Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques

J.-F. Dat

2 septembre 2007

Résumé

We study basic properties of the category of smooth representations of a p-adic group G with coefficients in any commutative ring R in which p is invertible. Our main purpose is to prove that Hecke algebras are noetherian whenever R is ; this question arose naturally with Bernstein's fundamental work [3] for $R = \mathbb{C}$, in which case he proved this noetherian property. In a first step, we prove that noetherianity would follow from a generalization of the so-called second adjointness property between parabolic functors, also due to Bernstein for complex representations. Then, to attack this second adjointness, we introduce and study "parahoric functors" between representations of groups of integral points of smooth integral models of G and of their "Levi" subgroups. Applying our general study to Bruhat-Tits parahoric models, we get second adjointness for minimal parabolic groups. For non-minimal parabolic subgroups, we have to restrict to classical and linear groups, and use smooth models associated with Bushnell-Kutzko and Stevens semi-simple characters. The same strategy should apply to "tame" groups, using Yu's smooth models and generic characters.

Table des matières

1 Introduction

1.1 *Le problème :* Soit K un corps local non archimédien d'anneau des entiers $\mathcal{O}$ et de corps résiduel fini k de caractéristique p, et $\mathcal{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur K. On

[0] Classification AMS : 20E50

pose[1] $G := \mathcal{G}(K)$. Si H est un sous-groupe ouvert compact de G, on peut former l'anneau de Hecke $\mathcal{H}(G,H) := \mathbb{Z}[H\backslash G/H]$ des doubles classes de H dans G. Un célèbre théorème de Bernstein [3] affirme qu'après extension des scalaires de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{C}$, ces anneaux sont noethériens. La preuve de Bernstein est très indirecte car il étudie principalement la catégorie $Mod_{\mathbb{C}}(G)$ des représentations complexes lisses de G. Le principe fondamental qui soutient toute sa théorie est qu'une représentation irréductible supercuspidale complexe est un objet projectif ("modulo le centre") de $Mod_{\mathbb{C}}(G)$. Ainsi, la même preuve devrait fournir le même résultat après extension des scalaires à n'importe quel corps de caractéristique suffisamment grande (banale dans la terminologie de Vignéras [28]), mais ne fonctionnera pas pour un corps de caractéristique non-banale, sans parler du cas d'un anneau. Il est pourtant naturel de s'attendre à ce que ces anneaux de Hecke vérifient une propriété de type "théorème de Hilbert" : R noethérien $\Rightarrow R[H\backslash G/H]$ noethérien. C'est ce que nous étudions – entre autres – dans cet article, avec l'hypothèse supplémentaire que p est inversible dans R, car notre méthode aussi passe par l'étude de la catégorie $Mod_R(G)$ des RG-modules lisses et que pour faire le lien avec les algèbres de Hecke, on a besoin de l'existence d'une mesure de Haar à valeurs dans R, comme dans [30, I.2].

Bien sûr, l'intérêt de passer par la catégorie $Mod_R(G)$ vient des foncteurs d'induction et restriction paraboliques qui permettent de faire des raisonnements par récurrence sur le rang semi-simple de G. Si $\mathcal{P}$ est un K-sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathcal{P}$, la réciprocité de Frobenius nous dit que la "restriction" parabolique $r_{G,P}^M$ est adjointe à gauche de l'induction $i_{M,P}^G$. Dans un article non publié [2] mais bien connu des spécialistes, Bernstein a découvert (avec surprise) que pour les représentations *complexes*, il existe une deuxième propriété d'adjonction, entre le foncteur $i_{M,P}^G$ à gauche et le foncteur $\delta_P r_{G,\overline{P}}^M$ à droite, où $\overline{P}$ est le parabolique opposé à P par rapport à M et δ_P le module de P. Bushnell a publié [13] une preuve différente de cette deuxième adjonction, mais chacune de ces preuves repose de manière cruciale sur la propriété de noethérianité des algèbres de Hecke complexes.

1.2 *Principaux théorèmes* : Dans le présent article nous procédons en sens inverse. Dans la section 4 nous prouvons en effet, pour un anneau de coefficients R noethérien et où p est inversible, que *la deuxième adjonction implique la noethérianité* :

Théorème 1.3 *Si pour tout sous-groupe parabolique de tout sous-groupe de Levi de $\mathcal{G}$, les foncteurs paraboliques vérifient la seconde adjonction, alors la catégorie* $\mathrm{Mod}_R(G)$ *est noethérienne et, pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H de G, l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G,H)$ est noethérienne.*

La preuve de ce résultat utilise les propriétés des représentations à coefficients dans des corps valués étudiées dans [16].

Dès lors, la majeure partie de cet article vise à établir la propriété de seconde adjonction. Pour cela on utilise un nouvel outil baptisé *induction parahorique*. Identifions l'immeuble étendu $B(\mathcal{M},K)$ de $\mathcal{M}$ à un sous-M-espace de celui de $\mathcal{G}$. Si $x \in B(\mathcal{M},K)$, on définit un certain idempotent $\varepsilon_{x,P}$ dans l'algèbre $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G_x$ des $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-distributions sur le fixateur G_x de x dans G, normalisé par le fixateur M_x de x dans M. Par produit tensoriel avec le (M_x,G_x)-bimodule $\varepsilon_{x,P}\mathcal{C}_R^\infty(G_x)$, on obtient des foncteurs d'induction $I_{x,P}$ et restriction $R_{x,P}$ entre M_x-modules lisses et G_x-modules lisses à coefficients dans R. La motivation initiale pour introduire ces foncteurs vient des relations de commutation remarquables suivantes ; dans le cas où P est *minimal* (*cf.* 6.2 ii) et 3.6), il existe des isomorphismes de foncteurs :

$$ind_{G_x}^G \circ I_{x,P} \simeq i_{M,P}^G \circ ind_{M_x}^M \quad \text{et} \quad Res_M^{M_x} \circ r_{G,P}^M \simeq R_{x,P} \circ Res_G^{G_x}. \tag{1.4}$$

Notons que ceci est nouveau aussi pour $R = \mathbb{C}$. Nous expliquons alors en 3.9 comment la seconde adjonction (pour les sous-groupes paraboliques minimaux) découle de ces formules.

Malheureusement, il semble que ces relations de commutation entre foncteurs paraboliques et parahoriques soient spécifiques aux paraboliques minimaux. En général on introduit la notion

[1]De manière générale, nous noterons les K-schémas par des lettres calligraphiées et leurs K-points par les lettres ordinaires correspondantes.

d'idempotent P-bon de RM, *cf* 3.8. Il s'agit *grosso-modo* d'un idempotent ε pour lequel il existe un élément x de $B(\mathcal{M}, K)$ tel que $\varepsilon \in RM_x$ et que les foncteurs suivants soient isomorphes (on sera plus précis dans le texte)

$$\varepsilon.Res_M^{M_x} \circ r_{G,P}^M \simeq \varepsilon.R_{x,P} \circ Res_G^{G_x}.$$

S'il existe "suffisamment" de tels idempotents (*i.e.* s'ils engendrent la catégorie $Mod_R(M)$), alors d'après 3.9, la seconde adjonction est vérifiée pour P.

Reste donc à produire des familles génératrices d'idempotents P-bons. Ceci semble une tâche ardue en général, aussi difficile que la construction de strates ou types "raffiné(e)s". Pour un groupe linéaire ou classique, nous montrons dans les sections 7 et 8 que la famille des idempotents associés aux caractères semi-simples de Stevens [26] convient. Nous devons au passage prouver des résultats apparemment nouveaux dans cette théorie (propositions 7.4 et 8.4). On obtient donc pour tout anneau de coefficients R où p est inversible :

Théorème 1.5 *Soit G un groupe linéaire, classique (on suppose alors $p \neq 2$), ou de rang relatif* 1. *Pour tout sous-groupe parabolique de tout sous-groupe de Levi, les foncteurs paraboliques associés vérifient la seconde adjonction.*

Ici, par groupe "classique" on entend le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel préservant une forme bilinéaire ou hermitienne non-dégénérée. Ces groupes sont en particulier quasi-déployés. Outre la propriété de noethérianité 1.3, on a aussi les conséquences suivantes :

Corollaire 1.6 *Avec la même hypothèse sur G,*

i) Pour R noethérien, les foncteurs de restriction parabolique de Jacquet préservent la R-admissibilité, cf. *3.9 i).*

ii) Support uniforme *: Pour tout pro-p-sous-groupe H de G il existe un sous-ensemble S_H de G, compact modulo le centre et* indépendant de l'anneau R *supportant toutes les fonctions cuspidales dans $\mathcal{C}_R^c(H\backslash G/H)$,* cf. *3.10.*

iii) Irréductibilité générique *: Si R est un corps algébriquement clos, alors pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{MU}$ et toute $\pi \in \mathrm{Irr}_R(M)$, la famille $i_{M,P}^G(\pi\psi)$ pour $\psi : M/M^c \longrightarrow R^\times$ est génériquement irréductible,* cf. *4.12.*

Signalons que le dernier point pour R de caractéristique non nulle n'est nouveau que lorsque K est aussi de caractéristique non nulle, *cf.* [16]. Quant au point ii), il peut être utile à ceux qui s'intéressent aux congruences entre formes automorphes.

L'ingrédient essentiel pour produire des idempotents P-bons est une sorte de généralisation d'un résultat de Howlett-Lehrer [20] où l'on remplace les foncteurs paraboliques des groupes de Lie finis par nos foncteurs parahoriques pour des modèles entiers de $\mathcal{G}$, *cf.* partie 5, qui dans les applications seront les modèles de Bruhat-Tits (cas minimal) ou les modèles entiers associés aux types de Bushnell-Kutzko-Stevens (cas général pour les groupes classiques). On peut aussi appliquer cet ingrédient aux modèles entiers de Yu [32] associés à ses types "modérés" [32], voir la partie 9. Manque alors un résultat d'exhaustivité, analogue de 7.5 et 8.5. Une preuve d'une variante d'un tel résultat a été récemment donnée par Kim [21] sous l'hypothèse que p soit suffisamment grand, mais repose sur des arguments transcendants (formule de Plancherel, germes de caractères...), et il n'est pas clair que l'on puisse en tirer ce qui nous est nécessaire ici.

Enfin, on obtient aussi quelques résultats partiels sans conditions sur $\mathcal{G}$; outre la seconde adjonction pour les paraboliques minimaux déjà mentionnée, on prouve la noethérianité de la sous-catégorie pleine de $Mod_R(G)$ des objets "de niveau zéro", ainsi que la seconde adjonction des foncteurs paraboliques restreints à ces sous-catégories, *cf.* 6.3.

1.7 *Organisation de l'article* : L'induction parahorique est définie dans la première section. C'est un cas particulier d'"induction" pour des groupes munis d'une décomposition d'Iwahori "abstraite", et c'est par une discussion de cette situation générale que la section commence ; le résultat fondamental est la proposition 2.2.

La partie 3 étudie les propriétés de commutation entre foncteurs parahoriques et foncteurs paraboliques (notamment 3.6). On y dégage la notion d'idempotent P-bon, et on prouve la seconde adjonction en 3.9, sous réserve qu'il existe “suffisamment” de tels idempotents. Puis dans la partie 4, on prouve que “la seconde adjonction implique la noetherianité”.

Dans la partie 5 on considère des modèles entiers lisses de $\mathcal{G}$ et on étudie une version de l'induction parahorique pour ces groupes. On prouve alors un énoncé d'indépendence du sous-groupe parahorique 5.8, analogue à l'énoncé principal de [20] sur l'indépendance du sous-groupe parabolique pour l'induction parabolique des groupes finis.

Dans la partie 6, on spécialise la précédente aux modèles de Bruhat-Tits et on applique les résultats obtenus aux foncteurs paraboliques minimaux et aux représentations de niveau zéro. Dans les parties 7 et 8, on spécialise la partie 5 aux modèles entiers associés aux caractères semi-simples de Stevens, et on prouve le théorème 1.5. Dans la partie 9 on spécialise la partie 5 aux modèles entiers de Yu et à ses caractères génériques ; il ne manque qu'un résultat crucial d'exhaustivité pour en déduire la noetherianité.

Remerciements : je remercie B. Lemaire pour quelques discussions sur les strates et autres modèles entiers, S. Stevens pour quelques explications sur sa théorie, et G. Henniart pour son intérêt dans ce travail. Je remercie aussi M.-F. Vignéras pour m'avoir transmis ce problème de noetherianité, qu'elle a abordé dans [29]. Signalons aussi, outre les travaux non-publiés de Bernstein sur ce sujet (à peine évoqués dans [2, 5.4, Rk 1]) une autre approche imaginée par Bezrukavnikov, très naturelle mais qui à ma connaissance n'a pas abouti, consistant à essayer de prouver la noetherianité du gradué des algèbres de Hecke pour une certaine filtration “géométrique” [4, II-2].

1.8 *Notations :* Pour tout groupe localement compact totalement discontinu H et tout anneau commutatif R on note :

– $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)$, le R-module des fonctions localement constantes à valeurs dans R et à support compact. Une R-forme linéaire sur $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)$ est appelée “R-distribution sur H” et l'accouplement entre une fonction f et une distribution μ est traditionnellement noté $\int f\mu$. On a un plongement du commutant $End_{RH}(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H))$ des translations à droite par H dans le module des R-distributions sur H, qui à un endomorphisme A associe la distribution μ définie par $\int f\mu := A(f)(1)$. Les distributions qui sont dans l'image de ce plongement sont dites “essentiellement compactes à droite” et sont caractérisées par la propriété que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)$, la fonction $\mu * f : \; h \mapsto \int(\rho(h).f)\mu$ est à support compact, où $\rho(h)$ désigne la translation à droite. L'isomorphisme réciproque envoie une distribution essentiellement compacte à droite μ sur l'endomorphisme $A : \; f \mapsto \mu * f$, et le produit déduit de la composition des endomorphismes est appelé “produit de convolution”.
– RH le R-module des R-distributions à support compact. Comme une telle distribution est en particulier essentiellement compacte (à droite et à gauche), le produit de convolution précédent se restreint à RH (indépendamment du côté choisi) et en fait une R-algèbre avec unité. Lorsque H est fini, on peut identifier RH à l'algèbre de groupe $R[H]$ en envoyant une distribution μ sur la combinaison linéaire $\sum_{h\in H}(\int \chi_h\mu)h$ où χ_h est la fonction caractéristique de $\{h\}$. Lorsque H est compact, on peut choisir une base de voisinages de l'unité $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de sous-groupes normaux. La formation de RH étant covariante en H, on a un morphisme canonique $RH \longrightarrow \varprojlim R[H/H_n]$ qui est un isomorphisme de R-algèbres. Enfin, si K est un sous-groupe de H, le morphisme $RK \longrightarrow RH$ est injectif, et lorsque K est ouvert, le RK-module à gauche RH est libre et tout système de représentants de $K\backslash H$ en forme une base. Par ailleurs, l'application inverse $h \mapsto h^{-1}$ de H induit un antiautomorphisme de RH que nous noterons $\mu \mapsto \check{\mu}$, et qui permet de passer des modules à droite aux modules à gauche.
– $Mod_R(H)$ la catégorie des représentations lisses de H à coefficients dans R, dont les objets sont les R-modules munis d'une action de H telle que le stabilisateur d'un élément soit ouvert. Notons que pour tout R-module V, on a une application $RH \longrightarrow Hom_R(\mathcal{C}^\infty(H,V),V)$ qui à une distribution μ associe l'application R-linéaire $\int -\mu : \; \mathcal{C}^\infty(H,V) \xrightarrow{rest} \mathcal{C}^\infty(C,V) \simeq \mathcal{C}^\infty(C,R)\otimes V \xrightarrow{\mu\otimes \mathrm{Id}} V$ où C est n'importe quel sous-ensemble compact ouvert de H conte-

nant le support de μ. Tout objet de $Mod_R(H)$ est canoniquement muni d'une action à gauche de RH donnée par $\mu.v := \int(h \mapsto hv)\mu$. Ceci induit un plongement pleinement fidèle $Mod_R(H) \hookrightarrow Mod(RH)$. S'il existe une mesure de Haar dh sur H à valeurs dans R – au sens de Vignéras [30, I.3] – alors le sous-R-module $\mathcal{H}_R(H) := \mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)dh$ de RH formé des distributions localement constantes est un idéal bilatère de RH engendré par ses idempotents, et l'image essentielle de $Mod_R(H)$ dans $Mod(RH)$ s'identifie à la catégorie des modules "non-dégénérés" sur $\mathcal{H}_R(H)$.

Si K est un sous-groupe compact de H de pro-ordre inversible dans R, la mesure de Haar dk de volume total 1 sur K définit un idempotent de RH que nous noterons e_K. Son action sur un objet (π, V) de $Mod_R(G)$ est donc donnée par $e_K.v = \int_K \pi(k)vdk$.

Enfin, si A est un anneau, on note $\mathcal{Z}(A)$ son centre, on appelle A-module un module à gauche sur A, et si B est un autre anneau, on appelle (A,B)-bimodule un groupe abélien muni d'une action à gauche de A et à droite de B.

2 Décompositions à la Iwahori et induction parahorique

Au début de cette section, la lettre G ne désigne pas nécessairement un groupe réductif p-adique.

Définition 2.1 *Soit G un groupe profini, muni de deux sous-groupes fermés U et $\overline{U}$ normalisés par un troisième sous-groupe fermé M. Nous dirons que le triplet $(U, M, \overline{U})$ induit une* décomposition d'Iwahori *de G si :*

i) L'application produit $U \times M \times \overline{U} \longrightarrow G$ est bijective.

ii) Il existe une base $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de voisinages de G formée de sous-groupes ouverts normaux de la forme $G_i = (U \cap G_i)(M \cap G_i)(\overline{U} \cap G_i)$.

On obtient par exemple de telles décompositions lorsque $\overline{U}$, U, M et G sont les points entiers de groupes algébriques affines lisses $\overline{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{G}$ définis sur un anneau complet de valuation discrète à corps résiduel fini tels que l'application produit $\mathcal{U} \times \mathcal{M} \times \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{G}$ est une immersion ouverte induisant un isomorphisme des fibres spéciales (voir aussi 5.16).

