Introduction à la théorie des représentations des groupes réductifs p-adiques

Mémoire de stage dirigé par Professeur Jean-François DAT

Master 2 Mathématiques Fondamentales de Sorbonne Université

Tzu-Jan LI, 5 juillet 2019

Résumé. Dans ce mémoire on s'intéresse à la théorie des représentations d'un groupe réductif p-adique, en particulier celles du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs complexes. On explique la décomposition de Bernstein pour les représentations à valeurs complexes. On décrit ensuite le bloc principal de cette décomposition par l'algèbre d'Iwahori-Hecke.

Table des matières

1 Un panorama

1.1. Exemple fondamental : $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Cet article explore des résultats connues sur la théorie des représentations des groupes réductifs p-adiques, en particulier celles des groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs complexes. Cette section est un panorama de ces résultats connues en prenant l'exemple fondamental $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Soit p un nombre premier. Soit $\mathbb{Q}_p$ le *corps des nombres p-adiques* (la complétion p-adique du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$), qui est identifié à

$$\mathbb{Q}_p = \{x_m p^m + x_{m+1}p^{m+1} + x_{m+2}p^{m+2} + \cdots : m \in \mathbb{Z},\ x_j = 0, 1, \cdots, p-1\}.$$

À l'intérieur de $\mathbb{Q}_p$ se trouve l'*anneau des entiers p-adiques*

$$\mathbb{Z}_p = \{x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots : x_j = 0, 1, \cdots, p-1\} \subset \mathbb{Q}_p.$$

Voir § 2.7 pour plus d'explications.

Le groupe

$$G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = \left\{ g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} : g_{ij} \in \mathbb{Q}_p,\ \det(g) = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \neq 0 \right\}$$

est un *groupe réductif p-adique* (§ 2.9 et § 3.3). Ce groupe G, dont la topologie est induite par la *norme p-adique* sur $\mathbb{Q}_p$, est un *groupe totalement discontinu* (§ 2.1 et § 2.9). Le groupe G possède quelques sous-groupes qui seront importants pour la suite. D'une part, on a une *décomposition de Levi* (§ 3.5)

$$B = TU = T \ltimes U \leq G$$

où le *sous-groupe de Borel* B de G, le *tore maximal* T en B et le *radical unipotent* U de B sont définis comme suivant :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}.$$

D'autre part, on a un *sous-groupe d'Iwahori* I réalisé comme un sous-groupe d'un *sous-groupe ouvert compact maximal* K de G, on les décrit en diagramme suivant : (§ 3.4)

$$\begin{array}{ccc} I = r^{-1}(B(\mathbb{F}_p)) & \subset & K = G(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \\ \downarrow & & \big\downarrow r = \bmod p \\ B(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G(\mathbb{F}_p) \right\} & \subset & G(\mathbb{F}_p) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \end{array}$$

Ici $\mathbb{F}_p$ est le *corps fini de p éléments* qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et à $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$.

1.2. Représentations lisses à valeurs complexes. On garde les notations en § 1.1, en particulier on a $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et ses sous-groupes B, T, U, I et K. On considère maintenant la catégorie

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)) = \mathbb{C}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]\text{-}\mathsf{Mod}$$

dont les objets sont les *représentation lisses de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *à valeurs complexes*, c'est-à-dire les morphismes de groupes

$$\pi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \ \ (V \text{ un espace vectoriel sur } \mathbb{C})$$

dont les actions induites $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \curvearrowright V$ sont « localement constantes ». (Voir §§ 2.1 - 2.2.)

Exemples des objets de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$. (§ 2.6 et § 2.10) Notons $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le premier exemple est la *représentation triviale*

$$\mathbf{1} : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{\times}, \ \ g \in G \mapsto 1 \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Un autre exemple est l'*action de translation à gauche* sur l'espace des fonctions

$$l : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(C_c(G/H, \mathbb{C})), \ \ g \in G \mapsto [l_g : f \in C_c(G/H, \mathbb{C}) \mapsto f(g^{-1} \cdot) \in C_c(G/H, \mathbb{C})]$$

où H est un sous-groupe ouvert compact de G, par exemple $H = I$ ou K.

Structure de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$. Selon la *décomposition de Bernstein* (§ 4.1), la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$ se décompose en produit des *blocs*

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)) = \prod_{(M,\sigma)/\sim} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))_{[M,\sigma]}$$

où (M, σ) est une *paire cuspidale* et $\sim$ est l'*équivalence d'inertie* (§ 4.15). Pour l'instant, on ne remarque que M est un *sous-groupe de Levi* de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (par exemple $M = T$ ou G) et σ est une *représentation cuspidale* (§ 4.8) de M. Voir § 4 pour plus d'explications de la décomposition de Bernstein.

Parmi les blocs $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))_{[M,\sigma]}$ de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$ se trouve le *bloc principal* (§ 4.2 et § 5.1) $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))_{[T,\mathbf{1}]}$. On montrera que ce bloc principal admet un *progénérateur*

$$i_B^G(\mathrm{ind}_{T^\circ}^T \mathbf{1}) \simeq \mathrm{ind}_I^G(\mathbf{1}) = C_c(G/I, \mathbb{C})$$

(§ 5.9, § 5.11 et § 5.14), ce qui implique que ce bloc principal est égal à la sous-catégorie

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))_{(I)} := \{V \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)) : V = \mathbb{C}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)] \cdot V^I\}$$

de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$ (ici V^I est le sous-espace de V fixé par le sous-groupe d'Iwahori I de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$), et que

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))_{[T,\mathbf{1}]} \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathrm{End}(\mathrm{ind}_I^G(\mathbf{1})) \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G, I) \ ;$$

ici $\mathcal{H}(G, I) = C_c(I\backslash G/I, \mathbb{C})$ est une *algèbre d'Iwahori-Hecke* (§ 5.4) dont la multiplication est donnée par la convolution des fonctions (§ 2.12). Voir § 5 pour plus d'explications de la structure du bloc principal.

2 Représentations lisses : la catégorie $\mathsf{Rep}_R(G)$

2.1. Représentations lisses des groupes totalement discontinus. (cf. [Ren10, § III.1.1]) Soit G un *groupe totalement discontinu*, c'est-à-dire G est un espace topologique totalement discontinu muni des lois de groupe qui sont continues. Soit R un anneau commutatif avec l'unité multiplicative. Une *représentation de G à valeurs dans R* est une paire (π, V) où V est un R-module et où

$$\pi : G \to \mathrm{Aut}_R(V) \tag{2.1.1}$$

est un morphisme de groupes. (Ici $\mathrm{Aut}_R(V)$ se compose des isomorphismes de R-modules de V à V lui-même.)

De manière équivalente, une représentation (π, V) de G à valeur dans R est un $R[G]$-module V dont l'action de l'anneau de groupe $R[G]$ est induite par π :

$$R[G] \times V \to V, \quad \left(\sum_{j=1}^{m} r_j g_j\right) \cdot v = \sum_{j=1}^{m} r_j \cdot \pi(g_j) v \quad (r_j \in R, g_j \in G, v \in V).$$

La représentation (π, V) en (2.1.1) est appelée *lisse* si pour tout $v \in V$, le sous-ensemble de G "fixant v via π",

$$\mathrm{Stab}_\pi(v) := \{g \in G : \pi(g)v = v\},$$

est ouvert dans G.

En tant qu'action, la lissité de (π, V) signifie que l'action de $R[G]$ sur V via π est « localement constante ».

2.2. $\mathsf{Rep}_R(G)$: la catégorie des représentations lisses du groupe G à valeurs dans R. Les objets de cette catégorie sont des représentations lisses (π, V) de G à valeurs dans R. Pour deux objets $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ de $\mathsf{Rep}_R(G)$, l'ensemble des morphismes de (π_1, V_1) à (π_2, V_2) est

$$\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2) := \{\varphi : V_1 \to V_2 \text{ un morphisme de } R[G]\text{-modules}\}$$

(où les structures de $R[G]$-modules de V_1 et V_2 sont données par π_1 et π_2 comme en § 2.1). Ainsi $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ si et seulement si $\varphi : V_1 \to V_2$ est un morphisme de R-modules qui fait commuter le diagramme suivant pour tout $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ {\scriptstyle \pi_1(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2(g)} \\ V_1 & \xrightarrow[\varphi]{} & V_2 \end{array}$$

D'après les discussions ci-dessus, le sens de l'égalité suivante est clair :

$$\mathsf{Rep}_R(G) = R[G]\text{-}\mathsf{Mod}.$$

2.3. Partie lisse, représentations duale et contragrédiente.[Ren10, § III.1.6] Soit (π, V) une représentation de G à valeur dans R qui n'est pas nécessairement lisse. On peut définir sa *partie lisse* (π, V^{∞}) en posant $V^{\infty} = \cap_H V^H$ où H parcourt les sous-groupes ouverts de G. Ici $V^H := \{v \in V : \pi(h)(v) = 0 \text{ pour tout } h \in H\}$ est la partie de V fixée par H. Alors $(\pi, V^{\infty}) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$.

Pour une représentation $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ on peut considérer sa *duale* (π^*, V^*) (qui n'est pas toujours lisse) définie par

$$\langle \pi^*(g)\lambda, v\rangle = \langle \lambda, \pi(g^{-1})v\rangle \quad (g \in G, \lambda \in V^*, v \in V).$$

La *représentation contragrédiente* de (π, V) est alors $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V}) := (\pi^*, (V^*)^{\infty})$. On a $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V}) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$.

2.4. Représentations irréductibles et la sous-catégorie $\mathsf{Irr}_R(G)$. Une représentation $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_R(G)$ est dite *irréductible* s'il n'existe pas de sous-R-module W de V, où $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$, tel que W soit invariant sous l'action de G via π (i.e. tel que pour tout $g \in G$ on ait $\pi(g)(W) \subset W$). Autrement dit, $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_R(G)$ est irréductible si elle est un $R[G]$-module simple via l'identification $\mathsf{Rep}_R(G) = R[G]\text{-}\mathsf{Mod}$ en § 2.2.

On dénote par $\mathsf{Irr}_R(G)$ la catégorie des représentations lisses irréductibles de G à valeurs dans R. On voit que $\mathsf{Irr}_R(G)$ est une sous-catégorie de $\mathsf{Rep}_R(G)$.

2.5. Exemples de G et de R. On prend souvent le groupe totalement discontinu G en tant qu'un groupe p-adique, par exemple $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ou ses sous-groupes. On peut aussi prendre G comme un groupe fini (muni de la topologie discrète). L'anneau R est souvent $\mathbb{C}, \mathbb{Q}_\ell, \mathbb{F}_\ell, \mathbb{Z}_\ell$ ou leurs extensions algébriques, clôtures etc. (Pour les notions des objets p-adiques, voir §§ 2.7 - 2.9.)

On remarque que $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ comme des corps *abstraits*, ceci joue un rôle important en *théorie de Deligne-Lusztig* sur la représentation complexe des groupes réductifs finis.

2.6. Exemples des objets de $\mathsf{Rep}_R(G)$. Le premier exemple de représentation lisse est la *représentation triviale* $(\mathbf{1}, R) \in \mathsf{Rep}_R(G)$ où

$$\mathbf{1} : G \to R^{\times}, \;\; g \in G \mapsto 1_R \in R$$

(1_R est l'unité multiplicative de R).

Un autre exemple comprend les *translations sur les espaces de fonctions.* On considère l'espace de fonctions

$$C_c^{\infty}(G, R) := \{f : G \to R : f \text{ est localement constante et } \mathrm{Supp}(f) \text{ est compact}\}.$$

qui est muni de la *translation de G à gauche l* et *à droite r* :

$$l : G \to \mathrm{Aut}_R(C_c^{\infty}(G, R)), \;\; g \in G \mapsto [l_g : f \in C_c^{\infty}(G, R) \mapsto f(g^{-1}(\cdot)) \in C_c^{\infty}(G, R)] \;;$$
$$r : G \to \mathrm{Aut}_R(C_c^{\infty}(G, R)), \;\; g \in G \mapsto [r_g : f \in C_c^{\infty}(G, R) \mapsto f((\cdot)g) \in C_c^{\infty}(G, R)].$$

Alors $(l, C_c^\infty(G,R))$ et $(r, C_c^\infty(G,R))$ sont des représentations lisses de G à valeurs dans R. En effet, les lissités de l et de r viennent de l'observation que

$$C_c^\infty(G,R) = \bigcup_K \bigoplus_{g \in K\backslash G/K} R\mathbf{1}_{KgK}$$

où K parcourt les sous-groupes compacts ouverts de G.

On reviendra à plus d'exemples des représentations lisses en § 2.10, après étudier auparavant un peu de groupes p-adiques.

GROUPES p-ADIQUES

2.7. Le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$. Soit p un monbre premier. On considère la *valuation p-adique* val_p sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ définie par

$$\mathrm{val}_p : \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Z}, \ \ \mathrm{val}_p(x) = r \ \text{ si } x = p^r \cdot \frac{a}{b} \text{ où } r, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \text{ et } p \text{ ne divise pas } a \text{ et } b.$$

Cette valuation s'étend à $\mathrm{val}_p : \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ en ajoutant $\mathrm{val}_p(0) := +\infty$. Alors val_p induit la *valeur absolue p-adique* sur $\mathbb{Q}$:

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \ x \in \mathbb{Q} \mapsto |x|_p := p^{-\mathrm{val}_p(x)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

La complétion $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$ par rapport à cette valeur absolue $|\cdot|_p$ est appelée le *corps des nombres p-adiques*. Concrètement,

$$\mathbb{Q}_p = \{x_m p^m + x_{m+1}p^{m+1} + x_{m+2}p^{m+2} + \cdots : m \in \mathbb{Z},\ x_j = 0, 1, \cdots, p-1\}.$$

On a également l'*anneau des entiers p-adiques* $\mathbb{Z}_p$ qui se trouve en diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) \\ \text{complétion par } |\cdot|_p \big\downarrow & & \big\downarrow \text{complétion par } |\cdot|_p \\ \mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} & \subset & \mathbb{Q}_p = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

On peut aussi écrire

$$\mathbb{Z}_p = \{x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots : x_j = 0, 1, \cdots, p-1\} \subset \mathbb{Q}_p.$$

On remarque que l'anneau $\mathbb{Z}_p$ est local avec son unique idéal maximal $p\mathbb{Z}_p$; leur quotient $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ est appelé le *corps résidu* de $\mathbb{Q}_p$. Notons que ce $\mathbb{F}_p$ est exactement le *corps fini de p éléments* et on a également $\mathbb{F}_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Propriétés topologiques. Le corps $\mathbb{Q}_p$ muni de la norme $|\cdot|_p$ est un espace normé complet ; cette norme donne la *topologie p-adique* sur $\mathbb{Q}_p$. Cette topologie sur $\mathbb{Q}_p$ est *totalement discontinue*, c'est-à-dire chaque point de $\mathbb{Q}_p$ est le composant connexe de lui-même. La topologie de $\mathbb{Z}_p$ est alors induite par l'inclusion $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$. On remarque que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-espace ouvert compact et totalement discontinu de $\mathbb{Q}_p$.

2.8. Corps p-adiques. Les constructions en § 2.7 appartiennent aux constructions plus générales des « corps p-adiques » : on se donne un corps F non archimédean, c'est-à-dire F est muni d'une valuation discrète $\mathrm{val}_F : F \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$; dans F se trouve son anneau d'intègres $\mathfrak{o} := \{x \in F : \mathrm{val}_F(x) \geq 0\}$ qui est local avec son unique idéal maximal $\mathfrak{m}$, puis le corps résidu $\mathfrak{k} := \mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ qui est un corps fini de q éléments (q une puissance de p) ; enfin le norme associé à F est $|\cdot|_F := q^{-\mathrm{val}_F(\cdot)}$.

