Institut de Mathématiques de Jussieu
Paris Rive Gauche (IMJ-PRG)

Rapport de Stage de fin de Master 2
École Normale Supérieure de Lyon

Représentations des groupes p-adiques et conjectures de Langlands

Auteur :
Thomas LANARD

Directeur de stage :
Jean-François DAT

25 août 2015

Table des matières

1 Espaces et groupes totalement discontinus **2**
- 1.1 Espaces t.d. et distributions . . . 2
- 1.2 Groupes t.d. . . . 5
- 1.3 L'algèbre $\mathcal{E}'(G)$ . . . 5
- 1.4 Espaces fonctionnels . . . 6
- 1.5 Mesure de Haar . . . 7
- 1.6 Algèbre de Hecke . . . 10

2 Algèbre à idempotents **11**
- 2.1 Anneau à idempotents et module non-dégénéré . . . 11
- 2.2 Foncteurs d'oublis et d'inductions . . . 12
- 2.3 Le foncteur j_e . . . 14

3 Représentations des groupes t.d. **15**
- 3.1 Une équivalence de catégorie . . . 15
- 3.2 Le foncteur j_K . . . 17
- 3.3 Lemme de Schur . . . 18
- 3.4 Induction et restriction . . . 18
- 3.5 Représentations compactes . . . 24

4 Rappel sur les groupes réductifs **30**
- 4.1 Les groupes réductifs . . . 30
- 4.2 Caractères non-ramifiés . . . 31
- 4.3 Sous-groupes paraboliques . . . 32

5 Représentations des groupes p-adiques **34**
- 5.1 Les foncteurs i_P^G et r_P^G . . . 34
- 5.2 Représentations cuspidales . . . 35
- 5.3 Décomposition de $\mathcal{M}(G)$ . . . 37
- 5.4 Décomposition de Bernstein . . . 40

6 Isomorphisme de Satake **41**
- 6.1 Quelques formules d'intégrations . . . 42
- 6.2 L'isomorphisme de Satake . . . 44
- 6.3 Groupe dual . . . 46
- 6.4 Application . . . 46

7 Conjecture de Langlands pour GL_n **47**
- 7.1 Représentations galoisiennes . . . 47
- 7.2 Conjecture de Langlands locale . . . 48

8 Conjecture de Langlands pour G **49**
- 8.1 Le groupe dual de Langlands . . . 49
- 8.2 Conjecture de Langlands locale pour G . . . 50
- 8.3 Fonctorialité de Langlands . . . 51

Introduction

Dans ce rapport, nous allons nous intéresser aux représentations des groupes p-adiques. Les groupes réductifs p-adiques sont des groupes localement compacts totalement discontinus, appelés groupes t.d., que nous allons étudier dans la première partie. Une équivalence de catégories entre les représentations dites lisses des groupes t.d. et les modules non-dégénérés sur une certaine algèbre à idempotents, va nous amener à la deuxième partie sur l'étude de ces algèbres. Dans la troisième partie, nous allons appliquer les résultats établis à la deuxième partie aux représentations des groupes t.d. grâce à cette équivalence de catégories. Les parties quatre et cinq ont pour but d'approfondir ces résultats lorsque l'on dispose de groupes réductifs p-adiques. La partie quatre comporte des rappels sur ces derniers ainsi que des résultats nécessaires pour la suite du rapport. Dans la partie cinq, nous allons utiliser la structure des groupes réductifs p-adiques pour obtenir plus d'informations sur leurs représentations. En particulier, à l'aide des représentations cuspidales, nous allons pouvoir établir une décomposition de la catégorie des représentations lisses de notre groupe.

Nous souhaitons également énoncer les conjectures de Langlands, ce que nous ferons aux parties sept et huit, qui établissent une correspondance entre les représentations admissibles d'une groupe réductif p-adique et certaines représentations galoisiennes. Un élément clé pour comprendre le passage des conjectures de Langlands pour GL_n aux conjectures de Langlands pour G, ainsi que la fonctorialité de Langlands, est l'isomorphisme de Satake que nous allons étudier dans la partie six à l'aide des résultats établis dans les parties précédentes.

Nous allons suivre principalement [Ren10] pour ce qui est de l'étude des représentations des groupes réductifs p-adiques. La référence pour l'isomorphisme de Satake est l'article de Cartier [Car79]. En ce qui concerne les conjectures de Langlands, nous allons utiliser les articles [Cog03b] et [Cog03a].

0.1 Remarque. Dans ce rapport le corps des coefficients des représentations sera $\mathbb{C}$. Dans la plupart des définitions de base on pourrait remplacer $\mathbb{C}$ par un corps de caractéristique positive, voir même un anneau. Cependant, cela rajouterai des hypothèses techniques, par exemple, on a l'existence d'une mesure de Haar sur un groupe localement compact totalement discontinu si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert compact de pro-ordre inversible dans l'anneau des coefficients.

1 Espaces et groupes totalement discontinus

1.1 Espaces t.d. et distributions

1.1 Définition. On appelle espace topologique localement compact totalement discontinu (en abrégé espace t.d.) un espace topologique séparé tel que chaque point admette une base de voisinage d'ouverts compacts.
Un groupe topologique localement compact totalement discontinu (groupe t.d.) est un groupe topologique tel que l'espace sous-jacent est un espace t.d.

1.2 Remarque. On peut montrer qu'un groupe topologique est un groupe t.d. si et seulement si l'élément neutre admet une base de voisinages de sous-groupes ouverts compacts.

1.3 Lemme. *Soit X un espace t.d., K un compact de X et $\bigcup_\alpha U_\alpha$ un recouvrement de K par des ouverts. Alors il existe un recouvrement subordonné fini de K par des ouverts compacts disjoints V_i ($\forall i, \exists \alpha, V_i \subset U_\alpha$).*

Démonstration. Pour chaque $x \in U_\alpha$ choisissons un voisinage ouvert compact $V_{x,\alpha}$ tel que $V_{x,\alpha} \subset U_\alpha$. On a alors $K \subset \bigcup_{\alpha,x} V_{x,\alpha}$ et par compacité de K on peut en extraire un sous-recouvrement fini $K \subset \bigcup_i V_{x_i,\alpha_i}$. Les V_{x_i,α_i} sont des compacts ouverts, il en est de même pour leurs intersections et différences symétriques. On peut donc aisément déduire du recouvrement précédent un recouvrement de K vérifiant les conditions de l'énoncé. $\square$

1.4 Définition. Soit X un espace t.d. On définit sur X les espaces suivants :

— $\mathcal{C}^\infty(X)$: espace des fonctions localement constantes à valeurs complexes

— $\mathcal{D}(X)$: espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(X)$ à support compact

— $\mathcal{D}'(X)$: dual (algébrique) de $\mathcal{D}(X)$ (appelé espace des distributions)

1.5 Lemme. *Soit $f \in \mathcal{D}(X)$. Alors f peut d'écrire comme une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'ouverts compacts disjoints.*

Démonstration. Pour chaque x dans le support de f on choisit un ouvert compact U_x sur lequel f est constante. Comme le support de f est compact, il nous suffit d'appliquer le lemme 1.3 pour obtenir le résultat. $\square$

1.6 Proposition. *Soit X un espace t.d. et U un ouvert de X. Posons $Z = X \backslash U$, alors on a la suite exacte suivante,*

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(U) \xrightarrow{i_U} \mathcal{D}(X) \xrightarrow{p_Z} \mathcal{D}(Z) \longrightarrow 0$$

où i_U consiste à étendre les fonctions sur U par 0 en dehors de U et p_Z consiste à restreindre les fonctions à Z.

Démonstration. Tout d'abord notons que comme Z est fermé, la restriction de fonctions de $\mathcal{D}(X)$ donne bien des fonctions localement constantes et à supports compacts, donc p_Z est bien définie.

i_U est clairement injective. Montrons la surjectivité de p_Z. Soit $f \in \mathcal{D}(Z)$. Il nous faut étendre f à X. f étant localement constante, on peut recouvrir son support, notons le Z', par des ouverts de X tels que f soit constante sur l'intersection de l'un de ces ouverts et Z'. Z' étant compact on peut appliquer le lemme 1.3 pour obtenir un recouvrement fini par des ouverts compacts disjoints ayant la même propriété. On étend alors f par une fonction constante sur ces ouverts et par 0 en dehors.

Il reste à vérifier l'exactitude de la suite. Il est clair que $p_Z \circ i_U = 0$. Et si $p_Z(f) = 0$, alors comme f est localement constante elle est nulle sur un ouvert contenant Z, donc son support est inclus dans U. $\square$

En passant au dual on obtient

1.7 Corollaire. *La suite*

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}'(Z) \xrightarrow{p_Z^*} \mathcal{D}'(X) \xrightarrow{i_U^*} \mathcal{D}'(U) \longrightarrow 0$$

est exacte.

On définit le support d'une distribution T, noté $Supp(T)$, comme le complémentaire de la réunion des ouverts U de X tels que $i_U^*(T) = 0$. Notons également, que si Z est un fermé de X, alors toute distribution à support dans Z s'écrit de manière unique sous la forme $p_Z^*(T_0)$ où $T_0 \in \mathcal{D}'(Z)$. Ce qui nous permet d'identifier les distributions à support dans Z et les distributions sur Z.

Nous pouvons également définir un nouvel espace fonctionnel :

1.8 Définition. On note $\mathcal{E}'(X)$ l'espace des distributions sur X à support compact.

Définissons maintenant une dualité entre $\mathcal{E}'(X)$ et $\mathcal{C}^\infty(X)$. Soit $T \in \mathcal{E}'(X)$. Notons $Z = Supp(T)$ un compact de X. Il existe une unique distribution $T_0 \in \mathcal{D}'(Z)$ telle que $T = p_Z^*(T_0)$. Alors pour $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, $p_Z(f) \in \mathcal{D}(Z)$ et on définit

$$\langle T, f \rangle = \langle T_0, p_Z(f) \rangle.$$

1.9 Remarque. On notera la dualité (entre $\mathcal{D}'(X)$ et $\mathcal{D}(X)$ ou entre $\mathcal{E}'(X)$ et $\mathcal{C}^\infty(X)$) par

$$\langle T, f \rangle = \int_X f dT = \int_X f(x) dT(x).$$

1.10 Remarque. Ces résultats peuvent s'étendre aisément aux fonctions à valeurs dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V avec $\mathcal{C}^\infty(X, V)$ (resp. $\mathcal{D}(X, V)$) l'ensemble des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans V (resp. à support compact).

Nous allons maintenant définir le produit tensoriel de deux distributions. Soient X et Y deux espaces t.d. $X \times Y$ munis de la topologie produit devient un espace t.d. et les $U \times V$, où U (resp. V) est un ouvert compact de X (resp. Y) forment une base de voisinages de $X \times Y$. D'après le lemme 1.3 toute fonction de $\mathcal{D}(X \times Y)$ est donc une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ouverts compacts disjoints de la forme $U \times V$. Ceci nous montre que $\mathcal{D}(X \times Y) \simeq \mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$, l'isomorphisme étant

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y), \ x \in X, \ y \in Y, \ f \in \mathcal{D}(X), \ g \in \mathcal{D}(Y).$$

On peut maintenant définir $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ pour $T_1 \in \mathcal{D}'(X)$, $T_2 \in \mathcal{D}'(Y)$, par

$$\langle T_1 \otimes T_2, f \otimes g \rangle = \langle T_1, f \rangle \langle T_2, g \rangle.$$

Les intégrales étant en réalité des sommes finies, les formules de Fubini sont valides

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} f(x, y) d(T_1 \otimes T_2)(x, y) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) dT_2(y) \right) dT_1(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) dT_1(x) \right) dT_2(y)\end{aligned}$$

Il est également aisé de vérifier que $Supp(T_1 \otimes T_2) = Supp(T_1) \times Supp(T_2)$, en particulier le produit tensoriel de deux distributions à support compact est à support compact.

1.2 Groupes t.d.

Si X est un ensemble, G un groupe agissant sur X, E un espace vectoriel de fonctions sur X alors G agit sur E de la manière suivante :

$$g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x),\ x \in X,\ g \in G,\ f \in E.$$

Et si E' est un espace fonctionnel sur X en dualité avec E alors G agit également sur E' par :

$$\langle g \cdot T, f \rangle = \langle T, g^{-1} \cdot f \rangle,\ g \in G,\ f \in E,\ T \in E'$$

.

Un groupe G agit sur lui même par translation à gauche et à droite. Notons l et r ces actions, définies par :

$$l(g) \cdot g' = gg',\ r(g) \cdot g' = g'g^{-1},\ g \in G,\ g' \in G$$

À partir de maintenant, G sera un groupe t.d. Il agit donc par l et r sur $\mathcal{C}^\infty(G)$, $\mathcal{D}(G)$, $\mathcal{D}'(G)$ et $\mathcal{E}'(G)$.

1.3 L'algèbre $\mathcal{E}'(G)$

Soient T_1, T_2 deux distributions dans $\mathcal{E}'(G)$. On peut définir leur produit de convolution de la manière suivante

$$\int_G f(g) d(T_1 * T_2)(g) = \int_{G \times G} f(gh) d(T_1 \otimes T_2)(g, h),\ f \in \mathcal{D}(G).$$

On veut également définir pour $T \in \mathcal{D}'(G)$ et $f \in \mathcal{D}(G)$, les fonctions $T * f$ et $f * T$ de $\mathcal{D}(G)$:

$$(T * f)(g_0) = \int_G f(g^{-1} g_0) dT(g),$$

$$(f * T)(g_0) = \int_G f(g_0 g^{-1}) dT(g).$$

1.11 Proposition. *Soient T_1,T_2,T_3 dans $\mathcal{E}'(G)$ et f dans $\mathcal{D}(G)$. On a alors les formules suivantes :*

1. *$Supp(T_1 * T_2) \subset Supp(T_1) \cdot Supp(T_2)$*
2. *$(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$*
3. *$(T_1 * T_2) * f = T_1 * (T_2 * f)$*
4. *$T_1 * (f * T_2) = (T_1 * f) * T_2$*
5. *$(f * T_1) * T_2 = f * (T_1 * T_2)$*

Notons δ_g la distribution de Dirac au point $g \in G$.

1.12 Lemme. *Soient $T \in \mathcal{E}'(G)$ et g, g' deux éléments de G. Alors*

$$\delta_g * T = l(g) \cdot T,\ T * \delta_g = r(g^{-1}) \cdot T,\ \delta_g * \delta_{g'} = \delta_{gg'}$$

En particulier pour $g = \mathbf{1}_G$ (l'élément neutre de G), on a $T * \delta_{\mathbf{1}_G} = \delta_{\mathbf{1}_G} * T = T$. Ainsi, $\mathcal{E}'(G)$, munit du produit de convolution, est une algèbre associative d'élément neutre $\delta_{\mathbf{1}_G}$.

1.4 Espaces fonctionnels

Nous allons définir de nouveaux espaces pour K un ouvert compact :

$$\mathcal{C}^\infty(G,K,l) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(G) \mid l(k)\cdot f = f,\ k \in K\}$$

$$\mathcal{C}^\infty(G,K,r) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(G) \mid r(k)\cdot f = f,\ k \in K\}$$

$$\mathcal{C}^\infty(G,K) = \mathcal{C}^\infty(G,K,l) \cap \mathcal{C}^\infty(G,K,r)$$

De même on définit

$$\mathcal{D}(G,K,l),\ \mathcal{D}(G,K,r),\ \mathcal{D}(G,K)$$

$$\mathcal{D}'(G,K,l),\ \mathcal{D}'(G,K,r),\ \mathcal{D}'(G,K)$$

$$\mathcal{E}'(G,K,l),\ \mathcal{E}'(G,K,r),\ \mathcal{E}'(G,K)$$

On pose également

$$\mathcal{C}^\infty_{unif,l}(G) = \bigcup_K \mathcal{C}^\infty(G,K,l)$$

$$\mathcal{C}^\infty_{unif,r}(G) = \bigcup_K \mathcal{C}^\infty(G,K,r)$$

$$\mathcal{C}^\infty_{unif}(G) = \bigcup_K \mathcal{C}^\infty(G,K)$$

où K décrit l'ensemble des ouverts compacts de G.
Et de manière analogue on définit,

$$\mathcal{D}_{unif,l}(G),\ \mathcal{D}_{unif,r}(G),\ \mathcal{D}_{unif}(G)$$

$$\mathcal{D}'_{unif,l}(G),\ \mathcal{D}'_{unif,r}(G),\ \mathcal{D}'_{unif}(G)$$

$$\mathcal{E}'_{unif,l}(G),\ \mathcal{E}'_{unif,r}(G),\ \mathcal{E}'_{unif}(G)$$

1.13 Lemme. *1. Soient $K \subset K_1$ des sous-groupes ouverts compacts de G. Alors $[K_1 : K]$ est fini.*

2. Si K est un sous-groupe ouvert compact de G alors G/K est discret. Si de plus G est séparable alors G/K est dénombrable.

Démonstration. 1. K_1 peut s'écrire comme union de ses classes à droite modulo K. Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini, mais celui-ci ne peut pas être strictement plus petit donc il n'y a qu'un nombre fini de classes à droites.

2. Tous les points de G/K, gK, étant ouverts, G/K est discret. Supposons maintenant que G est séparable, et prenons $\{U_i\}$ une base dénombrable d'ouverts de G. Pour tout $g \in G$, gK est un ouvert de G donc il existe un entier i tel que $U_i \subset gK$. Les classes à droite étant distinctes, on en déduit le résultat.

$\square$

1.14 Lemme. *1. Soit $f \in \mathcal{D}(G)$. Alors il existe un sous-groupe ouvert compact K de G, un ensemble fini de représentants $\{g_j\}$ des doubles classes modulo K dans G et des scalaires a_j tels que*

$$f = \sum_j a_j \chi_{K g_j K}$$

(χ_X désigne la fonction caractéristique de X).

2. Soit $f \in \mathcal{D}(G, K, l)$ (resp. $\mathcal{D}(G, K, r)$). Alors le support de f est une union finie de classes à droite (resp. à gauche) de K dans G. Soient $g_1, \ldots, g_r$ ces représentants alors

$$f = \sum_i c_i \chi_{K g_i}, \text{ (resp. } f = \sum_i c_i \chi_{g_i K}).$$

Démonstration. Posons $F = Supp(f)$. Pour tout $g \in F$, il existe un ouvert compact K_g tel que f soit constante sur $K_g g K_g$. On peut extraire du recouvrement $F \subset \bigcup_{g \in F} K_g g K_g$ un sous-recouvrement fini $F \subset \bigcup_i K_{g_i} g_i K_{g_i}$ (par compacité). Posons alors $K = \bigcap_i K_{g_i}$ qui est un ouvert compact de G. D'après le lemme 1.13, pour tout i, $[K_{g_i} : K]$ est fini, donc on peut trouver un nombre fini de représentants $\{g_j\}$ des doubles classes modulo K tel que $F \subset \bigcup_j K g_j K$. Et on a le résultat.

La démonstration du deuxième point se fait de manière analogue. □

On a en particulier :

1.15 Corollaire. *On a*

$$\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{C}^\infty_{unif}(G) \subset \mathcal{C}^\infty(G).$$

Et

$$\mathcal{D}_{unif,l}(G) = \mathcal{D}_{unif,r}(G) = \mathcal{D}_{unif}(G) = \mathcal{D}(G).$$

1.5 Mesure de Haar

1.16 Proposition. *Soit G un groupe t.d. Il existe à un facteur multiplicatif scalaire près, une seule distribution μ_G sur G invariante par translation à gauche. On peut choisir μ_G positive (c'est à dire telle que $\langle \mu_G, f \rangle > 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(G)$ non identiquement nulle et à valeurs positives ou nulles). De manière analogue, on peut définir une mesure invariante à droite ν_G.*

Démonstration. Notons K_α une famille de sous-groupes ouverts compacts formant un système de voisinages de l'élément neutre dans G. Supposons de plus que l'un d'entre eux, K_{α_0}, contient tous les autres. On pose $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}(G, K_\alpha, r)$. Alors si $K_\alpha \subset K_\beta$, $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{D}_\alpha$ et $\mathcal{D}(G) = \bigcup_\alpha \mathcal{D}_\alpha$. Les $\mathcal{D}_\alpha$ étant invariants sous l'action l de G, pour définir une distribution invariante à gauche sur G, il suffit de définir pour tout α, μ_α, un élément du dual de $\mathcal{D}_\alpha$ invariant à gauche, tel que si $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}_\beta$ alors $\mu_{\alpha | \mathcal{D}_\beta} = \mu_\beta$. Or, comme $\mathcal{D}_\alpha$ est engendré par les translatés à gauche de χ_{K_α}, il suffit de définir μ_α sur cet élément. Ceci nous montre bien l'unicité à un facteur multiplicatif près.

Pour l'existence on pose $\langle \mu_\alpha, \chi_{K_\alpha} \rangle = [K_{\alpha_0} : K_\alpha]^{-1}$ qui vérifient bien les conditions de compatibilité. □

La mesure de Haar μ_G permet de définir un plongement de $\mathcal{C}^\infty(G)$ dans $\mathcal{D}'(G)$ en définissant pour $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ la distribution $f\mu_G$ de la manière suivante

$$f\mu_G : \phi \in \mathcal{D}(G) \mapsto \int_G \phi(g)f(g)d\mu_G(g).$$

De plus on a :

1.17 Proposition. *Soient $T \in \mathcal{E}'(G)$ et $f \in \mathcal{D}(G)$, on a :*

1. $(T * f\mu_G) = (T * f)\mu_G$
2. $(f\nu_G * T) = (f * T)\nu_G$

Si μ_G est une mesure de Haar positive sur G alors il en est de même de $r(g) \cdot \mu_G$. Ceci permet donc de définir la fonction modulaire δ_G, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, grâce à la formule

$$r(g) \cdot \mu_G = \delta_G(g)\mu_G.$$

δ_G est un caractère de G et on a donc la formule suivante, pour $f \in \mathcal{D}(G)$,

$$\int_G f(h'gh^{-1})d\mu_G(g) = \delta_G(h) \int_G f(g)d\mu_G(g).$$

1.18 Proposition. *La restriction de δ_G à tout sous-groupe compact de G est identiquement égale à 1.*

Démonstration. En effet, l'image d'un sous-groupe compact de G par δ_G est un sous-groupe compact de $\mathbb{R}_+^*$ donc trivial. □

1.19 Définition. Un groupe G tel que δ_G est identiquement égale à 1 est dit unimodulaire.

Par exemple un groupe abélien est unimodulaire. Il est est de même pour un groupe qui est réunion de ses sous-groupes compacts.

Si H est un sous-groupe fermé de G, il n'existe par forcément de mesure sur l'espace t.d. G/H invariante sous l'action de G. Nous allons décrire ce qui ce passe dans cette partie. Ici, nous allons considérer $H\backslash G$ plutôt que G/H pour des raisons pratiques. Posons $\delta_{H\backslash G} = \delta_G/\delta_H$ qui est un caractère de H. Définissons également $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ comme l'ensemble des fonctions f localement constantes sur G telles que, pour tout $h \in H$, $g \in G$, $f(hg) = \delta_{H\backslash G}(h)f(g)$ et f est à support compact modulo H (c'est à dire qu'il existe un compact K_f de G tel que $Supp(f) \subset H \cdot K_f$). $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ est invariant sous l'action à droite de G. Notons également que si $\delta_{H\backslash G} = 1$ alors $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G}) \simeq \mathcal{D}(H\backslash G)$.

1.20 Théorème. *Il existe, à un facteur multiplicatif près, une unique distribution $\nu_{H\backslash G}$ sur $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$, invariante sous l'action à droite de G. On peut la choisir positive.*

On notera

$$\langle \nu_{H\backslash G}, f\rangle = \int_{H\backslash G} f(g)d\nu_{H\backslash G}(g)$$

Démonstration. Notons μ_G et μ_H les mesures de Haar à gauche sur G et H. On définit $p : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{C}^\infty(G)$ par

$$p(f)(g) = \int_H f(hg)\delta_G(h)^{-1} d\mu_H(h).$$

p commute avec l'action à droite de G. Montrons que p est à image dans $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$. Soit $h_0 \in H$ alors

$$\begin{aligned}
p(f)(h_0 g) &= \int_H f(hh_0 g)\delta_G(h)^{-1} d\mu_H(h) \\
&= \delta_G(h_0) \int_H f(hh_0 g)\delta_G(hh_0)^{-1} d\mu_H(h) \\
&= \delta_G(h_0)\delta_H(h_0)^{-1} \int_H f(hg)\delta_G(h)^{-1} d\mu_H(h) \\
&= \delta_{H\backslash G}(h_0) p(f)(g)
\end{aligned}$$

La condition sur le support étant clair, on a bien $Im(p) \subset \mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$.

