

La correspondance de McKay
Mémoire de master

Tristan BOZEC

Encadré par Jean-François DAT

Paris 6, ENS
Septembre 2009

1 Introduction

Ce mémoire a pour but d'exposer une observation de McKay et d'en donner une explication d'Ito et Nakamura développée dans [IN99]. L'observation paraît a priori mystrieuse : si l'on part d'une certaine classe de groupes finis et qu'on leur associe un diagramme de Dynkin de deux manières différentes, l'une basée sur la géométrie algébrique, l'autre sur la théorie des représentations, on aboutit au même diagramme.

S'il suffit d'utiliser des éclatements pour remarquer la correspondance de McKay du côté de la géométrie, l'astuce de l'article [IN99] consiste à utiliser des schémas dits de Hilbert pour désingulariser les schémas qui nous intéressent - ceux qui sont naturellement reliés aux groupes finis considérés. Ce nouveau point de vue permet d'expliquer l'observation de McKay en associant des représentations de groupe aux éléments du lieu exceptionnel de cette nouvelle désingularisation.

Ce mémoire est bien plus axé sur la géométrie algébrique que sur la théorie des représentations dont on n'utilise que des résultats basiques, qui peuvent tous se trouver dans [Ser71]. Si j'ai considéré admis les résultats de géométrie algébrique vus en cours de Master 2, et plus généralement nombre de résultats donnés dans [Har77], j'ai essayé tant que possible de démontrer les résultats classiques que j'utilisais (pas nécessairement propres à la théorie développée), mais que je n'avais pas vus auparavant, et dont les preuves sont souvent éludées dans la littérature (par exemple les résultats portant sur les groupes en géométrie algébrique). D'un autre côté, je n'ai pu donner toutes les démonstrations liées aux schémas de Hilbert : j'ai préféré démontrer les résultats utilisés dans [IN99], spécifiques au sujet du mémoire, plutôt que de recopier des preuves très longues sur des résultats généraux, qui sont données dans [FGI⁺05].

Table des matières

1	Introduction	2
2	Origine de la correspondance	4
2.1	Étude des sous-groupes finis de $Sl_2(\mathbb{C})$	4
2.2	Le point de vue des représentations	4
2.3	Le point de vue des singularités	7
3	Quelques notions sur les schémas de Hilbert	13
3.1	Généralités	13
3.2	Le cas du plan	16
4	La correspondance de McKay via les schémas de Hilbert	22
4.1	Désingularisation	22
4.2	Le théorème	25
5	Conclusion	31

2 Origine de la correspondance

On présente dans cette section la correspondance en elle-même, que l'on cherchera à expliquer dans les parties suivantes.

L'idée est d'associer de deux manières un diagramme de Dynkin à un sous-groupe fini de $Sl_2(\mathbb{C})$.

2.1 Étude des sous-groupes finis de $Sl_2(\mathbb{C})$

On va utiliser quelques résultats classiques de classification des groupes linéaires à isomorphisme près.

Proposition 2.1. *Tout sous-groupe fini de $Sl_2(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $SU_2(\mathbb{C})$.*

Proposition 2.2. *On a un isomorphisme de $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ sur $SO_3(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Par exemple en utilisant l'isomorphisme entre $SU_2(\mathbb{C})$ et le groupe des quaternions de norme 1. \square

Proposition 2.3. *Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ sont exactement les groupes cycliques, diédraux, \mathfrak{A}_4 (groupe du tétraèdre), \mathfrak{S}_4 (groupe de l'octaèdre) et \mathfrak{A}_5 (groupe de l'isocaèdre).*

S'ensuit la classification suivante :

Théorème 2.4. *À isomorphisme près, les sous-groupes finis de $Sl_2(\mathbb{C})$ sont exactement, pour $n \geq 0$, les groupes cycliques \mathbb{Z}_n à n éléments, les groupes binaires diédraux \mathbb{D}_n à $4n$ éléments, le groupe binaire tétraédral \mathbb{T} à 24 éléments, le groupe binaire octaédral \mathbb{O} à 48 éléments et le groupe binaire isocaédral \mathbb{I} à 120 éléments.*

Remarque 2.5. On trouvera dans [Coh76] ou [IN99] des formes explicites de ces groupes comme sous-groupes de $Sl_2(\mathbb{C})$, notamment leurs générateurs.

2.2 Le point de vue des représentations

Définition 2.6. Soit G un sous-groupe fini de $Sl_2(\mathbb{C})$.

- On note ρ_0 la représentation triviale de G , ρ_{nat} sa représentation naturelle comme sous-groupe de $Sl_2(\mathbb{C})$, $\text{Irr } G$ l'ensemble de ses représentations irréductibles non triviales, et $\text{Irr}^* G := \text{Irr } G \cup \{\rho_0\}$.
- Deux représentations irréductibles ρ et ρ' sont dites adjacentes si $\rho \otimes \rho_{nat}$ contient ρ' .
- On introduit alors le *diagramme de Dynkin* Γ_G (resp. le *diagramme de Dynkin étendu* $\tilde{\Gamma}_G$) de G comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $\text{Irr } G$ (resp. $\text{Irr}^* G$), deux sommets étant reliés par une arête s'ils sont adjacents.

Remarque 2.7. Pour que la définition prenne sens il faut que :

$$\rho \otimes \rho_{nat} \supset \rho' \Leftrightarrow \rho' \otimes \rho_{nat} \supset \rho$$

ce qui est vrai car pour $x \in G$, $\chi_{nat}(x) = \text{tr}(x)$ avec x considéré comme endomorphisme de \mathbb{C}^2 . Mais comme $x \in Sl_2(\mathbb{C})$, on a $\text{tr}(x) = \text{tr}(x^{-1})$, puis pour tous χ, χ' caractères sur G :

$$(\chi \chi_{nat}, \chi') = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \chi_{nat}(x) \chi'(x^{-1}) = (\chi, \chi' \chi_{nat}),$$

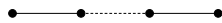
ce qui revient au résultat voulu.

Une étude au cas par cas aboutit au tableau suivant, pour des entiers n convenables :

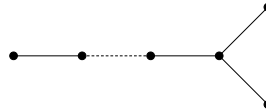
G	\mathbb{Z}_{n+1}	\mathbb{D}_{n-2}	\mathbb{T}	\mathbb{O}	\mathbb{I}
Γ_G	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8

Voici les diagrammes de Dynkin impliqués (n désigne le nombre de points) :

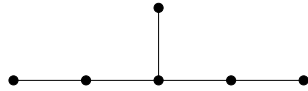
A_n :



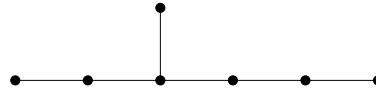
D_n :



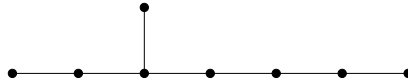
E_6 :



E_7 :

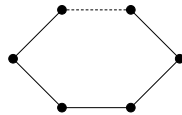


E_8 :

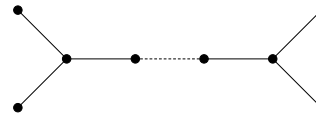


Et les versions étendues (un point de plus) :

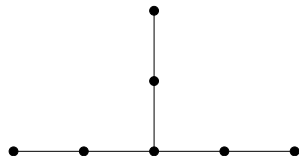
\tilde{A}_n :



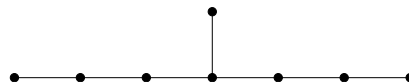
\tilde{D}_n :

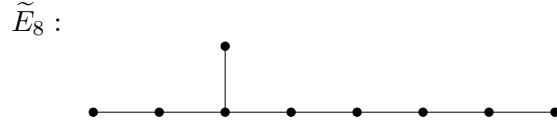


\tilde{E}_6 :



\tilde{E}_7 :

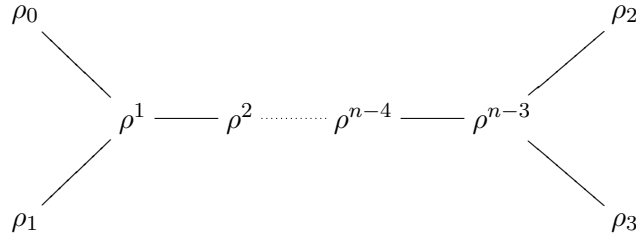




Exemples 2.8. 1. Le cas de D_n , $2 < n$: On a $G = \mathbb{D}_{n-2} = \langle \alpha, \beta \rangle$ avec

$$\alpha = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \epsilon = \exp \frac{2\pi i}{2n-4}.$$

Pour $0 \leq i \leq n-2$, on a des représentations de dimension deux ρ^i , où α agit sur \mathbb{C}^2 par α^i et β par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^i & 0 \end{pmatrix}$ (on a $\rho^1 = \rho_{nat}$). Elles sont irréductibles pour $0 < i < n-2$, mais $\rho^0 = \rho_0 \oplus \rho_1$ et $\rho^{n-2} = \rho_2 \oplus \rho_3$, où ρ_1, ρ_2 et ρ_3 sont les représentations non triviales de dimension 1. Comme on a $\rho^i \otimes \rho_{nat} = \rho^{i-1} \oplus \rho^{i+1}$ pour $0 < i < n-2$, on obtient bien $\tilde{\Gamma}_G = \tilde{D}_n$:



2. Le cas de E_6 : On a $G = \mathbb{T} = \langle \mathbb{D}_2, \mu \rangle = \langle \alpha, \beta, \mu \rangle$ avec

$$\alpha = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon^7 & \epsilon^7 \\ \epsilon^5 & \epsilon \end{pmatrix}$$

et cette fois $\epsilon = \exp \frac{2\pi i}{8}$. On utilise l'action de G sur $\mathbb{C}[x, y]$. On pose :

$$\begin{aligned} p_1 &= x^2 - y^2, & p_2 &= x^2 + y^2, & p_3 &= xy \\ \phi &= p_2^2 + 4jp_3^2, & \psi &= p_2^2 + 4j^2p_3^2 \\ q_1 &= x^3 + (2j+1)xy^2, & q_2 &= y^3 + (2j+1)yx^2 \\ s_1 &= x^3 + (2j^2+1)xy^2, & s_2 &= y^3 + (2j^2+1)yx^2 \end{aligned}$$

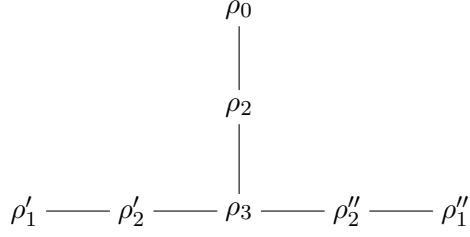
et alors les représentations irréductibles non triviales de dimension un sont :

$$\rho'_1 = \mathbb{C}\phi \text{ et } \rho''_1 = \mathbb{C}\psi$$

celles de dimension deux sont :

$$\rho_2 = \rho_{nat} = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y, \quad \rho'_2 = \mathbb{C}q_1 \oplus \mathbb{C}q_2 \text{ et } \rho''_2 = \mathbb{C}s_1 \oplus \mathbb{C}s_2$$

et on a une représentation irréductible de dimension trois donnée par $\rho_3 = \mathbb{C}x^2 \oplus \mathbb{C}xy \oplus \mathbb{C}y^2$. Le diagramme associé est ainsi



- Remarque 2.9.* – Pour les autres cas, on pourra trouver dans [IN99] la liste des représentations irréductibles vues comme sous- G -modules de $\mathbb{C}[x, y]$.
- Dans ces exemples on utilise le fait que $\sum_{\rho \in \text{Irr}^* G} (\dim \rho)^2 = |G|$ pour être sûr d'avoir toutes les représentations irréductibles.

2.3 Le point de vue des singularités

Proposition 2.10. *Soit G sous-groupe fini non trivial de $Sl_2(\mathbb{C})$, et $S = \mathbb{A}^2/G = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]^G)$ la surface ayant une seule singularité en l'origine. Celle-ci se désingularise par une suite d'éclatements $X \rightarrow S$ dont le diviseur exceptionnel E_G est une réunion de fermés irréductibles tous isomorphes à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.*

Définition 2.11. Soit Λ_G le diagramme de Dynkin dont les sommets sont les composantes irréductibles de E_G , deux sommets étant reliés si les composantes se coupent.