En prenant $F = \mathbb{Q}_p$ on retrouvera, d'après § 2.7, que $(F, \mathfrak{o}, \mathfrak{k}) = (\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p)$.

2.9. Groupes linéaires p-adiques. [Ren10, § V.2.1] Un *groupe algébrique* $\mathbf{G}$ est une variété algébrique munie des lois de groupe qui sont des morphismes de variétés algébriques. Un groupe algébrique connexe $\mathbf{G}$ défini sur un corps p-adique F en tant qu'une variété algébrique est un *groupe p-adique (connexe)* ; un tel groupe est dit *linéaire* s'il est isomorphe à un sous-groupe fermé (au sens des variétés algébriques) de $\mathrm{GL}_n(\overline{F})$ (pour un entier n) par un morphisme algébrique défini sur F ; donc $G := \mathbf{G}(F)$ (les F-points de $\mathbf{G}$) se plonge dans $\mathrm{GL}_n(F)$. La topologie p-adique sur le corps F induit une topologie sur $\mathrm{GL}_n(\overline{F})$ et puis une topologie sur le sous-espace G, ce qui rend G un groupe totalement discontinu. (Cette topologie sur G ne dépend pas du choix de son plongement dans $\mathrm{GL}_n(\overline{F})$.)

À titre d'exemples, le groupe linéaire p-adique $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et ses sous-groupes (par exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$) sont des groupes totalement discontinus.

2.10. Espaces homogènes et translations sur leurs espaces de fonctions. Soit G un groupe topologique totalement discontinu (par exemple un groupe p-adique) et soit H un sous-groupe de G. On peut alors considérer leurs quotient G/H qui n'est pas un groupe à priori (G/H est un groupe si H est distingué dans G). Parallèlement à la représentation $(l, C_c^\infty(G, R))$ considérée en § 2.6, on peut considérer la représentation lisse suivante par translation à gauche :

$$l : G \to \mathrm{Aut}_R(C_c^\infty(G/H, R)), \quad g \in G \mapsto [l_g : f \in C_c^\infty(G/H, R) \mapsto f(g^{-1}(\cdot))].$$

Si H est ouvert, alors G/H, muni de sa topologie quotient, est un espace discret, donc $C_c^\infty(G/H, R) = C_c(G/H, R)$. Si H est ouvert, alors G/H est un espace totalement discontinu. Si H est compact, alors une fonction est à support compact en G/H si et seulement si elle y est à suppoet fini.

Exemples pour $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On reprend les notations en § 1.1. On peut alors choisir H comme T, B, U, K et I. Voici un tableau résumant des propriétés topologiques de ces choix :

Sous-groupes de G	T	B	U	K	I
Distingué de G					
Ouvert de G				$\times$	$\times$
Compact				$\times$	$\times$
Fermé de G	$\times$	$\times$	$\times$		

On a ainsi $C_c^\infty(G/K,R)=C_c(G/K,R)$ et $C_c^\infty(G/I,R)=C_c(G/I,R)$. D'autre part, on a $G/B\simeq\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ et $G/U\simeq(\mathbb{A}^2(\mathbb{Q}_p)\setminus\{0\})\times(\mathbb{A}^1(\mathbb{Q}_p)\setminus\{0\})=:\mathbb{A}^2(\mathbb{Q}_p)^*\times\mathbb{Q}_p^\times$ comme espaces topologiques, donc :

$$(l,C_c^\infty(G/B,R))\simeq(l,C_c(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p),R))\ ;$$
$$(l,C_c^\infty(G/U,R))\simeq(l,C_c(\mathbb{A}^2(\mathbb{Q}_p)^*\times\mathbb{Q}_p^\times,R)).$$

L'ALGÈBRE DE HECKE $\mathcal{H}(G)$

2.11. Mesure de Haar. [Ren10, § II.3.6, § II.3.7 et § V.2.1] Soit G un groupe totalement discontinu. Il existe une distribution $\mathrm{d}g$ sur G (i.e. un dual algébrique de $C_c^\infty(G,\mathbb{C})$), appelée une *mesure de Haar (à gauche) de G*, qui est invariante par translations de G à gauche. Cette mesure de Haar $\mathrm{d}g$ est unique à un facteur multiplicatif scalaire (non nul) près. On peut supposer et on supposera que $\mathrm{d}g$ est *positive*.

En général $\mathrm{d}g$ n'est pas invariante par translations de G à droite. On peut mesurer ce défaut en introduisant la *fonction modulaire* δ_G comme suivant :

$$\delta_G:G\to\mathbb{C}^\times,\quad x\in G\mapsto\delta_G(x)\in\mathbb{C}\ \text{ où }\ r_x(\mathrm{d}g)=\mathrm{d}(gx)=\delta_G(x)\mathrm{d}g.$$

On note que δ_G est un morphisme de groupes.

Si de plus la mesure de Haar $\mathrm{d}g$ est invariante par translations de G à droite, i.e. δ_G est identiquement 1 sur G, on dit que G est *unimodulaire*. Par exemple, les groupes abéliens et les groupes compacts (totalement discontinus) sont unimodulaires ; les groupes p-adiques réductifs (par exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, cf. § 3.3) sont aussi unimodulaires. [Ren10, § V.5.4]

Notations. Pour $f\in C_c^\infty(G,\mathbb{C})$ on écrira $\int_G f\mathrm{d}g=\mathrm{d}g(f)$. Pour un sous-groupe ouvert compact H de G, on écrira $\mathrm{Vol}(H)=\int_G \mathbf{1}_H\mathrm{d}g$.

2.12. Convolution et l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G)$. On fixe une mesure de Haar (positive) $\mathrm{d}g$ sur G. L'espace $C_c^\infty(G,\mathbb{C})$ possède un produit associatif, la *convolution* $*$, qui se décrit comme suivant : pour $f_1,f_2\in C_c^\infty(G,\mathbb{C})$, leur produit convolé $f_1*f_2\in C_c^\infty(G,\mathbb{C})$ est défini par

$$x\in G\mapsto(f_1*f_2)(x):=\int_G f_1(xg)f_2(g^{-1})\mathrm{d}g=\int_G f_1(g)f_2(g^{-1}x)\mathrm{d}g\in\mathbb{C}.$$

On en obtient l'*algèbre de Hecke* $\mathcal{H}(G):=(C_c^\infty(G,\mathbb{C}),*)$, une algèbre associative sur $\mathbb{C}$ dont la multiplication est donnée par la convolution $*$.

2.13. La catégorie $\mathcal{H}(G)$-Mod des modules non dégénérés de $\mathcal{H}(G)$. (cf. [Ren10, Chap. I]) Dans $\mathcal{H}(G)$ se trouve un *système d'idempotents*

$$\left\{e_K:=\frac{\mathbf{1}_K}{|K|}\right\}_K\qquad(K\text{ parcourt les sous-groupes ouverts compacts de }G),$$

qui est *filtrant* au sens que $\mathcal{H}(G) = \bigcup_K (e_K * \mathcal{H}(G) * e_K)$.

Cette notion des idempotents peut être comprise comme une généralisation des algèbres avec unité multiplicative : lorsque G est compact, e_G est bien une unité de l'algèbre $\mathcal{H}(G)$; cependant lorsque G n'est pas compact, alors e_G n'est pas un élément de $\mathcal{H}(G)$, en revanche on considère le système d'idempotents $\{e_K\}_K$.

En suivant cet esprit, on appelle un $\mathcal{H}(G)$-module M *non dégénéré* si

$$M = \bigcup_K (e_K \cdot M) \quad \text{(où } K \text{ parcourt les sous-groupes ouverts compacts de } G\text{)}.$$

On dénotera la catégorie des $\mathcal{H}(G)$-modules non dégénérés par $\mathcal{H}(G)\text{-}\mathsf{Mod}$.

2.14. L'identification $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \simeq \mathcal{H}(G)\text{-}\mathsf{Mod}$. [Ren10, § III.1.4] Pour une représentation lisse (π, V) à valeurs complexes du groupe totalement discontinu G, on peut munir V une structure de $\mathcal{H}(G)$-module à partir de π :

$$\pi : \mathcal{H}(G) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V), \quad f \in \mathcal{H}(G) \mapsto \int_G \pi(g)(\cdot) f(g) \mathrm{d}g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V).$$

Justement : pour $f \in \mathcal{H}(G)$ et pour $v \in V$, cette action est

$$f \cdot v = \pi(f)v = \int_G (\pi(g)v) f(g) \mathrm{d}g \in V.$$

On en obtient un foncteur

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \to \mathcal{H}(G)\text{-}\mathsf{Mod}, \quad (\pi, V) \mapsto (\pi, V),$$

qui est en fait une équivalence des catégories.

L'action de $\mathcal{H}(G)$ induite est bien une action : on va le vérifier afin de voir comment toutes les notions jusqu'ici s'intègrent. Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G)$ il faut montrer que

$$\pi(f_1) \circ \pi(f_2) = \pi(f_1 * f_2).$$

Sa justification se trouve comme suivant :

$$\begin{aligned}
\pi(f_1) \circ \pi(f_2) = \pi(f_1) \circ \int_G \pi(g)(\cdot) f_2(g) \mathrm{d}g &= \int_G \pi(h) \left(\int_G \pi(g)(\cdot) f_2(g) \mathrm{d}g \right) f_1(h) \mathrm{d}h \\
&= \int_{G \times G} \pi(hg)(\cdot) f_1(h) f_2(g) \mathrm{d}g \mathrm{d}h \quad (\pi \text{ est un morphisme de groupes}) \\
&= \int_{G \times G} \pi(hg)(\cdot) f_1(h) f_2(h^{-1}hg) \mathrm{d}(hg) \mathrm{d}h \quad (\mathrm{d}g = \mathrm{d}(hg)) \\
&= \int_{G \times G} \pi(g)(\cdot) f_1(h) f_2(h^{-1}g) \mathrm{d}g \mathrm{d}h \\
&= \int_G \pi(g)(\cdot)(f_1 * f_2)(g) \mathrm{d}g \\
&= \pi(f_1 * f_2).
\end{aligned}$$

2.15. Analogues entre les représentations d'un groupe compact et d'un groupe fini. [Ren10, § IV.1.1] Soit H un group totalement discontinu et compact et soit H_0 un groupe fini. Remarquons d'abord que H_0 muni de sa topologie discrète est bien un groupe totalement discontinu et compact. D'autre part, Si N est un sous-groupe ouvert compact de H, alors H/N est un ensemble fini dont la topologie quotiente est discrète.

La théorie des représentations lisses de H est parallèle à celle des représentations de H_0 (toutes les représentations de H_0 sont automatiquement lisses) au sens suivant :

Représentations irréductibles. Toute $(\pi, V) \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(H_0)$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$: l'espace vectoriel $\langle H_0 \cdot v_0\rangle$ sur $\mathbb{C}$ engendré par $\pi(H_0)v_0$ pour un $v_0 \in V$ est de dimension finie et est une sous-représentation non triviale de (π, V), donc $V = \langle H_0 \cdot v_0\rangle$.

D'autre part, toute $(\pi, V) \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(H)$ est également de dimension finie sur $\mathbb{C}$: comme le cas de H_0 on a $V = \langle H \cdot v_0\rangle$ pour un $v_0 \in V$ fixé, or comme $\pi(H)v_0 = \pi(H/\mathrm{Stab}_\pi(v_0))v_0$ et comme $H/\mathrm{Stab}_\pi(v_0)$ est un ensemble fini (grâce à la lissité de π, $\mathrm{Stab}_\pi(v_0)$ est ouvert dans H et donc fermé dans H et puis compact), on a $\dim_{\mathbb{C}}\langle H \cdot v_0\rangle < +\infty$.

Représentations unitaires. Toute $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H_0)$ est *unitaire*, c'est-à-dire qu'il existe un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot\rangle_V$ de V tel que $\langle \pi(x)v_1, \pi(x)v_2\rangle_V = \langle v_1, v_2\rangle_V$ pour tous $v_1, v_2 \in V$ et pour tout $x \in H_0$. En effet, on peut choisir

$$\langle v_1, v_2\rangle_V = \sum_{h\in H_0} \langle \pi(h)v_1, \pi(h)v_2\rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit hermitien quelconque de V.

De même, toute $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)$ est unitaire : cette fois on choisit une mesure de Haar $\mathrm{d}h$ sur H et on pose

$$\langle v_1, v_2\rangle_V = \int_H \langle \pi(h)v_1, \pi(h)v_2\rangle \mathrm{d}h,$$

$\langle \cdot, \cdot\rangle$ étant un produit hermitien de V.

Semi-simplicité. La catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H_0)$ est *semi-simple*, c'est-à-dire que toute $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H_0)$ se décompose en somme directe des objets simples de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H_0)$:

$$(\pi, V) = \bigoplus_{j\in\Lambda} (\pi_j, V_j) \ \text{ dans } \ \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H_0) \quad \text{où} \quad (\pi_j, V_j) \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(H_0)\ (j \in \Lambda).$$

En effet, $V = \sum_{v_0\in V} \langle H_0 \cdot v_0\rangle$ et donc on peut supposer auparavant que $\dim_{\mathbb{C}} V < +\infty$. Dans ce cas, grâce à l'existence d'un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot\rangle_V$ de V telle que (π, V) soit unitaire (comme ce qu'on vient de voir), on s'aperçoit que si W est une sous-représentation de V alors $V = W \oplus W^\perp$ par rapport à $\langle \cdot, \cdot\rangle_V$. Ainsi la semi-simplicité de V. La catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)$ est également semi-simple : pour $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)$, en parallèle de la discussion pour H_0, on peut supposer que $\dim_{\mathbb{C}} V < +\infty$. Cette dernière condition et la lissité de π garantissent que $\ker \pi$, étant distingué par définition, est aussi ouvert dans H (donc fermé dans H et puis compact). Alors (π, V) est une représentation du groupe fini $H/\ker \pi$ et ainsi semi-simple.

2.16. Projection sur une composante isotypique par multiplication par un idempotent central. Soit H un groupe totalement discontinu et compact. Soient $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)$ et $\tau \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(H)$. La semi-simplicité de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)$ (§ 2.15) entraîne la décomposition

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H) = \prod_{\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(H)} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)(\sigma)$$

Ici $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)(\sigma)$ se compose des $\pi \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)$ dont les sous-représentations irréductibles sont isomorphes à σ.

On s'intéresse à la projection

$$\mathrm{pr}_{\tau} : \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H) = \prod_{\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(H)} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)(\sigma) \twoheadrightarrow \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)(\tau), \quad V \mapsto V(\tau)$$

qui se réalise comme la multiplication par un idempotent central $e^{\tau} \in \mathcal{H}(H)$, c'est-à-dire que pour $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)$, $V(\tau) = e^{\tau} \cdot V$ via l'identification $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \to \mathcal{H}(G)\text{-}\mathsf{Mod}$ en § 2.14. Ici $(\pi, V(\tau))$ est appelée la *composante isotypique de type τ de π*.