Montrons que p est surjectif. Pour $g \in G$ et K un sous-groupe compact de G on note $\mathcal{D}(G)_g^K$ (resp. $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$) le sous-espace de $\mathcal{D}(G)$ (resp. $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$) des fonctions à support dans HgK et fixes sous l'action à droite de K. Alors $p(\mathcal{D}(G)_g^K) \subset \mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$. Une fonction de $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$ est déterminée par sa valeur en g donc cet espace est de dimension 1.

Soient $f \in \mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ et K_f un compact de G tel que $Supp(f) \subset H \cdot K_f$. Pour tout $x \in K_f$, soit K_x un sous-groupe compact ouvert de G tel que f soit constante sur xK_x. Par compacité, on extrait alors du recouvrement $K_f \subset \cup_{x\in K_f} xK_x$, un sous-recouvrement fini $K_f \subset \bigcup_i x_i K_{x_i}$. On pose alors $K = \bigcap_i K_{x_i}$, comme $[K_{x_i} : K]$ est fini, en considérant des représentants des classes à gauche modulo K, on obtient un recouvrement fini de K_f : $K_f \subset \bigcup_j x_j K$. Ainsi f s'écrit comme une somme finie $f = \sum_j f_j$ avec $Supp(f_j) \subset Hx_j K$ et les f_j sont invariantes sous l'action à droite de K. On vient de montrer que tout élément de $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ peut s'écrire comme une somme finie d'éléments des $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$. Ainsi, pour montrer la surjectivité de p, il nous suffit de montrer la surjectivité de $p : \mathcal{D}(G)_g^K \to \mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$. Or l'espace d'arrivée est de dimension 1 et comme $p(f)$ est non nul dès que f est à valeurs positives et non nulle, on obtient la surjectivité de p.

Prenons maintenant $f \in \mathcal{D}(G)_g^K$. f étant à support compact, on peut trouver un compact F de H tel que $Supp(f) \subset FgK$. Pour tout $y \in F$, ygK est un voisinage de yg dans G donc il existe un sous-groupe ouvert compact K_y de G tel que $K_y yg \subset ygK$. Par compacité de F, on extrait du recouvrement $F \subset \bigcup_{y\in F} K_y y$, un sous-recouvrement fini, $F \subset \bigcup_i K_{y_i} y_i$. On a alors $FgK \subset \bigcup_i K_{y_i} y_i gK \subset \bigcup_i y_i gK$. Mais f est invariante sous l'action à droite de K, elle donc entièrement déterminée par ses valeurs aux points $y_i g$. Cela nous permet d'identifier $\mathcal{D}(G)_g^K$ aux fonctions sur HgK/K à support fini. H agit transitivement sur HgK/K et HgK/K est discret car $HgK/K \subset G/K$ qui est lui même discret. Donc l'espace $\mathcal{D}(G)_g^K$ est engendré par les fonctions $l(h) \cdot \chi_{gK}$, pour $h \in H$.

Si T_1 et T_2 sont deux formes linéaires sur $\mathcal{D}(G)_g^K$ telles que $T_i(l(h) \cdot f) = \delta_G(h)^{-1} T_i(f)$, $i \in \{1, 2\}$, alors par ce qui précède, elles sont proportionnelles. Pour $g \in G$, on note δ_g la distribution de Dirac en g. Celle-ci engendre le dual de $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$. Définissons deux distributions T_1 et T_2 sur $\mathcal{D}(G)_g^K$ par

$T_1(f) = \langle \delta_g, p(f)\rangle$ et $T_2(f) = \langle \nu_G, f\rangle$. On vérifie aisément que ces distributions vérifient la condition précédente et sont donc proportionnelles. On en déduit que si $f \in \mathcal{D}(G)$ est telle que $p(f) = 0$ alors $\langle \nu_G, f\rangle = 0$.

On vient de montrer que $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G}) \simeq \mathcal{D}(G)/ker(p)$ et que toute distribution sur G invariante sous l'action à droite de G est nulle sur $ker(p)$. Ainsi la mesure de Haar à droite ν_G induit une forme linéaire invariante $\nu_{H\backslash G}$ sur $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$, unique à un facteur multiplicatif près. De plus comme on peut prendre ν_G positive, on peut prendre $\nu_{H\backslash G}$ positive. □

Si Γ est un sous-groupe compact de G, alors la mesure de Haar μ_Γ sur Γ, normalisée par $\mu_\Gamma(\Gamma) = 1$, définit un élément e_Γ de $\mathcal{E}'(G)$ par

$$\langle e_\Gamma, f\rangle = \int_\Gamma f(\gamma) d\mu_\Gamma(\gamma),\ f \in \mathcal{C}^\infty(G).$$

1.21 Lemme. *Soient Γ_1 et Γ_2 des sous-groupes compacts de G, et soit $g \in G$. Alors il existe une unique distribution T sur G à support compact telle que $Supp(T) \subset \Gamma_1 g \Gamma_2$, invariante sous l'action de Γ_1 par l, de Γ_2 par r, et normalisée par $\int_G dT = 1$.*

Démonstration. $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ agit sur $\Gamma_1 g \Gamma_2$ par $(\gamma_1, \gamma_2) \cdot x = \gamma_1 x \gamma_2^{-1}$. Le groupe $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ est unimodulaire et la démonstration du théorème 1.20 nous montre qu'il existe une unique distribution T_0 sur $\Gamma_1 g \Gamma_2$, $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$-invariante, telle que $\int_{\Gamma_1 g \Gamma_2} dT_0 = 1$. Le corollaire 1.7 nous fournit alors la distribution souhaitée. □

On en déduit aisément la proposition suivante.

1.22 Proposition. *Soient Γ,Γ_1 et Γ_2 des sous-groupes compacts de G, tels que $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$, et soit $g \in G$. Alors*

1. $e_\Gamma = e_{\Gamma_1} * e_{\Gamma_2}$
2. $\delta_g * e_\Gamma * \delta_{g^{-1}} = e_{g\Gamma g^{-1}}$

En particulier $e_\Gamma * e_\Gamma = e_\Gamma$ et si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $e_{\Gamma_2} = e_{\Gamma_1} * e_{\Gamma_2} = e_{\Gamma_2} * e_{\Gamma_2}$.

1.6 Algèbre de Hecke

1.23 Lemme. *Fixons une mesure de Haar à gauche μ_G sur G. Alors la multiplication par μ_G induit un isomorphisme*

$$\mathcal{D}(G) \simeq \mathcal{E}'_{unif,l}(G)$$

De plus, toute distribution T dans $\mathcal{E}'_{unif,l}(G)$ est aussi dans $\mathcal{E}'_{unif,r}(G)$ donc dans $\mathcal{E}'_{unif}(G)$.

On a donc $\mathcal{E}'_{unif,l}(G) = \mathcal{E}'_{unif,r}(G) = \mathcal{E}'_{unif}(G)$ et on notera désormais cet espace $\mathcal{H}(G)$, appelé algèbre de Hecke de G.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{E}'_{unif,l}(G)$ et K un sous-groupe ouvert compact tel que T soit invariante sous l'action de K par l. D'après le lemme 1.21, la restriction de T à toute partie de la forme Kg est proportionnelle à μ_G, on en déduit donc l'existence d'une fonction f, invariante sous l'action de K par l, telle que $T = f\mu_G$. f est localement constante et comme $Supp(T) = Supp(f)$, f est à support compact. Ainsi f est dans $\mathcal{D}(G)$.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{D}(G)$, alors $f\mu_G \in \mathcal{E}'_{unif,l}(G)$ et on en déduit le résultat. □

$\mathcal{H}(G)$ est stable par produit de convolution. Mais comme $\delta_{\mathbf{1}_G}$ n'est pas dans $\mathcal{H}(G)$, l'algèbre $(\mathcal{H}(G), *)$ n'est pas unitaire.

En fait, cette algèbre ressemble à une algèbre unitaire, c'est une algèbre à idempotents ce que nous allons étudier maintenant.

2 Algèbre à idempotents

2.1 Anneau à idempotents et module non-dégénéré

Soit A un anneau. Un élément e de A est un idempotent si $e^2 = e$. Si $I = Idem(A)$ est l'ensemble des idempotents de A, alors on peut le munir d'une relation d'ordre par

$$e \leq f \text{ si } eAe \subset fAf.$$

2.1 Remarque. Si $e \in A$ alors eAe est une sous-algèbre de A admettant e comme unité.

2.2 Lemme. *Soient $(e, f) \in I^2$ et $a \in A$. Alors*

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes*
   - *(a)* $e \leq f$
   - *(b)* $e \in fAf$
   - *(c)* $e = fef$

   De plus on a alors $e = ef = fe$.
2. *Si $e \leq f$ et si $ea = a$ alors $fa = a$.*

2.3 Définition. Soit A un anneau. On dit que A est un anneau à idempotents si pour tout ensemble fini d'éléments $\{a_i\}$ de A, il existe un idempotent $e \in A$ tel que $a_i = ea_ie$ pour tout i.

2.4 Remarque. L'ordre sur I est filtrant. Ainsi un anneau à idempotents est un anneau A tel que

$$A = \varinjlim_{e \in I} eAe = \bigcup_{e \in I} eAe$$

L'algèbre de Hecke définie au paragraphe précédent est une algèbre à idempotents.

2.5 Proposition. *L'algèbre $\mathcal{H}(G)$ est une algèbre à idempotents. La famille $(e_K)_K$, où K décrit l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G est un système filtrant d'idempotents.*

Démonstration. Nous avons vu que les e_K sont des idempotents de $\mathcal{H}(G)$. Soit $T \in \mathcal{H}(G)$. On peut trouver un sous-groupe compact ouvert K de G tel que T soit invariante sous l'action de K par translation à droite et à gauche. On en déduit que $e_K * T * e_K = T$. Si maintenant on a une famille finie de distributions $\{T_i\}$, on dispose alors de sous-groupes compacts ouverts $\{K_i\}$ tels que $e_{K_i} * T_i * e_{K_i} = T_i$. Il suffit alors de poser $K = \bigcap_i K_i$ pour avoir $e_K * T_i * e_K = T_i$ pour tout i. $\square$

Notons que $e_{K_1} \leq e_{K_2}$ si et seulement si $K_2 \subset K_1$.

Si K est un sous-groupe compact de G, on pose

$$\mathcal{H}(G, K) = e_K * \mathcal{H}(G) * e_K,$$

qui est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{H}(G)$ d'élément neutre e_K. Avec les notations de la section précédente, on a $\mathcal{H}(G,K) = \mathcal{E}(G,K)$.

Une base de $\mathcal{H}(G,K)$ est donnée par les distributions $a_{g,K} = e_K * \delta_g * e_K$ où g décrit un système de représentants de $K\backslash G/K$. En effet l'isomorphisme $\mathcal{H}(G) \simeq \mathcal{D}(G)$ induit par une mesure de Haar sur G induit un isomorphisme $\mathcal{H}(G,K) \simeq \mathcal{D}(G,K)$. Sous cet isomorphisme, $a_{g,K}$ correspond, à un multiple scalaire près, à χ_{KgK}. Or on sait que les $\{\chi_{KgK}\}$, où g parcourt un système de représentants de $K\backslash G/K$, forment une base de $\mathcal{D}(G,K)$.

2.6 Définition. Un module M sur l'anneau à idempotent A est dit non dégénéré si pour tout élément $m \in M$, il existe un idempotent e de A tel que $e \cdot m = m$. De manière équivalente M est non dégénéré si $M = \varinjlim_{e\in I} e \cdot M$.

Pour tout module M sur A, on note M_A le plus grand sous-module non-dégénéré de M. On a

$$M_A = \bigcup_{e\in I} e \cdot M.$$

On définit $\mathcal{M}(A)$ la catégorie des modules (à gauche) non dégénérés sur l'anneau à idempotent A. C'est une sous-catégorie pleine de $A-\mathbf{mod}$ la catégorie des modules sur A. Nous noterons également $\mathcal{M}(A)_d$ la catégorie des A-modules à droite non-dégénérés.

2.7 Proposition. *Le foncteur $A - \boldsymbol{mod} \to \mathcal{M}(A)$, $M \longmapsto M_A$ est exact.*

Démonstration. Si $f : M \to N$ est un morphisme dans $A - \mathbf{mod}$, il envoie M_A sur N_A. Le foncteur sur les morphismes est donc donné par la restriction à la partie non-dégénérée.

Si l'on a une suite exacte dans $A - \mathbf{mod}$: $L \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} N$. Nous avons que $Im(f_{|L_A}) \subset ker(g_{|M_A})$. Réciproquement, si $m \in ker(g) \cap M_A$, il existe $l \in L$ tel que $f(l) = m$. Soit $e \in I$ tel que $e \cdot m = m$. Alors $m = e \cdot m = e \cdot f(l) = f(e \cdot l)$ et comme $e \cdot l \in L_A$, on a bien $m \in Im(f_{|L_A})$. $\square$

2.2 Foncteurs d'oublis et d'inductions

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents. Alors on peut munir tout A-module non dégénéré M d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de la façon suivante : pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in M$ et $e \in I$ tel que $e \cdot m = m$ on pose $\lambda m = (\lambda e) \cdot m$.

Si X et Y dont deux A-modules non dégénérés, alors ce sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et tout morphisme dans $Hom_A(X,Y)$ est alors $\mathbb{C}$-linéaire. $Hom_A(X,Y)$ devient un $\mathbb{C}$-espace vectoriel par $\lambda\phi : x \mapsto \phi(\lambda x)$ pour $\phi \in Hom_A(X,Y)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On peut définir les foncteurs suivants

$$\bullet \otimes_A X : \mathcal{M}(A)_d \to \mathbb{C} - \mathbf{Ev},\ Y \longmapsto Y \otimes_A X$$

$$Hom_A(\bullet, X) : \mathcal{M}(A) \to \mathbb{C} - \mathbf{Ev},\ Y \longmapsto Hom_A(Y,X)$$

$$Hom_A(X, \bullet) : \mathcal{M}(A) \to \mathbb{C} - \mathbf{Ev},\ Y \longmapsto Hom_A(X,Y)$$

Pour R,S des $\mathbb{C}$-algèbres, on utilise la notation X^R (resp ${}^RX$, resp ${}^RX^S$) pour dire que X est un R module à droite (resp R module à gauche, resp R-S bimodule). Un résultat de la théorie des catégories sur l'adjonction des foncteurs précédent (voir [Ren10] corollaire I.2.2) nous montre :

2.8 Théorème. *Soient R,S des $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents.*

1. *Quels que soient les modules non dégénérés X^R,${}^RY^S$ et Z^S, on a un isomorphisme naturel,*
$$Hom_S(X \otimes_R Y, Z) \simeq Hom_R(X, Hom_S(Y, Z)_R)$$
2. *Quels que soient les modules non dégénérés ${}^RX$,${}^SY^R$ et ${}^SZ$, on a un isomorphisme naturel,*
$$Hom_S(Y \otimes_R X, Z) \simeq Hom_R(X, Hom_S(Y, Z)_R)$$
3. *Quels que soient les modules non dégénérés X^R,${}^RY^S$ et ${}^SZ$, on a un isomorphisme naturel,*
$$(X \otimes_R Y) \otimes_S Z \simeq X \otimes_R (Y \otimes_S Z)$$

2.9 Lemme. *Soit B une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents et N un B-module. Alors $B \otimes_B N$ s'identifie à N_B par $B \otimes_B N \to N$, $b \otimes n \mapsto b \cdot n$.*

Si N est non-dégénéré, le morphisme $N \to Hom_B(B, N)$, $n \mapsto \phi_n$ où $\phi_n(b) = b \cdot n$, est injectif. Son image est $Hom_B(B, N)_B$.

Démonstration. B étant un B-module non-dégénéré, $B \otimes_B N$ est non-dégénéré et son image par le premier morphisme est non dégénérée. Si $n \in N_B$, il existe $e \in B$ tel que $n = e \cdot n$ et cela montre la surjectivité du premier morphisme sur N_B.

Montrons l'injectivité du second morphisme. Supposons que $\sum_{i=1}^r b_i \cdot n_i = 0$, $b_i \in B$, $n_i \in N$. Soit e un idempotent de B tel que pour tout i, $e \cdot b_i = b_i$. Alors $\sum_{i=1}^r b_i \otimes n_i = \sum_{i=1}^r e \cdot b_i \otimes n_i = e \otimes \sum_{i=1}^r b_i \cdot n_i = 0$. Soient $\phi \in Hom_B(B, N)_B$ et $e \in B$ un idempotent tel que $e \cdot \phi = \phi$. Alors pour tout $b \in B$, $\phi(b) = (e \cdot \phi)(b) = \phi(be) = b \cdot \phi(e)$ et on a le résultat. □

Soient A et B des anneaux à idempotents.

2.10 Définition. Si B est un A-B-bimodule non dégénéré, on définit le foncteur d'oubli par :
$$\mathcal{F}_A^B : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A),\ N \mapsto B \otimes_B N$$

Si B est un B-A-bimodule non dégénéré, on peut également définir le pseudo foncteur d'oubli
$${}^\vee\mathcal{F}_A^B : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A),\ N \mapsto Hom_B(B, N)_A$$

On peut également définir des foncteurs d'inductions.

2.11 Définition. Si B est un A-B-bimodule non dégénéré, on pose
$$I_A^B : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B),\ M \mapsto Hom_A(B, M)_B.$$

Si B est un B-A-bimodule non dégénéré, on pose
$$P_A^B : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B),\ M \mapsto B \otimes_A M$$

2.12 Théorème. *Le foncteur I_A^B est l'adjoint à droite du foncteur d'oubli $\mathcal{F}_A^B$, et le foncteur P_A^B est l'adjoint à gauche du pseudo foncteur d'oubli ${}^\vee\mathcal{F}_A^B$. On a donc pour tout $M \in \mathcal{M}(A)$ et $N \in \mathcal{M}(B)$ des isomorphismes naturels*
$$Hom_A(M, I_A^B(N)) \simeq Hom_B(\mathcal{F}_A^B(M), N),$$
$$Hom_A(P_A^B(N), M) \simeq Hom_B(N, {}^\vee\mathcal{F}_A^B(M)).$$

Démonstration. Cela découle du théorème 2.8. $\square$

2.13 Théorème. *Le foncteur $\mathcal{F}_A^B$ est exact, les foncteurs I_A^B et ${}^\vee\mathcal{F}_A^B$ sont exacts à gauche et le foncteur P_A^B est exact à droite.*

Démonstration. On démontre le théorème grâce à l'exactitude à droite du foncteur $\otimes$, à l'exactitude à gauche des foncteurs Hom et à l'exactitude du foncteur $M \longmapsto M_A$. $\square$

2.3 Le foncteur j_e

Soient A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents, e un idempotent et M un A-module non dégénéré. Alors $e \cdot M$ est un eAe-module unitaire. On définit le foncteur j_e par

$$j_e : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(eAe),\ M \mapsto e \cdot M$$

2.14 Proposition. *Le foncteur j_e est exact.*

Démonstration. Soit $M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ une suite exacte. Il faut montrer que si $e \cdot m_2 \in ker(\psi)$ alors il existe $e \cdot m_1 \in e \cdot M_1$ tel que $\phi(e \cdot m_1) = e \cdot m_2$. Soit donc $e \cdot m_2 \in ker(\psi)$. Prenons $m_1 \in M_1$ tel que $\phi(m_1) = e \cdot m_2$. Alors $e \cdot m_2 = e \cdot (e \cdot m_2) = e \cdot \phi(m_1) = \phi(e \cdot m_1)$. $\square$

Notons :
$\mathcal{M}(A, e)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(A)$ des modules M tels que $M = Ae \cdot M$
$\mathbf{Irr}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de A-modules simples non dégénérés
$\mathbf{Irr}(eAe)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de eAe-modules simples unitaires
$\mathbf{Irr}(A, e)$ le sous-ensemble de $\mathbf{Irr}(A)$ des modules M tels que $e \cdot M \neq 0$

2.15 Lemme. *Posons le foncteur d'induction $i = P_{eAe}^A$. Alors $j_e \circ i$ est naturellement isomorphe à l'identité de $\mathcal{M}(eAe)$, c'est à dire que pour tout $Z \in \mathcal{M}(eAe)$, $Z \simeq j_e \circ i(Z)$, $z \mapsto e \otimes z$.*

Démonstration. On a $j_e \circ i(Z) = eA \otimes_{eAe} Z$. L'application $z \mapsto e \otimes z$ réalise une injection de Z dans $eA \otimes_{eAe} Z$. Montrons qu'elle est aussi surjective. Prenons $ea \otimes z \in eA \otimes_{eAe} Z$, alors $ea \otimes z = ea \otimes ez = eae \otimes z = e \otimes eaez$. Ces isomorphismes sont naturels en Z. $\square$

On en déduit que $A \cdot (e \cdot i(Z)) = i(Z)$ et en particulier i est à valeurs dans $\mathcal{M}(A, e)$.

2.16 Définition. Soient M un A-module non dégénéré et $e \in I$. Alors on définit M_e un A-module non dégénéré par :

$$M_e = M/F(eA, M),\ \text{où } F(eA, M) = \{m \in M \mid eA \cdot m = 0\}$$

2.17 Lemme. *Soit M un A-module non dégénéré. On a alors $(M_e)_e = M_e$.*

Démonstration. Soit $\bar{m} \in F(eA, M_e)$ et m un relèvement de $\bar{m}$ dans M. On a $eA \cdot m \subset F(eA, M)$ et donc $eAeA \cdot m = 0$. Ainsi $0 = eeeA \cdot m = eA \cdot m$ et $\bar{m} = 0$. On a bien le résultat. $\square$

2.18 Théorème. *L'application $M \mapsto e \cdot M$ réalise une bijection entre $\boldsymbol{Irr}(A, e)$ et $\boldsymbol{Irr}(eAe)$. L'inverse est donné par $W \mapsto (A \otimes_{eAe} W)_e$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que si $M \in \mathbf{Irr}(A, e)$ alors $e \cdot M \in \mathbf{Irr}(eAe)$. Soit $e \cdot m \in e \cdot M$ non nul. M étant un module simple, on a $(eAe)e \cdot m = (eA)e \cdot m = e(Ae \cdot m) = e \cdot M$. Ainsi, $e \cdot M$ ne possède pas de sous eAe -modules propres, c'est donc un module simple.

Montrons maintenant que si W est un eAe-module simple alors $(A \otimes_{eAe} W)_e$ est un A-module simple. En appliquant le foncteur j_e à la projection canonique $(A \otimes_{eAe} W) \to (A \otimes_{eAe} W)_e$ on obtient un morphisme de eAe-modules unitaires : $e \cdot (A \otimes_{eAe} W) \to e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e$. L'exactitude de j_e nous montre que ce morphisme est surjectif. Il est également injectif puisqu'un élément du noyau est un invariant par e de $F(eA, A \otimes_{eAe} W)$ donc est nul. Ainsi nous avons en fait un isomorphisme. En le composant avec celui du lemme 2.15, on obtient l'isomorphisme suivant de eAe-modules $W \simeq e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e$.

Soit $\bar{w}$ un élément non nul de $(A \otimes_{eAe} W)_e$. Nous souhaitons montrer que $A \cdot \bar{w} = (A \otimes_{eAe} W)_e$ ce qui impliquera la simplicité de $(A \otimes_{eAe} W)_e$. Deux cas se présentent, $e \cdot \bar{w}$ est nul ou non.

Supposons que $e \cdot \bar{w} \neq 0$. Comme $e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e \simeq W$ qui est un eAe-module simple, $eAe \cdot (e \cdot \bar{w}) = e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e$. Par la remarque suivant le lemme 2.15, on sait que $A \otimes_{eAe} W$ est engendré par $e \cdot (A \otimes_{eAe} W)$ et donc $(A \otimes_{eAe} W)_e$ est engendré par $e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e$. On a donc $A \cdot \bar{w} = Ae \cdot \bar{w} = (A \otimes_{eAe} W)_e$. On a donc montré le cas $e \cdot \bar{w} \neq 0$.

Si maintenant $e \cdot \bar{w} = 0$, alors grâce au lemme précédent nous savons que $(A \otimes_{eAe} W)_e = ((A \otimes_{eAe} W)_e)_e$ et donc que $eA \cdot \bar{w} \neq 0$. Prenons alors $\bar{w}'$ non nul, de la forme $\bar{w}' = a \cdot \bar{w}$ tel que $e \cdot \bar{w}' \neq 0$. Par le cas précédent, on en déduit que $A \cdot \bar{w}' = (A \otimes_{eAe} W)_e$ puis que $A \cdot \bar{w} = (A \otimes_{eAe} W)_e$.

