par $R_u(P)$.*

Proposition 1.38. *Il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de parabolique et elle sont en correspondance avec les sous ensembles $J \subset \Delta$ où $(X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$ sont des données radicielles basées associées à une paire de Borel (B, T) de H.*

2 Paraboliques et Lévis des groupes réductifs non connexes

Soit k un corps algébriquement clos. Soit H un groupe réductif non connexe, il y a plusieurs manières de définir les notions de sous-groupes paraboliques et sous groupes de Lévis de H. Le but de cette section est de définir ces différentes notions et de les comparer.

2.1 Au sens de Richardson

Cette définition est issue de [BMR05]. Les sous groupes paraboliques sont les sous groupes de la formes P_λ et les sous groupes de Lévi sont les groupes de la forme L_λ pour $\lambda \in \mathrm{Y}(H)$. On les appelera R-paraboliques et R-Lévis de H.

Soit P un R-parabolique, les R-Lévis de P sont les sous groupes L_λ pour λ tel que $P = P_\lambda$ en particulier ce sont des supplémentaires du radical unipotent de P, $R_u(P) = R_u(P^0)$ et la suite exacte suivante est scindée :

$$e \to R_u(P_\lambda) \to P_\lambda \to L_\lambda \to e \tag{10}$$

Démonstration. Notons $c_\lambda : P \to L$ le deuxième morphisme de cette suite. Soit $x \in L(k)$, alors $c_\lambda(x) = x$ et l'inclusion $L \to P$ scinde la suite. □

Proposition 2.1. *Soient L un R-Lévi et P un R-parabolique. Alors L^0 est un Lévi de H^0 et P^0 est un parabolique de H^0.*

Démonstration. Notons $L = L_\lambda$ et $P = P_\lambda$, alors les groupes $(P \cap H^0)$ et $(L \cap H^0)$ sont caractérisés par les propriétés suivantes :

$$(P \cap H^0)(k) = \{x \in H^0(k), \lim_{t\to 0} \lambda(t)x\lambda(t)^{-1} \text{ existe}\}.$$
$$(L \cap H^0)(k) = \{x \in H^0(k), \lim_{t\to 0} \lambda(t)x\lambda(t)^{-1} = x\}.$$

Donc $P \cap H^0$ et $L \cap H^0$ sont des paraboliques et Lévis respectivement de H^0, ils sont par conséquent connexes. D'une part P^0 est connexe donc $P^0 \subset P \cap H^0$ et d'autre par $P \cap H^0$ est connexe donc $P \cap H^0 \subset P^0$ et les deux groupes coïncident (il en est de même pour L^0 et $L \cap H^0$). Ainsi L^0 est un Lévi de H^0 et P^0 est un parabolique de H^0. □

2.2 Au sens de Borel

Dans le cas d'un L-groupe, [Bor79] définit une notion de parabolique et de Lévi d'un L-groupe. Dans le cas plus général d'un groupe réductif non connexe H, on dira que $P \subset H$ est un sous-groupe parabolique au sens de Borel si P^0 (la composante neutre de P) est un sous groupe parabolique de H^0 et si $\pi_0(H) = \pi_0(P)$. De même un sous groupe de Lévi $L \subset H$ est un sous groupe tel que L^0 est un Lévi de H^0 et $\pi_0(L) = \pi_0(H)$. On appelera ces groupes B-paraboliques et B-Lévis. On pose en particulier $R_u(P) = R_u(P^0)$. Enfin par une paire de B-Lévi, on désigne un couple (P, L) où P est un B-parabolique et $L \subset P$ un B-Lévi tel que L^0 soit un Lévi de P^0.

Remarques 2.2. (*i*). On fera attention au fait que l'existence de B-Lévis et B-paraboliques n'est pas assurée en toute généralité.

(*ii*). Par $\pi_0(H) = \pi_0(P)$ on entend que le morphisme canonique $\pi_0(P) \to \pi_0(H)$ est un isomorphisme.

Proposition 2.3. *Soit* (P, L) *une paire de B-Lévi de* H*, alors* $L^0 = L \cap H^0$ *et* $P^0 = P \cap H^0$.

Démonstration. Comme L^0 est connexe $L^0 \subset L \cap H^0$. Réciproquement $\pi_0(L \cap H^0)$ est le noyau du morphisme naturel $\pi_0(L) \to \pi_0(H)$, par hypothèse on a égalité entre les deux groupes (ce qui veut dire que ce morphisme est en fait un isomorphisme). Donc $\pi_0(L \cap H^0) = e$ et $L \cap H^0$ est connexe et $L \cap H^0 \subset L^0$. La même preuve fonctionne si on remplace L^0 par P^0. □

Proposition 2.4. *Soit* P *un B-parabolique, alors* $P = \mathrm{N}_H(P^0)$.

Démonstration. En effet P^0 est distingué dans P donc $P \subset \mathrm{N}_H(P^0)$. On a $\mathrm{N}_H(P^0)^0 = P^0$, en effet P^0 étant connexe est contenu dans $\mathrm{N}_H(P^0)^0$, de plus $\mathrm{N}_H(P^0)^0 \subset \mathrm{N}_H(P^0) \cap H^0 = \mathrm{N}_{H^0}(P^0) = P^0$. Enfin $\pi_0(\mathrm{N}_H(P^0) \cap H^0)$ est le noyau du morphisme $\pi_0(\mathrm{N}_H(P^0)) \to \pi_0(H)$. Comme P^0 est connexe ce morphisme est injectif. Comme P est un B-parabolique la composée des morphismes canoniques est un isomorphisme $\pi_0(P) \to \pi_0(\mathrm{N}_H(P^0)) \to \pi_0(H)$ et donc $\pi_0(\mathrm{N}_H(P^0)) = \pi_0(H)$, ainsi P et $\mathrm{N}_H(P^0)$ ont même composante neutre et même groupe de composantes connexes, ils sont donc égaux. □

Proposition 2.5. *Soit* P *un B-parabolique, alors il existe un B-Lévi de* P.

Démonstration. Soit L^0 un Lévi de P^0 qui existe car P^0 est un parabolique de H^0, notons $L = \mathrm{N}_H(P^0, L^0)$ alors par la proposition 2.7 la composante neutre de L est L^0, c'est donc un Lévi de H^0 et $P = R_u(P) \rtimes L$ donc comme $R_u(P)$ est connexe $\pi_0(L) = \pi_0(P) = \pi_0(H)$ car P est un B-parabolique. Ainsi L est un B-parabolique de H. □

Proposition 2.6. *Soit* (P, L) *une paire de B-Lévi de* H*, alors on a* $P = L \ltimes R_u(P)$.

Démonstration. Comme $R_u(P)$ est caractéristique dans P^0 il l'est dans P, il est en particulier distingué. L'inclusion $L \to P$ induit un morphisme $L \to P/R_u(P)$ qui est un isomorphisme au niveau des composantes neutres, de plus comme $R_u(P)$ est connexe le morphisme $\pi_0(P) \to \pi_0(P/Ru(P))$ est un isomorphisme. Donc le morphisme composé $\pi_0(L) \to \pi_0(P/R_u(P))$ est un isomorphisme, ainsi $L \to P/R_u(P)$ induit un isomorphisme sur les composantes neutres et sur les groupes de composantes, c'est donc un isomorphisme. □

2.3 Au sens de Digne et Michel

Cette définition est issue de [DM94]. Un sous groupe $P \subset H$ est un parabolique de H s'il existe un parabolique P^0 de H^0 tel que $P = \mathrm{N}_H(P^0)$. Et un sous-groupe $L \subset H$ est un Lévi s'il existe un paire de Lévi/parabolique (P^0, L^0) de H^0 tel que $L = \mathrm{N}_H(P^0, L^0)$. On les appelera DM-paraboliques et DM-Lévis. Comme précédemment on définit $R_u(P) = R_u(P^0)$.

Proposition 2.7. *Soit (P^0, L^0) une paire de Lévi de H^0, alors la paire (P, L) construite précédemment vérifie :*

(i). La composante neutre de P (resp. L) est P^0 (resp. L^0), et les notations sont cohérentes.

(ii). $P = \mathrm{N}_H(P)$ et $L = \mathrm{N}_H(P, L)$.

(iii). $\pi_0(L) = \pi_0(P)$

(iv). $P = L \rtimes R_u(P)$

Démonstration. Notons Q la composante neutre de P, alors Q normalise P^0 et $Q \subset H^0$ donc $Q \subset \mathrm{N}_{H^0}(P^0)$. Réciproquement $\mathrm{N}_{H^0}(P^0)$ est connexe donc $Q = \mathrm{N}_{H^0}(P^0)$ enfin comme P^0 est un parabolique de H^0, qui est connexe $\mathrm{N}_{H^0}(P^0) = P^0$ et $P^0 = Q$. Le même raisonnement fonctionne pour L^0 car $L^0 = \mathrm{N}_{H^0}(P^0, L^0)$ qui est connexe.

Montrons ensuite que $P = \mathrm{N}_H(P)$, soit $x \in \mathrm{N}_H(P)(k)$ alors la conjugaison par x préserve P^0 donc x normalise P^0 et $P \subset \mathrm{N}_H(P) \subset \mathrm{N}_H(P^0) = P$. De même si $x \in \mathrm{N}_H(P, L)$ alors la conjugaison par x préserve (P^0, L^0) et $x \in \mathrm{N}(P^0, L^0)$ donc $L \subset \mathrm{N}_H(P, L) \subset \mathrm{N}(P^0, L^0) = L$.

Montrons que $\pi_0(P) = \pi_0(L)$. Remarquons que $L \cap P^0 = L \cap H^0 = L^0$ est connexe, donc le morphisme $\pi_0(L) \to \pi_0(P)$ induit par l'inclusion est injectif. Soit $\overline{x} \in \pi_0(P)(k)$ et $x \in P$ un relèvement de x. Alors xL^0x^{-1} est un Lévi de P^0 donc il existe $y \in P^0(k)$ tel que $yxL^0x^{-1}y^{-1} = L$. Alors $yx \in L(k)$ et l'image $\overline{yx}$ de yx dans $\pi_0(P)$ est $\overline{x}$ ce qui prouve la surjectivité de $\pi_0(L) \to \pi_0(P)$.

Montrons que $P = L \rtimes R_u(P)$, comme $R_u(P)$ est caractéristique dans P^0 et P^0 est caractéristique dans $P, R_u(P)$ est caractéristique dans P donc en particulier distingué. De plus il est connexe et donc $\pi_0(L) = \pi_0(P) = \pi_0(P/R_u(P))$, enfin $(P/R_u(P))^0 = P^0/(R_u(P^0)) \simeq L^0$ par la composée $L^0 \to P^0 \to P^0/(R_u(P^0))$ et donc le morphisme $L \to P/R_u(P)$ est un isomorphisme sur les composantes neutres et sur les π_0 c'est donc un isomorphisme qui est une section de la projection $P \to P/R_u(P)$. □

2.4 Comparaison entre les définitions

Théorème 2.8. *Soit H un groupe réductif non connexe alors on a les inclusions suivantes :*

$$\{B\text{-}paraboliques\} \subseteq \{DM\text{-}paraboliques\} \subseteq \{R\text{-}paraboliques\}. \tag{11}$$

On a les même inclusions si on remplace "paraboliques" par "Lévis". Toutes ces inclusions sont strictes a priori et sont des égalités si H est connexe.

Démonstration. Soit (P, L) une paire de B-Lévi, on a déjà prouvé dans 2.4 que tout B-parabolique est un DM-parabolique et donc P est un DM-parabolique. Montrons de plus que $L = \mathrm{N}_H(P^0, L^0)$, comme $L \subset P, L$ normalise P^0 et comme L^0 est la composante neutre de L, L normalise L^0. Donc on a une inclusion $L \subset \mathrm{N}_H(P^0, L^0)$. Comme $\mathrm{N}_H(P^0, L^0)$ est un DM-Lévi, $\mathrm{N}_H(P^0, L^0)^0 = L^0$ et $\pi_0(\mathrm{N}_H(P^0, L^0)) \to \pi_0(H)$ est injectif. Comme la composée $\pi_0(L) \to \pi_0(\mathrm{N}_H(P^0, L^0)) \to \pi_0(H)$ est un isomorphisme, $\pi_0(\mathrm{N}_H(P^0, L^0)) = \pi_0(H)$ et $L = \mathrm{N}_H(P^0, L^0)$ est un DM-Lévi.

Soit (P, L) un paire de DM-Lévi, le fait que ce soit une paire de R-Lévi est le lemme 6.1 de [BHKT16].

Si H est connexe, les trois définitions de paraboliques et Lévis coïncident, car alors $P = P^0$ est un parabolique de $H = H^0$ (de même pour les sous groupes de Lévis). On montre maintenant que dans le cas non connexe ces inclusions sont a priori strictes.

Posons $H = \mathbb{G}_m \rtimes \underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_k$, où $\underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_k$ est le groupe constant égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ défini au dessus de k, celui ci agit sur $\mathbb{G}_m$ par $t \to t^{-1}$ au niveau des k-points. Alors comme $H^0 = \mathbb{G}_m$ il n'y a qu'un sous groupe parabolique de H^0 et c'est H^0 tout entier (qui est aussi un Lévi de H^0). Alors $\mathrm{N}_H(H^0) = H$, donc il n'y a qu'un seul DM-parabolique et un seul B-parabolique qui dans les deux cas est H. Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to H$ le cocaractère défini par l'inclusion $H^0 \subset H$, alors $P_\lambda = H^0$ car le k-point $(1, 1)$ n'est pas dans P_λ, en effet pour $t \in \mathbb{G}_m(k), t(1, 1)t^{-1} = (t^2, 1)$ qui n'admet pas de limite dans H (car le point $(0, 1)$ n'est pas dans H). Donc H^0 est un R-parabolique mais non un DM-parabolique.

Soit A la matrice de GL_n : $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $G = \mathrm{SL}_n \rtimes \underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_k$ où $\underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_k$ agit sur la matrice M par $(AMA^{-1})^t$. Soit P le parabolique suivant $\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$ de SL_n, alors l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'envoie sur le parabolique suivant $\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{N}_G(P) = P$ et donc P est un DM-parabolique sans être un B-parabolique. Notons de plus μ un cocaractère tel que $P = P_\mu$.

Soit $G' = G \times H$ le produit des deux groupes précédents et $P' = P \times \mathbb{G}_m$ le produit des deux paraboliques qui ont servis de contre-exemple. Alors $\mathrm{N}_{G'}(P') = P \times H$ et $\nu = (\mu, \mathrm{id})$ le cocaractère produit alors $P_\nu = P'$ donc dans $G \times H$ toutes les inclusions entre types de paraboliques sont strictes.

□

Proposition 2.9. *Soit P (resp. L) un R-parabolique (resp un R-Lévi) de H tel que le morphisme $P \to \pi_0(H)$ (resp. $L \to \pi_0(H)$) soit surjectif alors P (resp. L) est un B-parabolique (resp B-Lévi).*

Démonstration. Comme P^0 est un parabolique de H^0 et $\pi_0(P) \to \pi_0(H)$ est surjectif par hypothèse et est injectif car $P \cap H^0 = P^0$ est connexe, c'est un isomorphisme et donc P est un B-parabolique. (La même démonstration marche en remplaçant P par L pour les R-Lévis.) □

Proposition 2.10. *Soit (B^0, T^0) une paire de Borel de H^0 alors $B = \mathrm{N}_H(B^0)$ est un B-parabolique et $T = \mathrm{N}_H(B^0, T^0)$ est un B-Lévi de B.*

Démonstration. Soit $\overline{\gamma} \in \pi_0(H)$, et γ un relèvement de $\overline{\gamma}$ dans $H(k)$, alors $\overline{\gamma}$ agit par conjugaison via γ sur (B, T), l'image d'une paire de Borel par un automorphisme de H^0 est une paire de Borel. Comme toutes les paires de Borel sont conjuguées, il existe $h \in H^0(k)$ tel que $\gamma(B,T)\gamma^{-1} = h(B,T)h^{-1}$ donc $l = h^{-1}\gamma$ normalise (B,T) donc $l \in L(k) \subset P(k)$ et donc l'image de l dans $\pi_0(P) = \pi_0(L) \subset \pi_0(H)$ est $\overline{\gamma}$ ainsi $\pi_0(P) \to \pi_0(H)$ est surjectif et (P, L) est une paire de B-Lévi. □

Proposition 2.11. *Soit P un $*$-parabolique de H et L un $*$-Lévi de P, soit Q un $*$-parabolique de L alors $QR_u(P) \subset H$ est un $*$-parabolique de H. De plus tout $*$-parabolique de H contenu dans P est obtenu de cette manière. En particulier on a $R_u(QR_u(P)) = R_u(Q) \rtimes R_u(P)$. Pour $* =$ Richardson ou Borel.*

Démonstration. Dans le cas où $* =$ Richardson, c'est le (ii) du du lemme 6.2 de [BMR05].

Dans le cas où $* =$ Borel, on a $(QR_u(P))^0 = Q^0R_u(P)$ et ce dernier est un parabolique de H^0. De plus $\pi_0(QR_u(P)) = \pi_0(Q) = \pi_0(L) = \pi_0(H)$, ce qui prouve que $QR_u(P)$ est un B-parabolique. Soit $\tilde{Q}$ un B-parabolique de H contenu dans P, soit T un tore maximal de $\tilde{Q}^0$ et L un B-Lévi de P contenant T, et $c : P \to L$ la projection sur L. Alors $c(\tilde{Q})$ est un B-parabolique de L, en effet il existe $\lambda \in \mathrm{Y}(T)$ tel que $c = c_\lambda$, ce qui montre que Q^0 est un parabolique de L^0 et $\pi_0(Q) = \pi_0(\tilde{Q}) = \pi_0(L)$. Ainsi $\tilde{Q} \subset QR_u(P)$, et comme $\tilde{Q} \subset P, R_u(P) \subset R_u(\tilde{Q})$, ainsi $\tilde{Q} \subset QR_u(P) \subset \tilde{Q}$. □

Proposition 2.12. *Il n'y a qu'un nombre fini de classes de $H^0(k)$ conjugaison de $*$-paraboliques, pour $* =$ R, B ou DM.*

Démonstration. Soit P un $*$-parabolique, alors à la classe de $H^0(k)$-conjugaison de P, on associe la classe de $H^0(k)$-conjugaison de P^0, celles-ci sont en nombre fini. Soit P, Q deux $*$-paraboliques tel que les classes de $H^0(k)$ conjugaison de P^0 et Q^0 coïncident. On peut donc supposer $P^0 = Q^0$ alors $\pi_0(Q)$ et $\pi_0(P)$ déterminent la classe de $H^0(k)$-conjugaison de P et Q, ce sont des sous-groupes de $\pi_0(H)$ qui est fini et donc une classe de conjugaison de $*$-paraboliques est déterminée par la classe de conjugaison de P^0 et $\pi_0(P)$. □

Proposition 2.13. *Soit P un $*$-parabolique, alors il existe L un $*$-Lévi de P et tous les $*$-Lévi de P sont conjugués par $R_u(P)$, pour $* =$ R, B ou DM.*

Démonstration. L'existence de $*$-Lévis, est évidente pour $* =$ R et DM, et a été montrée pour $* =$ B. Si L et L' sont deux $*$-Lévis de P alors L^0 et L'^0 sont deux Lévis de P^0 et sont conjugués par $R_u(P)$, on peut donc supposer que $L^0 = L'^0$ alors $\pi_0(L) = \pi_0(L') = \pi_0(P)$. Posons $L'' = \mathrm{N}_P(L^0)$ alors $L, L' \subset L''$, on a $\mathrm{N}_{P^0}(L^0) = L'' \cap H^0 = L^0$ car L^0 est un Lévi de P^0. Ainsi le morphisme $\pi_0(L) \subset \pi_0(L'')$ induit par l'inclusion $L \subset L''$ est un isomorphisme, il en est de même pour L' donc $L = L' = L''$. □

Proposition 2.14. *Il y a un nombre fini de classes de $H^0(k)$-conjugaisons de $*$-Lévis, pour $* =$ R, B ou DM.*

Démonstration. Comme il y a un nombre fini de classes de conjugaison de $*$-paraboliques, il suffit de montrer que pour un $*$-parabolique, il y a un nombre fini de classes de conjugaison de $*$-Lévi de P, or par la proposition 2.13, tous les $*$-Lévi de P sont conjugués par $R_u(P)$, il n'y a donc qu'une seule classe de conjugaison. □

Proposition 2.15. *Soit $\Gamma \subset H$ un sous groupe fermé, il existe une famille finie $(l_1, \ldots, l_r)$ de $\Gamma(k)$ telle que pour tout $*$-parabolique P et $*$-Lévi L de $H, \Gamma \subset P$ (resp. L) si et seulement si $\forall i, l_i \in P(k)$ (resp. $L(k)$).*

Démonstration. Le lemme 2.10 de [BMR05] est le même énoncé mais dans le cas où H est connexe, cependant la preuve de ce lemme n'utilise pas la connexité de H mais seulement le fait qu'il y ait un nombre fini de classes de conjugaisons de paraboliques et Lévis. □

2.5 Cas d'une extension semisimple

Soit H un groupe réductif non connexe (B^0, T^0) une paire de Borel de H^0 et Γ un groupe fini étale, on suppose dans toute cette section que $H = H^0 \rtimes \Gamma$ et que l'action de Γ sur H^0 fixe la paire de Borel (B^0, T^0), on a en particulier $\pi_0(H) = \Gamma$. On appelera une telle extension de H^0 par $\pi_0(H)$ semisimple.