Proposition 2.2 *Soit G un groupe profini muni d'une décomposition d'Iwahori $G = UM\overline{U}$ comme ci-dessus. On suppose que M contient un sous-groupe ouvert normal $M^\dagger$ tel que l'ensemble $G^\dagger := UM^\dagger\overline{U}$ soit un pro-p sous-groupe (ouvert) de G. Alors il existe une unique distribution centrale inversible $z_{U,\overline{U}} \in \mathcal{Z}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M)^\times$ telle que la distribution $z_{U,\overline{U}}^{-1}e_U e_{\overline{U}}$ soit un idempotent de l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G$.*

Preuve : Comme première conséquence de la décomposition d'Iwahori, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M & \to & e_U\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]Ge_{\overline{U}} \\ f & \mapsto & e_U f e_{\overline{U}} \end{array} \tag{2.3}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M$-modules. En effet, lorsque G est fini, l'axiome i) de 2.1 implique que la multiplication induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-modules $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][U] \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][M] \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\overline{U}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][G]$, et le fait que 2.3 est bijectif s'en déduit par multiplication par les idempotents e_U à gauche et $e_{\overline{U}}$ à droite. Lorsque G est profini, l'axiome ii) de 2.1 donne une présentation de G sous la forme $G \simeq \varprojlim G/G_i$ où les G/G_i sont des groupes finis munis de décompositions d'Iwahori $G/G_i = U/(U \cap G_i).M/(M \cap G_i).\overline{U}/(\overline{U} \cap G_i)$. L'application 2.3 est alors la limite projective des applications correspondantes pour les G/G_i et est donc un isomorphisme. Notons au passage que si G n'est pas fini, le morphisme $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]U \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]\overline{U} \longrightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G$ est toujours injectif, mais pas surjectif ; son image est dense pour la topologie de la limite projective.

Par 2.3, il existe un unique élément $z_{U,\overline{U}} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M$ tel que

$$e_U e_{\overline{U}} e_U e_{\overline{U}} = e_U z_{U,\overline{U}} e_{\overline{U}} = z_{U,\overline{U}} e_U e_{\overline{U}}.$$

Par unicité et puisque M normalise U et $\overline{U}$, cet élément est *central* dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M$. Reste à prouver qu'il est inversible. Par application de ce qui précède à $G^\dagger$, on constate que $z_{U,\overline{U}} \in RM^\dagger$, et ceci nous ramène au cas où G est un pro-p-groupe. Il nous suffit alors de prouver que pour tout i la distribution lisse $z_{U,\overline{U}} * e_{M\cap G_i}$ est un élément inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][M/M\cap G_i]$, et ceci nous ramène au cas où G est *fini*.

Supposons dorénavant que G est un p-groupe fini. Pour montrer que $z_{U,\overline{U}}$ est inversible, il suffit de prouver que la multiplication à gauche par $z_{U,\overline{U}}$ dans le $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-module libre de type fini $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][M]$ a un déterminant inversible, car alors elle sera surjective et son image contiendra l'unité. Il suffit donc de montrer que pour tout corps R de caractéristique différente de p, l'image $z^R_{U,\overline{U}}$ de $z_{U,\overline{U}}$ dans $R[M]$ est inversible.

Supposons d'abord simplement que R est une $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-algèbre commutative et notons I_M^G le foncteur

$$\begin{array}{rrcl} I_M^G: & Mod_R(M) & \to & Mod_R(G) \\ & W & \mapsto & R[G]e_U e_{\overline{U}} \otimes_{R[M]} W \end{array}$$

où l'on considère $R[G]e_U e_{\overline{U}}$ comme $R[M]$-module à droite et $R[G]$-module à gauche par la formule $(g,m).f := gfm$. L'isomorphisme 2.3 induit l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} R[M] & \to & e_U R[G] e_U e_{\overline{U}} \\ f & \mapsto & e_U f e_U e_{\overline{U}} \end{array}$$

puisque $e_U f = e_U f e_U$. Celui-ci induit à son tour un isomorphisme de RM-modules $W \xrightarrow{\sim} e_U I_M^G(W)$ pour tout $W \in Mod_R(M)$. Par ailleurs, puisque

$$R[G]e_U R[G] e_U e_{\overline{U}} = R[G] e_U e_{\overline{U}},$$

le sous-R-module $e_U I_M^G(W)$ engendre $I_M^G(W)$ en tant que RG-module. On en déduit que I_M^G envoie indécomposables sur indécomposables. En effet, toute RG-décomposition non-triviale $I_M^G(W) = I_1 \oplus I_2$, induit une RM-décomposition $W \simeq e_U I_1 \oplus e_U I_2$, mais puisque I_1 et I_2 sont inclus dans le sous-RG-module engendré par $e_U I_1 \oplus e_U I_2$, on a $e_U I_1 \neq 0$ et $e_U I_2 \neq 0$. Il en découle encore que I_M^G envoie objets irréductibles de $Mod_R(M)$ sur objets irréductibles de $Mod_R(G)$. En effet, si W est irréductible, le morphisme structural $R \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(W)$ se factorise par un corps quotient $\overline{R}$ de R, et donc $I_M^G(W)$ est semi-simple par le lemme de Maschke. Étant indécomposable par ce qui précède, il est donc irréductible.

Maintenant, nous prétendons que l'application M-équivariante à droite et à gauche

$$\begin{array}{rcl} R[M] & \to & e_{\overline{U}} R[G] e_U e_{\overline{U}} \\ f & \mapsto & e_{\overline{U}} f e_U e_{\overline{U}} \end{array}$$

est aussi un isomorphisme. Notons d'abord que par 2.3 elle est surjective. On en construit alors un inverse comme ceci : la restriction des fonctions $R[G] \longrightarrow R[M\overline{U}]$ est une application $M\overline{U}$-équivariante à droite et à gauche qui induit une application M-équivariante à droite et à gauche $e_{\overline{U}} R[G] e_{\overline{U}} \longrightarrow e_{\overline{U}} R[M\overline{U}] e_{\overline{U}} = R[M\overline{U}/\overline{U}] \simeq R[M]$, le dernier isomophisme étant induit par l'application $m\overline{u} \mapsto m$. Celle-ci, multipliée par $|U|$, induit l'inverse cherchée, puisque si $f \in R[M]$ alors $(e_{\overline{U}} f e_U e_{\overline{U}})_{|M\overline{U}} = \frac{1}{|U|} f e_{\overline{U}}$, et puisque on a déja remarqué la surjectivité.

L'application précédente induit pour tout $W \in Mod_R(G)$ un isomorphisme de RM-modules $W \xrightarrow{\sim} e_{\overline{U}} I_M^G(W)$. En particulier pour W irréductible, le R-module $e_{\overline{U}} I_M^G(W)$ étant non-nul, il engendre le RG-module irréductible $I_M^G(W)$. Ainsi le morphisme de RG-modules

$$R[G] e_{\overline{U}} e_U e_{\overline{U}} \otimes_{R[M]} W \longrightarrow R[G] e_U e_{\overline{U}} \otimes_{R[M]} W. \tag{2.4}$$

induit par l'inclusion $R[G] e_{\overline{U}} e_U e_{\overline{U}} \subset R[G] e_U e_{\overline{U}}$ est surjectif dès que W est irréductible.

Supposons maintenant que R est un corps. Comme la catégorie $Mod_R(M)$ est semi-simple, le morphisme 2.4 est surjectif pour tout $W \in Mod_R(M)$. De plus, comme tout objet de $Mod_R(M)$

est projectif et donc $R[M]$-plat, il est aussi injectif. C'est donc un isomorphisme pour tout W, et en particulier pour $W = R[M]$, ce qui nous fournit l'égalité

$$R[G]e_{\overline{U}}e_U e_{\overline{U}} = R[G]e_U e_{\overline{U}}.$$

Ainsi, toujours sous l'hypothèse que R est un corps, il existe $f \in R[G]$ telle que $fe_{\overline{U}}e_U e_{\overline{U}} = e_U e_{\overline{U}}$. On peut choisir f telle que $f = e_U f e_{\overline{U}}$ et on peut alors écrire $f = e_U f_M^R e_{\overline{U}} = f_M^R e_U e_{\overline{U}}$ avec $f_M^R \in R[M]$. On a alors $f_M^R z_{U,\overline{U}}^R e_U e_{\overline{U}} = f_M^R e_U e_{\overline{U}} e_U e_{\overline{U}} = e_U e_{\overline{U}}$. Par l'isomorphisme 2.3, ceci montre que f_M^R est un inverse de $z_{U,\overline{U}}^R$ dans $R[M]$.

□

2.5 *Exemple de calcul de l'élément $z_{U,\overline{U}}$ pour $SL(2)$:* Nous incluons ce calcul explicite en réponse à une question de G. Henniart : on suppose que G est le pro-p-radical du sous-groupe d'Iwahori "standard" de $SL(2,\mathbb{Q}_p)$, c'est-à-dire le groupe formé des matrices à coefficients entiers dont la réduction modulo p est unipotente supérieure. On prend alors pour U le groupe des matrices de G qui sont unipotentes supérieures et pour $\overline{U}$ celui des unipotentes inférieures. Pour M on prend le groupe des matrices diagonales. On a donc des isomorphismes

$$\begin{array}{rccc} m: & 1+p\mathbb{Z}_p & \to & M \\ & z & \mapsto & \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} u: & \mathbb{Z}_p & \to & U \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ et } \begin{array}{rccc} \overline{u}: & \mathbb{Z}_p & \to & \overline{U} \\ & y & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ py & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Un calcul élémentaire montre que l'unique élément m de M tel que $\overline{u}(y)u(x) \in Um\overline{U}$ est $m(1+pxy)$. On peut alors exprimer la distribution $z_{U,\overline{U}}$ sous la forme

$$z_{U,\overline{U}} = \int_{\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p} (1+pxy)dxdy,$$

ce qui signifie que si ϕ est une fonction lisse sur M, alors $< z_{U,\overline{U}}, \phi >= \int_{\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p} \phi(1+pxy)dxdy$ où dx et dy sont les mesures de Haar normalisées. En particulier si M_n est l'image de $1+p^{n+1}\mathbb{Z}_p$ dans M par l'isomorphisme précédemment décrit, on obtient en notant 1_A la fonction caractéristique d'un sous-ensemble A :

$$z_{U,\overline{U}} * 1_{M_n} = \sum_{z\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} a(z)1_{m(1+pz)M_n}$$

où $a(z) = \frac{1}{p^{2n}}\#\{(x,y) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^2, \;\; xy = z\}$.

2.6 *Foncteurs associés :* On considère par la suite un groupe profini G muni d'une décomposition d'Iwahori $G = UM\overline{U}$ *satisfaisant à l'hypothèse de la proposition 2.2.* Au (RG,RM)-bimodule lisse $E_{U\overline{U}} := \mathcal{C}_R^\infty(G)e_U e_{\overline{U}}$ est associé le couple de foncteurs adjoints $(I_{U\overline{U}}, R_{U\overline{U}})$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} I_{U\overline{U}}: & Mod_R(M) & \to & Mod_R(G) \\ & A & \mapsto & E_{U\overline{U}} \otimes_{RM} A \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} R_{U\overline{U}}: & Mod_R(G) & \to & Mod_R(M) \\ & B & \mapsto & Hom_{RG}(E_{U\overline{U}}, B)^\infty \end{array}$$

et au (RM,RG)-bimodule $E'_{U\overline{U}} := e_U e_{\overline{U}}\mathcal{C}_R^\infty(G)$ est associé le couple adjoint $(R'_{U\overline{U}}, I'_{U\overline{U}})$ où

$$\begin{array}{rccc} I'_{U\overline{U}}: & Mod_R(M) & \to & Mod_R(G) \\ & A & \mapsto & Hom_{RM}(E'_{U\overline{U}}, A)^\infty \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} R'_{U\overline{U}}: & Mod_R(G) & \to & Mod_R(M) \\ & B & \mapsto & E'_{U\overline{U}} \otimes_{RG} B \end{array}.$$

Le signe ∞ désigne la partie lisse du RG ou RM-module concerné.

Choisissons une mesure de Haar à valeurs dans R sur G et munissons $\mathcal{C}_R^\infty(G)$ du produit de convolution associé ; ceci permet de le faire agir sur tout objet $B \in Mod_R(G)$ (voir le paragraphe "notations"). On introduit aussi le foncteur $R^\circ_{U\overline{U}}$: $B \mapsto e_U e_{\overline{U}}B$ ainsi que les transformations naturelles $R^\circ_{U\overline{U}} \longrightarrow R_{U\overline{U}}$ et $R'_{U\overline{U}} \longrightarrow R^\circ_{U\overline{U}}$ respectivement induites par les composées

$$e_U e_{\overline{U}}B \hookrightarrow B \xrightarrow{\sim} Hom_G(\mathcal{C}_R^\infty(G), B)^\infty \xrightarrow{rest} Hom_G(E_{U\overline{U}}, B)^\infty$$

et

$$E'_{U\overline{U}} \otimes_{RG} B \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_R(G) \otimes_{RG} B \xrightarrow{\sim} B \xrightarrow{e_U e_{\overline{U}}} e_U e_{\overline{U}} B$$

où les isomorphismes intermédaires sont donnés par l'action de $\mathcal{C}^\infty_R(G)$ sur B.

Nous allons maintenant définir une transformation naturelle $I_{U\overline{U}} \longrightarrow I'_{\overline{U}U}$. Pour cela introduisons le morphisme de $R(G \times G)$-modules

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty_R(G) \otimes_R A & \to & Hom_R(\mathcal{C}^\infty_R(G), A)^\infty \\ f \otimes a & \mapsto & (h \mapsto (h * f^\vee)(1).a) \end{array}$$

où A est un R-module et $f^\vee$ est déduite de f par $g \mapsto g^{-1}$. Celui-ci est un isomorphisme, un inverse étant donné en envoyant un morphisme Φ sur la fonction $g \mapsto \Phi(g.e_H) \in \mathcal{C}^\infty(G, A) = \mathcal{C}^\infty_R(G) \otimes_R A$ où H est n'importe quel sous-groupe ouvert compact normal de G tel que Φ soit fixe par H. Via l'inclusion $\mathcal{C}^\infty_R(G) e_U e_{\overline{U}} \subset \mathcal{C}^\infty_R(G)$, on obtient un morphisme de $R(G \times M)$-modules

$$\varphi_{U\overline{U}} : \mathcal{C}^\infty_R(G) e_U e_{\overline{U}} \otimes_R A \longrightarrow Hom_R(e_{\overline{U}} e_U \mathcal{C}^\infty_R(G), A)^\infty.$$

Si A est un RM-module, on peut considérer la composée

$$\mathcal{C}^\infty_R(G) e_U e_{\overline{U}} \otimes_{RM} A \xrightarrow{\mathrm{Tr}_M} (\mathcal{C}^\infty_R(G) e_U e_{\overline{U}} \otimes_R A)^M \xrightarrow{\varphi_{U\overline{U}}} Hom_{RM}(e_{\overline{U}} e_U \mathcal{C}^\infty_R(G), A)^\infty$$

où Tr_M est l'application trace $f \otimes a \mapsto \int_M (\rho(m) f \otimes ma) dm$ associée à une mesure de Haar dm sur M. Cette composée définit la transformation naturelle $I_{U\overline{U}} \longrightarrow I'_{\overline{U}U}$ annoncée.

Corollaire 2.7 *Les trois transformations naturelles ci-dessus sont des isomorphismes de foncteurs* $R'_{U\overline{U}} \xrightarrow{\sim} R^\circ_{U\overline{U}} \xrightarrow{\sim} R_{U\overline{U}}$, *et* $I_{U\overline{U}} \xrightarrow{\sim} I'_{U\overline{U}}$.

Preuve : Concernant les foncteurs de "restriction", on définit des transformations naturelles dans l'autre sens $R_{U\overline{U}} \longrightarrow R^\circ_{U\overline{U}}$ et $R^\circ_{U\overline{U}} \longrightarrow R'_{U\overline{U}}$ respectivement par

$$Hom_G(E_{U\overline{U}}, B)^\infty \xrightarrow{(e_U e_{\overline{U}})^*} Hom_G(\mathcal{C}^\infty_R(G), B)^\infty \xrightarrow{\sim} B \xrightarrow{e_U e_{\overline{U}}} e_U e_{\overline{U}} B$$

et

$$e_U e_{\overline{U}} B \hookrightarrow B \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty_R(G) \otimes_{RG} B \xrightarrow{e_U e_{\overline{U}} \otimes \mathrm{Id}} E'_{U\overline{U}} \otimes_{RG} B.$$

D'après la proposition 2.2, les composées avec les morphismes précédemment définis sont égales à l'action de $z_{U\overline{U}}$, laquelle est inversible.

Pour l'assertion concernant I et I', on commence par prouver l'inversibilité de $\varphi_{U\overline{U}}$. Pour cela on remarque que, par la propriété d'idempotence de $z^{-1}_{U\overline{U}} e_U e_{\overline{U}}$, l'image de l'application $\psi_{U\overline{U}}$: $Hom_R(e_{\overline{U}} e_U \mathcal{C}^\infty_R(G), A) \longrightarrow Hom_R(\mathcal{C}^\infty_R(G), A)$ donnée par $\Phi \mapsto (f \mapsto \Phi(z^{-1}_{U\overline{U}} e_{\overline{U}} e_U f))$ est contenue dans $e_U e_{\overline{U}} Hom_R(\mathcal{C}^\infty_R(G), A)$ (action à gauche de RG sur le Hom déduite de l'action à gauche de RG sur $\mathcal{C}^\infty_R(G)$, via $g \mapsto g^{-1}$), et que $\psi_{U\overline{U}}$ induit un isomorphisme $Hom_R(e_{\overline{U}} e_U \mathcal{C}^\infty_R(G), A) \xrightarrow{\sim} (e_U e_{\overline{U}}) Hom_R(\mathcal{C}^\infty_R(G), A)$ inverse de l'application de restriction. Ainsi l'inversibilité de $\varphi_{U\overline{U}}$ découle de celle de φ.

Il reste à prouver l'inversibilité du morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_M : \mathcal{C}^\infty_R(G) e_U e_{\overline{U}} \otimes_{RM} A \longrightarrow (\mathcal{C}^\infty_R(G) e_U e_{\overline{U}} \otimes_R A)^M.$$

Fixons une suite $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes de G comme dans le point ii) de 2.1 et posons $G^i := G/G_i$, $U^i := U/(U \cap G_i)$, etc... Par G-équivariance de Tr_M, il suffit de tester l'inversibilité de sa restriction aux G_i-invariants pour tout i. Comme $e_{G_i} e_U e_{\overline{U}} = e_U e_{\overline{U}} e_{M_i}$, cette restriction s'identifie à un scalaire inversible près au morphisme trace usuel du groupe fini M^i

$$\mathrm{Tr}_{M^i} : R[G^i] e_{U^i} e_{\overline{U}^i} \otimes_{RM^i} A^{M_i} \longrightarrow \left(R[G^i] e_{U^i} e_{\overline{U}^i} \otimes_R A^{M_i}\right)^{M^i}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme suivant.

$\square$

Lemme 2.8 *Soit M un groupe fini et R un anneau commutatif. Pour toute paire de $R[M]$-modules (B, A), si B est projectif alors l'application trace*

$$\begin{array}{rccl} Tr_M : & (B \otimes_R A)_M & \to & (B \otimes_R A)^M \\ & b \otimes a & \mapsto & \sum_m mb \otimes ma \end{array}$$

est un isomorphisme de R-modules.