Cas du groupe fini. Si H est un groupe fini, alors $\mathcal{H}(H) = \mathbb{C}[H]$ et cet idempotent central e^{τ} est

$$e^{\tau} = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \mathrm{tr}(\tau(h^{-1}))h = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \overline{\mathrm{tr}(\tau(h))}h.$$

Ceci résulte de l'*orthogonalité de Schur* qui dit que pour deux représentations irréductibles σ_1 et σ_2 de H,

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \mathrm{tr}(\sigma_1(h))\overline{\mathrm{tr}(\sigma_2(h))} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_1 \simeq \sigma_2 \,; \\ 0 & \text{si } \sigma_1 \not\simeq \sigma_2. \end{cases}$$

Cas général d'un groupe compact. D'après les relations entre représentations d'un groupe totalement discontinu compact et d'un groupe fini (§ 2.15), on se convainc que l'idempotent central voulu est

$$e^{\tau} = \left[h \in H \mapsto \mathrm{Vol}(H)^{-1}\mathrm{tr}(\tau(h^{-1})) \in \mathbb{C}\right] \in \mathcal{H}(H).$$

On remarque que si H n'est pas compact, alors un tel idempotent $e^{\tau} \in \mathcal{H}(H)$ pourrait ne pas exister, cependant on aura une version modifiée (cf. § 4.4).

2.17. Inductions et inductions compactes à partir d'un sous-groupe fermé. [Ren10, § III.2.2 et§ III.2.6] Soit G un groupe totalement discontinu et soit H un sous-groupe fermé de G. On considère le *foncteur d'induction* Ind_H^G et le *foncteur d'induction compacte* ind_H^G,

$$\mathrm{Ind}_H^G,\ \mathrm{ind}_H^G : \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H) \longrightarrow \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G),$$

définis comme suivant : pour $(\sigma, E) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)$, la version générale est

$$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma, E) = (\mathrm{Ind}_H^G(\sigma), \mathrm{Ind}_H^G(E)) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$$

où

$$\mathrm{Ind}_H^G(E) := \left\{ f : G \to E \;\middle|\; \begin{array}{l} f(hg) = \sigma(h)f(g) \ \ (h \in H, g \in G)\,; \\ \text{il existe un sous-groupe ouvert compact } K \leq G \\ \text{(dépendant de } f\text{) tel que } f(gk) = f(g) \ \ (g \in G, k \in K) \end{array} \right\}$$

et $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)(g) \cdot f = r_g \cdot f \ \ (g \in G, f \in \mathrm{Ind}_H^G(E))$; la version compacte est

$$\mathrm{ind}_H^G(\sigma, E) = (\mathrm{ind}_H^G(\sigma), \mathrm{ind}_H^G(E)) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$$

où

$$\mathrm{ind}_H^G(E) := \left\{ (f : G \to E) \in \mathrm{Ind}_H^G(E) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{il existe un sous-ensemble compact } F \subset G \\ \text{tel que } \mathrm{Supp}(f) \subset H \cdot F \end{array} \right\}$$

et $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ est la restriction de $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ à $\mathrm{ind}_H^G(E)$.

Si l'espace quotient $H\backslash G$ est compact, alors $\mathrm{Ind}_H^G = \mathrm{ind}_H^G$.

En général ($H\backslash G$ étant compact ou non) on a un isomorphisme des foncteurs

$$\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} (\cdot) \simeq \mathrm{ind}_H^G((\cdot) \otimes \delta_{H\backslash G}) : \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H) \longrightarrow \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G).$$

Ici $\delta_{H\backslash G} := \delta_G/\delta_H$.

2.18. Adjonctions : réciprocités de Frobenius. [Ren10, §§ III.2.5 - III.2.6] Comme dans le paragraphe précédent on suppose que H est un sous-groupe fermé du groupe totalement discontinu G. On considère de plus le *foncteur de restriction*

$$\mathrm{Res}_H^G : \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H), \quad V \mapsto (V \text{ comme un } H\text{-module}).$$

Alors :

(i) $(\mathrm{Res}_H^G, \mathrm{Ind}_H^G)$ est une paire d'adjoints, en particulier

$$\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G, \mathrm{id}) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{id}, \mathrm{Ind}_H^G).$$

(ii) Si de plus H est ouvert dans G, on aura une autre paire d'adjoints $(\mathrm{ind}_H^G, \mathrm{Res}_H^G)$:

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G, \mathrm{id}) \simeq \mathrm{Hom}_H(\mathrm{id}, \mathrm{Res}_H^G).$$

3 Préparations sur les groupes réductifs p-adiques

3.1. Tores maximaux, sous-groupes paraboliques et sous-groupes de Borel. (cf. [Ren10, Chap. V]) Un *tore* sur un corps algébriquement clos $\overline{F}$ est un groupe algébrique défini sur $\overline{F}$ isomorphe à un produit des groupes multiplicatifs $\overline{F}^{\times}$. Il s'ensuit que tous les tores sont des groupes abéliens.

Soit G un groupe algébrique linéaire connexe. Un sous-groupe T de G qui est un tore maximal par l'inclusion est appelé un *tore maximal de* G. Tous les tores maximaux de G sont conjugués par des éléments de G. Un sous-groupe P de G est appelé *parabolique* si le quotient G/P est une variété complète. Un sous-groupe parabolique minimal B est appelé un *sous-groupe de Borel*. Il se trouve que tous les sous-groupe de Borel de G sont conjugués par des éléments de G.

L'exemple $G = \mathrm{GL}_n(\overline{F})$. Un tore maximal de G est

$$T = \{\text{matrices diagonales dans } G\}.$$

Chaque sous-groupe parabolique P de G est conjugué par un élément de G au sous-groupe suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{GL}_{n_1}(\overline{F}) & \mathrm{M}_{n_1\times n_2}(\overline{F}) & \cdots & \mathrm{M}_{n_1\times n_r}(\overline{F}) \\ O & \mathrm{GL}_{n_2}(\overline{F}) & \cdots & \mathrm{M}_{n_2\times n_r}(\overline{F}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ O & O & \cdots & \mathrm{GL}_{n_r}(\overline{F}) \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

où $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$ et $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

Lorsque $n_1 = \cdots = n_r = 1$ (donc $r = n$), le sous-groupe ci-dessus se compose des matrices triangulaires supérieurs et fournit un exemple du sous-groupe de Borel de G.

3.2. Sous-groupe parabolique standard. (cf. [Ren10, § V.3.8]) Quitte à fixer un sous-groupe de Borel B de G, les *sous-groupes paraboliques standards (par rapport à B)* sont les sous-groupes paraboliques P de G contenant B ; de tels P sont de nombre fini.

L'exemple $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On récupère les sous-groupes de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaissant en § 1.1. Alors les sous-groupe parabolique standard de G par rapport au sous-groupe de Borel B sont B lui-même et G.

3.3. Groupes réductifs p-adiques. (cf. [Ren10, § V.2.1]) Soit G un groupe algébrique linéaire connexe. On considère son *radical unipotent* $R_u(G)$, c'est-à-dire le plus grand sous-groupe distingué connexe unipotent de G. Le groupe G est appelé *réductif* si $R_u(G) = 0$.

Une formule utile pour décrire le radical unipotent est

$$R_u(G) = R_u\left(\bigcap_{T\subset B\subset G} B\right) \tag{3.3.1}$$

où T est un tore maximal de G et B parcourt tous les sous-groupes de Borel de G contenant T.

Un *groupe réductif p-adique* est bien un groupe réductif et p-adique.

L'exemple $\mathrm{GL}_n(F)$. Le groupe $G = \mathrm{GL}_n(F)$, où F est un corps p-adique, est un groupe réductif p-adique. En effet, compte tenu de la formule (3.3.1), en choisissant le tore maximal T comme le sous-groupe des matrices diagonales et en notant que le sous-groupe B (resp. $\overline{B}$) des matrices triangulaires supérieurs (resp. inférieurs) est un sous-groupe de Borel contenant T (cf. § 3.1), on a

$$R_u(G) = R_u\left(\bigcap_{T\subset B\subset G} B\right) \subset R_u(B\cap\overline{B}) = R_u(T) = 1.$$

3.4. Sous-groupes d'Iwahori (pour GL_n**).** (cf. [Vig96, § I.3.14]) Pour un groupe réductif p-adique G on peut définir ses sous-groupes d'Iwahori en intervenant l'« immeuble de Bruhat-Tits » de G, et tous les sous-groupes d'Iwahori de G sont conjugués par éléments de G.

Ici on se restreint au cas $G = \mathrm{GL}_n(F)$ pour un corps p-adique F. Dans ce cas, on peut construire un sous-groupe d'Iwahori de G (tous les sous-groupes d'Iwahori y conjuguent) comme suivant : on note d'abord $\mathfrak{o}$ l'anneau d'intègres de F et $\mathfrak{k}$ le corps résidu de F ; puis on considère le groupe $K = G(\mathfrak{o}) = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ qui est un *sous-groupe compact ouvert maximal* de G, on choisit le sous-groupe de Borel standard (triangulaire supérieur) B_0 de $K_0 = G(\mathfrak{k}) = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{k})$, enfin on définit le *sous-groupe d'Iwahori* $I = \mathrm{red}^{-1}(B_0)$ où $\mathrm{red} : K \to K_0$ est l'application de réduction induit par l'application de quotient $\mathfrak{o} \to \mathfrak{k}$.

Le diagramme ci-dessous résume le procès précédent :

$$\begin{array}{ccc} I = \mathrm{red}^{-1}(B_0) & \subset & K = G(\mathfrak{o}) = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}) \\ \downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{red}} \\ B_0 & \subset & K_0 = G(\mathfrak{k}) = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{k}) \end{array}$$

DÉCOMPOSITION EN PRODUIT DES SOUS-GROUPES

3.5. Décomposition de Levi d'un parabolique. (cf. [Ren10, § V.3.1]) Soit P un sous-groupe parabolique d'un groupe algébrique G. Alors P admet une *décomposition de Levi*

$$P = LU = L \ltimes U$$

où $U = R_u(P)$ est le radical unipotent de P et où L est un sous-groupe fermé de P normalisant U. On appelle L un *sous-groupe de Levi* de P. Si auparavant on fixe un *tore maximal* T de G et si on demande que $L \supset T$, alors L est uniquement déterminé.

On remarque que si B est un sous-groupe de Borel de G, les sous-groupes de Levi de B sont des tores maximaux T de G.

L'exemple $G = \mathrm{GL}_n(\overline{F})$**.** Soit P le sous-groupe parabolique (3.1.1) de G avec $r = 2$ là-bas, c'est-à-dire que

$$P = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_{n_1} & * \\ O & \mathrm{GL}_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Alors une décomposition de Levi de P est

$$P = LU = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_{n_1} & O \\ O & \mathrm{GL}_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{n_1} & * \\ O & \mathrm{id}_{n_2} \end{pmatrix}.$$

3.6. Décomposition d'Iwahori.(cf. [Ren10, § V.5.2]) Le sous-groupe d'Iwahori I de G possède une bonne propriété de décomposition, appelée la *décomposition d'Iwahori* : pour tout sous-groupe parabolique standard $P = LU$, soit $\overline{P} = L\overline{U}$ son opposé (i.e. tel que $\overline{P} \cap P = L$), alors on a

$$I = I_{\overline{U}} I_L I_U \quad \text{où} \quad I_{\overline{U}} = I \cap \overline{U},\ I_L = I \cap L \text{ et } I_U = I \cap U.$$

Plus généralement, on dit qu'un sous-groupe H de G possède sa *décomposition d'Iwahori* si pour tout tout sous-groupe parabolique standard $P = LU$ on a

$$H = (H \cap \overline{U})(H \cap L)(H \cap U) =: H_{\overline{U}} H_L H_U.$$

Un résultat connu est qu'il y a une base de vosinages de l'identité dans G formée par des sous-groupes ouverts compacts H qui admettent leurs décompositions d'Iwahori. On peut en fait demander plus de bonnes propriétés sur les H, on en précisera lorsqu'on applique cette décomposition.

Le cas $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$**.** Le sous-groupe d'Iwahori I, le tore maximal T, le radical unipotent U et son opposé $\overline{U}$ sont :

$$I = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix} ;\ T = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_p^\times \end{pmatrix} ;\ U = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ \overline{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{Q}_p & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors la décomposition d'Iwahori de I est

$$I = I_{\overline{U}} I_T I_U : \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p\mathbb{Z}_p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.6.1}$$

En effet la décomposition (3.6.1) est élémentaire : en accomplissant une opération de rangée et une opération de colonne, (3.6.1) est juste

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_{11}^{-1} x_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & -x_{11}^{-1} x_{21} x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11}^{-1} x_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.6.2}$$

3.7. Coinvariants. [Ren10, § III.2.9] Soient $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$, H un sous-groupe fermé de G, $N \subset G$ un sous-groupe normalisant H. On considère le plus grand quotient $V(H)$ de V invariant par l'action de H via $\mathrm{Res}_H^G(\pi)$, c'est-à-dire que

$$V(H) = \sum_{h \in H,\, v \in V} \mathbb{C} \cdot (\pi(h)v - v) \subset V.$$

Ce $V(H)$ est un sous-espace vectoriel de V, et on peut alors définir une représentation

$$(\pi_H, V_H) := (\mathrm{Res}_N^G(\pi), V/V(H)) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(N)$$

grâce à l'hypothèse $N \subset N_G(H)$. On dit que V_H est le *coinvariant* de (π, V) par H.

3.8. Inductions et restrictions paraboliques. [Ren10, § VI.1.2] À partir d'une décomposition de Levi d'un sous-groupe parabolique $P = LU$ de G, on peut définir l'*induction parabolique* i_P^G et la *restriction parabolique* r_P^G comme suivant : (on remarque que L normalise U)

$$\begin{aligned} i_P^G : \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L) \longrightarrow \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G), &\quad (\tau, E) \mapsto \mathrm{Ind}_P^G(\tau \otimes \delta_P^{-1/2}, E) \ ; \\ r_P^G : \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L), &\quad (\pi, V) \mapsto (\pi_U \otimes \delta_P^{1/2}, V_U). \end{aligned}$$

(Pour i_P^G, ci-dessus on ragard $\tau \otimes \delta_P^{-1/2}$ (qui est une représentation de L à priori) comme une représentation de P via le quotient canonique $P \twoheadrightarrow L = P/U$.)

Les deux foncteurs i_P^G et r_P^G sont exacts. (r_P^G, i_P^G) est une paire d'adjoints et puis $\mathrm{Hom}_G(r_P^G, \mathrm{id}) \simeq \mathrm{Hom}_L(\mathrm{id}, i_P^G)$.

4 Décomposition de Bernstein pour $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$

4.1. Énoncé de la décomposition de Berstein. [Séc13] Dans cette section on explique la décomposition de Bernstein et calculer cette décomposition pour certains exemples des représentations.

Soit G un groupe réductif p-adique défini sur un corps local non archimédean F (§ 3.3). La *décomposition de Bernstein* entraîne une décomposition de la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ (§ 2.2) :

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) = \prod_{(M,\sigma)/\sim} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[M,\sigma]}$$

où chaque $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[M,\sigma]}$, dite un *bloc de Bernstein*, est une catégorie indécomposable.

Précisions sur cette décomposition de Bernstein :

(i) Une *paire cuspidale* (M, σ) *de* G se compose d'un sous-groupe de Levi M et une *représentation cuspidale* σ de M, c'est-à-dire que $\sigma \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(M)$ et que $r_P^G(\sigma) = 0$ pour tout sous-groupe parabolique propre $P = LU$ de M (cf. § 3.5 et § 3.8).