Théorème 2.12. *On a $\Gamma_G = \Lambda_G$.*

Preuve partielle. 1. Le cas de A_n : soit donc

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ avec } \epsilon = \exp \frac{2\pi i}{n+1}.$$

On vérifie que $\mathbb{C}[x, y]^G = \mathbb{C}[xy, x^{n+1}, y^{n+1}] = \mathbb{C}[u, v, w]/vw - u^{n+1}$. Dans la suite on décrira toujours les éclatements à l'aide du recouvrement canonique de l'espace projectif (les recollements seront précisés si nécessaire). Les cartes canoniques de l'éclatement de S sont ici données par les spectres des algèbres suivantes :

$$\mathbb{C}[u, v, w, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]/(v - u\frac{\beta}{\alpha}, w - u\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\alpha} - u^{n+1}) = \mathbb{C}[u, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]/(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\alpha} - u^{n+1})$$

$$\mathbb{C}[u, v, w, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}]/(u - v\frac{\alpha}{\beta}, w - v\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta} - v^{n-1}(\frac{\alpha}{\beta})^{n+1}) =$$

$$\mathbb{C}[v, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}]/(\frac{\gamma}{\beta} - v^{n-1}(\frac{\alpha}{\beta})^{n+1})$$

$$\mathbb{C}[u, v, w, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}]/(u - w\frac{\alpha}{\gamma}, v - w\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma} - w^{n-1}(\frac{\alpha}{\gamma})^{n+1}) =$$

$$\mathbb{C}[w, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}]/(\frac{\beta}{\gamma} - w^{n-1}(\frac{\alpha}{\gamma})^{n+1})$$

Les deux dernières cartes sont lisses, le diviseur exceptionnel s'y lit en rajoutant la condition $v = 0$ (respectivement $w = 0$), ce qui donne $\frac{\gamma}{\beta} = 0$ (respectivement $\frac{\beta}{\gamma} = 0$). La première carte présente une singularité de type A_{n-2} , le diviseur exceptionnel est donné par $\frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ si l'on rajoute la condition $u = 0$. Les informations sur le diviseur exceptionnel sont donc toutes contenues dans la première carte.

L'étape suivante consiste donc à éclater (après avoir renommé les variables) :

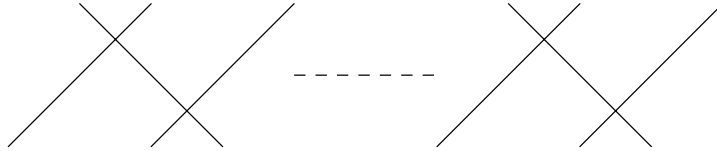
$$vw = u^{n-1}, \quad E_0 = \{u = 0, vw = 0\}$$

en l'origine. Comme précédemment on obtient les cartes suivantes :

$$\mathbb{C}[u, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]/(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{\alpha} - u^{n-3}), \quad \mathbb{C}[v, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}]/(\frac{\gamma}{\beta} - v^{n-3}(\frac{\alpha}{\beta})^{n-1}) \text{ et} \\ \mathbb{C}[w, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}]/(\frac{\beta}{\gamma} - w^{n-3}(\frac{\alpha}{\gamma})^{n-1}),$$

mais la préimage de E_0 ne peut être lue dans la première carte. En fait il donne deux branches distinctes, chacune contenue dans l'une des deux autres cartes : dans la deuxième carte $\{u = 0, vw = 0\}$ devient $E'_0 = \{\frac{\alpha}{\beta} = 0, \frac{\gamma}{\beta} = 0\}$, et dans la troisième il devient $E''_0 = \{\frac{\alpha}{\gamma} = 0, \frac{\beta}{\gamma} = 0\}$. Elles coupent chacune la nouvelle composante E_1 du diviseur exceptionnel obtenue en imposant respectivement $u = 0$, $v = 0$ et $w = 0$ dans les trois cartes, donné dans la première par $\frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{\alpha} = 0$.

Comme à chaque étape la singularité baisse de deux, et que l'on gagne deux branches du diviseur exceptionnel, on obtient un diagramme de type A_n après $E(\frac{n+1}{2})$ itérations, quelque soit la parité de n :



2. Le cas de D_5 : les notations sont celles de l'exemple 2.8, ainsi $\epsilon = \exp \frac{i\pi}{3}$. Cette fois on a

$$\mathbb{C}[x, y]^G = \mathbb{C}[x^6 + y^6, x^2y^2, xy(x^6 - y^6)] = \mathbb{C}[u, v, w]/w^2 - vu^2 + 4v^4.$$

On éclate une première fois l'origine pour obtenir les algèbres suivantes :

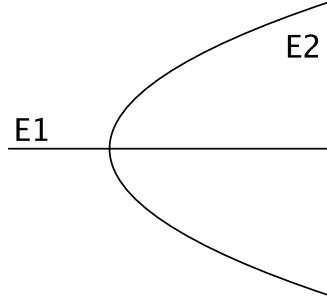
$$\mathbb{C}[u, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]/((\frac{\gamma}{\alpha})^2 - u\frac{\beta}{\alpha} + 4u^2(\frac{\beta}{\alpha})^4), \quad \mathbb{C}[v, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}]/((\frac{\gamma}{\beta})^2 - v(\frac{\alpha}{\beta})^2 + 4v^2) \text{ et} \\ \mathbb{C}[w, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}]/(1 - w\frac{\beta}{\gamma}(\frac{\alpha}{\gamma})^2 + 4w^2(\frac{\beta}{\gamma})^4).$$

On remarque que la deuxième carte contient la troisième, que la première admet une unique singularité en l'origine et que dans cette première carte le diviseur exceptionnel est donné par $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$ (en degré deux, en effet l'idéal engendré par $(\frac{\gamma}{\alpha})^2 - u\frac{\beta}{\alpha} + 4u^2(\frac{\beta}{\alpha})^4$ et u n'est autre

que $(\frac{\gamma}{\alpha})^2$). Après avoir renommé les coordonnées de cette première carte ($A = u, B = \frac{\beta}{\alpha}, C = \frac{\gamma}{\alpha}$), l'éclatement de $C^2 - AB + 4A^2B^4$ donne les cartes suivantes :

$$\mathbb{C}[A, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]/((\frac{\gamma}{\alpha})^2 - \frac{\beta}{\alpha} + 4A^4(\frac{\beta}{\alpha})^4), \mathbb{C}[B, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}]/((\frac{\gamma}{\beta})^2 - \frac{\alpha}{\beta} + 4B^4(\frac{\alpha}{\beta})^2) \text{ et} \\ \mathbb{C}[C, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}]/(1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma\gamma} + 4C^4(\frac{\alpha}{\gamma})^2(\frac{\beta}{\gamma})^4).$$

Ici la troisième carte est contenue dans les deux premières, qui sont lisses. On lit le diviseur exceptionnel dans la deuxième carte en prenant $A = 0$ et on obtient $(\frac{\gamma}{\beta})^2 = \frac{\alpha}{\beta}$ (représenté par la branche $E2$), il faut aussi rajouter la contribution du précédent éclatement : on obtient $C = 0$, donc à nouveau $\frac{\gamma}{\beta} = 0$ dans cette nouvelle carte (branche $E1$) :



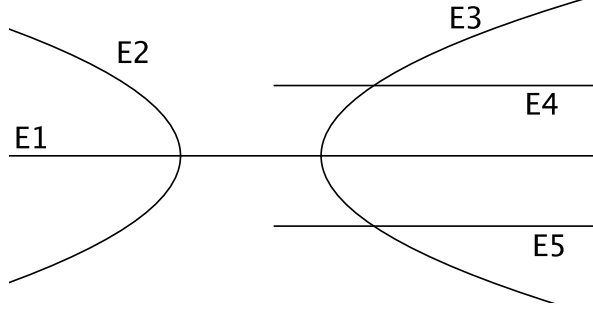
Il ne reste qu'à traiter la deuxième carte issue du premier éclatement, dans laquelle le diviseur exceptionnel est donné par $\frac{\gamma}{\beta} = 0$ et correspond à $E1$ dans le recollement avec la première carte. On procède donc à l'éclatement de $(C^2 - BA^2 + 4B^2) \subset \mathbb{C}[A, B, C]$ en l'origine pour obtenir les cartes suivantes :

$$\mathbb{C}[A, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]/((\frac{\gamma}{\alpha})^2 - A\frac{\beta}{\alpha} + 4(\frac{\beta}{\alpha})^2), \mathbb{C}[B, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}]/((\frac{\gamma}{\beta})^2 - B(\frac{\alpha}{\beta})^2 + 4) \text{ et} \\ \mathbb{C}[C, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}]/(1 - C\frac{\beta}{\gamma}(\frac{\alpha}{\gamma})^2 + 4(\frac{\beta}{\gamma})^2).$$

Encore une fois la troisième est incluse dans la deuxième, qui est lisse. On désingularise une nouvelle fois par éclatement de l'origine la première carte, dans laquelle le diviseur exceptionnel est donné par $\frac{\gamma}{\alpha} = \pm 2\frac{\beta}{\alpha}$ (rajouter la condition $A = 0$), et $E1$ correspond à $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$. On obtient :

$$\mathbb{C}[A, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]/((\frac{\gamma}{\alpha})^2 - \frac{\beta}{\alpha} + 4(\frac{\beta}{\alpha})^2), \mathbb{C}[B, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}]/((\frac{\gamma}{\beta})^2 - \frac{\alpha}{\beta} + 4) \text{ et} \\ \mathbb{C}[C, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}]/(1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma\gamma} + 4(\frac{\beta}{\gamma})^2).$$

La dernière est incluse dans la deuxième, qui est lisse, ainsi que la première, ce qui conclut la désingularisation de S . On lit le diviseur exceptionnel dans la deuxième carte : $E1$ correspond à $\frac{\gamma}{\beta} = 0, \frac{\gamma}{\alpha} = \pm 2\frac{\beta}{\alpha}$ à $C = \pm 2B$ donc dans cette carte à $\frac{\gamma}{\beta} = \pm 2$ (branches $E4$ et $E5$), enfin en rajoutant l'équation $B = 0$ on rajoute au diviseur sa dernière branche donnée par $(\frac{\gamma}{\beta})^2 = \frac{\alpha}{\beta} - 4$ (branche $E3$). Schématiquement, on peut donc représenter ainsi E_G :



Ainsi $\Lambda_G = D_5$.

L'apparition d'un graphe de type D_n vient donc de la nécessité, à chaque étape, de devoir éclater plusieurs nouvelles cartes, tandis que dans le cas de A_n , il n'y avait qu'une carte non lisse à chaque étape.

Par récurrence le cas de D_5 permet en fait de traiter le cas de D_n pour n impair (la singularité de type D_n est donnée par l'équation $w^2 - vu^2 + 4v^{n-1} = 0$).

À noter une particularité supplémentaire dans le cas de D_n pour n pair, puisque dans ce cas la dernière étape fait intervenir la surface $(C^2 - BA^2 + 4B) \subset \mathbb{C}[A, B, C]$ qui admet deux singularités en $(A = \pm 2, B = 0, C = 0)$, à éclater en deux temps.

3. Le cas de E_6 : avec les notations de l'exemple 2.8, on a :

$$\mathbb{C}[x, y]^G = \mathbb{C}[p_1 p_2 p_3, \phi\psi, \phi^3] \simeq \mathbb{C}[u, v, w]/u^2 + v^3 + w^4.$$

On éclate l'origine une première fois, et seule la troisième carte n'est pas lisse :

$$\mathbb{C}[\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, w]/(\frac{\alpha}{\gamma})^2 + w(\frac{\beta}{\gamma})^3 + w^2.$$

Il suffit de considérer cette carte pour lire le diviseur exceptionnel, dont l'équation est $\frac{\alpha}{\gamma} = 0$ (E_0). On éclate donc ensuite $u^2 + wv^3 + w^2$ en l'origine, et comme à l'étape précédente, une seule carte est intéressante :

$$\mathbb{C}[\frac{\alpha}{\beta}, v, \frac{\gamma}{\beta}]/(\frac{\alpha}{\beta})^2 + v^2 \frac{\gamma}{\beta} + (\frac{\gamma}{\beta})^2.$$

L'équation de $E_0 = \{u = w = 0\}$ devient $\{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta} = 0\}$, et en prenant $v = 0$, on obtient deux nouvelles branches E_1 et E'_1 données par $\frac{\alpha}{\beta} = \pm i \frac{\gamma}{\beta}$.