Remarque 2.16. C'est en particulier le cas des L-groupes.

On note $W = W(H^0, T^0) = \pi_0(\mathrm{N}_{H^0}(T^0))$ le groupe de Weyl de T^0 et $(X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$ les données radicielles associées au choix de (B^0, T^0). Le but de cette section est de calculer explicitement les $*$-paraboliques et $*$-Lévis pour $* = \mathrm{B}$ ou DM.

Cas des B-paraboliques

Soit (P, L) une paire de B-Lévi de H alors quitte à conjuguer (P, L) par un élément de $H^0(k)$ on peut supposer que $(B^0, T^0) \subset (P^0, L^0)$, il correspond à P^0 un sous-ensemble $J \subset \Delta$.

Théorème 2.17. *(i). L'ensemble J est invariant par l'action de Γ.*

(ii). L'action de Γ sur H^0 stabilise (P^0, L^0).

(iii). $P = P^0 \rtimes \Gamma$ et $L = L^0 \rtimes \Gamma$.

(iv). Réciproquement si $J \subset \Delta$ est un ensemble Γ invariant et P^0 le parabolique correspondant, L^0 l'unique Lévi de P^0 contenant T^0, alors $P = P^0 \rtimes \Gamma$ et $L = L^0 \rtimes \Gamma$ est une paire de B-Lévi de H.

Démonstration. Soit $\gamma \in \Gamma$, l'image de P^0 par l'action de γ, $\gamma.P^0$ est un parabolique qui contient B^0 et correspond à $\gamma.J$. Comme $P = \mathrm{N}_H(P^0)$, on a que $\pi_0(P) \subset \Gamma$ correspond à l'ensemble des éléments de Γ qui stabilisent P^0 et donc J. Comme P est un B-parabolique $\pi_0(P) = \Gamma$ et $\gamma.J = J$ donc J est Γ-invariant et l'action de Γ stabilise P^0.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma.L^0$ est un Lévi de P^0 et coïncide avec L^0 si $\gamma \in \pi_0(L)$. Comme L est un B-Lévi, $\gamma.L^0 = L^0$ et Γ stabilise la paire (P^0, L^0).

Pour le (iii), clairement P et L sont engendrés par P^0 et Γ et L^0 et Γ, $P^0 \lhd P$ et $L^0 \lhd L$ et $P^0 \cap \Gamma = e = L^0 \cap \Gamma$. Ce qui montre que $P = P^0 \rtimes \Gamma$ et $L = L^0 \rtimes \Gamma$.

Soit $J \subset \Delta$ un sous-ensemble Γ-invariant et $B^0 \subset P^0$ le parabolique contenant B^0 correspondant à J et $T^0 \subset L^0$ un Lévi de P^0 contenant T^0. Alors comme J est Γ-invariant $P = \mathrm{N}_H(P^0)$ vérifie $\pi_0(P) = \Gamma$ et P est un B-parabolique et $L = \mathrm{N}_H(P^0, L^0)$ est un B-Lévi de P.

$\square$

Théorème 2.18. *Les classes de $H^0(k)$ conjugaisons de paires de B-Lévis sont représentées par $(P^0 \rtimes \Gamma, L^0 \rtimes \Gamma)$ ou (P^0, L^0) est une paire de B-Lévi de contenant (B^0, T^0) et telle que l'ensemble J correspondant à P^0 soit Γ invariant. En particulier on a une bijection :*

$$\{\textit{classes de } H^0(k)\textit{-conjugaison de paires de B-Lévis}\} \simeq \{J \subset \Delta, \Gamma \textit{ invariant}\} \tag{12}$$

Démonstration. C'est juste une reformulation du théorème 2.17. $\square$

Cas de DM-paraboliques

Théorème 2.19. *Soit $(B^0, T^0) \subset (P^0, L^0)$ un paire de Lévi contenant la paire de Borel. Soit $J \subset \Delta$ le sous ensemble associé à P^0 et $P = \mathrm{N}_H(P^0), L = \mathrm{N}_H(P^0, L^0)$ la paire de DM-Lévi associée à (P^0, L^0). Notons Γ_J le stabilisateur de J sous l'action de Γ alors,*

(i). $\pi_0(P) = \pi_0(L) = \Gamma_J$

(ii). $P = P^0 \rtimes \Gamma_J$ *et* $L = L^0 \rtimes \Gamma_J$.

(iii). Notons $[J]$ la classe de $H^0(k)$-conjugaison de (P, L). Alors la classe de $H(k)$-conjugaison de (P, L) est $\cup_{\gamma \in \Gamma}[\gamma.J]$.

Démonstration. Le premier point est clair, en effet $\gamma \in \Gamma$ est dans $\pi_0(P)$ si et seulement si $\gamma \in \mathbb{N}_H(P^0)$, si et seulement si $\gamma.P = P$ et si et seulement si $\gamma \in \Gamma_J$.

Notons $\pi : H \to \pi_0(H)$, alors $H_J = \pi^{-1}(\Gamma_J)$ est un sous groupe de H et $(H_J)^0 = H^0$. De plus $(P, L) \subset H_J$ et dans H_J, (P, L) est une paire de B-Lévi ce qui donne le point (ii).

Soit (Q, R) une paire de DM-Lévi de la classe de $H(k)$-conjugaison de (P, L) alors quitte à conjuguer par un élément de $H^0(k)$ on peut supposer $(B^0, T^0) \subset (Q^0, R^0)$, et Q^0 correspond donc à un sous ensemble $\tilde{J} \subset \Delta$. Il suffit alors de montrer que $\tilde{J}$ et J sont conjugués par Γ. Soit $x \in H(k)$ qui conjugue (P, L) avec (Q, R) et soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\pi(x) = \gamma$, alors $\gamma^{-1}x \in H^0(k)$ et le sous ensemble de Δ associé à $\gamma(P, L)\gamma^{-1}$ est $\gamma.J$, et donc $\tilde{J} = \gamma.J$.

Réciproquement soit (Q, R) la paire de DM-Lévi associée à $\gamma.J$ pour un $\gamma \in \Gamma$. Comme $\Gamma_{\gamma.J} = \gamma\Gamma_J\gamma^{-1}$, $(Q, R) = (Q^0 \rtimes \Gamma_{\gamma.J}, R^0 \rtimes \Gamma_{\gamma.J})$ qui est conjugué à (P, L). $\square$

3 GIT, Quotients et Espaces de modules

3.1 Quotients GIT

Soit S un schéma, G un S-schéma en groupe et X un S-schéma sur lequel G agit, on note $\mu : G \times_S X \to X$ l'action.

Définition 3.1 (Orbite d'un point). Soit $f : T \to X$ un T-point de X, on pose $O(f) : G \times_S T \to X_T, O(f) = \mu(id, f)$ et on l'appelle l'orbite de f. En particulier on note $\Psi = O(\mathrm{id}_X)$.

Définition 3.2 (Quotient catégorique, [MFK94] Definition 0.5). Un quotient catégorique de X par G est un S-schéma Y muni d'un morphisme de schéma $\phi : X \to Y$ tel que le caré suivant commute.

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

Et le couple (Y, ϕ) est muni de la propriété universelle suivante : pour tout $h : X \to Z$ tel que $h \circ p_2 = h \circ \mu$ il existe un unique $\overline{h} : Y \to Z$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\ X \arrow[r, "\phi"'] \arrow[drr, bend right, "h"'] & Y \arrow[dr, dashed, "\exists!\ \overline{h}"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

S'il existe on le note $X//H$.

Définition 3.3 (Quotient géométrique, [MFK94] Definition 0.6). Un quotient géométrique de X par G est un S-schéma Y muni d'un morphisme $\phi : X \to Y$ tel que

(*i*). $\phi \circ p_2 = \phi \circ \mu$.

(*ii*). ϕ est surjective et l'image de Ψ est $X \times_Y X$.

(*iii*). $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $\phi^{-1}(U) \subset X$ est ouvert.

(*iv*). $\mathcal{O}_Y \subset \phi_* \mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions invariantes par G.

S'il existe on le note X/H.

Définition 3.4. Soit (Y, ϕ) un quotient catégorique de X et $Y' \to Y$ un morphisme, on note $X' = X \times_Y Y'$ le tiré en arrière à Y'. L'action de H sur X induit se tire sur une action sur X', mais Y' n'est pas nécessairement un quotient catégorique de X'. Si pour tout $Y' \to Y$, Y' est un quotient catégorique de X' alors on dit que Y est un quotient catégorique universel de X. Si c'est vrai seulement pour $Y' \to Y$ plat, on dit que c'est un quotient catégorique uniforme. On obtient les même définitions pour les quotients géométriques.

Proposition 3.5 ([MFK94] Proposition 0.1)**.** *Si (Y, ϕ) est un quotient géométrique alors c'est un quotient catégorique.*

Soit k un corps algébriquement clos, H est un groupe réductif connexe et X est un k-schéma de type fini, affine et séparé sur lequel H-agit.

Définition 3.6 (Lieu stable et lieu semi-stable, [Ric88], 1.4)**.** On note $Z = \cap_{x \in X} H_x$ le noyau de l'action de H sur X. Soit $x \in X(k)$ on dit que

(i). x est un point stable si son orbite est fermée et si H_x/Z est fini.

(ii). x est un point semi-stable si son orbite est fermée.

On note respectivement X_s et X_{ss} le lieu stable et semi-stable.

Remarque 3.7. On prend ici les définitions données dans [Ric88], elles sont moins générales que [MFK94] mais suffisante pour la suite et ne demandent pas d'utiliser des H-linéarisation de fibré en droite.

Le théorème suivant est une version faible du théorème de Haboush.

Théorème 3.8. *Il existe un quotient catégorique uniforme de l'action de H sur X, celui-ci est affine et de type fini sur k. En particulier si $X = \operatorname{Spec} A$ alors $X//H = \operatorname{Spec}(A^H)$.*

Théorème 3.9 ([Ses77])**.** *Supposons de plus que X soit intègre, on note $\pi : X \to X//H$ l'application canonique alors $X//H$ dispose des propriétés suivantes :*

(i). *π est surjective et H équivariante au niveau des k-points.*

(ii). *Soit $F \subset X$ un fermé H-invariant alors $\pi(F)$ est un fermé de $X//H$.*

(iii). *Soit $W_1, W_2 \subset X$ deux fermés H-invariant disjoints alors $\pi(W_1)$ et $\pi(W_2)$ sont disjoints.*

(iv). *Pour tout tout $x \in (X//H)(k)$, $\pi^{-1}(x)$ contient exactement une orbite fermée.*

Théorème 3.10 ([Kem78], Theorem 1.4)**.** *Soit $S \subset X$ un sous schéma fermé stable par H et $x \in X(k)$ tel que $\overline{O(x)}$ rencontre S, alors il existe un caractère $\lambda \in \mathrm{Y}(H)$ tel que $\lim_{t \mapsto 0} \lambda(t).x$ existe et soit dans S.*

3.2 Morphismes adéquats et espaces de modules

Les conventions pour les champs algébriques utilisées sont les même que dans [Alp10], mais nous n'utiliserons ces résultats que pour clarifier les notions de centralisateurs et de normalisateurs et obtenir des propriétés sur les morphismes induit par passage aux anneaux d'invariants, ie si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux G-équivariant pour un groupe algébrique G, on sera amené à considérer le morphisme induit $A^G \to B^G$.

Définition 3.11. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneau, on dit que c'est un morphisme adéquat si pour tout $b \in B$, il existe $n > 0$ tel que $b^n \in A$.

On dit que c'est un morphisme universellement adéquat si pour tout morphisme $A \to A'$ le morphisme induit $A' \to A' \otimes_A B$ est adéquat.

On dit de plus que c'est un homéomorphisme adéquat, s'il est universellement adéquat, $\mathrm{Ker}(f)$ est localement nilpotent et $\mathrm{Ker}(f) \otimes \mathbb{Q} = 0$.

Proposition 3.12 ([Alp10])**.** *Les notions de morphismes adéquat, universellement adéquat et homéomorphisme adéquat sont stables par changement de base et locales pour la topologie fpqc.*

On fixe S un schéma quelconque (on peut même se contenter de prendre S un espace algébrique). On renvoie à [Alp10] pour les définitions de morphismes adéquatement affines et d'espaces de module adéquats. On citera cependant le théorème suivant :

Théorème 3.13 ([Alp10], Introduction, Main Theorem)**.** *Soit $\phi : \mathcal{X} \to Y$ un espace de module adéquat alors on a :*

(*i*). *Le morphisme ϕ est surjectif, universellement fermé et universellement submersif.*

(*ii*). *Deux points géométriques $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ sont identifiés dans $Y(k)$ ssi $\overline{\{x_1\}}$ et $\overline{\{x_2\}}$ s'intersectent dans $\mathcal{X} \times k$.*

(*iii*). *Pour tout morphisme d'espaces algébriques $Y' \to Y$, le changement de base $\mathcal{X} \times_Y Y' \to Y'$ se factorise par un espace de module adéquat suivit d'un homéomorphisme adéquat.*

(*iv*). *Le morphisme ϕ est universel pour les morphismes à valeurs dans les schémas, ie si $\mathcal{X} \to Z$ est un morphisme ou Z est un schéma alors il se factorise par un morphisme $Y \to Z$.*

(*v*). *Les espaces de modules adéquats sont stable par changement de base plat et descendent pour la topologie fpqc.*

Définition 3.14 ([Alp10], 9.1.1)**.** Soit H un S-schéma en groupe plat, séparé et de type fini, on dit que H est géométriquement réductif si le morphisme $\mathcal{B}H \to S$ est un espace de module adéquat, où $\mathcal{B}H$ désigne l'espace classifiant des H-torseurs.

Théorème 3.15. *Tout schéma en groupe réductif sur un schéma S est géométriquement réductif sur S.*

Théorème 3.16 ([Alp10], 9.2.5)**.** *Soti H un schéma en groupe plat, séparé, finiment présenté sur un anneau k alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*i*). *Pour tout morphisme universellement adéquat $A \to B$ de H-k-algèbres de noyau K, le morphisme $A^H/K^H \to B^H$ est un homéomorphisme adéquat.*

(*ii*). *Le schéma en groupe H est géométriquement réductif.*

(*iii*). *Pour toute surjection $A \to B$ de H-k-algèbres, le morphisme $A^H \to B^H$ est adéquat.*

Théorème 3.17 ([Alp10], 9.4.1)**.** *Soit $H \to S$ un S-schéma en groupe géométriquement réductif et $H' \subset H$ un sous-groupe qui est plat séparé et de présentation finie sur S, si $H/H' \to S$ est affine alors H' est géométriquement réductif. De plus si H est affine alors la réciproque est vraie.*

Corollaire 3.18 ([Alp10], 9.4.2)**.** *Soit $H \to S$ un S-schéma en groupe géométriquement réductif et X un S-schéma sur lequel H agit, soit $x \in X(k)$ pour k un S-corps, si l'orbite $O(x) \subset X \times_S \operatorname{Spec}(k)$ est affine alors $H_x \to S$ est géométriquement réductif. Si $H \to S$ est affine alors la réciproque est vraie.*

Théorème 3.19 ([Alp10], 9.7.5)**.** *Soit $H \to S$ un S-schéma en groupe affine lisse à fibre géométriquement connexes alors $H \to S$ est réductif si et seulement si $H \to S$ est géométriquement réductif.*

Dans la section suivante on utilisera les résultats précédents pour $S = \operatorname{Spec}(k)$ pour k un corps algébriquement clos.

Corollaire 3.20. *Pour $S = \operatorname{Spec}(k)$ où k est un corps algébriquement clos, H un k-schéma en groupe et géométriquement réductif alors H est réductif si et seulement si il est lisse si et seulement si il est réduit.*

Démonstration. On a que H est réductif ou réduit si et seulement si H^0 est réductif ou réduit. De plus comme le quotient H/H^0 est fini donc affine H^0 est géométriquement réductif par 3.17. Si H est réduit H^0 est réduit et donc par 3.19, H^0 est réductif. Réciproquement si H est réductif il est lisse et réduit par définition. □

Corollaire 3.21. *Soit $S = \operatorname{Spec}(k)$, k un corps algébriquement clos et H un groupe réductif (à priori non connexe) sur k, soit $L \subset H$ un sous groupe géométriquement réductif alors L_{red} est réductif.*

Démonstration. Comme H est affine la réciproque du théorème 3.17 s'applique et H/L est affine sur k. Par [Mil17] 7.16.b le morphisme $H/L_{\mathrm{red}} \to H/L$ est fini donc affine. Alors H/L_{red} est affine et par 3.17 L_{red} est géométriquement réductif et lisse car réduit donc par 3.20 L_{red} est réductif. □

Proposition 3.22. *Soit $S = \operatorname{Spec}(k)$, soit L un k-schéma en groupe alors tout tore $T \subset L$ est contenu dans L_{red} en particulier L et L_{red} on le même rang et $\mathrm{Y}(L) = \mathrm{Y}(L_{\mathrm{red}})$.*

Démonstration. Tout tore T est lisse et l'inclusion $T \subset L$ se factorise $T \subset L_{\mathrm{red}}$. □

3.3 Anneaux d'invariants

Dans cette section l est un nombre premier, E une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_E$ son anneau d'entiers et on note k le corps résiduel de $\mathcal{O}$.

Notation. On note $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ la catégorie des O-algèbres Artiniennes locales.

Définition 3.23 (Foncteur de déformation d'un k-point, [BHKT16],Section 3.2)**.** Soit Y un $\mathcal{O}$-schéma de type fini, et $y \in Y(k)$ on définit le foncteur de déformation en Y.

$$\begin{aligned} Y^{\vee,y} : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} &\to \mathrm{Ens} \\ A &\mapsto \text{ la fibre de } Y(A) \to Y(k) \text{ au dessus de } y. \end{aligned}$$

Si H est un groupe réductif au dessus $\mathcal{O}$, on note $H^{\vee} = H^{\vee,e}$.

Soit H un groupe réductif connexe défini sur $\mathcal{O}$ et X un O-schéma de type fini, intègre, plat et affine sur lequel H agit.