(ii) On considère une relation d'équivalence $\sim$ parmi les paires cuspidales de G : on écrit $(M_1, \sigma_1) \sim (M_2, \sigma_2)$ s'il existe un élément $g \in G$ et un caractère linéaire *non ramifié* $\chi : M_2 \to \mathbb{C}^\times$ tels que $gM_1g^{-1} = M_2$ et $\sigma_1(g^{-1}(\cdot)g) = \sigma_2\chi$. Ici un caractère linéaire $\chi : M_2 \to \mathbb{C}^\times$ est dit *non ramifié* si χ est trivial ($= 1$) sur le groupe

$$^\circ M_2 := \bigcap_{\alpha \in X^*(M_2)} \ker |\alpha|_F \ (\trianglelefteq M_2).$$

Une telle classe d'équivalence $[M, \sigma]$ est appelée une *classe d'inertie*. (Voir § 4.7 et § 4.16.)

(iii) Pour une représentation $\pi \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$, son *support cuspidal* est la classe de conjugaison par G d'une paire cuspidale (M, σ) telle que $\pi \hookrightarrow i_P^G(\sigma)$ où M est un sous-groupe de Levi de P. (Voir § 4.15.)

(iv) Le bloc $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[M,\sigma]}$ est la sous-catégorie de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ dont les objets sont les $\pi \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ dont tous les sous-quotients irréductibles admettent leurs supports cuspidaux dans la classe d'inertie $[M, \sigma]$.

4.2. Exemple : le bloc principal $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$. Avant de commencer à étudier la décomposition de Bernstein, on examine auparavant l'exemple du bloc $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$ pour avoir quelques images explicites.

On remarque d'abord que $(T, \mathbf{1})$ est bien une paire cuspidale puisque T ne possède aucun sous-groupe parabolique propre (donc la condition de la cuspidalité est nulle).

Comme la représentation triviale $\mathbf{1}_G$ (qui est bien irréductible) s'injecte dans $i_B^G(\mathbf{1}_T)$ (B un sous-groupe de Borel contenant T), on a $\mathbf{1}_G \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$.

Le bloc $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$ s'appelle ainsi le bloc *principal* parce qu'il est le bloc où se trouve la représentation triviale $\mathbf{1}_G$ de G.

En § 5 on décrira le bloc principal de Bernstein par l'algèbre d'Iwahori-Hecke.

REPRÉSENTATIONS COMPACTES

4.3. Représentations compactes. [Ren10, § IV.1.3] Soit G un groupe totalement discontinu (non nécessairement compact). Pour $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$, on dit qu'elle est une *représentation compacte* si elle vérifie l'une des deux conditions équlvalentes suivantes :

(a) Tous ses *coefficients matriciels* (cf. § 2.3 pour notation)

$$c_{v,\xi} : g \in G \mapsto \langle \xi, \tau(g)^{-1}v \rangle \in \mathbb{C} \quad (v \in V, \xi \in \widetilde{V})$$

sont à support compact.

(b) Pour tout $v \in V$ et pour tout sous-groupe ouvert compact H de G, la fonction $[g \in G \mapsto \pi(e_H)\pi(g^{-1})v \in V]$ ($e_H = \mathbf{1}_H/\mathrm{Vol}(H) \in \mathcal{H}(H)$) est à support compact.

On dénote par $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cpt}}$ la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ qui sont aussi des représentations compactes. On a aussi $\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cpt}} = \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \cap \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cpt}}$.

4.4. Décomposition d'une représentation compacte. [Séc13, § 1] Soit G un groupe totalement discontinu, unimodulaire et dénombrable à l'infini. Soit $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cpt}}$ et soit $(\tau, W) \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cpt}}$. On a une décomposition dans $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cpt}}$:

$$V = V(\tau) \oplus V(\tau)^{\perp}$$

où $V(\tau)$ est isomorphe à une somme directe des copies de (τ, W) et où aucun sous-quotient de $V(\tau)^{\perp}$ n'est isomorphe à (τ, W).

On ne peut pas toujours trouver un idempotent $e^{\tau} \in \mathcal{H}(G)$ dont l'action sur V coïncide à la projection $V \twoheadrightarrow V(\tau)$, l'argument pour le cas $G = H$ compact (§ 2.16) pourrait ne pas marcher.

Construction de $V(\tau)$ et de $V(\tau)^{\perp}$. On peut cependant considérer une « approximation », en observant le fait que la lissité de (π, V) équivaut à l'égalité

$$V = \sum_{H} V^{H} = \sum_{H} \pi(e_H) V \qquad \left(e_H = \frac{\mathbf{1}_H}{\mathrm{Vol}(H)} \right)$$

où H parcourt les sous-groupes ouverts compacts de G.

Soit H un sous-groupe ouvert compact de G. De la représentation associée $\tau : \mathcal{H}(H) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$, On considère le diagramme commutatif $(G \times G)$-équivariant suivant :

$$\begin{tikzcd}
W \otimes \widetilde{W} \arrow[r, "c"] & \mathcal{H}(G) \arrow[d, "\tau"] \\
\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "d(\tau)", "\sim"'] & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)
\end{tikzcd} \tag{4.4.1}$$

Ici c est le coefficient matriciel

$$c : W \otimes \widetilde{W} \to \mathcal{H}(G), \quad w \otimes \xi \mapsto \langle \xi, \tau(\cdot)^{-1} w \rangle.$$

On note que l'application $d(\tau)$ est la multiplication par le constant $d(\tau) \in \mathbb{C}$, cela résulte du fait que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G \times G)$ et du *lemme de Schur* [Ren10, § III.1.8] (car ce diagramme est $(G \times G)$-équivariant). On accepte le fait que $d(\tau) \neq 0$ et donc $d(\tau)$ est un isomorphisme.

Le diagramme (4.4.1) nous permet de trouver un idempotent

$$e_H^{\tau} = \frac{1}{d(\tau)} c \circ \tau(e_H) \in \mathcal{H}(G)$$

tel que pour toute $\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ on ait $\sigma(e_H^{\tau}) = \tau(e_H)$ si $\sigma \simeq \tau$ et $\sigma(e_H^{\tau}) = 0$ sinon. Alors la décompositon voulue est :

$$V = V(\tau) \oplus V(\tau)^{\perp} \quad \text{où } V(\tau) = \sum_{H} \pi(e_H^{\tau}) V \ \text{ et } \ V(\tau)^{\perp} = \bigcap_{H} \ker \pi(e_H^{\tau})$$

où H parcourt les sous-groupes ouverts compacts de G (ou bien « $H \to \ker \pi$ »).

4.5. Comparaison avec le cas compact : l'idempotent central. Considérons maintenant le cas $G = H$ compact. Soient $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(H)$ et $(\tau, W) \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(H)$. On a vu en § 2.16 que la décomposition $V = V(\tau) \oplus V(\tau)^{\perp}$ de (π, V) s'est réalisée par $V(\tau) = e^{\tau} \cdot V$ (et $V(\tau)^{\perp} = (1 - e^{\tau}) \cdot V$) pour un idempotent central $e^{\tau} \in \mathcal{H}(H)$.

La construction de § 4.4 nous donne une autre expression équivalente de e^{τ} :

$$e^{\tau} = e^{\tau}_{H} = \frac{1}{d(\tau)} c \circ \tau(e_H) \in \mathcal{H}(H).$$

En effet, soit $\{w_1, \cdots, w_m\}$ une base de l'espace vectoriel W sur $\mathbb{C}$ et soit $\{w_1^*, \cdots, w_m^*\}$ sa base duale. Par définition,

$$\begin{array}{ccc} W \otimes \widetilde{W} \ni \dfrac{1}{d(\tau)} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} w_j \otimes w_j^* & \longmapsto & e^{\tau} \in \mathcal{H}(H) \\ \Big\uparrow & & \\ \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \ni d(\tau)^{-1} \mathrm{id}_W & \longleftarrow & \mathrm{id}_W \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \end{array}$$

Ainsi on revient à la formule en § 2.16 :

$$e^{\tau} = \frac{1}{d(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \langle w_j^*, \tau(\cdot)^{-1} w_j \rangle = \frac{1}{d(\tau)} \mathrm{tr}\ \tau((\cdot)^{-1}) \in \mathcal{H}(H).$$

On en déduit, par contre, que $d(\tau) = \mathrm{Vol}(H)$.

CARACTÈRES NON RAMIFIÉS

4.6. Le groupe $^{\circ}G$. [Ren10, § V.2.3] Soit G un groupe algébrique réductif défini sur un corps local non archimédean F. Le sous-groupe $^{\circ}G$ de G est défini par

$$^{\circ}G := \bigcap_{\alpha \in X^*(G)} \ker |\alpha|_F,$$

où $X^*(G)$ est l'ensemble des *caractères linéaires algébriques définis sur* F.

Le groupe $^{\circ}G$ est un sous-groupe ouvert, fermé et distingué de G, et $^{\circ}G$ contient tous les sous-groupes compacts de G. On a aussi que $^{\circ}G \supset [G, G]$. De plus $^{\circ}G$ est unimodulaire (comme G l'est).

L'Exemple $G = \mathrm{GL}_n(F)$. Il s'agit en effet de déterminer $X^*(\mathrm{GL}_n(F))$. Soit $\alpha : \mathrm{GL}_n(F) \to F^{\times}$ un caractère linéaire algébrique défini sur F. Alors α correspond à un morphisme d'algèbres sur F,

$$\alpha^* : A[F^{\times}] = F\left[X, \frac{1}{X}\right] \to A[\mathrm{GL}_n(F)] = F\left[\{Y_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}, \frac{1}{\det((Y_{ij})_{1 \leq i,j \leq n})}\right].$$

Comme $\alpha^*(X)\alpha^*(X^{-1}) = 1$, il s'ensuit que $\alpha^*(X)$ doit être inversible dans $A[\mathrm{GL}_n(F)]$, donc (comme $\alpha(\mathrm{id}) = 1$) $\alpha^*(X) = \det(Y_{ij})^m$ pour un $m \in \mathbb{Z}$. On en déduit que

$$X^*(\mathrm{GL}_n(F)) = \{(\det)^m : \mathrm{GL}_n(F) \to F^\times : m \in \mathbb{Z}\}.$$

En conséquence,

$$^\circ\mathrm{GL}_n(F) = \{g \in \mathrm{GL}_n(F) : \mathrm{val}_F(\det(g)) = 0\}.$$

4.7. Caractères non ramifiés. [Ren10, § V.2.3] Un caractère linéaire $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ est dit *non ramifié* si χ est trivial ($= 1$) sur le sous-groupe $^\circ G$ de G.

Exemples pour $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. On note d'abord que

$$^\circ G = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) : \mathrm{val}_p(\det(g)) = 0\}.$$

Alors pour $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, on a un caractère linéaire non ramifié de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$:

$$\chi : G \to \mathbb{C}^\times, \quad g \in G \mapsto \lambda^{\mathrm{val}_p(\det(g))} \in \mathbb{C}^\times.$$

REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES

4.8. Représentations cuspidales. [Ren10, § VI.2.1] Soit G un groupe réductif p-adique. Une représentation lisse $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ est appelée *cuspidale* si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(a) $r_P^G(\pi) = 0$ pour tout sous-groupe parabolique (stantard) propre P de G.

(b) Les coefficients matriciels de (π, V) sont à support compact modulo le centre $Z(G)$ de G.

(c) $\mathrm{Res}_{^\circ G}(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$ est une représentation compacte.

(On rappelle § 3.8, § 4.3 et § 4.6 pour des notions intervenant ci-dessus.)

On dénotera par $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}$ la catégorie des représentations cuspidales de G à valeurs complexes. On posera aussi $\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}} = \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \cap \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}$.

Exemples spéciaux. Lorsque $^\circ G$ est compact, toutes les représentations lisses de G sont cuspidales. Par exemple, pour le tore T de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, comme $^\circ T \simeq \mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times$ est compact, on en déduit que tous les représentations lisses de T sont cuspidales.

Justification des équivalences de (a), (b) et (c) pour $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

(c) implique (a) : Le seul sous-groupe parabolique propre standard est $B = TU$. Soit $v \in V$ et il faut montrer que $v \in V(U)$. On considère

$$J = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbb{Z}_p & p^m\mathbb{Z}_p \\ p^m\mathbb{Z}_p & 1 + p^m\mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \tag{4.8.1}$$

qui est un sous-groupe distingué de $K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et qui admet sa décomposition d'Iwahori (§ 3.6, en particulier (3.6.2))

$$J = J_U J_T J_{\overline{U}}.$$

En plus, comme π est lisse et comme $J \to \{\mathrm{id}\}$ quand $m \to \infty$, il existe un m assez grand que l'on fixera tel que $v \in V^J$. Prenons maintenant

$$t = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}.$$

Alors $t^{-1} J_T t = J_T, t^{-1} J_{\overline{U}} t \subset J_{\overline{U}}$ et $t^{-1} J_U t \subset U$. Comme la restriction de (π, V) à ${}^\circ G$ est compact, il existe un n assez grand tel que $\pi(e_K)\pi(t^n)v = 0$, donc

$$0 = \pi(e_{t^{-n}Jt^n})v = \pi(e_{t^{-n}J_U t^n})v,$$

d'où $v \in V(t^{-n} J_U t^n) \subset V(U)$.

(a) implique (b) : Supposons que (b) est faux de sorte qu'il existe un coefficient matriciel $c_{v,\xi} = \langle \xi, \pi^{-1}(\cdot)v \rangle$ $(v \in V, \xi \in \widetilde{V})$ dont le support n'est pas compact modulo $Z(G)$. On voudrait alors montrer qu'il existe un sous-groupe parabolique propre $P = LU$ de G tel que $V_U \neq 0$.

En suivant le même esprit de la justification « (c) implique (a) » ci-dessus, on peut trouver un J de la forme (4.8.1) tel que $v \in V^J$ et $\xi \in (\widetilde{V})^J$. D'autre part, on considère la *décomposition de Cartan* $K \backslash G / K \simeq T^{++} = \{t_{m,n} : m \geq n\}$ $(K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p))$ où

$$t_{m,n} = \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}.$$

Vu que $\mathrm{Supp}(c_{v,\xi})$ n'est pas à support compact modulo $Z(G)$ par l'hypothèse, on peut trouver une sous-suite (t'_n) de $(t_{m,n})$ telle que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} {t'_n}^{-1} J_U t'_n = U \tag{4.8.2}$$

et telle que $\mathrm{Supp}(c_{v,\xi}) \cap K t'_n K \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $[K : J] < \infty$ (K, J étant ouverts compacts), il existe alors $k_1, k_2 \in K$ tels que $\mathrm{Supp}(c_{v,\xi}) \cap k_1 J t'_n J k_2 \neq \varnothing$, donc il existe $x_n, y_n \in J$ $(n \in \mathbb{N})$ tels que $c_{v,\xi}(k_1 x_n t'_n y_n k_2) \neq 0$. Comme $J \trianglelefteq K$, la dernière inéqualité entraîne, après quelques calculs, que $\langle \widetilde{\pi}({k_1}^{-1})\xi, \pi(e_{{t'_n}^{-1} J_U t'_n})\pi(k_2)v \rangle$, d'où $\pi(k_2)v \notin V(U)$ et $V_U \neq 0$.