Si l'on éclate ensuite $u^2 + v^2 w + w^2$, $E_0 = \{u = 0, w = 0\}$, $E_1 = \{v = 0, u \pm iw = 0\}$, la seule carte non lisse est :

$$\mathbb{C}[\frac{\alpha}{\beta}, v, \frac{\gamma}{\beta}]/(\frac{\alpha}{\beta})^2 + v \frac{\gamma}{\beta} + (\frac{\gamma}{\beta})^2.$$

dans laquelle E_0 donne $\{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta} = 0\}$, et où apparaît une nouvelle branche d'équation $\{\frac{\alpha}{\beta} \pm i \frac{\gamma}{\beta} = 0\}$ (E_2 et E'_2). Par contre on ne peut pas lire la préimage de E_1 et E'_1 dans cette carte. Voyons la première :

$$\mathbb{C}[u, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]/1 + u\frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\alpha} + (\frac{\gamma}{\alpha})^2.$$

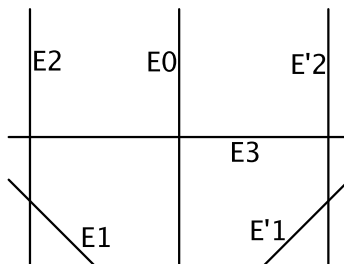
La préimage de E_1 et E'_1 donne $\{\frac{\beta}{\alpha} = 0, \frac{\gamma}{\alpha} = \pm i\}$, E_2 et E'_2 sont eux donnés par $\{u = 0, \frac{\gamma}{\alpha} = \pm i\}$. Pour la dernière étape on éclate la carte non lisse en l'origine. On obtient trois cartes lisses, ce qui achève la désingularisation. Pour la préimage de E_0 , on considère la deuxième carte :

$$\mathbb{C}[\frac{\alpha}{\beta}, v, \frac{\gamma}{\beta}]/(\frac{\alpha}{\beta})^2 + \frac{\gamma}{\beta} + (\frac{\gamma}{\beta})^2,$$

où E_0 donne $\{\frac{\alpha}{\beta} = 0, \frac{\gamma}{\beta} = 0\}$, et où apparaît $E_3 = \{(\frac{\alpha}{\beta})^2 + \frac{\gamma}{\beta} + (\frac{\gamma}{\beta})^2 = 0\}$. Pour la préimage de E_2 et E'_2 , on considère la première carte :

$$\mathbb{C}[u, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]/1 + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\alpha} + (\frac{\gamma}{\alpha})^2.$$

Les préimages de E_2 et E'_2 sont données par $\frac{\gamma}{\alpha} = \pm i$, E_3 par $1 + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\alpha} + (\frac{\gamma}{\alpha})^2 = 0$. On obtient donc la configuration suivante, qui est bien de type E_6 :



□

Remarque 2.13. On peut trouver dans [IN99] le détail de la forme des invariants $\mathbb{C}[x, y]^G$ pour tous les cas. Les relations liant ces invariants permettent, comme on le voit dans les exemples ci-dessus, de faire apparaître une singularité (pour $G \in Sl_2(\mathbb{C})$ on obtient des singularités dites *simples* ou *de Du Val*). On obtient respectivement pour E_7 et E_8 les singularités suivantes :

$$x^2 + y(y^2 + z^3) = 0 \text{ et } x^2 + y^3 + z^5 = 0.$$

On note qu'en éclatant la singularité de type E_8 , deux des cartes sont régulières, la dernière est donnée par une singularité de type E_7 .

Remarque 2.14. A priori on définit une *désingularisation* de X comme un morphisme $f : \tilde{X} \rightarrow X$ qui est un isomorphisme au-dessus du lieu régulier. Procéder par éclatements permet donc d'avoir une désingularisation en ces termes. On pourra par ailleurs qualifier cette désingularisation de minimale si pour toute autre désingularisation $g : Y \rightarrow X$ il existe une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \rightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ Y & & \end{array} .$$

Sous les hypothèses qui sont les nôtres, un critère est donné dans [Har77] (voir V5.8) : il faut que toute composante E du diviseur exceptionnel vérifie $E^2 = -2$. Vérifions que c'est le cas par la méthode des éclatements à travers un exemple simple, celui de A_2 :

On éclate $xy = z^2$ pour obtenir un cylindre $\{x \text{ quelconque}, v = w^2\}$, le diviseur exceptionnel E étant donné par $x = 0$. Montrons que l'intersection $(f).E$ est nulle, en prenant par exemple $f = xv$: en notant W l'éclaté, $(f).E = \deg_E(\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_W(f)) = \deg_E \mathcal{O}_E = 0$. Par ailleurs,

$$xv = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } v = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } w = \pm i) ,$$

donc comme $x = 0$ désigne l'équation de E , on a $(f) = E + C_1 + C_2$ où C_1 et C_2 correspondent à $w = \pm i$, ces deux diviseurs vérifiant $C_i.E = \#(C_i \cap E) = 1$, on a finalement :

$$0 = E.(f) = E^2 + E.C_1 + E.C_2 = E + 2 ,$$

d'où le résultat.

On peut le retrouver plus directement dans ce cas simple : on détaille les trois cartes de l'éclatement avec les notations habituelles

dans la carte 1 : $\frac{v}{u} = (\frac{w}{u})^2$ donc il reste $\mathbb{C}[x, \frac{w}{u}]$ et E est donné par x ;

dans la carte 2 : $\frac{u}{v} = (\frac{w}{v})^2$ donc il reste $\mathbb{C}[y, \frac{w}{v}]$ et E est donné par y ;

la carte 3 est incluse dans les deux premières et : $\frac{u}{w} \frac{v}{w} = 1$.

Ainsi E est donné par $\mathbb{C}[x, \frac{w}{u}] \simeq \mathbb{C}[t]$, $\mathbb{C}[y, \frac{w}{v}] \simeq \mathbb{C}[t^{-1}]$ et l'application de changement de cartes $x \mapsto y \frac{u}{v} = y (\frac{w}{v})^2 = yt^{-2}$, ce qui correspond bien à la donnée de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$.

3 Quelques notions sur les schémas de Hilbert

Le but de cette section est d'introduire quelques outils qui serviront ensuite pour mettre en place une correspondance de McKay explicite. Tant que possible, les démonstrations seront rigoureuses dans la partie qui nous concerne directement, et qui traite du plan $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. Celles-ci permettront par exemple d'illustrer la spécificité de certains raisonnements propres aux foncteurs représentables qui sont introduits dans un premier temps.

3.1 Généralités

Dans cette partie il s'agit de donner quelques résultats sur les schémas de Hilbert, ceux qui seront utiles dans la suite. Tout ne sera pas expliqué, loin de là, le sujet étant très vaste, et les démonstrations souvent très longues. Ces dernières peuvent être trouvées dans [FGI⁺05].

Définition 3.1. Soit X un schéma quasi-projectif sur \mathbb{C} et $n > 0$. On définit le *foncteur de Hilbert de n points* sur X comme le foncteur contravariant $\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{l}\mathfrak{b}_X^n$ de la catégorie des schémas localement noethériens sur \mathbb{C} vers celle des ensembles défini par :

$$\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{l}\mathfrak{b}_X^n(T) = \left\{ \begin{array}{l} Z \text{ sous-schéma fermé de } X \times T \text{ plat et propre sur } T, \\ \text{avec, pour tout } t \text{ dans } T, \dim Z_t = 0 \text{ et } h^0(Z_t, \mathcal{O}_{Z_t}) = n \end{array} \right\}$$

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses de la définition précédente, $\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{l}\mathfrak{b}_X^n$ est représentable par un \mathbb{C} -schéma quasi-projectif. Cela signifie qu'il existe un \mathbb{C} -schéma quasi-projectif, noté $\text{Hilb}^n X$ ou encore $X^{[n]}$, tel que*

$$\text{Mor}_{\mathbb{C}}(\bullet, \text{Hilb}^n X) \simeq \mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{l}\mathfrak{b}_X^n.$$

Remarque 3.3. – Ce théorème est une conséquence du cas où X est projectif concernant le *foncteur de Hilbert $\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{l}\mathfrak{b}_X^\phi$ associé à ϕ* , où ϕ serait un polynôme fixé à coefficients dans \mathbb{Q} . Dans l'énoncé, “propre” disparaît et “ $\dim Z_t = 0$ et $h^0(Z_t, \mathcal{O}_{Z_t}) = n$ ” est remplacé par “ ϕ est le polynôme de Hilbert de \mathcal{O}_{Z_t} ”.

Le cas qui nous concerne est donc celui des polynômes de Hilbert constants : on peut définir le *polynôme de Hilbert* d'un module \mathcal{F} cohérent sur X projectif sur \mathbb{C} , comme le polynôme coïncidant sur les entiers avec la *caractéristique d'Euler* de $\mathcal{F}(n)$:

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{F}(n)).$$

En effet, sous ces hypothèses, un tel polynôme existe. Étant par ailleurs stable par pull-back, tout comme la propreté et la platitude, on peut donc bien se servir du pull-back pour définir les divers foncteurs de Hilbert sur les morphismes.

On sait par ailleurs que dans le cas des polynômes constants, le schéma de Hilbert correspondant est indépendant du plongement choisi de X

dans un schéma projectif. Pour plus de précisions on peut par exemple consulter [Blu06].

- À noter aussi que l'étude des foncteurs de Hilbert à polynôme fixé permet de monter l'existence du schéma de Hilbert global $\text{Hilb } X$ représentant

$$\mathfrak{hilb}_X : T \mapsto \{Z \text{ sous-schéma fermé de } X \times T \text{ plat et propre sur } T\}.$$

Définition 3.4. Le schéma $\text{Hilb}^n X$ est appelé *schéma de Hilbert de n points* sur X . On appelle *famille universelle de sous-schémas de X* le sous-schéma $Z_n(X)$ de $X \times \text{Hilb}^n X$ correspondant au morphisme identité de $\text{Hilb}^n X$.

Remarque 3.5. S'il n'y a pas d'ambiguïté on écrira Z_n pour $Z_n(X)$. L'isomorphisme du théorème 3.2 se décrit ainsi : si Z appartient à $\mathfrak{hilb}_X^n(T)$, il existe un unique ϕ dans $\text{Mor}_{\mathbb{C}}(T, \text{Hilb}^n X)$ tel que $Z = (id \times \phi)^* Z_n$.

Ainsi, par exemple, $Z \in \mathfrak{hilb}_X^n(\mathbb{C})$ s'identifie à un unique point $\text{Spec } \mathbb{C} \xrightarrow{\phi_Z} \text{Hilb}^n X$ et on remarque que $Z = (id \times \phi_Z)^* Z_n$ traduit le fait qu'au niveau des points

$$Z_n = \{(x, Z), x \in Z\}.$$

Proposition 3.6. *Pour X quasi-projectif, le produit symétrique X^n/\mathfrak{S}_n existe et est noté $X^{(n)}$.*

Remarque 3.7. On rappelle que le quotient $\pi : X^n \rightarrow X^n/\mathfrak{S}_n$ est caractérisé, à isomorphisme près par la propriété catégorique suivante : tout morphisme \mathfrak{S}_n -invariant $f : X^n \rightarrow Y$ se factorise uniquement par π . Les fibres sont alors ici (cas d'un groupe fini) les orbites.