Preuve : Puisque la trace est fonctorielle en B et compatible aux sommes directes, on se ramène au cas où B est libre de rang 1 sur $R[M]$. Dans ce cas, l'application

$$\begin{array}{ccc} (R[M] \otimes_R A)^M & \to & (R[M] \otimes A)_M \\ \sum_m m \otimes a_m & \mapsto & 1 \otimes a_1 \end{array}$$

est inverse de la trace. $\square$

Remarque : avec les notations de la preuve du corollaire 2.7 et en abrégeant "infl" pour "inflation", on peut vérifier que pour tout i le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} Mod_R(M^i) \arrow[r, "infl"] \arrow[d, "I_{U^i\overline{U^i}}"] & Mod_R(M) \arrow[d, "I_{U\overline{U}}"] \\ Mod_R(G^i) \arrow[r, "infl"] & Mod_R(G) \end{tikzcd}$$

On étudie maintenant la dépendance des foncteurs ci-dessus en la décomposition d'Iwahori de G :

Lemme 2.9 *Soit $G = VM\overline{V}$ une seconde décomposition d'Iwahori de G telle que $G^\dagger = VM^\dagger\overline{V}$, et "compatible" à la décomposition $G = UM\overline{U}$, au sens où $V = (V \cap U)(V \cap \overline{U})$, $U = (U \cap V)(U \cap \overline{V})$, $\overline{V} = (\overline{V} \cap U)(\overline{V} \cap \overline{U})$ et $\overline{U} = (\overline{U} \cap V)(\overline{U} \cap \overline{V})$. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_R^\infty(G)e_U e_{\overline{U}} & \to & \mathcal{C}_R^\infty(G)e_V e_{\overline{V}} \\ f & \mapsto & f * e_{\overline{V}} \end{array}$$

est un isomorphisme de (RG, RM)-bimodules.

Preuve : En effet, on a

$$e_U e_{\overline{U}} e_{\overline{V}} = e_U e_V e_{\overline{U}} e_{\overline{V}} = e_U e_V e_{\overline{V}}$$

ce qui montre que l'application est bien définie et qu'elle est surjective puisque les inclusions

$$\mathcal{C}_R^\infty(G)e_V e_{\overline{V}} e_V e_{\overline{V}} \subseteq \mathcal{C}_R^\infty(G)e_U e_V e_{\overline{V}} \subseteq \mathcal{C}_R^\infty(G)e_V e_{\overline{V}}$$

sont des égalités par la proposition précédente. Elle est de plus injective, car l'application $f \mapsto f * z_{U,\overline{U}}^{-1} e_U e_{\overline{U}}$ en est un inverse à droite. $\square$

Appliquons ce lemme au cas particulier $V = \overline{U}$ et $\overline{V} = U$; on obtient un isomorphisme entre les bimodules $E_{U\overline{U}}$ et $E_{\overline{U}U}$, qui induit à son tour des isomorphismes de foncteurs $R_{U\overline{U}} \xrightarrow{\sim} R_{\overline{U}U}$ et $I_{U\overline{U}} \xrightarrow{\sim} I_{\overline{U}U}$. En d'autres termes, ces foncteurs ne dépendent pas, à isomorphisme explicite près, de l'ordre entre U et $\overline{U}$ et nous noterons simplement $I_M^G := I_{U\overline{U}}$ et $R_G^M := R_{U\overline{U}}$.

Corollaire 2.10 *Sous les hypothèses de la proposition 2.2 et avec les notations ci-dessus,*

i) Les foncteurs I_M^G et R_G^M sont adjoints des deux côtés.

ii) Le morphisme de (RM, RM)-bimodules

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_R^\infty(M) & \to & e_U e_{\overline{U}} \mathcal{C}_R^\infty(G) e_U e_{\overline{U}} \\ f & \mapsto & e_U e_{\overline{U}} f e_U e_{\overline{U}} \end{array}$$

induit un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Id}_{Mod_R(M)} \xrightarrow{\sim} R_G^M \circ I_M^G$.

iii) Le foncteur I_M^G envoie objets irréductibles sur objets irréductibles.

Preuve : La première assertion découle du corollaire 2.7 et du lemme précédent. Pour la deuxième assertion, il suffit de vérifier que le morphisme décrit est un isomorphisme. Or, la décomposition d'Iwahori montre qu'il est surjectif, et la propriété 2.2 de presqu'idempotence de $e_U e_{\overline{U}}$ montre qu'il est injectif. La troisième assertion a été démontrée au cours de la preuve de la proposition 2.2 dans le cas où G est fini d'ordre une puissance de p. Le cas où G est pro-p s'ensuit, par l'axiome ii) de 2.1. Dans le cas général, il faut commencer par vérifier la propriété de commutation aux foncteurs d'oublis $Res_G^{G^\dagger} \circ I_M^G \simeq I_{M^\dagger}^{G^\dagger} \circ Res_M^{M^\dagger}$. Pour cela, remarquons que, par définition, l'application qui à g associe l'unique $m \in M$ tel que $g \in Um\overline{U}$ induit une bijection $G^\dagger \backslash G \xrightarrow{\sim} M^\dagger \backslash M$. Il s'ensuit que l'application $\mathcal{C}_R^\infty(G^\dagger) \otimes_{RM^\dagger} RM \longrightarrow \mathcal{C}_R^\infty(G)$ donnée par l'action de RM à droite sur $\mathcal{C}_R^\infty(G)$ est un isomorphisme de $R(G^\dagger \times M)$-modules qui se restreint en un isomorphisme $\mathcal{C}_R^\infty(G^\dagger) e_U e_{\overline{U}} \otimes_{RM^\dagger} RM \longrightarrow \mathcal{C}_R^\infty(G) e_U e_{\overline{U}}$. Ce dernier induit à son tour un isomorphisme de foncteurs $I_{M^\dagger}^{G^\dagger} \circ Res_M^{M^\dagger} \xrightarrow{\sim} Res_G^{G^\dagger} \circ I_M^G$

Fixons ensuite $W \in Mod_R(M)$ irréductible. Sa restriction à $M^\dagger$ est semi-simple et de longueur finie. Par l'isomorphisme précédent, le point iii) pour $G^\dagger$ et le point ii), on a la propriété suivante : pour tout sous-$RG^\dagger$-module V de $I_M^G(W)$, on a $\mathrm{long}_{RG^\dagger}(V) = \mathrm{long}_{RM^\dagger}(R_G^M(V))$. Ainsi, si V est un sous RG-module non-nul, alors le RM-module $R_G^M(V)$ est non-nul et, par exactitude de R_G^M, est un sous-module de $R_G^M(I_M^G(W)) \simeq W$ donc lui est égal. On en déduit que $\mathrm{long}_{RG^\dagger}(I_M^G(W)) = \mathrm{long}_{RG^\dagger}(V)$ et donc $V = I_M^G W$. $\square$

2.11 *Induction parahorique :* Reprenons les notations de l'introduction. Au K-groupe réductif $\mathcal{G}$, Bruhat et Tits ont associé un immeuble affine “étendu” $B(\mathcal{G}, K)$, muni d'une action “affine” de G. Cet immeuble n'est défini qu'à isomorphisme près ; en fait le groupe des automorphismes affines et G-équivariants de $B(\mathcal{G}, K)$ s'identifie canoniquement au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $a_G := X_*(\mathcal{Z}(\mathcal{G})) \otimes \mathbb{R}$, voir [12, 4.2.16].

Si $\mathcal{M}$ est un K-sous-groupe de Levi de $\mathcal{G}$, alors la réunion des appartements de $B(\mathcal{G}, K)$ associés aux K-tores déployés maximaux de $\mathcal{M}$ est un immeuble étendu pour $\mathcal{M}$ relativement à K, [12, 4.2.18]. Nous le noterons donc $B(\mathcal{M}, K)$; il est muni d'une action de a_M commutant à M que nous noterons $(x, \lambda) \mapsto x + \lambda$ où $\lambda \in a_M$ et $x \in B(\mathcal{M}, K)$.

Si $x \in B(\mathcal{G}, K)$, on note G_x son stabilisateur dans G ; c'est un sous-groupe ouvert compact de G. La théorie de Bruhat et Tits (notre référence sera [27, 3.4]) associe à x un modèle entier lisse $\mathcal{G}_x$ de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G}_x(\mathcal{O}) = G_x$. Par lissité, la réduction $\varpi :\ G_x = \mathcal{G}_x(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{G}_x(k)$ est surjective. On pose $G_x^+ := \varpi^{-1}({}^u\mathcal{G}_{x,k}(k))$ où ${}^u\mathcal{G}_{x,k}$ désigne le radical unipotent de la fibre spéciale $\mathcal{G}_{x,k}$ de $\mathcal{G}_x$; c'est un pro-p-sous-groupe ouvert et normal de G_x, parfois appelé *pro-p-radical*. Supposons de plus que $x \in B(\mathcal{M}, K)$; le même procédé que ci-dessus fournit un pro-p-radical M_x^+ qui fort heureusement coïncide avec l'intersection $M \cap G_x^+$ (voir aussi la fin du paragraphe 5.2 pour une situation plus générale). De manière générale, pour tout sous-groupe H de G, on notera $H_x := H \cap G_x$ et $H_x^+ := H \cap G_x^+$.

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un K-sous-groupe parabolique et $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{U}}$ son opposé par rapport à $\mathcal{M}$ (*i.e.* l'unique sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}$). Si $x \in B(\mathcal{M}, K)$, on sait [12, 4.6.8] (voir aussi 5.16) que G_x^+ admet une décomposition d'Iwahori $G_x^+ = U_x^+ M_x^+ \overline{U}_x^+$ au sens de 2.1. Il s'ensuit que le groupe $G_{x,P} := G_x^+ P_x$ admet la décomposition d'Iwahori $U_x M_x \overline{U}_x^+$ et satisfait à l'hypothèse de la proposition 2.2 avec M_x^+ pour $M^\dagger$. Celle-ci nous fournit donc un élément, unique,

(2.12) $\qquad z_{x,P} \in \mathcal{Z}(RM_x)^\times$ tel que $z_{x,P} e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+}$ est un idempotent de $RG_{x,P}$.

On obtient aussi deux foncteurs reliant $Mod_R(M_x)$ et $Mod_R(G_x)$ qui sont adjoints des deux côtés :

(2.13) $$I_{x,P} := ind_{G_{x,P}}^{G_x} \circ I_{M_x}^{G_{x,P}} \text{ et } R_{x,P} := R_{G_{x,P}}^{M_x} \circ Res_{G_x}^{G_{x,P}}$$

avec les notations du corollaire 2.10.

Par un léger abus de langage que nous expliquons ci-dessous, nous dirons que $G_{x,P}$ est un sous-groupe parahorique de G_x. Le foncteur $I_{x,P}$ mérite alors le nom d'*induction parahorique* en ce qu'il relie les représentations de M_x et G_x en passant par le groupe parahorique $G_{x,P}$, comme l'induction parabolique relie les représentations de M à G en passant par P. L'innocent foncteur d'inflation des représentations de M à P est ici remplacé par le foncteur $I_{M_x}^{G_{x,P}}$. Ce dernier n'est pas si facile à définir mais partage certaines des propriétés de l'inflation : il envoie irréductibles sur irréductibles et la composée avec son adjoint est l'identité de $Mod_R(M_x)$, *cf.* 2.7.

Dans la terminologie de Bruhat-Tits [12, 5.2.6], un sous-groupe parahorique de G est un sous-groupe de la forme $\varpi^{-1}(\mathcal{P}_k(k))$, où $\mathcal{P}_k$ est un k-sous-groupe parabolique de la composante neutre de la fibre spéciale $\mathcal{G}_{x,k}^{\circ}$. En posant $M_x^{\circ} = \varpi^{-1}(\mathcal{M}_{x,k}^{\circ}(k))$, on a une application surjective (voir aussi le paragraphe 5.18 pour une généralisation)

$$\begin{array}{ccc} \{K\text{-ss-gpes paraboliques contenant } \mathcal{M}\} & \longrightarrow & \{k\text{-ss-gpes paraboliques contenant } \mathcal{M}_{x,k}^{\circ}\} \\ & & || \\ & & \{\text{ss-gpes parahoriques de } G_x \text{ contenant } M_x^{\circ}\} \end{array}$$

qui n'est injective que si x est un sommet hyperspécial. Dans la terminologie usuelle, le sous-groupe parahorique associé à un parabolique $\mathcal{Q} = \mathcal{M}\mathcal{V}$ s'écrit $G_x^+ M_x^{\circ} V_x$, tandis que dans cet article, nous appelons sous-groupe parahorique les sous-groupes de la forme $G_{x,Q} := G_x^+ M_x V_x$; les deux terminologies peuvent différer mais sont "en bijection". Quoiqu'il en soit, le petit diagramme ci-dessus montre qu'un même sous-groupe parahorique peut être associé à deux sous-groupes paraboliques contenant M différents. Malgré les apparences, nos foncteurs d'induction-restriction ne dépendent, eux, que du parahorique :

Lemme 2.14 *Si $\mathcal{Q} = \mathcal{M}.\mathcal{V}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{M}.\mathcal{U}$ sont deux sous-groupes paraboliques tels que $G_{x,P} = G_{x,Q}$, les foncteurs $I_{x,P}$ et $I_{x,Q}$ sont canoniquement isomorphes.*

Preuve : D'après [27, 3.1], les décompositions d'Iwahori $G_{x,P} = U_x M_x \overline{U}_x^+$ et $G_{x,Q} = V_x M_x \overline{V}_x^+$ sont "compatibles" au sens du lemme 2.9. Il suffit donc d'appliquer ce lemme. $\square$

Une fois réglé ce problème, une autre question apparaît naturellement : *les foncteurs parahoriques dépendent-ils du sous-groupe parahorique considéré ?* Dans le cas des groupes réductifs *finis* (sur $\mathbb{F}_p$), Howlett et Lehrer ont montré dans [20] que l'induction parabolique pour les représentations à coefficients dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ ne dépend pas du choix du parabolique contenant un Levi donné. En s'inspirant de leur preuve, on est amené à la question suivante :

Question 2.15 *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un K-sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$. A-t-on pour tout $x \in B(\mathcal{M}, K)$*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \in (\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G_x) e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \quad \textit{et} \quad e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+} \in e_{U_x} e_{\overline{U}_x} (\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G_x)?$$

Si cette question avait une réponse affirmative, alors l'application

$$\begin{array}{rcl} e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+} \mathcal{C}^{\infty}(G_x) & \to & e_{\overline{U}_x} e_{U_x^+} \mathcal{C}^{\infty}(G_x) \\ f & \mapsto & e_{\overline{U}_x} * f \end{array}$$

serait un isomorphisme de (M_x, G_x)-bimodules et induirait des isomorphismes $I_{x,P} \xrightarrow{\sim} I_{x,\overline{P}}$. Mais l'intérêt principal de la question 2.15 apparaitra dans la prochaine section. Le seul cas où nous pouvons lui donner une réponse positive "sans restriction" est celui où $\mathcal{P}$ est minimal, *cf. 6.2*.

3 Commutation aux foncteurs paraboliques

Soit $\mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ une décomposition de Levi. Rappelons que le foncteur de Jacquet (ou restriction parabolique) associe à $V \in Mod_R(G)$ le M-module lisse $V_U := V/V(U)$ où $V(U) := \bigcup_{K \subset U} ker\, e_K$ où K décrit l'ensemble des sous-groupe ouverts compacts de U. On notera aussi parfois $r^M_{G,P}$ ce foncteur et $i^G_{M,P}$ son adjoint à droite (induction parabolique), ainsi que $j_U : V \longrightarrow V_U$ la surjection canonique. Nos conventions sur les immeubles sont celles du paragraphe 2.11, et on note toujours $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{U}}$ le parabolique de $\mathcal{G}$ opposé à $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{M}$.

Proposition 3.1 *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique et $y \in B(\mathcal{M}, K)$. Soit ε un idempotent de RM_y et $\widetilde{\varepsilon} := z_{y,P}^{-1} e_{U_y} e_{\overline{U}_y^+} \varepsilon$ l'idempotent de RG_y associé. Supposons que pour tout $x \in y + a_M$, on a*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon \in (RG_x) e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon \quad et \quad \varepsilon e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+} \in \varepsilon e_{U_x} e_{\overline{U}_x} (RG_x).$$

Alors pour tout objet $V \in Mod_R(G)$, la projection canonique $V \xrightarrow{j_U} V_U$ induit un isomorphisme $\widetilde{\varepsilon} V \xrightarrow{\sim} \varepsilon V_U$ de R-modules.

Rappelons que pour tout $x \in y + a_M$, on a $M_x = M_y$ de sorte que l'idempotent ε, vu dans RG_x, commute aux idempotents e_{U_x}, $e_{\overline{U}_x}$ etc...

Preuve : L'application j_U étant M_y-équivariante, elle envoie bien $\widetilde{\varepsilon} V$ dans εV_U. Fixons un élément z_M du centre de M dont l'action par conjugaison sur $\overline{U}$, resp. U, soit strictement contractante, resp. dilatante, c'est-à-dire que pour toute paire de sous-groupes ouverts compacts $\overline{U}_1, \overline{U}_2$ de $\overline{U}$, resp U_1, U_2 de U, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z_M^n \overline{U}_1 z_M^{-n} \subset \overline{U}_2$, resp. $z_M^n U_1 z_M^{-n} \supset U_2$. L'action de z_M sur $B(\mathcal{M}, K)$ est la translation par un vecteur noté $\overline{z}_M \in a_M$. On s'intéresse au comportement de $U_x^{(+)}$ et $\overline{U}_x^{(+)}$ lorsque x décrit la demi-droite d'origine y et de vecteur directeur $\overline{z}_M$. On note pour cela $x(t) := y + t\overline{z}_M$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Lemme 3.2 *Il existe un ensemble discret $I_y = \{0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots\} \subset \mathbb{R}_+$ tel que si $t \in]t_i, t_{i+1}[$ alors :*
- $U_{x(t)} = U^+_{x(t)} = U_{x(t_i)} = U^+_{x(t_{i+1})}$
- $\overline{U}_{x(t)} = \overline{U}^+_{x(t)} = \overline{U}^+_{x(t_i)} = \overline{U}_{x(t_{i+1})}$

et tel que pour tout i, on a $U^+_{x(t_i)} \subsetneq U_{x(t_i)}$ et $\overline{U}^+_{x(t_i)} \subsetneq \overline{U}_{x(t_i)}$.