Nous venons de montrer que $W \mapsto (A \otimes_{eAe} W)_e$ est bien une application de $\mathbf{Irr}(eAe)$ vers $\mathbf{Irr}(A, e)$

Il nous reste à montrer que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre. Nous avons déjà montré que pour $W \in \mathbf{Irr}(eAe)$ on a $W \simeq e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e$. Prenons maintenant $M \in \mathbf{Irr}(A, e)$. Définissons $\phi : A \otimes_{eAe} e \cdot M \to M$, $a \otimes e \cdot m \mapsto ae \cdot m$. On va montrer que $eA \cdot ker(\phi) = 0$. Supposons que $\phi(\sum_i a_i \otimes e \cdot m_i) = \sum_i a_i e \cdot m_i = 0$. Prenons $ea \in eA$. Alors $ae \cdot (\sum_i a_i \otimes e \cdot m_i) = \sum_i eaa_i e \otimes e \cdot m_i = e \otimes ea(\sum_i a_i e \cdot m_i) = 0$. Ainsi nous avons $ker(\phi) \subset F(eA, M)$ et nous pouvons factoriser ϕ en un morphisme $\bar{\phi} : (A \otimes_{eAe} e \cdot M)_e \to M$, $a \otimes e \cdot m \mapsto ae \cdot m$. Or nous avons vu que $(A \otimes_{eAe} e \cdot M)_e$ est un A-module simple, comme $\bar{\phi}$ n'est pas nulle c'est un isomorphisme. Et cela termine la preuve du théorème. □

3 Représentations des groupes t.d.

3.1 Une équivalence de catégorie

Nous rappelons que si G est un groupe, une représentation de G (π, V) est la donnée d'un espace vectoriel complexe V et d'un morphisme de groupes π de G dans $GL(V)$. Cela définit une action linéaire de G sur V. Si W est un sous-espace vectoriel de V stable sous l'action de G, π induit un morphisme de G dans $GL(W)$ que l'on notera π_W. La représentation (π_W, W) (également notée (π, W)) est appelée une sous-représentation de (π, V). Nous avons de même une représentation $(\pi_{V/W}, V/W)$ que l'on appelle un quotient de (π, V). Plus généralement, si

$W_1 \subset W_2$ sont des sous-espaces vectoriels stables par G alors la représentation $(\pi_{W_2/W_1}, W_2/W_1)$ est un sous-quotient de (π, V).

Une représentation avec V de dimension 1 est appelée un caractère.

3.1 Définition. Soit G un groupe t.d. Une représentation (π, V) de G est dite lisse si pour tout $v \in V$, il existe un sous-groupe ouvert de G qui fixe v.

Dans la suite, G désigne un groupe t.d.

Soit (π, V) une représentation de G. Alors V_0, l'ensemble des vecteurs de V fixés par un sous-groupe ouvert de G, est un sous-espace de V stable sous l'action de G. Alors la représentation (π, V_0) est lisse et est appelée la partie lisse de (π, V).

Nous avons vu que G agit sur $\mathcal{C}^\infty(G)$ par les représentations l et r.

3.2 Proposition. *Les représentations l et r préservent les sous-espaces $\mathcal{C}^\infty_{unif}(G)$ et $\mathcal{D}(G)$. Les sous-représentations $(l, \mathcal{C}^\infty_{unif}(G))$, $(r, \mathcal{C}^\infty_{unif}(G))$, $(l, \mathcal{D}(G))$ et $(r, \mathcal{D}(G))$ sont lisses.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_{unif}(G)$ et K tel que $f \in \mathcal{C}^\infty(G, K)$. Alors pour $k, k' \in K$ et $x, g \in G$ on a $(l(g) \cdot f)(gkg^{-1}xk') = f(kg^{-1}xk') = f(g^{-1}x) = (l(g) \cdot f)(x)$. Ainsi $f \in \mathcal{C}^\infty(G, K \cap gKg^{-1}) \subset \mathcal{C}^\infty_{unif}(G)$. De plus par définition, $l(K)$ fixe f donc $(l, \mathcal{C}^\infty_{unif}(G))$ est lisse.

On raisonne de même pour les autres représentations.

□

Si (π, V) et (τ, W) sont deux représentations lisses de G. On note $Hom_G((\pi, V), (\tau, W))$ (ou $Hom_G(V, W)$ ou $Hom_G(\pi, \tau)$) l'ensemble des opérateurs d'entrelacements entre (π, V) et (τ, W), c'est à dire les éléments f de $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ vérifiant $f(\pi(g) \cdot v) = \tau(g) \cdot f(v)$. On appelle $\mathcal{M}(G)$ la catégorie des représentations lisses de G, les morphismes étant les opérateurs d'entrelacements. On notera également $\mathbf{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses irréductibles de G.

Soient (π, V) une représentation lisse de G et $T \in \mathcal{E}'(G)$. Nous allons définir un opérateur $\pi(T)$ sur V. Définissons tout d'abord, pour $v \in V$,

$$\phi_v : G \to V, \ g \mapsto \pi(g) \cdot v.$$

Cela définit un élément de $\mathcal{C}^\infty(G, V)$.

Cela nous permet de définir $\pi(T)$ par

$$\pi(T) \cdot v = \langle T, \phi_v \rangle = \int_G \pi(g) \cdot v dT(g).$$

On a les formules suivantes, pour $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(G)$, $\pi(T_1 * T_2) = \pi(T_1) \circ \pi(T_2)$ et $\pi(\delta_g) = \pi(g)$. Ainsi ceci munit V d'une structure de $\mathcal{E}'(G)$-module et par restriction de $\mathcal{H}(G)$-module.

3.3 Théorème. *Si (π, V) est une représentation lisse de G, le $\mathcal{H}(G)$-module V est non dégénéré. Réciproquement, tout $\mathcal{H}(G)$-module V non dégénéré définit une représentation lisse de G. Ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre et induisent une équivalence de catégorie entre $\mathcal{M}(G)$ et $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$.*

Démonstration. Si (π, V) est une représentation lisse de G, prenons alors $v \in V$ et K un sous-groupe ouvert compact qui fixe v. Alors $\pi(e_K) \cdot v = v$ et v est fixé par un idempotent de $\mathcal{H}(G)$. V est donc un $\mathcal{H}(G)$-module non dégénéré. De plus tout morphisme dans $\mathcal{M}(G)$ nous donne un morphisme dans $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$.

Réciproquement, si V est un $\mathcal{H}(G)$-module non dégénéré. Soit $v \in V$ et K un sous-groupe ouvert compact de G tel que $e_K \cdot v = v$. Prenons $T \in \mathcal{E}'(G)$. On définit $\pi(T) \cdot v$ par $\pi(T) \cdot v = (T * e_K) \cdot v$. Ceci ne dépend pas du choix de l'idempotent e_K. En effet si e et f sont deux idempotents de $\mathcal{H}(G)$ tels que $e \cdot v = f \cdot v = v$. Alors si l'on choisit un majorant h à e et f (on a donc $e = h * e$ et $f = h * f$), $(T * e) \cdot v = (T * h * e) \cdot v = ((T * h) * e) \cdot v = (T * h) \cdot v = (T * f) \cdot v$. Cela nous définit donc $\pi(T) : V \to V$. On pose alors $\pi(g) \cdot v = \pi(\delta_g) \cdot v$. Et un morphisme de $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ nous donne un morphisme de $\mathcal{M}(G)$.

Ces deux foncteurs définissent l'équivalence de catégorie voulue. □

Dans la suite, compte tenu de l'équivalence de catégorie précédente, l'action de $\mathcal{H}(G)$ sur V sera notée $\pi(T) \cdot v$ ou simplement $T \cdot v$.

3.2 Le foncteur j_K

Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et soit (π, V) une représentation lisse de G. D'après l'équivalence de catégorie, V est un $\mathcal{H}(G)$-module non dégénéré. Nous avons défini à la section 2.3 un foncteur j_{e_K} que l'on notera maintenant j_K entre $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ et $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G, K))$.

3.4 Proposition. *1. Le module $j_K(V) = e_K \cdot V$ est le sous-espace V^K de V des vecteurs fixes sous l'action de K dans V.*

2. Le noyau de $\pi(e_K)$ dans V est le sous-espace $V(K)$ de V engendré par les vecteurs de la forme $\pi(e_K) \cdot v - v$ pour $v \in V$.

3. $V = V^K \oplus V(K)$.

4. Le foncteur j_K est exact.

Démonstration. Le point 1. est clair. Soit $v \in V$, alors $e_K \cdot (e_K \cdot v - v) = 0$ donc $V(K) \subset ker(e_K)$. Mais comme $\pi(e_K)$ est un projecteur, $V = ker(e_K) \oplus Im(e_K)$. De plus, on a que $v = e_K \cdot v - (e_K \cdot v - v)$, ce qui montre que $V = e_K \cdot V + V(K)$. On en déduit 2. et 3. .

4. a déjà été montré. □

Traduisons les résultats montrés à la section 2.3.

3.5 Théorème. *1. La représentation (π, V) est irréductible si et seulement si pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, le $\mathcal{H}(G, K)$-module V^K est simple ou nul.*

2. Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux représentations lisses irréductibles de G, et K un sous-groupe ouvert compact de G tel que $V_1^K \neq 0$ et $V_2^K \neq 0$. Alors π_1 et π_2 sont équivalentes si et seulement si V_1^K et V_2^K sont des $\mathcal{H}(G, K)$ modules isomorphes.

3. Pour chaque module simple W de $\mathcal{H}(G, K)$, il existe une représentation irréductible π de G telle que $V^K = W$.

3.3 Lemme de Schur

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre.

3.6 Théorème. *Soit M un A-module simple. Alors*

1. *$End_A(M)$ est une algèbre à division.*
2. *Si la dimension de M sur $\mathbb{C}$ est au plus dénombrable, on a $End_A(M) \simeq \mathbb{C}$. Il suffit pour cela que la dimension de A soit au plus dénombrable.*

Démonstration. Voir [Ren10] (théorème B.II) pour une démonstration. □

3.7 Proposition (Lemme de Schur)**.** *Soient G un groupe t.d. séparable, et (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Alors l'ensemble $Hom_G(V, V)$ est l'ensemble des opérateurs scalaires. Si (τ, W) est une autre représentation lisse irréductible de G non équivalente à (π, V) alors $Hom_G(V, W) = 0$.*

Démonstration. Soit $v \in V$ et K un sous-groupe ouvert compact de G fixant v. V étant irréductible, il est engendré par les vecteur $\pi(g) \cdot v$, où g décrit un système de représentant de G/K. Un tel système est dénombrable donc V est de dimension au plus dénombrable. L'équivalence de catégorie nous donne $Hom_G(V, V) \simeq End_{\mathcal{H}(G)}(V)$ et le théorème précédent nous permet de conclure. Un opérateur d'entrelacement entre V et W étant nécessairement un isomorphisme, le second point est clair. □

Supposons G séparable et soit Z un sous-groupe contenu dans le centre de G $Z(G)$. Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Le lemme de Schur nous dit que tout élément $z \in Z$ agit comme un scalaire sur V. On note $\pi(z) = \chi_\pi(z) Id_V$, pour $z \in Z$. χ_π est alors un caractère de Z. On l'appelle caractère central lorsque $Z = Z(G)$.

Si (π, V) est une représentation lisse de G et s'il existe un caractère χ de $Z(G)$ tel que $\pi(z) = \chi(z) Id_V$, pour $z \in Z$, on dit que (π, V) admet le caractère central χ.

3.8 Lemme. *Si (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont deux représentations lisses de G admettant respectivement les caractères centraux χ_1 et χ_2. Si χ_1 et χ_2 sont distincts, alors il n'existe pas d'opérateurs d'entrelacement entre V_1 et V_2.*

Démonstration. Soient $A \in Hom_G(V_1, V_2)$ et $z \in Z(G)$ tel que $\chi_1(z) \neq \chi_2(z)$. Alors pour $v \in V$, $\chi_1(z)A(v) = A(\chi_1(z)v) = A(\pi_1(z) \cdot v) = \pi_2(z) \cdot A(v) = \chi_2(z)A(v)$ et donc $A(v) = 0$. □

3.4 Induction et restriction

À la section 2.2 nous avons défini des foncteurs d'inductions et de restrictions. Nous allons utiliser ces résultats pour définir des foncteurs entre $\mathcal{M}(G)$ et $\mathcal{M}(H)$, où G et H sont des groupes t.d.

Soient $\phi : H \to G$ un morphisme de groupes continu et (π, V) une représentation lisse de G. On définit alors la représentation de H $(\mathcal{F}_\phi(\pi), \mathcal{F}_\phi(V))$ par $\mathcal{F}_\phi(V) = V$ et $\mathcal{F}_\phi(\pi)(h) \cdot v = \pi(\phi(h)) \cdot v$, pour $h \in H$ et $v \in V$. Cette représentation est bien lisse puisque $Stab_H(v) = \phi^{-1}(Stab_G(v))$ est un ouvert de H. Par les équivalence de catégorie $\mathcal{M}(G) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ et $\mathcal{M}(H) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{H}(H))$ on en déduit un foncteur d'oubli $\mathcal{F}_\phi : \mathcal{M}(\mathcal{H}(G)) \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(H))$ que l'on souhaite identifier avec les foncteurs de la section 2.2.

Il nous faut donc munir $\mathcal{H}(G)$ d'une structure de $\mathcal{H}(H)$-module non dégénéré. En fait nous allons voir que l'on peut le munir d'une structure de $\mathcal{H}(H)$-bimodule non-dégénéré. Nous avons deux représentations lisses de G : $(\mathcal{H}(G), l)$ et $(\mathcal{H}(G), r)$. En utilisant $\mathcal{F}_\phi$ nous obtenons deux représentations lisses de H et donc deux structures de $\mathcal{H}(H)$-module non dégénéré à gauche sur $\mathcal{H}(G)$. On transforme l'action à gauche donnée par $(\mathcal{H}(G), r)$ en une action à droite grâce à l'anti-involution $h \mapsto h^{-1}$. Ceci nous définit une structure de $\mathcal{H}(H)$-bimodule non dégénéré sur $\mathcal{H}(G)$. On peut alors définir

$$\mathcal{F}_H^G = \mathcal{F}_{\mathcal{M}(H)}^{\mathcal{M}(G)},\ {}^\vee\mathcal{F}_H^G = {}^\vee\mathcal{F}_{\mathcal{M}(H)}^{\mathcal{M}(G)},\ I_H^G = I_{\mathcal{M}(H)}^{\mathcal{M}(G)},\ P_H^G = P_{\mathcal{M}(H)}^{\mathcal{M}(G)}.$$

On vérifie aisément que $\mathcal{F}_\phi = \mathcal{F}_H^G$.

Supposons à partir de maintenant que H est un sous-groupe fermé de G (ϕ est donc l'inclusion). Identifions les foncteurs précédents avec des constructions plus classiques de la théorie des représentations.

3.9 Définition. Soit G un groupe t.d. et H un sous-groupe fermé de G. Soit (ρ, E) une représentation lisse de H. On définit la représentation induite $Ind_H^G(\rho, E) = (Ind_H^G\rho, Ind_H^G E)$ de la façon suivante. L'espace $Ind_H^G E$ est l'espace des fonctions $f : G \to E$ vérifiant :

1. $f(hg) = \rho(h) \cdot f(g)$, $g \in G$, $h \in H$.
2. Il existe un sous-groupe ouvert compact K de G (dépendant de f) tel que $f(gk) = f(g)$, $g \in G$, $k \in K$.

La représentation $Ind_H^G\rho$ est définie sur cet espace par

$$(Ind_H^G\rho)(g) \cdot f = r(g) \cdot f.$$

On définit également $ind_H^G E$ comme le sous-espace de $Ind_H^G E$ des fonctions vérifiant de plus la condition

3. Il existe une partie compacte F de G tel que $Supp(f) \subset H \cdot F$.

$ind_H^G E$ est stable sous l'action $Ind_H^G\rho$ de G et on note $ind_H^G\rho$ sa restriction à $ind_H^G E$. On pose alors $ind_H^G(\rho, E) = (ind_H^G\rho, ind_H^G E)$.

3.10 Remarque. La condition 2. garantie que $Ind_H^G(\rho, E)$ est lisse.

3.11 Lemme. *Soit K un sous-groupe ouvert compact de G, et soit Ω un système de représentants des doubles classes $H\backslash G/K$. Pour tout $g \in G$, posons $K_g = H \cap gKg^{-1}$. La restriction des fonctions de $Ind_H^G E$ (resp. $ind_H^G E$) à Ω définit un isomorphisme de $(Ind_H^G E)^K$ (resp. $(ind_H^G E)^K$) avec l'espace $\mathcal{F}(\Omega, E)$ (resp. $\mathcal{F}_c(\Omega, E)$) des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que $f(g) \in E^{K_g}$ pour tout $g \in G$ (resp. avec l'espace de ces fonctions à support fini).*

Démonstration. Prenons $f \in (Ind_H^G E)^K$. On a alors pour $h \in H$, $g \in G$, $k \in K$, $f(hgk) = \rho(h) \cdot f(g)$ (*). Donc la restriction de f à Ω caractérise bien f. De plus si $h = gkg^{-1} \in K_g$, on a $\rho(h) \cdot f(g) = f(hg) = f(gkg^{-1}g) = f(gk) = f(g)$ et $f \in E^{K_g}$.

Réciproquement la formule (*) permet bien de prolonger une fonction $f \in \mathcal{F}(\Omega, E)$ à $(Ind_H^G E)^K$. Ce prolongement est indépendant des choix effectués, en effet, si $hgk = h_1 g_1 k_1$ avec $h, h_1 \in H$, $g, g_1 \in G$ et $k, k_1 \in K$, alors $h_1^{-1}h = gk_1k^{-1}g^{-1} \in$

$H \cap gKg^{-1} = K_g$ et $\rho(h) \cdot f(g) = \rho(h_1 h_1^{-1} h) \cdot f(g) = \rho(h_1)\rho(h_1^{-1}h) \cdot f(g) = \rho(h_1) \cdot f(g)$.

Comme l'espace G/K est discret, il en est de même pour Ω et une fonction à support compact sur un espace discret est une fonction à support fini. $\square$

3.12 Définition. Une représentation lisse (π, V) de G est dite admissible si pour tout sous-groupe ouvert N, V^N est de dimension finie.

3.13 Corollaire. *Supposons que $H \backslash G$ soit compact. Alors si (ρ, E) est une représentation lisse admissible de H, $Ind_H^G(\rho, E) = ind_H^G(\rho, E)$ est admissible.*

Démonstration. Ici, $\Omega = H\backslash G/K$ est un ensemble fini. $\square$

3.14 Proposition. *L'induction de H à G, $(\rho, E) \mapsto Ind_H^G(\rho, E)$ (resp. $ind_H^G(\rho, E)$), définit un foncteur exact de $\mathcal{M}(H)$ dans $\mathcal{M}(G)$.*

Démonstration. Prenons une suite exacte dans $\mathcal{M}(H)$: $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$. Nous souhaitons montrer que la suite $0 \to Ind_H^G E_1 \to Ind_H^G E_2 \to Ind_H^G E_3 \to 0$ est exacte dans $\mathcal{M}(G)$. Nous savons déjà que l'induite d'une représentation lisse est lisse, il nous suffit donc de montrer que pour tout sous-groupe ouvert compact K de G la suite $0 \to (Ind_H^G E_1)^K \to (Ind_H^G E_2)^K \to (Ind_H^G E_3)^K \to 0$ est exacte. Or d'après le lemme précédent, $(Ind_H^G E_i)^K \simeq \mathcal{F}(\Omega, E_i) \simeq \prod_{g\in\Omega} E_i^{K_g}$. L'exactitude du foncteur $E \mapsto E^{K_g}$ nous permet alors de conclure.

La démonstration est similaire pour $ind_H^G(\rho, E)$. $\square$

Nous adopterons désormais la notation plus standard Res_H^G pour le foncteur d'oubli.

3.15 Théorème (Réciprocité de Frobenius)**.** *Le foncteur Ind_H^G est l'adjoint à droite du foncteur Res_H^G. C'est à dire que pour tout (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$ et tout (τ, E) dans $\mathcal{M}(H)$, on a un isomorphisme naturel :*

$$Hom_G(V, Ind_H^G E) \simeq Hom_G(Res_H^G V, E).$$

Démonstration. Soient (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$ et (τ, E) dans $\mathcal{M}(H)$. Formons

$$\alpha : Res_H^G(Ind_H^G(\tau, E)) \to (\tau, E),\ f \mapsto f(\mathbf{1}_G),$$

et

$$\beta : (\pi, V) \to Ind_H^G(Res_H^G(\pi, V)),\ v \mapsto (f_v : g \mapsto \pi(g) \cdot v).$$

α est un morphisme dans $\mathcal{M}(H)$ et β est un morphisme dans $\mathcal{M}(G)$, montrons que ce sont des morphismes d'adjonctions.

Regardons la première composition (nous allons détailler les flèches après) :

$$Ind_H^G(\tau, E) \to Ind_H^G Res_H^G Ind_H^G(\tau, E) \to Ind_H^G(\tau, E).$$

La première flèche correspond au morphisme β pour $Ind_H^G(E)$. Elle envoie donc $f \in Ind_H^G(E)$ sur $f_f : g \mapsto Ind_H^G(\tau)(g) \cdot f = r(g) \cdot f$. La deuxième flèche est obtenue en appliquant Ind_H^G au morphisme α. Le foncteur d'induction agit sur les morphismes par composition, donc la deuxième flèche envoie $r(g) \cdot f$ sur $\alpha(r(g) \cdot f) = (r(g) \cdot f)(\mathbf{1}_G) = f(g)$. La composition de ces deux flèches est donc l'identité de $Ind_H^G(\tau, E)$.

Regardons maintenant l'autre composition :

$$Res_H^G(\pi, V) \to Res_H^G Ind_H^G Res_H^G(\pi, V) \to Res_H^G(\pi, V).$$

La première flèche est obtenue en appliquant Res_H^G à α, elle envoie donc $v \in V$ sur $f_v : h \mapsto \pi(h) \cdot v$. La seconde flèche, quand à elle, est le morphisme α pour $Res_H^G(\pi, V)$. Elle envoie f_v sur $f_v(\mathbf{1}_G) = \pi(\mathbf{1}_G) \cdot v = v$. La composition des deux flèches est donc l'identité de $Res_H^G(\pi, V)$.

Ceci montre que l'on a bien des morphismes d'adjonctions et prouve le théorème.

$\square$

3.16 Remarque. Par unicité de l'adjoint, nous obtenons que les foncteurs Ind_H^G et I_H^G sont isomorphes.

Si $J \subset H$ sont deux sous-groupes fermés de G, alors comme on a $Res_J^G = Res_J^H \circ Res_H^G$ et que l'induction est adjoint de la restriction, on en déduit

3.17 Proposition. *On a un isomorphisme de foncteurs $Ind_J^G \simeq Ind_H^G \circ Ind_J^H$.*

Soit H un groupe t.d. et (τ, E) une représentation de H. On note $E(H, \tau)$ le sous-espace de E engendré par les vecteurs $(\tau(h) \cdot v - v)$ pour $v \in V$ et $h \in H$. On définit alors l'espace co-invariant par $E_{H,\tau} = E/E(H, \tau)$.

Dans le cas où H est un sous-groupe fermé de G et (π, V) est un élément de $\mathcal{M}(G)$, alors on allège les notations de $V(H, Res_H^G(\pi))$ (resp. $V_{H,Res_H^G(\pi)}$) en $V(H, \pi)$ (resp. $V_{H,\pi}$) voir $V(H)$ (resp. V_H) si π est clairement identifié.

Si N est un sous-groupe de G normalisant H, alors N agit sur $V(H, \pi)$ et donc sur $V_{H,\pi}$. On note π_H l'action de N sur $V_{H,\pi}$.

Si H et N sont deux sous-groupes fermés de G et que N normalise H, alors on définit le foncteur $j_H : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(N)$, $(\pi, V) \mapsto (\pi_H, V_{H,\pi})$.