Esquisse de preuve. Ici $G = \mathfrak{S}_n$ est fini ce qui permet de recouvrir X^n par des ouverts affines \mathcal{U}_i tels que chaque orbite est contenue dans l'un des \mathcal{U}_i . On remplace alors \mathcal{U}_i par $\mathcal{W}_i = \cap_{g \in G} g(\mathcal{U}_i)$ recouvrement d'ouverts affines \mathfrak{S}_n -invariants (X^n est séparé). Sur $\mathcal{U}_i = \text{Spec } A_i$, la propriété universelle du quotient impose que π soit induit par $A_i^{\mathfrak{S}_n} \hookrightarrow A_i$, et le recollement est possible. \square

Remarque 3.8. On peut aussi montrer que la quasi-projectivité et la projectivité sont des qualités qui se transmettent au quotient. Le cas qui nous intéressera est cependant très simple puisqu'il s'agit de $X = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, si bien que l'on est dans le cas affine et que $X^n/\mathfrak{S}_n = \text{Spec}(\mathbb{C}[X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n]^{\mathfrak{S}_n})$, \mathfrak{S}_n agissant par permutation des couples (X_i, Y_i) .

On peut trouver une démonstration du lemme suivant dans [Kle05] :

Lemme 3.9. *Soit X projectif sur \mathbb{C} . Le foncteur \mathfrak{div}_X défini par :*

$$\mathfrak{div}_X(T) = \{ D \text{ diviseur effectif de } X \times T \text{ plat sur } T \}$$

est représentable par un sous-schéma ouvert $\text{Div } X$ du schéma de Hilbert $\text{Hilb } X$. De plus le foncteur \mathfrak{div}_X^n défini cette fois par

$$\mathfrak{div}_X^n(T) = \left\{ \begin{array}{l} D \text{ diviseur effectif de } X \times T \text{ plat sur } T, \\ \text{avec } D_t \text{ de degré } n \text{ pour tout } t \text{ dans } T \end{array} \right\}$$

est alors aussi représentable par un sous-schéma $\text{Div}^n X$ de $\text{Div} X$.

Il permet notamment de démontrer le théorème d'existence du morphisme de *Hilbert-Chow*, essentiel dans la suite. Sa preuve est un parfait exemple de l'utilisation des foncteurs représentables pour construire des morphismes de schémas :

Théorème 3.10. *Soit X quasi-projectif et lisse sur \mathbb{C} . Il existe un morphisme surjectif $\rho : X_{\text{red}}^{[n]} \rightarrow X^{(n)}$, appelé morphisme de Hilbert-Chow, et donné sur les points par $Z \mapsto \sum_{P \in \text{supp}(Z)} \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{Z,P})P$.*

Esquisse de preuve. Soit d tel que $X \subset \mathbb{P}^d$, on désignera par $\check{\mathbb{P}}^d$ l'espace projectif dual des hyperplans. L'idée est de se servir conjointement du lemme 3.9 et du lemme de Yoneda en construisant, pour T quelconque, une application de $\mathfrak{hilb}_X^n(T)$ dans $\mathfrak{div}_{\check{\mathbb{P}}^d}^n(T)$ qui commute avec le changement de base. On obtiendra ainsi un morphisme de $X^{[n]}$ dans $\text{Div}^n(\check{\mathbb{P}}^d)$. On vérifie alors que ce morphisme prend valeurs dans $X^{(n)}$, considéré comme sous-schéma de $\text{Div}^n(\check{\mathbb{P}}^d)$ via le morphisme \mathfrak{S}_n -invariant

$$\begin{array}{ccc} ch : & (\mathbb{P}^d)^n & \rightarrow \text{Div}^n(\check{\mathbb{P}}^d) \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \sum H_{x_i} \end{array}$$

où l'on note, pour x dans \mathbb{P}^d , $H_x = \{l \in \check{\mathbb{P}}^d, x \in l\}$.

Sans expliquer comment s'étend la définition au cas général, ni vérifier la compatibilité avec le changement de base, on va définir l'application de $\mathfrak{hilb}_{\mathbb{P}^d}^n(\text{Spec } \mathbb{C})$ dans $\mathfrak{div}_{\check{\mathbb{P}}^d}^n(\text{Spec } \mathbb{C})$ (la preuve complète figure dans [FGI⁺05]).

Soit donc $Z \in \mathfrak{hilb}_{\mathbb{P}^d}^n(\text{Spec } \mathbb{C})$. On utilise le schéma d'incidence $H \subset \mathbb{P}^d \times \check{\mathbb{P}}^d$ défini par $\{(p, l) \in \mathbb{P}^d \times \check{\mathbb{P}}^d, p \in l\}$ et les projections respectives p et \check{p} de H vers \mathbb{P}^d et $\check{\mathbb{P}}^d$. On pose alors :

$$Z^* = p^*Z \quad \text{puis} \quad \mathcal{F} = \check{p}_* \mathcal{O}_{Z^*} .$$

On a \mathcal{F} cohérent sur $\check{\mathbb{P}}^d$ et

$$\text{supp}(\mathcal{F}) = \{l \in \check{\mathbb{P}}^d, l \cap Z \neq \emptyset\} \neq \check{\mathbb{P}}^d .$$

On note dans la suite $\bar{X} = \overline{\text{supp}(\mathcal{F})}$. Soit $V = \{x\}$ un cycle de codimension 1, R l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\bar{X},x}$, et M le R -module \mathcal{F}_x . D'après [Har77], III 6.11A, et puisque R est local, il existe une résolution du type :

$$0 \rightarrow R^h \xrightarrow{\phi} R^k \rightarrow M \rightarrow 0 .$$

De plus $h = k$ grâce à l'hypothèse $\text{supp}(\mathcal{F}) \neq \bar{X}$: en effet, si λ désigne l'uniformisante de R , il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^r M = 0$ (cadre noethérien). On peut alors vérifier sans trop de difficulté que $\det \phi \in R/R^*$ est indépendant de la résolution. On pose alors m_V pour la valuation dans R de $\det \phi$, et enfin (la somme porte sur les cycles de codimension 1) :

$$\operatorname{div}(\mathcal{F}) = \sum_V m_V V ,$$

la somme étant bien finie car m_V n'est non nul que si $V \subset \operatorname{supp}(\mathcal{F})$. On finit en remarquant que sur \bar{X} , les diviseurs de Weil et de Cartier coïncident. \square

3.2 Le cas du plan

On se place dans le cas qui nous intéresse : $X = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. On remarque alors qu'ensemblément $X^{[n]} = \{I \text{ idéal de } \mathbb{C}[x, y] \text{ tel que } \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x, y]/I) = n\}$. Le sous-schéma fermé Z associé à un tel idéal est caractérisé par son support $\{P_1, \dots, P_s\}$ et la donnée, pour $1 \leq i \leq s$, de $n_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Z, P_i}$ qui doivent vérifier $\sum n_i = n$.

Proposition 3.11. *Soit Z point fermé de $X^{[n]}$. Si l'on note I l'idéal associé à Z , on a $T_Z X^{[n]} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[x, y]}(I, \mathbb{C}[x, y]/I)$.*

Démonstration. On notera A pour $\mathbb{C}[x, y]$, et H pour $X^{[n]}$. Déjà se donner un élément de $T_Z X^{[n]}$ équivaut à se donner un élément du \mathbb{C} -espace vectoriel $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{H, Z}, \mathbb{C}[\epsilon])$, avec $\mathbb{C}[\epsilon] = \mathbb{C}[x]/x^2$ (en effet la suite exacte $\mathfrak{m}_{H, Z} \hookrightarrow \mathcal{O}_{H, Z} \rightarrow \mathcal{O}_{H, Z}/\mathfrak{m}_{H, Z} = \mathbb{C}$ est scindée). Ceci revient à se donner un morphisme de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[\epsilon]$ dans H envoyant le point fermé sur Z . Par définition de H , c'est encore équivalent à se donner un sous-schéma fermé Z' de $X \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\epsilon]$, plat sur $\mathbb{C}[\epsilon]$, et tel que $Z'|_{X \times \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon))} = Z$.

En termes d'idéaux, on cherche donc $I' \subset A[\epsilon] = \epsilon A \oplus A$ vérifiant

$$I' + \epsilon A = I + \epsilon A \quad \text{et} \quad \epsilon A \cap I' = \epsilon I$$

On peut voir ces conditions réunies sur le diagramme suivant, où l'on note π la réduction modulo ϵ dans $A[\epsilon]$:

$$\begin{array}{ccccc} \epsilon A & \hookrightarrow & A[\epsilon] & \xrightarrow{\pi} & A \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \epsilon I & \hookrightarrow & I' & \xrightarrow{\pi} & I \end{array}$$

À un tel diagramme on associe f dans $\operatorname{Hom}_A(I, A/I)$ de la manière suivante : soit i dans I , on le relève en $i' = \epsilon a \oplus i$ dans I' , et a étant uniquement déterminé modulo I , on pose $f(i) = a \bmod I$. Réciproquement pour f dans $\operatorname{Hom}_A(I, A/I)$ on choisit des relèvements $f(i)^*$ dans A , et on associe à f l'idéal de $A[\epsilon]$ engendré par ϵI et les $\epsilon f(i)^* \oplus i$ pour i dans I . \square

Lemme 3.12. $X^{[n]}$ est connexe.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur n , l'initialisation ne posant pas problème ($X^{[1]} = X$ connexe). Soit H le schéma de Hilbert global (voir remarque 3.3), il existe alors une flèche $\kappa : X^{[n]} \times X^{[n+1]} \rightarrow H$ donnée sur les points par $(Z, Z') \mapsto Z \cap Z'$ et on a le diagramme cartésien suivant, en notant π_1 la première projection suivie de l'immersion $X^{[n]} \hookrightarrow H$:

$$\begin{array}{ccc}
X^{[n,n+1]} & \rightarrow & X^{[n]} \times X^{[n+1]} \\
\downarrow & \square & \downarrow \pi_1 \\
X^{[n]} \times X^{[n+1]} & \xrightarrow{\kappa} & H
\end{array}$$

On définit ainsi le schéma d'incidence $X^{[n,n+1]}$ dont les points sont les couples (Z, Z') de $X^{[n]} \times X^{[n+1]}$ vérifiant $Z \subset Z'$. En utilisant encore la propriété universelle du schéma de Hilbert, ainsi que $X^{[1]} = X$, on obtient une application $q : X^{[n,n+1]} \rightarrow X$ qui associe à (Z, Z') le point en lequel Z et Z' diffèrent, que l'on notera $Z' \setminus Z$. On notera $p_1 : X^{[n,n+1]} \rightarrow X^{[n]}$ la première projection, $p_2 : X^{[n,n+1]} \rightarrow X^{[n+1]}$ la deuxième, et enfin

$$\phi : \begin{array}{ccc}
X^{[n,n+1]} & \xrightarrow{q \times p_1} & X \times X^{[n]} \\
(Z, Z') & \longmapsto & (Z' \setminus Z, Z)
\end{array} .$$

Par hypothèse de récurrence, $X \times X^{[n]}$ est connexe. Un élément d'une fibre $\phi^{-1}(P, Z)$ correspond à la donnée d'un hyperplan de l'espace vectoriel $I_Z \otimes k(P)$ donc $\phi^{-1}(P, Z) \simeq \mathbb{P}(I_Z \otimes k(P))$ est connexe, et donc $X^{[n,n+1]}$ est connexe. Mais p_2 est surjective, donc on obtient bien $X^{[n+1]}$ connexe, ce qui achève la récurrence. \square

Remarque 3.13. Ce lemme peut se démontrer de plusieurs manières : en fait cette preuve est inspirée de [ES98], où il est montré que, dans le cas d'une surface, le schéma $X^{[n,n+1]}$ peut être vu à la fois comme l'éclatement de $X \times X^{[n]}$ le long de Z_n , mais aussi comme $\mathbb{P}(Z_n)$.