Théorème 3.24 ([BHKT16], Proposition 3.10)**.** *On pose $X//H = \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)^H$ alors $X//H$ n'est pas nécessairement un quotient catégorique mais il dispose des propriétés suivantes :*

- *(i). $X//H$ est un $\mathcal{O}$-schéma intègre de type fini et l'application quotient $\pi : X \to X//H$ est H-équivariante.*
- *(ii). Pour tout morphisme vers un corps algébriquement clos $\mathcal{O} \to K$, l'application $X(K) \to (X//H)(K)$ est surjective et identifie $(X//H)(K)$ avec le quotient de $X(K)$ par la relation d'équivalence suivante : $x_1 \sim x_2$ si les adhérences de leurs orbites s'intersectent.*
- *(iii). La projection $X(K) \to (X//H)(K)$ induit une bijection entre les orbites fermées de $X(K)$ et $(X//H)(K)$.*
- *(iv). Pour tout ensemble H-invariant $W \subset X$, $\pi(W)$ est fermé. Si W_1, W_2 sont deux sous ensembles H-invariants disjoints alors $\pi(W_1)$ et $\pi(W_2)$ sont disjoints.*

Proposition 3.25 (Cas où l'action est libre, [BHKT16], Proposition 3.13)**.** *Supposons que X soit de plus intègre et lisse. Soit $x \in H(k)$ tel que l'orbite de x dans X_k sous l'action de H_k soit fermée et telle que $(H_k)_x \simeq \operatorname{Spec} k$. Alors l'action de $H^{\vee}$ sur $X^{\vee,x}$ est libre et l'application quotient $\pi : X \to X//H$ induit un isomorphisme $X^{\vee,x}/H^{\vee} \simeq (X//H)^{\vee,\pi(x)}$.*

4 Complète Réducibilité

Soit k un corps algébriquement clos. Sauf mention explicite tous les groupes considérés sont définis sur k.

4.1 H-Complète réducibilité et H-irréducibilité

Dans tout cette section on fixe H un groupe réductif (sans hypothèse de connexité) et $\Gamma \subset H$ un sous groupe fermé.

Définition 4.1. (i). On dit que Γ est H-complètement réductible (que l'on notera H-cr) au sens de Richardson (resp. Borel, resp Digne et Michel) si pour tout R-parabolique (resp. B-parabolique, resp DM-parabolique) P contenant Γ il existe un R-Lévi (resp. B-Lévi, resp. DM-Lévi) L_P de P tel que $\Gamma \subset L_P$. On notera aussi H-cr pour H-complètement réductif.

(ii). On dit que Γ est H-irréductible au sens de Richardson (resp. Borel, resp. Digne et Michel) s'il n'est contenu dans aucun R-parabolique (resp. B-parabolique, resp. DM-parabolique) de H. On notera H-irr pour H-irréductible.

(iii). On dit que Γ est fortement H-irréductible au sens de Richardson (resp. Borel, resp. Digne et Michel) si Γ est H-irr au sens de Richardson (resp. Borel, resp. Digne et Michel) et $\mathrm{Z}_{H^0}(\Gamma) = \mathrm{Z}(H)^0$.

Théorème 4.2 (Corollaire 3.22 version non connexe, [BMR05])**.** *Soit L un R-Lévi de H contenant Γ alors Γ est L-cr au sens de Richardson ssi Γ est H-cr au sens de Richardson.*

Proposition 4.3. *Si Γ est H-cr au sens de Richardson alors il l'est au sens de DM et Borel.*

Démonstration. Supposons que $\Gamma \subset P$ un $*$-parabolique pour $* =$ B ou DM, alors P est un R-parabolique donc il existe L un R-Lévi de P tel que $\Gamma \subset L$, or L est aussi un $*$-Lévi donc Γ est H-cr au sens de $*$. $\square$

Proposition 4.4. *Si Γ est H-irr au sens de $*$ alors Γ est H-cr au sens de $*$ pour $* =$ B, DM ou R.*

Démonstration. La condition de complète réducibilité devient vide puisque le seul $*$-parabolique qui contient Γ est H qui est aussi un $*$-Lévi. $\square$

Proposition 4.5. *Si le morphisme $\Gamma \to \pi_0(H)$ est surjectif alors Γ est H-cr au sens de Richardson ssi il l'est au sens de Borel ssi il l'est au sens de Digne et Michel.*

Démonstration. Comme $\Gamma \to \pi_0(H)$ est surjectif, tout R-parabolique(R-Lévi) qui contient Γ est un B-parabolique (B-Lévi) et c'est en particulier un DM-parabolique (DM-Lévi). $\square$

Proposition 4.6. *Soit $* =$ Richardson ou Borel, soit P un $*$-parabolique minimal qui contient Γ, L un $*$-Lévi de P et $c : P \to L$ la projection sur L, alors $\overline{c(\Gamma)} \subset L$ est L-irr au sens de $*$.*

Démonstration. Supposons que $\overline{c(\Gamma)}$ n'est pas L-irr au sens de $*$, soit $Q \subset L$ un $*$-parabolique minimal de L, alors par le lemme 2.11, $QR_u(P)$ est un $*$-parabolique qui contient $c^{-1}(\overline{c(\Gamma)}) = \Gamma$ car c est surjective, et donc par minimalité de $P, P = QR_u(P)$ donc $R_u(Q) = e$ et $L = c(P) = c(QR_u(P)) = c(Q)$ donc $Q = L$ et le seul $*$-parabolique qui contient $\overline{c(\Gamma)}$ est L ce qui montre que $\overline{c(\Gamma)}$ est L-irr au sens de $*$. $\square$

Proposition 4.7. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i). *Il existe un R-Lévi L minimal contenant Γ tel que Γ soit L-irr au sens de Richardson.*
- (ii). *Pour tout R-Lévi minimal contenant Γ, Γ est L-irr au sens de Richardson.*

Démonstration. Le (ii) implique clairement le (i). Soit L un R-Lévi minimal qui contient Γ tel que Γ soit L-irr au sens de Richardson. Soit L' un R-Lévi minimal qui contient Γ, par 4.2, Γ est H-cr au sens de Richardson. Soit P' un R-parabolique tel que (P', L') soit une paire de Lévi, alors $\Gamma \subset P'$. Si P' est un R-parabolique minimal qui contient Γ alors par 4.6, Γ est L'-cr.

Montrons alors que P' est minimal parmi les R-paraboliques qui contiennent Γ, sinon il existe $P'' \subsetneq P'$, par 2.11, il existe $\tilde{P}$ un R-parabolique de L' tel que $P'' = \tilde{P}R_u(P')$. Notons $c : P' \to L'$ la projection alors $c(P'') = \tilde{P}$, comme $\Gamma \subset L' \cap P''$ et c est l'identité sur L', on a $\Gamma \subset \tilde{P}$ par 4.2, Γ est L'-cr, donc il existe $\tilde{L}$ un R-Lévi de $\tilde{P}$ (dans L') tel que $\Gamma \subset \tilde{L}$. Soit $(L'')^0$ un Lévi de $(P'')^0$ (dans H^0) tel que $(L'')^0 \subset (L')^0$ et $L'' = \mathrm{N}_{P''}((L'')^0)$, alors L'' est un R-Lévi de P'' et on a les inclusions suivantes :

$$\Gamma \subset \tilde{L} \subset L'' \subsetneq L'$$

La dernière inclusion étant stricte car $P'' \subsetneq P'$ ce qui contredit la minimalité de L'. $\square$

4.2 H-Forte réducivité

Définition 4.8. Soit T un tore maximal de H^Γ. Alors Γ est fortement H-réductif au sens de $*$ si Γ est $\mathrm{Z}_H(T)$-irr au sens de $*$ (remplacer $*$ par Richardson, Borel ou Digne et Michel).

Théorème 4.9 ([BMR05])**.** *On a Γ est fortement H-réductif au sens de Richardson ssi Γ est H-cr au sens de Richardson.*

4.3 Pseudoreprésentations

Définition 4.10. Soit Γ un groupe abstrait et H un groupe réductif, une pseudoreprésentation de Γ dans H est un morphisme de groupes $\rho : \Gamma \to H(k)$.

Définition 4.11. Soit ρ une pseudoreprésentation, on dit que ρ est H-cr ou H-irr au sens de $*$ si $\overline{\rho(\Gamma)}$ l'est.

Définition 4.12. Soit $E \subset k$ un sous corps de k, tel que k soit une clôture algébrique de E et H soit défini sur E, une pseudoreprésentation à valeur dans E est un morphisme $\rho : \Gamma \to H(E)$.

On dit que ρ est absolument H-cr ou absolument H-irr au sens de $*$ si le morphisme induit $\Gamma \to H_k(k)$ l'est.

Définition 4.13. Soit ρ une pseudoreprésentation, qui n'est pas H-cr au sens de $*$ (pour $* =$ Richardson ou Borel), soit P un $*$-parabolique minimal qui contient $\rho(\Gamma)$ et L un $*$-Lévi de P de projection c, alors $c \circ \rho$ est un morphisme L-irr au sens de $*$ par 4.6 et par 4.2, $c \circ \rho$ est H-cr au sens de $*$. On appelle une telle construction semisimplification au sens de $*$ de ρ et on la note ρ^{ss}. On verra dans la section 6 que les semisimplification de ρ au sens de Richardson sont toutes conjuguées par $H^0(k)$.

4.4 Caractérisation GIT

Dans cette section on remontre un théorème de Richardson qui donne un critère GIT pour qu'un sous groupe $\Gamma \subset H$ soit complètement réductif. On fixe donc k un corps algébriquement clos et H un groupe réductif (a priori non connexe) et $n > 0$, on considère l'action par conjugaison simultanée de H^0 sur H^n.

Notation. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H^n(k)$, on note $A(x) = \overline{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$, l'adhérence du sous groupe de H généré par $x_1, \ldots, x_n$.

Théorème 4.14 ([Ric88]). *Soit $x \in H^n(k)$, l'orbite de x est fermée dans H^n si et seulement si $A(x)$ est fortement H-réductif au sens de Richardson.*

Notation. Un n-uplet $x \in H^n(k)$ ayant une orbite fermée sera appelé semisimple.

On reprend maintenant la preuve de [Ric88] pour l'étendre au cas ou H est non connexe.

Lemme 4.15 ([Ric82], Theorem C). *Soit H un groupe réductif connexe, X un schéma lisse, intègre et affine sur lequel H agit et S un tore de H . Soit $x \in X^S(k)$, alors la H-orbite de x est fermée dans X si et seulement si la $\mathrm{Z}_H(S)$-orbite de x est fermée dans X^S.*

Lemme 4.16 ([Ric88], Lemme 16.6). *Soit H réductif connexe et X un schéma lisse intègre et affine sur lequel H agit , $x \in X(k)$ et S un tore maximal du stabilisateur H_x. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i). La H-orbite de x est fermée.

(ii). Le point x est stable pour l'action de $\mathrm{Z}_H(S)$ sur X^S.

Lemme 4.17. *Soit $x \in H^n(k)$ alors x est un point stable de H^n si et seulement si $A(x)$ est H-irréductible au sens de Richardson.*

Démonstration. Supposons d'abord que $A(x)$ soit H-irréductible. Si l'orbite de x n'est pas fermée alors par 3.10 il existe $\lambda \in \mathrm{Y}(H^0)$ non central tel que $y = c_\lambda(x)$ existe et l'orbite de y soit la seule orbite fermée de l'adhérence de l'orbite de x. Alors $A(x) \subset P_\lambda \subsetneq H$ ce qui contredit l'hypothèse d'irréductibilité et l'orbite de x est fermée.

Par 3.18, $\mathrm{Z}_{H^0}(x)$ est géométriquement réductif, soit S un tore maximal de $\mathrm{Z}_{H^0}(x)$ alors par 3.22, $S \subset \mathrm{Z}_{H^0}(x)_{\mathrm{red}}$. Si $S \neq \mathrm{Z}(H^0)^0_{\mathrm{red}}$ alors il existe $\lambda \in \mathrm{Y}(S), \lambda \notin \mathrm{Y}(\mathrm{Z}(H^0))$. Alors on a $A(x) \subset L_\lambda \subset P_\lambda$ ce qui contredit l'irréductibilité. Donc $S = \mathrm{Z}(H^0)(x)^0_{\mathrm{red}}$ et comme $\mathrm{Z}_{H^0}(y)_{\mathrm{red}}$ est réductif par 3.21, $(\mathrm{Z}_{H^0}(y)_{\mathrm{red}})^0 = \mathrm{Z}(H^0)^0$ et x est un point stable.

Réciproquement supposons x soit un point H^0-stable et par l'absurde supposons que $A(x) \subset P_\lambda$ ou λ est un cocaractère non central de H^0. Comme $A(x) \subset P_\lambda$, la limite $y = c_\lambda(x)$ existe et $\lambda \in \mathrm{Y}((H^0)_y)$. Alors comme $\mathrm{Z}(H^0) \subset \mathrm{Z}_{H^0}(y)$ et $\lambda \notin \mathrm{Y}(\mathrm{Z}(H^0))$ on a $\dim \mathrm{Z}_{H^0}(y) > \dim Z(H^0)$ et y n'est pas un point stable car $\mathrm{Z}_{H^0}(y)/\,\mathrm{Z}(H^0)$ n'est pas fini. Pour revenir à x deux cas sont possibles :

(i). Ou bien y est dans l'orbite de x et alors x n'est pas un point stable.

(ii). Ou bien y n'est pas dans l'orbite de x et donc l'orbite de x n'est pas fermée et x n'est pas un point stable.

On obtient une contradiction ce qui termine la preuve. □

Lemme 4.18. *Soit H réductif et $S \subset H$ un tore de H alors $\mathrm{Z}_H(S)^0 = \mathrm{Z}_{H^0}(S)$.*
Et pour tout $n > 0$, on a $\mathrm{Z}_H(S)^n = \mathrm{Z}_{H^n}(S^n)$.

Démonstration. Dans un groupe réductif connexe tout centralisateur de tore est connexe donc $\mathrm{Z}_{H^0}(S)$ est connexe. Comme $\mathrm{Z}_{H^0}(S) \subset \mathrm{Z}_H(S)$, il est en fait dans $\mathrm{Z}_H(S)^0$. Réciproquement on a $\mathrm{Z}_H(S)^0 \subset H^0$ et comme il centralise S il est contenu dans $\mathrm{Z}_{H^0}(S)$.

Comme H^n est lisse et S^n est un tore, les deux groupes $\mathrm{Z}_H(S)^n$ et $\mathrm{Z}_{H^n}(S^n)$ sont lisses. On vérifie l'égalité au niveau des k-points. Un élément de $\mathrm{Z}_H(S)^n$ centralise S^n donc $\mathrm{Z}_H(S)^n \subset \mathrm{Z}_{H^n}(S^n)$. Réciproquement $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathrm{Z}_{H^n}(S^n)(k)$ vérifie pour tout $t_1, \ldots, t_n) \in S^n(k)$,

$$(h_1, \ldots, h_n)(t_1, \ldots, t_n)(h_1, \ldots, h_n)^{-1} = (t_1, \ldots, t_n)$$

D'où pour tout i, $h_i t_i h_i^{-1} = t_i$ donc $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Z}_H(S)^n(k)$. □

Preuve de 4.14. Soit S un tore maximal de $\mathrm{Z}_{H^0}(x)$, supposons d'abord que l'orbite de x est fermée par 4.16 la $\mathrm{Z}_{H^0}(S)$-orbite de x est stable dans $\mathrm{Z}_{H^n}(S^n)$, or par le lemme 4.18 $\mathrm{Z}_{H^0}(S) = \mathrm{Z}_H(S)^n$ et $\mathrm{Z}_{H^n}(S^n) = \mathrm{Z}_H(S)^n$ donc comme $\mathrm{Z}_{H^0}(S)$ est réductif connexe par 4.17, $A(x)$ est H^S-irréductible et $A(x)$ est donc fortement H-réductif.

Réciproquement si $A(x)$ est fortement H-réductif alors $A(x)$ est $\mathrm{Z}_H(S)$-irréductible donc par 4.17 x est un point $\mathrm{Z}_{H^0}(S)$-stable donc sa $\mathrm{Z}_{H^0}(S)$-orbite est fermée , par 4.15, la H^0-orbite de x est fermée ce qui termine la preuve. □

5 FFS-algèbres et pseudocaratères

Ces premières définitions sont dues à Matthew Weidner, [Wei18].

Notation. On note FI la catégorie des ensembles finis, pour tout $I \in \mathrm{FI}$ on note $\mathrm{FS}(I)$ le monoïdes libre généré par les éléments de I et $\mathrm{FG}(I)$ le groupe libre engendré par I.

On note FFS la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et les morphismes ensembles de morphismes sont les suivants $\mathrm{Hom}_{\mathrm{FFS}}(I, J) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{FS}(I), \mathrm{FS}(J))$ et de même on note FFG la catégorie dont les objets sont sont les ensembles finis et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{FFG}}(I, J) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gp}}(\mathrm{FG}(I), \mathrm{FG}(J))$.

Remarque 5.1. On pourrait prendre pour FFS la catégorie des monoïdes libres finiements générés mais cela poserait des problèmes dans les définitions de pseudocharactères on l'on devrait faire des identifications non canonique.

Remarque 5.2. Soit M un monoïde, et $I \in \mathrm{FI}$ alors $S^I = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(I, S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{FS}(I), S)$.

Lemme 5.3. *La catégorie* FFS *est générée par les morphismes du type :*

(*i*). $\mathrm{FS}(I) \to \mathrm{FS}(J)$ *induit par une application ensembliste* $I \to J$.

(*ii*). *Les morphismes de la forme* $\mathrm{FS}\{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathrm{FS}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}, x_i \mapsto y_i$ *si* $i < n, x_n \mapsto y_n y_{n+1}$.

Démonstration. Soit $\mathrm{FS}(I)$ et $\mathrm{FS}(J)$ deux objets de FFS, notons $I = \{x_s, s \in I\}$ et $J = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Soit $\phi : \mathrm{FS}(I) \to \mathrm{FS}(J)$ un morphisme de monoïdes, alors ϕ est déterminé par $\phi(x_s) = y^s_{j_1} \ldots y^s_{j_{i_s}}$.

Notons $K = \{z^s_r, s \in I, 1 \leq r \leq i_s\}$, un ensemble fini ou tous les z^s_r sont deux à deux distincts. Notons de plus $\psi_1 : \mathrm{FS}(K) \to \mathrm{FS}(J), z^s_r \mapsto y^s_{j_r}$ et $\psi_2 : \mathrm{FS}(I) \to \mathrm{FS}(K), x_s \mapsto z^s_1 \ldots z^s_{j_s}$. Alors ψ_1 est un morphisme de type 1 et ψ_2 est une composée de morphismes de type 2. □

Le lemme suivant se montre de la même manière.

Lemme 5.4. *La catégorie* FFG *est générée par les morphismes du type :*

(*i*). $\mathrm{FG}(I) \to \mathrm{FG}(J)$ *induit par une application ensembliste* $I \to J$.

(*ii*). *Les morphismes de la forme* $\mathrm{FG}\{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathrm{FG}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}, x_i \mapsto y_i$ *si* $i < n, x_n \mapsto y_n y_{n+1}$.

(*iii*). *Les morphismes du type* $\mathrm{FG}\{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathrm{FG}\{y_1, \ldots, y_n\}, x_i \mapsto y_i$ *si* $i < n, x_n \mapsto y_n^{-1}$.

Définition 5.5. Soit k un anneau commutatif, une k-FFS-algèbre (resp. FFG-algèbre) est un foncteur $F : \mathrm{FFS} \to k\text{-Alg}$ (resp. $\mathrm{FFG} \to k\text{-Alg}$). Un morphisme de k-FFS-algèbres (resp. FFG-algèbre) est une transformation naturelle de foncteurs. La catégorie des k-FFS-algèbres (resp. FFG-algèbre) n'est alors que la catégorie $\mathrm{Fonct}(\mathrm{FFS}, k\text{-Alg})$ (resp. $\mathrm{Fonct}(\mathrm{FFG}, k\text{-Alg})$). Lorsque le contexte est cair on supprimera le k des notations et on parlera de FFS-algèbres

Définition 5.6. Soit A une FFS-algèbre (resp. FFG-algèbre), un A-module est un foncteur M : FFS $\to$ Ab (resp. M : FFG $\to$ Ab) tel que pour tout $S \in$ FFS(FFG), $M(S)$ est un $A(S)$ module et pour toute application $S \to S'$, l'application $M(S) \to M(S')$ commute aux morphismes de structure.