3.18 Lemme.

1. *Soit H un groupe t.d. et supposons que H_1 et H_2 sont des sous-groupes fermés de H , H_1 normalise H_2 et $H = H_1H_2$. Soit (τ, E) une représentation de H. On a alors $(E_{H_2,\tau})_{H_1,\tau_{H_2}} = E_{H,\tau}$.*
2. *Soient H,H_1,H_2 comme ci dessus. On suppose de plus que H est un sous-groupe fermé d'un groupe t.d. G et soient N,N_2 des sous-groupes fermés de G tels que $N \subset N_2$, N normalise H et H_1, et N_2 normalise H_2. Alors le foncteur $j_H : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(N)$ est isomorphe à la composition des foncteurs $j_{H_2} : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(N_2)$ et $j_{H_1} : \mathcal{M}(N_2) \to \mathcal{M}(N)$.*

Démonstration. Pour $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ et $v \in E$, on a $\tau(h_1h_2) \cdot v - v = (\tau(h_1) \cdot (\tau(h_2) \cdot v) - (\tau(h_2) \cdot v)) + (\tau(h_2) \cdot v - v)$. Ainsi $E(H, \tau) = E(H_1, \tau) + E(H_2, \tau)$ et l'on en déduit 1. 2. est une conséquence de 1. $\square$

3.19 Proposition. *Supposons que H soit réunion de ses sous-groupes compacts. Soit $(\tau, E) \in \mathcal{M}(H)$. Alors $E(H, \tau)$ est l'ensemble des $v \in E$ tels que $\tau(e_K) \cdot v = 0$, pour un sous-groupe compact K de H.*

Démonstration. La proposition 3.4 traite le cas où H est compact et on en déduit le résultat pour H réunion de ses sous-groupes compacts. $\square$

3.20 Corollaire. *Supposons que H soit réunion de ses sous-groupes compacts. Soit $(\tau, E) \in \mathcal{M}(H)$. Si E' est une sous-représentation de E, alors $E'(H,\tau) = E(H,\tau) \cap E'$. De plus si l'on a une suite exacte dans $\mathcal{M}(H)$, $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ alors la suite $0 \to E'_{H,\tau'} \to E_{H,\tau} \to E''_{H,\tau''} \to 0$ est exacte. En particulier le foncteur j_H est exact dès que H est réunion de ses sous-groupes compacts.*

Démonstration. On déduit le premier point de la proposition précédente. L'exactitude de la suite se montre aisément en utilisant le premier point. □

Regardons maintenant un cas particulier de foncteur d'oubli. Supposons que P est un groupe t.d. et N un sous-groupe distingué fermé de P. Alors $M = P/N$ est un groupe t.d. Notons $\phi : P \to M$ la projection canonique. Elle induit un foncteur d'oubli $\mathcal{F}_P^M : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(P)$ et un pseudo foncteur d'oubli ${}^\vee\mathcal{F}_P^M : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(P)$. Nous allons voir que ces deux foncteurs sont isomorphes.

Soit K un sous-groupe ouvert compact de P. On note $K_M = \phi(K)$ qui est un sous-groupe ouvert compact de M. Les K_M forment une base de voisinage de l'identité, donc les idempotents e_{K_M} forment un système filtrant d'idempotents de $\mathcal{H}(M)$. $\mathcal{H}(M)$ est muni d'une structure de $\mathcal{H}(P)$-bimodule non dégénéré. Montrons que l'action de $a_{t,K} = e_K * \delta_t * e_K$, pour $t \in P$, sur un élément $T \in \mathcal{H}(M)$ est donnée par $T \cdot a_{t,K} = T * a_{\phi(t),K_M}$.

Notons tout d'abord que $\phi_*(a_{t,K})$ est invariante sous l'action de K_M à droite. Soit $k \in K_M$ et $\bar{k} \in K$ un antécédent de k par ϕ. Alors pour $\psi \in \mathcal{D}(M)$,

$$\begin{aligned}
\langle r(k) \cdot \phi_*(a_{t,K}), \psi \rangle &= \langle \phi_*(a_{t,K}), r(k^{-1}) \cdot \psi \rangle \\
&= \langle a_{t,K}, (r(k^{-1}) \cdot \psi) \circ \phi \rangle \\
&= \langle a_{t,K}, r(\bar{k}^{-1}) \cdot (\psi \circ \phi) \rangle \\
&= \langle r(\bar{k}) \cdot a_{t,K}, \psi \circ \phi \rangle \\
&= \langle a_{t,K}, \psi \circ \phi \rangle \\
&= \langle \phi_*(a_{t,K}), \psi \rangle.
\end{aligned}$$

On vérifie de même l'invariance à gauche et le fait que cette distribution est normalisée. Ainsi par le lemme 1.21, $\phi_*(a_{t,K}) = a_{\phi(t),K_M}$ est l'unique distribution à support dans $K_M \phi(t) K_M$, invariante sous l'action à gauche et à droite de K_M et normalisée.

On a alors

$$\begin{aligned}
\langle T \cdot a_{t,K}, \psi \rangle &= \int_M d(T \cdot a_{t,K})(m) \\
&= \int_M \psi(m) d \left(\int_P r(\phi(p^{-1})) \cdot T d(a_{t,K})(p) \right)(m) \\
&= \int_M \int_P \psi(m\phi(p)) dT(m) d(a_{t,K})(p) \\
&= \int_M \int_M \psi(mm') dT(m) d(\phi_*(a_{t,K}))(m') \\
&= \int_M \int_M \psi(mm') dT(m) d(a_{\phi(t),K_M})(m') \\
&= \langle T * a_{\phi(t),K_M}, \psi \rangle
\end{aligned}$$

On a en particulier que $T \cdot e_K = T * e_{K_M}$. Ainsi si T_i est une famille finie d'éléments de $\mathcal{H}(M)$, il existe un sous-groupe ouvert compact K tel que $T_i = T * e_{K_M} = T_i \cdot e_K$. On en déduit que, pour tout module V dans $\mathcal{M}(\mathcal{H}(M))$, ${}^\vee\mathcal{F}_P^M(V) = Hom_{\mathcal{H}(M)}(\mathcal{H}(M), V)_{\mathcal{H}(P)} = Hom_{\mathcal{H}(M)}(\mathcal{H}(M), V)_{\mathcal{H}(M)} \simeq V \simeq \mathcal{F}_P^M(V)$.

Nous savons que le pseudo foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche I_P^M. Nous souhaitons maintenant le décrire dans le langage des représentations. Si (π, V) est une représentation lisse de P, alors (π_N, V_N) est une représentation lisse de P dont le noyau contient N, on peut donc la voir comme une représentation lisse de M. Ceci nous définit un foncteur $j_N : \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(M)$.

3.21 Proposition. *Les foncteurs j_N et P_P^M sont naturellement isomorphes. En particulier j_N est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli.*

Démonstration. Soit (π, V) une représentation lisse de P. Soit $v \in V$ et K un sous-groupe compact ouvert de P fixant v. Alors la quantité $e_{K_M} \otimes v$ est indépendante du choix de K. En effet si $K' \subset K$ est un autre sous-groupe ouvert compact fixant v, $e_{K'_M} \otimes v = e_{K_M} * e_{K'_M} \otimes v = e_{K_M} \cdot e_{K'} \otimes v = e_{K_M} \otimes e_{K'} \cdot v = e_{K_M} \otimes v$. Ceci nous permet donc de définir

$$\Phi : V \to \mathcal{H}(M) \otimes_{\mathcal{H}(P)} V, \;\; v \mapsto e_{K_M} \otimes v.$$

Montrons que $V(N) \subset ker(\Phi)$. Soient $v \in V$, $n \in N$ et K un sous-groupe ouvert compact de P tel que $e_K \cdot v = v$ et $e_K \cdot (\pi(n) \cdot v) = \pi(n) \cdot v$. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi(\pi(n) \cdot v - v) &= e_{K_M} \otimes (\pi(n) \cdot v - v) \\
&= e_{K_M} \otimes e_K * \delta_n * e_K \cdot v - e_{K_M} \otimes v \\
&= e_{K_M} \otimes a_{n,K} \cdot v - e_{K_M} \otimes v \\
&= e_{K_M} \cdot a_{n,K} \otimes v - e_{K_M} \otimes v \\
&= e_{K_M} * a_{\phi(n),K_M} \otimes v - e_{K_M} \otimes v \\
&= e_{K_M} * e_{K_M} \otimes v - e_{K_M} \otimes v \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi Φ induit par passage au quotient une application $\bar{\Phi} : V_N \to \mathcal{H}(M) \otimes_{\mathcal{H}(P)} V$. Cette application est un opérateur d'entrelacement. En effet, soient $m \in M$, $p \in P$ tel que $\phi(p) = m$, $\bar{v} \in V_N$, $v \in V$ un relèvement de $\bar{v}$ et K un sous-groupe ouvert compact de P tel que $e_K \cdot v = v$ et $e_K \cdot (\pi(p) \cdot v) = \pi(p) \cdot v$. Alors

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(\pi_N(m) \cdot \bar{v}) &= \bar{\Phi}(\overline{\pi(p) \cdot v}) \\
&= e_{K_M} \otimes \pi(p) \cdot v \\
&= e_{K_M} \otimes e_K * \delta_p * e_K \cdot v \\
&= e_{K_M} \otimes a_{p,K} \cdot v \\
&= e_{K_M} \cdot a_{p,K} \otimes v \\
&= e_{K_M} * a_{m,K_M} \otimes v \\
&= e_{K_M} * \delta_m * e_{K_M} \otimes v \\
&= e_{K_M} \cdot (l(m) \cdot \bar{\Phi}(\bar{v}))
\end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre K suffisamment petit pour que $e_{K_M} \cdot (l(m) \cdot \bar{\Phi}(\bar{v})) = l(m) \cdot \bar{\Phi}(\bar{v})$.

Il ne nous reste plus qu'à construire un inverse de $\bar{\Phi}$. Nous savons que V_N est une représentation lisse de M, donc c'est un $\mathcal{H}(M)$-module non dégénéré. Ceci nous permet de définir

$$\Psi : \mathcal{H}(M) \otimes_{\mathcal{H}(M)} V \to V_N,\ T \otimes v \mapsto T \cdot \bar{v}.$$

Nous souhaitons montrer que Ψ induit une application $\Psi : \mathcal{H}(M) \otimes_{\mathcal{H}(P)} V \to V_N$. Pour cela nous devons vérifier que pour $T \in \mathcal{H}(M)$, $S \in \mathcal{H}(P)$ et $v \in V$, $\Psi(T\cdot S\otimes v - T\otimes S\cdot v) = 0$. On a que $\Psi(T\cdot S\otimes v - T\otimes S\cdot v) = (T\cdot S)\cdot\bar{v} - T\cdot(S\cdot\bar{v})$. S est dans $\mathcal{H}(P,K)$, pour K un sous-groupe ouvert compact de P, et est donc combinaison linéaire de distributions de la forme $a_{p,K}$. Il ne nous reste donc qu'à vérifier que $(T\cdot a_{p,K})\cdot\bar{v} - T\cdot(a_{p,K}\cdot\bar{v}) = 0$. Mais on a que $T\cdot a_{p,K} = T * a_{\phi(p),K_M}$ et il découle des définitions que $a_{p,K}\cdot\bar{v} = a_{\phi(p),K_M}\cdot\bar{v}$, ce qui montre ce que nous souhaitions.

Des calculs sans grandes difficultés nous montrent que Φ et Ψ sont inverses l'une de l'autre, ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$

3.5 Représentations compactes

Avant de commencer nous avons besoin d'un lemme de la théorie des catégories. On renvoie à [Ren10] (lemme A.VII) pour les définitions et la preuve de ce résultat.

3.22 Lemme. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck tel que tout objet de $\mathcal{A}$ est une somme de sous-objets de type fini, et E un objet de $\mathcal{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *E est isomorphe à une somme directe d'objets simples*
2. *E est somme de ses sous-objets simples*
3. *Pour tout sous-objet E' de E, il existe un sous-objet E'' de E tel que $E = E' \oplus E''$*

Commençons par étudier le cas où G est compact. Soit donc K un groupe t.d. compact.

3.23 Théorème.
1. *Toute représentation lisse irréductible de K est de dimension finie.*
2. *Pour toute représentation lisse de dimension finie (π, V) de K, il existe un sous-groupe ouvert compact N distingué dans K tel que N agisse trivialement sur V.*
3. *Toute représentation lisse de K est semi-simple.*

Démonstration.
1. Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de K. Prenons $v \in V$ non nul et K_v un sous-groupe ouvert compact de K qui fixe v. Posons $W = Vect(K \cdot v)$. K/K_v est fini donc W est de dimension finie, de plus il est K-stable donc par irréductibilité, $V = W$ ce qui montre le résultat.
2. Prenons (π, V) une représentation lisse de dimension finie de K. Posons $N = ker(\pi)$ qui est un sous-groupe distingué de K. Si $\{v_i\}$ est une base de V alors $N = \bigcap_i Stab_K(v_i)$. π étant lisse, N est ouvert. Et comme K est compact, tout sous-groupe ouvert de K, étant fermé, est compact.

3. Soit (π, V) une représentation lisse de K. Soit $v \in V$. Comme dans la démonstration de 1., on montre que $W = Vect(K \cdot v)$ est de dimension finie. Par 2., il existe un sous-groupe ouvert compact distingué N de K qui agit trivialement sur W. Mais comme K/N est fini, on peut appliquer la théorie des représentations des groupes finis pour obtenir que W est une somme directe finie de représentations irréductibles de K. Ainsi V est somme de ses sous-représentations irréductibles et le lemme 3.22 nous permet de conclure. $\square$

Notons $\hat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de K.

3.24 Corollaire. *La catégorie $\mathcal{M}(K)$ est semi-simple. Plus précisément, toute représentation lisse (π, V) de K se décompose en $V = \bigoplus_{(\sigma, V_\sigma) \in \hat{K}} V(\sigma)$ où $V(\sigma)$ est l'image du morphisme $Hom_K(V_\sigma, V) \otimes V_\sigma \to V$, $\phi \otimes v \mapsto \phi(v)$. La sous-représentation $V(\sigma)$ est une somme directe de représentations irréductibles dans la classe de (σ, V_σ) et est appelée la composante isotypique de type σ de V.*

Démonstration. Soit $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ une décomposition de V en sous-représentations irréductibles. Si $V_i \simeq V_\sigma$ alors il existe un opérateur d'entrelacement injectif $\phi_i : V_\sigma \to V$ d'image V_i. Ainsi $V_i \subset V(\sigma)$ et on obtient $V = \sum V(\sigma)$. Posons I_σ l'ensemble des $i \in I$ tels que $V_i \simeq V_\sigma$. On a $\bigoplus_{i \in I_\sigma} V_i \subset V(\sigma)$. Maintenant si $\phi \in Hom_K(V_\sigma, V)$ alors la composée de ϕ et d'une projection $V \to V_j$ est nulle si $j \notin I_\sigma$. Et donc $V(\sigma) \subset \bigoplus_{i \in I_\sigma} V_i$. $\square$

Si G n'est pas compact, une certaine classe de représentations, appelées représentations compactes, vérifient des propriétés analogues à celles que l'on vient de voir pour un groupe compact.

On suppose dans la suite de cette section que le groupe G est unimodulaire.

3.25 Définition. Soit (π, V) une représentation lisse de G. On dit que (π, V) est compacte si pour tout $v \in V$, et pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, la fonction $f_{K,v} : G \to V$, $g \mapsto \pi(e_K)\pi(g^{-1}) \cdot v$ est à support compact.

Si (π, V) est une représentation compacte, alors tout sous-quotient l'est aussi.

Si (π, V) est un représentation lisse de G alors l'espace duale V^* est muni d'une représentation π^* définie par $\pi^*(g) \cdot \lambda(v) = \lambda(\pi(g^{-1}) \cdot v)$ pour $v \in V$ et $\lambda \in V^*$. On note $\tilde{V}$ la partie lisse de V et $\tilde{\pi}$ la restriction de π à $\tilde{V}$. La représentation $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ s'appelle le représentation contragrédiente de (π, V).

Soit $v \in V$ et $\lambda \in \tilde{V}$. On appelle coefficient matriciel, la fonction localement constante $\phi_{v,\lambda} : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \lambda(\pi(g^{-1}) \cdot v)$.

3.26 Théorème. *Une représentation lisse de G est compacte si et seulement si tous ses coefficients matriciels sont à support compact.*

Démonstration. Prenons une représentation compacte (π, V). Soient $v \in V$, $\lambda \in \tilde{V}$ et K un sous-groupe ouvert compact de G tel que $\lambda \in \tilde{V}^K$. Alors $Supp(\phi_{v,\lambda}) \subset Supp(f_{K,v})$.

Réciproquement si les coefficients matriciels sont à support compact, soient $v \in V$ et K un sous-groupe ouvert compact de G. $Im(f_{K,v}) \subset V^K$, notons E_v le sous-espace de V^K engendré par cette image et extrayons de la famille $\{\pi(e_K)\pi(g^{-1})\cdot v\}$ une base $\{v_i\}_{i\in I}$. Choisissons une forme linéaire λ_0 sur V^K valant 1 sur les v_i, que l'on étend en une forme linéaire $\tilde{\lambda_0}$ sur V valant 0 sur $V(K)$. Alors $e_K \cdot \tilde{\lambda_0} = \tilde{\lambda_0}$ et $g \mapsto \tilde{\lambda_0}(\pi(g)\cdot v) = \lambda_0(\pi(e_K)\pi(g)\cdot v)$ est à support compact, invariant sous l'action à gauche de K, donc recouvert par un nombre fini de parties de la forme $K \cdot g_j$. Ainsi E_v est de dimension finie, disons k, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des éléments de $\tilde{V}^K$ séparant les points de E_v alors $Supp(f_{K,v}) \subset \bigcup_{i=1}^k Supp(\phi_{v,\lambda_i})$. □

3.27 Proposition. *Toute représentation compacte de type fini est admissible.*

Démonstration. Prenons (π, V) une telle représentation. Soient $v_1, \dots, v_l$ des générateurs de V et K un sous-groupe ouvert compact de G. Alors $V^K = \pi(e_K)\cdot V$ est engendré par les $\pi(e_K)\pi(g)\cdot v_i$ pour g dans G. Il suffit donc de montrer que l'espace engendré pour un i fixé est de dimension fini. La démonstration du théorème précédent nous montre que cet espace, E_{v_i}, est de dimension finie. □

Nous allons maintenant montrer un théorème de décomposition d'une représentation lisse en utilisant les représentations compactes.

Soient (τ, W) une représentation compacte irréductible de G et μ_G une mesure de Haar sur G qui identifie $\mathcal{D}(G)$ et $\mathcal{H}(G)$. On munit $\mathcal{D}(G)$ et $End(W)$ d'une structure de représentation de $G\times G$ par $(g_1, g_2)\cdot f(x) = f(g_1^{-1}xg_2)$ pour $g_1, g_2 \in G$, $f \in \mathcal{D}(G)$ et $((g_1, g_2)\cdot\lambda)(v) = g_1 \cdot \lambda(g_2^{-1}\cdot v)$ pour $v \in W$ et $\lambda \in End(W)$. Le morphisme $\tau : \mathcal{D}(G) \to End(W)$, $f \mapsto \tau(f)$ entrelace ces actions, $\mathcal{D}(G)$ étant lisse son image est contenue dans $End(W)_0$. Construisons une section de ce morphisme.

Montrons tout d'abord qu'en tant que représentations $W \otimes \tilde{W} \simeq End(W)_0$. Formons $\alpha : W\otimes\tilde{W} \to End(W)_0$ par $\alpha(w\otimes\lambda)(v) = \lambda(v)w$. α est alors injective et $G\times G$-équivariant. Pour montrer que α est surjective, il suffit de montrer que pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, $\alpha^K : (W\otimes\tilde{W})^{K\times K} \to End(W)^{K\times K}$ est surjective. Les représentations compactes irréductibles étant admissibles, on va pouvoir conclure grâce à un argument de dimension. Si $A \in End(W)^K$, on a $A = \tau(e_K)A\tau(e_K)$ et la restriction de A à $ker(\tau(e_K)) = W(K)$ est nulle. Comme $W = W^K \oplus W(K)$, on voit que l'on peut identifier $End(W)^{K\times K}$ à un sous-espace de $End(W^K)$ par l'application de restriction. Ainsi $dim(End(W)^{K\times K}) \leq (dim(W^K))^2 \leq dim((W\otimes\tilde{W})^{K\times K})$ ce qui nous montre la surjectivité de α.

Posons alors $\phi : W\otimes\tilde{W} \to \mathcal{D}(G)$, $v\otimes\lambda \mapsto \phi_{v,\lambda}$ et ψ l'unique application linéaire de $End(W)_0$ dans $\mathcal{D}(G)$ telle que $\psi\circ\alpha = \phi$. ψ est $G\times G$ équivariante, montrons que c'est la section recherchée (à un facteur scalaire près). $\tau\circ\psi$ est un opérateur d'entrelacement pour $G\times G$ de $End(W)_0 \simeq W\otimes\tilde{W}$ qui est irréductible. Par le lemme de Schur 3.7, il existe un scalaire $d(\tau)$ tel que $\tau\circ\psi = d(\tau)Id$.

3.28 Lemme (Lemme de complétude)**.** *Soit $T \in \mathcal{H}(G)$, $T \neq 0$. Alors il existe une représentation lisse irréductible π de G telle que $\pi(T) \neq 0$.*

Démonstration. Voir [Ren10] (théorème III.1.11) pour une démonstration complète.

Nous pouvons cependant donner un schéma rapide de la preuve. Tout d'abord nous avons besoin du résultat suivant : si A est une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension dénombrable et a est un élément non nilpotent de A, alors il existe un module simple à gauche M tel que $a\cdot M \neq 0$.

Soit $T \in \mathcal{H}(G)$, il existe un sous-groupe ouvert compact K tel que $T \in \mathcal{H}(G, K)$. Ainsi, $T = f\mu_G$, $f \in \mathcal{D}(G, K)$. Posons $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$ et $S = (f^* * f)\mu_G$. On vérifie alors que S n'est pas un élément nilpotent. Nous pouvons alors appliquer le résultat précédent à l'algèbre $\mathcal{H}(G)$ ce qui nous fournit une représentation lisse irréductible π telle que $\pi(S) \neq 0$. On en déduit ensuite que $\pi(T) \neq 0$. □

3.29 Proposition. *1. Si (ρ, E) est une représentation lisse irréductible de G non équivalente à (τ, W), alors pour tout f dans l'image de ψ, $\rho(f) = 0$.*

2. $d(\tau)$ est non nul.

Démonstration. 1. On considère $W \otimes \tilde{W}$ comme une représentation de G (celui-ci agissant seulement sur le premier facteur), c'est alors une somme directe de représentations irréductibles équivalentes à (τ, W). Pour $v \in E$, on considère le morphisme de G-module $W \otimes \tilde{W} \to E$, $w \otimes \lambda \mapsto \rho(\phi(w \otimes \lambda)) \cdot v$. Si (ρ, E) est non équivalente à (τ, W) alors l'image de ce morphisme est nécessairement nulle. Ainsi pour f dans l'image de ϕ (donc de ψ), $\rho(f) \cdot v = 0$ pour tout $v \in E$.

2. Soit f non nulle dans l'image de ψ. Il faut montrer que $\tau(f)$ est non nul. On conclut grâce au lemme de complétude 3.28.

□

3.30 Théorème. *Soit K un sous-groupe ouvert compact de G.*

1. Il existe une unique distribution $e_{K,\tau}$ dans $\mathcal{H}(G)$ telle que $\tau(e_{K,\tau}) = \tau(e_K)$ et $\rho(e_{K,\tau}) = 0$ si (ρ, E) est une représentation lisse irréductible de G non équivalente à (τ, W).

2. Si K' est un sous-groupe ouvert compact de G contenu dans K alors $e_{K',\tau} * e_{K,\tau} = e_K * e_{K',\tau} = e_{K',\tau} * e_K = e_{K,\tau}$. En particulier $e_{K,\tau}$ est un idempotent.

3. Si $g \in G$, $\delta_g * e_{K,\tau} * \delta_{g^{-1}} = e_{gKg^{-1},\tau}$.

Démonstration. L'unicité dans 1. découle du théorème de complétude 3.28. Pour l'existence, posons $e_{K,\tau} = d(\tau)^{-1}(\psi(\tau(e_K))$. Alors $\tau(e_{K,\tau}) = d(\tau)^{-1}(\tau \circ \psi \circ \tau(e_K) = \tau(e_K)$ et $\rho(e_K) = 0$ car $\rho \circ \psi = 0$.