On notera $X^n = \text{Spec}(\mathbb{C}[X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n]) = \text{Spec } A$. Soit X_0^n le complémentaire dans X^n de l'union des fermés $V_{i,j}$, pour $i \neq j$, correspondant aux idéaux $I_{i,j}$ engendrés par les $X_i - X_j$ et $Y_i - Y_j$. Il est dense et ses points fermés correspondent aux n -uplets (p_1, \dots, p_n) d'éléments de \mathbb{C}^2 tous distincts. On note $X_0^{(n)}$ l'image de X_0^n dans $X^{(n)}$: c'est l'ouvert dense paramétrant les points du type $\sum p_i$ avec les p_i tous distincts.

Lemme 3.14. $X_0^{(n)}$ est régulier de dimension $2n$.

Démonstration. On notera G pour \mathfrak{S}_n et h son ordre. Déjà A est entière sur $A^G = B$ d'où l'assertion sur la dimension. Le reste vient du fait que G agit librement sur les antécédents d'un élément p de $X_0^{(n)}$. En effet soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap B$ pour \mathfrak{n} correspondant à un point de X_0^n . Les idéaux au-dessus de \mathfrak{m} sont les $\{g\mathfrak{n}\}_{g \in G}$ qui sont tous distincts.

Si on note \widehat{A} et \widehat{B} les complétions de A et B pour la topologie \mathfrak{m} -adique, on a un isomorphisme $\widehat{B} \otimes_B A \rightarrow \widehat{A}$ puisque B est de type fini sur A noethérien (voir par exemple [Eis95], chapitres 7.2 et 7.3, idem pour les résultats utilisés qui suivent). De plus \widehat{B} est aussi la complétion de $B_{\mathfrak{m}}$ pour son idéal maximal. Par ailleurs le module \widehat{A} , de type fini sur l'anneau complet local noethérien \widehat{B} , admet la décomposition suivante :

$$\widehat{A} \simeq \prod_{g \in G} \widehat{A}_{g\mathfrak{n}} ,$$

les anneaux de droite ayant été complétés selon leur idéal maximal. L'action de G s'étend aux deux anneaux impliqués dans l'isomorphisme ci-dessus, cherchons les anneaux d'invariants respectifs :

On a la suite exacte suivante, définissant B :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & A & \rightarrow & \prod_{g \in G} A \\ & & & & a & \mapsto & (g(a) - a)_{g \in G} \end{array}$$

qui donne, \widehat{B} étant plat sur B noethérien,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \widehat{B} & \rightarrow & \widehat{B} \otimes_B A & \rightarrow & \prod_{g \in G} \widehat{B} \otimes_B A \\ & & & & b \otimes a & \mapsto & b \otimes (g(a) - a)_{g \in G} \end{array}.$$

Ainsi \widehat{B} est le sous-anneau des invariants de $\widehat{B} \otimes_B A \simeq \widehat{A}$, puisque l'action de G sur $\widehat{B} \otimes_B A$ est bien donnée par $g(b \otimes a) = b \otimes g(a)$ pour $(g, b, a) \in G \times \widehat{B} \times A$.

De l'autre côté, l'action d'un élément g de G induit un isomorphisme $\widehat{A}_n \xrightarrow{\sim} \widehat{A}_{gn}$. Le recollement de ces isomorphismes permet d'identifier $\prod_{g \in G} \widehat{A}_{gn}$ à $\prod_{g \in G} \widehat{A}_n$, G agissant via cet isomorphisme par permutations :

$$\forall h \in G, \forall \{\alpha_g\}_{g \in G}, h(\{\alpha_g\}_{g \in G}) = \{\alpha_{h^{-1}g}\}_{g \in G}.$$

Le sous-anneau des invariants apparaît alors comme étant isomorphe à \widehat{A}_n , via l'injection diagonale de \widehat{A}_n dans $\prod_{g \in G} \widehat{A}_n$.

Finalement l'identification des invariants dans la décomposition de \widehat{A} en algèbres locales donne $\widehat{B}_m \simeq \widehat{A}_n$. Ainsi $X^n \rightarrow X^{(n)}$ est étale en les points de X_0^n (voir [Mum70], page 353). \square

Remarque 3.15. Soit $X_0^{[n]}$ la préimage de $X_0^{(n)}$ dans $X^{[n]}$. Soit Z dans $X_0^{[n]}$ et I l'idéal associé. On a alors, en notant $\text{supp}(Z) = \{P_1, \dots, P_n\}$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(I, \mathcal{O}_Z) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X, P_i}}(I_{P_i}, \mathcal{O}_{Z, P_i}) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X, P_i}}(I_{P_i}, \mathbb{C})$$

car $n_i = \dim(\mathcal{O}_{Z, P_i}) = 1$. Mais si \mathfrak{m}_i est l'idéal associé à P_i , cela signifie que $IC[x, y]_{\mathfrak{m}_i} = \mathfrak{m}_i \mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}_i}$, donc

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X, P_i}}(I_{P_i}, \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}_i}}(\mathfrak{m}_i \mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}_i}, \mathbb{C})$$

est de dimension 2 et finalement l'espace tangent à $X^{[n]}$ en Z est de dimension $2n$. Par ailleurs ρ est bijectif de $X_0^{[n]}$ vers $X_0^{(n)}$ car si I correspond à $\sum_{i=1}^n P_i \in X_0^{(n)}$, on a la décomposition suivante en produit d'algèbres locales :

$$\mathbb{C}[x, y]/I \simeq \prod_{i=1}^n (\mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}_i}/IC[x, y]_{\mathfrak{m}_i}) \simeq \prod_{i=1}^n (\mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}_i \mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}_i}).$$

Donc ρ est bijectif de $X_0^{[n]}$ sur $X_0^{(n)}$. Ces remarques mènent à s'intéresser au lemme suivant :

Lemme 3.16. *Le morphisme de Hilbert-Chow ρ réalise un isomorphisme de $X_0^{[n]}$ sur $X_0^{(n)}$.*

Démonstration. On va construire explicitement l'inverse qui correspond au sous-schéma fermé de $X \times X_0^{(n)}$ donné au niveau des points par $\{(x, \sum x_i), \exists i, x = x_i\}$. On va utiliser le lemme 3.14 qui montre que $X_0^n \rightarrow X_0^{(n)}$ est étale. Soit S un $X_0^{(n)}$ -schéma test, on considère le schéma cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\pi} & S \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ X_0^n & \rightarrow & X_0^{(n)} \end{array}$$

On dispose de n sections $s_i : \tilde{S} \rightarrow X$ et de leur graphe $Z_i \subset X \times \tilde{S}$ tels que leur réunion disjointe \tilde{Z} soit plat de degré n sur \tilde{S} . Comme π est étale,

$$Z = \pi_* \tilde{Z} \in \mathbf{hilb}_X^n(S).$$

Pour conclure, on applique ceci à $S = X_0^{(n)}$, et on obtient l'inverse voulu. \square

Théorème 3.17. $X^{[n]}$ est un schéma régulier irréductible de dimension $2n$.

Démonstration. On va montrer que pour tout Z dans $X^{[n]}$, $\dim T_Z X^{[n]} = 2n$. Ainsi, d'après ce qui précède (lemme 3.14 et lemme 3.16), on disposera du fermé $Y = \overline{X_0^{[n]}}$, irréductible et régulier de dimension $2n$. Ensuite, si $X^{[n]}$ n'était pas irréductible, par connexité (lemme 3.12), une autre composante Y' intercepterait Y en un point de Y qui ne serait pas régulier.

On exploite $T_Z X^{[n]} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,y]}(I, \mathbb{C}[x,y]/I)$ en appliquant $\mathrm{Hom}(\bullet, \mathcal{O}_Z)$ à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z). \end{array}$$

La première flèche étant un isomorphisme $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, il suffit de montrer que $\mathrm{ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \leq 2n$. Or $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) = \mathbb{C}^n$, et de plus :

$$\chi(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \mathrm{ext}^i(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) = 0.$$

En effet si $0 \rightarrow \mathcal{E}_l \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$ est une résolution localement libre de \mathcal{O}_Z sur X , $\sum (-1)^i \mathrm{rang}(\mathcal{E}_i) = 0$ et donc

$$\chi(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) = \sum_{i=0}^l (-1)^i \chi(\mathcal{E}_i, \mathcal{O}_Z) = \sum_{i=0}^l (-1)^i n \mathrm{rang}(\mathcal{E}_i) = 0.$$

Il suffit finalement donc de montrer que $\mathrm{ext}_{\mathcal{O}_X}^2(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \leq n$. On commence par plonger $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = X$ dans $\bar{X} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$: ainsi, Z étant ponctuel,

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^2(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^2(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z).$$

De plus, par dualité de Serre, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^2(\mathcal{O}_Z, K_{\bar{X}})$ est isomorphe à $H_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^0(\bar{X}, \mathcal{O}_Z)^\vee$ qui est de dimension n . Soit $0 \rightarrow \tilde{\mathcal{I}}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$ définissant Z comme sous-schéma fermé de \bar{X} . Comme $K_{\bar{X}}$ est inversible, et que Z est ponctuel, on obtient $0 \rightarrow \tilde{\mathcal{I}}_Z \otimes K_{\bar{X}} \rightarrow K_{\bar{X}} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$ puis :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^2(\mathcal{O}_Z, K_{\bar{X}}) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^2(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^3(\mathcal{O}_Z, \tilde{\mathcal{I}}_Z \otimes K_{\bar{X}}).$$

On peut donc conclure car $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^3(\mathcal{O}_Z, \bar{\mathcal{I}}_Z \otimes K_{\bar{X}})$ est nul, en effet \mathcal{O}_Z est de dimension projective 2 sur \bar{X} (voir [Har77], III 6.10A), ainsi :

$$n \geq \text{ext}_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^2(\mathcal{O}_Z, K_{\bar{X}}) \geq \text{ext}_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}^2(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z).$$

□

Remarque 3.18. On peut obtenir une résolution projective, et même libre (en fait c'est la même chose sur $\mathbb{C}[x, y]$), de longueur 2 en utilisant une famille quelconque de générateurs (Q_1, \dots, Q_r) de l'idéal I de $\mathbb{C}[x, y]$ associé à Z :

$$0 \rightarrow \ker \phi \rightarrow \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x, y]^r & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}[x, y] \\ (P_i) & \mapsto & \sum P_i Q_i \end{array} \rightarrow \mathbb{C}[x, y]/I \rightarrow 0$$

Théorème 3.19. *Le morphisme de Hilbert-Chow $\rho : X^{[n]} \rightarrow X^{(n)}$ est une résolution des singularités.*

Démonstration. $X^{[n]}$ est régulier, irréductible, et ρ est un isomorphisme au-dessus de $X_0^{(n)}$. Il reste donc à vérifier qu' $X_0^{(n)}$ est exactement le lieu régulier de $X^{(n)}$. On note Δ la diagonale définie comme étant $X^n \setminus X_0^n$. Si $\Delta_{i,j}$ désigne $\{(x_1, \dots, x_n) \in X^n, x_i = x_j\}$, on a donc $\Delta = \cup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{i,j}$. Soit aussi Δ_0 l'ouvert dense de Δ où exactement deux coordonnées coïncident, et $p \in \Delta_0$. On peut supposer que $p = (z, z, z_3, \dots, z_n)$ et on note \mathfrak{n} l'idéal associé. On identifie à \mathfrak{S}_2 le sous-groupe H de $G = \mathfrak{S}_n$ engendré par la transposition $\tau = (1, 2)$. On obtient alors la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{q} & X^n/\mathfrak{S}_n \\ r \searrow & & \nearrow s \\ & X^n/\mathfrak{S}_2 & \end{array}$$

Montrons que s est lisse en $r(p)$, en reprenant les notations de la preuve du lemme 3.14 : cette fois les idéaux $g\mathfrak{n}$, $g \in G$, au-dessus de \mathfrak{m} ne sont pas tous distincts. Le stabilisateur H de \mathfrak{n} est non trivial. Cependant on a toujours la décomposition :

$$\widehat{A} \simeq \prod_{\mathfrak{n}_i \in G\mathfrak{n}} \widehat{A}_{\mathfrak{n}_i},$$

et les invariants correspondent toujours à \widehat{B} . Il s'agit de calculer pour cette nouvelle configuration les invariants de l'anneau de droite dans la décomposition ci-dessus. Comme on est sur une orbite,

$$((\alpha_i) \in (\prod_{\mathfrak{n}_i \in G\mathfrak{n}} \widehat{A}_{\mathfrak{n}_i})^G, \alpha_1 \in \widehat{A}_{\mathfrak{n}}) \Rightarrow \{\alpha_i\} = G\alpha_1.$$

De plus, $\tau\alpha_1 = \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 \in (\widehat{A}_{\mathfrak{n}})^H$. La réciproque étant vraie, on a :

$$\widehat{B}_{\mathfrak{m}} = (\widehat{A}_{\mathfrak{n}})^H = \widehat{A}_{\mathfrak{n}}^H,$$

ce qui prouve le résultat.