Définition 5.7. Soit H un k-schéma en groupe pour k un anneau et $\phi : I \to J$ un morphisme de FFS (resp. FFG) alors on a un morphisme induit $H^J \to H^I$ où H^I est le produit indexé par I de $\#I$ copies de H. Alors $I \to k[H^I]$ est une FFS-algèbre et même une FFG-algèbre.

Soit S un k-schéma en groupe agissant sur H par morphismes de groupes algébriques, et $\phi : I \to J$ un morphisme dans FFS (resp. FFG), alors ϕ induit un morphisme d'algèbres $k[H^I]^S \to k[H^J]^S$ où $k[H^J]^S$ est la sous algèbre de $k[H^J]$ invariante par S. Ainsi on obtient une FFS-algèbre (et même une FFG-algèbre) : $I \to k[H^I]^S$.

Définition 5.8. Soit Γ un groupe abstrait et $\phi : I \to J$ un morphisme dans FFS (resp. FFG), alors on a un morphisme induit $\Gamma^J \to \Gamma^I$ où $\Gamma^I = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(I, \Gamma) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{FS}(I), \Gamma)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gp}}(\mathrm{FG}(I), \Gamma)$. En composant avec le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\cdot, k)$ on obtient une FFS-algèbre (resp. une FFG-algèbre) : $I \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma^I, k)$.

Remarque 5.9. On remarque que cette définition est la même définition que 5.7 appliqué au groupe constant Γ.

Définition 5.10 (Pseudocaractère)**.** Soit k un anneau, H un schéma en groupe sur k et Γ un groupe abstrait, un FFS-pseudocharactère est un morphisme de FFS-algèbres $\Theta^{\cdot}$: $k[H^{\cdot}]^{H^0} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma^I, k)$. On note $\mathrm{Pcar}_k(\Gamma, H)$ l'ensemble des FFS-pseudocaractères de Γ dans H définis au dessus de k. De même on définit les FFG-pseudocaractères comme les morphismes de FFG-algèbres $k[H^{\cdot}]^{H^0} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma^I, k)$. Quand aucune confusion n'est possible on notera aussi $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ l'ensemble des pseudocaractères à valeurs dans k.

Si Γ est un groupe topologique, k est un anneau topologique et $\Theta^{\cdot}$ un pseudocaractère, on dit que $\Theta^{\cdot}$ est continu si pour tout $I \in$ FFS, Θ^I est à valeur dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\Gamma, k)$, l'ensemble des applications continues de Γ dans k. On note $\mathrm{Pcar}_k^{C^0}(\Gamma, H)$ l'ensemble des pseudocaractères continus de Γ dans H définis sur k.

Remarque 5.11. Dans toute la suite un pseudocaractère désignera un FFS-pseudocaractère.

Définition 5.12 (Trace d'une pseudoreprésentation)**.** Soit Γ un groupe abstrait, H un schéma en groupe sur un anneau k et $\rho : \Gamma \to H(k)$ une pseudoreprésentation de Γ dans H, alors on définit $\mathrm{tr}(\rho)$ le pseudocaratère suivant : soit $I \in$ FFS, $f \in k[H^I]^{H^0}$ et $\gamma \in \Gamma^I$, on pose $\mathrm{tr}(\rho)(f)(\gamma) = f(\rho(\gamma))$.

En particulier c'est même un FFG-pseudocaractère.

Démonstration. On vérifie que c'est bien un morphisme de FFS-algèbres, soit $\phi : \mathrm{FS}(I) \to \mathrm{FS}(J)$ un morphisme de type 1. Soit $f \in k[H^I]^{H^0}$, il faut vérifier que $\mathrm{tr}(\rho)(f \circ \phi) =$

$\phi(\mathrm{tr}(\rho)(f))$ comme fonctions $\Gamma^J \to k$, soit donc $\gamma \in \Gamma^J$,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\rho)(f \circ \phi)(\gamma) &= (f \circ \phi)(\rho(\gamma)) \\ &= f(\phi(\rho(\gamma))) \\ &= f(\rho(\phi(\gamma))) \\ &= \phi(\mathrm{tr}(\rho)(f))(\gamma).\end{aligned}$$

On vérifie aussi que pour les morphismes ϕ de type 2 et les morphismes de type 3 on a aussi $\mathrm{tr}(\rho)(f \circ \phi) = \phi(\mathrm{tr}(\rho)(f))$, le calcul est similaire mais utilise le fait que ρ est un morphisme de groupe. □

Proposition 5.13. *Soit ρ comme dans la définition précédente, alors $\mathrm{tr}(\rho)$ ne dépend de ρ qu'à conjugaison par $H^0(k)$ près.*

Démonstration. Soit $x \in H^0(k), \gamma \in \Gamma^I$ et $f \in k[H^I]^{H^0}$, alors $\mathrm{tr}(x\rho x^{-1})(f)(\gamma) = f(x\rho(\gamma)x^{-1}) = f(\rho(\gamma))$ car f est invariante par $H^0(k)$-conjugaison. □

Proposition 5.14. *Soit k un corps algébriquement clos et soit $\rho : \Gamma \to H(k)$ une pseudoreprésentation de ρ et ρ^{ss} une semisimplification au sens de Richardson de ρ alors $\mathrm{tr}(\rho) = \mathrm{tr}(\rho^{ss})$.*

Démonstration. Par définition, ρ^{ss} est obtenue de la manière suivante, soit $P = P_\lambda$ un R-parabolique minimal qui contient $\rho(\Gamma)$ alors $\rho^{ss} = c_\lambda \circ \rho$. Fixons $I, f \in k[H^I]^{H^0}$ et $\gamma \in \Gamma^I$, cela définit un morphisme de $g : \mathbb{G}_m \to \mathbb{A}^1$ définit au niveau des k points par $\mu(t) = f(\lambda(t)\rho(\gamma)\lambda(t^{-1})) = f(\rho(\gamma))$ car f est invariante par $H^0(k)$.

Alors g admet une extension $\tilde{g} : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ de valeur constante $f(x)$. De plus comme g se factorise par P^I et $\rho(\gamma) \in P^I(k), \tilde{g}$ se factorise par P^I et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d, hook] & P^I \arrow[r, "f"] & \mathbb{A}^1 \\ \mathbb{A}^1 \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \tag{13}$$

En évaluant en 0, on obtient $f(\rho(\gamma)) = f(\rho^{ss}(\gamma))$. □

Remarque 5.15. On note la $\mathbb{N}$ la sous-catégorie pleine de FI dont les objets sont $\{[n], n \in \mathbb{N}\}$ où $[n] = \{0, \ldots, n\}$. Alors l'inclusion $\mathbb{N} \subset$ FI est une équivalence de catégories. De même si on note $\mathbb{N}_{\mathrm{Mon}}$ la sous catégorie pleine de FFS dont les objets sont $\{\mathrm{FS}([n]), n \in \mathbb{N}\}$, l'inclusion $\mathbb{N}_{\mathrm{Mon}} \subset$ FFS est une équivalence de catégories.

En conséquence, les FFS-algèbres, pseudocaractères, ..., sont entièrement déterminés sur leurs valeurs sur $\mathbb{N}_{\mathrm{Mon}}$, si $A^{\cdot}$ est une FFS-algèbre ou $\Theta^{\cdot}$ un pseudocaractère, on notera A^n et $\Theta^n, A^{[n]}$ et $\Theta^{[n]}$ respectivement.

Théorème 5.16. *Soit k un corps algébriquement clos, Γ un groupe abstrait et H un groupe réductif sur k, alors l'oubli depuis les* FFG*-pseudocaractères vers les pseudocaractères est une bijection.*

Démonstration. Le preuve utilise le théorème de Lafforgue de la prochaine section, mais dans toute la prochaine section, on utilisera pas la notion de FFG-pseudocaractère.

Soit Θ un pseudocaractère de Γ dans H, alors il existe un morphisme $\rho : \Gamma \to H(k)$ tel que $\Theta = \mathrm{tr}(\rho)$, par conséquent Θ est aussi un FFG-pseudocaractère via la preuve 5. $\square$

5.1 Le cas de GL_n

On souhaiterait que ces nouvelles notions de pseudoreprésentations ne complexifient pas la notion de représentation usuelle, ie quand $H = \mathrm{GL}_n$ et en particulier sur un corps de caractéristique 0 le fait que les représentations sont uniquement déterminées par leur trace. Soit k un corps et $n > 0$.

Définition 5.17. Soit A une FFS-aglèbre (resp. FFG-aglèbre), et $\Sigma \subset \cup_n A^n$ un sous ensemble, l'algèbre engendré par Σ est la plus petite FFS (resp FFG) algèbre qui contient Σ, si cette algèbre est A alors on dit que Σ engendre A.

Théorème 5.18. *Si* $\mathrm{car}(k) = 0$*, la* FFG-*algèbre* $k[GL_n^{\cdot}]^{GL_n}$ *est générée par* $\mathrm{tr} \in k[\mathrm{GL}_n]^{\mathrm{GL}_n}$.

C'est une conséquence du théorème suivant :

Notation. On note $M(n)$ l'algèbre des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans k, pour tout $m \in \mathbb{N}$ le groupe GL_n agit par conjugaison simultanée sur $M(n)^m$. On note de plus E la représentation standard de GL_n.

Théorème 5.19 ([Don92], Theorem 1)**.** *L'algèbre des invariants* $k[M(n)^m]^{\mathrm{GL}_n}$ *est générée par les fonctions* $x_1, \dots, x_m \mapsto \mathrm{tr}(x_1 \dots x_m | \bigwedge^r E)$.

Lemme 5.20. *L'application* $M(n) \to k, A \mapsto \mathrm{tr}(A| \bigwedge^r E)$ *coïncide avec l'application* $\sigma_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *où* $\sigma_r(x_1, \dots, x_r)$ *est le r-ième polynôme symétrique élémentaire en les* x_i *et les* λ_i *sont les valeurs propres (avec multiplicité) de* A.

Démonstration. Comme les deux fonctions sont invariantes par conjugaison on peut supposer que A est diagonale $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ soit e_i la base canonique de E alors les $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ pour $i_1 < \dots < i_r$ forment une base de $\bigwedge^r E$, et $A(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ ce qui prouve le lemme. $\square$

Lemme 5.21. *Supposons que* $\mathrm{car}(k) = 0$*, alors l'algèbre* $k[M(n)]^{\mathrm{GL}_n}$ *est engendrée par les fonctions* $A \mapsto \mathrm{tr}(A^r)$ *pour* $r \in \mathbb{N}$.

Démonstration. C'est une conséquence des relations de Newton. $\square$

Lemme 5.22. *Si* $\mathrm{car}(k) = 0$*, la fonction* $\mathrm{GL}_n \to k, A \mapsto \frac{1}{\det(A)}$ *est engendrée par les fonctions* $A \mapsto \mathrm{tr}(A^i)$ *pour* $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration du théorème 5.18. On note det la fonction $M(n)^m \to k, (A_1, \dots, A_m) \mapsto \det(A_1 \dots A_m)$. Alors det est invariante par GL_n (pour l'action de conjugaison simultanée) et $k[GL_n^m] = k[M(n)^m]_{\det}$ la localisation en det, alors $k[GL_n^m]^{\mathrm{GL}_n} = (k[M(n)^m]^{\mathrm{GL}_n})_{\det}$.

Notons R la sous-FFG-algèbre de $k[\mathrm{GL}_n^{\cdot}]^{\mathrm{GL}_n}$ engendré par tr, soit $f \in k[\mathrm{GL}_n^m]^{\mathrm{GL}_n}$ alors il existe $r > 0$ tel que $g = \det^r f \in k[M(n)^m]^{\mathrm{GL}_n}$, par le théorème 5.19, g est dans la FFS-algèbre engendrée par les $x_1, \ldots, x_m \mapsto \mathrm{tr}(x_1 \ldots x_m | \bigwedge^r E)$ et par le lemme 5.21, ces fonctions sont dans R. Ainsi $g \in R$ donc $f = \frac{g}{\det^r}$ et par le lemme 5.22, $\frac{1}{\det}$ est dans R. $\square$

6 Équivalence entre pseudocaratères et pseudoreprésentations

6.1 Théorème de Lafforgue

Soit k un corps algébriquement clos. On montre dans cette sous section le théorème de Lafforgue 6.2, initialement montré dans [Laf12] dans le cas $\mathrm{car}(k) = 0$ et H réductif non connexe, puis étendu dans [BHKT16] au cas H connexe et $\mathrm{car}(k)$ quelconque. On montre ici le cas H non connexe et $\mathrm{car}(k)$ quelconque.

Définition 6.1. Soit Γ un groupe abstrait et H un groupe réductif (sans hypothèse de connexité) défini sur k. On note $\mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma, H)$ l'ensemble des classes de $H^0(k)$-conjugaisons de morphismes $\rho : \Gamma \to H(k)$ qui sont H-cr au sens de Richardson.

Théorème 6.2 (Théorème de Lafforgue)**.** *Soit Γ et H comme précédemment, on a un isomorphisme fonctoriel en Γ et H :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma, H) &\tilde{\to} \mathrm{Pcar}_k(\Gamma, H) \\ \rho &\mapsto \mathrm{tr}(\rho). \end{aligned}$$

La preuve de ce théorème est essentiellement une copie de la preuve de [BHKT16] adaptée pour traiter le cas ou H est non connexe.

Démonstration. Etape 1 : Construction d'un morphisme à partir d'un pseudocaractère.

Soit $\Theta^{\cdot} : k[H^{\cdot}]^{H^0} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma^{\cdot}, k)$ un pseudocaractère de Γ dans H. Soit $n \geq 1$ par 4.14 l'application $H^n(k) \to (H^n//H^0)(k)$ induit une bijection entre

$$\{\text{classes de } H^0(k) \text{ conjugaison de n-uplets semisimples } g = (g_1, \dots, g_n) \in H^n(k)\} \tag{14}$$
$$\tilde{\longleftrightarrow} (H^n//H^0)(k). \tag{15}$$

Soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma^n$ alors γ determine un k-point de $(H^n//H^0)$. En effet la composée

$$k[H^n]^{H^0} \xrightarrow{\Theta^n} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma^n, k) \xrightarrow{\mathrm{eval}_\gamma} k$$

est un morphisme d'algèbres et elle correspond donc à un morphisme $\mathrm{Spec}(k) \xrightarrow{\xi(\gamma)} H^n//H^0$, donc à un élément de $\xi(\gamma) \in (H^n//H^0)(k)$.

Lemme 6.3. *Les $\xi(\gamma)$ sont fonctoriels en le sens suivant, soit $\phi : [n] \to [m]$ un morphisme dans* FFS *alors ϕ induit un morphisme $k[H^n]^{H^0} \to k[H^m]^{H^0}$ qui correspond à un morphisme $\tilde{\phi} : H^m//H^0 \to H^n//H^0$. Supposons que γ soit un m-uplet, alors il détermine un k-point $\xi(\gamma) \in H^m//H^0(k)$, notons de plus $\phi : \Gamma^m \to H^n$ le morphisme induit par ϕ, alors $\tilde{\phi}(\xi(\gamma)) = \xi(\phi(\gamma)) \in (H^n//H^0)(k)$.*

Démonstration. Comme Θ est un morphisme de FFS-algèbres le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
k[H^n]^{H^0} \arrow[r, "\Theta^n"] \arrow[d, "\phi"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma^n, k) \arrow[r, "\mathrm{eval}_{\phi(\gamma)}"] \arrow[d, "\phi"] & k \arrow[d, "\mathrm{id}_k"] \\
k[H^m]^{H^0} \arrow[r, "\Theta^m"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma^m, k) \arrow[r, "\mathrm{eval}_{\gamma}"'] & k
\end{tikzcd}$$

Le k-point $\xi(\gamma)$ correspond à la composée des la ligne du bas et le k-point $\xi(\phi(\gamma))$ correspond à la composée de la ligne du haut. Comme le diagramme commute on a bien $\tilde{\phi}(\xi(\gamma)) = \xi(\phi(\gamma))$. □

Dans la suite de la preuve on notera encore $\xi(\gamma)$ la classe de conjugaison de n-uplets semisimples de $H^n(k)$ associée par (14). Soit $(g_1, \dots, g_n) \in \xi(\gamma)$, on notera $n(\gamma) = \min(\dim(P))$ ou P parcourt l'ensemble des R-paraboliques de H qui contiennent $A(g_1, \dots, g_n)$. Comme H est lui même un R-parabolique qui contient $A(g_1, \dots, g_n), n(\gamma)$ est bien définit et on a $n(\gamma) \leq \dim(H)$.

Posons de plus $N = \sup_{n \geq 1, \gamma \in \Gamma^n} n(\gamma)$ et pour $(g_1, \dots, g_n) \in H^n(k), \mathrm{Z}(g_1, \dots, g_n) = \mathrm{Z}_{H^0}(A(g_1, \dots, g_n))$. Soit $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Gamma^n$ et $g \in \xi(\delta)$, on dira que δ est un n-uplet minimal s'il vérifie les conditions suivantes :

- (i). $n(\delta) = N$.
- (ii). Pour tout $n' \geq 1$ et n'-uplet $\delta' \in \Gamma^{n'}$ satisfaisant 1 et $h \in \xi(\delta')$, on a $\dim \mathrm{Z}(h) \geq \dim \mathrm{Z}(g)$.
- (iii). Pour tout $n' \geq 1$ et n'-uplet $\delta' \in \Gamma^{n'}$ satisfaisant (i) et (ii) et $h \in \xi(\delta')$, on a $\#\pi_0(\mathrm{Z}(h)) \geq \#\pi_0(\mathrm{Z}(g))$.

Lemme 6.4. *Soit $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Gamma^n$ et $g = (g_1, \dots, g_n) \in \xi(\delta)$, tels que δ soit un n-uplet minimal. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe un unique $g \in H(k)$ tel que $(g_1, \dots, g_n, g)$ appartienne à $\xi(\delta_1, \dots, \delta_n, \gamma)$. On a de plus $\mathrm{Z}(g_1, \dots, g_n) = \mathrm{Z}(g_1, \dots, g_n, g)$ et $(\delta_1, \dots, \delta_n, \gamma)$ est un $(n+1)$-uplet minimal.*

Démonstration. Existence de g. Soit $(h_1, \dots, h_n, h) \in \xi(\delta_1, \dots, \delta_n, \gamma)$. On montre que $(h_1, \dots, h_n)$ a une orbite fermée dans H^n ce qui est équivalent par le théorème 4.14 au fait que $A(h_1, \dots, h_n)$ soit H-cr (au sens de Richardson).

Soit P un R-parabolique de dimension $n(\delta_1, \dots, \delta_n, \gamma)$, qui est minimal parmi ceux qui contiennent $A(h_1, \dots, h_n, h)$. Comme $(h_1, \dots, h_n, h)$ a une orbite fermée dans H^{n+1}, par 4.14, $A(h_1, \dots, h_n, h)$ est H-cr et est donc contenu dans un R-Lévi L_P de P. En particulier $A(h_1, \dots, h_n) \subset L_P$, soit $Q \subset L_P$ un R-parabolique de L_P minimal (sans hypothèse sur la dimension de Q) contenant $A(h_1, \dots, h_n)$. Soit L_Q un R-Lévi de Q et c le morphisme $Q \to L_Q$, notons $h'_i = c(h_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ les images dans L_Q des h_i, alors par la propriété 4.6, $A(h'_1, \dots, h'_n) \subset L_Q$ est L_Q-irréductible (au sens de Richardson) et donc par 4.2 il est H-cr.