Pour montrer les égalités dans 2. et 3., il suffit par le théorème de complétude 3.28 de montrer que l'on obtient la même chose en les évaluant en ρ, où (ρ, E) est une représentation lisse de G. Examinons par exemple les égalités de 2., 3. se démontrant de manière analogue. Si (ρ, E) n'est pas équivalent à (τ, W) on obtient 0. Sinon, on obtient $\tau(e_K)$ car $e_K * e_{K'} = e_{K'} * e_K = e_K$. □

Soient (π, V) une représentation lisse de G et $v \in V$. Si $v \in V^K$, alors pour tout $K' \subset K$, $\pi(e_{K',\tau}) \cdot v = \pi(e_{K,\tau}) \cdot v$. Notons ce vecteur par $\pi(e_\tau) \cdot v$ (ou plus simplement $e_\tau \cdot v$).

3.31 Proposition. *1. $\pi(e_\tau)$ est un projecteur sur V qui commute avec l'action de G.*

2. Si (π', V') est une autre représentation lisse de G et si $A \in Hom_G(V, V')$, alors $A \circ \pi(e_\tau) = \pi'(e_\tau) \circ A$.

3. $V = Im(\pi(e_\tau)) \oplus ker(\pi(e_\tau))$ est une décomposition de V en sous-représentations, et $Im(\pi(e_\tau))$ est une somme directe de sous-représentations irréductibles équivalentes à (τ, W). Aucun sous quotient irréductible de $ker(\pi(e_\tau))$ n'est équivalent à (τ, W).

Démonstration. 1. Le théorème précédent nous montre que $\pi(e_\tau)$ est un projecteur. Pour K assez petit on a $\pi(g)\pi(e_\tau)\cdot v = \pi(g)\pi(e_{K,\tau})\cdot v = \pi(g)\pi(e_{K,\tau})\pi(g^{-1})\pi(g)\cdot v = \pi(e_{gKg^{-1}})\pi(g)\cdot v = \pi(e_\tau)\pi(g)\cdot v$.

2. La démonstration est similaire au cas précédent.
3. La décomposition de V est immédiate puisque $\pi(e_\tau)$ est un projecteur.

   Montrons que $Im(\pi(e_\tau))$ est somme directe de sous-représentations irréductibles équivalentes à (τ, W). D'après 3.22, on aura le résultat si l'on montre que $Im(\pi(e_\tau))$ est engendrée par des sous-représentations équivalentes à (τ, W). Soient $w = \pi(e_\tau)\cdot v \in Im(\pi(e_\tau))$ et K un sous-groupe ouvert compact de G tel que $v \in V^K$. Nous avons introduit précédemment le $G \times G$-morphisme $\phi : W \otimes \tilde{W} \to \mathcal{D}(G) \simeq \mathcal{H}(G)$. $W \otimes \tilde{W}$ est irréductible et ϕ est non nulle donc elle est injective. $e_{K,\tau}$ est dans $Im(\phi)$ par définition et on peut injecter $\mathcal{H}(G) * e_{K,\tau}$ dans $Im(\phi)$. $W \otimes \tilde{W}$ étant (en tant que représentation de G) une somme de représentations irréductibles équivalentes à (τ, W), il en est de même pour $\mathcal{H}(G) * e_{K,\tau}$. C'est donc également le cas pour l'image du G-morphisme $\mathcal{H}(G) * e_{K,\tau} \to V$, $h * e_{K,\tau} \mapsto \pi(h * e_{K,\tau})\cdot v$. Ceci montre que $Im(\pi(e_\tau))$ est somme directe de sous-représentations irréductibles équivalentes à (τ, W).

   Montrons maintenant qu'aucun sous-quotient irréductible de $ker(\pi(e_\tau))$ n'est équivalent à (τ, W). $\pi(e_\tau)$ annule tout sous-quotient de $ker(\pi(e_\tau))$. Or le foncteur $\mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G)$, $V \mapsto \pi(e_\tau)\cdot V$ est exact, et comme $\tau(e_\tau)$ est l'identité, on a le résultat.

□

On vient donc de démontrer le théorème de décomposition suivant :

3.32 Théorème. *Soit (τ, W) une représentation compacte irréductible de G. Alors pour toute représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$ on a $V = V(\tau) \oplus V(\tau)^\perp$, où $V(\tau)$ est somme directe de représentation isomorphe à (τ, W), et aucun sous-quotient irréductible de $V(\tau)^\perp$ n'est isomorphe à (τ, W).*

3.33 Corollaire. *Toute représentation compacte est semi-simple.*

Démonstration. Soit (π, W) une représentation compacte de G. Notons W^f la somme de toute les représentations irréductibles de W. Par le lemme 3.22, il suffit de montrer que W/W^f est nul. Supposons le contraire et prenons π un sous-quotient irréductible de W/W^f. π est alors une représentation compacte. On a $e_\pi \cdot (W/W^f) \neq 0$, ce qui contredit la proposition 3.31 qui implique que $e_\pi \cdot W \subset W^f$. □

Soit (τ, W) une représentation compacte irréductible de G. Notons $\mathcal{M}(G)_\tau$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ constituée de représentations qui sont somme directe de représentations irréductibles équivalentes à (τ, W) et $[\mathcal{M}(G)\backslash\tau]$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ des représentations dont aucun sous-quotient irréductible n'est isomorphe à (τ, W). Et plus généralement, si (τ_i, W_i), $i = 1, \ldots, r$, sont des représentations compactes irréductibles non isomorphes, on note $[\mathcal{M}(G)\backslash\tau_1, \ldots, \tau_r]$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ des représentations dont aucun sous-quotient irréductible n'est isomorphe à l'un des (τ_i, W_i).

Notons $\mathcal{M}(G)_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont des représentations compactes, et $\mathcal{M}(G)_{nc}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ constituée des représentations dont aucun sous-quotient irréductible n'est une représentation compacte. On note également $\mathbf{Irr}(G)_c$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles compactes.

Par ce qui précède la catégorie $\mathcal{M}(G)_c$ est semi-simple.

Les résultats que l'on vient de montrer nous montrent que si (τ, W) est une représentation compacte irréductible de G alors

$$\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G)_\tau \times [\mathcal{M}(G)\backslash\tau]$$

De même si (τ_i, W_i), $i = 1, \ldots, r$, sont des représentations compactes irréductibles non isomorphes de G,

$$\mathcal{M}(G) = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{M}(G)_{\tau_i} \times [\mathcal{M}(G)\backslash\tau_1, \ldots, \tau r]$$

On a aussi montré que

$$\mathcal{M}(G)_c = \prod_{\tau\in\mathbf{Irr}(G)_c} \mathcal{M}(G)_\tau$$

3.34 Proposition. *Notons **(KF)** la condition suivante : Pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, le nombre de classes d'isomorphismes de représentations compactes irréductibles (π, V) de G telles que $V^K \neq 0$ est fini.*

*Alors, si **(KF)** est vérifiée, la catégorie $\mathcal{M}(G)$ se scinde en un produit de catégories*

$$\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G)_c \times \mathcal{M}(G)_{nc}$$

Démonstration. Supposons que l'on ait **(KF)**. Pour chaque représentation lisse (ρ, W) de G définissons un opérateur $\rho(e_c) = \sum_{\tau\in\mathbf{Irr}(G)_c} \rho(e_\tau)$. Celui-ci est bien défini car pour $w \in W$, il existe un sous-groupe ouvert compact de G qui fixe w, et par hypothèse seul un nombre fini de $\rho(e_\tau) \cdot w$ sont non nuls. Si (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont dans $\mathbf{Irr}(G)_c$ et non équivalentes, alors $\rho(e_{\pi_1})\rho(e_{\pi_2}) = 0$ et donc $\rho(e_c)$ est un projecteur. Ainsi $W = \rho(e_c) \cdot W \oplus (1 - \rho(e_c)) \cdot W$ (en tant que G-module). De plus pour $(\pi, V) \in \mathbf{Irr}(G)_c$ on a $\rho(e_c)\rho(e_\pi) = \rho(e_\pi)\rho(e_c) = \rho(e_\pi)$ donc $\rho(e_c) \cdot W = \bigoplus_{(\pi,V)\in\mathbf{Irr}(G)_c} \rho(e_\pi) \cdot W$. $\rho(e_c) \cdot W$ est donc le plus grand sous-module de W dont les sous-quotients irréductibles sont des représentations compactes. On a aussi $(1-\rho(e_c))\rho(e_\pi) = \rho(e_\pi)(1-\rho(e_c)) = 0$ et d'après 3.31 $(1-\rho(e_c))\cdot W$ n'admet aucun sous-quotient irréductible.

Montrons maintenant l'unicité. Supposons que l'on ait une seconde décomposition $W = W'_c \oplus W'_{nc}$. W'_c étant compacte, $\rho(e_c)$ agit comme l'identité dessus et $W'_c \subset W_c$. $\rho(e_c) \cdot W'_{nc} = 0$ car sinon W'_{nc} contiendrait une représentation compacte et donc $W'_{nc} \subset W_{nc}$. On a bien l'unicité. □

3.35 Remarque. On a en faite une équivalence entre la décomposition de la catégorie et la condition **(KF)** (on pourra se référer à [Ren10] (proposition IV.1.7) pour les détails de la preuve).

4 Rappel sur les groupes réductifs

4.1 Les groupes réductifs

Pour les résultats de base sur les groupes algébriques, on pourra aller lire [Bor91]. Les résultats suivants sur les groupes réductifs sont tirés de [Ren10] et [Spr79].

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe défini sur un corps $\mathbb{F}$. On note G le groupe de ses points sur $\mathbb{F}$. Le radical de $\mathbb{G}$, $R(\mathbb{G})$, est le plus grand sous-groupe algébrique distingué connexe résoluble de $\mathbb{G}$, et le radical unipotent, $R_u(\mathbb{G})$, et la partie unipotente de $R(\mathbb{G})$. $R_u(\mathbb{G})$ est aussi le plus grand sous-groupe algébrique distingué connexe résoluble unipotent de $\mathbb{G}$. $\mathbb{G}$ est dit semi-simple si $R(\mathbb{G})$ est trivial et réductif si $R_u(\mathbb{G})$ est trivial.

Si $\mathbb{G}$ est réductif, $R(\mathbb{G})$ est central dans $\mathbb{G}$, $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ le groupe dérivé est semi-simple, $\mathbb{G}$ est engendré par $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ et $R(\mathbb{G})$, et $R(\mathbb{G}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{G})$ est fini.

On appelle composante déployée de $\mathbb{G}$ un tore défini et déployé sur $\mathbb{F}$, maximal pour cette propriété, et inclus dans $R(\mathbb{G})$.

4.1 Définition. On appelle donnée radicielle un quadruplé $\Psi = (X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ où X et $X^\vee$ sont des groupes abéliens libres de types finis, en dualité via $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$, Φ et $\Phi^\vee$ sont des sous ensembles finis de X et $X^\vee$ avec une bijection $\Phi \to \Phi^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha^\vee$. Pour $\alpha \in \Phi$ on définit des endomorphismes s_α et $s_{\alpha^\vee}$ de X et $X^\vee$ respectivement par

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha, \;\; s_{\alpha^\vee}(u) = u - \langle \alpha, u \rangle \alpha^\vee$$

On impose alors les deux conditions suivantes :

1. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on a $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$
2. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on a $s_\alpha(\Phi) \subset \Phi$ et $s_{\alpha^\vee}(\Phi^\vee) \subset \Phi^\vee$.

Si $\Psi = (X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ est une donnée radicielle, on appelle groupe de Weyl, $W(\Phi)$, le groupe des automorphismes de X engendré par les s_α.

Notons Q le sous-groupe de X engendré par Φ. Nous pouvons alors voir Φ comme un sous-ensemble de $V_\mathbb{R} = Q \otimes \mathbb{R}$. Un hyperplan H est alors singulier s'il est orthogonal à l'un de $\alpha^\vee$. Une chambre de Weyl, C, est définie comme une composante connexe du complémentaire de l'union des hyperplans singuliers. Une chambre de Weyl permet d'associer un ordre sur les racines par $\alpha > 0 \Leftrightarrow \langle x, \alpha^\vee \rangle > 0$ pour tout $x \in C$.

Soit $\mathbb{G}$ un groupe linéaire réductif connexe défini sur un corps algébriquement clos Ω. Soit $\mathbb{T}$ un tore maximal de $\mathbb{G}$. On peut associer à la paire $(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ une donnée radicielle de la façon suivante. On pose $X = X^*(\mathbb{T})$ l'ensemble des caractères et $X^\vee = X_*(\mathbb{T})$ les co-caractères. La dualité entre X et $X^\vee$ est définie par, si $x \in X$, $u \in X^\vee$ et $t \in \Omega^*$, $x(u(t)) = t^{\langle x, u \rangle}$.

$\mathbb{T}$ agit sur l'algèbre de Lie de $\mathbb{G}$, $\mathfrak{g}$, via l'adjoint. Celui-ci est diagonalisable et donne une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \amalg_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$, où $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}, (Ad\ t)(x) = \alpha(t)x, \ t \in \mathbb{T}\}$. $\Phi = \Phi(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ est alors défini comme l'ensemble des caractères non triviaux apparaissant dans la décomposition précédente.

Il nous reste à définir $\Phi^\vee$. Pour $\alpha \in \Phi$, on pose T_α la composante connexe de l'identité du noyau de α, Z_α le centralisateur de T_α dans $\mathbb{G}$ et G_α son groupe dérivé. Alors il existe un unique morphisme $\alpha^\vee : GL_1 \to \mathbb{G}_a$ tel que $\mathbb{T} = (Im(\alpha^\vee))T_\alpha$ et $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$. On pose $\Phi^\vee$ l'ensemble de ces $\alpha^\vee$.

4.2 Théorème. *La donnée radicielle* $\Psi(\mathbb{G},\mathbb{T})$ *détermine* $\mathbb{G}$ *à* Ω*-isomorphisme près.*

Pour chaque $\alpha \in \Phi$, il existe un unique morphisme de groupe algébrique $x_\alpha : \mathbb{G}_a \to G_\alpha$ tel que $tx_\alpha(u)t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)u)$ pour $t \in \mathbb{T}$ et $u \in \Omega$. Si $\mathbb{B}$ est un sous-groupe de Borel il existe alors un unique ordre sur Φ tel que $\mathbb{B}$ soit engendré par $\mathbb{T}$ et les U_α, $\alpha > 0$.

4.2 Caractères non-ramifiés

Dans la suite $\mathbb{F}$ désignera un corps local non-archimédien.

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}$. On note $X^*(\mathbb{G})$ le groupe des caractères algébriques de $\mathbb{G}$ et $X^*(G)$ le sous-groupe de $X^*(\mathbb{G})$ des caractères définis sur $\mathbb{F}$. De même on note $X_*(\mathbb{G})$ le groupe des co-caractères et $X_*(G)$ le sous-groupe des co-caractères définis sur $\mathbb{F}$. Il existe un morphisme $ord_G : G \to X_*(G)$ défini de la façon suivante

$$\langle ord_G(g), \lambda\rangle = ord_{\mathbb{F}}(\lambda(g)),$$

pour $g \in G$, $\lambda \in X^*(G)$, et où $ord_{\mathbb{F}}$ désigne la valuation sur $\mathbb{F}$. Notons ${}^0G$ le noyau de ce morphisme et $\Lambda(G)$ son image. Nous avons donc la suite exacte suivante

$$1 \to {}^0G \to G \to \Lambda(G) \to 1.$$

Nous avons également la formule

$${}^0G = \bigcap_{\chi \in X^*(G)} ker|\chi|_{\mathbb{F}}.$$

4.3 Exemple. Lorsque $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ est un tore déployé sur $\mathbb{F}$, alors ${}^0T = \mathbb{T}(\mathfrak{O}_{\mathbb{F}})$ (où $\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{F}$).

4.4 Lemme. *Soit* $\chi \in X^*(G)$. *Alors* $|\chi|_{\mathbb{F}} : G \to \mathbb{R}_+^*$ *est un caractère lisse de* G *dont le noyau contient tous les sous-groupes compacts de* G.

Démonstration. Le noyau de $|\chi|_{\mathbb{F}}$ est l'image réciproque par χ de l'ouvert compact $\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}^\times$ ($\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{F}$),c'est donc un ouvert de G et $|\chi|_{\mathbb{F}}$ est un caractère lisse de G.

Soit maintenant un sous-groupe compact K de G. Prenons un sous-groupe ouvert compact K_1 inclus dans K et dans le noyau de $|\chi|_{\mathbb{F}}$. K/K_1 est alors fini, et l'unique sous-groupe fini de $\mathbb{R}_+^*$ est $\{1\}$ donc K est dans le noyau de $|\chi|_{\mathbb{F}}$. □

4.5 Proposition. *Le groupe* ${}^0G$ *est un sous-groupe ouvert, fermé et distingué de* G. *Tout sous-groupe compact de* G *est contenu dans* ${}^0G$. *Le groupe dérivé* $\mathcal{D}(G)$ *est contenu dans* ${}^0G$.

Démonstration. Le lemme précédent nous montre que tout sous-groupe compact de G est inclus dans ${}^0G$. ${}^0G$ est distingué car $ker|\chi|_{\mathbb{F}}$ est distingué pour tout $\chi \in X^*(G)$. Les $ker|\chi|_{\mathbb{F}}$ étant fermés, il en est de même de ${}^0G$. ${}^0G$ contient les sous-groupes ouverts compacts, il doit donc être ouvert. Enfin, tout caractère étant trivial sur le groupe dérivé, on a bien $\mathcal{D}(G) \subset {}^0G$. □

4.6 Proposition. *Soit* A_G *une composante déployée de* G. *Alors* ${}^0A_G = {}^0G \cap A_G$, $G/{}^0GA_G$ *est fini et* ${}^0G \cap Z(G)$ *est compact.*

Démonstration. Voir [Ren10] (lemme V.2.6 et proposition V.2.6). □

4.7 Définition. On appelle caractère non ramifié de G un morphisme de groupe de G dans $\mathbb{C}^*$ trivial sur ${}^0G$. On note $\mathcal{X}(G)$ l'ensemble des caractères non ramifiés.

4.8 Remarque. On peut identifier les caractères non ramifiés de G aux caractères de $\Lambda(G)$.

Regardons ce qu'il se passe maintenant si $G = A$ est un tore déployé sur $\mathbb{F}$. On a

$$A \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(X^*(A), \mathbb{F}^\times) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(X^*(A), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}^\times \simeq X_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}^\times$$

Soit $\varpi \in \mathbb{F}^\times$ une uniformisante de $\mathbb{F}$. Notons $\mathbb{Z}_\varpi$ le groupe formé de l'ensemble des puissances de ϖ. Comme $ord_{\mathbb{F}}(\varpi) = 1$, $ord_{\mathbb{F}}$ réalise une bijection entre $\mathbb{Z}_\varpi$ et $\mathbb{Z}$. Notons $C_A = Hom_{\mathbb{Z}}(X^*(A), \mathbb{Z}_\varpi)$. Alors

$$C_A = Hom_{\mathbb{Z}}(X^*(A), \mathbb{Z}_\varpi) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(X^*(A), \mathbb{Z}) = X_*(A)$$

Ceci identifie C_A à un sous-groupe de A et l'isomorphisme ci-dessus est donné par ord_A. En particulier ord_A est surjective et $\Lambda(A) = X_*(A)$.

Le groupe des caractères non-ramifiés de G, $\mathcal{X}(G)$, agit sur $\mathbf{Irr}(G)$ par $(\omega, \pi) \mapsto \pi \otimes \omega$, $\omega \in \mathcal{X}(G)$ et $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$. Les orbites de cette action sont appelées classes d'inertie et on note $[\pi]$ la classe d'inertie d'un représentant π de $\mathbf{Irr}(G)$. On note également $[\mathbf{Irr}(G)]$ l'ensemble des classes d'inerties.

4.3 Sous-groupes paraboliques

Soit P un sous-groupe parabolique de G. On note N son radical unipotent. Il existe alors un sous-groupe réductif M de G, appelé facteur de Levi de P, tel que M normalise N et $P = M \rtimes N$. On peut obtenir les facteurs de Levi en choisissant A une composante déployée de P et en posant $M = Z(G, A)$ (centralisateur de A dans G). A est alors une composante déployée de M. Dans la suite, pour résumer cette situation, on utilisera la notation, $P = MN$ est un sous-groupe parabolique de G. On note également $N(A)$ le normalisateur de A dans G et $W = N(A)/M$ le groupe de Weyl associé.

Soit $A_\emptyset$ un tore déployé maximal de G. Notons $M_\emptyset$ son centralisateur dans G et $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$ un sous-groupe parabolique minimal associé. Un sous-groupe parabolique P est dit standard si $P_\emptyset \subset P$. Dans ce cas P possède un unique facteur de Levi M contenant $A_\emptyset$ et on a $M_\emptyset \subset M$. Tout sous-groupe parabolique de G est conjugué à un sous-groupe parabolique standard.

On fixe un sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$ et on note $A_\emptyset$ la composante déployée de $M_\emptyset$. On note également $\Delta_\emptyset = \Delta(P_\emptyset)$ l'ensemble des racines simples associées à $A_\emptyset$ et positives pour $P_\emptyset$.

4.9 Exemple. Prenons, pour illustrer ces notions, $G = GL_n(\mathbb{F})$. On peut alors prendre pour $A_\emptyset$ l'ensemble des matrices diagonales inversibles et pour $P_\emptyset$ les matrices triangulaires supérieures inversibles. Dans ce cas, $M_\emptyset = A_\emptyset$ et $N_\emptyset$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. $\Delta_\emptyset = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n\}$, où $\lambda_i(diag(x_1, \dots, x_n)) = x_i$.

Pour un sous-groupe parabolique standard $P = MN$, on notera également $\Delta_\emptyset^M$ l'analogue de $\Delta_\emptyset$ lorsque l'on remplace G par M. Soit A la composante déployée de P. On a $A \subset A_\emptyset$. Notons $\mathfrak{a} = X_*(A) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ et $\mathfrak{a}^* = X^*(A) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. Alors on définit $\Delta(P) = \{\alpha_{|\mathfrak{a}},\ \alpha \in \Delta_\emptyset \backslash \Delta_\emptyset^M\}$. Posons ${}_P^G[\mathfrak{a}^*]^+ = \{\chi \in \mathfrak{a}^* | \langle \chi, \alpha^\vee \rangle > 0,\ \alpha \in \Delta(P)\}$ et ${}_P^G\overline{[\mathfrak{a}^*]}^+ = \{\chi \in \mathfrak{a}^* | \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0,\ \alpha \in \Delta(P)\}$.

Notons $M^+ = ord_M^{-1}({}_P^G\overline{[\mathfrak{a}^*]}^+)$ et $M^{++} = ord_M^{-1}({}_P^G[\mathfrak{a}^*]^+)$. Si alors H est une partie de M, on pose $H^+ = H \cap M^+$ et $H^{++} = H \cap M^{++}$. On a alors $A^+ = \{a \in A,\ |\alpha(a)|_\mathbb{F} \leq 1,\ (\alpha \in \Delta(P))\}$ et $A^{++} = \{a \in A,\ |\alpha(a)|_\mathbb{F} < 1,\ (\alpha \in \Delta(P))\}$.

Notons également que si $P = MN$ est un sous-groupe parabolique qui définit une base Δ de l'ensemble des racines de G alors, Δ^- l'ensemble des racines opposées à celles de Δ, détermine un sous-groupe parabolique $P^- = M \cdot N^-$ dit opposé à P.

4.10 Exemple. Dans le cas de l'exemple précédent où $G = GL_n(\mathbb{F})$ et P est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles alors P^- est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures inversibles et N^- est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures unipotentes.

Nous avons vu que le réseau $\Lambda(A)$ admettait un relèvement en un sous-groupe C_A de A. Cela n'est pas toujours le cas pour le réseau $\Lambda(M)$, cependant, on peut trouver un ensemble fini d'éléments de M, F_M, tel que $\tilde{C}_A = F_M \cdot C_A$ soit un relèvement ensembliste de $\Lambda(M)$. On peut prendre les éléments de F_M dans M^+, en effet on peut remplacer $f \in F_M$ par ft^m où $t \in C_A^{++}$ et m est suffisamment grand. On peut aussi s'arranger pour avoir $\tilde{C}_A^+ = F_M \cdot C_A^+$. On notera également $C_\emptyset = C_{A_\emptyset}$, $F_\emptyset = F_{M_\emptyset}$ et $\Lambda_\emptyset = \Lambda(M_\emptyset)$.