Montrons maintenant que r n'est pas lisse en p : comme \mathfrak{S}_2 n'agit que sur les deux premiers complexes de coordonnées de $A = \mathbb{C}[X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n]$, il suffit d'étudier l'extension $\mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2]^{\mathfrak{S}_2} \hookrightarrow \mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$. On pose :

$$X = X_1 - X_2, Y = Y_1 - Y_2, X' = X_1 + X_2, Y' = Y_1 + Y_2.$$

Alors $\mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2] = \mathbb{C}[X, Y, X', Y']$ et

$$\tau(X) = -X, \tau(Y) = -Y, \tau(X') = X', \tau(Y') = Y'.$$

Ainsi $\mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2]^{\mathfrak{S}_2} = (\mathbb{C}[X, Y]^{\mathfrak{S}_2})[X', Y']$. De plus pour tout couple (i, j) , $\tau(X^i Y^j) = (-1)^{i+j} X^i Y^j$ donc $\mathbb{C}[X, Y]^{\mathfrak{S}_2}$ est le sous-espace engendré par les vecteurs propres pour la valeur 1, ce qui correspond à $i+j$ pair. Ainsi $\mathbb{C}[X, Y]^{\mathfrak{S}_2} = \mathbb{C}[X^2, XY, Y^2]$ et finalement

$$\mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2]^{\mathfrak{S}_2} = \mathbb{C}[U, V, W, X', Y'] / (UW - V^2).$$

Ainsi r n'est pas lisse en p , et donc q non plus, et donc $X^{(n)}$ n'est pas lisse en $q(p)$. Mais l'image directe de Δ_0 par q est dense dans $X^{(n)} \setminus X_0^{(n)}$. Le lieu singulier étant fermé, on a le résultat voulu. \square

4 La correspondance de McKay via les schémas de Hilbert

Cette section est basée sur l'article [IN99]. Elle permet d'éclaircir le théorème 2.12 en reliant directement les notions de désingularisation et de représentation. Bien sûr, au lieu de considérer des éclatements, on se servira cette fois du schéma de Hilbert.

4.1 Désingularisation

Lemme 4.1. *Soit τ un automorphisme d'un schéma X . Il existe une structure de schéma sur la partie de X constituée des éléments fixés par τ .*

Démonstration. La propriété universelle du produit fibré montre que le diagramme cartésien suivant définit le schéma X^τ des points fixes :

$$\begin{array}{ccc} X^\tau & \rightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow id \\ X & \xrightarrow{\tau} & X \end{array}$$

□

Corollaire 4.2. *Si un groupe fini G agit sur un schéma X , il existe une structure de schéma sur le sous-ensemble X^G des points fixés par G .*

On revient à un sous-groupe fini G de $Sl_2(\mathbb{C})$. Il agit sur $(\mathbb{A}^2)^{[n]}$ et $(\mathbb{A}^2)^{(n)}$ pour n que nous prendrons égal à l'ordre de G dans toute la suite. On notera désormais $\mathbb{A}^2 = X$. On dispose des schémas $(X^{[n]})^G$ et $(X^{(n)})^G$.

Lemme 4.3. *Le schéma $(X^{[n]})^G$ est régulier.*

Démonstration. Soit P un point de $(X^{[n]})^G$. Le groupe G agit sur l'anneau local (A, \mathfrak{m}) de $(X^{[n]})^G$ en P . Mais $g \in G$ préserve l'ensemble des éléments inversibles de A , et donc aussi son complémentaire \mathfrak{m} , ainsi que le carré \mathfrak{m}^2 . Comme on est en caractéristique nulle et que G est fini, il existe un supplémentaire stable par G de \mathfrak{m}^2 dans \mathfrak{m} . Soit alors $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base de ce supplémentaire, et $M(g) = (m_{i,j}(g))_{1 \leq i,j \leq r}$ la matrice d'un élément g de G dans cette base. Les équations définissant $(X^{[n]})^G$ sont alors :

$$x_i - \sum m_{i,j}(g)x_j = 0, \quad 1 \leq i, j \leq r, \quad g \in G.$$

Le schéma $(X^{[n]})^G$ est donc bien régulier. □

Lemme 4.4. *On a un isomorphisme $(X^{(n)})^G \simeq X/G$.*

Démonstration. Explicitons déjà le morphisme : la composée de $\prod_{g \in G} g : X \rightarrow X^n$ et de la projection $X^n \rightarrow X^{(n)}$ donne un morphisme $X \rightarrow X^{(n)}$ qui se factorise pour donner $X \rightarrow (X^{(n)})^G$. Par universalité cette fois du quotient $X \rightarrow X/G$, on obtient enfin bien un morphisme $X/G \rightarrow (X^{(n)})^G$. Ce morphisme est donné par $P \mapsto \sum_{g \in G} gP$ sur les points fermés, donc est bijectif, un point différent de l'origine n'étant fixé par aucun élément de G autre que l'identité.

Explicitons le morphisme inverse. Soit déjà $X^{n,G}$ défini par le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X^{n,G} & \rightarrow & X^n \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ (X^{(n)})^G & \rightarrow & X^{(n)} \end{array},$$

ses points fermés correspondent aux n -uplets $\{(x_1, \dots, x_n), \{x_i\} = Gx_1\}$. Soit un morphisme \mathfrak{S}_n -invariant $f : X^{n,G} \rightarrow Y$, avec $Y = X/G$. Comme $\prod_{g \in G} g$ induit un morphisme $X \rightarrow X^{n,G}$, on dispose de f_i , la composée $X^n \xrightarrow{pr_i} X \rightarrow X^{n,G} \xrightarrow{f} Y$. On utilise alors $\prod f_i$ qui induit un morphisme $X^{(n)} \rightarrow Y^{(n)}$ puis, par restriction,

$$\begin{array}{ccc} (X^{(n)})^G & \rightarrow & Y^{(n)} \\ \sum x_i & \mapsto & \sum f((gx_i)_{g \in G}) \end{array}.$$

Comme on a $\sum x_i \in (X^{(n)})^G$ et f \mathfrak{S}_n -invariant, il existe $y \in Y$ tel que, pour tout i , $f((gx_i)_{g \in G}) = y$. Ainsi ce dernier morphisme se factorise par l'immersion diagonale $Y \rightarrow Y^{(n)}$ pour donner $(X^{(n)})^G \rightarrow Y$. On applique enfin ceci à f la composée de $X^{n,G} \xrightarrow{pr_1} X \rightarrow X/G$.

Ensemblistement les morphismes construits sont inverses l'un de l'autres sur les points fermés, mais comme X/G est réduit (on le voit au cas par cas), on a bien un isomorphisme. \square

Théorème 4.5. *Il existe une des composantes irréductibles de $(X^{[n]})^G$, que l'on notera X_G , qui domine X/G et qui en est une résolution des singularités.*

Démonstration. On reprend les notations de la section 3. On avait obtenu le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X^{[n]} & \rightarrow & X^{(n)} \\ \cup & & \cup \text{ dense} \\ X_0^{[n]} & \xrightarrow{\sim} & X_0^{(n)} \end{array}.$$

En fait ce diagramme et les raisonnements qui ont permis de l'établir permettent d'obtenir le suivant, correspondant aux points fixes :

$$\begin{array}{ccc} (X^{[n]})^G & \rightarrow & (X^{(n)})^G \\ \cup & & \cup \\ (X_0^{[n]})^G & \xrightarrow{\sim} & (X_0^{(n)})^G \end{array}$$

où l'inclusion de droite est encore dense car $(X^{(n)})^G \simeq X/G$ est irréductible. Les mêmes arguments que dans la section précédente permettent de conclure en posant :

$$X_G = \overline{(X_0^{[n]})^G}.$$

□

Proposition 4.6. *Soit I dans X_G . En tant que G -modules, on a $\mathbb{C}[x, y]/I \simeq \mathbb{C}[G]$, où $\mathbb{C}[G]$ désigne la représentation régulière de G .*

Démonstration. Soit $f : X_G \hookrightarrow (X^{[n]})^G \rightarrow X^{[n]}$ l'application naturelle définissant X_G , puis $Z = (id_X \times f)^* Z_n(X)$ le sous-schéma fermé de $X \times X_G$ ensemblistement donné par $\{(y, Y), y \in Y\}$. On notera dans la suite $S = X_G$, et \mathcal{I} l'idéal associé à Z . On a donc $Z \in \mathfrak{hib}_X^n(S)$, ce qui entraîne, d'après [Blu06], que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{X \times S}/\mathcal{I}$ est un \mathcal{O}_S -module localement libre de rang fini.

Soit alors $\delta(g, x) = \det(x \cdot id - g)$ le polynôme caractéristique de l'action de $g \in G$ sur \mathcal{E} (indépendant des trivialisations locales de \mathcal{E}). On a $\delta(g, x) \in \text{Hom}(\det \mathcal{E}, \det \mathcal{E})[x]$, mais les coefficients de x sont des polynômes symétriques élémentaires en les valeurs propres de g qui sont toutes des racines n -ièmes de l'unité : comme $n = |G|$ est fixé, ces coefficients prennent valeurs dans un sous-ensemble fini de \mathbb{C} . Comme S est réduit et connexe, ils sont constants, et $\delta(g, x) \in \mathbb{C}[x]$. Ainsi le coefficient de x dans $\delta(g, x)$ ne dépend pas de $s \in S$. Comme la classe d'isomorphisme d'un G -module est déterminée par le caractère du G -module, la classe d'isomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times \{s\}}/\mathcal{I}_s$ (avec $\mathcal{I}_s = \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_{X \times \{s\}}$) ne dépend pas de $s \in S$.

Pour conclure on choisit s correspondant à une orbite avec n points distincts $GP = \{gP, g \in G\}$. On a alors, avec $J = \mathcal{I}_s$ idéal de $\mathbb{C}[x, y]$ et \mathfrak{m} correspondant à P (voir la remarque 3.15) :

$$\mathbb{C}[x, y]/J \simeq \prod_{g \in G} (\mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}}/J\mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}}) \simeq \prod_{g \in G} (\mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}\mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{m}}),$$

ce dernier étant isomorphe à $\mathbb{C}[G]$. □

Corollaire 4.7. *Toute fonction G -invariante s'annulant en l'origine est contenue dans I .*

Démonstration. On considère $f \in \mathbb{C}[x, y]^G$, et \bar{f} son image dans $\mathbb{C}[x, y]/I \simeq \mathbb{C}[G]$. Comme f est G -invariante, $\bar{f} \in \mathbb{C} \sum_{g \in G} g$, l'unique sous- G -module trivial de $\mathbb{C}[G]$. Il correspond aux fonctions constantes dans $\mathbb{C}[x, y]/I$. Ainsi, si on suppose en plus $f(0, 0) = 0$, on a nécessairement $\bar{f} = 0 \in \mathbb{C}[x, y]/I$. □

4.2 Le théorème

Dans le même cadre de la section précédente, on notera $S = X/G$, \mathfrak{m} (respectivement \mathfrak{m}_S) l'idéal à l'origine de X (respectivement de S) et $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_S \mathbb{C}[x, y]$. Soit aussi $\pi : X_G \rightarrow S$ la résolution et $E = \pi^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel dont on notera $\text{Irr } E$ l'ensemble de composantes irréductibles.