Preuve : Voir [23, 6.7]. □

En particulier, les applications $t \mapsto U^{(+)}_{x(t)}$ et $t \mapsto \overline{U}^{(+)}_{x(t)}$ sont respectivement croissante et décroissante. En fait, comme z_M dilate U et contracte $\overline{U}$,

Fait 3.3 *On a $\bigcup_{t \geqslant 0} U^{(+)}_{x(t)} = U$ et $\bigcap_{t \geqslant 0} \overline{U}^{(+)}_{x(t)} = 1$.*

Soit maintenant $V \in Mod(G)$, on veut montrer d'abord que $\widetilde{\varepsilon} V \cap V(U) = 0$. Soit w un élément de cette intersection, alors par définition de $V(U)$ et par le fait précédent, l'ensemble

$$\{t \in \mathbb{R}_+, e_{U_{x(t)}} w = 0\}$$

n'est pas vide. Il admet donc une borne inférieure t_w qui, par 3.2 (semi-continuité supérieure) lui appartient. On a alors $t_w = 0$ ou $t_w \in I_y \backslash \{0\}$. Le premier cas est trivial : on obtient $e_{U_y} w = w = 0$. Dans le deuxième cas, on considère l'élément $w' = e_{U^+_{x(t_w)}} w$, alors
- $w' \neq 0$ car il existe $\varepsilon > 0$ tel que $U^+_{x(t_w)} = U_{x(t_w - \varepsilon)}$ d'après 3.2.
- $w' \in e_{U^+_{x(t_w)}} e_{\overline{U}_y^+} \varepsilon V \subset e_{U^+_{x(t_w)}} e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon V$ car $\overline{U}_{x(t_w)} \subset \overline{U}_y^+$, toujours par 3.2.

On a donc $w' = e_{U^+_{x(t_w)}} e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon v$ pour un certain $v \in V$, et $e_{U_{x(t_w)}} w' = 0$ par minimalité de t_w et 3.2 à nouveau. Or par la première hypothèse de l'énoncé de 3.1, il existe $\phi \in RG_{x(t_w)}$ tel que $\phi e_{U_{x(t_w)}} w' = w'$ ce qui contredit la non-nullité de w'. On a donc obtenu l'injectivité de la restriction de j_U à $\widetilde{\varepsilon} V$.

Pour la surjectivité, fixons $v \in V$ et remarquons que pour t assez grand, précisément lorsque $e_{\overline{U}^+_{x(t)}} v = v$, l'élément $e_{\overline{U}^+_{x(t)}} v$ de V a la même image que v dans $V/V(U)$. On a donc $V_U = \cup_{t \in \mathbb{R}_+} j_U(e_{\overline{U}^+_{x(t)}} V)$. En conséquence, si on fixe maintenant $w \in \varepsilon V_U$, l'ensemble

$$J_w := \{t \in \mathbb{R}_+, w \in j_U(e_{\overline{U}^+_{x(t)}} \varepsilon V)\}$$

est non vide et admet une borne inférieure t_w qui comme précédemment appartient à J_w et à I_y. Supposons $t_w \neq 0$ et fixons $v \in V$ tel que $j_U(e_{\overline{U}^+_{x(t_w)}} \varepsilon v) = w$. D'après notre deuxième hypothèse, il existe $f \in RG_{x(t_w)}$ telle que $e_{U_{x(t_w)}} e_{\overline{U}^+_{x(t_w)}} \varepsilon = e_{U_{x(t_w)}} e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon f$. Il s'ensuit que

$$w = j_U(e_{U_{x(t_w)}} e_{\overline{U}^+_{x(t_w)}} \varepsilon v) = j_U(e_{U_{x(t_w)}} e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon f v) = j_U(e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon f v)$$

ce qui contredit la minimalité de t_w, car $\overline{U}^+_{x(t_w)} \subsetneq \overline{U}_{x(t_w)} = \overline{U}^+_{x(t_w - \varepsilon)}$, pour ε assez petit. On en déduit que $t_w = 0$, donc $\varepsilon V_U = j_U(e_{\overline{U}^+_y} \varepsilon V) = j_U(\widetilde{\varepsilon} V)$. $\square$

Il ressort de cette preuve que la première hypothèse de 3.1 assure l'injectivité de $j_U : \widetilde{\varepsilon} V \longrightarrow \varepsilon V_U$ tandis que la seconde hypothèse implique sa surjectivité.

Remarque 3.4 *Comme cas particulier de la proposition précédente, et sous les mêmes hypothèses, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^{\infty,c}_R(G) & \rightarrow & \mathcal{C}^{\infty,c}_R(G/U) \\ f & \mapsto & (g \mapsto \int_U f(gu)du) \end{array}$$

induit un isomorphisme $\mathcal{C}^{\infty,c}_R(G)\check{\widetilde{\varepsilon}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\infty,c}_R(G/U)\check{\varepsilon}$ de RG-modules. (Rappelons que le $\check{}$ désigne l'anti-involution de l'algèbre de distributions d'un groupe induite par le passage à l'inverse).

En effet, l'application $f \mapsto (g \mapsto \int_U f(gu)du)$ se factorise par la projection sur les U-coinvariants (pour l'action de U par translation à droite) et induit un isomorphisme $\mathcal{C}^{\infty,c}_R(G)_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\infty,c}_R(G/U)$.

3.5 *Transformations naturelles* : Comme précédemment, on fixe un sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ et un point $x \in B(\mathcal{M}, K)$. La famille des applications canoniques $j_U(V) : e_{U_x} e_{\overline{U}^+_x} V \longrightarrow V_U$ pour V objet de $Mod_R(G)$ définit une transformation naturelle

$$R_{x,P} \circ Res^{G_x}_G \longrightarrow Res^{M_x}_M \circ \mathrm{r}^M_{G,P}.$$

Nous allons maintenant définir aussi une transformation naturelle

$$ind^G_{G_x} \circ I_{x,P} \longrightarrow \mathrm{i}^G_{M,P} \circ ind^M_{M_x}.$$

Soit (τ_x, V_{τ_x}) un objet de $Mod_R(M_x)$ et explicitons :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{i}^G_{M,P}(ind^M_{M_x}(\tau_x)) & := & \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions lisses } f : G \longrightarrow V_{\tau_x} \text{ à support compact modulo } U \\ \text{t.q. } \forall u \in U, \forall m \in M_x, \;\; \tau_x(m)f(gum) = f(g) \end{array} \right\} \\ & \simeq & (\mathcal{C}^{\infty,c}_R(G/U) \otimes_R V_{\tau_x})^{M_x} \end{array}$$

où M_x agit sur le produit tensoriel par $\rho \otimes \tau_x$ (avec ρ la translation à droite des fonctions). Explicitons aussi

$$\begin{array}{rcl} ind^G_{G_x} \circ I_{x,P}(\tau_x) & \simeq & \mathcal{C}^{\infty,c}_R(G) \otimes_{RG_x} I_{x,P}(\tau_x) \\ & \simeq & \mathcal{C}^{\infty,c}_R(G) e_{\overline{U}^+_x} e_{U_x} \otimes_{RM_x} \tau_x \end{array}$$

où le premier isomorphisme est donné par [30, I.5.2.c)] et le second s'ensuit par l'expression $I_{x,P}(\tau_x) = \mathcal{C}_R^\infty(G_x) e_{\overline{U}_x^+} e_{U_x} \otimes_{RM_x} \tau_x$ donnée par le lemme 2.9. La transformation naturelle cherchée est définie par la composée

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G) e_{\overline{U}_x^+} e_{U_x} \otimes_{RM_x} \tau_x &\xrightarrow{\int_U} \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/U) \otimes_{RM_x} \tau_x \\ &= \left(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/U) \otimes_R \tau_x\right)_{M_x} \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{M_x}} \left(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/U) \otimes_R \tau_x\right)^{M_x}\end{aligned}$$

où l'application $\int_U$ est donnée par la moyennation à droite le long de U sur le premier facteur (comme dans la remarque 3.4), l'action de M_x sur le troisième terme est donnée par $\rho \otimes \tau_x$, et le symbole Tr_{M_x} désigne l'action (relative à un choix de mesure de Haar sur M_x) de la fonction $1_{M_x} \in \mathcal{C}_R^\infty(M_x)$ sur $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/U) \otimes_R \tau_x$, laquelle action se factorise par les M_x-coinvariants et aboutit dans les M_x-invariants.

Reprenons maintenant les notations de la proposition 3.1 et notons $Mod(\varepsilon RM_x\varepsilon)$ la catégorie des modules sur l'anneau $\varepsilon RM_x\varepsilon = \varepsilon RM_y\varepsilon$, où $x \in y + a_M$. On a la paire de foncteurs

$$T_\varepsilon : \begin{array}{ccc} Mod(\varepsilon RM_x\varepsilon) & \to & Mod_R(M_x) \\ B & \mapsto & \mathcal{C}_R^\infty(M_x)\varepsilon \otimes_{\varepsilon RM_x\varepsilon} B \end{array} \quad \text{et} \quad \varepsilon : \begin{array}{ccc} Mod_R(M_x) & \to & Mod(\varepsilon RM_x\varepsilon) \\ V & \mapsto & \varepsilon.V \end{array}.$$

Corollaire 3.6 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.1, pour tout $x \in y + a_M$, les transformations naturelles définies ci-dessus induisent des isomorphismes de foncteurs*

i) $\varepsilon.R_{x,P} \circ \mathrm{Res}_G^{G_x} \xrightarrow{\sim} \varepsilon.\mathrm{Res}_M^{M_x} \circ \mathrm{r}_{G,P}^M$, *et*

ii) $\mathrm{ind}_{G_x}^G \circ I_{x,P} \circ T_{\breve{\varepsilon}} \xrightarrow{\sim} i_{M,P}^G \circ \mathrm{ind}_{M_x}^M \circ T_{\breve{\varepsilon}}$

Preuve : Vue la définition de la transformation naturelle du point i), l'assertion de ce point i) découle de la proposition 3.1 appliquée à x au lieu de y (l'hypothèse de 3.1 est en effet “invariante” par translation sous a_M).

Le deuxième point *ne* se déduit *pas* formellement du premier par adjonction. Montrons tout d'abord que l'application Tr_{M_x} définie au-dessus est un isomorphisme. Comme cette application commute aux sommes directes, on peut supposer τ_x de type fini et choisir un pro-p-sous-groupe ouvert normal $M_{x,r}$ de M_x dans le noyau de τ_x et dont on note $\overline{M_x} := M_x/M_{x,r}$ le quotient. On a alors une factorisation $\mathrm{Tr}_{M_x} = \mathrm{Tr}_{\overline{M_x}} \circ \mathrm{Tr}_{M_{x,r}}$. Puisque $M_{x,r}$ est pro-p et p est inversible dans R, $\mathrm{Tr}_{M_{x,r}}$ est un isomorphisme, et on a

$$\mathrm{Tr}_{M_{x,r}} : \left(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/U) \otimes_R \tau_x\right)_{M_{x,r}} \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/U) \otimes_R \tau_x\right)^{M_{x,r}} \simeq \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/UM_{x,r}) \otimes_R \tau_x.$$

On est donc ramené à étudier la trace sous le groupe fini $\overline{M_x}$. D'après le lemme 2.8, il nous suffira de prouver que le $R[\overline{M_x}]$-module $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/UM_{x,r})$ est projectif. Fixons un sous-groupe ouvert compact H de G et décomposons ce dernier en la somme directe des $R[\overline{M_x}]$-sous-modules

$$\mathcal{C}_R^{\infty,c}(HgUM_x/UM_{x,r})$$

pour g décrivant $H\backslash G/UM_x$. Fixons alors g, et choisissons une suite décroissante et d'intersection triviale $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pro-p-sous-groupes ouverts et normaux dans H assez petits pour que $g^{-1}H_ig \cap UM_x \subset UM_{x,r}$ pour tout i. Alors, pour tout i, l'action de $\overline{M_x}$ sur l'ensemble $H_i\backslash HgUM_x/UM_{x,r}$ est *libre*, et donc le $R[\overline{M_x}]$-module $B_i := R[M_{x,r}U\backslash M_xUgH/H_i]$ est libre et en particulier projectif. Comme H_i est pro-p, l'inclusion $B_i \hookrightarrow B_{i+1}$ est scindée sur $R[\overline{M_x}]$ pour tout i, donc la limite inductive $\varinjlim_i B_i = \mathcal{C}_R^{\infty,c}(M_{x,r}U\backslash M_xUgH)$ est aussi un $R[\overline{M_x}]$-module projectif.

Montrons maintenant que si τ_x est de la forme $T_{\breve{\varepsilon}}(B)$ pour un $\breve{\varepsilon}RM_x\breve{\varepsilon}$-module B, alors le morphisme $\int_U$ est un isomorphisme. En effet, ce morphisme s'identifie à la moyennation le long de U à droite sur le premier facteur :

$$\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G) e_{\overline{U}_x^+} e_{U_x} \breve{\varepsilon} \otimes_{\breve{\varepsilon}RM_x\breve{\varepsilon}} B \xrightarrow{\int_U} \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/U)\breve{\varepsilon} \otimes_{\breve{\varepsilon}RM_x\breve{\varepsilon}} B,$$

laquelle est un isomorphisme d'après la remarque 3.4. Ceci achève la preuve du point ii). $\square$

Avant d'énoncer le corollaire suivant, rappelons un peu d'*abstract nonsense* :

Lemme 3.7 *Soit H un groupe localement p-profini et $\mathcal{E}$ une famille d'idempotents de RH. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H) = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)\check{\varepsilon}$.

ii) Pour tout objet W de $\mathrm{Mod}_R(H)$ on a $\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \varepsilon W = W$.

Elles impliquent les propriétés équivalentes suivantes :

iii) $\mathcal{H}_R(H) = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \mathcal{H}_R(H)\check{\varepsilon}\mathcal{H}_R(H)$,

iv) Pour tout objet W de $\mathrm{Mod}_R(H)$ non-nul, il existe $\varepsilon \in \mathcal{E}$ tel que $\check{\varepsilon}W \neq 0$,

et leur sont équivalentes si $\mathcal{E}$ est de plus stable par conjugaison. Elles impliquent aussi la propriété

v) La famille de RH-modules lisses $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)\check{\varepsilon}$ engendre la catégorie $\mathrm{Mod}_R(H)$,

et lui sont équivalentes si, en plus de la stabilité par conjugaison, tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$ est à support dans un sous-groupe compact. Lorsqu'elles sont vérifiées, on dira que $\mathcal{E}$ est une famille génératrice *d'idempotents de RH.*

Preuve : L'équivalence entre *i*) et *ii*) vient de ce qu'en appliquant l'application inverse de M au point *i*), on obtient l'égalité $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(M) = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \varepsilon\mathcal{C}_R^{\infty,c}(M)$ qui est à la fois un cas particulier et le cas universel de *ii*). Les implications *i*) $\Rightarrow$ *iii*) $\Rightarrow$ *iv*) sont immédiates une fois qu'on a remarqué que pour tout $W \in Mod_R(H)$ on a $\mathcal{H}_R(H)W = W$. De plus on obtient *iv*) $\Rightarrow$ *iii*) en appliquant *iv*) à $W := \mathcal{H}_R(H)/(\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \mathcal{H}_R(H)\check{\varepsilon}\mathcal{H}_R(H)$.

Pour l'implication *iv*) $\Rightarrow$ *v*), puisque les $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)\check{\varepsilon}$ sont projectifs, ils engendrent $Mod_R(H)$ si pour tout objet non-nul W on peut trouver ε tel que $Hom_H(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)\check{\varepsilon}, W) \neq 0$. Or on a une injection $\check{\varepsilon}W \hookrightarrow Hom_H(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)\check{\varepsilon}, W)$ qui envoie w sur $f \mapsto fw$. Réciproquement, supposons *v*), fixons W et choisissons $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et A non-nul dans $Hom_H(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)\check{\varepsilon}, W)$. Si le support de ε est inclus dans un sous-groupe compact, il existe $K \subset H$ compact ouvert tel que $e_K\varepsilon = \varepsilon e_K$ et $A(e_K\check{\varepsilon}) \neq 0$. Mais alors $A(e_K\check{\varepsilon}) \in \check{\varepsilon}W^K$ donc $\check{\varepsilon}W \neq 0$. Ainsi, *v*) $\Rightarrow$ *iv*) sous l'hypothèse que chaque ε a un support contenu dans un sous-groupe compact. Enfin, puisque $\mathcal{H}_R(H)\check{\varepsilon}\mathcal{H}_R(H) = \sum_{h\in H} \mathcal{H}_R(H)\check{\varepsilon}\delta_h = \sum_{h\in H} \mathcal{H}_R(H)\check{\varepsilon}^h$, on voit que si $\mathcal{E}$ est stable par conjugaison alors *iii*) $\Rightarrow$ *i*).
$\square$

L'exemple le plus simple de famille génératrice est le singleton $\{1\}$.

Définition 3.8 *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique. Un idempotent ε de RM sera dit P-bon s'il existe $y_\varepsilon \in B(M, K)$ tel que $\varepsilon \in RM_{y_\varepsilon}$ et les hypothèses de la proposition 3.1 sont vérifiées.*

Remarquons que si ε est un idempotent P-bon, alors $\check{\varepsilon}$ est $\overline{P}$-bon.

Pour le corollaire suivant, une RG-représentation lisse V est dite *admissible* si pour tout sous-groupe ouvert H, le R-module V^H des invariants sous H est de type fini.

Corollaire 3.9 *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique. Supposons qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{E}$ d'idempotents P-bons de RM. Alors*

i) Propriétés de finitude *: l'induction parabolique $\mathrm{i}_{M,P}^G$ respecte la propriété d'être* de type fini*, et la restriction parabolique $\mathrm{r}_{G,P}^M$ celle d'être* admissible*. De plus, pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H de G admettant une $(P, \overline{P})$-décomposition, l'application canonique $V^H \xrightarrow{j_U} \mathrm{r}_{G,P}^M(V)^{H\cap M}$ est surjective.*

ii) Seconde adjonction *: le foncteur $\delta_P^{-1}\mathrm{r}_{G,P}^M$ est adjoint à droite du foncteur $\mathrm{i}_{M,\overline{P}}^G$ d'induction par rapport au parabolique opposé $\overline{P}$ tordu par le module. De plus, pour tout objet V de $Mod_R(G)$, on a $\mathrm{r}_{G,P}^M V = 0$ si et seulement si $\mathrm{r}_{G,\overline{P}}^M V = 0$.*

Preuve : Remarquons pour commencer, que si une telle famille $\mathcal{E}$ existe, alors on peut en déduire une autre, génératrice aussi, et dont les éléments sont des idempotents *lisses*, *i.e.* dans $\mathcal{H}_R(M)$: en effet, si $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $M_{y_\varepsilon,r}$ est un pro-p-sous-groupe ouvert normal de M_{y_ε}, alors ε commute à $e_{M_{y_\varepsilon,r}}$ (qui est central dans RM_{y_ε}) et le produit $\varepsilon e_{M_{y_\varepsilon,r}}$ est donc un idempotent lisse. La famille obtenue en prenant pour chaque ε une base de voisinages de l'unité formée de tels sous-groupes ouverts normaux dans M_{y_ε} est génératrice et satisfait à l'hypothèse de l'énoncé. Nous supposerons désormais que les idempotents de $\mathcal{E}$ sont lisses.