4.11 Proposition. *$C_A^{++} \cap {}^0G$ est non vide.*

Démonstration. Voir [Ren10] (paragraphe V.3.25). □

La théorie des immeubles de Bruhat-Tits (voir [Tit79] pour plus de détails) permet de construire un sous-groupe compact maximal K_0 de G, ouvert, tel que

4.12 Théorème (Décomposition de Cartan)**.** *Il existe un sous-ensemble $\Lambda_\emptyset^-$ de $\Lambda_\emptyset$ tel que tout élément de $\Lambda_\emptyset$ est conjugué sous W à un unique élément de $\Lambda_\emptyset^-$ et*

$$G = \coprod_{\lambda \in \Lambda_\emptyset^-} K_0 \cdot ord_{M_\emptyset}^{-1}(\lambda) \cdot K_0 = \coprod_{a \in C_\emptyset^+,\ f \in F_\emptyset} K_0 a f K_0.$$

4.13 Théorème (Décomposition d'Iwasawa)**.** *On a $G = K_0 P_\emptyset = P_\emptyset K_0$.*

4.14 Proposition. *Si P est un sous-groupe parabolique quelconque, il est conjugué à un sous-groupe parabolique standard par K_0. De plus, G/P est compact.*

4.15 Proposition. *Le groupe de Weyl, $W = N(A_\emptyset)/M_\emptyset$, peut s'identifier avec $(K_0 \cap N(A_\emptyset))/(K_0 \cap M_\emptyset)$.*

4.16 Théorème. *Il existe une base de voisinages de d'identité dans G constituée de sous-groupes ouverts compacts K tels que*

1. *K est un sous-groupe distingué de K_0*

2. *Pour tout sous-groupe parabolique standard $P = MN$, on a une décomposition, dite décomposition d'Iwahori de K selon P,*

$$K = K_{N^-}K_M K_N,\ K_{N^-} = K \cap N^-,\ K_N = K \cap N,\ K_M = K \cap M$$

3. *$\tilde{C}_A$ normalise K_M, $\tilde{C}_A^+$ normalise K_N et $(\tilde{C}_A^+)^{-1}$ normalise K_{N^-}.*
4. *Soit $m \in \tilde{C}_A^{++}$, alors $N = \bigcup_n m^{-n}K_N m^n$ et $N^- = \bigcup_n m^n K_{N^-} m^{-n}$.*

4.17 Exemple. Dans le cas $G = GL_n(\mathbb{F})$ on peut prendre $K_0 = GL_n(\mathfrak{O}_{\mathbb{F}})$.

5 Représentations des groupes p-adiques

5.1 Les foncteurs i_P^G et r_P^G

Ici G sera un groupe p-adique, c'est à dire que $G = \mathbb{G}(\mathbb{F})$ où $\mathbb{F}$ est un corps local non-archimédien et $\mathbb{G}$ est un groupe algébrique connexe, réductif, défini sur $\mathbb{F}$.

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Nous allons appliquer les résultats de la section 3.4 à ce cas particulier.

M normalise N, on a donc un foncteur $j_N : \mathcal{M}(G) \longrightarrow \mathcal{M}(M)$, $(\pi, V) \mapsto (\pi_N, V_N)$. C'est en réalité la composition du foncteur d'oubli $\mathcal{F}_P^G : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(P)$ et du foncteur $j_N : \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(M)$.

Partons maintenant d'une représentation lisse (τ, E) de M. On la prolonge à P par $\tau(mn) = \tau(m)$ pour $m \in M$ et $n \in N$ (on notera que si $\phi : P \to M$ est la composition de la projection canonique $P \to P/N$ et de l'isomorphisme $P/N \simeq M$, alors cette représentation est $\mathcal{F}_P^M(E)$ où $\mathcal{F}_P^M$ est le foncteur d'oubli associé à ϕ). On obtient ensuite une représentation de G en l'induisant de P à G. Pour simplifier les notations, on écrira $Ind_P^G(\tau, E)$ à la place de $Ind_P^G(\mathcal{F}_P^M(\tau, E))$.

5.1 Théorème. *Le foncteur $j_N : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(M)$ est l'adjoint à gauche du foncteur $Ind_P^G : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(G)$. Pour toute représentation lisse (τ, E) de M et toute représentation lisse (π, V) de G, on a un isomorphisme naturel*

$$Hom_M((\pi_N, V_N), (\tau, E)) \simeq Hom_G((\pi, V), Ind_P^G(\tau, E)).$$

Les foncteurs Ind_P^G et j_N sont exacts.

Démonstration. Nous avons

$$j_N : \mathcal{M}(G) \overset{\mathcal{F}_P^G}{\to} \mathcal{M}(P) \overset{j_N}{\to} \mathcal{M}(M),$$

$$Ind_P^G : \mathcal{M}(M) \overset{\mathcal{F}_P^M = {}^\vee\mathcal{F}_P^M}{\to} \mathcal{M}(P) \overset{Ind_P^G}{\to} \mathcal{M}(G).$$

$j_N : \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(M)$ et l'adjoint à gauche de ${}^\vee\mathcal{F}_P^M$ et $\mathcal{F}_P^G$ est l'adjoint à gauche de Ind_P^G. On en déduit l'adjonction des foncteurs par composition des foncteurs adjoints.

j_N est exact par composition de tels foncteurs.

$\mathcal{F}_P^M$ étant isomorphe à ${}^\vee\mathcal{F}_P^M$ qui admet un adjoint à gauche et à droite, il est donc exact. Ind_P^G est alors exact par composition de tels foncteurs. □

Généralement, ces deux foncteurs sont normalisés de la façon suivante :

$$i_P^G(\tau, E) = Ind_P^G(\tau \otimes \delta_P^{-1/2}, E)$$

$$r_P^G(\pi, V) = (\pi_N \otimes \delta_P^{1/2}, V_N)$$

5.2 Proposition. *Les foncteurs $i_P^G : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(G)$ et $r_P^G : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(M)$ sont exacts. Le premier est l'adjoint à gauche du second.*

5.3 Proposition. *Si (π, V) est une représentation lisse de type fini de G, alors (π_N, V_N) et $r_P^G(\pi, V)$ sont aussi de type fini.*

Démonstration. Soient $\{v_1, \dots, v_l\}$ des vecteurs qui engendrent V comme représentation de G, et K un sous-groupe ouvert compact de G fixant les v_i. $P\backslash G$ étant compact, $P\backslash G/K$ est fini, et soit $\{g_1, \dots, g_n\}$ un système de représentants de ces doubles classes. V est alors engendré comme P-module par les $\pi(g_j) \cdot v_i$. Or N agit trivialement sur V_N, donc V_N est engendré comme M-module par les images des $\pi(g_j) \cdot v_i$ dans V_N. La normalisation ne changeant rien, il en est de même pour $r_P^G(\pi, V)$. $\square$

Si $P = MN$ et $Q = LU$ sont deux sous-groupes paraboliques de G avec $P \subset Q$. Alors $L \cap P = M(L \cap N)$ est un sous-groupe parabolique de L, $N = (N \cap L)U$ et $(L \cap P)U = MN = P$. On a alors

5.4 Lemme. $i_P^G = i_Q^G \circ i_{P\cap L}^L$ *et* $r_P^G = r_{P\cap L}^L \circ r_Q^G$

Démonstration. Voir [Ren10] (lemme VI.1.4). $\square$

5.2 Représentations cuspidales

5.5 Définition. Une représentation lisse (π, V) de G est dite cuspidale si pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MN$ de G, $r_P^G(V)$ est nul.

Par exactitude de r_P^G, tout sous-quotient d'une représentation cuspidale est cuspidale.

5.6 Proposition. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Alors il existe un sous-groupe parabolique $P = MN$ de G (que l'on peut supposer standard) tel que $r_P^G(\pi, V)$ soit une représentation cuspidale de M. Par réciprocité de Frobenius, il existe une représentation cuspidale irréductible (τ, E) de M telle que (π, V) soit une sous-représentation de $i_P^G(\tau, E)$.*

Démonstration. Prenons un sous-groupe parabolique standard $P = MN$ qui soit minimal pour la propriété $r_P^G(V) \neq 0$. Les sous-groupes paraboliques de M sont les $M \cap P'$ où $P' = M'N'$ est un sous-groupe parabolique standard inclus dans P. Alors par 5.4, $r_{M\cap P'}^M \circ r_P^G(V) = r_{P'}^G(V)$. Par minimalité de P, $r_{P'}^G(V)$ et donc $r_P^G(V)$ est cuspidale.

$r_P^G(V)$ est de type fini, donc possède un quotient irréductible (τ, E). Par exactitude des foncteurs r, (τ, E) est cuspidale et par réciprocité de Frobenius $0 \neq Hom_M(r_P^G(\pi, V), (\tau, E)) = Hom_G((\pi, V), i_P^G(\tau, E))$. $\square$

5.7 Théorème. *Soit (π, V) une représentation lisse de G. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. (π, V) *est cuspidale*

2. Les coefficients matriciels de (π, V) *sont à support compact modulo le centre* $Z(G)$.

3. La restriction de (π, V) *à* ${}^0G$ *est compacte.*

2. $\Rightarrow$ *3.* Soient $v \in V$ et $\lambda \in \tilde{V}$. Notons C le support de $\phi_{v,\lambda}$ dans G et ${}^0C = C \cap {}^0G$. Il nous faut montrer que ${}^0C$ est compact. Posons $\overline{{}^0C}$ l'image de ${}^0C$ dans ${}^0G/({}^0G \cap Z(G))$ et $\overline{C}$ l'image de C dans $G/Z(G)$. Nous pouvons voir ${}^0G/({}^0G \cap Z(G)$ comme un sous-groupe fermé de $G/Z(G)$ grâce à l'inclusion naturelle ${}^0G/({}^0G \cap Z(G)) \hookrightarrow G/Z(G)$. Par hypothèse $\overline{C}$ est compact donc $\overline{{}^0C} = \overline{C} \cap ({}^0G/({}^0G \cap Z(G)))$ est compact. Nous allons utiliser le résultat suivant : si H est un sous-groupe compact d'un groupe topologique G et si G/H est compact, alors G est compact (voir [Ren10] (théorème VI.2.1) pour des références sur la preuve de cet énoncé). Soit $\overline{K}$ un sous-groupe compact de ${}^0G/({}^0G \cap Z(G))$. Notons K son image inverse dans ${}^0G$ alors comme ${}^0G \cap Z(G)$ est compact, d'après ce résultat K est compact. $\overline{{}^0C}$ peut être recouvert par un nombre fini de translatés de $\overline{K}$, donc ${}^0C$ peut être recouvert par un nombre fini de translatés de K et on en déduit que ${}^0C$ est compact.

[3. $\Rightarrow$ 1.] Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique propre de G de composante déployée A. On peut supposer sans perte de généralités que P est standard. Soit $v \in V$, le but est de montrer que $v \in V(N)$.

Prenons K un sous-groupe ouvert compact de G admettant une décomposition d'Iwahori selon P, $K = K_{N^-}K_MK_N$, et tel que $v \in V^K$. D'après 4.11, il existe $t \in A^{++} \cap {}^0G$. Par définition, pour tout $a \in \Delta(P)$, $|\alpha(t)|_{\mathbb{F}} < 1$ et donc pour toute partie compacte C de $\mathbb{R}_+^*$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $|m| \geq m_0$ alors $|\alpha(t^m)|_{\mathbb{F}}$ n'est pas dans C. Ainsi, pour toute partie compacte de $A \cap {}^0G$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $|m| \geq m_0$ alors t^m n'est pas dans cette partie compacte. Par hypothèse, la restriction de (π, V) à ${}^0G$ est à support compact, donc pour m assez grand, $\pi(e_K)\pi(t^m) \cdot v = 0$. Ainsi $0 = \pi(e_{t^{-m}Kt^m}) \cdot v = \pi(e_{t^{-m}K_Nt^m})\pi(e_{t^{-m}K_Mt^m})\pi(e_{t^{-m}K_{N^-}t^m}) \cdot v$. $t \in A$ est central dans M donc $t^{-m}K_Mt^m = K_M \subset K$. On a aussi $t^{-m}K_{N^-}t^m \subset K_{N^-} \subset K$. Donc $\pi(e_{t^{-m}K_Nt^m}) \cdot v = 0$. Or $t^{-m}K_Nt^m$ est un sous-groupe compact de N et donc $v \in V(N)$ par.

[1. $\Rightarrow$ 2.] Nous allons montrer par contraposé que si (π, V) n'est pas compacte modulo le centre alors il existe un sous-groupe parabolique $P = MN$ tel que $V_N \neq 0$.

Soit $\phi_{v,\lambda}$ un coefficient matriciel dont le support n'ai pas compact modulo le centre. D'après la décomposition de Cartan, $G = K_0F_\emptyset C_\emptyset^+ K_0$, il existe un élément $f \in F_\emptyset$ et une suite d'éléments distincts $t_n \in C_\emptyset^+$ tels que $Supp(\phi_{v,\lambda}) \cap K_0ft_nK_0 \neq \emptyset$, et que l'ensemble $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est contenu dans aucune partie compacte modulo le centre de G. Il existe alors $\alpha \in \Delta_\emptyset$ tel que $\{|\alpha(t_n)|_{\mathbb{F}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit contenu dans aucune partie compacte de $\mathbb{R}_+^*$.Quitte à extraire, on peut supposer que $\lim_{n\to\infty} |\alpha(t_n)|_{\mathbb{F}} = 0$.

Prenons $P = MN$ le sous-groupe parabolique standard associé à $\Delta_\emptyset \backslash \{\alpha\}$. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G, distingué dans K_0, admettant une décomposition d'Iwahori selon P, $K = K_{N^-}K_MK_N$, et tel que $v \in V^K$, $\lambda \in \tilde{V}^K$. $[K_0 : K]$ étant fini, on peut trouver $k_1, k_2 \in K_0$ tels que $Supp(\phi_{v,\lambda}) \cap k_1Kft_nKk_2 \neq \emptyset$ pour une infinité de n. Pour chacun de ces n on choisit $k_n', k_n'' \in K$ tels que $\phi_{v,\lambda}(k_1k_n'ft_nk_n''k_2) \neq 0$.

Comme K est distingué dans K_0 et fixe v et λ, $\phi_{v,\lambda}(k_1k_n'ft_nk_n''k_2) = \lambda(\pi(k_1k_n'k_1^{-1})\pi(k_1ft_nk_2)\pi(k_2^{-1}k_n''k_2) \cdot v) = \lambda(\pi(k_1ft_nk_2) \cdot v)$. Posons $v_1 = \pi(fk_2) \cdot v$

et $\lambda_1 = \tilde{\pi}(k_1^{-1}) \cdot \lambda$. λ_1 étant fixé par K, donc par K_N, on a

$$\begin{aligned}\phi_{v,\lambda}(k_1 k'_n f t_n k''_n k_2) &= \lambda_1(\pi(t_n) \cdot v) \\ &= (\pi(e_{K_N}) \cdot \lambda_1)(\pi(t_n) \cdot v_1) \\ &= \lambda_1(\pi(e_{K_N})\pi(t_n) \cdot v_1) \\ &= \lambda_1(\pi(t_n)\pi(e_{t_n^{-1}K_N t_n}) \cdot v_1)\end{aligned}$$

Ainsi $\pi(e_{t_n^{-1}K_N t_n}) \cdot v_1 \neq 0$. Et comme $N = \bigcup_n t_n^{-1} K_N t_n$, $v_1 \notin V(N)$ et V_N est non nul. □

Nous allons utiliser ce résultat pour transférer les décompositions établies sur les représentations compactes aux représentations cuspidales.

5.8 Théorème. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Alors (π, V) est admissible.*

Démonstration. Une représentation cuspidale irréductible a une restriction à ${}^0G$ qui est compacte. Cette restriction est de type fini, car $G/{}^0GZ(G)$ est fini et $Z(G)$ agit via des scalaires d'après le lemme de Schur. Comme une représentation compacte de type fini est admissible, cette restriction est admissible. Notons que comme tous les sous-groupe compacts de G sont inclus dans ${}^0G$, l'admissibilité d'une représentation ne dépend que de sa restriction à ${}^0G$. Ainsi, une représentation cuspidale irréductible est admissible. Maintenant, en utilisant la proposition 5.6, on peut plonger (π, V) dans une représentation $i_P^G(\tau, E)$ avec (τ, E) cuspidale irréductible. Par ce qui précède (τ, E) est admissible, donc $i_P^G(\tau, E)$ est admissible et il en est de même pour (π, V). □

5.3 Décomposition de $\mathcal{M}(G)$

${}^0G$ est distingué dans G, donc on peut faire agir G sur $\mathbf{Irr}({}^0G)$ par $(g, \sigma) \mapsto \sigma^g$, où $\sigma^g(h) = \sigma(g^{-1}hg)$.

5.9 Lemme. 1. *Les orbites de l'action de ${}^0G$ sur $\boldsymbol{Irr}({}^0G)$ sont de cardinal fini.*

2. *Soient (π, V) une représentation lisse de G, (σ, W) une représentation lisse irréductible de ${}^0G$, et $V(\sigma)$ la composante σ-isotypique de la restriction de (π, V) à ${}^0G$. Alors, pour tout $g \in G$, $\pi(g) \cdot V(\sigma) = V(\sigma^g)$.*

Démonstration. 1. Le groupe $G/{}^0GZ(G)$ est fini, ce qui nous donne le résultat.

2. Soit $f \in Hom_{{}^0G}((\sigma, W), (\pi, V))$. On définit alors $\tilde{f}(w) = \pi(g) \cdot f$. $\tilde{f} \in Hom_{{}^0G}((\sigma^g, W), (\pi, V))$, en effet

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\sigma^g(h) \cdot w) = \tilde{f}(\sigma(g^{-1}hg) \cdot w) &= \pi(g) \cdot f((\sigma(g^{-1}hg) \cdot w) \\ &= f(\sigma(g)\sigma(g^{-1}hg) \cdot w) = f(\sigma(hg) \cdot w) \\ &= \pi(h) \cdot (\pi(g) \cdot f(w)) = \pi(h) \cdot \tilde{f}(w)\end{aligned}$$

$f \mapsto \tilde{f}$ est un isomorphisme : $Hom_{{}^0G}((\sigma, W), (\pi, V)) \simeq Hom_{{}^0G}((\sigma^g, W), (\pi, V))$ et on a le résultat.

□

5.10 Proposition. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G.*

1. *Les éléments de* $\boldsymbol{Irr}(^0G)$ *apparaissant dans les restrictions de* (π, V) *à* ^0G *forment une seule* G*-orbite.*
2. *La restriction de* (π, V) *à* ^0G *est semi-simple et de longueur finie.*
3. *Soient* (π_1, V_1) *et* (π_2, V_2) *des représentations irréductibles de* G*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (a) $Res^G_{^0G}(\pi_1, V_1) = Res^G_{^0G}(\pi_2, V_2)$.
   (b) *Il existe* $\chi \in \mathcal{X}(G)$ *tel que* $\pi_2 = \pi_1 \otimes \chi$.
   (c) $Hom_{^0G}(Res^G_{^0G}\pi_1, Res^G_{^0G}\pi_2) \neq 0$.

Démonstration. 1. L'identité $\pi(g) \cdot V(\sigma) = V(\sigma^g)$ et le fait que V est irréductible nous montre que l'ensemble des σ tels que $V(\sigma)$ est non nul forme exactement une G-orbite. On a le 1.

2. $G/Z(G)^0G$ est un ensemble fini, fixons Γ un ensemble de représentants dans G. Par le lemme de Schur, $Z(G)$ agit via des scalaires sur V (on notera χ_π le caractère central de π), donc $Res^G_{^0G}(\pi, V)$ est de type fini. Ainsi $Res^G_{^0G}(\pi, V)$ possède un sous-quotient irréductible (σ, W). Soit $f \in Hom_{^0G}(Res^G_{^0G}(\pi, V), (\sigma, W))$ non nulle, alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, $f \circ \pi(\gamma) \in Hom_{^0G}(Res^G_{^0G}(\pi, V), (\sigma^\gamma, W))$. Formons

$$\phi = \oplus_{\gamma\in\Gamma} f \circ \pi(\gamma) \in Hom_{^0G}(Res^G_{^0G}(\pi, V), \oplus_{\gamma\in\Gamma}(\sigma^\gamma, W))$$

Montrons que $ker(\phi)$ est stable sous l'action de G. Soient $v \in ker(\phi)$ et $g \in G$. Écrivons $g = \gamma' yz$, $\gamma' \in \Gamma$, $y \in {}^0G$, $z \in Z(G)$, et pour $\gamma \in \Gamma$ on note $\gamma\gamma' = y''z''\gamma'' \in \Gamma$, $y'' \in {}^0G$, $z'' \in Z(G)$. Alors

$$\begin{aligned}
\phi(\pi(g) \cdot v) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} f \circ \pi(\gamma)(\pi(\gamma')\pi(y)\pi(z) \cdot v) \\
&= \chi_\pi(z) \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\pi(\gamma\gamma' y \gamma'^{-1}\gamma^{-1})\pi(\gamma\gamma') \cdot v) \\
&= \chi_\pi(z) \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_\pi(z'')\sigma(\gamma\gamma' y\gamma'^{-1}\gamma^{-1})\sigma(y'') \cdot f(\pi(y'') \cdot v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ϕ est non nulle, $ker(\phi)$ est stable par G et V est irréductible donc $ker(\phi)$ est nul. ϕ est donc injective et $Res^G_{^0G}(\pi, V)$ est isomorphe à une sous-représentation de $\oplus_{\gamma\in\Gamma}(\sigma^\gamma, W)$ qui est de longueur finie et semi-simple. On obtient donc 2. (on pourra utiliser le lemme 3.22).

3. Nous avons $(b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (c)$. Il nous reste à montrer $(c) \Rightarrow (b)$. Supposons que l'on ait (c). Le 2. et le lemme de Schur nous montre que $Hom_{^0G}(V_1, V_2)$ est de dimension finie. Munissons cet espace de l'action de G donnée par, pour $g \in G$ et $f \in Hom_{^0G}(V_1, V_2)$, $g \cdot f = \pi_1(g) \circ f \circ \pi_2(g)^{-1}$. ^0G agit trivialement sur $Hom_{^0G}(V_1, V_2)$, cela nous donne donc une action de $G/{}^0G$ qui est commutatif. Une famille d'endomorphismes sur un espace vectoriel de dimension finie admettant un vecteur propre commun, il existe $f \in Hom_{^0G}(V_1, V_2)$ non nul et un caractère χ de $G/{}^0G$ tel que pour tout $g \in G$, $g \cdot f = \chi(g)f$. Ainsi $f \in Hom_G(\pi_1 \otimes \chi, \pi_2)$ et par irréductibilité $\pi_1 \otimes \chi = \pi_2$.

□

Soit (π, V) une représentation cuspidale irréductible de G. On peut alors décomposer $Res^G_{^0G}$ en composantes isotypiques : $V = \bigoplus_{i=1}^m V(\sigma_i)$, où les σ_i forment une orbite sous l'action de G dans $\mathbf{Irr}(^0G)$. Notons que cette décomposition ne dépend en fait que de la classe d'inertie $[\pi]$.

Soit (ρ, W) une représentation lisse de G. Grâce aux résultats sur les représentations compactes, on sait que $Res^G_{^0G}(\rho, W) = \rho(e_{\sigma_1}) \cdot W \oplus \rho(e_{\sigma_2}) \cdot W \oplus \cdots \rho(e_{\sigma_m}) \cdot W \oplus W'$, où W' est l'unique supplémentaire ^0G-invariant de $\rho(e_{\sigma_1}) \cdot W \oplus \rho(e_{\sigma_2}) \cdot W \oplus \cdots \rho(e_{\sigma_m}) \cdot W$. Notons qu'aucun facteur de composition de W' n'est isomorphe à l'un de σ_i, et que cela le caractérise.

5.11 Proposition. *Le sous-espace W' de V est G-invariant et pour tout $i = 1, \ldots, m$, pour tout $g \in G$, $\rho(g) \circ \rho(e_{\sigma_i}) = \rho(e_{g \cdot \sigma_i}) \circ \rho(g)$.*

Démonstration. Soient $g \in G$ et (τ, E) un sous-quotient irréductible de (ρ, W'). Alors (τ^g, E) est un sous-quotient irréductible de $\rho(g) \cdot W$. Or τ^g n'est équivalent à aucun des σ_i car ceux-ci forment une G-orbite. Ainsi, $\tau(e_{\sigma_i})\rho(g)W' = 0$ pour tout i, et par unicité de W', $\rho(g) \cdot W' = W'$.