(b) implique (c) : Soit $c_{v,\xi} = \langle \xi, \pi^{-1}(\cdot)v \rangle$ un coefficient matriciel $(v \in V, \xi \in \widetilde{V})$. Il faut montrer que ${}^\circ C := \mathrm{Supp}(c_{v,\xi}|_{{}^\circ G})$ est compact. L'image de ${}^\circ C$ sous le composé d'applications

$${}^\circ G \twoheadrightarrow {}^\circ G / ({}^\circ G \cap Z(G)) \hookrightarrow G / Z(G)$$

est compact par l'hypothèse. Comme le second injection est une application fermé et comme ${}^\circ G \cap Z(G) \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ est compact, on trouve que ${}^\circ C = \mathrm{Supp}(c_{v,\xi}|_{{}^\circ G})$ est compact.

4.9. Action de G sur $\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$. [Ren10, § VI.3.1] Comme $^\circ G \trianglelefteq G$, on peut considérer l'action de G sur $\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$ par conjugaison. On a les propriétés suivantes pour cette action $G \curvearrowright \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$:

(i) Les orbites de cette action sont de cardinal fini.

(ii) Pour $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$, $\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ et $g \in G$, on a $\pi(g)V(\sigma) = V(g \cdot \sigma)$.

(iii) Pour tout $\pi \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\text{cusp}}$, $\{\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(^\circ G) : \sigma \hookrightarrow \mathrm{Res}_{^\circ G}(\pi)\}$ est une seule G-orbite.

Pour $\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$, sa G-orbite est notée par $G\sigma$.

Cette action $G \curvearrowright \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$ est triviale (à isomorphisme près) quand elle est restreinte en $^\circ G$, car pour $x \in {^\circ G}$ et pour $\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$, $x \cdot \sigma = \sigma(x^{-1}(\cdot)x) = \sigma(x)^{-1}\sigma(\cdot)\sigma(x) \simeq \sigma$. Or cette action de G n'est pas toujours triviale, comme pour $y \in G$ et pour $\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$ on ne peut pas écrire $y \cdot \sigma = \sigma(y^{-1}(\cdot)y) = \sigma(y)^{-1}\sigma(\cdot)\sigma(y)$ car σ n'est définie qu'en $^\circ G$.

4.10. Classes d'inertie dans $\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\text{cusp}}$. [Ren10, § VI.3.2] $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2) \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\text{cusp}}$ sont dites *inertiellement équivalentes*, noté $(\pi_1, V_1) \sim (\pi_2, V_2)$, si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(a) $\mathrm{Res}_{^\circ G}(\pi_1, V_1) \simeq \mathrm{Res}_{^\circ G}(\pi_2, V_2)$.

(b) Il y a un caractère linéaire non ramifié χ de G tel que $\pi_2 = \pi_1\chi$.

(c) $\mathrm{Hom}_{^\circ G}(\mathrm{Res}_{^\circ G}(\pi_1), \mathrm{Res}_{^\circ G}(\pi_2)) \neq 0$.

Cette équivalence d'inertie est une relation d'équivalence ; une classe d'équivalence de cette relation est appelée une *classe d'inertie*. La classe d'inertie d'une $\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\text{cusp}}$ est dénotée par $[\sigma]$.

Justification de l'équivalence de (a), (b) et (c). Il est suffisant de montrer que (c) implique (b). On suppose donc que $\mathrm{Hom}_{^\circ G}(V_1, V_2) \neq 0$, où $V_i = \mathrm{Res}_{^\circ G}(\pi_i)$. L'action

$$\rho : G \curvearrowright \mathrm{Hom}_{^\circ G}(V_1, V_2), \quad g \cdot f = \pi_2(g) \circ f \circ \pi_1(g)^{-1}$$

se factorise par $G/^\circ G$ en tant que le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{^\circ G}(V_1, V_2)) \\ G/^\circ G \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $G/^\circ G$ est commutatif ($^\circ G \supset [G, G]$, cf. § 4.6) et comme $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{^\circ G}(V_1, V_2) < +\infty$, on sait que $\{\rho(g)\}_{g \in G}$ admettent un *vecteur propre commun* $f \in \mathrm{Hom}_{^\circ G}(V_1, V_2)$, en particulier $f \neq 0$ et il y a une fonction $\chi : G \to \mathbb{C}$ telle que $\rho(g)f = \chi(g)f$ pour tout $g \in G$; alors χ est en fait un caractère liéaire de G, $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_G(\pi_1\chi, \pi_2)$ et donc $\pi_1\chi \simeq \pi_2$ d'après les irréductiblités de π_1 et de π_2.

4.11. Une décomposition de la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$ selon partie compacte. [Séc13, § 1.4] Soit G un groupe réductif p-adique. Grâce à la structure de $^\circ G$, on a une décomposition de la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(^\circ G)$:

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(^\circ G) = \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(^\circ G)_{\text{cpt}} \times \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(^\circ G)_{\text{noncpt}}.$$

Concrètement, pour une $V \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}({}^{\circ}G)$, on a $V = V_{\mathrm{cpt}} \oplus V_{\mathrm{noncpt}}$ où (cf. § 4.4)

$$V_{\mathrm{cpt}} = \bigoplus_{\tau \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}({}^{\circ}G)} V(\tau) \quad \text{et} \quad V_{\mathrm{noncpt}} = \bigcap_{\tau \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}({}^{\circ}G)} V(\tau)^{\perp}.$$

Notons que aucun sous-quotient de V_{noncpt} n'est compact.

Remarquons que cette décomposition serait fausse si on remplace ${}^{\circ}G$ par d'autre groupe.

4.12. Partie cuspidale d'une représentation lisse. [Séc13, § 2.3] Soit G un groupe réductif p-adique et soit $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$. La *partie cuspidale de* (π, V) est la sous-représentation (π, V_{cusp}) définie comme suivant : la *partie compacte*

$$(\mathrm{Res}_{{}^{\circ}G}(\pi, V))_{\mathrm{cpt}} := \bigoplus_{\tau \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}({}^{\circ}G)_{\mathrm{cpt}}} \mathrm{Res}_{{}^{\circ}G}(\pi, V)(\tau)$$

de $\mathrm{Res}_{{}^{\circ}G}(\pi, V)$ étant en fait stable sous l'action de G via π, on pose alors

$$(\pi, V_{\mathrm{cusp}}) := ((\mathrm{Res}_{{}^{\circ}G}(\pi, V))_{\mathrm{cpt}} \text{ munie de l'action de } G).$$

4.13. Décomposition de la partie cuspidale. [Séc13, § 2.3] Soit $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$. Sa partie cuspidale V_{cusp} se décompose dans $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}({}^{\circ}G)$ comme

$$V_{\mathrm{cusp}} = \bigoplus_{\tau \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}({}^{\circ}G)_{\mathrm{cpt}}} (\mathrm{Res}_{{}^{\circ}G} V)(\tau) = \bigoplus_{[\tau] \in G \backslash \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}({}^{\circ}G)_{\mathrm{cpt}}} V_{[\tau]} \quad \text{où} \quad V_{[\tau]} = \bigoplus_{\tau' \in G \cdot \tau} (\mathrm{Res}_{{}^{\circ}G} V)(\tau').$$

On voit que les $V_{[\tau]}$ sont stables par l'action de G. Tous les sous-quotients irréductibles de $V_{[\tau]} \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ sont cuspidaux et inertiellement équivalents. D'autre part, lorsque $G \cdot \tau_1 \neq G \cdot \tau_2$, les sous-quotients irréductibles de $V_{[\tau_1]}$ et de $V_{[\tau_2]}$ (sont cuspidaux mais) ne sont pas inertiellement équivalents.

Cette décomposition $V_{\mathrm{cusp}} = \bigoplus V_{[\tau]}$ s'écrit au niveau catégorical comme suivant

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}} = \prod_{\tau \in G \backslash \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}({}^{\circ}G)_{\mathrm{cpt}}} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(\tau)}$$

où les objets de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(\tau)}$ sont les $\pi \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}$ telles que les restrictions en ${}^{\circ}G$ de tous les sous-quotients irréductibles de π soient dans $G \cdot \tau$.

De façon équivalente, on a l'égalité

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}} = \prod_{[\sigma] \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}/\sim} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[\sigma]}$$

où $\sim$ est l'équivalence d'inertie et où les objets de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[\sigma]}$ sont les $\pi \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}$ telles que tous les sous-quotients irréductibles de π soient dans $[\sigma]$.

On remarque que pour $\tau \in G \backslash \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}({}^{\circ}G)_{\mathrm{cpt}}$ et $[\sigma] \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}/\sim$, $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(\tau)}$ est égal à $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[\sigma]}$ si et seulement si $\mathrm{Res}_{{}^{\circ}G}(\sigma)$ admet un sous-quotient irréductible dans la classe $G \cdot \tau$.

4.14. Restriction parabolique d'une induction parabolique.[Ren10, § VI.5.3] (cf. aussi [Séc13, Lem. 3.2]) On aura besoin du résultat suivant (une conséquence du « lemme géométrique »), bien qu'on ne le démontre pas ici : soient $P = LU$ et $P' = L'U'$ deux sous-groupes paraboliques de G (L, L' sous-groupes de Levi), soit $\sigma \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L)_{\text{cusp}}$. Alors l'apparance de $\pi := r^G_{P'} i^G_P(\sigma) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L')$ (cf. § 3.8 pour notation) est :

(i) Si L' ne contient aucun conjugué de L par G, alors $\pi = 0$.

(ii) Si L' n'est pas conjugué à L par G, alors π ne possède aucun sous-quotient cuspidal irréductible.

(iii) Si L' est conjugué à L par G, alors chaque sous-quotient cuspidal irréductible de π est conjugué par G à un sous-quotient de σ.

4.15. Support cuspidal par paire cuspidale. [Séc13, § 3.1] Soit $(\pi, V) \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$. Alors il existe un sous-groupe parabolique (standard) P de G et une représentation cuspidale irréductible (τ, E) de L (où L est un sous-groupe de Levi de P) tel que $(\pi, V) \hookrightarrow i^G_P(\tau, E)$. Cette *paire cuspidale* (L, τ) existe uniquement à conjugaison par G près (d'après § 4.14). Le *support cuspidal* de (π, V) est alors la classe $G \cdot (L, \tau)$ de conjugaison par G de (L, τ).

Construction du support cuspidal. [Ren10, Cor. VI.2.1] Le support cuspidal $G \cdot (L, \tau)$ de $(\pi, V) \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ est construit comme suivant : on commence par choisir un sous-groupe parabolique P de G minimal par rapport à la propriété $r^G_P(\pi) \neq 0$; alors on choisit un sous-groupe L de Levi de P, puis on prend un quotient irréductible (τ, E) de $r^G_P(\pi) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L)$ et donc on obtient (L, τ), d'après l'adjonction (r^G_P, i^G_P) (§ 3.8).

4.16. Classe d'inertie d'une paire cuspidale. [Séc13, § 3.2] On a vu la notion de l'équivalence d'inertie entre les représentations cuspidales de G. On peut la généraliser à l'équivalence d'inertie entre les paires cuspidales (L, τ) de G comme suivant : deux paires cuspidales (L_1, τ_1) et (L_2, τ_2) de G sont *inertiellement équivalentes*, noté $(L_1, \tau_1) \sim (L_2, \tau_2)$, s'il existe un caractère linéaire non ramifié $\chi : L_2 \to \mathbb{C}^\times$ de L_2 tel que (L_1, τ_1) et $(L_2, \tau_2\chi)$ soient conjuguées par un élément de G.

Pour une paire cuspidale (L, τ) de G, on peut ainsi considérer sa *classe d'inertie* $[L, \tau]$ qui est la classe d'éqivalence de (L, τ) par rapport à l'équivalence d'inertie $\sim$.

DÉCOMPOSITION EN BLOCS DE BERNSTEIN

4.17. Décomposition de Bernstein. On revient maintenant au résultat principal de cette section. Soit G un groupe p-adique réductif connexe. Alors la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ admet sa *décomposition de Bernstein*

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) = \prod_{(M,\sigma)/\sim} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[M,\sigma]}$$

où le produit parcourt les classes d'inertie des paires cuspidales (M, σ) de G. Pour une telle classe d'inertie $[M, \sigma]$, les objets de la sous-catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[M,\sigma]}$ se composent des objets $\pi \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ dont tous les sous-quotients admettent leurs supports cuspidaux dans $[M,\sigma]$. Chaque $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[M,\sigma]}$, dite un *bloc de Bernstein*, est une catégorie indécomposable.

On remarque que si $\sigma \in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}$, alors la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[\sigma]}$ considérée en § 4.13 est exactement le bloc de Bernstein $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[G,\sigma]}$.

Indications pour arriver à cette décomposition. [Séc13, § 3.2] L'idée est d'employer la décomposition de la partie cuspidale d'une représentation lisse.

(i) Les sous-groupes paraboliques standards $P = LU$ de G induisent deux fontceurs

$$\mathcal{R} : \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \rightleftarrows \bigoplus_{P \text{ standard}} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L)_{\mathrm{cusp}} : \mathcal{I}$$

définis par

$$\mathcal{R}(\pi) = \{(r_P^G(\pi))_{\mathrm{cusp}}\}_P \quad \text{et} \quad \mathcal{I}(\{\rho_L\}_P) = \bigoplus_P i_P^G(\rho_L).$$

On montrera que $(\mathcal{R},\mathcal{I})$ est une paire d'adjoints des foncteurs exacts, et que la transformation naturelle $\iota \in \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \mathcal{I}\mathcal{R})$ correspondant à l'identité de $\mathrm{Hom}(\mathcal{R},\mathcal{R})$ via l'adjonction $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \mathcal{I}\mathcal{R}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{R},\mathcal{R})$ est une injection.

(ii) Pour $\pi \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$, d'après l'injection $\pi \hookrightarrow \mathcal{I}\mathcal{R}(\pi)$, pour que π admette une décomposition de Bernstein, il suffit de montrer que $\mathcal{I}\mathcal{R}(\pi)$ l'admet. En effet, supposons que $W := \mathcal{I}\mathcal{R}(\pi)$ admette sa décomposition de Bernstein $W = \bigoplus_{[M,\sigma]} W_{[M,\sigma]}$, alors on a $\pi = \bigoplus_{[M,\sigma]} (\pi \cap W_{[M,\sigma]})$: sinon, on pourrait choisir un sous-quotient irréductible Y de $\pi / \bigoplus (\pi \cap W_{[M,\sigma]}) \neq 0$ et soit $[M_0,\sigma_0]$ la classe d'inertie de Y ; alors Y serait un sous-quotient de $W/W_{[M_0,\sigma_0]} = \bigoplus_{[M,\sigma]\neq[M_0,\sigma_0]} W_{[M,\sigma]}$, contradiction !