Soit $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $\widetilde{\varepsilon}$ l'idempotent de RG_{y_ε} associé. Par construction cet idempotent est lisse dans RG puisque ε l'est dans RM. Il s'ensuit que la représentation $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\check{\widetilde{\varepsilon}}$ est de type fini, puisque quotient d'une représentation du type $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G/H)$ pour H ouvert compact. Or, d'après le corollaire 3.6 ii) appliqué au $\check{\varepsilon}RM_{y_\varepsilon}\check{\varepsilon}$-module libre de rang 1, on a

$$i_{M,P}^G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(M)\check{\varepsilon}) \simeq \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\check{\widetilde{\varepsilon}},$$

de sorte que l'induite parabolique de la représentation $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(M)\check{\varepsilon}$ est de type fini. D'après notre hypothèse et 3.7 v), la famille des $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(M)\check{\varepsilon}$ est génératrice dans la catégorie $Mod_R(M)$. Puisque l'induction parabolique est un foncteur exact, on en déduit qu'elle envoie objets de type fini sur objets de type fini.

Pour montrer l'"admissibilité" de la restriction parabolique, il suffit bien-sûr de prouver la dernière assertion du point i). Fixons donc $H = (H \cap \overline{U})H_M(H \cap U)$ un pro-p-sous-groupe ouvert de G. On veut montrer que la restriction de j_U à $V^H \longrightarrow (V_U)^{H_M}$ est surjective. Par définition des U-coinvariants il suffit de prouver la surjectivité de $V^{H_M(H\cap\overline{U})} \longrightarrow (V_U)^{H_M}$, et puisque les H_M-invariants s'obtiennent comme image de l'action de l'idempotent e_{H_M}, il suffit encore de prouver la surjectivité de $V^{H\cap\overline{U}} \longrightarrow V_U$. Pour cela, en vertu de 3.7 ii), il suffit de voir que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, l'image $j_U(V^{H\cap\overline{U}})$ contient εV_U. Choisissons alors y_ε tel que $\overline{U}_{y_\varepsilon}^+ \supset H \cap \overline{U}$. On a

$$j_U(V^{H\cap\overline{U}}) \supset j_U(e_{\overline{U}_{y_\varepsilon}^+}V) \supset j_U(\widetilde{\varepsilon}V) = \varepsilon V_U,$$

d'où la surjectivité recherchée.

Venons-en maintenant à la propriété de seconde adjonction. En déroulant la définition du foncteur d'induction parabolique, on peut en trouver un adjoint à droite. Ceci est dû à Bernstein [2] et nécessite sa notion de "complétion" : pour $W \in Mod_R(G)$ on définit sa complétion $\hat{W}$ par

$$\hat{W} := Hom_G(\mathcal{H}_R(G), W)$$

Le R-module obtenu $\hat{W}$ est muni de la structure de RG-module (à gauche) déduite de la structure de RG-module à droite sur $\mathcal{H}_R(G)$ donnée par produit à droite. L'action de G sous-jacente n'est en général pas lisse. Dans l'autre sens on a un foncteur "lissification" $Mod(RG) \longrightarrow Mod_R(G)$ qui à un RG-module V associe le sous-module des vecteurs lisses V^∞. Notons que l'application $(f \otimes v) \in (\mathcal{H}_R(G) \otimes_{RG} V) \mapsto fv \in V^\infty$ est un isomorphisme de RG-modules, sont un inverse est donné en envoyant $v \in V^\infty$ sur $e_H \otimes v$ pour n'importe quel H ouvert pro-p tel que $v \in V^H$.

Le foncteur "complétion" de $Mod_R(G)$ dans $Mod(RG)$ est un adjoint à droite du foncteur "lissification". Plus précisément, pour $V \in Mod(RG)$ on a une application canonique $V \longrightarrow \widehat{V^\infty}$ qui envoie $v \in V$ sur le morphisme $(f \mapsto fv) \in \widehat{V^\infty}$ et, partant d'un module lisse W, on a une application canonique $\hat{W}^\infty = \mathcal{H}_R(G) \otimes_{RG} \hat{W} \longrightarrow W$ donnée par $(f \otimes \hat{w}) \mapsto \hat{w}(f)$. Ces deux applications induisent des isomorphismes réciproques $Hom_G(V, \hat{W}) \simeq Hom_G(V^\infty, W)$. Remarquons aussi que la flèche $\hat{W}^\infty \longrightarrow W$ est un isomorphisme, *i.e.* on a $\hat{W}^\infty = W$.

Soit maintenant $(\pi, V) \in Mod_R(M)$ et notons encore π l'inflation de π à $\overline{P}$. Par définition on a $i_{M,\overline{P}}^G(V) = \mathcal{C}^\infty(G,V)^{\overline{P}}$ où $\overline{P}$ agit sur une fonction f par $(\overline{p}f)(g) = \pi(\overline{p})(f(g\overline{p}))$. Si $d\overline{p}$ désigne une mesure de Haar à gauche, l'application R-linéaire

$$\begin{array}{rccl} \int : & \mathcal{C}^{\infty,c}(G,V) & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(G,V)^{\overline{P}} \\ & f & \mapsto & \left(g \mapsto \int_{\overline{P}} \pi(\overline{p})f(g\overline{p})d\overline{p}\right) \end{array}$$

induit une application G-équivariante $\mathcal{C}^{\infty,c}(G, \delta_{\overline{P}}^{-1}V)_{\overline{P}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G,V)^{\overline{P}}$, où $\delta_{\overline{P}} = \delta_P^{-1}$ désigne le caractère-module de $\overline{P}$ défini par $\rho(\overline{p}_1)d\overline{p} = \delta_{\overline{P}}(\overline{p}_1)^{-1}d\overline{p}$. En utilisant la décomposition de Cartan ($G = G_0\overline{P}$ pour G_0 compact spécial), on vérifie que c'est un isomorphisme. En effet, si j désigne l'inclusion de G_0 dans G et $\overline{P}_0$ l'intersection de $\overline{P}$ et G_0, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\infty,c}(G,\delta_{\overline{P}}^{-1}V)_{\overline{P}} \arrow[r] & \mathcal{C}^{\infty}(G,V)^{\overline{P}} \arrow[d, "j^*"] \\
\mathcal{C}^{\infty}(G_0,V)_{\overline{P_0}} \arrow[u, "j_!"] \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{P_0}"] & \mathcal{C}^{\infty}(G_0,V)^{\overline{P_0}}
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes de RG_0-modules et l'application trace Tr_{P_0} a déja été rencontrée au-dessus des corollaires 2.7 et 3.6. Comme dans ces deux corollaires on se ramène au lemme 2.8 pour prouver l'inversibilité de Tr_{P_0}.

On a donc pour tout $W \in Mod_R(G)$:

$$\begin{aligned}
Hom_G(i_{M,\overline{P}}^G(V),W) &\simeq Hom_G((\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\otimes_R \delta_P V)_{\overline{P}},W)\\
&= Hom_R(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\otimes_R \delta_P V,W)^{G\times\overline{P}}\\
&\simeq Hom_R(\delta_P V, Hom_R(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G),W))^{G\times\overline{P}}\\
&= Hom_{\overline{P}}(\delta_P V, Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G),W))\\
&= Hom_{\overline{P}}(\delta_P V,\hat{W})\\
&= Hom_M(\delta_P V,\hat{W}^{\overline{U}})\\
&= Hom_M(\delta_P V,(\hat{W}^{\overline{U}})^{\infty})
\end{aligned}$$

(Prendre garde que dans la dernière ligne, $\hat{W}$ désigne la complétion de W en tant que G-module et $(\hat{W}^{\overline{U}})^{\infty}$ désigne la partie lisse de $\hat{W}^{\overline{U}}$ en tant que M-module.) Ceci montre que le foncteur $i_{M,\overline{P}}^G$ est adjoint à gauche du foncteur $W \mapsto \delta_P^{-1}(\hat{W}^{\overline{U}})^{\infty}$. Nous allons maintenant expliciter une flèche M-équivariante $(\hat{W}^{\overline{U}})^{\infty} \longrightarrow W_U$ fonctorielle en W. Pour ce faire, prenons un sous-groupe ouvert compact U_c de U, et considérons la composée

$$\bar{j}_U : (\hat{W}^{\overline{U}})^{\infty} \xrightarrow{e_{U_c}} W \xrightarrow{j_U} W_U.$$

La première flèche est donnée par action de e_{U_c} à gauche ; son image est dans la partie *lisse* W de $\hat{W}$, car pour tout $w \in (\hat{W}^{\overline{U}})^{\infty}$, on peut trouver $H = (H\cap U)H_M(H\cap\overline{U})$ tel que $(H\cap U)\subset U_c$ et H_M fixe w, qui est aussi fixé par $\overline{U}$ donc par $\overline{U}\cap H$. Par définition de j_U, la composée $\bar{j}_U$ ci-dessus est *indépendante du choix de* U_c, et par suite est M-équivariante et fonctorielle en W.

Puisque la famille $\mathcal{E}$ est supposée génératrice et en vertu de 3.7 ii), pour montrer que $\bar{j}_U$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, la restriction de $\bar{j}_U$ induit un R-isomorphisme $\varepsilon(\hat{W}^{\overline{U}})^{\infty} \xrightarrow{\sim} \varepsilon W_U$. Choisissons un point y de $B(M,K)$ tel que $\varepsilon \in RM_y$ et que l'hypothèse de la proposition 3.1 soit vérifiée. Dans la factorisation de $\overline{j_U}$

$$\varepsilon(\hat{W}^{\overline{U}})^{\infty} \xrightarrow{e_{U_y}} \widetilde{\varepsilon}W \xrightarrow{j_U} \varepsilon W_U,$$

on sait déja par la proposition 3.1 que la flèche de droite est un isomorphisme. Pour étudier la flèche de gauche, remarquons tout d'abord que par définition de $\hat{W}$, on a $\hat{W}^{\overline{U}} = Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)_{\overline{U}},W)$, où les $\overline{U}$-coinvariants sont pris pour la translation à droite sur $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)$. On a donc $\varepsilon\hat{W}^{\overline{U}} \simeq Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)_{\overline{U}}\varepsilon,W)$ et par ailleurs, on a aussi $\widetilde{\varepsilon}W \simeq Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\widetilde{\varepsilon},W)$. Notons que la flèche $e_{U_y} : \hat{W} \longrightarrow e_{U_y}\hat{W}$ s'identifie à la flèche $Hom_G(\mathcal{H}_R(G),W) \longrightarrow Hom_G(\mathcal{H}_R(G)e_{U_y},W)$ duale de l'inclusion $\mathcal{H}_R(G)e_{u_y} \subset \mathcal{H}_R(G)$. Ainsi, via les identifications ci-dessus, la flèche $\varepsilon(\hat{W}^{\overline{U}})^{\infty} \xrightarrow{e_{U_y}} \widetilde{\varepsilon}W$ ci-dessus devient la flèche

$$Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)_{\overline{U}}\varepsilon,W) \xrightarrow{j_{\overline{U}}^*} Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\widetilde{\varepsilon},W)$$

duale de la flèche $j_{\overline{U}} : \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\widetilde{\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)_{\overline{U}}\varepsilon$. Mais celle-ci, comme dans la remarque 3.4, est un isomorphisme. En effet, puisque ε est supposé $\mathcal{P}$-bon, l'idempotent $\breve{\varepsilon}$ est lui-même $\overline{\mathcal{P}}$-bon comme on le remarque en appliquant $g \mapsto g^{-1}$ aux hypothèses de la proposition 3.1.

□

Avant d'énoncer le prochain résultat, rappelons qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_R^\infty(G)$ est dite cuspidale (à gauche) si pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ de $\mathcal{G}$, on a $\int_U f(ug)du = 0$ quel que soit $g \in G$.

Proposition 3.10 *Supposons que pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ de $\mathcal{G}$, il existe une famille génératrice d'idempotents P-bons de RM. Alors pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H de G il existe un sous-ensemble S_H de G, compact modulo le centre et* indépendant de la R-algèbre *$\mathcal{R}$ supportant toutes les fonctions cuspidales dans $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}^c(H\backslash G/H)$.*

Preuve : Fixons pour commencer un sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$. D'après notre hypothèse, il existe un ensemble fini $\mathcal{E}_H$ d'idempotents P-bons de RM et, pour chaque $\varepsilon \in \mathcal{E}_H$ une distribution localement constante à support compact $f_\varepsilon \in \mathcal{H}_R(M)$, de sorte qu'on ait l'égalité $e_{H\cap M} = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}_H} \varepsilon f_\varepsilon$ dans $\mathcal{H}_R(M)$. Choisissons un sous-groupe ouvert compact $\overline{U}_H$ de $\overline{U}$ suffisamment petit pour avoir les égalités $e_{\overline{U}_H}\varepsilon f_\varepsilon e_H = \varepsilon f_\varepsilon e_H$ dans $\mathcal{H}_R(G)$ pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}_H$, puis choisissons pour chaque $\varepsilon \in \mathcal{E}_H$ un point $y_\varepsilon \in B(\mathcal{M}, K)$ tel que $\overline{U}_{y_\varepsilon} \subset \overline{U}_H$. Choisissons enfin un sous-groupe ouvert compact U_H suffisamment grand pour contenir chaque U_{y_ε}. On a alors l'égalité dans $\mathcal{H}_R(G)$:

$$e_{U_H} e_H = e_{U_H} \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}_H} \widetilde{\varepsilon}_{y_\varepsilon} f_\varepsilon e_H.$$

Appliquons cette égalité à un élément H-invariant v d'une représentation $V \in Mod_R(G)$ dans le noyau de la projection j_U sur V_U. Chaque $f_\varepsilon v$ est encore dans $ker\, j_U$, donc par définition de "P-bon" et par 3.1, on obtient $e_{U_H} v = 0$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{C}_R^c(H\backslash G/H)$ une fonction cuspidale. Pour tout parabolique $\mathcal{P}$, on a donc $e_{U_H} * \varphi = 0$. Il s'ensuit que pour tout élément $g \in G$ tel que $U_H \subset gHg^{-1}$, on a

$$e_H * g^{-1}\varphi(1) = \int_H \varphi(gh)e_H = \varphi(g) = 0. \tag{3.11}$$

Quitte à remplacer H par un de ses sous-groupes ouverts, on peut supposer qu'il existe un sous-groupe parabolique minimal $\mathcal{P}_0 = \mathcal{M}_0\mathcal{U}_0$ et un sous-groupe compact $\mathcal{M}_0$-spécial G_0 de G contenant et normalisant H. On a alors les décomposition de Cartan $G = G_0P_0$ et d'Iwasawa $G = G_0M_0^+G_0$ où M_0^+ désigne l'ensemble des éléments de M_0 dont l'action par conjugaison sur U_0 est contractante. Vu les conditions que doivent respecter les sous-groupes compacts U_H, on peut supposer que pour toute paire de sous-groupes paraboliques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ conjugués par $k \in G_0$, les sous-groupes compacts U_H et U'_H sont aussi conjugués par k. Ainsi l'ensemble C_H des $g \in G$ vérifiant $g^{-1}U_Hg \setminus H \neq \emptyset$ pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ est une réunion de G_0-doubles classes.

D'après 3.11, la proposition sera prouvée si l'on montre que C_H est compact modulo le centre de G, ou de manière équivalente que $C_H \cap M_0^+$ est compact modulo le centre de G. Or $C_H \cap M_0^+$ est inclus dans l'intersection pour $\mathcal{P}$ maximal et contenant $\mathcal{P}_0$ des

$$C_{H,\mathcal{P}} := \left\{m \in M_0^+, \quad m^{-1}U_Hm \setminus H \neq \emptyset\right\}$$

et le fait que cette intersection est compacte modulo le centre est un résultat classique. Par exemple, l'image de cette intersection par l'application habituelle $H_0 : M_0 \longrightarrow a_{M_0}^*$ (voir par exemple [16, 2.7]) est contenue dans un polyèdre compact modulo a_G^* défini par des inégalités du type $\langle\alpha, x\rangle \geqslant 0$ et $\langle\omega_\alpha, x\rangle \leqslant \lambda_\alpha$ où α décrit une base des racines de $\mathcal{P}_0$, ω_α décrit la base duale pour un produit scalaire invariant et les λ_α sont des réels positifs qui dépendent des U_H et $(U \cap H)$.

□

Pour terminer cette section, voici une étape facile pour construire des familles génératrices d'idempotents P-bons. Néanmoins, on ne s'en servira pas dans la suite.

Lemme 3.12 *Supposons que pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{Q} = \mathcal{N}\mathcal{V}$ contenant $\mathcal{P}$, il existe une famille $\mathcal{E}_Q$ d'idempotents Q-bons de RN qui engendre la partie cuspidale de* $\mathrm{Mod}_R(N)$*, dans le sens suivant : pour tout objet V cuspidal de* $\mathrm{Mod}_R(N)$*, il existe $\varepsilon \in \mathcal{E}$ tel que $\varepsilon V \neq 0$. Alors il existe une famille génératrice $\mathcal{E}$ d'idempotents P-bons de RM.*

Preuve : Pour tout $\mathcal{Q}$ et tout $\varepsilon \in \mathcal{E}_Q$, on choisit un point $y \in B(N,K)$ adapté à ε et tel que $(V\cap M)_y = (V\cap M)_y^+$ et $(\overline{V}\cap M)_y = (\overline{V}\cap M)_y^+$. On pose alors $\varepsilon_M := z_{y,Q\cap M}^{-1} e_{(V\cap M)_y} e_{(\overline{V}\cap M)_y^+}\varepsilon$. C'est un idempotent de RM_y. Si $x \in y + A_M$, on a

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_M = e_{V_x^+} e_{\overline{V}_x} z^{-1}\varepsilon \in RG_x e_{V_x} e_{\overline{V}_x}\varepsilon = RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x}\varepsilon_M$$

et de même on vérifie $\varepsilon_M e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+} \in \varepsilon_M e_{U_x} e_{\overline{U}_x} RG_x$. L'idempotent ε_M est donc P-bon. Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des ε_M obtenus en faisant varier $\mathcal{Q}$, $\varepsilon \in \mathcal{E}_Q$ et en saturant par M-conjugaison. Il nous reste à vérifier que cette famille $\mathcal{E}$ est génératrice. Puisqu'on a saturé par conjugaison, il suffit par 3.7 de montrer que pour tout objet W de $Mod_R(M)$, il existe un ε_M tel que $\varepsilon_M W \neq \{0\}$. Soit alors $\mathcal{Q} = \mathcal{V}\mathcal{N}$ un parabolique contenant $\mathcal{P}$ et maximal pour la propriété $W_{V\cap M} \neq 0$. Alors la représentation $W_{V\cap M} \in Mod_R(N)$ est cuspidale et par hypothèse il existe $\varepsilon \in \mathcal{E}_Q$ tel que $\varepsilon(W_{V\cap M}) \neq 0$. Or par la proposition 3.1, on a $\varepsilon_M W \xrightarrow{\sim} \varepsilon(W_{V\cap M})$.