Soit $w \in W$, écrivons $w = w_1 + \cdots + w_m + w'$ avec $w_i \in \rho(e_{\sigma_i}) \cdot W$ et $w' \in W'$. Fixons un entier i et un élément $g \in G$. Posons $\sigma_j = \sigma_i^g$. On a alors $\rho(e_{\sigma_i})(\rho(g)^{-1} \cdot w) = \rho(g)^{-1} \cdot w_j$ et $\rho(g)\rho(e_{\sigma_i})\rho(g)^{-1} \cdot w = w_j = \rho(e_{\sigma_j}) \cdot w$. □

Posons $\rho(e_{[\pi]}) = \sum_i \rho(e_{\sigma_i}) : W \to W$. C'est un opérateur d'entrelacement de (ρ, W) dans elle même. De plus c'est un idempotent car $\rho(e_{\sigma_i})\rho(e_{\sigma_j}) = 0$ si $i \neq j$. Ceci nous fournit alors une décomposition de W en sous-représentations $W = \rho(e_{[\pi]}) \cdot W \oplus (1 - \rho(e_{[\pi]})) \cdot W$.

Si l'on note $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ (resp. $\mathcal{M}(G)\backslash[\pi]$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ des représentations de G sont tous les sous-quotients irréductibles sont dans $[\pi]$ (resp, aucun sous-quotient irréductible n'est dans $[\pi]$), alors on obtient la décomposition

$$\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G)_{[\pi]} \times (\mathcal{M}(G)\backslash[\pi])$$

5.12 Théorème. *La catégorie $\mathcal{M}(^0G)$ se décompose en*

$$\mathcal{M}(^0G) = \prod_{\tau \in \boldsymbol{Irr}(^0G)_c} \mathcal{M}(^0G)_\tau \times \mathcal{M}(^0G)_{nc}$$

Démonstration. La preuve, que l'on trouve dans [Ren10] (théorème VI.3.4), consiste à vérifier que la catégorie vérifie bien la condition **(KF)** de la proposition 3.34. □

On note $\mathcal{M}(G)_{cus}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ des représentations cuspidales de G et $\mathbf{Irr}(G)_{cus}$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations cuspidales irréductibles de G. Notons également $\mathcal{M}(G)_{ind}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ des représentations lisses admissibles de G dont aucun sous-quotient n'est cuspidal.

5.13 Théorème. *La catégorie $\mathcal{M}(G)$ se décompose en*

$$\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G)_{cus} \times \mathcal{M}(G)_{ind} = \prod_{[\tau] \in [\boldsymbol{Irr}(G)_{cus}]} \mathcal{M}(G)_{[\tau]} \times \mathcal{M}(G)_{ind}$$

Démonstration. Soit (π, V) une représentation lisse de G. Le théorème précédent nous donne $Res^G_{^0G}(V) = V_c \oplus V_{nc}$. V_c et V_{nc} sont stables sous l'action de G car la décomposition précédente est unique. Une représentation est cuspidale si et seulement si sa restriction à ^0G est compacte, ainsi V_c est dans $\mathcal{M}(G)_{cus}$ et V_{nc} est dans $\mathcal{M}(G)_{ind}$.

Il nous reste à montrer la décomposition de $\mathcal{M}(G)_{cus}$. Soit $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)_{cus}$. On peut écrire $Res^G_{^0G}(V) = \bigoplus_{(\sigma)\in \mathbf{Irr}(^0G)_c/G} V^{(\sigma)}$ où $V^{(\sigma)}$ est le facteur direct de $Res^G_{^0G}(V)$ dont les sous-quotients irréductibles sont dans l'orbite de σ sous l'action de G dans $\mathbf{Irr}(^0G)_c$. Alors $V^{(\sigma)}$ est G-stable, cuspidale, et deux sous-quotients de $V^{(\sigma)}$ sont dans la même classe d'inertie. On a bien $\mathcal{M}(G)_{cus} = \prod_{[\tau]\in[\mathbf{Irr}(G)_{cus}]} \mathcal{M}(G)_{[\tau]}$. □

5.14 Proposition. *La catégorie $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ est indécomposable.*

Démonstration. Voir [Ren10] (corollaire VI.4.5). □

5.4 Décomposition de Bernstein

Nous souhaitons approfondir la décomposition précédente pour obtenir une décomposition de $\mathcal{M}(G)$ en un produit de catégories indécomposables, appelée décomposition de Bernstein. Dans cette partie, pour ne pas trop rallonger ce rapport, nous allons exposer les résultats sans les démonstrations. On pourra aller se référer aux chapitres VI.5, VI.6 et VI.7 de [Ren10] pour obtenir les détails manquants.

Un ingrédient fondamental pour obtenir la décomposition de Bernstein est le théorème suivant.

5.15 Théorème (Lemme géométrique)**.** *Soient $P = MN$ et $Q = LU$ des sous-groupes paraboliques de G et soit (τ, E) une représentation lisse de $\mathcal{M}(M)$. Alors la représentation $r^P_Q i^G_P(\tau, E)$ de L admet une filtration dont les composantes du gradué associé sont isomorphes à $(i^L_{L\cap w^{-1}P} \circ w \circ r^M_{wQ\cap M})(\tau, E)$ où w parcourt un certain ensemble $\mathcal{W}^{Q,P}$ de représentants dans G des doubles classes $P\backslash G/Q$.*

Démonstration. Voir [Ren10] (théorème VI.5.1). □

5.16 Définition. On appelle donnée cuspidale un couple $(M, (\rho, W))$ où M est un facteur de Lévi d'un parabolique $P = MN$ de G et (ρ, W) est une représentation irréductible cuspidale de M.

Deux données cuspidales $(M_1, (\rho_1, W_1))$ et $(M_2, (\rho_2, W_2))$ sont dites associées s'il existe $g \in G$ tel que
$$gM_1g^{-1} = M_2 \text{ et } \rho_2 \simeq \rho_1^g.$$

Ceci nous définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des données cuspidales. On note $\Omega(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence et $(M, (\rho, W))_G$ la classe de $(M, (\rho, W))$.

5.17 Lemme. *Soient $P_1 = M_1N_1$, $P_2 = M_2N_2$ deux sous-groupes paraboliques de G ; $(M_1, (\rho_1, W_1))$, $(M_2, (\rho_2, W_2))$ des données cuspidales et (π, V) une représentation lisse irréductible de G telle que (ρ_i, W_i) soit un facteur de composition de $r^G_{P_i}(\pi, V)$. Alors les données cupisdales $(M_1, (\rho_1, W_1))$ et $(M_2, (\rho_2, W_2))$ sont associées.*

Démonstration. Voir [Ren10] (lemme VI.7.1). □

On peut ainsi définir l'application **Sc** par

$$\mathbf{Sc} : \mathbf{Irr}(G) \to \Omega(G), \ (\pi, V) \mapsto (M, (\rho, W))_G$$

où $(M, (\rho, W))$ est une donnée cuspidale pour laquelle il existe un sous-groupe parabolique $P = MN$ de sorte que (ρ, W) soit un facteur de composition de $r_P^G(\pi, V)$.

5.18 Proposition. *L'application **Sc** est une surjection à fibres finies.*

Démonstration. Voir [Ren10] (proposition VI.7.1). □

Nous avons besoin d'une relation d'équivalence plus faible sur les données cuspidales. On dit que deux données cuspidales $(M_1, (\rho_1, W_1))$ et $(M_2, (\rho_2, W_2))$ définissent le même support d'inertie s'il existe $g \in G$ et un caractère non ramifié ω de M_2 tel que

$$gM_1g^{-1} = M_2 \text{ et } \rho_2 \simeq \rho_1^g \otimes \omega.$$

On note alors $\mathcal{B}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence et $[M, (\rho, W)]_G$ la classe de $(M, (\rho, W))$.

5.19 Remarque. Si (π, V) est une représentation cuspidale de G alors $[\pi] = [G, (\pi, V)]_G$.

5.20 Théorème. *L'ensemble $\Omega(G)$ est muni d'une structure de variété algébrique dont les composantes connexes sont indexées par $\mathcal{B}(G)$.*

Démonstration. Voir [Ren10] (théorème VI.7.1). □

Notons $\mathbf{Si} : \mathbf{Irr}(G) \to \mathcal{B}(G)$ qui est la composition de **Sc** et de la projection de $\Omega(G)$ dans $\mathcal{B}(G)$. Les fibres de cette application fournissent une partition de $\mathbf{Irr}(G)$. Pour $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$ et Ω la composante connexe de $\Omega(G)$ associée à $\mathfrak{s}$ notons $\mathbf{Irr}(G)_\Omega$ la fibre au dessus de $\mathfrak{s}$.

5.21 Théorème. *La catégorie $\mathcal{M}(G)$ se décompose en un produit de catégories :*

$$\mathcal{M}(G) = \prod_{\Omega} \mathcal{M}(G)_\Omega$$

où Ω décrit l'ensemble des composantes connexes de $\Omega(G)$ et $\mathcal{M}(G)_\Omega$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans $\mathbf{Irr}(G)_\Omega$.

Démonstration. Voir [Ren10] (théorème VI.7.2). □

5.22 Proposition. *La catégorie $\mathcal{M}(G)_\Omega$ est indécomposable.*

Démonstration. Voir [Ren10] (remarque VI.10.4). □

6 Isomorphisme de Satake

On rappelle que G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}$. $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$ est un sous-groupe parabolique minimal de composante déployée $A_\emptyset$. Le groupe ${}^0A_\emptyset$ (resp. ${}^0M_\emptyset$) est le plus grand sous-groupe compact de $A_\emptyset$ (resp. $M_\emptyset$) et ${}^0A_\emptyset = {}^0M_\emptyset \cap A_\emptyset$. On note $\Lambda_\emptyset = \Lambda(M_\emptyset)$. K_0 est le sous-groupe ouvert compact défini à la section 4.3.

6.1 Quelques formules d'intégrations

Nous allons avoir besoin de quelques formules d'intégration pour la suite. Si Γ est l'un des groupes G, $M_\emptyset$, $N_\emptyset$, ou K_0 alors Γ est unimodulaire. On normalise alors les mesures de Haar par $\int_{\Gamma\cap K_0} d\gamma = 1$. En revanche le groupe $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$ n'est pas unimodulaire. On peut définir des mesures de Haar invariantes à gauche et à droite par

$$\int_{P_\emptyset} f(p)d_l(p) = \int_{M_\emptyset}\int_{N_\emptyset} f(mn)dmdn,$$

$$\int_{P_\emptyset} f(p)d_r(p) = \int_{M_\emptyset}\int_{N_\emptyset} f(nm)dmdn.$$

De la formule $(P_\emptyset \cap K_0) = (M_\emptyset \cap K_0)\cdot(N_\emptyset \cap K_0)$, on obtient la normalisation $\int_{P_\emptyset\cap K_0} d_l(p) = \int_{P_\emptyset\cap K_0} d_r(p) = 1$.

Ces mesures de Haar sont liées à la décomposition d'Iwasawa par les formules suivantes

6.1 Proposition. *Soit $f \in \mathcal{D}(G)$ alors*

$$\int_G f(g)dg = \int_{K_0}\int_{P_\emptyset} f(pk)dkd_l(p)$$

$$\int_G f(g)dg = \int_{K_0}\int_{P_\emptyset} f(kp)dkd_r(p)$$

Démonstration. On définit une application $\mathcal{D}(K_0 \times P_\emptyset) \to \mathcal{D}(G)$, $h \mapsto u_h$ par $u_h(pk^{-1}) = \int_{P_\emptyset\cap K_0} h(kp_1, pp_1)d_l(p_1)$. La forme linéaire $h \mapsto \int_G u_h(g)dg$ est alors une mesure de Haar invariante à gauche sur $K_0 \times P_\emptyset$. En vertu des normalisations on obtient

$$\int_G u_h(g)dg = \int_{K_0}\int_{P_\emptyset} h(k,p)dkd_lp.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer $h(k,p)$ par $f(pk^{-1})$ pour obtenir le résultat. $\square$

Notons $\mathfrak{n} = Lie(N_\emptyset)$. Pour tout $m \in M_\emptyset$, la représentation adjointe définit un automorphisme $Ad_\mathfrak{n}(m)$ de $\mathfrak{n}$ et on définit

$$\delta(m) = |det\ Ad_\mathfrak{n}(m)|_\mathbb{F}.$$

On peut alors montrer que si $f \in \mathcal{D}(N)$ alors

$$\int_{N_\emptyset} f(mnm^{-1})dn = \delta(m)^{-1}\int_{N_\emptyset} f(n)dn.$$

En particulier on obtient les nouvelles formules pour les mesures de Haar sur $P_\emptyset$:

$$\int_{P_\emptyset} f(p)d_l(p) = \int_{M_\emptyset}\int_{N_\emptyset} \delta(m)^{-1}f(nm)dmdn,$$

$$\int_{P_\emptyset} f(p)d_r(p) = \int_{M_\emptyset}\int_{N_\emptyset} \delta(m)f(mn)dmdn.$$

C'est à dire que pour $m \in M_\emptyset$ et $n \in N_\emptyset$ la fonction modulaire sur $P_\emptyset$, $\delta_{P_\emptyset}$, est donnée par $\delta_{P_\emptyset}(mn) = \delta(m)^{-1}$.

On définit également $\Delta(m) = |det(Ad_{\mathfrak{n}}(m) - \mathbf{1}_{\mathfrak{n}})|_{\mathbb{F}}$.

Nous renvoyons à l'article de Cartier [Car79] (section IV.4.1) pour les détails de ce qui suit.

Soit $m \in M_\emptyset$ tel que $\Delta(m) \neq 0$. Alors, pour $f \in \mathcal{D}(N_\emptyset)$,

$$\int_{N_\emptyset} f(n)dn = \Delta(m) \int_{N_\emptyset} f(nmn^{-1}m^{-1})dn.$$

Il est également possible, pour $f \in \mathcal{D}(G)$ et $m \in M_\emptyset$ tel que $\Delta(m) \neq 0$, de définir une fonction F_f par une intégrale orbitale

$$F_f(m) = \Delta(m) \int_{G/A_\emptyset} f(gmg^{-1}) d\mu_{G/A_\emptyset}(g),$$

avec la normalisation $\int_{M_\emptyset/A_\emptyset} d\mu_{M_\emptyset/A_\emptyset}(m) = 1$.

6.2 Lemme. *Soit f un élément de $\mathcal{H}(G, K_0)$ et m un élément de $M_\emptyset$ tel que $\Delta(m) \neq 0$. Alors $F_f(m) = \int_{N_\emptyset} f(nm)dn$.*

Démonstration. D'après les formules d'intégration précédentes, si $u \in \mathcal{D}(G)$ est invariante sous l'action de K_0 par translation à gauche, alors

$$\begin{aligned} \int_G u(g)dg &= \int_{K_0} \int_{P_\emptyset} u(kp)dk d_r p \\ &= \int_{P_\emptyset} u(p) d_r p \\ &= \int_{M_\emptyset} \int_{N_\emptyset} u(nm_1) dm_1 dn \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $u(g) = f(gmg^{-1})$ on obtient la représentation suivante de $F_f(m)$:

$$\begin{aligned} F_f(m) &= \int_{M_\emptyset/A_\emptyset} h(m_1) d\mu_{M_\emptyset/A_\emptyset}(m_1), \\ h(m_1) &= \Delta(m) \int_{N_\emptyset} f(nm_1 m m_1^{-1} n^{-1})dn. \end{aligned}$$

Fixons $m_1 \in M_\emptyset$ et posons $m_2 = m_1 m m_1^{-1}$, alors $\Delta(m) = \Delta(m_2)$ et

$$\begin{aligned} h(m_1) &= \Delta(m_2) \int_{N_\emptyset} f((nm_2n^{-1}m_2^{-1})m_2)dn \\ &= \int_{N_\emptyset} f(nm_2)dn \end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que le groupe $M_\emptyset/{}^0M_\emptyset = M_\emptyset/(M_\emptyset \cap K_0)$ est commutatif. Ainsi $m_2 \in mK_0$ et f étant invariante sous l'action par translation à droite de K_0 on a $f(nm_2) = f(nm)$. Il en découle que pour tout $m_1 \in M_\emptyset$, $h(m_1) = \int_{N_\emptyset} f(nm)$ et on en déduit le résultat puisque $M_\emptyset/A_\emptyset$ à mesure 1. $\square$

6.2 L'isomorphisme de Satake

Soit $\lambda \in \Lambda_\emptyset$, notons $ch(\lambda)$ la fonction caractéristique du sous-ensemble $ord_{M_\emptyset}^{-1}(\lambda)$. Les éléments $ch(\lambda)$, où λ parcourt $\Lambda_\emptyset$; forment une base de $\mathcal{H}(M_\emptyset, {}^0M_\emptyset)$ et donc

$$ch : \mathbb{C}[\Lambda_\emptyset] \to \mathcal{H}(M_\emptyset, {}^0M_\emptyset),\ \lambda \mapsto ch(\lambda)$$

est un isomorphisme ce qui nous permettra d'identifier $\mathcal{H}(M_\emptyset, {}^0M_\emptyset)$ à l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\Lambda_\emptyset]$.

6.3 Définition. On définit $S : \mathcal{H}(G, K_0) \to \mathcal{H}(M_\emptyset, {}^0M_\emptyset)$ par

$$Sf(m) = \delta(m)^{1/2} \int_{N_\emptyset} f(mn)dn = \delta(m)^{-1/2} \int_{N_\emptyset} f(nm)dn.$$

Les deux intégrales sont égales par les formules d'intégrations du paragraphe précédent. Si $f \in \mathcal{H}(G, K_0)$, alors il est clair que $Sf \in \mathcal{D}(M_\emptyset)$. Pour montrer que Sf est bi-invariant sous l'action de ${}^0M_\emptyset$ il suffit de remarquer que f est bi-invariante sous l'action de K_0 et que ${}^0M_\emptyset = M_\emptyset \cap K_0$.

6.4 Théorème. *La transformation de Satake S est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{H}(G, K_0)$ dans $\mathbb{C}[\Lambda_\emptyset]^W$, le sous-espace de $\mathbb{C}[\Lambda_\emptyset]$ des éléments invariants sous l'effet du groupe de Weyl W.*

Démonstration. Nous allons démontrer ce théorème en trois étapes.

1. Montrons que S est un morphisme d'algèbre.
   On peut réécrire S comme la composition des trois applications linéaires suivantes :
   $$\mathcal{H}(G, K_0) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}(P_\emptyset) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(M_\emptyset) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}(M_\emptyset)$$
   où, α est la restriction des fonctions de G à $P_\emptyset$ qui est bien un morphisme d'algèbre, grâce à la formule $\int_G f(g)dg = \int_{K_0} \int_{P_\emptyset} f(pk)dkd_lp$, β est donnée par $(\beta u)(m) = \int_{N_\emptyset} u(mn)dn$ est compatible avec la convolution et γ, définie par $(\gamma f)(m) = f(m)\delta(m)^{1/2}$, est également compatible avec la convolution. Ainsi S est bien un morphisme d'algèbre.
2. Montrons maintenant que l'image de S est incluse dans $\mathbb{C}[\Lambda_\emptyset]^W$.
   On a $W = (N(A_\emptyset) \cap K_0)/{}^0M_\emptyset$, il nous faut donc montrer que pour $m \in M_\emptyset$ et $x \in N(A_\emptyset) \cap K_0$, on a $Sf(xmx^{-1}) = Sf(m)$.
   L'application $M_\emptyset \to \mathbb{F}$, $m \mapsto det(Ad_{\mathfrak{n}}(m) - \mathbf{1}_{\mathfrak{n}})$ est polynomiale et non nulle. Les éléments de $M_\emptyset$ qui ne sont pas annulés par cette fonction, appelés éléments réguliers, forment donc un ouvert Zariski dense. Par continuité, il ne nous reste donc qu'à montrer la formule précédente pour m régulier.
   Soit donc m un élément régulier. On déduit du lemme 6.2,
   $$Sf(m) = D(m) \int_{G/A_\emptyset} f(gmg^{-1}) d\mu_{G/A_\emptyset}(g)$$
   où $D(m) = \Delta(m)\delta(m)^{-1/2}$.

Notons $\mathfrak{n} = Lie(N_\emptyset)$, $\mathfrak{n}^- = Lie(N_\emptyset^-)$, $\mathfrak{m} = Lie(M_\emptyset)$ et $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^-$ et on en déduit :

$$\begin{aligned} D(m)^2 &= |det(Ad_\mathfrak{n}(m) - \mathbf{1}_\mathfrak{n})|_\mathbb{F}^2 \cdot |det\ Ad_\mathfrak{n}(m)|_\mathbb{F}^{-1} \\ &= |det(Ad_\mathfrak{n}(m) - \mathbf{1}_\mathfrak{n})|_\mathbb{F} \cdot |det(Ad_\mathfrak{n}(m^{-1}) - \mathbf{1}_\mathfrak{n})|_\mathbb{F} \\ &= |det(Ad_\mathfrak{n}(m) - \mathbf{1}_\mathfrak{n})|_\mathbb{F} \cdot |det(Ad_{\mathfrak{n}^-}(m) - \mathbf{1}_{\mathfrak{n}^-})|_\mathbb{F} \\ &= |det(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(m) - \mathbf{1}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}})|_\mathbb{F} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $m \in M_\emptyset$ et $x \in N(A_\emptyset)$, $D(xmx^{-1}) = D(m)$.

Montrons maintenant la propriété d'invariance pour l'intégrale. $N(A_\emptyset) \cap K_0$ agit par automorphisme intérieur sur G et sur A_0 donc laisse les mesures de Haar de G et de $A_\emptyset$ invariantes et par conséquent aussi la mesure sur $G/A_\emptyset$. Ainsi, si $m \in M_\emptyset$ est régulier, $x \in N(A_\emptyset) \cap K_0$ et $f \in \mathcal{H}(G, K_0)$, on a $f(xgx^{-1}) = f(g)$ pour $g \in G$ et

$$\begin{aligned} \int_{G/A_\emptyset} f(g(xmx^{-1})g^{-1}) d\mu_{G/A_\emptyset}(g) &= \int_{G/A_\emptyset} f((x^{-1}gx)m(x^{-1}gx)^{-1} d\mu_{G/A_\emptyset}(g) \\ &= \int_{G/A_\emptyset} f(gmg^{-1}) d\mu_{G/A_\emptyset}(g) \end{aligned}$$

On a bien la propriété voulue.

3. Montrons enfin que $S : \mathcal{H}(G, K_0) \to \mathbb{C}[\Lambda_\emptyset]^W$ est bijective.
Pour $\lambda \in \Lambda_\emptyset^-$, on note ϕ_λ la fonction caractéristique de $K_0 \cdot ord_{M_\emptyset}^{-1}(\lambda) \cdot K_0$. La famille des ϕ_λ, où λ parcourt $\Lambda_\emptyset^-$, est une base de $\mathcal{H}(G, K_0)$ d'après la décomposition de Cartan.
Comme tout élément de Λ est conjugué à un unique élément de $\Lambda_\emptyset^-$ par W on obtient une base $\{ch'(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda_\emptyset^-}$ de $\mathbb{C}[\Lambda_\emptyset]^W$ en posant

$$ch'(\lambda) = \frac{1}{|W(\lambda)|} \sum_{w \in W} ch(w \cdot \lambda)$$

où $W(\lambda)$ est le stabilisateur de λ dans W.
On définit la matrice $\{c(\lambda, \lambda')\}_{\lambda, \lambda' \in \Lambda_\emptyset^-}$ par

$$S\phi_{\lambda'} = \sum_\lambda c(\lambda, \lambda') \cdot ch'(\lambda).$$

Prenons $\lambda, \lambda' \in \Lambda_\emptyset^-$ et m, m' des représentants respectifs dans $M_\emptyset$. Alors $c(\lambda, \lambda') = S\phi_{\lambda'}(m) = \delta(m)^{-1/2} \mu(K_0 m' K_0 \cap N_\emptyset m K_0)$ où μ est la mesure de Haar sur G.
Comme $mK_0 \subset K_0 m K_0 \cap N_\emptyset m K_0$, $c(\lambda, \lambda) \geq \delta(m)^{-1/2}$.
On munit maintenant $\Lambda_\emptyset^-$ d'un ordre $\leq$ par $\lambda \leq \lambda'$ si et seulement si $\lambda' - \lambda$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs de racines positives. On peut alors montrer que $K_0 m' K_0 \cap N_\emptyset m K_0 = \emptyset$ sauf si $\lambda \leq \lambda'$ (le résultat est énoncé dans [Car79] (théorème 4.1) et on peut trouver une preuve dans [HR10]).
Donc $c(\lambda, \lambda') = 0$ sauf si $\lambda \leq \lambda'$ et comme $c(\lambda, \lambda) \neq 0$ les éléments $S\phi_{\lambda'}$, λ' parcourant $\Lambda_\emptyset^-$, forment une base de $\mathbb{C}[\Lambda_\emptyset]^W$ et cela achève la démonstration du théorème.