De plus $(h'_1, \dots, h'_n)$ est au dessus de $\xi(\delta)$, en effet $(h'_1, \dots, h'_n) = c_\lambda(h_1, \dots, h_n)$ où $\lambda \in \mathrm{Y}(L_Q)$ tel que $L_Q = L_\lambda$ et $Q = P_\lambda$ dans L_P. Or pour tout $t \in \mathbb{G}_m(k)$, $\lambda(t)(h_1, \dots, h_n)\lambda(t^{-1})$ est au dessus de $\xi(\delta)$ et donc le morphisme $\mathbb{G}_m \to H^n//H^0$ est constant, il admet donc une unique extension à $\mathbb{A}^1$ et l'image de 0 est l'image de $c_\lambda(h'_1, \dots, h'_n)$. Ainsi $(h'_1, \dots, h'_n) \in \xi(\delta)$.

Alors Q contient un représentant de $\xi(\delta)$, il en est de même pour $QR_u(P)$ qui est un R-parabolique de H par la propriété 2.11, donc

$$n(\delta) = N \leq \dim QR_u(P) \leq \dim P = n(\delta_1, \ldots, \delta_n, \gamma) \leq N.$$

Ainsi $QR_u(P) \subset P$ sont des R-paraboliques de H de dimension N, on en déduit que $(QR_u(P))^0 = P^0$ et donc $R_u(QR_u(P)) = R_u(P)$ et par 2.11 $R_u(Q) = \{e\}$ donc Q est un groupe réductif (non connexe) et en particulier un R-Lévi de L_P. L'application c définie précédemment est alors l'identité sur $Q = L_Q$ et donc $h_i = h'_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $(h_1, \ldots, h_n)$ a une orbite fermée dans H^n.

Par le lemme 6.3, $(h_1, \ldots, h_n)$ est au dessus du point $\xi(\delta) \in H^n//H^0(k)$ et donc comme son orbite est fermée $(h_1, \ldots, h_n) \in \xi(\delta)$ (au sens classe de conjugaison). Ainsi $(g_1, \ldots, g_n) = x(h_1, \ldots, h_n)x^{-1}$ pour un $x \in H^0(k)$, on pose alors $g = xhx^{-1}$, ce qui montre l'existence.

On obtient en particulier que $(\delta_1, \ldots, \delta_n, \gamma)$ vérifie (i).

Unicité de g. Supposons qu'il existe $g' \in H(k)$ tel que $(g_1, \ldots, g_n, g')$ appartienne à $\xi(\delta_1, \ldots, \delta_n, \gamma)$, alors en particulier il existe $y \in H^0(k)$ tel que $(g_1, \ldots, g_n, g') = y((g_1, \ldots, g_n, g)y^{-1}$. Alors on a $y \in \mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n)$, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n) = \mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n, g)$.

On a $\mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n, g) \subset \mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n)$, comme $(g_1, \ldots, g_n, g)$ vérifie (i), par la condition (ii), $\dim \mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n) \leq \dim \mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n, g)$ et les dimensions coincident.

Montrons alors que $\mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n, g)^0(k) = \mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n)^0(k)$. Comme on ne regarde que les k-points, il suffit de montrer l'égalité $\mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n)^0_{\mathrm{red}} = \mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n, g)^0_{\mathrm{red}}$. Ce sont deux k-schémas réduits et irréductibles car connexes car $\mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n, g)^0$ et $\mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n)^0$ sont des groupes algébriques par le théorème 1.4. Le lemme suivant permet de conclure.

Lemme 6.5. *Soit $i : X \to Y$ une immersion fermée entre deux schémas affines , intègres et de type fini sur k de même dimension. Alors i est un isomorphisme.*

Démonstration. Notons $X = \mathrm{Spec}(A/I), Y = \mathrm{Spec}(A)$ où A est une k-algèbre de type finie et $I \subset A$ un idéal. Le morphisme i correspond à la projection $A \to A/I$, notons de plus $I = (f_1, \ldots, f_r)$ une présentation de I et supposons $f_1 \neq 0$, alors comme A est intègre et par le Hauptidealsatz, $\dim(A/(f_1)) = \dim(A) - 1$, donc $\dim(A/I) < \dim(A)$ ce qui contredit l'hypothèse $\dim(A) = \dim(A/I)$ et donc $f_1 = 0$. On a donc $I = (0)$ et $X = Y$. □

Comme pour tout groupe algébrique $K, \pi_0(K) = \pi_0(K_{\mathrm{red}})$ le morphisme induit $\pi_0(\mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n, g)) \to \pi_0(\mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n))$ est injectif et par la condition (iii) il est surjectif. Alors $\mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n) = \mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_n, g)$ ce qui prouve l'unicité de g.

On observe de plus que $(\delta_1, \ldots, \delta_n, \gamma)$ vérifie aussi (ii) et (iii), ce qui finit de prouver le lemme. □

Fixons un n-uplet minimal $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \Gamma^n$ et $(g_1, \ldots, g_n) \in \xi(\delta)$, alors l'application $\rho : \gamma \in \Gamma \mapsto g \in H(k)$ est une application bien définie.

Lemme 6.6. *L'application ρ ainsi définie est un morphisme de groupes.*

Démonstration. Soit $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ par le lemme il existe un unique $g \in H(k)$ tel que $(g_1, \dots, g_n, g) \in \xi(\delta_1, \dots, \delta_n, \gamma)$ et $(\delta_1, \dots, \delta_n, \gamma)$ est un $(n+1)$-uplet minimal, donc il existe un unique $g' \in H(k)$ tel que $(g_1, \dots, g_n, g, g') \in \xi(\delta_1, \dots, \delta_n, \gamma, \gamma')$. En particulier $\rho(\gamma) = g$, on va montrer que $(g_1, \dots, g_n, g')$ et $(g_1, \dots, g_n, gg')$ ont des orbites fermées ce qui montrera que $\rho(\gamma') = g', \rho(\gamma\gamma') = gg'$ et donc $\rho(\gamma)\rho(\gamma') = \rho(\gamma\gamma')$.

Soit P un R-parabolique de dimension N minimal parmi ceux qui contiennent $A(g_1, \dots, g_n, g, g')$, soit L_P un R-Lévi de P contenant $A(g_1, \dots, g_n, g, g')$ et Q un R-parabolique minimal de L_P contenant $A(g_1, \dots, g_n, g')$ (resp. $A(g_1, \dots, g_n, gg')$), comme précédemment, $QR_u(P)$ est un R-parabolique de H contenant $A(g_1, \dots, g_n)$ et est donc de dimension N et $R_u(QR_u(P)) = R_u(P)$ donc $R_u(Q) = \{e\}$. Alors Q est un R-Lévi de L_P contenant $A(g_1, \dots, g_n, g')$ (resp. $A(g_1, \dots, g_n, gg')$) et tel que $A(g_1, \dots, g_n, g')$ (resp. $A(g_1, \dots, g_n, gg')$ est Q-irréductible donc par 4.2 $A(g_1, \dots, g_n, g')$ (resp $A(g_1, \dots, g_n, gg')$) est H-cr ce qui conclut la preuve. □

Remarque 6.7. Dans ce lemme on utilise le fait que la multiplication de deux éléments provient d'un morphisme de FFS et c'est la seule occurrence de ceci dans toute la preuve.

Lemme 6.8. *Soit ρ le morphisme défini précédemment, alors* $\mathrm{tr}(\rho) = \Theta$.

Démonstration. Soit $f \in k[H^r]^{H^0}$, et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma^r$, il suffit de montrer que $\Theta^r(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_r) = f(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_r))$. On a d'une part $f(\xi(\gamma)) = \Theta^r(f)(\gamma)$ sous l'identification $\mathbb{A}^1(k) \simeq k$. D'autre part notons $\pi : H^r \to H^r//H^0$ la projection, on a $\mathrm{tr}(f)(\gamma) = f(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_r))$. Comme f est invariante sous $H^0(k)$, on a $f(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_r)) = f(\pi(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_r)))$.

L'argument du lemme 6.6 montre que les uplets δ et $(g_1, \dots, g_n) \in \xi(\delta)$ et $(\delta_1, \dots, \delta_n, \gamma_1)$ et $(g_1, \dots, g_n, \rho(\gamma_1))$ engendrent le même morphisme ρ. On a alors par un itération de l'argument que $(g_1, \dots, g_n, \rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_r)) \in \xi(\delta, \gamma)$.

L'inclusion $\{n+1, \dots, n+r\} \hookrightarrow \{1, \dots, n+r\}$ induit un morphisme $f \in k[H^r]^{H^0} \mapsto \tilde{f} \in k[H^{n+r}]^{H^0}$ où $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) = f(y_1, \dots, y_r)$ (vue comme fonction sur H^{n+r}). Et par le lemme 6.3 le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_r)) \in H^r(k) \arrow[r] & \xi_\gamma \in (H^r//H^0)(k) \arrow[dr, "f"] & \\
& & \mathbb{A}^1(k) \\
(g_1, \dots, g_n, \rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_r)) \in H^{n+r}(k) \arrow[uu] \arrow[r] & \xi_{\delta,\gamma} \in (H^{n+r}//H^0)(k) \arrow[uu] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ce qui montre que

$$\begin{aligned}
\Theta^r(f)(\gamma) &= f(\xi(\gamma)) \\
&= \tilde{f}(\xi(\delta, \gamma)) \\
&= \tilde{f}(\pi(g_1, \dots, g_n, \rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_r)) \\
&= f(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_r)) = \mathrm{tr}(f)(\gamma).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme et en particulier que $\pi(\rho(\gamma_1), \ldots, \rho(\gamma_r)) = \xi(\gamma)$. $\square$

Lemme 6.9. *Soit ρ le morphisme défini précédemment associé à $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \Gamma^n$ et $(g_1, \ldots, g_n) \in \xi(\delta)$. Alors $g_i = \rho(\delta_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. On a $\rho(\delta_i) = g_i$ ssi $(g_1, \ldots, g_n, g_i)$ a une orbite fermée ssi $A(g_1, \ldots, g_n, g_i)$ est H-cr. Or $A(g_1, \ldots, g_n, g_i) = A(g_1, \ldots, g_n)$ qui est H-cr car $(g_1, \ldots, g_n) \in \xi(\delta)$. $\square$

Lemme 6.10. *Soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \Gamma^r$ un r-uplet, alors γ peut être complété en un r'-uplet minimal.*

Démonstration. En effet soit δ le n-uplet minimal utilisé dans les preuves précédentes alors (δ, γ) est minimal. $\square$

Lemme 6.11. *Soit ρ le morphisme défini précédemment et $\phi : \Gamma \to H(k)$ un morphisme de groupes H-cr et tel que $\mathrm{tr}(\phi) = \Theta = \mathrm{tr}(\rho)$, alors ρ et ϕ sont conjugués par un élément de $H^0(k)$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\mathrm{Z}(\rho(\delta)) = \mathrm{Z}(\rho(\Gamma))$ en effet dans la démonstration du lemme 6.4 on a vu que pour tout élément $\gamma \in \Gamma$ on a $\mathrm{Z}(\rho(\delta)) = \mathrm{Z}(\rho(\delta, \gamma))$. On a nécessairement $\mathrm{Z}(\rho(\Gamma)) \subset \mathrm{Z}(\rho(\delta))$ et si $h \in \mathrm{Z}(\rho(\delta))(k)$ alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $h \in \mathrm{Z}(\rho(\delta, \gamma))$ donc $h\rho(\gamma)h^{-1} = \rho(\gamma)$ et $h \in \mathrm{Z}(\rho(\Gamma))(k)$.

Soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \Gamma^r$ un r-uplet tel que $\phi(\Gamma) \subset P$ (resp. L) un R-parabolique (resp. R-Lévi) de H si et seulement, si $\phi(\gamma_1), \ldots, \phi(\gamma_r) \in P$ (resp. L), un tel r-uplet existe par la proposition 2.15. On peut alors compléter γ en (δ, γ) un r'-uplet minimal et $(\delta, \gamma) \in P$ ou L ssi $\phi(\Gamma) \subset P$ ou L. Notons $(t_1, \ldots, t_{r'}) = \phi(\delta, \gamma)$, alors $A(t_1, \ldots, t_{r'})$ est H-cr par hypothèse et $(t_1, \ldots, t_{r'})$ a une orbite fermée. En particulier $\phi(\delta, \gamma)$ est au dessus de $\xi(\delta, \gamma)$ et $\phi(\delta, \gamma)$ est conjugué à $\rho(\delta, \gamma)$ par un élément de $x \in H^0(k)$. Comme $\mathrm{Z}(\rho(\delta)) = \mathrm{Z}(\rho(\Gamma)) = \mathrm{Z}(\rho(\gamma, \delta))$ car (δ, γ) est minimal, ρ et ϕ sont conjugués par x. $\square$

<u>Etape 2 : Fonctorialité</u>
Soit $\tau : H_1 \to H_2$ un morphisme de groupes réductifs.

Lemme 6.12. *Pour tout $n > 0, \tau$ induit un morphisme $k[H_2^n]^{H_2^0} \to k[H_1^n]^{H_1^0}$.*

Démonstration. Soit $f : H_2^n \to \mathbb{A}^1$ un élément de $k[H_2^n]^{H_2^0}$ alors $f \circ \tau : H_1^n \to A^1$ est invariant par H_1^0. Il suffit de vérifier ceci sur les k-points de H_1, soit $h \in H_1^0(k)$ et $g \in H_1^n$ alors $f(\tau(hgh^{-1})) = f(\tau(h)\tau(g)\tau(h^{-1})) = f(\tau(g))$ car $\tau(h) \in H_2^0$. $\square$

De plus ce morphisme est la factorisation de la composée suivante : $k[H_1^n]^{H_1^0} \subset k[H_1^n] \to k[H_2^n]$ où la deuxième flèche est τ^*. Ainsi le morphisme $k[H_1^n]^{H_1^0} \to k[H_2^n]^{H_2^0}$ est naturel et donc τ induit un morphisme de FFS-algèbres $k[H_1^{\cdot}]^{H_1^0} \to k[H_2^{\cdot}]^{H_2^0}$. Ainsi à tout pseudocaractère $\Theta \in \mathrm{Pcar}_k(\Gamma, H_1), \Theta \circ \tau$ est un élément de $\mathrm{Pcar}_k(\Gamma, H_2)$ où τ désigne ici le morphisme de FFS-algèbres précédent, on notera encore τ l'application $\mathrm{Pcar}_k(\Gamma, H_1) \to \mathrm{Pcar}_k(\Gamma, H_2)$.

Soit $\rho : \Gamma \to H_1(k)$ un pseudoreprésentation H_1-cr de Γ, alors $(\tau \circ \rho)^{ss}$ une semisimplification quelconque de $(\tau \circ \rho)$ est un pseudoreprésentation H_2-cr de Γ.

Lemme 6.13. *On a* $\mathrm{tr}((\tau \circ \rho)^{ss}) = \mathrm{tr}(\rho) \circ \tau$.

Démonstration. Par 5.14, $\mathrm{tr}((\tau \circ \rho)^{ss}) = \mathrm{tr}(\tau \circ \rho)$. Soit $f \in k[H_2^n]^{H_2^0}$ et $\gamma \in \Gamma^n$ alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}((\tau \circ \rho)^{ss})(f)(\gamma) &= \mathrm{tr}(\tau \circ \rho)(f)(\gamma) \\
&= f((\tau \circ \rho)(\gamma)) \\
&= \tau^*(f)(\rho(\gamma)) \\
&= \mathrm{tr}(\rho)(\tau^* f)(\gamma) \\
&= (\mathrm{tr}(\rho) \circ \tau)(f)(\gamma).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. □

Corollaire 6.14. *Toutes les semisimplifications de* $\tau \circ \rho$ *sont conjuguées par* $H_2^0(k)$.

Démonstration. Deux semisimplifications on la même trace par 5.14 et donc sont conjuguées par première partie du théorème. □

Ainsi l'application

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma, H_1) &\to \mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma, H_2) \\
[\rho] &\to [(\tau \circ \rho)^{ss}]
\end{aligned}$$

est bien définie. En particulier le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma, H_1) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{Pcar}_k(\Gamma, H_1) \arrow[d, "\tau"] \\
\mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma, H_2) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & \mathrm{Pcar}_k(\Gamma, H_2)
\end{tikzcd}$$

où les deux flèches verticales sont les flèches induites par τ et décrites précédemment. Cet énoncé montre que $\mathrm{tr} : \mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma, H) \to \mathrm{Pcar}_k(\Gamma, H)$ est fonctorielle en H.

Fixons maintenant H un groupe réductif et $\alpha : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ un morphisme de groupes. Alors α induit deux applications encore notées α,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma_2, H) &\to \mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma_1, H) \\
[\rho] &\to [(\rho \circ \alpha)^{ss}] \\
\mathrm{Pcar}_k(\Gamma_2, H) &\to \mathrm{Pcar}_k(\Gamma_1, H) \\
\Theta &\to \alpha^* \circ \Theta.
\end{aligned}$$

où α^* est l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma_2, k) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma_1, k)$ induite par α.

On vérifie comme précédemment que $\mathrm{tr}(\rho \circ \alpha) = \alpha^* \circ \mathrm{tr}(\rho)$ ce qui montre que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma_2, H) & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & \mathrm{Pcar}_k(\Gamma_2, H) \\
{\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\
\mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}(\Gamma_1, H) & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & \mathrm{Pcar}_k(\Gamma_1, H)
\end{array}$$

En particulier tr est une équivalence entre les bifoncteurs $\mathrm{Rep}^{\mathrm{ss}}$ et Pcar_k. □

6.2 Algébricité

Soit k un corps algébriquement clos, on fixe Γ un groupe algébrique lisse, on peut appliquer le théorème de Lafforgue 6.2 à $\Gamma(k)$, on obtient alors une équivalence entre les pseudocaractères de $\Gamma(k)$ à valeur dans H et les classes de conjugaison de morphismes H-cr, $\rho : \Gamma(k) \to H(k)$, on souhaiterait que ρ provienne d'un morphisme de schémas en groupes $\Gamma \to H$.

Comme Γ est lisse un morphisme de schémas $\Gamma \to \mathbb{A}^1$ est entièrement déterminé par l'application $\Gamma(k) \to k \simeq \mathbb{A}^1(k)$, et donc on peut voir $k[\Gamma^\cdot] \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma(k)^\cdot, k)$ comme une inclusion de FFS-algèbres.

Définition 6.15. Un pseudocaractère est algébrique s'il est à valeur dans la sous FFS-alègbre $k[\Gamma^\cdot]$.

Théorème 6.16. *Soit Θ un pseudocaractère de Γ dans H et $\rho(k) : \Gamma(k) \to H(k)$ une pseudoreprésentation H-cr au sens de Richardson de trace Θ,*

(*i*). *S'il existe un morphisme de groupes algébriques $\rho : \Gamma \to H$ qui induit $\rho(k)$ sur les k-points alors Θ est algébrique.*

(*ii*). *Si $\mathrm{car}(k) = 0$, et Θ est algébrique alors il existe un morphisme de groupes algébrique $\rho : \Gamma \to H$ tel que ρ induit $\rho(k)$ sur les k-points.*

(*iii*). *Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ alors il existe un $r > 0$ et un morphisme de groupes algébriques $\Gamma^{(p^r)} \to H^{(p^r)}$ de trace $\Theta^{(p^r)}$ où $^{(p^r)}$ désigne le morphisme de Frobenius $x \to x^{p^r}$.*

Démonstration. La preuve repose sur la démonstration de Lafforgue du théorème 6.17.

Soit Θ un pseudocaractère algébrique de Γ dans H, alors par le théorème de Lafforgue, en fixant un n-uplet minimal $\delta \in \Gamma(k)^n$ et $(g_1, \dots, g_n)$ un point au dessus de $\xi(\delta)$ dont la H^0 orbite est fermée, il existe un unique morphisme de groupe H-cr au sens de Richardson $\rho(k) : \Gamma(k) \to H(k)$ tel que $\rho(\delta) = (g_1, \dots, g_n)$. On souhaite discuter de l'existence d'un morphisme $f : \Gamma \to H$ tel que $f(k) = \rho(k)$, comme tous les schémas en jeu sont affines et lisses sur k, si ce morphisme existe, il est unique. De plus comme l'application $\Gamma(k) \to H(k)$ est un morphisme de groupes, s'il existe un morphisme de schémas $\Gamma \to H$ qui engendre $\rho(k)$ alors c'est un morphisme de groupes algébriques. Il suffit donc de montrer que $\rho(k)$ provient d'un morphisme de schémas.