Par ailleurs le corollaire 4.7 nous permet de poser la définition suivante, où l'on notera $V(\rho)$ l'espace vectoriel sous-jacent à une représentation ρ du groupe G (parfois par abus on notera aussi ρ au lieu de $V(\rho)$) :

Définition 4.8. Soit I un idéal correspondant à un élément de E . Pour tous ρ, ρ' et ρ'' dans $\text{Irr } G$, on définit :

$$\begin{aligned} V(I) &= I/(\mathfrak{m}I + \mathfrak{n}) \\ E(\rho) &= \{I \in X_G ; V(\rho) \subset V(I)\} \\ P(\rho, \rho') &= \{I \in X_G ; V(\rho) \oplus V(\rho') \subset V(I)\} \\ Q(\rho, \rho', \rho'') &= \{I \in X_G ; V(\rho) \oplus V(\rho') \oplus V(\rho'') \subset V(I)\} . \end{aligned}$$

En effet on a prouvé en 4.7 que l'on a $\mathfrak{n} \subset I$. C'est l'introduction du G -module $V(I)$ qui va être fondamentale pour faire le pont entre la théorie des représentations et celle des désingularisations, permettant ainsi de lever le mystère sur l'observation de McKay, alors qu'il n'était pas possible de donner de structure naturelle de G -module aux éléments du lieu exceptionnel obtenu par éclatements.

Théorème 4.9. On a les résultats suivants :

1. l'application $\rho \mapsto E(\rho)$ réalise une bijection de $\text{Irr } G$ sur $\text{Irr } E$;
2. on a $P(\rho, \rho') \neq \emptyset$ si et seulement si ρ et ρ' sont adjacents, auquel cas c'est un point réduit en lequel $E(\rho)$ et $E(\rho')$ se coupent transeversalement ;
3. pour tous ρ, ρ' et ρ'' dans $\text{Irr } G$ on a $P(\rho, \rho) = Q(\rho, \rho', \rho'') = \emptyset$.

Preuve du cas de A_n . On utilise les notations de la preuve de 2.12, en y ajoutant $\mathfrak{m} = (x, y)$ et $\mathfrak{n} = (x^{n+1}, xy, y^{n+1})$ idéaux de $\mathbb{C}[x, y]$. Les représentations irréductibles de G sont ici toutes de dimension 1, données par la multiplication par ϵ^i pour $0 \leq i \leq n$. On note ρ_i la représentation associée à ϵ^i (ρ_0 est bien la représentation triviale).

Lemme 4.10. Tout idéal de E est de la forme :

$$I_i(p : q) = (px^i - qy^{n+1-i}, xy, x^{i+1}, y^{n+2-i})$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $(p : q) \in \mathbb{P}^1$.

Démonstration. On note $M = I/\mathfrak{n}$ et $N = \mathfrak{m}/\mathfrak{n} = (x, y)/(x^{n+1}, xy, y^{n+1})$. En notant $M[\rho_i]$ et $N[\rho_i]$ la somme des différents sous- G -modules de M et N isomorphes à ρ_i , on a déjà (pour $1 \leq i \leq n$) $N[\rho_i] = \langle x^i, y^{n+1-i} \rangle \simeq \rho_i^{\oplus 2}$. Or

(cf. 4.6) $\mathbb{C}[x, y]/I \simeq \mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{i=0}^n \rho_i$ donc $\mathfrak{m}/I \simeq \bigoplus_{i=1}^n \rho_i$ et donc $M[\rho_i] \simeq \rho_i$. Ainsi pour tout $i \neq 0$ il existe $(p_i : q_i) \in \mathbb{P}^1$ tel que $p_i x^i - q_i y^{n+1-i} \in M$. Si pour un i on a $p_i q_i \neq 0$, alors $I = (p_i x^i - q_i y^{n+1-i}, xy)$, sinon, pour un certain j , $I = (x^j, y^{n+2-j}, xy)$. \square

Soit i fixé entre 1 et n . La famille d'idéaux $\mathcal{F}_i = (I_i(p : q))_{(p:q) \in \mathbb{P}^1}$ nous donne un morphisme $\mathbb{P}^1 \rightarrow X_G$ (propriété universelle du schéma de Hilbert). On va montrer que cette application permet de plonger une courbe rationnelle C_i dans E . Plaçons nous en un point $I = I_i(p : q)$ tel que $I \notin \mathcal{F}_j$ pour $j \neq i$. Si on note W le G -module $\langle x^i, y^{n+1-i} \rangle$, l'application tangent en I du morphisme ci-dessus est donnée par (à gauche on identifie I au sous- G -module $\langle px^i - qy^{n+1-i} \rangle$ de W) :

$$d : \text{Hom}_G(I, W/I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}[x,y]}(I, \mathbb{C}[x, y]/I)^G.$$

Montrons l'injectivité de d : soit $\phi \in T_W C(\rho_1)$: comme $I \in E$, on a $d(\phi)(I) \subset \mathfrak{m}/I$, et d'après 4.7, $d(\phi)(\mathfrak{n}) = 0$. Mais comme I/\mathfrak{n} est engendré par $px^i - qy^{n+1-i}$ (c'est là que sert $I \notin \mathcal{F}_j$ pour $j \neq i$ car alors $pq \neq 0$), on déduit $d(\phi)$ de ϕ grâce à la propriété de $\mathbb{C}[x, y]$ -morphisme : on a bien l'injectivité de l'application tangente.

Reste à traiter le cas d'un point du type $I = (x^j, y^{n+2-j}, xy) \in \mathcal{F}_{j-1} \cap \mathcal{F}_j$. En fait l'étude des G -morphisms, notamment le fait qu'ils préservent les classes d'isomorphisme des G -modules irréductibles, montre (cf. $N[\rho_i] = \langle x^i, y^{n+1-i} \rangle$) que l'espace tangent est isomorphe à

$$\text{Hom}_G(\langle x^j \rangle, \langle y^{n+1-j} \rangle) \oplus \text{Hom}_G(\langle y^{n+2-j} \rangle, \langle x^{j-1} \rangle).$$

Ainsi on a bien deux courbes C_{j-1} et C_j qui s'interceptent transversalement en un tel point ce qui permet bien de conclure dans le cas de A_n puisque le lemme nous prouve que la réunion de ces courbes recouvre bien tout le lieu exceptionnel. En effet les courbes C_i obtenues se coupent bien suivant le diagramme de type A_n . \square

Preuve du cas de D_5 . Déjà on a dans $\mathbb{C}[x, y]$:

$$\mathfrak{m} = (x, y) \text{ et } \mathfrak{n} = (x^6 + y^6, x^2 y^2, xy(x^6 - y^6)).$$

En plus de celles introduites dans l'exemple 2.8 on introduit quelques notations :

Pour $m \leq 1$ on notera S_m le sous- G -module de \mathfrak{m} constitué des polynômes de degré m , et \bar{S}_m son image dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$. Comme \bar{S}_m se décompose en sous- G -modules irréductibles, on notera quand il existe $V_m(r)$ le sous-module associé à $r \in \text{Irr } G$. On rappelle que $\text{Irr } G = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_{\text{nat}} = \rho, \rho^2\}$ où les ρ_i désignent les représentations non triviales de dimension 1 :

- dans ρ_1 , $\alpha = 1$ et $\beta = -1$;
- dans ρ_1 , $\alpha = -1$ et $\beta = i$;
- dans ρ_1 , $\alpha = -1$ et $\beta = -i$.

On obtient les décompositions suivantes, qui serviront souvent dans la suite :

$$\begin{aligned}
\bar{S}_1 &= V_1(\rho) \\
\bar{S}_2 &= V_2(\rho_1) \oplus V_2(\rho^2) \\
\bar{S}_3 &= V_3(\rho) \oplus V_3(\rho_2) \oplus V_3(\rho_3) \\
\bar{S}_4 &= V_4(\rho^2) \oplus V_4'(\rho^2) \\
\bar{S}_5 &= V_5(\rho) \oplus V_5(\rho_2) \oplus V_5(\rho_3) \\
\bar{S}_6 &= V_6(\rho_1) \oplus V_6(\rho^2) \\
\bar{S}_7 &= V_7(\rho)
\end{aligned}$$

avec :

$V_1(\rho)$	$\langle x, y \rangle$	$V_2(\rho_1)$	$\langle xy \rangle$
$V_3(\rho)$	$\langle x^2y, xy^2 \rangle$	$V_6(\rho_1)$	$\langle x^6 - y^6 \rangle$
$V_5(\rho)$	$\langle x^5, y^5 \rangle$	$V_3(\rho_2)$	$\langle x^3 - iy^3 \rangle$
$V_7(\rho)$	$\langle xy^6, yx^6 \rangle$	$V_5(\rho_2)$	$\langle xy(x^3 + iy^3) \rangle$
$V_2(\rho^2)$	$\langle x^2, y^2 \rangle$	$V_3(\rho_3)$	$\langle x^3 + iy^3 \rangle$
$V_4(\rho^2)$	$\langle x^4, y^4 \rangle$	$V_5(\rho_3)$	$\langle xy(x^3 - iy^3) \rangle$
$V_4'(\rho^2)$	$\langle x^3y, yx^3 \rangle$		
$V_6(\rho^2)$	$\langle x^5y, y^5x \rangle$		

Ainsi on a l'égalité de G -modules :

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{n} = \bigoplus_{i=1}^7 \bar{S}_i = (\mathbb{C}[G] \ominus \rho_0)^{\oplus 2}.$$

Enfin pour $r \in \text{Irr } G$ et V, W deux G -modules isomorphes à r , on notera $\mathbb{P}(V \oplus W)$ l'ensemble des sous- G -modules irréductibles (tous isomorphes à r) de $V \oplus W$. On a l'isomorphisme suivant (cf. lemme de Schur) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}(V \oplus W) \\
(a : b) &\mapsto G(ax + by)
\end{aligned}$$

pour $x + y$ fixé dans $V \oplus W \setminus V \cup W$. On peut alors passer à la preuve elle-même : on veut vérifier que l'application du premier point du théorème est bien définie, et pour cela on va commencer par construire d'une certaine manière des éléments de $E(r)$ pour les différents $r \in \text{Irr } G$, en commençant par $r = \rho_1$:

Soit un G -module non nul $W \in \mathbb{P}(V_2(\rho_1) \oplus V_6(\rho_1))$ tel que $W \neq V_6(\rho_1)$, et $I = I(W)$ l'idéal de $\mathbb{C}[x, y]$ engendré par W et \mathfrak{n} . On a alors, en utilisant $S_1 \otimes V_6(\rho_1) = S_5 \otimes V_2(\rho_1)$ (cf. aussi les décompositions données ci-dessus) :

$$\begin{aligned}
I/\mathfrak{n} &= (W + \sum_{k=1}^5 S_k \otimes W + \mathfrak{n})/\mathfrak{n} \\
&= (W + \sum_{k=1}^5 S_k \otimes V_2(\rho_1) + \mathfrak{n})/\mathfrak{n} \\
&\simeq W + \rho + \rho^2 + (\rho_2 + \rho_3) + \rho^2 + \rho \\
&\simeq \sum_{r \in \text{Irr } G} \deg(r)r
\end{aligned}$$

et donc $I \in X_G$, en effet

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{C}[x, y]/I &= \dim \mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n} - \dim I/\mathfrak{n} \\
&= 1 + \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{n} - \dim I/\mathfrak{n} \\
&= 1 + \sum_{r \in \text{Irr } G} 2(\deg r)^2 - \sum_{r \in \text{Irr } G} (\deg r)^2 \\
&= \sum_{r \in \text{Irr}^* G} (\deg r)^2 \\
&= |G|.
\end{aligned}$$

De plus $V(I) = I/(\mathfrak{m}I + \mathfrak{n}) \simeq W \simeq \rho_1$ donc $I \in E(\rho_1) \setminus P(\rho_1, \rho)$. En faisant tendre W vers $V_6(\rho_1)$, on obtient cette fois dans X_G :

$$\begin{aligned}
I &= V_6(\rho_1) + \sum_{k=1}^5 S_k \otimes V_2(\rho_1) + \mathfrak{n} \\
&= I(V_6(\rho_1) \oplus [S_1 \otimes V_2(\rho_1)]) \\
&= I(V_6(\rho_1) \oplus V_3(\rho)),
\end{aligned}$$

et donc $I \in P(\rho_1, \rho)$. On peut expliquer l'intérêt de faire le produit tensoriel par $\rho_{\text{nat}} = \rho \simeq S_1$ pour rendre ρ_1 et ρ adjacents par la présence de $[S_1 \otimes V_2(\rho_1)]$ dans les générateurs de $I \in P(\rho_1, \rho)$.