(iii) En fait,

$$\mathcal{I}\mathcal{R}(\pi) = \bigoplus_P i_P^G((r_P^G\pi)_{\mathrm{cusp}}) = \bigoplus_P \bigoplus_{[\tau]\in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(L)_{\mathrm{cusp}}/\sim} i_P^G((r_P^G\pi)_{[\tau]})$$

est une décomposition de Bernstein, plus précisément $i_P^G((r_P^G\pi)_{[\tau]}) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[L,\tau]}$ (d'après § 4.14). La décomposition de Bernstein de $\pi \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ est ainsi

$$\pi = \bigoplus_P \bigoplus_{[\tau]\in \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(L)_{\mathrm{cusp}}/\sim} (\pi \cap i_P^G((r_P^G\pi)_{[\tau]})), \quad \text{où} \quad \pi \cap i_P^G((r_P^G\pi)_{[\tau]}) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[L,\tau]}.$$

4.18. Relations entre les catégories des représentations. Dans cette section on a rencontré beaucoup de catégories des représentations. La page suivante est un petit résumé des relations entre ces catégories.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}({}^\circ G) & = & \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}({}^\circ G)_{\mathrm{cpt}} \arrow[d, equal] & \times & \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}({}^\circ G)_{\mathrm{noncpt}} & & & & & & \\
& & \boxed{\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}({}^\circ G)_{\mathrm{cpt}}} \arrow[rrrr, equal] & & & & \prod\limits_{\tau'\in\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}({}^\circ G)_{\mathrm{cpt}}} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}({}^\circ G)(\tau') & & & & \\
& & & & & & & \leftarrow \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(\tau)} = \bigoplus_{\tau'\in G\tau} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}({}^\circ G)(\tau') & & & \\
& & & & & & \prod\limits_{G\tau\in G\backslash\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}({}^\circ G)_{\mathrm{cpt}}} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(\tau)} \arrow[uu, "\mathrm{Res}_{{}^\circ G}"'] \arrow[dd, equal] & & & & \\
& & & & & & & \leftarrow \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(\tau)} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[\sigma]} \Leftrightarrow \mathrm{Res}_{{}^\circ G}(\sigma) \text{ a un sous quot. irréd.} \in G\tau & & & \\
& & \boxed{\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}} \arrow[uuuu, "\mathrm{Res}_{{}^\circ G}"] \arrow[d, equal] \arrow[rrrr, equal] & & & & \prod\limits_{[\sigma]\in\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}/\sim} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[\sigma]} \arrow[d, equal] & & & & \\
\boxed{\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)} \arrow[uuuuuu, "\mathrm{Res}_{{}^\circ G}"] \arrow[d, shift right, "\mathcal{R}"'] & = & \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}} \arrow[d, equal] & \times & \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{ind}} \arrow[d, shift right, "(r_P^G)_{\mathrm{cusp}}"'] & = & \prod\limits_{[\sigma]\in\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}/\sim} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[G,\sigma]} \arrow[d, equal] & \times & \prod\limits_{\substack{P\neq G \\ (L,\sigma)/\sim}} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[L,\sigma]} \arrow[d, shift right, "(r_P^G)_{[\sigma]}"'] & = & \prod\limits_{(L,\sigma)/\sim} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[L,\sigma]} \arrow[d, shift right, "(r_P^G)_{[\sigma]}"'] \\
\bigoplus\limits_{P\leq G} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L)_{\mathrm{cusp}} \arrow[u, shift right, "\mathcal{I}"'] & = & \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}} & \times & \prod\limits_{P\neq G} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L)_{\mathrm{cusp}} \arrow[u, shift right, "i_P^G"'] & = & \prod\limits_{[\sigma]\in\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)_{\mathrm{cusp}}/\sim} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[\sigma]} & \times & \prod\limits_{\substack{P\neq G \\ [\sigma]\in\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(L)_{\mathrm{cusp}}/\sim}} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L)_{[\sigma]} \arrow[u, shift right, "i_P^G"'] & = & \prod\limits_{\substack{P\leq G \\ [\sigma]\in\mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(L)_{\mathrm{cusp}}/\sim}} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(L)_{[\sigma]} \arrow[u, shift right, "i_P^G"']
\end{tikzcd}
$$

Relations entre les catégories des représentations en § 4

5 Descriptions du bloc principal

5.1. Bloc principal. Dans cette section, on suppose que G est un groupe réductif p-adique. En particulier la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ admet sa décomposition en blocs de Bernstein (§ 4)

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) = \prod_{(M,\sigma)/\sim} \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[M,\sigma]}.$$

On fixe dorénavant un tore maximal T de G. Alors comme ce qu'on a vu en § 4.2, $(T, \mathbf{1}) = (T, \mathbf{1}_T)$ est une paire cuspidale et la représentation triviale $\mathbf{1}_G$ de G appartient au bloc $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$. On dit alors ce bloc $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$ est le *bloc principal*.

5.2. Résultat principal. Le but de cette section est d'élaborer les identifications suivantes du bloc principal $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$ en § 5.1, principalement pour le groupe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$:

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G, I). \tag{5.2.1}$$

Ci-dessus I est un sous-groupe d'Iwahori de G. Voici quelques explications de la formule (5.2.1) :

(i) $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$ est une sous-catégorie de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$; ses objets sont les $(\pi, V) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ tels que $V = \mathbb{C}[G] \cdot V^I$ (par l'action de G via π).

(ii) $\mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G, I)$ est la catégorie des modules de l'algèbre d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(G, I) = (C_c(I\backslash G/I, \mathbb{C}), *)$ à droite.

(iii) L'équivalence $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G, I)$ est explicitement donnée par

$$\mathrm{Hom}_G(C_c(G/I, \mathbb{C}), \cdot) : \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} \rightleftarrows \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G, I) : (\cdot) \otimes_{\mathcal{H}(G,I)} C_c(G/I, \mathbb{C})$$

où l'action de G sur $C_c(G/I, \mathbb{C})$ est la translation à gauche l (cf. § 2.10).

5.3. Plan et stratégie de la démonstration de (5.2.1). La démonstration du résultat principal (5.2.1) s'appuie sur la notion du *pro-générateur* (générateur projectif) d'une catégorie et l'existence d'une isomorphisme $C_c(G/I) \simeq C_c^\infty(G/{}^\circ TU)$:

(i) On construira des isomorphismes explicits $C_c(G/I) \simeq C_c^\infty(G/{}^\circ TU) \simeq i_B^G(\mathrm{ind}_{{}^\circ T}^T \mathbf{1})$ dans $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$. (Voir §§ 5.9-5.11.)

(ii) Avec l'aide de (i) on montrera que $i_B^G(\mathrm{ind}_{{}^\circ T}^T \mathbf{1})$ est un pro-générateur du bloc principal $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$, que $C_c(G/I)$ engend la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$ et donc $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$. En particulier $C_c(G/I)$ est un pro-générateur de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$. Cette dernière catégorie est ainsi une catégorie abélienne stable par somme directe (ceci n'est pas évident à priori). (Voir §§ 5.13-5.15.)

(iii) Un résultat général est que si P est un pro-générateur de la catégorie abélienne $\mathcal{C}$ stable par somme directe, alors on aura une équlvalence $\mathcal{C} \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(P)$. (Voir § 5.12.)

(iv) On montrera que $\mathrm{End}_G(C_c(G/I)) \simeq \mathcal{H}(G, I)$ en tant qu'anneaux, donc (ii) et (iii) entraîneront les identifications désirées $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G, I)$.

5.4. L'algèbre d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(G, I)$ et sa base linéaire. [HKP10, § 1.2] Soit G un groupe réductif p-adique et soit I son sous-groupe d'Iwahori. On considère l'*algèbre d'Iwahori-Hecke*

$$\mathcal{H}(G, I) = (C_c(I\backslash G/I), *).$$

On a l'égalité des espaces vectoriels

$$\mathcal{H}(G, I) = C_c(I\backslash G/I) = \bigoplus_{x\in I\backslash G/I} \mathbb{C}\mathbf{1}_{IxI}.$$

5.5. Multiplication des fonctions caractéristiques. Soient H_1, H_2 deux sous-ensembles ouverts compacts d'un groupe unimodulaire G. Le produit convolé $\mathbf{1}_{H_1}*\mathbf{1}_{H_2} \in \mathcal{H}(G)$ est : (rappelons que dg est invariant à gauche)

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}_{H_1} * \mathbf{1}_{H_2})(x) &= \int_G \mathbf{1}_{H_1}(xg)\mathbf{1}_{H_2}(g^{-1})\mathrm{d}g = \int_G \mathbf{1}_{x^{-1}H_1\cap H_2^{-1}}(g)\mathrm{d}g \\ &= \mathrm{Vol}(x^{-1}H_1 \cap H_2^{-1}) = \mathrm{Vol}(H_1 \cap xH_2^{-1}) \quad (x \in G).\end{aligned}$$

On s'aperçoit alors que $\mathrm{Supp}(\mathbf{1}_{H_1}*\mathbf{1}_{H_2}) \subset H_1H_2$. Pour $x \in G$ tel que $(\mathbf{1}_{H_1}*\mathbf{1}_{H_2})(x) \neq 0$, on a donc $x \in H_1H_2$ et puis $x = x_1x_2$ où $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$, ainsi

$$(\mathbf{1}_{H_1} * \mathbf{1}_{H_2})(x) = \mathrm{Vol}(x_2^{-1}x_1^{-1}H_1 \cap H_2^{-1}) = \mathrm{Vol}(x_1^{-1}H_1 \cap x_2H_2^{-1}).$$

En général la restriction de $\mathbf{1}_{H_1} * \mathbf{1}_{H_2}$ à son support n'est pas constant, c'est-à-dire que $\mathbf{1}_{H_1} * \mathbf{1}_{H_2}$ n'est pas forcément une fonction caractéristique fois un constant.

Cas spéciaux. Dans les calculations, souvent $\mathbf{1}_{H_1} * \mathbf{1}_{H_2}$ est bien une fonction caractéristique fois un constant, grâce aux conditions supplémentaires sur H_1 et sur H_2. En tant qu'une préparation pour les calculations dans la suite, voici quelques exemples pour ces conditions supplémentaires :

(i) Si H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G, alors $\mathbf{1}_{H_1} * \mathbf{1}_{H_2} = \mathrm{Vol}(H_1 \cap H_2)\mathbf{1}_{H_1H_2}$.

(ii) Si $y \in G$, alors $\mathbf{1}_H * \mathbf{1}_{yH} = \mathbf{1}_{Hy} * \mathbf{1}_H = \mathrm{Vol}(H \cap yHy^{-1})\mathbf{1}_{HyH}$.

5.6. Descriptions de G/I et de $I\backslash G/I$ pour $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Rappelons que le sous-groupe d'Iwahori pour notre $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est

$$I = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix}.$$

On va donner des représentants explicites de G/I et de $I\backslash G/I$. Pour G/I, il s'agit de classifier les gI pour $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in G$; en considérant les deux cas $g_{11} \neq 0$

et $g_{11}=0$ et avec l'aide des opérations élémentaires des matrices, on peut montrer la décomposition suivante de G/I : $(\deg 0 := -\infty)$

$$G/I = \bigsqcup_{\substack{n_{11},n_{22}\in\mathbb{Z}\\ -\infty\leq \deg g_{21}\leq n_{22}}} \begin{pmatrix} p^{n_{11}} & 0 \\ g_{21} & p^{n_{22}} \end{pmatrix} I \sqcup \bigsqcup_{\substack{n_{12},n_{21}\in\mathbb{Z}\\ -\infty\leq \deg g_{22}\leq n_{21}-1}} \begin{pmatrix} 0 & p^{n_{12}} \\ p^{n_{21}} & g_{22} \end{pmatrix} I.$$

En s'appuyant sur la décomposition de G/I et en faisant des opérations élémantaires supplémentaires des matrices, on obtiendra la décomposition de $I\backslash G/I$:

$$I\backslash G/I = \bigsqcup_{n_{11},n_{22}\in\mathbb{Z}} I \begin{pmatrix} p^{n_{11}} & 0 \\ 0 & p^{n_{22}} \end{pmatrix} I \sqcup \bigsqcup_{n_{12},n_{21}\in\mathbb{Z}} I \begin{pmatrix} 0 & p^{n_{12}} \\ p^{n_{21}} & 0 \end{pmatrix} I.$$

5.7. Structure de $\mathcal{H}(G,I)$ pour $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. (cf. [Vig96, § I.3.14] ou [CMHL99, pp. 47-48]) D'après la décomposition ci-dessus de $I\backslash G/I$ ci-dessus, on voit que le *groupe de Weyl* $\widetilde{W} = I\backslash G/I$ est engendré par

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors l'algèbre $\mathcal{H}(G,I) = \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),I)$ est engendrée par $S=\mathbf{1}_{IsI}$, $T=\mathbf{1}_{ItI}$ et $T^{-1}=\mathbf{1}_{It^{-1}I}$ avec les relations de *type d'algèbre de Hecke affine* suivantes : (ici on normalise la mesure de Haar telle que $\mathrm{Vol}(I)=1$)

(i) $S*S=(p-1)S+p$;

(ii) $T*T^{-1}=T^{-1}*T=1$;

(iii) $T*S=S*T=1$.

Preuve de (i). On aimerait montrer la relation (i) pour illustrer la méthode générale. Comme $s^{-1}=s$, on trouve que

$$S*S = \sum_{z\in I\backslash G/I} \langle z|(s,s)\rangle \mathbf{1}_{IzI} \quad \text{où} \quad \langle z|(s,s)\rangle = \mathrm{Vol}(IsI\cap zIsI).$$

Il s'agit donc de calculer tous les $\langle z|(s,s)\rangle = \mathrm{Vol}(IsI\cap zIsI)$ pour $z\in I\backslash G/I$.

Pour décrire $IsI=\bigcup_{x\in I} xsI$, on peut montrer que pour $x=\begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12} \\ px_{21} & x_{22}^* \end{pmatrix}\in I$, la classe $xsI\in G/I$ est

$$xsI = \begin{cases} sI & \text{si } \mathrm{val}(x_{12})\geq 1 \text{ ;} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_{22}^*/x_{12}^* & 1 \end{pmatrix} I & \text{si } \mathrm{val}(x_{12})=0. \end{cases}$$

On en obtient :

$$IsI = sI \sqcup \bigsqcup_{1\leq j\leq p-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix} I$$

Pour tout $z \in I\backslash G/I$, d'après la classification de $I\backslash G/I$, soit $z = \begin{pmatrix} p^{n_{11}} & 0 \\ 0 & p^{n_{22}} \end{pmatrix}$, soit $z = \begin{pmatrix} 0 & p^{n_{12}} \\ p^{n_{21}} & 0 \end{pmatrix}$. En empruntant la description de IsI qu'on vient de voir, $zIsI$ est alors :

$$\begin{cases} \text{si } z = \begin{pmatrix} p^{n_{11}} & 0 \\ 0 & p^{n_{22}} \end{pmatrix} \ : \ zIsI = \begin{pmatrix} 0 & p^{n_{11}} \\ p^{n_{22}} & 0 \end{pmatrix} I \sqcup \displaystyle\bigsqcup_{1\leq j\leq p-1} \begin{pmatrix} p^{n_{11}} & 0 \\ p^{n_{22}}j & p^{n_{22}} \end{pmatrix} I \ ; \\ \text{si } z = \begin{pmatrix} 0 & p^{n_{12}} \\ p^{n_{21}} & 0 \end{pmatrix} \ : \ zIsI = \displaystyle\bigsqcup_{0\leq j\leq p-1} \begin{pmatrix} p^{n_{12}} & 0 \\ p^{n_{21}}j & p^{n_{21}} \end{pmatrix} I. \end{cases}$$

Compte tenu des discussions ci-dessus, il est maintenant clair que $\langle \mathrm{id}|(s,s)\rangle = p\mathrm{Vol}(I)(= \mathrm{Vol}(IsI))$, que $\langle s|(s,s)\rangle = (p-1)\mathrm{Vol}(I)$, et que $\langle z|(s,s)\rangle = 0$ pour les autres $z \in I\backslash G/I$, d'où l'égalité (i).