□

4 Noethérianité

Cette section est logiquement indépendante des autres. Sauf précision supplémentaire, R y désigne toujours une $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-algèbre noethérienne. Nous allons prouver que *la seconde adjonction implique la noetherianité*. Commençons par une mise au point :

Lemme 4.1 *Pour un objet V de $\mathrm{Mod}_R(G)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H, le $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$-module V^H est noethérien.

ii) Tout sous-objet W de V engendré par ses invariants sous un sous-groupe ouvert de G est de type fini sur G.

Une représentation V satisfaisant ces propriétés sera dite localement noethérienne.

Preuve : $i) \Rightarrow ii)$: soit $W \subset V$ et H un pro-p-sous-groupe ouvert de G tel que W^H engendre W. Alors $W^H \subset V^H$ est un sous-$e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$-module donc est de type fini. Or, tout sous-ensemble de W^H engendrant W^H sur $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$ engendre W sur G.

$ii) \Rightarrow i)$: fixons $H \subset G$ pro-p et ouvert, et M un sous-$e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$-module de V^H. Le G-module $\langle M\rangle_G$ engendré par M satisfait $(\langle M\rangle_G)^H = M$. Soit $v_1, \cdots, v_n$ des générateurs de $\langle M\rangle_G$. On peut les écrire $v_i = \sum g_{ij}m_{ij}$ pour des éléments $g_{ij} \in G$ et $m_{ij} \in M$. Donc les m_{ij} obtenus (en nombre fini) engendrent M sur $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$.

□

Pour le lemme suivant, rappelons que pour tout objet $V \in Mod_R(G)$, la restriction de l'action de G à son centre Z_G munit V d'une structure de RZ_G-module pour laquelle l'action de G est RZ_G-linéaire. Ici, conformément à nos conventions, RZ_G désigne l'algèbre des distributions à support compact sur Z_G. C'est la limite projective des R-algèbres de type fini (et donc noethériennes par le théorème de Hilbert) $R[Z_G/Z_G \cap H]$ pour H parcourant les sous-groupes ouverts de G.

Lemme 4.2 *Si $V \in Mod_R(G)$ est* cuspidale *et de type fini, alors V est RZ_G-admissible, et donc localement noethérienne.*

Preuve : (voir aussi [29, A.1.1]). Soit $W \subset V$ un sous-objet et H un pro-p-sous-groupe ouvert tel que W et V soient respectivement engendrés par W^H et V^H. Si $v \in V^H$, alors par définition de la cuspidalité, la fonction $g \mapsto e_H g v$ est à support compact modulo Z_G, donc le $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$-module engendré par v est de type fini sur l'anneau $R[Z_G/Z_G \cap H]$. Ainsi, puisque V^H est de type fini sur $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$, il est aussi de type fini sur $R[Z_G/Z_G \cap H]$. D'où la RZ_G-admissibilité de V. Mais alors par noethérianité de $R[Z_G/Z_G \cap H]$, le R-module W^H est de type fini sur $R[Z_G/Z_G \cap H]$, donc *a fortiori* de type fini sur $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$. Ainsi W est bien de type fini sur G. Donc V est localement nothérienne. □

Dans la suite de cette section, on soumet le groupe réductif $\mathcal{G}$ à l'hypothèse suivante que nous appellerons (Adj) :

Pour tout sous-groupe parabolique $Q = NV$ de tout sous-groupe de Levi M de G, le foncteur $i_{N,\overline{Q}}^{M}$ est adjoint à gauche du foncteur $\delta_Q^{-1} r_{M,Q}^{N}$.

D'après le corollaire 3.9, cette hypothèse est vérifiée si pour tout parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{MU}$ de $\mathcal{G}$, il existe une famille génératrice d'idempotents P-bons de RM, au sens de 3.7 et 3.8. Nous allons prouver :

Proposition 4.3 *Sous l'hypothèse (Adj), tout $V \in Mod_R(G)$ de type fini est localement noethérien.*

En prenant $V = ind_H^G(1)$, on en déduit :

Corollaire 4.4 *(Toujours sous la même hypothèse) Pour tout pro-p-sous-groupe ouvert, l'algèbre de Hecke $e_H \mathcal{H}_R(G) e_H$ est noethérienne.*

Par ailleurs, on étendra dans l'appendice A, des résultats de Vignéras, Moy et Prasad de décomposition de la catégorie $Mod_R(G)$ par le "niveau". Ces résultats montrent qu'une représentation lisse de type fini V de G est localement noethérienne si et seulement si elle est noethérienne, de sorte que :

Corollaire 4.5 *Sous l'hypothèse (Adj) et sous l'hypothèse de validité des constructions de Moy et Prasad (voir appendice A), la catégorie $\mathrm{Mod}_R(G)$ est noethérienne,* i.e. *tout sous-objet d'un objet de type fini est de type fini.*

La suite de cette section est dévolue à la preuve de la proposition 4.3. La première étape consistera, par un argument de récurrence, à se ramener à V de la forme $i_P^G(W)$ pour une représentation cuspidale de type fini W du quotient de Levi d'un sous-groupe parabolique P et à prouver la type-finitude de tout sous-quotient cuspidal d'une telle représentation. Ce cas particulier est traité au lemme 4.10. Signalons que nous démontrons au passage quelques résultats d'un intérêt indépendant, comme par exemple 4.8 ou 4.13. Nous préciserons autant que possible à chaque étape ce qui dépend effectivement de l'hypothèse (Adj).

Première hypothèse de récurrence : Si le rang semi-simple relatif de $\mathcal{G}$ est nul, toute représentation de G est cuspidale donc la proposition 4.3 découle du lemme 4.2. Nous ferons donc l'hypothèse de récurrence :

(HR1) l'énoncé de 4.3 est vrai pour tout sous-groupe de Levi strict de G.

Pour manier cette hypothèse de récurrence, il sera commode d'utiliser le langage des sous-groupes paraboliques standard. On fixe donc un K-sous-groupe parabolique minimal $\mathcal{P}_0 = \mathcal{M}_0\mathcal{U}_0$ de $\mathcal{G}$; les sous-groupes paraboliques standard sont ceux qui contiennent $\mathcal{P}_0$ et les sous-groupes de Levi standard sont leurs composantes de Levi qui contiennent $\mathcal{M}_0$. Comme les sous-groupes paraboliques standard sont uniquement déterminés par leur composante de Levi standard, on ommettra de préciser le parabolique dans les notations : on notera r_G^M pour $r_{G,P}^M$ et $\overline{r_G^M}$ pour $r_{G,\overline{P}}^M$, etc... On notera de plus $M < G$ pour "M sous-groupe de Levi standard de G".

Lemme 4.6 *Les foncteurs de restriction parabolique préservent les propriétés d'être de type fini ou d'être engendré par ses invariants sous un sous-groupe ouvert. Sous l'hypothèse (Adj), il en est de même pour l'induction parabolique.*

Preuve : Le fait que la restriction parabolique respecte la type-finitude est une conséquence immédiate et classique de la décomposition de Cartan. Pour voir que, sous l'hypothèse (Adj), l'induction i_M^G respecte la type finitude, rappelons qu'un objet $V \in Mod_R(G)$ est de type fini si et seulement si pour tout système inductif filtrant (dénombrable) $(V_i)_{i\in I}$, l'application canonique $\varinjlim Hom_G(V, V_i) \xrightarrow{\gamma_V} Hom_G(V, \varinjlim V_i)$ est surjective. Si $V = i_M^G(W)$ pour W dans $Mod_R(M)$, alors par la seconde adjonction et le fait que $\overline{r_G^M}$ commute aux limites inductives (puisqu'il est adjoint à gauche de $\overline{i_M^G}$), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Hom_G(V, \varinjlim V_i) \arrow[r, "\gamma_V"] \arrow[d, equal] & \varinjlim Hom_G(V, V_i) \arrow[d, equal] \\ Hom_M(W, \delta_M(\varinjlim \overline{r_G^M}(V_i))) \arrow[r, "\gamma_W"'] & \varinjlim Hom_M(W, \delta_M \overline{r_G^M}(V_i)) \end{tikzcd} .$$

Si W est de type fini dans $Mod_R(M)$, l'application γ_W est surjective donc γ_V aussi et V est de type fini.

La deuxième propriété annoncée dans l'énoncé est une conséquence de la première : vérifions-le pour i_M^G par exemple : un objet $W \in Mod_R(M)$ est engendré par ses H_M-invariants s'il existe un R-module U et un épimorphisme $ind_{H_M}^M(1) \otimes U \longrightarrow W$. Comme $ind_{H_M}^M(1)$ est de type fini, il en est de même de $i_M^G(ind_{H_M}^M(1))$ par le point précédent et il existe donc un sous-groupe H ouvert dans G, un entier $n > 0$ et un épimorphisme $ind_H^G(1)^n \longrightarrow i_M^G(ind_{H_M}^M(1))$. Puisque i_M^G admet un adjoint à droite, il commute aux limites inductives et on obtient un épimorphisme $ind_H^G(1) \otimes U^n \longrightarrow i_M^G(W)$. $\square$

Notons $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble fini des sous-groupes de Levi standard. On le munit d'un ordre total $\leqslant$ raffinant l'ordre partiel défini par l'inclusion. On obtient donc une numérotation $\mathcal{L}(G) = \{M_0, \cdots, M_g = G\}$ telle que $M_i \subset M_j$ implique $i < j$.

Lemme 4.7 *Sous l'hypothèse (Adj) il existe une filtration du foncteur identité de* $\mathrm{Mod}_R(G)$

$$\{0\} = \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_g = \mathrm{Id}_{Mod_R(G)}$$

telle que pour $V \in \mathrm{Mod}_R(G)$*, on ait :*

i) pour tout $i = 0, \cdots, g$*, le gradué* $\mathcal{G}_i(V) := \mathcal{F}_i(V)/\mathcal{F}_{i-1}(V)$ *est un quotient d'un objet de la forme* $i_{M_i}^G(W)$ *pour un quotient* cuspidal W *de* $\delta_{M_i}\overline{r_G^{M_i}}(V)$*.*

ii) les $\mathcal{G}_i(V)$ *sont de type fini, resp. engendrés par leurs invariants sous un sous-groupe ouvert suffisamment petit, si* V *l'est.*

Preuve : Pour M sous-groupe de Levi standard de G, l'hypothèse (Adj) fournit une transformation naturelle $i_M^G \circ \delta_M \overline{r_G^M} \xrightarrow{adj} \mathrm{Id}_{Mod_R(G)}$ entre endofoncteurs de $Mod_R(G)$. Rappelons que la catégorie des endofoncteurs d'une catégorie abélienne est abélienne, ce qui nous permet de poser

$$G_M := coker\left(i_M^G \circ \delta_M \overline{r_G^M} \xrightarrow{adj} \mathrm{Id}_{Mod_R(G)}\right),$$

le conoyau, dans la catégorie des endofoncteurs de $Mod_R(G)$, de la flèche d'adjonction précédente. Posons alors pour tout $i \geqslant 0$

$$\mathcal{F}_i := ker\left(\mathrm{Id}_{Mod_R(G)} \longrightarrow G_{M_i} \circ G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0}\right).$$

On obtient une filtration du foncteur identité de $Mod_R(G)$ dont les gradués vérifient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} &\simeq ker\,(G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0} \longrightarrow G_{M_i} \circ \cdots \circ G_{M_0}) \\ &\simeq im\,(i_{M_i}^G \circ \delta_{M_i}\overline{r_G^{M_i}} \circ G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0} \xrightarrow{adj} G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0}). \end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que la flèche $\overline{r_G^M} \circ i_M^G \circ \delta_M \overline{r_G^M} \xrightarrow{\overline{r_G^M}(adj)} \overline{r_G^M}$ est un épimorphisme de foncteurs, puisque par définition de l'adjonction et torsion par δ_M^{-1}, la composée $\overline{r_G^M} \xrightarrow{(adj)'\overline{r_G^M}} \overline{r_G^M} \circ i_M^G \circ \delta_M \overline{r_G^M} \xrightarrow{\overline{r_G^M}(adj)} \overline{r_G^M}$ est l'identité (en notant adj' la flèche d'adjonction $\mathrm{Id}_{Mod_R(M)} \longrightarrow \delta_M \overline{r_G^M} \circ i_M^G$).

Ainsi, $\overline{r_G^M} \circ G_M = 0$. Puisque $G_{M_i} \circ \cdots \circ G_{M_0}$ est un quotient de $G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0}$, on voit alors par une récurrence immédiate que $\overline{r_G^{M_j}} \circ G_{M_i} \circ \cdots \circ G_{M_0} = 0$ pour tout $j \leqslant i$. En particulier, $\overline{r_G^{M_i}} \circ G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0}(V)$ est un M_i-module cuspidal pour tout $V \in Mod_R(G)$. Pour un tel V, la filtration $\mathcal{F}_*(V)$ remplit le cahier des charges du point i) et le point ii) en découle par le lemme 4.6.

Remarquons que de la description des gradués $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ et de l'exactitude des foncteurs paraboliques, on déduit que

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{i-1} + im\left(i_{M_i}^G \circ \delta_{M_i} \overline{r_G^{M_i}} \xrightarrow{adj} \mathrm{Id}_{Mod_R(G)}\right),$$

d'où par récurrence

$$\mathcal{F}_i = \sum_{j=0}^{i} im\left(i_{M_j}^G \circ \delta_{M_j} \overline{r_G^{M_j}} \xrightarrow{adj} \mathrm{Id}_{Mod_R(G)}\right).$$

$\square$

D'après ce lemme, pour montrer que tout RG-module V de type fini est localement noethérien, il suffit de le faire pour V de la forme $i_M^G(W)$ avec W cuspidal de type fini. Le cas $M = G$ a été réglé par le lemme 4.2 et nous allons étudier le cas général par récurrence descendante sur le rang de M : fixant M, on fait donc l'hypothèse

(HR2) : les représentations de la forme $i_N^G(V)$ avec V cuspidale de type fini d'un sous-groupe de Levi N de rang supérieur à celui de M sont localement noethériennes

Soit alors $U \subset i_M^G(W)$ un sous RG-module engendré par ses invariants sous un sous-groupe ouvert suffisamment petit ; on veut montrer que U est de type fini.

Nous allons utiliser le fait que $i_M^G(W)$ est muni d'une structure supplémentaire, à savoir l'action par fonctorialité de l'algèbre des distributions à support compact RZ_M du centre de M. Notons B_M la sous-R-algèbre de RZ_M formée des éléments invariants sous le groupe fini $\mathcal{N}_G(M)/M$. Nous allons nous ramener au cas où le sous-module U de $i_M^G(W)$ est B_M-stable. Ceci nous sera permis par le lemme suivant, qui ne nécessite pas l'hypothèse (Adj) :

Lemme 4.8 *Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ deux sous-groupes paraboliques de composante de Levi $\mathcal{M}$. Alors pour tout élément $b \in B_M = (RZ_M)^{\mathcal{N}_G(M)}$ et tout morphisme G-équivariant $\varphi : i_P^G(X) \longrightarrow i_Q^G(Y)$ où X et Y sont deux objets* cuspidaux *de $Mod_R(M)$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
i_P^G(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_P^G(b_X)"'] & i_Q^G(Y) \arrow[d, "i_Q^G(b_Y)"] \\
i_P^G(X) \arrow[r, "\varphi"] & i_Q^G(Y)
\end{tikzcd}$$

où b_X, resp. b_Y, désigne l'endomorphisme de X, resp. Y, donné par l'action de b.

Preuve : Notons $\mathrm{Adj}(\psi) : r_Q^M i_P^G(X) \longrightarrow Y$ le morphisme adjoint (pour la réciprocité de Frobenius) d'un morphisme $\psi : i_P^G(X) \longrightarrow i_Q^G(Y)$. En déroulant la définition, on calcule simplement que

$$\mathrm{Adj}(\varphi \circ i_P^G(b_X)) = \mathrm{Adj}(\varphi) \circ r_Q^M i_P^G(b_X)$$

et

$$\mathrm{Adj}(i_P^G(b_Y) \circ \varphi) = b_Y \circ \mathrm{Adj}(\varphi) = \mathrm{Adj}(\varphi) \circ b_{r_Q^M i_P^G(X)}.$$

Il nous suffira donc de prouver que la différence $r_Q^M i_P^G(b_X) - b_{r_Q^M i_P^G(X)}$ est nulle dans $End_M(r_Q^M i_P^G(X))$, et pour cela il convient de considérer cette différence comme l'évaluation en X d'un endomorphisme $\delta_b := r_Q^M i_P^G(b_?) - b_{r_Q^M i_P^G(?)}$ du foncteur $r_Q^M i_P^G$ de la catégorie $Cusp_R(M)$ des objets cuspidaux de M dans elle-même. Rappelons [1] que ce foncteur possède une filtration dont le gradué est (à isomorphisme près) la somme directe des foncteurs $\mathrm{ad}(w)$ de conjugaison par un élément $w \in \mathcal{N}_G(M)/M$. L'endomorphisme δ_b respecte cette filtration et son gradué est la somme directe des $\mathrm{ad}(w)(b_?) - b_{\mathrm{ad}(w)(?)}$, laquelle est nulle puisque b est supposé invariant par $\mathcal{N}_G(M)$. Le gradué de δ_b étant donc nul, il suffira pour prouver que δ_b est lui-même nul de montrer que pour deux éléments distincts w et w' de $\mathcal{N}_G(M)/M$ on a

$$\mathit{Hom}(\mathrm{ad}(w), \mathrm{ad}(w')) = 0 \tag{4.9}$$

(*i.e.*, il n'y a pas de morphisme non nul entre les foncteurs de conjugaison par w et w').

Pour ce faire, on peut bien-sûr supposer $w' = 1$. Notons que le R-module $\mathit{Hom}(\mathrm{ad}(w), \mathrm{Id})$ est naturellement un module sur RZ_M (et plus généralement sur le centre de la catégorie $\mathit{Cusp}_R(M)$), l'action étant donnée $(z.\alpha)_X := z_X \circ \alpha_X = \alpha_X \circ z_{\mathrm{ad}(w)(X)}$. Comme α est un morphisme de foncteurs, on a aussi $z_X \circ \alpha_X = \alpha_X \circ \mathrm{ad}(w)(z_X) = \alpha_X \circ w(z)_{\mathrm{ad}(w)(X)}$. En d'autres termes, pour tout $z \in Z_M$, le RZ_M-module $\mathit{Hom}(\mathrm{ad}(w), \mathrm{Id})$ est tué par $(z - w(z))$.