De même on peut par exemple obtenir des éléments de $E(\rho)$ par ce type de construction : soit cette fois $W \in \mathbb{P}(V_3(\rho) \oplus V_5(\rho))$ tel que $W \neq V_3(\rho), V_5(\rho)$. Alors (voir encore décompositions plus haut) :

$$\begin{aligned}
I/\mathfrak{n} &= (W + \sum_{k \geq 1} S_k \otimes W + \mathfrak{n})/\mathfrak{n} \\
&= (W + \sum_{k=1}^2 S_k \otimes V_3(\rho) + \bar{S}_6 + \bar{S}_7 + \mathfrak{n})/\mathfrak{n} \\
&\simeq W + \rho^2 + (\rho_2 + \rho_3) + (\rho_1 + \rho^2) + \rho \\
&\simeq \sum_{r \in \text{Irr } G} \deg(r)r,
\end{aligned}$$

et par le même calcul que précédemment, on en déduit $I \in X_G$, puis ici $I \in E(\rho)$. On peut cette fois à nouveau atteindre $P(\rho_1, \rho)$, mais en faisant cette fois tendre W vers $V_3(\rho)$ avec $\rho \simeq W \in \mathbb{P}(V_3(\rho) \oplus V_5(\rho)) \simeq \mathbb{P}^1$: dans X_G on obtient en effet (cf. $\bar{S}_6 = V_6(\rho_1) + S_3 \otimes V_3(\rho)$ et $\bar{S}_7 = S_4 \otimes V_3(\rho)$)

$$\begin{aligned}
I &= V_6(\rho_1) + V_3(\rho) + \sum_{k \geq 1} S_k \otimes V_3(\rho) + \mathfrak{n} \\
&= I(V_6(\rho_1) \oplus V_3(\rho)) \\
&\in P(\rho_1, \rho).
\end{aligned}$$

Le fait de tensoriser par ρ_{nat} en théorie des représentations se justifie donc ici par le fait que $E(\rho_1)$ et $E(\rho)$ s'intersectent.

On peut reproduire le raisonnement : pour chaque $r \in \text{Irr } G$ on peut donc "identifier" $E(r)$ à une courbe isomorphe à \mathbb{P}_1 . On peut par ailleurs prouver (dans le cas de D_5 comme pour les autres) que, comme dans le cas étudié précédemment, ces courbes se coupent lorsqu'elles sont associées à deux représentations adjacentes (voir le diagramme donné dans 2.8). Plus précisément, on a le résultat suivant, qui justifie mathématiquement ce qui vient d'être dit (bien qu'il soit vrai dans une plus grande généralité, mais pour ne pas introduire encore de nouvelles notations, on l'énonce dans un cas particulier déjà traité, celui de $r = \rho_1$) :

Lemme 4.11. *On note $C(\rho_1) = \mathbb{P}(V_2(\rho_1) \oplus V_6(\rho_1)) \simeq \mathbb{P}^1$ et $E^*(\rho_1)$ l'adhérence dans E de l'ensemble*

$$\{I(W) ; W \in C(\rho_1) \setminus V_6(\rho_1)\}.$$

Alors $E^*(\rho_1)$ est une courbe lisse isomorphe à \mathbb{P}_1 .

Remarque 4.12. – Si r avait été adjacente à deux autres représentations, il aurait fallu enlever deux points, et non un seul, à $C(r)$, comme dans le cas traité plus haut de $r = \rho_{nat}$.

- Il sera utile dans la suite de voir les $E(r)$ comme des fermés munis de leur structure réduite. Ils sont fermés car donnés par les équations $\langle \chi_r, \chi_{V(I)} \rangle \geq 1$ (voir [Ser71]).
- Dans l'énoncé, l'adhérence considérée correspond aux "limites" que l'on considérerait plus haut. En fait on va se servir de ces $E^*(r)$ avant de pouvoir traiter les $E(r)$ dont la structure schématique est plus difficile à étudier.

Démonstration. On va d'abord énoncer et démontrer un autre lemme (qui se généralise pour r et r' adjacentes) :

Lemme 4.13. $E^*(\rho_1)$ et $E^*(\rho)$ s'intersectent transversalement en $P(\rho_1, \rho)$.

Démonstration. D'après 3.11 et la preuve du théorème 4.5, on voit que pour $Z \in X_G$ associé à $I \subset \mathbb{C}[x, y]$, on a

$$T_Z X_G = \text{Hom}_{\mathbb{C}[x, y]}(I, \mathbb{C}[x, y]/I)^G.$$

D'après le début de la preuve du théorème il s'agit donc de considérer $W = V_2(\rho_1) \oplus V_6(\rho_1)$, si bien que $I = I(W) \in P(\rho_1, \rho)$. On va montrer :

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}[x, y]}(I, \mathbb{C}[x, y]/I)^G = \text{Hom}_G(V_6(\rho_1), V_2(\rho_1)) \oplus \text{Hom}_G(V_3(\rho), V_5(\rho)).$$

En fait, ce qui est sûr d'après le tableau donné en début de preuve et l'expression de W , c'est que $\text{Hom}_{\mathbb{C}[x, y]}(I, \mathbb{C}[x, y]/I)^G$ est inclus dans

$$\text{Hom}_G(V_6(\rho_1), V_2(\rho_1)) \oplus \text{Hom}_G(V_3(\rho), V_1(\rho) \oplus V_5(\rho)).$$

En effet,

$$\left. \begin{array}{l} 0 \neq \phi \in \text{Hom}_G(V, W) \\ V \simeq r \in \text{Irr } G \\ W \in \text{Irr } G \end{array} \right\} \Rightarrow W \simeq r$$

et $V_7(\rho)$ n'apparaît pas car il est inclus dans I . Sans donner les détails, le fait que l'on considère à gauche des morphismes de $\mathbb{C}[x, y]$ -modules montre que l'on peut s'affranchir du facteur $V_1(\rho)$ (il s'agit de travailler sur des morphismes à la fois de G - et de $\mathbb{C}[x, y]$ -modules, ce qui réduit grandement les possibilités). Pour l'inclusion inverse, on peut utiliser un argument de dimension puisque $\dim T_Z X_G = 2$ d'après 4.5.

On conclut grâce au fait que se situer sur $E^*(\rho_1)$ (respectivement $E^*(\rho)$) correspond justement au fait que $T_Z E^*(\rho_1) = \text{Hom}_G(V_6(\rho_1), V_2(\rho_1))$ (respectivement $T_Z E^*(\rho) = \text{Hom}_G(V_3(\rho), V_5(\rho))$). \square

On peut passer à la preuve du lemme 4.11 en elle-même : on va utiliser une nouvelle fois la propriété universelle du schéma de Hilbert. Soit $C^0 = C(\rho_1) \setminus V_6(\rho_1) \simeq \mathbb{A}^1$; la famille $(I(W))_{W \in C^0}$ nous donne un morphisme $\iota : C^0 \rightarrow X_G$, donc un morphisme $d = T_W \iota : T_W C^0 \rightarrow T_Z X_G$ pour $W \in C^0$ et Z correspondant à $I = I(W)$, soit encore

$$d : \text{Hom}_G(W, V_2(\rho_1) \oplus V_6(\rho_1)/W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}[x,y]}(I, \mathbb{C}[x,y]/I)^G.$$

Il s'agit de montrer que d est injectif. La preuve est analogue au cas de A_n : soit $\phi \in T_W C(\rho_1)$: comme $C(\rho_1) \subset E$, on a $d(\phi)(I) \subset \mathfrak{m}/I$, et d'après 4.7, $d(\phi)(\mathfrak{n}) = 0$. Mais comme I/\mathfrak{n} est engendré par W , on déduit $d(\phi)$ de ϕ par extension à $\bigoplus S_k \otimes W$ grâce à la propriété de $\mathbb{C}[x,y]$ -morphisme : on a bien l'injectivité de l'application tangente. Pour le cas de $W = V_6(\rho_1)$, on conclut grâce à 4.13. \square

On peut maintenant achever la preuve du théorème en prouvant que pour tout r , $E(r) = E^*(r)$: en effet en complétant l'étude faite en début de preuve, on se rend compte que le diagramme de Dynkin associé aux $E^*(r)$ est bien D_5 (on leur associe ce diagramme de la même manière que l'on a construit Γ_G). On aura donc bien la bijection proposée dans le premier point de l'énoncé du théorème.

On note E^* la réunion des $E^*(r)$ pour $r \in \text{Irr } G$. On a $E^* \subset E$ puisque ce dernier est fermé (voir 4.12), et même $E^*(r) \subset E(r)$. D'après 4.5, le morphisme de désingularisation $\pi : X_G \rightarrow X/G$ est birationnel, et donc E est connexe, tout comme E^* puisque son diagramme l'est. En fait les deux lemmes précédents nous montrent que E^* est lisse partout sauf en les points $I(W(r, r'))$, r et r' adjacentes, en lesquels deux composantes irréductibles $E^*(r)$ et $E^*(r')$ se coupent transversalement. Pour conclure que E^* est une composante connexe de E , et que finalement $E^*(r) = E(r)$ pour tout r , il faut se convaincre du fait que E ne contient pas de composante irréductible autre que les $E^*(r)$. On peut le faire d'au moins deux manières :

- en montrant que tout I dans E peut-être écrit comme un $I(W)$, en utilisant la décomposition en sous- G -modules irréductibles de I/\mathfrak{n} ;
- en utilisant le théorème 9.3 de [IN99] pour montrer que la désingularisation mise en place par le schéma de Hilbert à n points est bien minimale, et donc (voir 2.14) isomorphe à celle obtenue par éclatements : ainsi on connaît le nombre de composantes irréductibles dans E (5 dans le cas de D_5), qui est le même que celui de E^* .

\square

5 Conclusion

La technique développée dans [IN99] explique donc bien en quoi chaque branche du diviseur exceptionnel est reliée à une représentation irréductible en particulier. La preuve se faisant au cas par cas, elle est longue et difficile à exposer, mais reste un excellent exemple de l'utilisation des schémas de Hilbert en général, et plus généralement des schémas de Hilbert dits à n points.

Dans la section 8 de [IN99] sont données quelques explications et références quant à la classification des sous-groupes finis de $Sl_3(\mathbb{C})$, qui généralise celle traitée ici. On trouvera enfin de nombreuses références concernant la correspondance de McKay à l'adresse suivante :

<http://www.warwick.ac.uk/~masda/McKay/>.

Références

- [Blu06] M. Blume. Construction of G-Hilbert schemes. *Arxiv preprint math/0607577*, 2006.
- [Coh76] A.M. Cohen. Finite complex reflection groups. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 4(9) :379–436, 1976.
- [Eis95] D. Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer, 1995.
- [ES98] G. Ellingsrud and S.A. Strømme. An intersection number for the punctual Hilbert scheme of a surface. *Transactions of the American Mathematical Society*, 350(6) :2547–2552, 1998.
- [FGI⁺05] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S.L. Kleiman, N. Nitsure, and A. Vistoli. *Fundamental algebraic geometry : Grothendieck’s FGA explained*. American Mathematical Society, 2005.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer, 1977.
- [IN99] Y. Ito and I. Nakamura. Hilbert schemes and simple singularities. *New trends in algebraic geometry : EuroConference on Algebraic Geometry, Warwick, July 1996*, page 151, 1999.
- [Kle05] S.L. Kleiman. The picard scheme. *Arxiv preprint math.AG/0504020*, 2005.
- [Mum70] D. Mumford. *Introduction to algebraic geometry : preliminary version of first 3 chapters*. Harvard University, 1970.
- [Ser71] J.P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Paris, 1971.