Cas où $\mathrm{car}(k) = 0$

On note $C(\delta) = \mathrm{Z}_{H^0}(\rho(\delta))$ et $D(\delta) = \mathrm{Z}_H(C(\delta))$. Comme on est en caractéristique 0 ce sont des groupes lisses. De plus comme le n-uplet δ est minimal $C(\delta) = \mathrm{Z}_{H^0}(\rho(\Gamma(k)))$ et comme $\rho(\Gamma(k))$ est H-cr au sens de Richardson et donc c'est un groupe réductif et donc linéairement réductif (caractéristique 0) et donc $D(\delta)$ est réductif (et aussi linéairement réductif).

Clairement le morphisme $\rho(k)$ est a valeur dans $D(\delta)$ il suffit donc de montrer qu'il existe un morphisme d'algèbres $k[D(\delta)] \to k[\Gamma]$ qui induit $\rho(k)$.

Notons

$$\begin{aligned} q : k[H^{n+1}]^{H^0} &\to k[D(\delta)] \\ f &\mapsto (d \to f(g_1, \ldots, g_n, d)) \end{aligned}$$

Comme dans la preuve de Lafforgue on montre que q est surjectif, en effet q est la composée des deux morphismes :

(*i*). Le morphisme $i^* : k[H^{n+1}]^{H^0} \to k[H//C(\delta)]$, $f \to (g \to f(g_1, \ldots, g_n, g)$ où $C(\delta)$ agit par conjugaison sur H et en particulier comme $C(\delta)$ est réductif on a $k[H//C(\delta)] = k[H]^{C(\delta)}$. Premièrement cette flèche est bien définie, vérifions que pour $f \in k[H^{n+1}]^{H^0}$, $g \mapsto f(g_1, \ldots, g_n, g)$ est invariante par $C(\delta)$, soit $\lambda \in C(\delta)(k)$ on a $\lambda.i^*(f)(g) = f(g_1, \ldots, g_n, \lambda g \lambda^{-1}) = f(\lambda(\lambda^{-1}(g_1, \ldots, g_n)\lambda, g)\lambda^{-1}) = f((\lambda^{-1}(g_1, \ldots, g_n)\lambda, g) = f(g_1, \ldots, g_n, g)$ par définition de $C(\delta)$ et car f est invariante par H^0. Notons $j : H \to H^{n+1}$, $h \mapsto (g_1, \ldots, g_n, h)$ le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} j : H \arrow[r, hook] \arrow[d] & H^{n+1} \arrow[d] \\ H//C(\delta) \arrow[r, "i"] & H^{n+1}//H^0 \end{tikzcd}$$

Il reste à voir que i est une immersion fermée. Notons $\pi : H^{n+1} \to H^n$ la projection sur les n premiers facteurs (en particulier π est H^0-équivariant) et notons de plus $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in H^n(k)$ et $\mathrm{Orb}(\underline{g})$ son orbite dans H^n alors j n'est que la fibre au dessus de $\underline{g}$. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\underline{g}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g}))//H^0 \arrow[r, hook] & H^{n+1}//H^0 \\ & \pi^{-1}(\underline{g})//C(\delta) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g}))//H^0 \to H^{n+1}//H^0$ est une immersion fermée car on a supposé $\mathrm{car}(k) = 0$. Il suffit alors de montrer que le morphisme $\pi^{-1}(\underline{g})//C(\delta) \to \pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g}))//H^0$ est un isomorphisme.

L'orbite de g dans H^n est isomorphe à $H^0/C(\delta)$ (quotient pour l'action de translation à droite), et $H^0/C(\delta)$ représente le faisceau quotient fppf $\mathrm{Orb}(\underline{g}) = (H^0/C(\delta))_{fppf} = H^0 \times^{C(\delta)} \underline{g}$, où $\underline{g}$ est vu comme un sous schéma fermé de $\underline{g} \hookrightarrow H^n$ et $C(\delta)$ agit par translation à droite sur H^0 et trivialement sur $\underline{g}$. Comme π est H^0 équivariant on a

$\pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g})) = H^0 \times^{C(\delta)} \pi^{-1}(\underline{g})$ toujours en tant que faisceaux fppf. Alors le morphisme entre les faisceaux quotients $(\pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g}))/H^0)_{fppf} \to (\pi^{-1}(\underline{g})/C(\delta))_{fppf}$ est un isomorphisme.

De plus le morphisme $(\pi^{-1}(\underline{g})/C(\delta))_{fppf} \to \pi^{-1}(\underline{g})//C(\delta)$ est universel pour les morphismes de $(\pi^{-1}(\underline{g})/C(\delta))_{fppf}$ à valeur dans un schéma, de même $H^0 \times^{C(\delta)} \pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g})) \to \pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g}))//H^0$ est universel pour les morphismes à valeur dans un schéma. De plus l'isomorphisme $(\pi^{-1}(\underline{g})/C(\delta))_{fppf} \to \pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g}))$ correspond au morphisme $\pi^{-1}(\underline{g})//C(\delta) \to \pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g}))$ et ce dernier est donc un isomorphisme.

(ii). Le morphisme $k[H]^{C(\delta)} \to k[D(\delta)]$ obtenu en considérant le morphisme $k[H] \twoheadrightarrow k[D]$ correspondant à l'inclusion $D \hookrightarrow H$ et en prenant les parties invariantes par $C(\delta)$, comme on est en caractéristique 0 le foncteur $A \to A^{C(\delta)}$ est exact de la catégorie des k-modules munies d'une action de $C(\delta)$ vers les k-modules. Et donc la flèche $k[H]^{C(\delta)} \to k[D(\delta)]$ est surjective car $C(\delta)$ agit trivialement sur $D(\delta)$.

L'application $k[H^{n+1}]^{H^0} \to k[\Gamma]$, $f \mapsto (\gamma \mapsto \Theta^{n+1}(f)(\delta,\gamma))$ se factorise par q car $\Theta^{n+1}(f)(\delta,\gamma) = f(\rho(\delta,\gamma))$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} k[H^{n+1}]^{H^0} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "q"] & & k[\Gamma] \\ & k[D(\delta)] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme q est surjectif le morphisme induit par ρ de $k[D(\delta)] \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma, k)$ est à valeur dans $k[\Gamma]$ et induit bien $\rho(k)$.

<u>Cas où $\mathrm{car}(k) = p$</u>

On reprend le cas où $\mathrm{car}(k) = 0$ en faisant les modifications nécessaires : a priori $C(\delta)$ n'est plus réductif mais il est au moins géométriquement réductif, on pose $H//C(\delta) = \mathrm{Spec}\, k[H]^{C(\delta)}$ où $C(\delta)$ agit par conjugaison.

Le morphisme q est défini de la même manière mais n'est plus surjectif. En effet c'est toujours la composée des morphismes (i) et (ii) précédents. Le morphisme (i) comme est la composée des deux morphisme $H//C(\delta) \to \pi^{-1}(\mathrm{Orb}(\underline{g}))//H^0 \to H^{n+1}//H^0$ le deuxième n'est plus qu'un morphisme universellement adéquat. Le morphisme (ii) n'est aussi plus qu'un morphisme universellement adéquat. Les morphismes universellement adéquats étant stable par composition, la composée q est alors un morphisme universellement adéquat. Cela implique que pour tout $f \in k[D(\delta)]$ il existe une puissance p^r telle que $f^{p^r} \in k[H^{n+1}]^{H^0}$, comme $k[D(\delta)]$ est finiment généré, il existe un r tel que pour tout $f \in k[D(\delta)], f^{p^r} \in k[H^{n+1}]^{H^0}$. On a ainsi un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} k[H^{n+1}]^{H^0} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & k[\Gamma]^{(q)} \\ & k[D(\delta)]^{(q)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où ${}^{(q)}$ désigne l'image par le morphisme de Frobenius $x \to x^q$ avec $q = p^r$. Ainsi on a bien un morphisme $\Gamma^{(q)} \to D(\delta)^{(q)} \subset H^{(q)}$ de trace $\Theta^{(q)}$. $\square$

6.3 Continuité

Théorème 6.17 ([BHKT16], Proposition 4.7)**.** *Soit Γ un groupe topologique, k un corps topologique algébriquement clos et $\rho : \Gamma \to H(k)$ une pseudoreprésentation H-cr et $\mathrm{tr}(\rho) = \Theta$: alors*

(i). Si ρ est continue alors Θ est continue.

(ii). Si k est de caractéristique 0 et Θ est continue alors ρ est continue.

(iii). Si k est discret, Γ profini et Θ est continue alors ρ est continue.

Démonstration. Supposons ρ continue et soit $f \in k[H^n]^{H^0}$ alors $\mathrm{tr}(\rho)(f) : \Gamma^n \to k$ est une composée d'applications continues et est donc continue.

Pour le deuxième point on reprend la preuve de [Laf12] pour la continuité, c'est essentiellement le même argument que pour le théorème 6.16, comme on est en caractèristique 0 le morphisme q défini dans la preuve de 6.16 est surjectif et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} k[H^{n+1}]^{H^0} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "q"] & & \mathcal{C}(\Gamma, k) \\ & k[D(\delta)] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{C}(\Gamma, k)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de Γ dans k.

On conclut le deuxième point avec le lemme suivant :

Lemme 6.18. *Le morphisme $\rho : \Gamma \to H(k)$ est continu si et seulement si l'application induite $k[H] \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma, k)$ se factorise par $C(\Gamma, k)$.*

Démonstration. Si $f \in k[H]$ et ρ est continue, alors $f \circ \rho : \Gamma \to k$ est continue et donc le morphisme $k[H] \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma, k)$ se factorise par $C(\Gamma, k)$.

Réciproquement supposons que $k[H] \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma, k)$ se factorise par $C(\Gamma, k)$, et fixons un plongement $i : H \to \mathrm{GL}_n$ comme i est une immersion fermée $H(k)$ est fermé dans $\mathrm{GL}_n(k)$ et la topologie de $H(k)$ est la topologie induite ainsi le morphisme $\rho : \Gamma \to H(k)$ est continu si et seulement si la composée $\Gamma \to \mathrm{GL}_n(k)$ est continue. On peut donc supposer $H = \mathrm{GL}_n$, or un morphisme $\Gamma \to \mathrm{GL}_n(k)$ est continu ssi toutes les applications coordonnées sont continues or les morphismes coordonnées $\mathrm{GL}_n \to \mathbb{A}^1$ sont des éléments de $k[\mathrm{GL}_n]$ et donc les applications coordonnées de ρ sont donc dans $C(\Gamma, k)$ par hypothèse et donc ρ est continu. $\square$

Pour le troisième point, adaptons la preuve de [BHKT16] pour le cas H non connexe et k discret. Soit $f_1, \ldots, f_r \in k[H^{n+1}]^{H^0}$ une famille génératrice de $k[H^{n+1}]^{H^0}$ comme k-algèbre et soit $\delta \in \Gamma^n$ un n-uplet minimal. Les applications $\gamma \to \mathrm{tr}(\rho)(f_i)(\delta, \gamma)$ sont continues, comme k est discret, il existe un ouvert normal N de Γ tel que pour tout $\gamma \in$

$N, f_i(\rho(\delta,\gamma)) = f_i(\rho(\gamma), e_H)$ pour $i = 1, \dots, r$, et donc pour tout $f \in k[H^n]^{H^0}$, $f(\rho(\delta,\gamma)) = f(\rho(\gamma), e_H)$ cette condition impose que $\rho(\gamma) = e_H$ et donc le morphisme $\Gamma \to H(k)$ se factorise par un quotient fini de Γ et est donc continu. $\square$

Remarque 6.19. Si $\mathrm{car}(k) = p$ et Θ est continue comme dans le théorème 6.16, il existe $r > 0$ tel que $\rho^{(p^r)}$ soit continue.

6.4 Rationalité

Théorème 6.20. *Soit k un corps, k^a une clôture algébrique, Γ un groupe abstrait et H un groupe réductif sur k. Soit Θ un pseudocaractère à valeur dans k et $\rho : \Gamma \to H(k^a)$ une pseudoreprésentation associée à Θ_{k^a} le pseudocaractère obtenu en composant Θ avec l'inclusion $k \subset k^a$, alors il existe une extension finie k' de k telle que ρ soit à valeur dans $H(k')$.*

Démonstration. Soit $\delta \in \Gamma^n$ un n-uplet minimal associé au pseudocaractère Θ_{k^a}, $(g_1, \dots, g_n) \in H^n(k^a)$ ayant une H^0 orbite fermée et $\rho : \Gamma \to H(k^a)$ le morphisme tel que $\rho(\delta_i) = g_i$. Alors il existe une extension finie k'/k tel que $(g_1, \dots, g_n) \in H^n(k')$. Soit $G_{k'}$ le groupe de Galois absolu de k'.

Soit $\gamma \in \Gamma$, par construction, $\rho(\gamma)$ est l'unique élément de $H(k^a)$ tel que $(g_1, \dots, g_n, \rho(\gamma))$ ait une orbite fermée, et par unicité ce $(n+1)$-uplet est $G_{k'}$ invariant, il est par conséquent défini sur k' ainsi $\rho(\Gamma) \subset H(k')$. $\square$

6.5 Intégralité

Théorème 6.21 ([BHKT16], Thm 4.8)**.** *Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, Γ un groupe profini et H un groupe réductif défini et déployé sur $\mathcal{O}_E$, on suppose que $\pi_0(H)$ existe est constant au dessus de $\mathcal{O}_E$. Soit $\rho : \Gamma \to H(\overline{\mathbb{Q}_l})$ une pseudoreprésentation absolument H-cr et continue, alors il existe E'/E une extension finie de E telle que quitte à conjuguer ρ, ce morphisme soit à valeur dans $H(\mathcal{O}_{E'})$.*

Démonstration. Comme précédemment cette preuve est calquée sur [BHKT16] avec les modifications nécessaires pour traiter le cas où H est non connexe. Par 6.20, il existe une extension finie E'/E telle que ρ soit à valeur dans $H(E')$. Comme H est toujours défini sur $\mathcal{O}_{E'}$ on peut supposer que $E = E'$.

On note $L \subset H(E)$ le sous groupe des éléments l tel que pour tout caractère $\chi \in \mathrm{X}(H)$, $\chi(l) \in \mathcal{O}_E^\times$. On note DH^0 le groupe dérivé de H^0 et $\mathcal{B}(DH^0, E)$ l'immeuble de Bruhat-Tits de DH^0 sur E, le groupe $H(E)$ agit par morphismes simpliciaux sur $\mathcal{B}(DH^0, E)$ et les sous groupes compacts maximaux de $H^0(E)$ sont les stabilisateurs dans L de sommets dans $\mathcal{B}(DH^0, E)$. De plus il existe un unique point hyperspécial $y \in \mathcal{B}(DH^0, E)$ tel que $\mathrm{Stab}_L(x) = H^0(\mathcal{O}_E)$. Par unicité et comme $H^0(\mathcal{O}_E)$ est caractéristique dans $H(\mathcal{O}_E)$, $H(\mathcal{O}_E)$ fixe x et $H(\mathcal{O}_E)$ est un sous groupe compact maximal de $H(E)$.

Par [Lar95] 2.2, pour toute extension finie E' de E, il existe un morphisme $i_{E'/E} : \mathcal{B}(DH^0, E) \to \mathcal{B}(DH^0, E')$ qui est $H(E) \subset H(E')$ équivariant. Par unicité du point y, on a encore $\mathrm{Stab}_{L_{E'}}(i_{E'/E}(y)) = H(\mathcal{O}_{E'})$.

Le groupe Γ étant profini, il est compact et agit par ρ sur $\mathcal{B}(DH^0, E)$ par morphismes simpliciaux et comme ρ est continue, l'image $\rho(\Gamma)$ est bornée au sens de [Tit79] 2.2.1, et par [Tit79] 2.3.1, il existe un point fixe $x \in \mathcal{B}(DH^0, E)$ à l'action de Γ, alors comme Γ agit par morphismes simpliciaux, la face F_x qui contient x est stable par Γ et donc Γ fixe l'isobarycentre z de F_x. Par [Lar95] 2.4, il existe une extension finie E' de E totalement ramifiée telle que $i_{E'/E}(z)$ soit hyperspécial. Les points hyperspéciaux de $\mathcal{B}(DH^0, E')$ sont conjugués par $H(E'')$ pour E'' une extension finie de E'. Soit $h \in H(E'')$ tel que $i_{E''/E}(y) = h.i_{E''/E}(z)$ alors $h\rho h^{-1}$ fixe $i_{E''/E}(y)$ et donc $\rho(\Gamma) \subset \mathrm{Stab}_{L_{E''}} = (i_{E''/E}(y)) = H(\mathcal{O}_{E''})$ ce qui prouve le théorème. $\square$

6.6 Coefficients Artiniens

Le but de cette section est de généraliser le théorème 4.10 de [BHKT16] au cas ou H est non connexe.

Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_l}$ une extension finie de $\mathbb{Q}_l, \Gamma$ un groupe profini. On note k le corps résiduel de $\mathcal{O}_E$ et k^a une clôture algébrique de k, soit H un groupe réductif déployé et défini sur $\mathcal{O}_E$. Soit $\overline{\rho} : \Gamma \to H(k)$ une pseudoreprésentation absolument fortement H_k-irr et $\overline{\Theta}$ le pseudocaratère associé.

Définition 6.22. On définit deux foncteurs de déformation de $\overline{\rho}$ et $\overline{\Theta}$, étant donnée une k-algèbre artinienne locale A on note $q_A : A \to k$ le quotient par l'idéal maximal de A.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Def}_{\overline{\rho}} : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} &\to \mathrm{Ens}\\
A &\mapsto \{[\rho], \rho : \Gamma \to H(A), q_A(\rho) = \overline{\rho}\}\\
\mathrm{Def}_{\overline{\Theta}} : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} &\to \mathrm{Ens}\\
A &\mapsto \{\Theta \in \mathrm{Pcar}_A(\Gamma, H), q_A(\Theta) = \overline{\Theta}\}
\end{aligned}$$

où $[\rho]$ désigne la classe de conjugaison de ρ par le groupe $\mathrm{Ker}(H^0(A) \to H^0(k))$.

Comme précédemment on étend au cas non connexe la preuve de [BHKT16].

Théorème 6.23 ([BHKT16], 4.1)**.** *La transformation naturelle* $\mathrm{tr} : \mathrm{Def}_{\overline{\rho}} \to \mathrm{Def}_{\overline{\Theta}}$ *est un isomorphisme de foncteurs.*

Démonstration. Notons $H^{0,\tilde{ad}} = H^0/(\mathrm{Z}_{H^0}(H))$, alors l'action par conjugaison de H^0 sur H^n induit une action de $H^{0,\tilde{ad}}$ sur H^n (ce sont tous des $\mathcal{O}_E$-schéma en groupe réductifs). On note $X_n = H^n$ et $Y_n = X_n//H^{0,\tilde{ad}}$ comme dans 3.24 et $\pi : X_n \to Y_n$ la projection.

Soit $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ et $\Theta \in \mathrm{Def}_{\overline{\Theta}}(A)$ on construit un relèvement de $\overline{\rho}$ qui a pour trace Θ. Soit $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \Gamma^n$ un n-uplet minimal pour $\overline{\Theta}_{k^a}$ comme dans la preuve de 6.2. Notons $h = (h_1, \ldots, h_n) = \overline{\rho}(\delta)$ alors $\mathrm{Z}_H^{0,\tilde{ad}}(\overline{\rho}) = \{e\}$. Toujours comme dans la preuve de 6.2, Θ^n et δ déterminent un A-point de Y_n par

$$\mathcal{O}[H^n]^{H^{0,\tilde{ad}}} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma^n, A) \xrightarrow{\mathrm{eval}_\delta} A \tag{16}$$

On notera encore un tel point $\xi_\Theta(\delta)$. De plus comme $q_A(\Theta) = \overline{\Theta}$, $q_A(\xi_\Theta(\delta)) = \xi_{\overline{\Theta}}(\delta) \in Y_n(k)$ et en particulier $\xi_\Theta(\delta) \in Y_n^{\vee,h}(A)$ (voir 3.3 pour les notations).