5.8. Structure de $\mathcal{H}(G,I)$ pour $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. (cf. [Vig96, § I.3.14] ou [CMHL99, pp. 47-48]) Pour $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, on a On a la *décomposition de Bruhat* $I\backslash G/I \simeq \widetilde{W}$, où le *groupe de Weyl* $\widetilde{W} = N_G(T)/(I \cap N_G(T))$ admet ses gémérateurs $\{s_1, \cdots, s_{n-1}, t\}$ où s_j pour $1 \leq j \leq n-1$ s'obtient en échangeant les j-ième et les $(j+1)$-ième rangées de la matrice d'identité id_n, et où

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ p & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{et} \quad s_0 := ts_1t^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & & p^{-1} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ p & & & & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\langle s_1, \cdots, s_{n-1}\rangle \simeq \mathfrak{S}_n$ et que $ts_jt^{-1} = s_{j-1}$ (j mod n).

On définit une *fonction de longeur* $\ell : \widetilde{W} \to \mathbb{N}$ comme suivant : pour $x \in \widetilde{W}$, on décompose x en produit des générateurs $s_1, \cdots, s_{n-1}, s_0, t$ de $\widetilde{W}$ et on dénote par $r \in \mathbb{N}$ le nombre de ces générateurs appartenant à $\{s_1, \cdots, s_{n-1}, s_0\}$; alors on définit $\ell(x)$ comme le plus petit possible r.

Il se trouve alors qu'on a des relations dans $\mathcal{H}(G,I) = \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ suivantes :

— $\mathbf{1}_{Is_jI} * \mathbf{1}_{Is_jI} = (p-1)\mathbf{1}_{Is_jI} + p\mathbf{1}_I$ $(0 \leq j \leq n-1)$;

— $\mathbf{1}_{IxI} * \mathbf{1}_{IyI} = \mathbf{1}_{IxyI}$ si $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$;

— $\mathbf{1}_{ItI} * \mathbf{1}_{Is_jI} = \mathbf{1}_{Is_{j+1}I} * \mathbf{1}_{ItI}$ (j mod n).

Identification avec l'algèbre de Hecke affine $\mathcal{H}(n,p)$. On peut ainsi extraire la structure abstraite de l'algèbre $\mathcal{H}(G,I)$ en introduisant l'*algèbre de Hecke affine* $\mathcal{H}(n,p)$ qui est l'algèbre sur $\mathbb{Z}$ engendrée par les symbols $s_1, \cdots, s_{n-1}, t, t^{-1}$ avec les relations suivantes :

— $s_j^2 = (p-1)s_j + p$;

— $s_j s_k = s_k s_j$ si $|j-k| > 1$;

— $s_j s_{j+1} s_j = s_{j+1} s_j s_{j+1}$;

— $tt^{-1} = t^{-1}t = 1$;

— $ts_j = s_j t$;

— $t^2 s_1 = s_{n-1} t^2$.

Alors on a un isomorphisme d'algèbres sur $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{H}(G,I) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}(n,p), \quad \mathbf{1}_{IuI} \mapsto 1 \otimes u \ \ (u = s_1, \cdots, s_{n-1}, t).$$

Inversibilité des éléments de base. Grâce aux relations ci-dessus, pour tout $x \in I\backslash G/I$, l'élément de base $\mathbf{1}_{IxI} \in \mathcal{H}(G,I)$ admet son inverse multiplicative dans $\mathcal{H}(G,I)$. (On montre d'abord que $\mathbf{1}_{IuI} \in \mathcal{H}(G,I)^\times$ pour $u = s_1, \cdots, s_{n-1}, t$, puis on constate que $I\backslash G/I = \widetilde{W}$ est engendré par $s_1, \cdots, s_{n-1}, t$.)

LES ISOMORPHISMES $C_c(G/I) \simeq C_c^\infty(G/{}^\circ TU) \simeq i_B^G(\mathrm{ind}_{{}^\circ T}^T \mathbf{1})$

5.9. L'identification $C_c(G/I) \simeq C_c(G/{}^\circ TU)$. La notion de l'*immeuble de Bruhat-Tits* facilite l'explication de l'existence d'un isomorphisme $C_c(G/I) \simeq C_c(G/{}^\circ TU)$ de G-modules. Comme on n'entrera pas à la théorie des immeubles de Bruhat-Tits, on va seulement élaborer cette stratégie pour le cas $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Malgré cela, il semble attirant de donner auparavant l'idée générale. Pour un groupe réductif p-adique G, afin de montrer $C_c(G/I) \simeq C_c(G/{}^\circ TU)$, on trouve d'abord une suite des groupes d'Iwahori $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $I_0 = I$ et telle que « $I_j \to {}^\circ TU$ quand $j \to +\infty$ ». Comme tous les G-modules $C_c(G/I_j)$ sont isomorphes, on « laisse $j \to +\infty$ » et on en obtiendra que « $C_c(G/I) \simeq \lim\limits_{j\to+\infty} C_c(G/I_j) = C_c(G/{}^\circ TU)$ ».

Le cas $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On va montrer que

$$(\cdot) * \mathbf{1}_{IU} : C_c(G/I) \xrightarrow{\sim} C_c(G/{}^\circ TU)$$

est un isomorphisme de G-modules, où les sous-groupes apparaissant dans l'isomorphisme voulu sont comme d'habitude :

$$I = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix}, \quad {}^\circ T = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En suivant l'idée générale ci-dessus, on considère une suite de sous-groupes d'Iwahori $I_0(=I), I_1, I_2, \cdots$ de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ définis par

$$I_m = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & p^{-m}\mathbb{Z}_p \\ p^{m+1}\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix}.$$

Ces sous-groupes d'Iwahori $\{I_m\}$ sont conjugués par éléments de G : explicitement, pour $w = \begin{pmatrix} 0 & p^s \\ p^r & 0 \end{pmatrix}$, $wI_m w^{-1} = I_{m+d}$ si et seulement si $r - s = 2m + d + 1$. Par contre on peut aussi observer que

$$\lim_{m\to\infty} I_m = \lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & p^{-m}\mathbb{Z}_p \\ p^{m+1}\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix} = {}^\circ TU.$$

Afin de montrer l'isomrophisme voulu, on considère le diagramme commutatif suivant : $(m \geq 0, \lambda_m \in \mathbb{C}^\times)$

$$\begin{tikzcd} C_c(G/I) \arrow[r, "*\mathbf{1}_{IU}"] \arrow[d, "*\mathbf{1}_{II_m}"'] & C_c^\infty(G/{}^\circ TU) \\ C_c(G/I_m) \arrow[ur, "*\lambda_m \mathbf{1}_{I_m U}"'] & \end{tikzcd}$$

On se convainc que le diagramme commutatif ci-dessus peut également s'écrire comme

$$\begin{tikzcd} C_c(G/I) \arrow[r, "*\mathbf{1}_{U}"] \arrow[d, "*\mathbf{1}_{U_{-m}}"'] & C_c^\infty(G/{}^\circ TU) \\ C_c(G/I_m) \arrow[ur, "*\lambda_m \mathbf{1}_{U}"'] & \end{tikzcd}$$

Ici $U_{-m} = \begin{pmatrix} 1 & p^{-m}\mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U \cap I_m \leq U$. (En plus, λ_m peut être changé mais reste en $\mathbb{C}^\times$; en fait pour notre but on peut même « prendre $\lambda_m = 1$ ».)

On va maintenant montrer que $*\mathbf{1}_U : C_c(G/I) \to C_c^\infty(G/{}^\circ TU)$ est un isomorphisme. On rappelle d'abord que

$$(f * \mathbf{1}_U)(x) = \int_U f(xu)\mathrm{d}u \quad (f \in C_c(G/I), x \in G).$$

(i) On admet ici le fait que pour tout $m \geq 0$, $*\mathbf{1}_{U_{-m}} : C_c(G/I) \to C_c(G/I_m)$, ou bien $*\mathbf{1}_{II_m} : C_c(G/I) \to C_c(G/I_m)$, est un isomorphisme. Ceci sera justifié en § 5.10.

(ii) $*\mathbf{1}_U$ est surjective : on reprend les sous-groupes considérés en preuve de § 4.8 :

$$J_m = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbb{Z}_p & p^m\mathbb{Z}_p \\ p^m\mathbb{Z}_p & 1 + p^m\mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \quad (m \geq 0)$$

et on rappelle que $\{J_m\}$ est une base ouvert du voisinage de $1 \in G$. Donc il suffit de montrer que les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{J_m {}^\circ TU}$ appartiennent à l'image $C_c(G/I) * \mathbf{1}_U$ de l'application $*\mathbf{1}_U$. Mais comme $\mathbf{1}_{J_m {}^\circ TU} = \mathbf{1}_{I_{m-1}U} = \mathbf{1}_{I_{m-1}} * \mathbf{1}_U$ (peut être à un scalaire multiplicatif non nul près mais cela n'abîmera pas notre but), le diagramme commutatif ci-dessus et (i) impliquent que $\mathbf{1}_{J_m {}^\circ TU} \in C_c(G/I) * \mathbf{1}_U$, d'où la sujectivité voulue.

(iii) $*\mathbf{1}_U$ est injective : soit $f \in C_c(G/I)$ telle que $*\mathbf{1}_U = 0$. La fonction f étant à support compact, on sait qu'il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$(f * \mathbf{1}_U)(x) = \int_{U_{-m}} f(xu)\mathrm{d}u \quad (f \in C_c(G/I), x \in G).$$

On en obtient donc $0 = f * \mathbf{1}_U = f * \mathbf{1}_{U_{-m}}$. Compte tenu de (i), on a $f = 0$.

Afin de pouvoir conclure la démonstration de l'isomorphisme $*\mathbf{1}_U : C_c(G/I) \to C_c^\infty(G/{}^\circ TU)$, il reste donc de justifier l'isomorphisme $*\mathbf{1}_{II_m} : C_c(G/I) \to C_c(G/I_m)$ en (i). On va justifier ce dernier isomorphisme en paragraphe suivant.

5.10. L'isomorphisme $*\mathbf{1}_{II'} : C_c(G/I) \simeq C_c(G/I')$ pour deux sous-groupes d'Iwahori I et I'. Soit I un sous-groupe d'Iwahori de G. Un autre sous-groupe d'Iwahori I' de G n'est autre qu'un conjugué de I par un élément de G, disons $I' = wIw^{-1}$ pour un $w \in G$. Le diagramme commutatif suivant fournit un isomorphisme $C_c(G/I) \simeq C_c(G/I')$ des G-modules, grâce à l'inversibilité de $\mathbf{1}_{IwI}$ dans $\mathcal{H}(G, I)$:

$$\begin{tikzcd} C_c(G/I) \arrow[r, "*\mathbf{1}_{II'}"] \arrow[dr, "*\mathbf{1}_{IwI}"'] & C_c(G/I') \arrow[d, "r_{w^{-1}}"] \\ & C_c(G/I) \end{tikzcd}$$

Exemple pour $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On considère les deux sous-groupes d'Iwahori suivants de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$I = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & p^{-1}\mathbb{Z}_p \\ p^2\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix}.$$

En effet, $I_1 = wIw^{-1}$ où on choisit $w \in G$ comme $w = \begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

Compte tenu des discussions ci-dessus, on a une paire d'inverses :

$$(\cdot) * \mathbf{1}_{II_1} : C_c(G/I) \rightleftarrows C_c(G/I_1) : r_{w^{-1}}(\cdot) * (\mathbf{1}_{IwI})^{-1}.$$

Pour avoir plus d'impressions sur cette identification, essayons maintenant de calculer $\mathbf{1}_I * \mathbf{1}_{II_1} \in C_c(G/I_1)$ et calculer le $f \in C_c(G/I)$ telle que $f * \mathbf{1}_{II_1} = \mathbf{1}_{I_1}$. Comme avant, on normalise la mesure de Haar telle que $\mathrm{Vol}(I) = 1$.

(i) D'abord,

$$\mathbf{1}_I * \mathbf{1}_{II_1} = \mathbf{1}_I * (\mathrm{Vol}(I \cap I_1)^{-1}\mathbf{1}_I * \mathbf{1}_{I_1}) = \mathrm{Vol}(I \cap I_1)^{-1}\mathbf{1}_I * \mathbf{1}_{I_1} = \mathbf{1}_{II_1},$$

d'après $\mathbf{1}_{II_1} = \mathrm{Vol}(I \cap I_1)^{-1}\mathbf{1}_I * \mathbf{1}_{I_1}$ et $\mathbf{1}_I * \mathbf{1}_I = \mathbf{1}_I$. On peut par contre écrire $\mathbf{1}_{II_1}$ par rapport à une base « canonique » de G/I_1 : parallèlement au cas G/I, on a

$$G/I_1 = \bigsqcup_{\substack{n_{11}, n_{22} \in \mathbb{Z} \\ -\infty \leq \deg g_{21} \leq n_{22}+1}} \begin{pmatrix} p^{n_{11}} & 0 \\ g_{21} & p^{n_{22}} \end{pmatrix} I_1 \sqcup \bigsqcup_{\substack{n_{12}, n_{21} \in \mathbb{Z} \\ -\infty \leq \deg g_{22} \leq n_{21}-2}} \begin{pmatrix} 0 & p^{n_{12}} \\ p^{n_{21}} & g_{22} \end{pmatrix} I_1.$$

En considérant $II_1 = \bigcup_{x \in I} xI_1$, on montera que

$$\mathbf{1}_I * \mathbf{1}_{II_1} = \mathbf{1}_{II_1} = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{1}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ jp & 1 \end{pmatrix} I_1}.$$

(ii) Ensuite on va déterminer la $f \in C_c(G/I)$ telle que $f * \mathbf{1}_{II_1} = \mathbf{1}_{I_1}$. On sait que $f = r_{w^{-1}}(\mathbf{1}_{I_1}) * (\mathbf{1}_{IwI})^{-1}$, mais on peut en même temps donner une autre expression provenant des résultats en (i) : on observe que

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{I_1} * \mathbf{1}_{II_1} &= \mathbf{1}_{I_1} * \left(\mathbf{1}_{I_1} + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{1}_{g_j I_1} \right) \quad \text{où} \quad g_j := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ jp & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Vol}(I_1)\mathbf{1}_{I_1} + \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{Vol}(I_1 \cap g_j I_1 g_j^{-1}) \mathbf{1}_{I_1 g_j I_1} \\
&= \mathrm{Vol}(I_1)\mathbf{1}_{I_1} + \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{Vol}(I_1)\mathbf{1}_{I_1 w I_1} \quad \begin{pmatrix} w \text{ est au début de cet exemple ;} \\ g_j I_1 g_j^{-1} \supset I_1,\ I_1 g_j I_1 = I_1 w I_1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{1}_{I_1} + (p-1)\mathbf{1}_{wII_1} \qquad (wIw^{-1} = I_1,\ \mathrm{Vol}(I_1) = \mathrm{Vol}(I) = 1) \\
&= \mathbf{1}_{I_1} + (p-1)\mathbf{1}_{wI} * \mathbf{1}_{II_1} \qquad (\mathbf{1}_I * \mathbf{1}_{II_1} = \mathbf{1}_{II_1},\ \text{cf. (i)}).
\end{aligned}$$

De l'autre côté,

$$\mathbf{1}_{I_1} * \mathbf{1}_{II_1} = \mathbf{1}_{I_1} * (\mathbf{1}_I * \mathbf{1}_{II_1}) = \mathrm{Vol}(I_1 \cap I)\mathbf{1}_{I_1 I} * \mathbf{1}_{II_1} = p^{-1}\mathbf{1}_{I_1 I} * \mathbf{1}_{II_1}.$$