Fixons maintenant $\alpha \in \mathit{Hom}(\mathrm{ad}(w), \mathrm{Id})$. Commençons par l'évaluer en un objet cuspidal X de la forme $X = \mathit{ind}_{M^c}^M(Y)$ où M^c désigne le sous-groupe de M engendré par les sous-groupes compacts. On a des isomorphismes de R-modules

$$\begin{aligned} \mathit{Hom}_M(\mathit{Ad}\, w(X), X) &\simeq \mathit{Hom}_M(\mathit{ind}_{M^c}^M(\mathit{Ad}\, w(Y)), X) \\ &\simeq \mathit{Hom}_{M^c}(\mathit{Ad}\, w(Y), Y) \otimes_R R[M/M^c] \end{aligned}$$

Via le dernier isomorphisme, l'action de $z \in Z_M$ sur $\mathit{Hom}_M(\mathit{Ad}\, w(X), X)$ envoie le sous-module $\mathit{Hom}_{M^c}(\mathit{Ad}\, w(Y), Y) \otimes (mM^c)$ sur le sous-module $\mathit{Hom}_{M^c}(\mathit{Ad}\, w(Y), Y) \otimes (zmM^c)$. En particulier, choisissant un élément $z \in Z_M$ tel que $zM^c \neq w(zM^c)$ on obtient que $(z - w(z))$ agit sans torsion sur $\mathit{Hom}_M(\mathit{Ad}\, w(X), X)$, et par conséquent $\alpha_X = 0$. Maintenant, pour un objet quelconque $X \in \mathit{Cusp}_R(M)$, l'application de réciprocité $\widetilde{X} := \mathit{ind}_{M^c}^M(X_{|M^c}) \longrightarrow X$ est un épimorphisme ; par ce qui précède on a donc $\alpha_X = 0$, et finalement $\alpha = 0$.

$\square$

Revenons à $U \subset i_M^G(W)$ et posons

$$U_M := \sum_{N \sim M} \mathit{im}\,(i_N^G \circ \delta_N \overline{r_G^N}(U) \xrightarrow{Adj} U) \subset U,$$

la somme portant sur les sous-groupes de Levi standard *associés* à M. Par 4.6 et l'hypothèse de récurrence (HR1), U_M est de type fini, et il nous suffit donc de prouver que U/U_M est de type fini. Soit alors $\widetilde{U} := B_M.U$ la somme des translatés de U sous B_M. Notons que par exactitude des foncteurs paraboliques on a

$$\mathit{im}\,(i_N^G \circ \delta_N \overline{r_G^N}(\widetilde{U}) \xrightarrow{Adj} \widetilde{U}) = B_M.\, \mathit{im}\,(i_N^G \circ \delta_N \overline{r_G^N}(U) \xrightarrow{Adj} U)$$

pour tout $N < G$. Si de plus N est associé à M, alors par le lemme précédent le sous-objet $\mathit{im}\,(i_N^G \circ \delta_N \overline{r_G^N}(U) \xrightarrow{Adj} U)$ de $i_M^G(W)$ est déjà stable par B_M. On en déduit que $U_M = \widetilde{U}_M$, et on est donc ramené à prouver que $\widetilde{U}/\widetilde{U}_M$ est *noethérien*. Appliquons la filtration 4.7 à $\widetilde{U}/\widetilde{U}_M$. Par définition de $\widetilde{U}_M$ et puisque W est cuspidale, les seuls gradués non nuls correspondent à des M_i de rang strictement supérieur à celui de M. De plus un tel gradué $\mathcal{G}_i(\widetilde{U}/\widetilde{U}_M)$ est d'après 4.7 i) un quotient de l'image par $i_{M_i}^G$ d'un quotient cuspidal de $\delta_{M_i} \overline{r_G^{M_i}}(\widetilde{U})$. Or $\overline{r_G^{M_i}}(\widetilde{U})$ est un sous-objet de $\overline{r_G^{M_i}}(i_M^G(W))$ engendré par ses invariants sous un sous-groupe ouvert, donc est de type fini pour $i < g$ en vertu de l'hypothèse de récurrence (HR1) appliquée à $\delta_{M_i} \overline{r_G^{M_i}}(i_M^G(W))$ (qui est de type fini sur M_i). Mais alors d'après l'hypothèse de récurrence (HR2), $\mathcal{G}_i(\widetilde{U}/\widetilde{U}_M)$ est noethérien. Il reste à prouver que le dernier quotient de la filtration $\mathcal{G}_g(\widetilde{U}/\widetilde{U}_M)$ (le quotient cuspidal) est aussi noethérien. D'après le lemme 4.2 il suffit de prouver que $\mathcal{G}_g(\widetilde{U})$ est de type fini sur G. Comme ce dernier est supposé engendré par ses invariants sous un sous-groupe ouvert, il suffit encore, toujours d'après ce lemme, de prouver qu'il est RZ_G-admissible. Il nous suffira donc d'appliquer le lemme suivant, que nous énonçons sous des hypothèses plus faibles que (Adj) :

Lemme 4.10 *Supposons que G admette des sous-groupes discrets cocompacts, ou que l'hypothèse (Adj) soit satisfaite. Si $W \in \mathrm{Mod}_R(M)$ est cuspidale de type fini alors tout $B_M G$-sous-quotient cuspidal de l'induite $i_M^G(W)$ est RZ_G-admissible.*

Preuve : Soit X un tel sous-quotient. D'après 4.2, on sait que W est RZ_M-admissible et donc B_M-admissible (noter ici que l'action de Z_M sur W se factorise par un quotient discret $Z_M/(Z_M \cap H_M)$ pour H_M ouvert tel que W^{H_M} engendre W, donc que l'action de RZ_M se factorise par un quotient noethérien et idem pour celle de B_M). Puisque l'induction i_M^G respecte l'admissibilité, la représentation $i_M^G(W)$ est elle-aussi B_M-admissible, et par conséquent X l'est aussi. Notons que l'action de RZ_G sur X est la restriction de celle de B_M via l'inclusion canonique $RZ_G \hookrightarrow B_M$.

Fixons maintenant un pro-p-sous-groupe ouvert H de G. On vient de voir que X^H est un B_M-module de type fini ; il admet donc une filtration finie par des B_M-sous-modules de quotients successifs de la forme $B_M/\mathfrak{P}$ pour un idéal premier $\mathfrak{P}$ de B_M. Ainsi, pour montrer qu'il est de type fini sur RZ_G, il suffira de prouver que pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de B_M dans le support de X^H, le morphisme composé $RZ_G \longrightarrow B_M/\mathfrak{P}$ est *fini*.

Pour un tel idéal, nous noterons $K_\mathfrak{P}$ le corps résiduel du localisé $(B_M)_\mathfrak{P}$.

Première étape : si $\mathfrak{P}$ est dans le support du B_M-module fini X^H, alors l'induite $i_M^G(W \otimes_{B_M} K_\mathfrak{P})$ possède un $K_\mathfrak{P} G$-sous-quotient cuspidal non-nul.

Comme le foncteur "localisation en $\mathfrak{P}$" est exact et commute aux foncteurs paraboliques (eux-même exacts), le $(B_M)_\mathfrak{P} G$-module $X_\mathfrak{P}$ est un sous-quotient cuspidal non-nul de $Y_\mathfrak{P} := i_M^G(W \otimes_{B_M} (B_M)_\mathfrak{P})$. Soient $U \subset V \subset Y_\mathfrak{P}$ tels que $V/U = X_\mathfrak{P}$. Par le lemme de Nakayama, on a $U^H \cap \mathfrak{P} V^H \subsetneq V^H$ et par le lemme d'Artin-Rees, il existe un entier k tel que $\mathfrak{P}^k Y_\mathfrak{P}^H \cap V^H \subset \mathfrak{P} V^H$. Ainsi le quotient $U/(\mathfrak{P} V + U)$ est un sous-quotient cuspidal non nul de $Y_\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^k = i_M^G(W \otimes_{B_M} (B_M)_\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^k)$.

Posons $Y_k := Y_\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^k$ et fixons $U_k \subset V_k \subset Y_k$ de quotient non-nul et cuspidal. On a une suite exacte

$$(V_k \cap \mathfrak{P} Y_k)/(U_k \cap \mathfrak{P} Y_k) \hookrightarrow V_k/U_k \twoheadrightarrow (V_k + \mathfrak{P} Y_k)/(U_k + \mathfrak{P} Y_k)$$

dans laquelle le terme de gauche est un sous-quotient de $\mathfrak{P} Y_k$ et celui de droite est un sous-quotient de $Y_1 = Y_k/\mathfrak{P}$. Choisissons un système de r générateurs ($r \in \mathbb{N}$) de l'idéal $\mathfrak{P}$; il lui est associé un épimorphisme $Y_{k-1}^r \longrightarrow \mathfrak{P} Y_k$ pour chaque $k > 1$. On voit donc par récurrence descendante que Y_1 admet un sous-quotient cuspidal non-nul.

Deuxième étape : si $B_M/\mathfrak{P}$ n'est pas fini sur RZ_G alors il existe une valuation $\nu : K_\mathfrak{P}^\times \longrightarrow \mathbb{R}$ et telle que $\nu(B_M/\mathfrak{P}) \not\subseteq \mathbb{R}_+$ et $\nu(RZ_G) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Pour abréger, notons R_G l'image de RZ_G dans $B_M/\mathfrak{P}$ et K_G son corps de fractions. Soit d le degré de transcendance de $K_\mathfrak{P}$ sur K_G. Deux cas se présentent :

Si $d > 0$, alors on choisit $x \in B_M/\mathfrak{P}$ transcendant sur K_G, on pose $\nu(x) = -1$ et on étend de manière arbitraire la valuation obtenue en une valuation de $K_\mathfrak{P}$ triviale sur K_G.

Si $d = 0$, notons $\widetilde{R}_G$ la clôture intégrale de R_G dans $K_\mathfrak{P}$. Puisque $B_M/\mathfrak{P}$ est de type fini comme algèbre sur R_G, il n'est pas inclus dans $\widetilde{R}_G$ (sinon, il serait fini puisqu'entier et contredirait notre hypothèse). L'anneau $\widetilde{R}_G$ n'est pas nécessairement noethérien, mais il est "de Krull" [7, Par.4, Ex. 14], donc est l'intersection des localisés en ses idéaux premiers de hauteur 1 [8, Par 1, n.6, Thm. 4]. On peut donc trouver un tel localisé ne contenant pas $B_M/\mathfrak{P}$. Or ce localisé est normal lui aussi donc est un anneau de valuation discrète. La valuation associée s'étend au corps de fractions, qui par hypothèse n'est autre que $K_\mathfrak{P}$, en une valuation satisfaisant les conditions voulues.

Fin de la preuve : Notons que $W \otimes_{B_M} K_\mathfrak{P}$ est une $K_\mathfrak{P} G$-représentation admissible et de type fini, donc de longueur finie. Supposons que $B_M/\mathfrak{P}$ n'est pas fini sur RZ_G et choisissons une valuation ν de $K_\mathfrak{P}$ comme ci-dessus, puis prolongeons-la en une valuation $\overline{\nu}$ d'une clôture algébrique $\overline{K_\mathfrak{P}}$ de $K_\mathfrak{P}$. Les caractères centraux des sous-quotients simples de $W \otimes_{B_M} K_\mathfrak{P}$ sont les prolongements $RZ_M \longrightarrow \overline{K_\mathfrak{P}}$ du morphisme tautologique $B_M \longrightarrow K_\mathfrak{P}$. Soit ω un tel caractère central. La propriété $\nu(B_M/\mathfrak{P}) \not\subseteq \mathbb{R}_+$ entraine que $\overline{\nu}(\omega(RZ_M)) \not\subseteq \mathbb{R}_+$, et par conséquent la composée $\overline{\nu} \circ \omega$ n'est pas identiquement nulle sur Z_M. La propriété $\nu(R_G) \subseteq \mathbb{R}_+$ entraine que $(\overline{\nu} \circ \omega)_{|Z_G} \equiv 0$. Comme $Z_G(Z_M \cap G^c)$ est d'indice fini dans Z_M (où G^c désigne le sous-groupe de G engendré par les éléments compacts), il s'ensuit que la composée $(\overline{\nu} \circ \omega)_{|Z_M \cap G^c}$ n'est pas identiquement nulle. Le lemme ci-dessous montre alors que l'induite $i_M^G(W \otimes_{B_M} K_{\mathfrak{P}})$ ne peut pas avoir de sous-quotient cuspidal, et par la première étape, que $\mathfrak{P}$ n'est pas dans le support de X^H.

$\square$

Lemme 4.11 *Supposons que G admette des sous-groupes discrets cocompacts, ou que l'hypothèse (Adj) soit satisfaite. Soit $\mathcal{K}$ un corps algébriquement clos et $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(G)$ cuspidale, de caractère central ω_σ. Supposons qu'il existe une valuation ν de $\mathcal{K}$ telle que $\nu(p) = 0$ et telle que la restriction $(\nu \circ \omega_\sigma)_{|Z_M \cap G^c}$ ne soit pas identiquement nulle. Alors l'induite $i_M^G(\sigma)$ n'a pas de sous-quotient cuspidal.*

Preuve : La composée $\nu \circ \omega_\sigma$ est un élément non nul de l'espace vectoriel

$$a_M^{G\,*} := Hom(M/M^c, \mathbb{R})/Hom(G/G^c, \mathbb{R}).$$

Nous renvoyons à [16, 2.2] pour la définition des chambres de Weyl $(a_Q^*)^+$ dans $a_M^{G\,*}$ associées aux sous-groupes paraboliques Q dont M est une composante de Levi. Il existe un Q tel que $\nu \circ \omega_\sigma$ soit dans l'adhérence $\overline{(a_Q^*)^+}$ de $(a_Q^*)^+$. Cette adhérence est réunion disjointe [16, (2.3)] de chambres de Weyl de sous-groupes paraboliques O contenant Q, *i.e.*

$$\overline{(a_Q^*)^+} = \bigsqcup_{Q \subseteq O \subseteq G} (a_O^*)^+.$$

Soit O l'unique sous-groupe parabolique contenant Q tel que $\nu \circ \omega_\sigma \in (a_O^*)^+$. Par notre hypothèse sur la restriction $(\nu \circ \omega_\sigma)_{|Z_M \cap G^c}$, on a $O \neq G$. Soit N sa composante de Levi contenant M. En vertu du lemme 4.12 ci-dessous lorsque l'hypothèse (Adj) est vérifiée, ou de [16, 4.5] lorsque G admet des sous-groupes discrets cocompacts, nous pouvons appliquer [16, 3.16] qui nous dit que les représentations $i_{M,Q}^G(\sigma)$ et $i_{M,N\cap Q}^N(\sigma)$ ont la même longueur ; plus précisément, tout sous-quotient irréductible de la seconde s'induit irréductiblement par le foncteur $i_{N,O}^G$. Il s'ensuit que l'induite $i_{M,Q}^G(\sigma)$ ne peut pas avoir de sous-quotient cuspidal. Mais alors, d'après le lemme 4.13 ci-dessous, il en va de même pour $i_M^G(\sigma)$. $\square$

Dans la preuve ci-dessus, nous avons fait appel à [16, 3.16] qui suppose vérifiée l'une des trois propriétés équivalentes de [16, 3.14]. Pour les besoins du lemme ci-dessus, on peut supposer $\mathcal{K}$ de caractéristique non-nulle, et la propriété (i) de [16, 3.14] ("ν-discret implique cuspidal") est prouvée en [16, 4.5] sous la condition que G possède un sous-groupe discret cocompact. Le lemme suivant montre comment l'hypothèse (Adj) implique directement cette propriété.

Lemme 4.12 *Supposons l'hypothèse (Adj) satisfaite. Soit $\mathcal{K}$ un corps muni d'une valuation discrète ν telle que $\nu(p) = 0$. Soit (π, V) une représentation admissible dans $\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(G)$ dont les coefficients matriciels* tendent essentiellement vers 0 à l'infini *pour la norme associée à ν (*cf. *[16, 3.18] où une telle représentation est dite ν-discrète). Alors π est cuspidale.*

Preuve : Soit $\mathcal{O}$ l'anneau de la valuation ν et ϖ une uniformisante. Par [16, Prop 6.3], il existe un sous-$\mathcal{O}$-module G-stable et $\mathcal{O}$-admissible $\omega \subset V$ qui engendre V sur $\mathcal{K}$. Puisque les coefficients matriciels tendent essentiellement vers 0, il en est de même des applications $f_v : g \in G \mapsto e_H gv \in \omega$ pour $v \in \omega$ et H prop-p-sous-groupe ouvert, en le sens suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_v^{-1}(\omega \setminus \varpi^n \omega) \text{ est compact modulo le centre.}$$

En d'autres termes, chaque $\omega/\varpi^n\omega$ est cuspidal. Puisque les foncteurs r_G^M ont des adjoints à gauche, il commutent aux limites projectives et par conséquent la limite $\varprojlim_n \omega/\varpi^n\omega$ est cuspidale elle-aussi. Or, par admissibilité de ω, la flèche canonique $\omega \longrightarrow \varprojlim_n \omega/\varpi^n\omega$ est injective et ω et donc π sont cuspidales. $\square$

Lemme 4.13 *Supposons que G admette des sous-groupes discrets cocompacts, ou que l'hypothèse (Adj) soit satisfaite. Soient P, Q deux sous-groupes paraboliques ayant un sous-groupe de Levi commun M, et σ une représentation irréductible de M à coefficients dans un corps k de caractéristique différente de p. Alors dans le groupe de Grothendieck des k-représentations lisses de longueur finie de G, on a $[i_P^G(\sigma)] = [i_Q^G(\sigma)]$.* [2]

Preuve : Il suffit de le prouver pour P et Q adjacents, ce qui nous ramène au cas où ils sont maximaux, et donc opposés. Comme la propriété que l'on veut prouver est stable par changement de corps de base, on peut supposer k algébriquement clos, puis étendre les scalaires au corps des fractions K_G de $k[G/G^c]$, et tordre par le caractère universel $\psi_{un}^G : G \longrightarrow k[G/G^c]$. On est ainsi ramené à prouver que dans le groupe de Grothendieck des K_G-représentations de longueur finie, on a $[i_P^G(\sigma_{K_G} \otimes \psi_{un|M}^G)] = [i_Q^G(\sigma_{K_G} \otimes \psi_{un|M}^G)]$.