Par le théorème 3.25, comme δ est minimal, l'orbite de h dans H^n est fermée et $\mathrm{Z}_{H^0}(h) = \mathrm{Z}_{H^0}(\rho) = \mathrm{Z}_{H^0}(H)$ et est donc trivial dans $H^{0,\tilde{ad}}$, ainsi $X_n^{\vee,h}/H^{0,\tilde{ad},\vee} = Y_n^{\vee,\pi(h)}$ et $\pi(h) = \xi_{\overline{\Theta}}(\delta)$. Il existe donc un relèvement de $\xi_\Theta(\delta)$ dans $X_n^{\vee,h}(A)$, soit $(g_1, \ldots, g_n)$ un tel relèvement, en particulie si $(g_1', \ldots g_n')$ est un autre relèvement, ils sont conjugués par un élément de $H^{0,\tilde{ad},\vee}(A) = \mathrm{Ker}(H^0(A) \to H^0(k))$.

Soit $\gamma \in \Gamma$, on définit maintenant $\rho(\gamma)$, posons $h' = (h_1, \ldots, h_n, \overline{\rho}(\gamma)) \in X_{n+1}(k)$, on a une flèche naterelle $X_{n+1} \to X_n$ qui oublie la dernière composante. Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{tikzcd} h' \in X_{n+1}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \pi(h') \in Y_{n+1}(k) \arrow[d] \\ h \in X_n(k) \arrow[r] & \pi(h) \in Y_n(k) \end{tikzcd}$$

Et le diagramme de foncteurs suivant est alors commutatif :

$$\begin{tikzcd} X_{n+1}^{\vee,h'} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{n+1}^{\vee,\pi(h')} \arrow[d] \\ X_n^{\vee,h} \arrow[r] & Y_n^{\vee,\pi(h)} \end{tikzcd}$$

Lemme 6.24. *Le diagramme précédent est cartésien.*

Démonstration. On utilise uniquement le fait que X_n et X_{n+1} sont des $H^{0,\tilde{ad}}$ torseur au dessus de Y_n et Y_{n+1}. Soit $Z \in \mathrm{Fonct}(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathrm{Ens})$ et $p : Z \to X_n^{\vee,h}$ et $q : Z \to Y_{n+1}^{\vee,\pi(h')}$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\ & X_{n+1}^{\vee,h'} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{n+1}^{\vee,\pi(h')} \arrow[d] \\ & X_n^{\vee,h} \arrow[r] & Y_n^{\vee,\pi(h)} \end{tikzcd}$$

Soit $A \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$ et $x \in Z(A)$, comme $q(x) \in Y_{n+1}^{\vee,\pi(h')}(A) = X_{n+1}^{\vee,h'}(A)/H^{0,\tilde{ad},\vee}(A)$, il existe un relèvement $z' \in X_{n+1}^{\vee,h'}(A)$ de $q(x)$. Soit z l'image de z' dans $X_n^{\vee,h}(A)$, comme z et $p(x)$ s'envoie sur le même point dans $Y_n^{\vee,\pi(h)}$, ils sont conjugués par $H^{0,\tilde{ad},\vee}(A)$. Donc quitte à conjuguer z', on peut supposer que $z = p(x)$.

Soit z'' un autre relèvement de $q(x)$ tel que son image dans $X_n^{\vee,h}(A)$ soit $p(x)$, alors z' et z'' sont conjugués, comme l'action sur $X_n^{\vee,h}(A)$ de $H^{0,\tilde{ad},\vee}(A)$ est libre l'élément qui conjugue z' et z'' est trivial et $z' = z''$. Cela définit une application $l : Z(A) \to X_{n+1}^{\vee,h'}(A)$

et celle-ci est fonctorielle en A. De plus toute autre telle application l' coïncide avec l par le même argument. $\square$

Lemme 6.25. *Il existe un unique relèvement de h' à $X_{n+1}(A)$ noté $(g_1, \ldots, g_n, g)$ tel que $\pi(g_1, \ldots, g_n, g) = \xi_{Theta}(\delta, \gamma)$.*

Démonstration. Soit $Z : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} \to \mathrm{Ens}$ le foncteur suivant $Z(A') = \emptyset$ si $A' \neq A$ et $Z(A) = *$ un ensemble à un point. On définit les transformations naturelles suivantes : $Z \to Y_{n+1}^{\vee, \pi(h')}$ qui envoie $Z(A)$ sur $\xi_\Theta(\delta, \gamma)$ et $Z \to X_n^{\vee, h}$ qui envoie $Z(A)$ sur h. Alors le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X_{n+1}^{\vee, h'} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{n+1}^{\vee, \pi(h')} \arrow[d] \\
& X_n^{\vee, h} \arrow[r] & Y_n^{\vee, \pi(h)}
\end{tikzcd}$$

Il existe donc un unique morphisme $Z \to X_{n+1}^{\vee, h'}$, notons $x \in X_{n+1}(A)$ l'image de $Z(A)$, on note $x = (x_1, \ldots, x_n, x)$. Par la commutativité du diagramme précédent on a $(x_1, \ldots, x_n) = (g_1, \ldots, g_n)$, ce qui prouve le lemme. $\square$

Cela défini une application $\rho : \Gamma \to H(A), \gamma \mapsto g$.

Lemme 6.26. *L'application ainsi définie est un morphisme de groupes, $[\rho] \in \mathrm{Def}_{\overline{\rho}}(A)$ et $\mathrm{tr}(\rho) = \Theta$.*

Démonstration. Par construction ρ est un relèvement de $\overline{\rho}$. Vérifions que ρ est un morphisme de groupes, notons $h_{\gamma\gamma'} = (h_1, \ldots, h_n, \overline{\rho}(\gamma\gamma'))$ et $h_{\gamma,\gamma'} = (h_1, \ldots, h_n, \overline{\rho}(\gamma), \overline{\rho}(\gamma'))$ alors le diagramme suivant est commutatif où μ désigne la multiplication des deux dernières composantes les deux autres flèches verticales l'oubli de la dernière composante :

$$\begin{tikzcd}
X_{n+2}^{\vee, h_{\gamma,\gamma'}} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & Y_{n+2}^{\vee, \pi(h_{\gamma,\gamma'})} \arrow[d, "\mu"] \\
X_{n+1}^{\vee, h_{\gamma\gamma'}} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{n+1}^{\vee, \pi(h_{\gamma\gamma'})} \arrow[d] \\
X_n^{\vee, h} \arrow[r] & Y_n^{\vee, \pi(h)}
\end{tikzcd}$$

Les trois carrés sont cartésiens par le même argument que le lemme 6.24, alors le relèvement dans $X_{n+2}(A)$ de $(g_1, \ldots, g_n)$ est $(g_1, \ldots, g_n, \rho(\gamma), \rho(\gamma'))$ et celui dans $X_{n+1}(A)$ est $(g_1, \ldots, g_n, \rho(\gamma\gamma'))$ ce qui montre que $\rho(\gamma\gamma') = \rho(\gamma)\rho(\gamma')$.

Montrons enfin que $\mathrm{tr}(\rho) = \Theta$, soit $k > 0$, $\gamma \in \Gamma^k$, $f \in \mathcal{O}(Y_k)$, on note $f^* \in \mathcal{O}(Y_{n+k})$ l'application définie par $f^*(x_1, \ldots, x_{n+k}) = f(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$. Alors pour tout $\gamma \in \Gamma^k$, $f^*(\xi_\Theta(\delta, \gamma) = \Theta(f)(\gamma)$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& X_k(A) \arrow[r] & Y_k(A) \arrow[dr, "f"] & \\
\gamma \in \Gamma^k \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr] & & & \mathbb{A}^1(A) = A \\
& X_{n+k}(A) \arrow[r] & \xi_\Theta(\delta, \gamma) \in Y_{n+k}(A) \arrow[ur, "f^*"] &
\end{tikzcd}$$

La flèche $\Gamma^k \to X_{n+k}(A)$ est donnée par $\gamma \mapsto (g_1, \ldots, g_n, \rho(\gamma_1), \ldots, \rho(\gamma_k))$. La composée des flèches du haut donne $\mathrm{tr}(\rho)(f)(\gamma)$ et celle des flèches du bas donne $f^*(\xi_\Theta(\delta, \gamma))$ ce qui montre alors que $\mathrm{tr}(\rho) = \Theta$.

$\square$

Par le lemme 6.26, l'application $\mathrm{tr} : \mathrm{Def}_{\overline{\rho}} \to \mathrm{Def}_{\overline{\Theta}}$ est surjective. L'unicité dans le lemme 6.25 montre que ρ ne dépend que de Θ et $(g_1, \ldots, g_n) \in X_n^{\vee,h}(A)$ or le choix d'un autre n-uplet $(g_1, \ldots, g_n)$ revient à conjuguer par un élément de $\mathrm{Ker}(H^{0,\tilde{ad}}(A) \to H^{0,\tilde{ad}}(k))$ et donc la classe $[\rho]$ ne dépend que de Θ ce qui montre l'injectivité. $\square$

7 Espace des représentations

7.1 Espace des pseudocaractères

Soit k un anneau, Γ un groupe abstrait et H un schéma en groupe plat de présentation finie sur k.

Théorème 7.1. *Le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathrm{Pcar}(\Gamma, H) : k - \mathrm{Alg} &\to \mathrm{Ens} \\ R &\mapsto \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)(R) \end{aligned}$$

est représenté par le schéma ,aussi noté $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H) = \lim_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{Spec}(k[H^I]^{H^0})$ *où* FFS/Γ *est la catégorie dont les objets sont les objets de* FFS *muni d'un morphisme de monoïde vers* Γ *et les morphismes sont ceux qui commutent au morphisme structural vers* Γ*.*

Démonstration. On montre qu'il y a une bijection naturelle entre les morphismes de FFS-algèbres $\Theta : k[H^\cdot]^{H^0} \to \mathrm{Hom}(\Gamma^\cdot, R)$ et les morphismes d'algèbres $\Theta : \mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma}$ $k[H^I]^{H^0} \to R$, cela montre que les $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ et le foncteur de Yoneda du schéma $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ sont isomorphes et cela prouve le théorème.

Soit Θ un pseudocaractère à valeurs dans R, on construit un morphisme $\Psi(\Theta)$: $\mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} k[H^I]^{H^0} \to R$ et soit $\phi : \mathrm{FS}(I) \to \Gamma$ un objet de FFS/Γ, on peut voir ϕ comme un élément de Γ^I.

La composée $\mathrm{eval}_\phi \circ \Theta^I : k[H^I]^{H^0} \to R$ est un morphisme de k-algèbres. Soit ϕ' : $\mathrm{FS}(J) \to \Gamma$ un autre élément de FFS/Γ et $\lambda : \mathrm{FS}(I) \to \mathrm{FS}(J)$ un morphisme de FFS/Γ.

Notons $f_* : k[H^*]^{H^0}$ les morphismes induits par ϕ et ϕ' pour $* = I, J$, alors λ induit un morphisme (encore noté λ) $k[H^I]^{H^0} \to k[H^J]^{H^0}$. On vérifie de $f_J \circ \lambda = f_I$. Soit $x \in k[H^I]^{H^0}$, on a

$$\begin{aligned} f_J(\lambda(x)) &= \Theta^J(\lambda(x))(\phi') \\ &= \Theta^I(x)(\phi'(\lambda)) \\ &= \Theta^I(x)(\phi) \\ &= f_I(x). \end{aligned}$$

Par la propriété universelle des colimites les morphismes f_I pour $I \in \mathrm{FFS}/\Gamma$ induisent un morphisme $\Psi(\Theta) : \mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} k[H^I]^{H^0} \to R$. La naturalité de Ψ en R est immédiate.

Soit $\Theta : \mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} k[H^I]^{H^0} \to R$ un morphisme d'algèbres, construisons un pseudo-caractère de Γ dans H. Soit I un objet de FFS on construit d'abord un morphisme de $k[H^I]^{H^0} \to \mathrm{Hom}(\Gamma^I, k)$, soit $\phi \in \Gamma^I$, on peut voir ϕ comme un morphisme $\mathrm{FS}(I) \to \Gamma$ et donc comme un élément de FFS/Γ.

La composée $k[H^I]^{H^0} \to \mathrm{colim}\, k[H^J]^{H^0} \xrightarrow{\Theta} R$ définit une application f_ϕ. On pose alors $\Phi(\Theta)^I : k[H^I]^{H^0} \to \mathrm{Hom}(\Gamma^I, R)$ l'application définie par $x \mapsto (\phi \mapsto f_\phi(x))$. Comme pour tout ϕ, f_ϕ est un morphisme d'algèbres, $\Phi(\Theta)^I$ est un morphisme d'algèbres.

Soit $\lambda : \mathrm{FS}(I) \to \mathrm{FS}(J)$ un morphisme de FFS, on veut vérifier que $\Phi(\Theta)$ est bien un pseudocaractère, cela revient à vérifier la naturalité en I. Il suffit donc de montrer que $\lambda \circ \Phi(\Theta)^I = \Phi(\Theta)^J \circ \lambda$. Soit $\phi \in \Gamma^J$ et $x \in k[H^I]^{H^0}$, comme le triangle suivant est commutatif on a $f_{\lambda(\phi)}(x) = f_\phi(\lambda(x))$

$$\begin{tikzcd}
k[H^I]^{H^0} \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "f_{\lambda(\phi)}"] & & \\
& \operatorname{colim} k[H^I]^{H^0} \arrow[r, "\Theta"] & R \\
k[H^J]^{H^0} \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "f_\phi"'] & &
\end{tikzcd}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\lambda(\Phi(\Theta))^I(\phi) &= \Phi(\Theta)^I(\lambda(\phi)) \\
&= f_{\lambda(\phi)}(x) \\
&= f_\phi(\lambda(x)) \\
&= \Phi(\Theta)^J(\lambda(x))(\phi).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\Phi(\Theta)$ est un pseudocaractère à valeur dans R. Il reste à voir que Φ et Ψ sont inverses l'une de l'autre.

Soit Θ un pseudocaractère à valeurs dans R et soit $\Psi(\Theta)$ le morphisme $\operatorname{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} k[H^I]^{H^0} \to R$ construit précédemment. Soit $I \in \mathrm{FFS}$, $\phi : \mathrm{FS}(I) \to \Gamma$ un objet de FFS/Γ et $x \in k[H^I]^{H^0}$ alors on a

$$\Phi(\Psi(\Theta))^I(x)(\phi) = f_\phi(x)$$

où f_ϕ est le morphisme composé $k[H^I]^{H^0} \to \operatorname{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} k[H^I]^{H^0} \xrightarrow{\Psi(\Theta)} R$ mais par définition de $\Psi(\Theta)$ le morphisme f_ϕ n'est que $\Theta^I(x)(\phi)$ ainsi on a

$$\Phi(\Psi(\Theta))^I(x)(\phi) = \Theta^I(x)(\Phi).$$

Ainsi $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. Soit maintenant $\Theta : \operatorname{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} k[H^I]^{H^0} \to R$ un morphisme, on vérifie que $\Psi(\Phi(\Theta)) = \Theta$.

Soit $x \in \operatorname{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} k[H^I]^{H^0}$ alors il existe $\phi : \mathrm{FS}(I) \to \Gamma$ un objet de FFS/Γ et $y \in k[H^I]^{H^0}$ tel que $x = e_\phi(y)$ où $e_\phi : k[H^I]^{H^0} \to \operatorname{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} k[H^I]^{H^0}$ l'inclusion définie par ϕ, alors on a

$$\begin{aligned}\Psi(\Phi(\Theta))(x) &= \Psi(\Phi(\Theta))(e_\phi(y))\\ &= \Phi(\Theta)^I(y)(\phi)\\ &= f_\phi(y)\\ &= \Theta(x).\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

□

7.2 Variété des morphismes

Soit k un anneau, Γ un groupe abstrait et H schéma en groupe plat de présentation finie sur k muni d'un plongement $H \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ (ce qui est vérifié dès lors que k est un corps par exemple).

On définit le foncteur

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, H) &\to \mathrm{Ens}\\ R &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gp}}(\Gamma, H(R))\end{aligned}$$

Théorème 7.2. *Le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, H)$ *est représentable par un schéma sur* k.

Démonstration. On montre d'abord que $\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathrm{GL}_n))$ est représentable. Notons $\mathrm{GL}_n = \mathrm{Spec}(k[X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}, \frac{1}{\det(X_{i,j})}])$, posons $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n) = \mathrm{Spec}\, k[X^\gamma_{i,j}, \frac{1}{\det(X^\gamma_{i,j})_{i,j}}]/I_\Gamma$ pour $i, j = 1, \ldots, n$ et $\gamma \in \Gamma$ et I_Γ est l'idéal généré par les éléments $X^e_{i,j} - \delta_{i,j}$ et $X^{\gamma\delta}_{i,j} - \sum_k X^\gamma_{i,k} X^\delta_{k,j}$.

Soit R une k-algèbre et $\rho : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, H)(R)$ un R-point de $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ alors par définition de $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ cela revient à donner un élément $\rho(\gamma) \in \mathrm{GL}(R)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et par la description de I_Γ on a pour tout $\gamma, \delta \in \Gamma$, $\rho(\gamma\delta) = \rho(\gamma)\rho(\delta)$ et ρ est donc un élément de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, H)(R)$.

Réciproquement si $\rho \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, H)(R)$ alors on définit un R-point de $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ par

$$\begin{aligned}k[X^\gamma_{i,j}, \frac{1}{\det(X^\gamma_{i,j})_{i,j}}]/I_\Gamma &\to R\\ X^\gamma_{i,j} &\mapsto \rho(\gamma)_{i,j}\end{aligned}$$

où $\rho(\gamma)_{i,j}$ désigne l'élément de coordonnées (i, j) dans la matrice $\rho(\gamma)$. Comme ρ est un morphisme de groupes ce R-point est bien défini et ces deux procédés sont inverses l'un de l'autre, ce qui montre le théorème pour GL_n.

Soit H un schéma en groupe sur k muni d'un plongement $\iota : H \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$. Notons $H = \mathrm{Spec}(A)$ et $A = k[X_{i,j}, \frac{1}{\det(X_{i,j})}]/I_H$ où I_H est l'idéal définissant le plongement ι. Notons de plus $I_H = (f_l)_{l \in L}$ (comme on ne suppose pas k noethérien, I_H n'est peut être pas finiement généré) et $f_l = f_l(X_{i,j})$ est un polynôme à coefficients dans k. On pose $I_{H,\gamma}$ l'idéal de $k[\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n)]$ défini par $I_{H,\gamma} = (f_l(X^{\gamma}_{i,j})_{l\in L}$. Enfin on pose $\mathrm{Hom}(\Gamma, H) = \mathrm{Spec}\, k[\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n)]/\sum_{\gamma\in\Gamma} I_{H,\gamma}$.