$\square$

6.5 Corollaire. *L'algèbre $\mathcal{H}(G, K_0)$ est commutative.*

6.3 Groupe dual

Prenons dans $\mathbb{G}_{/\bar{\mathbb{F}}}$ un tore maximale $\mathbb{T}$ défini sur $\bar{\mathbb{F}}$. Notons $X = X^*(\mathbb{T})$ l'ensemble des caractères $\bar{\mathbb{F}}$-rationnels de $\mathbb{G}$, Φ le système de racine associé à $\mathbb{G}$ et $\mathbb{T}$, $X^\vee = X_*(\mathbb{T})$ les co-caractères et $\Phi^\vee$ le système des co-racines. Alors le quadruplé $\Psi(\mathbb{G}) = (X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ est une donnée radicielle pour $\mathbb{G}$ sur $\bar{\mathbb{F}}$.

6.6 Théorème. *La donnée radicielle $\Psi(\mathbb{G})$ détermine $\mathbb{G}$ à $\bar{\mathbb{F}}$-isomorphisme près.*

$\Psi^\vee(\mathbb{G}) = (X^\vee, \Phi^\vee, X, \Phi)$ est aussi une donnée radicielle, donc définit un groupe réductif connexe $\hat{\mathbb{G}}$ sur $\mathbb{C}$, que l'on appelle le groupe dual à $\mathbb{G}$.

Si $\hat{\mathbb{T}}$ est un tore maximal de $\hat{\mathbb{G}}$ alors on a une identification $X_*(\mathbb{T}) \simeq X^*(\hat{\mathbb{T}})$.

Pour les groupes classiques on obtient :

$\mathbb{G}$	$\hat{\mathbb{G}}$
GL_n	$GL_n(\mathbb{C})$
SO_{2n+1}	$Sp_{2n}(\mathbb{C})$
Sp_{2n}	$SO_{2n+1}(\mathbb{C})$
SO_{2n}	$SO_{2n}(\mathbb{C})$

6.4 Application

On considère dans cette partie que G est déployé. Ainsi $M_\emptyset = A_\emptyset = T$ où $\mathbb{T}$ est un tore maximal. Nous avons donc vu dans la section précédente que $\mathcal{H}(G, K_0) \simeq \mathbb{C}[\Lambda(T)]^W = \mathbb{C}[X_*(T)]^W$

6.7 Définition. Une représentation irréductible admissible (π, V) de G est dite non-ramifiée (ou sphérique) si elle contient un vecteur non nul fixé par K_0, c'est à dire $V^{K_0} \neq \emptyset$.

6.8 Lemme. *Soit M un A module, où M est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et A est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative. Alors M possède un sous-module de dimension 1 (sur $\mathbb{C}$).*

Démonstration. Pour $a \in A$ on note $\phi_a : M \to M$ la multiplication par a. La famille $\{\phi_a\}_{a \in A}$ est une famille d'endomorphismes de M qui commutent deux à deux, elle admet donc un vecteur propre commun $m_0 \in M$. Alors pour tout $a \in A$, $a \cdot m_0 = \lambda_a m_0$, $\lambda_a \in \mathbb{C}$, et donc $Vect(m_0)$ est un sous-A module de M de dimension 1. $\square$

6.9 Corollaire. *Soit (π, V) une représentation irréductible admissible non-ramifiée de G. Alors $dim(V^{K_0}) = 1$.*

Démonstration. D'après le théorème 3.5, V^{K_0} est un $\mathcal{H}(G, K_0)$ module simple. Or $\mathcal{H}(G, K_0)$ est commutatif d'après 6.5. V^{K_0} est de dimension finie car (π, V) est admissible. Ainsi par le lemme précédent, $dim(V^{K_0}) = 1$. $\square$

Si $f \in \mathcal{H}(G, K_0)$ et (π, V) est une représentation irréductible admissible non-ramifiée de G alors $\pi(f)$ agit sur V^{K_0} par un scalaire que l'on note $\chi_\pi(f)$. L'application $\chi_\pi : \mathcal{H}(G, K_0) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \chi_\pi(f)$ est appelé un caractère de Hecke.

6.10 Proposition. *Une représentation irréductible admissible non-ramifiée de G est déterminée, à isomorphisme près, par son caractère de Hecke.*

Démonstration. Cela découle du théorème 3.5. □

Or $\mathcal{H}(G, K_0) \simeq \mathbb{C}[X_*(T)]^W \simeq \mathbb{C}[X^*(\hat{T})]^W$. Et $Hom_{alg}(\mathbb{C}[X^*(\hat{T})]^W, \mathbb{C}) = \hat{\mathbb{T}}(\mathbb{C})/W(\mathbb{C})$.

6.11 Proposition. *Si G est déployé, alors on a une bijection*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{classes d'isomorphismes de repré-} \\ \textit{sentations irréductibles admissibles} \\ \textit{non-ramifiées de } G \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textit{classes de conjugai-} \\ \textit{sons semi-simples} \\ \textit{dans } \hat{\mathbb{G}}(\mathbb{C}) \end{array} \right\}$$

Démonstration. Nous avons vu que les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles admissibles non-ramifiées de G sont en bijections avec les caractères de $\mathcal{H}(G, K_0)$ qui eux même sont en bijection avec $\hat{\mathbb{T}}(\mathbb{C})/W(\mathbb{C})$. Or toute classe de conjugaison semi-simple de $\hat{\mathbb{G}}(\mathbb{C})$ intersecte $\hat{\mathbb{T}}(\mathbb{C})$ et deux éléments de $\hat{\mathbb{T}}(\mathbb{C})$ sont conjugués dans $\hat{\mathbb{G}}(\mathbb{C})$ si et seulement s'ils sont dans la même $W(\mathbb{C})$ orbite. □

7 Conjecture de Langlands pour GL_n

Dans les deux parties qui arrivent, nous allons énoncer les conjectures de Langlands, dans un premier temps pour GL_n puis pour G. Depuis le début de ce rapport nous n'avons étudié que le cas d'un corps local, nous allons donc nous restreindre ici au cas des conjectures locales de Langlands.

7.1 Représentations galoisiennes

Si G est un groupe topologique et $\mathbb{F}$ est un corps topologique, alors on note $Rep_n(G, \mathbb{F})$ pour l'ensemble des classes d'équivalences de représentations continues $\rho : G \to GL_n(\mathbb{F})$. Soit $Rep_n^0(G, \mathbb{F})$ le sous-ensemble des représentations irréductibles. On notera dans la suite plus simplement $Rep_n(G)$ pour $Rep_n(G, \mathbb{C})$ et $Rep_n^0(G)$ pour $Rep_n^0(G, \mathbb{C})$.

Soit k un corps local et $\bar{k}$ une clôture algébrique séparable de k. On notera $\mathcal{G}_k = Gal(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k et W_k le groupe de Weil absolu de k (nous allons rappeler la définition du groupe de Weil pour un corps local dans ce qui suit).

Si k est non-archimédien. Notons p la caractéristique de son corps résiduel κ et q son cardinal. Soit $I \subset \mathcal{G}_k$ le sous-groupe d'inertie de $\mathcal{G}_k$. On choisit Φ un élément de Frobenius, alors on peut prendre pour W_k le sous-groupe de $\mathcal{G}_k$ algébriquement engendré par Φ et I et dont la topologie est donnée par : I possède la topologie induite de $\mathcal{G}_k$, I est ouvert et la multiplication par Φ est un homéomorphisme. Nous avons donc un morphisme continu $W_k \to \mathcal{G}_k$ d'image dense. Ceci induit donc une injection naturelle $Rep_n(\mathcal{G}_k) \to Rep_n(W_k)$. On appelle représentation de type Galois les représentations dans l'image de cette application. Nous avons également un caractère naturel $\omega^s \in Rep_1(W_k)$ défini par $\omega^s(I) = 1$ et $\omega^s(\Phi) = q^{-s}$. On note également $\omega^s(w) = \|w\|^{-s}$. Cela donne un morphisme $\nu : W_k \to \mathbb{Z}$ par $\|w\| = q^{-\nu(w)}$. Alors toute représentation irréductible ρ de W_k est de type $\rho = \rho^0 \otimes \omega^s$, où ρ^0 est de type Galois.

La plupart des représentations provenant de la géométrie (comme celles de la cohomologie l-adique par exemple) sont des représentations à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ (avec $l \neq p$). Pour réconcilier les représentations à coefficients dans $\mathbb{C}$ et dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, Deligne a introduit un groupe W'_k, appelé groupe de Weil-Deligne, de tel sorte que sa théorie des représentations soit essentiellement algébrique et donc ne différencie pas $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_l$. On définit W'_k comme le schéma en groupe sur $\mathbb{Q}$, $W'_k = W_k \ltimes \mathbb{G}_a$, où $\mathbb{G}_a$ est le groupe additif et W_k agit sur $\mathbb{G}_a$ par $wxw^{-1} = \|w\|x$. Ainsi si $\mathbb{F}$ est un corps de caractéristique zéro, l'ensemble des $\mathbb{F}$-points de W'_k est $W_k \times \mathbb{F}$ muni de la loi $(w_1, x_1)(w_2, x_2) = (w_1w_2, x_1 + \|w_1\|x_2)$.

Analysons maintenant les représentations du groupe de Weil-Deligne. Une représentation de dimension n de W'_k sur $\mathbb{F}$ est une paire $\rho' = (\rho, N)$ constituée de :

1. un $\mathbb{F}$-espace vectoriel V de dimension n avec un morphisme de groupe $\rho : W_K \to GL(V)$ tel que son noyau contient un sous-groupe ouvert de I, c'est à dire qui est continu pour la topologie discrète sur $GL(V)$.
2. un endomorphisme nilpotent N de V tel que $\rho(w)N\rho(w)^{-1} = \|w\|N$.

On peut montrer que si $\rho' = (\rho, N)$ est une représentation de W'_k alors il existe un unique automorphisme u de V qui commute avec N et $\rho(W_k)$, et tel que $e^{aN}\rho(w)u^{-\nu(w)}$ est semi-simple pour tout $a \in \mathbb{F}$ et $w \in W_k \backslash I$. La Φ semi-simplification de ρ' est définie par $\rho'_{ss} = (\rho u^{-\nu}, N)$. ρ' est alors appelée Φ-semi-simple (ou Frobenius semi-simple) si $\rho' = \rho'_{ss}$.

On notera $Rep_n(W'_k, \mathbb{F})$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations n-dimensionnelles Φ-semi-simples du groupe de Weil-Deligne W'_k à coefficients dans $\mathbb{F}$. Dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ on notera simplement $Rep_n(W'_k)$ pour $Rep_n(W'_k, \mathbb{C})$.

On peut montrer que si $\rho_l \in Rep_n(W_k, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est une représentation continue semi-simple l-adic de W_k alors elle induit une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation Φ-semi-simple ρ' de W'_k. De plus nous voyons que dans la définition d'une représentation du groupe de Weil-Deligne la topologie de $\mathbb{F}$ ne joue aucun rôle, donc s'il on dispose d'un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_l \to \mathbb{C}$, alors on peut identifier $Rep_n(W'_k, \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq Rep_n(W'_k, \mathbb{C}) = Rep_n(W'_k)$.

Lorsque k est archimédien ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on ne s'intéressera qu'aux représentations complexes de $\mathcal{G}_k$ ou W_k. Décrivons le groupe de Weil dans ce cas.

— Si $k = \mathbb{C}$ alors $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$.

— Si $k = \mathbb{R}$, $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^\times \amalg j\mathbb{C}^\times$ où $j^2 = 1$ et $jcj^{-1} = \bar{c}$ pour $c \in \mathbb{C}^\times$.

Dans tous les cas on a
$$1 \to \mathbb{C}^\times \to W_k \to \mathcal{G}_k \to 1.$$

Il n'y a pas de groupe de Weil-Deligne dans le cas d'un corps local archimédien, on notera par souci de cohérence $W'_k = W_k$.

7.2 Conjecture de Langlands locale

Notons $\mathcal{A}_n(k)$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles admissibles complexes de $GL_n(k)$.

7.1 Conjecture. *Soit k un corps local. Alors il existe une série de bijections naturelles*
$$Rep_n(W'_k) \leftrightarrow \mathcal{A}_n(k), \;\; \rho = \rho_\pi \leftrightarrow \pi = \pi_\rho$$
satisfaisant une série de conditions :

1. *Pour $n = 1$ la correspondance doit être fournie par la théorie du corps de classes local.*
2. *Le caractère central de π_ρ correspond au déterminant $det(\rho)$ par la correspondance pour $n = 1$.*
3. *Si χ est un caractère de $k^\times$, alors $\rho_{\pi\otimes\chi} = \rho \otimes \chi$.*
4. *π_ρ est de carré intégrable si et seulement si $\rho(W'_k)$ n'est pas inclus dans un sous-groupe de Levi propre de $GL_n(\mathbb{C})$.*

Nous renvoyons à [Cog03b] (section 3) pour les références des notions non définies.

Nous pouvons voir cette correspondance de deux manières. Si l'on s'intéresse au passage d'information de $\mathcal{A}_n(k)$ vers $Rep_n(W'_k)$, alors on peut interpréter cela comme une formulation de la théorie du corps de classes local non-abélienne. Si au contraire on voit le passage d'information de $Rep_n(W'_k)$ vers $\mathcal{A}_n(k)$, cela nous donne une paramétrisation arithmétique des représentations irréductibles admissibles de $GL_n(k)$ (on appelle cela la classification arithmétique de Langlands de $\mathcal{A}_n(k)$).

8 Conjecture de Langlands pour G

Nous souhaitons étendre les correspondances précédentes de GL_n à un groupe réductif connexe général. Que faut-il alors changer ? Du côté des représentations, on peut prendre les représentations admissibles de $G(k)$. Mais du côté Galois, par quoi faut-il remplacer la source $GL_n(\mathbb{C})$ des représentations ? Un début de réponse est donné par l'isomorphisme de Satake qui nous indique qu'il faut passer au groupe dual. Cependant, la bijection entre les classes de conjugaison semi-simples du groupe dual et les représentations irréductibles admissibles non-ramifiées n'a été établi que dans le cas d'un groupe déployé. Dans le cas général, il faut introduire un groupe ${}^LG$, appelé L-groupe ou groupe dual de Langlands.

8.1 Le groupe dual de Langlands

Soit G un groupe réductif connexe défini sur k. Nous rappelons que G est déterminé sur $\bar{k}$ par ses données radicielles $\Psi(G) = (X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$. Les données radicielles duales $\Psi^\vee(G) = (X^\vee, \Phi^\vee, X, \Phi)$ définissent un groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$: $\hat{G}$.

Choisissons maintenant B un Borel de $G_{/\bar{k}}$. Celui-ci nous permet de définir une base Δ de Φ. Notons alors $\Psi_0(G) = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$. On a alors la suite exacte scindée suivante :

$$1 \to Int(G) \to Aut(G) \to Aut(\Psi_0(G)) \to 1$$

une section est donnée par le choix d'un épinglage $(G, B, T, \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$ qui donne un isomorphisme

$$Aut(\Psi_0(G)) \to Aut(G, B, T, \{x_\alpha\}) \subset Aut(G).$$

G étant défini sur k, on a une action de $\mathcal{G}_k$ sur $G_{/\bar{k}}$, ce qui nous donne donc les morphismes

$$\mathcal{G}_k \to Aut(G_{/\bar{k}}) \to Aut(\Psi_0(G)).$$

$G_{/k}$ nous donne deux informations : $\Psi(G)$ (qui détermine la structure sur $\bar{k}$) et le morphisme $\mathcal{G}_k \to Aut(\Psi_0(G))$.

On peut transférer la structure galoisienne de $G_{/\bar{k}}$ à $\hat{G}$. En effet,

$$Aut(\Psi_0(\hat{G})) = Aut(\Psi_0(G)^\vee) = Aut(\Psi_0(G)).$$

Puis grâce à la suite exacte scindée, on obtient une application

$$\mu : \mathcal{G}_k \to Aut(\Psi_0(\hat{G})) \to Aut(\hat{G})$$

qui fixe l'épinglage $(\hat{G}, \hat{B}, \hat{T}, \{x_{\alpha^\vee}\}_{\alpha^\vee \in \Delta^\vee})$ de $\hat{G}$. On obtient ainsi une action de $\mathcal{G}_k$ sur $\hat{G}$.

8.1 Définition. Le groupe de Langlands dual, ou L-groupe, de G est défini par :

$$^L G = \hat{G} \rtimes \mathcal{G}_k$$

8.2 Remarque. Suivant les cas, il arrive qu'il soit plus aisé de travailler avec différentes versions du groupe de Langlands dual. par exemple, il peut être pratique d'utiliser $^L G = \hat{G} \rtimes W_k$.

En utilisant le groupe de Langlands dual, nous avons réintroduit un peu de la k-structure de G. Cependant, il est bon de remarquer que si G' est une forme intérieure de G sur k (c'est à dire que G' est un k-groupe qui est isomorphe sur $\bar{k}$ à G), alors $^L G'$ est isomorphe à $^L G$.

8.2 Conjecture de Langlands locale pour G

8.3 Définition. Un morphisme $\phi : W'_k \to {}^L G$ est dit admissible si

1. ϕ est un morphisme sur $\mathcal{G}_k$, c'est à dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} W'_k \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & {}^L G \arrow[d] \\ \mathcal{G}_k \arrow[r, equal] & \mathcal{G}_k \end{tikzcd}$$

2. ϕ est continue, $\phi(\mathbb{G}_a)$ est unipotent dans $\hat{G}$, et ϕ envoie des éléments semi-simples sur des éléments semi-simples.
3. Si $\phi(W'_k)$ est contenu dans un sous-groupe de Levi associé à un sous-groupe parabolique propre P de $^L G$ alors P est pertinent ("relevant" en anglais, voir [Cog03a] (section 2.1) pour des références).

8.4 Remarque. Pour $G = GL_n$ les morphismes admissibles sont les représentations complexes Frobenius-semi-simples de W'_k.

On note alors $\Phi(G)$ l'ensemble des morphismes admissibles $\phi : W'_k \to {}^L G$ modulo les automorphismes intérieurs par des éléments de $\hat{G}$.

8.5 Remarque. Notons que si G et G' sont des formes intérieures, alors $^L G = {}^L G'$ mais on n'a pas nécessairement $\Phi(G) = \Phi(G')$ car la condition 3. de la définition de morphisme admissible tient compte de la k-structure.

Si $\phi \in \Phi(G)$ alors il est possible de lui associer un caractère ω_ϕ du centre $Z(G)$ de G. En notant $Z(\hat{G})$ le centre de $\hat{G}$, à partir d'un élément α dans $H^1(W'_k, Z(\hat{G}))$ on peut construire un caractère χ_α de $G(k)$. Soit $\phi \in \Phi(G)$ que l'on note $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ avec $\phi_1(w) \in \hat{G}$ et $\phi_2(w) \in \mathcal{G}_k$. Alors ϕ_1 est un cocycle de W'_k dans $\hat{G}$ et l'application $\phi \mapsto \phi_1$ nous donne une inclusion $\Phi(G) \hookrightarrow H^1(W'_k, \hat{G})$. On a que $H^1(W'_k, Z(\hat{G}))$ agit sur $H^1(W'_k, \hat{G})$ et cette action préserve $\phi(G)$.

Notons $\mathcal{A}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations complexes irréductibles admissibles de $G(k)$. On peut alors énoncer la conjecture de Langlands locale pour G :

8.6 Conjecture. *Soit k un corps local. Il existe une application surjective à fibres finies $\mathcal{A}(G) \to \Phi(G)$ qui partitionne $\mathcal{A}(G)$ en une réunion disjointe d'ensembles finis $\mathcal{A}_\phi = \mathcal{A}_\phi(G)$ qui satisfont :*

1. *Si $\pi \in \mathcal{A}_\phi$ alors le caractère central ω_π de π est égal à π.*
2. *Si $\alpha \in H^1(W'_k, Z(\hat{G}))$ et χ_α est son caractère de $G(k)$ associé, alors $\mathcal{A}_{\alpha\cdot\phi} = \{\pi\chi_\alpha \mid \pi \in \mathcal{A}_\phi\}$.*
3. *Un élément $\pi \in \mathcal{A}_\phi$ est de carré intégrable modulo $Z(G)$ si et seulement si tous les $\pi \in \mathcal{A}_\phi$ sont de carré intégrable modulo $Z(G)$ si et seulement si $\phi(W'_k)$ n'est pas inclus dans un sous-groupe de Levi propre de ${}^LG$.*

Les ensembles $\mathcal{A}_\phi(G)$, pour $\phi \in \Phi(G)$, sont appelés des L-paquets.

8.7 Remarque. Pour $G = GL_n$ on retrouve la conjecture de Langlands locale énoncée précédemment. Dans ce cas les L-paquets sont des singletons et l'application de $\mathcal{A}(G)$ dans $\Phi(G)$ est bijective.

8.3 Fonctorialité de Langlands

Soient H et G deux groupes réductifs connexes définis sur k.

8.8 Définition. Un morphisme $u : {}^LH \to {}^LG$ est appelé un L-morphisme si

1. u est un morphisme sur $\mathcal{G}_k$, c'est à dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} {}^LH \arrow[r, "u"] \arrow[d] & {}^LG \arrow[d] \\ \mathcal{G}_k \arrow[r, equal] & \mathcal{G}_k \end{tikzcd}$$

2. u est continu
3. La restriction de u à $\hat{H}$ est un $\mathbb{C}$-morphisme $\hat{H} \to \hat{G}$

Dans le cas où G est quasi-déployé, pour tout morphisme admissible $\phi \in \Phi(H)$ la composition $u \circ \phi$ est un morphisme admissible dans $\Phi(G)$. Ceci nous définit donc une application $\Phi(u) : \Phi(H) \to \Phi(G)$, $\phi \mapsto u \circ \phi$.

Nous pouvons alors vaguement énoncé le principe de fonctorialité de la manière suivante :

8.9 Conjecture (Principe de Fonctorialité)**.** *Si k et un corps local, H et G sont des groupes réductifs connexes définis sur k avec G quasi-déployé, alors à chaque L-morphisme $u : {}^LH \to {}^LG$ on peut associer un "transfert" entre les représentations admissibles de H et les représentations admissibles de G.*

Conclusion

L'étude des algèbres à idempotents et en particulier des foncteurs d'inductions et de restrictions nous a permis, grâce à l'équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(G)$ et $\mathcal{H}(G)$, d'obtenir des informations intéressantes sur les représentations des groupes t.d. Dans le cas plus spécifique des groupes réductifs p-adiques, nous avons pu définir l'induction et la restriction parabolique qui nous ont amenés aux représentations cuspidales. Le lien entre les représentations cuspidales et les représentations compactes ont permis d'obtenir une décomposition de la catégorie $\mathcal{M}(G)$ en une partie cuspidale et une partie induite. Ceci conduit ensuite à la décomposition de Bernstein, qui écrit la catégorie $\mathcal{M}(G)$ comme un produit de catégories indécomposables.

Nous avons ensuite établi l'isomorphisme de Satake qui, dans le cas d'un groupe déployé, permet d'obtenir une bijection entre les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles admissibles non-ramifiées de G et les classes de conjugaisons semi-simples dans $\hat{\mathbb{G}}(\mathbb{C})$. Ce résultat clé, nous permet de comprendre un peu mieux les idées conduisant à énoncer la fonctorialité de Langlands ainsi que le passage au groupe dual pour les conjectures de Langlands pour G.

Grâce à la théorie de Bernstein, nous savons que l'on peut scinder la catégorie des représentations lisses de G à coefficients complexes en un produit de sous-catégories indécomposables (on parle de blocs). Cela nous amène donc à nous interroger sur les blocs de la catégorie des représentations lisses de G lorsque l'on remplace $\mathbb{C}$ par un anneau tel que $\mathbb{Z}_l$ par exemple.

Références

[Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[Car79] P. Cartier. Representations of p-adic groups : a survey. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 111–155. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Cog03a] J. W. Cogdell. Dual groups and Langlands functoriality. In *An introduction to the Langlands program (Jerusalem, 2001)*, pages 251–268. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[Cog03b] J. W. Cogdell. Langlands conjectures for GL_n. In *An introduction to the Langlands program (Jerusalem, 2001)*, pages 229–249. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[HR10] Thomas J. Haines and Sean Rostami. The Satake isomorphism for special maximal parahoric Hecke algebras. *Represent. Theory*, 14 :264–284, 2010.

[Ren10] David Renard. *Représentations des groupes réductifs p-adiques*, volume 17 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2010.

[Spr79] T. A. Springer. Reductive groups. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 3–27. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.