On en obtient que

$$\mathbf{1}_{I_1} = \mathbf{1}_{I_1} * \mathbf{1}_{II_1} - (p-1)\mathbf{1}_{wI} * \mathbf{1}_{II_1} = p^{-1}\mathbf{1}_{I_1 I} * \mathbf{1}_{II_1} - (p-1)\mathbf{1}_{wI} * \mathbf{1}_{II_1}.$$

La solution $f \in C_c(G/I)$ de l'équation $f * \mathbf{1}_{II_1} = \mathbf{1}_{I_1}$ est ainsi

$$\begin{aligned}
f &= p^{-1}\mathbf{1}_{I_1 I} - (p-1)\mathbf{1}_{wI} \\
&= p^{-1}\left(\mathbf{1}_I + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{1}_{\begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ p & j \end{pmatrix} I} \right) - (p-1)\mathbf{1}_{\begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ p & 0 \end{pmatrix} I}.
\end{aligned}$$

5.11. L'identification $C_c(G/{}^\circ TU) \simeq i_B^G(\mathrm{ind}_{{}^\circ T}^T \mathbf{1})$. [HKP10, § 1.5] Intiutivement, cet isomorphisme voulu est donné par : $(B = TU)$

$$i_B^G(\mathrm{ind}_{{}^\circ T}^T \mathbf{1}) \simeq C_c^\infty(G) \otimes_{C_c^\infty(TU)} C_c(T/{}^\circ T) \simeq C_c^\infty(G/{}^\circ TU).$$

On peut par contre donner un isomorphisme explicit entre $C_c(G/{}^\circ TU)$ et $i_B^G(\mathrm{ind}_{{}^\circ T}^T \mathbf{1})$:

$$\begin{aligned}
\Phi : \quad C_c(G/{}^\circ TU) &\xrightarrow{\sim} i_B^G(\mathrm{ind}_{{}^\circ T}^T \mathbf{1}) \\
f &\longmapsto [\Phi(f) : g \in G \mapsto \sum_{t \in T/{}^\circ T} \delta_B(t)^{1/2} f(g^{-1}t^{-1})\widehat{t} \in C_c(T/{}^\circ T)].
\end{aligned}$$

Ici, pour $t \in T/{}^\circ T$, $\widehat{t}$ est la fonction sur $T/{}^\circ T$ définie par $\widehat{t}(t) = 1$ et $\widehat{t}(t') = 0$ si $t' \neq t$. Voici quelques explications :

Description de $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$. Tout d'abord,

$$\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1} = C_c(T/{}^\circ T) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(T)$$

où l'action de T est la translation à gauche l (pour $t \in T$ et pour $f \in C_c(T/{}^\circ T)$, $t \cdot f = f(t^{-1}(\cdot))$). Alors par définition et compte tenu de la décomposition de Levi $B = TU$, l'objet $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1}) \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ se trouve

$$\begin{aligned} i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1}) &= \mathrm{Ind}_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1} \otimes \delta_B^{-1/2}) \\ &= \left\{ \varphi : G \to C_c(T/{}^\circ T) \,\middle|\, \begin{array}{l} \varphi \text{ est localement constante ;} \\ \varphi(tug) = \delta_B(t)^{-1/2}(l_t \cdot \varphi)(g) \ (t \in T, u \in U, g \in G) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

où G agit sur $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$ par la translation à droite r (pour $g \in G$ et pour $\varphi \in i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$, $g \cdot \varphi = \varphi((\cdot)g)$).

Φ est un isomorphisme dans $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$. Il s'agit de montrer que Φ est bien définie et admet une inverse. Pour $f \in C_c(G/{}^\circ TU)$, $\varphi := \Phi(f)$ appartient à $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$ car pour tout $t_0 \in T$ et pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \varphi(t_0 g) &= \sum_{t \in T/{}^\circ T} \delta_B(t)^{1/2} f(g^{-1} t_0^{-1} t^{-1}) \widehat{t} \\ &= \sum_{t \in T/{}^\circ T} \delta_B(t_0 t)^{1/2} \delta_B(t_0)^{-1/2} f(g^{-1}(t_0 t)^{-1}) \widehat{t_0^{-1} t_0 t} \\ &= \sum_{t' \in T/{}^\circ T} \delta_B(t')^{1/2} \delta_B(t_0)^{-1/2} f(g^{-1}(t')^{-1}) \widehat{t_0^{-1} t'} \qquad (t' = t_0 t) \\ &= \delta_B(t_0)^{-1/2}(l_{t_0} \cdot \varphi)(g). \end{aligned}$$

D'autre part, si on commence par $\phi \in i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$, alors on définit $f : G \to \mathbb{C}$ en résolvant l'équation $\Phi(f) = \varphi$, plus précisément

$$f(g) = \delta_B(t)^{-1/2} \varphi(t^{-1} g^{-1})(t) \in \mathbb{C} \quad (g \in G, t \in T/{}^\circ T).$$

On peut montrer que la formule de f ci-dessus ne dépend pas du choix de $t \in T/{}^\circ T$. Cette fonction f est en fait appartient à $C_c^\infty(G/{}^\circ TU)$, l'invariance de f par translation à droite par ${}^\circ TU = U {}^\circ T$ (${}^\circ T$ normalise U) provenant du calcul suivant : pour tous $g \in G, t^* \in {}^\circ T$ et $u \in U$,

$$\begin{aligned} f(gut^*) &= \delta_B(t)^{-1/2} \varphi(t^{-1}(t^*)^{-1} u^{-1} g)(t) \\ &= \delta_B(t)^{-1/2} \varphi(t^{-1}(t^*)^{-1} g)(t) \\ &= \delta_B(t')^{-1/2} \varphi((t')^{-1} g)(t') = f(g) \qquad (t' = t^* t \in T/{}^\circ T). \end{aligned}$$

5.12. Généralités sur les pro-générateurs. [Ren10, § A.VIII] Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne stable par somme directe. Soit X un objet de $\mathcal{A}$. On Considère le foncteur

$$F_X := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \cdot) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Mod}.$$

On dit que X est *projectif* si F_X est exact, que X est un *générateur* si F_X est fidèle (c'est-à-dire que pour tous $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_X(X_1), F_X(X_2))$), que X est un *pro-générateur* si X est un générateur projectif.

Soit X un objet projectif de $\mathcal{A}$. Alors X est un pro-générateur si (et seulement si) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \neq 0$ pour tout $0 \neq Y \in \mathcal{A}$.

Soit P un pro-générateur de $\mathcal{A}$ tel que F_P préserve la somme directe. Alors on a une équivalence de catégories

$$F_P = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot) : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Mod}\text{-}\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P).$$

Dans ce cas, tous les objets de $\mathcal{A}$ peuvent être obtenus à partir de P par sommes directes et par quotients.

5.13. La projectivité de $C_c(G/I)$ dans $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$. (cf. [Ren10, § IV.1.6]) Il s'agit de vérifier que le foncteur $\mathrm{Hom}_G(C_c(G/I), \cdot)$ est exact. Comme $C_c(G/I) \simeq \mathrm{ind}_I^G(\mathbf{1})$ (§ 2.17), d'après l'adjonction $(\mathrm{ind}_I^G, \mathrm{Res}_I^G)$ (§ 2.18, I ouvert compact) on a l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_G(C_c(G/I), \cdot) \simeq \mathrm{Hom}_I(\mathbf{1}_I, \mathrm{Res}_I^G(\cdot))$. I étant compact, la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(I)$ est semi-simple (§ 2.15), donc le foncetur $\mathrm{Hom}_I(\mathbf{1}_I, \cdot)$ est exact ($\mathbf{1}_I$ irréductible). Enfin comme Res_I^G est exact, on en conclut que le foncteur $\mathrm{Hom}_G(C_c(G/I), \cdot)$ est exact, d'où la projectivité de $C_c(G/I)$.

5.14. Le pro-générateur $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$ du bloc principal. On montre d'abord que $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$ est un objet de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$: remarquons auparavant que i_B^G envoie les objets de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(T)_{[\mathbf{1}_T]}$ vers des objets de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$ (§ 4.14, cf. aussi (iii) de § 4.17). Par contre on a $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(T)_{[\mathbf{1}_T]} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(T)_{(\mathbf{1}_{\circ T})}$ (§ 4.13). Ainsi il suffit de montrer que $\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1} \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(T)_{(\mathbf{1}_{\circ T})}$. Comme $\mathrm{Res}_{\circ T} \mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1} = \mathrm{Res}_{\circ T} \mathbb{C}[T/{}^\circ T]$ est une somme directe de la représentation triviale $\mathbf{1}_{\circ T}$ de ${}^\circ T$, il est clair que $\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1}$ appartient à $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(T)_{(\mathbf{1}_{\circ T})}$.

$i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$ est un progénérateur de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$. D'abord $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$ est projectif car $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1}) \simeq C_c^\infty(G/{}^\circ TU) \simeq C_c(G/I)$ (§ 5.9 et § 5.11) et car $C_c(G/I)$ est projectif (§ 5.13). Donc il reste de montrer que $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$ est un générateur de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$.

Compte tenu des généralités en § 5.12, il suffit de montrer que pour tout $0 \neq Y \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$ on a $\mathrm{Hom}_G(P_{[T,\mathbf{1}]}, Y) \neq 0$.

Soit $0 \neq Y \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$ et on voudrait que $\mathrm{Hom}_G(i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1}), Y)$ ne soit pas 0. On fixe un sous-quotient irréductible $W = V/V'$ de Y ($V' \subset V \subset Y$). $i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1})$ étant projectif, il suffit alors de montrer que $\mathrm{Hom}_G(i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1}), W) \neq 0$ pour que $\mathrm{Hom}_G(i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1}), Y) \neq 0$.

Afin de montrer que $\mathrm{Hom}_G(i_B^G(\mathrm{ind}_{\circ T}^T \mathbf{1}), W) \neq 0$, observons d'abord que $W \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$ car Y l'est. Remarquons aussi que W est admissible (i.e. $\dim_{\mathbb{C}} W^H < +\infty$

pour tout sous-groupe ouvert H de G) et donc $\widetilde{\widetilde{W}} \simeq W \simeq \widetilde{W}$ (cf. [Ren10, § III.1.7]), cela résulte du fait que W s'injecte dans un $i_P^G(\sigma)$ (où $[P, \sigma] = [T, \mathbf{1}]$) et que $i_P^G(\sigma)$ est admissible. Ensuite on peut supposer que $\widetilde{W} \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]} \cap \mathsf{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ s'injecte dans un $i_B^G(\chi^{-1})$ où χ est un caractère non ramifié de T. Par dualité on a $i_B^G(\chi) \twoheadrightarrow W$. Comme $\mathrm{ind}_{^\circ T}^T \mathbf{1} \twoheadrightarrow \chi$, on a une surjection $t_B^G(\mathrm{ind}_{^\circ T}^T \mathbf{1}) \twoheadrightarrow W$, d'où $\mathrm{Hom}_G(i_B^G(\mathrm{ind}_{^\circ T}^T \mathbf{1}), W) \neq 0$.

5.15. Le pro-générateur $C_c(G/I)$ de la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$ et l'égalité $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$. Tout d'abord $C_c(G/I)$ est un objet de la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$: G/I étant discrète (le sous-groupe d'Iwahori I est ouvert dans G), tout élément f de $C_c(G/I)$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^{r} a_j \mathbf{1}_{g_j I} \quad (r \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{C},\ g_j \in G) \\ &= \sum_{j=1}^{r} a_j g_j \cdot \mathbf{1}_I \in \mathbb{C}[G] \cdot C_c(G/I)^I \quad (\mathbf{1}_I \in C_c(I\backslash G/I) = C_c(G/I)^I). \end{aligned}$$

D'ailleurs, $C_c(G/I)$ est un générateur de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$. Compte tenu de la définition de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$, $C_c(G/I)$ est bien un générateur de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$: en effet, pour toute $V \in \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$, on a $V = \mathbb{C}[G] \cdot V^I = C_c(G/I) \cdot V^I$ parce que l'action de I sur V^I est triviale.

Comme $C_c(G/I)$ est un générateur de $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$, d'après § 5.14 on a l'égalité $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]}$. Cette dernière égalité implique que $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$ est une catégorie abélienne stable par somme directe et que $C_c(G/I) \simeq i_B^G(\mathrm{ind}_{^\circ T}^T \mathbf{1})$ (§ 5.9 et § 5.11) est un pro-générateur de la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$.

5.16. L'équivalence de catégories $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G,I)$ et le théorème de Borel. Tout d'abord $C_c(G/I)$ est un objet de la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$: G/I étant discrète (le sous-groupe d'Iwahori I est ouvert dans G), tout élément f de $C_c(G/I)$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^{r} a_j \mathbf{1}_{g_j I} \quad (r \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{C},\ g_j \in G) \\ &= \sum_{j=1}^{r} a_j g_j \cdot \mathbf{1}_I \in \mathbb{C}[G] \cdot C_c(G/I)^I \quad (\mathbf{1}_I \in C_c(I\backslash G/I) = C_c(G/I)^I). \end{aligned}$$

Ensuite on a l'isomorphisme d'anneaux (d'algèbres sur $\mathbb{C}$ même)

$$\mathrm{ev}_{\mathbf{1}_I} : \mathrm{End}_G(C_c(G/I)) \rightleftarrows C_c(I\backslash G/I) = \mathcal{H}(G,I) : (\cdot) * \mathbf{1}_I,$$

où $\mathrm{ev}_{\mathbf{1}_I}$ est l'évaluation à $\mathbf{1}_I$, i.e. $\mathrm{ev}_{\mathbf{1}_I}(\varphi) = \varphi(\mathbf{1}_I)$.

Comme $C_c(G/I)$ est un pro-générateur de la catégorie $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)}$ qui est une catégorie abélienne stable par somme directe (§ 5.15), compte tenu de § 5.12, on a une équivalence de catégories

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathrm{End}_G(C_c(G/I)) \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G,I).$$

On remarque, par contre, que l'équivalence de catégories $\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G,I)$ ci-dessus est inclue dans l'énoncé du *théorème de Borel* [Bor76].

On aboutit finalement aux identifications désirées du bloc principal :

$$\mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{[T,\mathbf{1}]} = \mathsf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)_{(I)} \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{H}(G,I).$$

Références

[Bor76] A. Borel, *Admissible Representations of a Semi-Simple Group over a Local Field with Vectors Fixed under an Iwahori Subgroup*, Inventiones math. 35, 233-259 (1976)

[CMHL99] I. Cherednik, Ya. Markov, R. Howe et G. Lusztig, Iwahori-Hecke Algebras and their Representation Theory, Lect. Notes in Math. 1804, Springer-Verlag (1999)

[HKP10] T. J. Haines, R. E. Kottwitz et A. Prasad, *Iwahori-Hecke algebras*, J. Ramanujan Math. Soc. 25, No.2 (2010), 113-145. Disponible sur le page web du premier auteur (http://www.math.umd.edu/~tjh/)

[Ren10] D. Renard, Représentations des groupes réductifs p-adiques, Cours Spécialisés n° 17, Soc. Math. de France (2010)

[Séc13] V. Sécherre, *The Bernstein decomposition for smooth complex representations of GL(n,F)*, dans p-adic representations, theta correspondence and the Langlands-Shahidi method, Science Press (2013). Disponible sur le page web de l'auteur (http://lmv.math.cnrs.fr/annuaire/vincent-secherre/)

[Vig96] M.-F. Vignéras, Représentations ℓ-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $\ell \neq p$, Prog. in Math. 137, Birkhäuser (1996)