Vérifions alors que $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ représente le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, H)$ soit $\rho : \Gamma \to H(R)$ pour R une k-algèbre, alors ρ est aussi à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(R)$ et donc définit un R-point de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n)$, comme pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\rho(\gamma) \in H(R) \subset \mathrm{GL}_n(R)$ par définition de $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ le R-point défini par ρ est à valeur dans le sous schéma fermé $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n)$. Réciproquement si ρ est un R-point de $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ alors c'est un R-point de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n)$ et donc il définit un morphisme $\tilde{\rho} : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(R)$ et comme le ρ est à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)(R)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\tilde{\rho}(\gamma) \in H(R)$ ce qui conclut le théorème. $\square$

Théorème 7.3. *Le schéma* $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ *est fonctoriel en* Γ *et* H*, covariant en* H *et contravariant en* Γ*.*

Si $\Gamma' \to \Gamma$ *est surjective alors le morphisme induit* $\mathrm{Hom}(\Gamma, H) \to \mathrm{Hom}(\Gamma', H)$ *est une immersion fermée.*

Démonstration. Soit $\phi : \Gamma' \to \Gamma$ un morphisme de groupes, on définit une transformation naturelle

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, H) &\to \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma', H) \\ (\rho : \Gamma \to H(R)) &\mapsto ((\rho \circ \phi) : \Gamma' \to H(R)). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ et $\mathrm{Hom}(\Gamma', H)$ représentent les deux foncteurs précédents cela induit un morphisme de schémas $\mathrm{Hom}(\Gamma, H) \to \mathrm{Hom}(\Gamma', H)$. Étant donné la présentation de la preuve précédente, le morphisme induit $\phi^\flat : k[\mathrm{Hom}(\Gamma', H)] \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]$ est décrit par

$$X^{\gamma'}_{i,j} \to X^{\phi(\gamma)}_{i,j}. \tag{17}$$

Comme ϕ est surjectif le morphisme $\phi^\flat$ l'est aussi et donc $\mathrm{Hom}(\Gamma, H) \to \mathrm{Hom}(\Gamma', H)$ est une immersion fermée.

Si $\phi : H \to H'$ est un morphisme induit $\mathrm{Hom}(\Gamma, H) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, H')$ est induit par la transformation naturelle suivante

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, H) &\to \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, H') \\ (\rho : \Gamma \to H(R)) &\mapsto ((\phi \circ \rho) : \Gamma' \to H(R)). \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 7.4. *Le schéma* $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ *est de type fini si* Γ *l'est .*

Démonstration. Par la description donnée dans la preuve du théorème 7.2, si Γ est de type fini alors il existe un morpshime surjectif $\mathrm{FS}(I) \to \Gamma$ pour I un ensemble fini. Alors le morphisme induit $\mathrm{Hom}(\Gamma, H) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(I), H)$ est une immersion fermée par 7.3 et donc $\mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(I), H)$ est de type fini, ainsi $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ l'est aussi. $\square$

Remarque 7.5. Les théorèmes 7.2, 7.3 et 7.4 sont encore valables si on suppose simplement de Γ est un monoïde, en replaçant morphismes de groupes par morphismes de monoïdes on obtient des résultats similaires avec les même preuves. On notera encore le schéma associé $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)$ et comme les morphismes de monoïdes et de groupes de $\Gamma \to H(R)$ coïncident lorsque Γ est un groupe, il n'y aucune confusion possible.

Proposition 7.6. *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, H) \to \lim_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(I), H) \tag{18}$$

défini par $(\rho : \Gamma \to H(R)) \mapsto (\mathrm{FS}(I) \xrightarrow{\phi} \Gamma \xrightarrow{\rho} H(R))_{\phi:\mathrm{FS}(I)\to\Gamma}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\Gamma = \mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{FS}(I)$ dans la catégorie des monoïdes. Soit $x \in \mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{FS}(I)$ alors il existe $\phi : \mathrm{FS}(I) \to \Gamma$ tel que $x \in \mathrm{FS}(I)$ on pose $\Phi(x) = \phi(x)$. Soit $\gamma \in \Gamma$, on note $\phi_\gamma : \mathrm{FS}(1) \to \Gamma$ le morphisme qui envoie le générateur sur γ on pose alors $\Psi(\gamma)$ l'image du générateur de $\mathrm{FS}(1)$ dans $\mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{FS}(I)$ par l'inclusion via déterminée par ϕ_γ.

On vérifie alors que Φ et Ψ sont inverses l'une de l'autre. Soit $x \in \mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{FS}(I)$ comme $\Phi(x)$ ne dépend pas du représentant choisi, on peut choisir $\phi_{\Phi(x)} : \mathrm{FS}(1) \to \Gamma$ on a alors $\Psi(\Phi(x)) = x$. Réciproquement soit $\gamma \in \Gamma$ alors $\phi_\gamma : \mathrm{FS}(1) \to \mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{FS}(I)$ est un représentant possible pour déterminer $\Phi(\Psi(\gamma))$ et donc $\Phi(\Psi(\gamma)) = \gamma$ ce qui montre bien que $\Gamma = \mathrm{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{FS}(I)$. On remarque de plus que cet isomorphisme est naturel en Γ.

Finalement on a

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, H(R)) = \mathrm{Hom}(\operatorname*{colim}_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{FS}(I), H(R)) = \lim_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(I), H(R)). \tag{19}$$

$\square$

7.3 Espace de module des morphismes complètement réductifs

Soit k un anneau, Γ un groupe abstrait et H un schéma en groupe réductif sur k. On généralise la notion de pseudoreprésentation sur k.

Définition 7.7. Un morphisme $\Gamma \to H(k)$ est dit absolument H-complètement réductif (au sens de Richardson) si pour tout point géométrique $k \to \Omega$, la pseudoreprésentation induite $\Gamma \to H(\Omega)$ est H-complètement réductive (au sens de Richardson).

Le but de cette section est de discuter de l'existence et des rapport entre les espaces de module des pseudoreprésentations, pseudocaractères, pseudoreprésentations complètement réductible,...

Les objets que l'on souhaite comparer sont :

(i). Le champ quotient $[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0]$.

(ii). Le quotient GIT $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0$ s'il existe.

(iii). L'espace $\mathrm{Spec}\, k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}$.

(iv). L'espace/foncteur $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$

Les sections précédentes et le thèorème de Lafforgue montrent que tous ces espaces ont les même Ω-points pour tout corps algébriquement clos Ω.

Notons de plus $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H$ la catégorie fibrée en groupoïde, $R \mapsto \mathrm{Hom}(\Gamma, H(R))/H(R)$.

Le diagramme suivant résume les résultats connus :

$$\begin{array}{c}
\mathrm{Hom}(\Gamma, H) \\
\Big\downarrow \\
\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0 \\
\Big\downarrow \\
[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0] \\
\Big\downarrow \\
\mathrm{Spec}(k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}) = \mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0 \\
\Big\downarrow \mathrm{tr} \\
\mathrm{Pcar}(\Gamma, H) = \lim_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{Spec}\, k[H^I]^{H^0} = \lim_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(I), H)//H^0.
\end{array}$$

En notant que les égalités $\mathrm{Spec}(k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}) = \mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0$ et $\mathrm{Spec}(k[\mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(I), H)]^{H^0}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(I), H)//H^0$ ne sont a priori valables que lorsque k est un corps.

Les différents morphismes sont obtenus de la manière suivante :

— La composée de l'iso $H(\Gamma, H) = \lim_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(I), H)$ avec la projection terme à terme sur le "quotient" $\lim_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{Spec}(k[\mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(I), H)]^{H^0})$ (qui n'est pas à priori un quotient GIT) est le morphisme tr.

— Comme tr est invariant par H^0 il se factorise par $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0$.

— Comme $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ est un schéma le morphisme $\mathrm{Hom}(\Gamma, H) \to \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ se factorise par le champ quotient $[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0]$ (qui n'est que le champ associé à $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0$).

— Comme $[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0] \to \mathrm{Spec}(k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0})$ est un espace de module adéquat et $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ est un schéma le morphisme $[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0] \to \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ se factorise par $\mathrm{Spec}(k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0})$.

Remarque 7.8. Supposons que k soit un corps algébriquement clos et Γ soit un groupe libre finiement engendré alors le morphisme $[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0] \to \mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0$ n'est pas un isomorphisme. En effet au niveau des k-points $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0$ classifie les classes de conjugaison de morphismes $\Gamma \to H(k)$ qui sont H-complètement réductif (c'est le théorème de Richardson) alors que les k-points de $[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0]$ classifie en particulier toutes les classes de conjugaison de morphismes de $\Gamma \to H(k)$, le morphisme

$[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)/H^0](k) \to (\mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0)(k)$ envoie une classe de conjugaison de morphisme $\Gamma \to H(k)$ sur sa semisimplification.

Théorème 7.9 (Structure du morphisme trace)**.** *Supposons que* Γ *soit de type fini et que* k *soit un corps algébriquement clos alors le morphisme* tr *est un homéomorphisme adéquat si* $\mathrm{car}(k) = p$ *et un homéomorphisme universel et une immersion fermée correspondant à un idéal localement nilpotent si* $\mathrm{car}(k) = 0$.

Démonstration. Soit $\phi : \mathrm{FS}(n) \to \Gamma$ un morphisme surjectif, le morphisme induit $\mathrm{Hom}(\Gamma, H) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(n), H)$ est une immersion fermée. Notons I l'idéal de $k[\mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(n), H)]$ correspondant à cette immersion fermée. Le morphisme induit $k[H^n]^{H^0} \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}$ est adéquat et le morphisme $k[H^n]^{H^0}/I^{H^0} \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}$ est un homéomorphisme adéquat.

Notons δ le n-uplet image des générateurs de $\mathrm{FS}(n)$ dans Γ, alors δ est une famille génératrice de Γ et en particulier pour tout pseudocaractère Θ, c'est un n-uplet minimal.

Comme $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H) = \lim_{\mathrm{FFS}/\Gamma} \mathrm{Hom}(\mathrm{FS}(k), H)//H^0$ et que l'on dispose du morphisme $\phi : \mathrm{FS}(n) \to \Gamma$, on peut considérer la projection $\pi_\phi : \mathrm{Pcar}(\Gamma, H) \to H^n//H^0$ induite par ϕ. On notera en particulier que $\pi_\phi \circ \mathrm{tr}$ coïncide avec l'application induite par ϕ, $\phi^* \mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0 \to H^n//H^0$ par la définition du morphisme tr.

On a que $k[H^n]^{H^0}/I^{H^0} \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}$ est un homéomorphisme adéquat, notons Z le fermé de $H^n//H^0$ correspondant à la surjection $k[H^n]^{H^0} \to k[H^n]^{H^0}/I^{H^0}$. Au niveau des k-points, $Z(k)$ est correspond à l'ensemble des classes de conjugaison de morphismes $\mathrm{FS}(n) \to H(k)$, H-cr qui se factorise par ϕ.

On souhaiterait que $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H) \to H^n//H^0$ se factorise par Z, il n'est à priori pas clair que ce soit le cas, on montre que seulement $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)_{\mathrm{red}}$ se factorise par Z. Comme $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)_{\mathrm{red}}$ est réduit, il suffit de le montrer au niveau des k-points. Soit Θ un pseudocaractère de Γ dans H à valeurs dans k, son image dans $H^n//H^0(k)$ correspond au point $\mathrm{eval}_\phi \circ \Theta^{[n]} : k[H^n]^{H^0} \to \mathrm{Hom}(\Gamma^n, k) \to k$, soit $\rho : \mathrm{FS}(n) \to H(k)$ un relèvement H-cr de ce point, alors comme δ est un n-uplet minimal de Γ pour Θ, tout relèvement du point $\mathrm{eval}_\phi \circ \Theta^{[n]}$ défini de manière unique un morphisme $\Gamma \to H(k)$, donc le morphisme ρ se factorise par Γ. En passant aux algèbres de fonctions le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
k[H^n]^{H^0} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dddr, bend right] & & k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0} \\
& k[H^n]^{H^0}/I^{H^0} \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}} & \\
& k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)] \arrow[u, two heads] \arrow[uuur, bend right, "\mathrm{tr}"'] &
\end{tikzcd}$$

On remarquera que pour montrer que $\mathrm{tr} : \mathrm{Hom}(\Gamma, H) \to \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ est un homéomorphisme adéquat en caractéristique p, il suffit de le montrer entre les schémas réduits. Le morphisme $k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)] \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}$ et induit un morphisme $k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}} \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}^{H^0}$, le diagramme suivant est donc commutatif et la flèche horizontale est un homéomorphisme adéquat :

$$\begin{tikzcd}
(k[H^n]^{H^0}/I^{H^0})_{\mathrm{red}} \arrow[rr] \arrow[dr, "\Theta"] & & k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}^{H^0} \\
& k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}} \arrow[ur, "\mathrm{tr}"] &
\end{tikzcd}.$$

Ainsi $\mathrm{tr} \circ \Theta$ est un homéomorphisme adéquat (on utilise encore la notation tr pour désigner le morphisme entre les schémas réduits).

Si $\mathrm{car}(k) = p$, comme c'est un morphisme universellement adéquat entre anneaux réduits, on a $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr} \circ \Theta) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(\Theta) = 0$ et soit $x \in k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}$, il existe $r > 0$ tel que $x^{p^r} \in (k[H^n]^{H^0}/I^{H^0})_{\mathrm{red}}$ donc $\Theta(x^{p^r})$ est un relèvement de x^{p^r}. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ comme $k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}$ est réduit, il existe un idéal maximal m de $k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}$ tel que $x \notin m$ alors comme tr est une bijection au niveau des k-points, il existe un unique idéal maximal n de $k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}^{H^0}$ tel que $\mathrm{tr}^{-1}(n) = m$, comme k est algébriquement clos le morphisme induit $k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}/m \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}^{H^0}/n$ est un isomorphisme. Comme $x \notin m$ l'image de x dans $k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}/m$ n'est pas nulle, donc son image dans $k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}^{H^0}$ ne peut pas être nulle, ainsi $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = 0$, ce qui montre par [Alp10], proposition 3.3.3 que tr est un homéomorphisme adéquat.

Si $\mathrm{car}(k) = 0$ alors le morphisme $k[H^n]^{H^0} \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}$ est encore surjectif, et donc $k[H^n]^{H^0}/I^{H^0} = k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}$ et le morphisme $\mathrm{tr} : k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)] \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^{H^0}$ est surjectif. Ainsi le morphisme $\mathrm{tr} : \mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0 \to \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ est une immersion fermée. De plus le morphisme $\Theta : k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0]_{\mathrm{red}} \to k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)]_{\mathrm{red}}$ est une section du morphisme tr entre les schémas réduits et donc au niveau des espaces topologiques le morphisme tr admet une section, comme il est bijectif au niveau des k-points c'est un homéomorphisme et comme il admet une section c'est un homéomorphisme universel. De plus le même raisonnement que le cas de caractéristique p permet de montrer que le noyau de $\mathrm{tr} : k[\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)] \to k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0]$ est localement nilpotent. Ainsi le morphisme $\mathrm{tr} : \mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0 \to \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ est un homéomorphisme universel et une immersion fermée correspondant à un idéal localement nilpotent. □

Théorème 7.10. *Soit k un corps, et R une k-algèbre, on suppose que Γ est de type fini et H un schéma en groupe réductif sur R à fibre géométriquement connexe alors le* $\mathrm{Spec}\, R[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^H \to \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ *est un homéomorphisme adéquat si* $\mathrm{car}(k) = p$, *et un homéomorphisme universel et une immersion fermée correspondant à un idéal localement nilpotent si* $\mathrm{car}(k) = 0$.

Démonstration. Comme les deux propriétés "être un homéomorphisme adéquat" et "être un homéomorphisme universel et une immersion fermée correspondant à un idéal localement nilpotent" sont des propriétés locales pour la topologie fpqc et invariantes par changement de base, on ne montre que le cas $\mathrm{car}(k) = p$.

On montre le résultat tout d'abord pour $R = k$, soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, alors comme $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)_{\overline{k}} = \mathrm{Pcar}(\Gamma, H_{\overline{k}})$ et $k[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)] \otimes \overline{k} = \overline{k}[\mathrm{Hom}(\Gamma, H_{\overline{k}})]^{H_{\overline{k}}}$, que $\mathrm{Spec}(\overline{k}) \to \mathrm{Spec}(k)$ est un recouvrement fpqc et qu'être un homéomorphisme adéquat est fpqc-local, par 7.9, le morphisme tr est un homéomorphisme adéquat sur k non algébriquement clos.

On ne suppose plus que $k = R$ ni que H est déployé, après une extension convenable $R \to R'$ qui est fppf, $H_{R'}$ est déployé et par le même argument du cas $R = k$, on se ramène au cas ou H est déployé, on peut supposer H déployé et $R = R'$, alors H est le changement de base d'un groupe définit sur k (on a même $\mathbb{Z}$ mais on ne sait pas si le résultat est vrai sur $\mathbb{Z}$), ie $H = G_R$ où G est un groupe réductif géométriquement connexe défini sur k. Comme $k \to R$ est plat on a $R[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^H = k[\mathrm{Hom}(\Gamma, G)]^G \otimes_k R$ et $\mathrm{Pcar}(\Gamma, G)_R = \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ ainsi comme tr est un homéomorphisme adéquat et que cette notion est stable par changement de base, on a $\mathrm{tr} : \mathrm{Spec}\, R[\mathrm{Hom}(\Gamma, H)]^H \to \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ est un homéomorphisme adéquat au dessus de R. $\square$

Il reste plusieurs questions concernant le morphisme $\mathrm{tr} : \mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0 \to \mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$:

Quelles sont les propriétés de ce morphisme sur une base qui n'est pas une k-algèbre ? Le schéma $\mathrm{Pcar}(\Gamma, H)$ pour Γ de type fini est-il de type fini ? Est-il réduit ? De même le schéma $\mathrm{Hom}(\Gamma, H)//H^0$ est-il réduit ? Dans quelle mesure peut-on étendre les résultats précédents sans supposer le groupe Γ de type fini ?

Les résultats de la section 6.6 indiquent que sur $\mathcal{O}_E$ le morphisme tr est lisse sur les k-points (k étant le corps résiduel de $\mathcal{O}_E$) correspondant à des pseudoreprésentations absolument irréductibles, ce résultat se généralise-t-il a d'autre base, par exemple $k[[t]]$? Que peut-on dire si la pseudoreprésentation résiduelle n'est plus absolument irréductible ?

Références

[Alp10] Jarod Alper. Adequate moduli spaces and geometrically reductive group schemes. *arXiv preprint arXiv :1005.2398*, 2010.

[BHKT16] Gebhard Böckle, Michael Harris, Chandrashekhar Khare, and Jack A. Thorne. $\widehat{G}$-local systems on smooth projective curves are potentially automorphic. 2016.

[BMR05] Michael Bate, Benjamin Martin, and Gerhard Röhrle. A geometric approach to complete reducibility. *Inventiones mathematicae*, 161(1) :177–218, Jul 2005.

[Bor79] Armand Borel. Automorphic l-functions. In *Proc. Symp. Pure Math*, volume 33, pages 27–61, 1979.

[Con14] Brian Conrad. *Reductive Group Schemes.* 2014.

[DM94] Fran¸cois Digne and Jean Michel. Groupes réductifs non connexes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4e série, 27(3) :345–406, 1994.

[Don92] Stephen Donkin. Invariants of several matrices. *Inventiones mathematicae*, 110(2) :389–402, 1992.

[Gro65] Alexandre Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : Iv. étude locale des schémas et des morphismes de schémas, seconde partie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 24 :5–231, 1965.

[Kem78] George R. Kempf. Instability in invariant theory. *Annals of Mathematics*, 108(2) :299–316, 1978.

[Laf12] Vincent Lafforgue. Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de langlands globale. 2012.

[Lar95] M. Larsen. Maximality of galois actions for compatible systems. *Duke Math. J.*, 80(3) :601–630, 12 1995.

[MFK94] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory*, volume 34. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd edition, 1994.

[Mil17] J. S. Milne. *Algebraic Groups : The Theory of Group Schemes of Finite Type over a Field.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2017.

[Ric82] R.W. Richardson. On orbits of algebraic groups and lie groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 25(1) :1–28, 1982.

[Ric88] R. W. Richardson. Conjugacy classes of n -tuples in lie algebras and algebraic groups. *Duke Math. J.*, 57(1) :1–35, 08 1988.

[Ses77] C.S Seshadri. Geometric reductivity over arbitrary base. *Advances in Mathematics*, 26(3) :225 – 274, 1977.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wei18] Matthew Weidner. Pseudocharacters of Classical Groups. *arXiv e-prints*, page arXiv :1809.03644, Sep 2018.