Notons $K_M := k(M/M^c)$ et ψ_{un} le caractère non ramifié universel $M \longrightarrow k[M/M^c]$. Notons aussi $\rho : \ k[M/M^c] \longrightarrow k[G/G^c]$ le morphisme induit par l'inclusion $M \subset G$, de sorte que $\psi_{un|M}^G = \rho \circ \psi_{un}$, et soit $\mathcal{O}$ le localisé de $k[M/M^c]$ en le noyau de ρ. Comme M est maintenant un sous-groupe de Levi maximal de G, $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K_M et de corps résiduel K_G. De plus, $i_P^G(\sigma_{K_G} \otimes \psi_{un}^G)$ est la réduction modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}$ du $\mathcal{O}G$-module $i_P^G(\sigma_{\mathcal{O}} \otimes \psi_{un})$, et de même avec Q à la place de P. On peut alors appliquer le principe de Brauer-Nesbitt, dont la preuve dans [30, II.5.11.b] pour le triplet $(\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{Q}}_l, \overline{\mathbb{F}}_l)$ s'adapte sans problème à notre triplet $(\mathcal{O}, K_M, K_G)$. Il nous suffit donc de prouver que dans le groupe de Grothendieck des K_M-représentations de longueur finie, on a $[i_P^G(\sigma_{K_M} \otimes \psi_{un})] = [i_Q^G(\sigma_{K_M} \otimes \psi_{un})]$.

Or ces représentations sont même isomorphes puisqu'elles sont irréductibles [16, 5.1] et reliées par un opérateur d'entrelacement non nul [16, 7.3]. $\square$

5 Modèles entiers lisses

On note toujours $\mathcal{G}$ un groupe réductif connexe sur K. Le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique noté $\mathcal{P}$ sera toujours noté $\mathcal{U}$. La composante de Levi commune à une paire de sous-groupes paraboliques opposés notée $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ sera toujours notée $\mathcal{M}$. Nous appellerons *modèle* de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_K$ tout schéma en groupes lisse sur $\mathcal{O}_K$ à fibres connexes, et muni d'une identification de sa fibre générique avec $\mathcal{G}$. Fixons un tel modèle $\underline{\mathcal{G}}$. Pour un sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ nous noterons $\underline{\mathcal{H}}$ son adhérence schématique dans $\underline{\mathcal{G}}$; ses points entiers sont donc donnés par $\underline{\mathcal{H}}(\mathcal{O}_K) = \mathcal{H}(K) \cap \underline{\mathcal{G}}(\mathcal{O}_K)$.

5.1 *Sous-groupes $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles :* Nous dirons qu'un K-*tore* $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ est *$\underline{\mathcal{G}}$-admissible* s'il se prolonge en un sous-tore de $\underline{\mathcal{G}}$. Comme tout sous-tore de $\underline{\mathcal{G}}$ est fermé [17, Exp. VIII. Cor 5.7], il revient au même de demander que $\underline{\mathcal{S}}$ soit un tore.

D'autre part, *un sous-groupe de Levi* $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ sera dit *$\underline{\mathcal{G}}$-admissible* s'il est obtenu comme centralisateur dans $\mathcal{G}$ d'un tore K-déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible, disons $\mathcal{S}$. Rappelons [17, Exp. XI, Cor. 5.3] que le foncteur "centralisateur de $\underline{\mathcal{S}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$" est représentable par un sous-schéma fermé de $\underline{\mathcal{G}}$ lisse sur $\mathcal{O}_K$. En particulier sa fibre générique est schématiquement dense, et il s'ensuit que ce centralisateur n'est autre que $\underline{\mathcal{M}}$. Ainsi la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{M}}$ est le centralisateur de $\underline{\mathcal{S}}_k$ dans $\underline{\mathcal{G}}_k$, donc est connexe, puisque $\underline{\mathcal{G}}_k$ l'est, et $\underline{\mathcal{M}}$ est finalement un modèle de $\mathcal{M}$.

Pour définir ce qu'est un sous-groupe parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible, il nous faut quelques notations supplémentaires. Si $\mathcal{S}$ est un K-tore déployé de $\mathcal{G}$ normalisant un sous-groupe algébrique fermé $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, on notera $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ l'ensemble des poids non nuls de $\mathcal{S}$ dans l'algèbre de Lie de $\mathcal{H}$. C'est un sous-ensemble du réseau $X^*(\mathcal{S})$ des caractères rationnels de $\mathcal{S}$. Nous dirons qu'un tel ensemble est *unipotent* s'il existe une forme linéaire réelle $v^* \in Hom(X^*(\mathcal{S}), \mathbb{R})$ ne prenant que des valeurs strictement positives sur cet ensemble. Maintenant, un *sous-groupe parabolique* $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$ sera dit *$\underline{\mathcal{G}}$-admissible* s'il contient un tore déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible $\mathcal{S}$ dont le centralisateur est une composante

[2] Un résultat similaire a été obtenu indépendamment par A. Minguez dans le paragraphe 2.1.14 de sa thèse (Orsay, 2006).

de Levi de $\mathcal{P}$ et tel que l'ensemble $\Phi(\mathcal{S},\mathcal{U})$ soit unipotent. Notons que le sous-groupe parabolique $\overline{\mathcal{P}}$ opposé à $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{S}$ est aussi $\underline{\mathcal{G}}$-admissible. Une telle paire opposée $(\mathcal{P},\overline{\mathcal{P}})$ sera dite, elle aussi, $\underline{\mathcal{G}}$-admissible.

Remarques : il résulte de [5, Thm. 4.15.a)] que tout sous-groupe de Levi admissible est la composante de Levi commune d'une paire $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de sous-groupes paraboliques opposés. De plus, si $\mathcal{M}$ est un sous-groupe de Levi dont le tore central déployé maximal est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible, alors il résulte de [5, Thm. 4.15.b)] que *tout* parabolique $\mathcal{P}$ ayant $\mathcal{M}$ comme composante de Levi est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible. Pour tous les modèles que nous considèrerons dans les sections suivantes, les sous-groupes de Levi admissibles auront cette propriété d'admissibilité de leur tore central déployé maximal.

5.2 *Dilatations* : Nous utiliserons souvent la technique élégante de *dilatation* due à Raynaud, [6, 3.2], et introduite dans le présent contexte par Yu [32]. Rappelons brièvement que si $\underline{\mathcal{X}}$ est un $\mathcal{O}_K$-schéma et Y est un sous-schéma fermé de la fibre spéciale $\underline{\mathcal{X}}_k$ de $\underline{\mathcal{X}}$, alors la dilatation de Y dans $\underline{\mathcal{X}}$ est la restriction $\underline{\mathcal{X}}_Y \xrightarrow{\varphi_Y} \underline{\mathcal{X}}$ de l'éclatement de $\underline{\mathcal{X}}$ le long de Y à l'ouvert de cet éclatement où le pull-back du faisceau d'idéaux définissant Y est localement engendré par une uniformisante ϖ_K de $\mathcal{O}_K$. Elle est caractérisée par la propriété universelle suivante [6, 3.2 Prop. 1(b)] : la paire $(\underline{\mathcal{X}}_Y, \varphi_Y)$ est l'objet final de la catégorie des paires $(\mathcal{Z}, \varphi)$ formées d'un $\mathcal{O}_K$-schéma plat $\mathcal{Z}$ et d'un $\mathcal{O}_K$-morphisme $\mathcal{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{X}$ dont la fibre spéciale se factorise par Y. Voici une conséquence importante de cette propriété universelle :

Fait 5.3 *Soit $f : \underline{\mathcal{X}}' \longrightarrow \underline{\mathcal{X}}$ un morphisme de $\mathcal{O}_K$-schémas et Y un sous-schéma fermé de $\underline{\mathcal{X}}_k$ dont nous noterons Y' l'image réciproque dans $\underline{\mathcal{X}}'_k$. Alors on a une flèche canonique $\underline{\mathcal{X}}'_{Y'} \xrightarrow{f_Y} \underline{\mathcal{X}}_Y \times_{\underline{\mathcal{X}}} \underline{\mathcal{X}}'$ qui identifie $\underline{\mathcal{X}}'_{Y'}$ à l'adhérence schématique de la fibre générique de $\underline{\mathcal{X}}_Y \times_{\underline{\mathcal{X}}} \underline{\mathcal{X}}'$, c'est-à-dire au fermé de $\underline{\mathcal{X}}_Y \times_{\underline{\mathcal{X}}} \underline{\mathcal{X}}'$ défini par l'idéal de ϖ_K-torsion. En particulier lorsque $\mathcal{X}$ est $\mathcal{O}_K$-plat et f est plat, alors f_Y est un isomorphisme.*

On peut s'en servir pour vérifier la commutation aux produits [6, 3.2 Prop. 2(d)] qui assure que si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes et Y est un sous-k-schéma en groupes de $\underline{\mathcal{X}}_k$ alors $\underline{\mathcal{X}}_Y$ est canoniquement un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes et le morphisme de dilatation est un morphisme de $\mathcal{O}_K$-schémas en groupes. Voici une autre propriété utile des dilatations.

Fait 5.4 *Supposons que $\underline{\mathcal{X}}$ est lisse sur $\mathcal{O}_K$ et Y est lisse sur k. Alors $\underline{\mathcal{X}}_Y$ est lisse sur $\mathcal{O}_K$ et la fibre spéciale $\underline{\mathcal{X}}_{Y\,k} \longrightarrow Y$ de φ_Y est un fibré vectoriel sur Y. Si de plus $\underline{\mathcal{X}}$ et Y sont des groupes, alors $\underline{\mathcal{X}}_{Y\,k}$ est une extension de Y par un groupe vectoriel.*

La lissité est due à [6, 3.2 Prop. 3]. Nous reportons la preuve des autres assertions à 5.17 pour alléger ce paragraphe et revenir aux modèles de $\mathcal{G}$. De ce que l'on vient de rappeler résulte que lorsqu'on dilate un sous-groupe lisse et connexe de la fibre spéciale d'un modèle de $\mathcal{G}$, on obtient un nouveau modèle de $\mathcal{G}$.

Soit $\underline{\mathcal{G}}^\dagger \xrightarrow{\nu_{\underline{\mathcal{G}}}} \underline{\mathcal{G}}$ la dilatation dans $\underline{\mathcal{G}}$ du radical unipotent ${}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}$. Le schéma $\underline{\mathcal{G}}^\dagger$ est donc un modèle de $\mathcal{G}$ tel que $\underline{\mathcal{G}}^\dagger(\mathcal{O}_K) = \{g \in \underline{\mathcal{G}}(\mathcal{O}_K),\ g \bmod \varpi \in {}^u\mathcal{G}_k(k)\}$. Convenons de noter $\underline{\mathcal{H}}^\dagger$ l'adhérence schématique dans $\underline{\mathcal{G}}^\dagger$ d'un sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$. La restriction de $\nu_{\underline{\mathcal{G}}}$ induit un morphisme $\underline{\mathcal{H}}^\dagger \longrightarrow \underline{\mathcal{H}}$ qui par 5.3 s'identifie à la dilatation dans $\underline{\mathcal{H}}$ de $\underline{\mathcal{H}}_k \cap {}^u\underline{\mathcal{G}}_k$.

Dans le cas où $\mathcal{H} = \mathcal{M}$ est un sous-groupe de Levi admissible, alors $\underline{\mathcal{M}}_k$ est de la forme $\mathcal{Z}_{\underline{\mathcal{G}}_k}(\underline{\mathcal{S}}_k)$ pour un tore $\underline{\mathcal{S}}_k$, et on a l'égalité ${}^u\underline{\mathcal{M}}_k = \underline{\mathcal{M}}_k \cap {}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ d'après [17, Exp XIX, 1.3]. Le morphisme $\underline{\mathcal{M}}^\dagger \xrightarrow{\nu_{\underline{\mathcal{G}}}} \underline{\mathcal{M}}$ coïncide donc avec le morphisme de dilatation $\nu_{\underline{\mathcal{M}}}$ du radical unipotent de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{M}}$, ce qui montre que la notation $\underline{\mathcal{M}}^\dagger$ n'est pas ambigüe dans ce cas.

5.5 *Résultats principaux de cette section* : Nous allons d'abord énoncer les résultats dont nous aurons besoin pour la suite de cet article, puis nous donnerons les preuves. Dorénavant, nous notons avec des lettres droites les ensembles de points entiers, par exemple $\underline{H} = \underline{\mathcal{H}}(\mathcal{O}_K)$. Remarquons que $\underline{H}$ est un pro-p-groupe si et seulement si $\underline{\mathcal{H}}_k$ est unipotent. En particulier, $\underline{H}^\dagger := \underline{\mathcal{H}}^\dagger(\mathcal{O}_K)$ est un pro-p-groupe. La preuve du lemme suivant sera donnée en 5.20.

Lemme 5.6 *Soit R un anneau commutatif unitaire où p est inversible. Pour un idempotent central ε de $R\underline{G}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\varepsilon \in R\underline{G}^{\dagger} e_{\underline{U}^{\dagger}} R\underline{G}^{\dagger}$ pour tout sous-groupe parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ de $\mathcal{G}$.

ii) $\varepsilon \in R\underline{G}^{\dagger} e_{\underline{U}^{\dagger}} e_{\overline{\underline{U}}^{\dagger}} R\underline{G}^{\dagger}$ pour une paire $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de sous-groupes paraboliques opposés minimaux $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ de $\mathcal{G}$

Un idempotent satisfaisant ces propriétés sera dit essentiellement de niveau zéro.

Remarque : L'expression $R\underline{G}^{\dagger} e_{\underline{U}}^{\dagger} R\underline{G}^{\dagger}$ désigne le *R-module engendré* par les distributions du type $\varphi * e_{\underline{U}^{\dagger}} * \psi$ où $\varphi, \psi \in R\underline{G}^{\dagger}$. Cette remarque s'applique à toutes les expressions de ce genre que l'on rencontrera dans la suite de ce paragraphe.

Remarquons aussi que l'idempotent associé à un caractère lisse $\theta : \underline{G}^{\dagger} \longrightarrow R^{\times}$ normalisé par $\underline{G}$ est essentiellement de niveau zéro si et seulement si $\theta_{|\underline{U}^{\dagger}}$ et $\theta_{|\overline{\underline{U}}^{\dagger}}$ sont triviaux pour au moins une paire de paraboliques opposés $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles minimaux. Le lemme suivant étudie une situation plus générale, que l'on rencontre souvent dans la théorie des types.

Proposition 5.7 *Soit $\underline{G}^{*}$ un sous-groupe ouvert normal de $\underline{G}$ tel que $[\underline{G}^{\dagger}, \underline{G}^{\dagger}] \subseteq \underline{G}^{*} \subseteq \underline{G}^{\dagger}$ et soit $\theta : \underline{G}^{*} \longrightarrow R^{\times}$ un caractère lisse normalisé par $\underline{G}$. On suppose que pour une paire $\underline{\mathcal{G}}$-admissible $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ de sous-groupes paraboliques opposés minimaux, on a*

i) $\theta_{|\underline{U}^{*}}$ et $\theta_{|\overline{\underline{U}}^{*}}$ sont triviaux (où le signe $*$ indique que l'on prend l'intersection avec $\underline{G}^{*}$).

ii) L'accouplement $\begin{array}{ccc} \underline{U}^{\dagger}/\underline{U}^{*} \times \overline{\underline{U}}^{\dagger}/\overline{\underline{U}}^{*} & \rightarrow & R^{\times} \\ (u,v) & \mapsto & \theta([u,v]) \end{array}$ *est non-dégénéré.*

Alors l'idempotent central $[\theta]$ de $R\underline{G}^{\dagger}$ associé à θ est essentiellement de niveau zéro.

La preuve de cette proposition est donnée en 5.28. Dans les exemples que l'auteur connait, le groupe $\underline{G}^{*}$ est le groupe des points entiers d'un modèle lisse connexe $\underline{\mathcal{G}}^{*}$ obtenu par dilatation dans $\underline{\mathcal{G}}$ d'un sous-groupe normal compris entre $[{}^{u}\underline{\mathcal{G}}_{k}, {}^{u}\underline{\mathcal{G}}_{k}]$ et ${}^{u}\underline{\mathcal{G}}_{k}$.

Si $\mathcal{M}$ est un sous-groupe de Levi $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de $\mathcal{G}$, on a vu que $\underline{\mathcal{M}}$ est un modèle lisse connexe de $\mathcal{M}$. On peut donc appliquer à $\underline{\mathcal{M}}$ la notion d'idempotent essentiellement de niveau 0 de $R\underline{M}$ définie en 5.6.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème principal de [20].

Théorème 5.8 *Soit $\underline{\mathcal{G}}$ un modèle lisse et connexe de $\mathcal{G}$ et $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ une paire $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de sous-groupes paraboliques opposés de $\mathcal{G}$. Pour tout idempotent central essentiellement de niveau zéro ε de $R\underline{M}$, on a*

$$e_{\underline{U}^{\dagger}} e_{\overline{\underline{U}}} \varepsilon \in R\underline{G} e_{\underline{U}} e_{\overline{\underline{U}}} \varepsilon.$$

Ce résultat général ne sera toutefois pas suffisant pour les applications. On se donne maintenant un autre modèle lisse connexe $\underline{\mathcal{G}}'$ de $\mathcal{G}$ ainsi qu'un morphisme $\underline{\mathcal{G}}' \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{O}_K$-schémas en groupes dont la fibre générique est un isomorphisme.

Fait 5.9 *Le noyau de $\varphi_k : \underline{\mathcal{G}}'_k \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}_k$ est unipotent. En particulier les tores $\underline{\mathcal{G}}'$-admissibles sont aussi $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles, et il en est donc de même des autres objets "admissibles" introduits en 5.1.*

En effet, en vertu de [17, Exp. XVII, Thm. 4.6.1] il suffit de prouver que ce noyau ne contient aucun sous-groupe algébrique isomorphe à μ_l pour un premier l. Or, il résulte du théorème 3.6 combiné avec le corollaire 6.6 de l'exposé IX de [17] que toute immersion $\mu_l \xrightarrow{\iota_k} \underline{\mathcal{G}}'_k$ se relève en une immersion $\mu_l \xrightarrow{\iota} \underline{\mathcal{G}}'$. Ainsi la composée $\varphi \circ \iota$ est une immersion sur la fibre générique et nulle sur la fibre spéciale, contredisant le corollaire 5.2 de ce même exposé.

Nous décorerons d'un $'$ les objets définis comme ci-dessus relatifs à $\underline{\mathcal{G}}'$. Par exemple, $\underline{\mathcal{G}}'^{\dagger}$ désignera la dilatation du radical unipotent de $\underline{\mathcal{G}}'$. Dans le corollaire suivant on fait l'hypothèse que $\underline{G}' \cap \underline{G}^{\dagger} \supseteq \underline{G}'^{\dagger}$. Celle-ci est satisfaite en particulier (et même équivalente si l'on remplace $\mathcal{O}_K$ par son hensélisé strict) lorsque la composée $\underline{\mathcal{G}}'^{\dagger} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ se factorise par $\underline{\mathcal{G}}^{\dagger}$, ce qui équivaut à la condition $\varphi({}^u\underline{\mathcal{G}}'_k) \subseteq {}^u\underline{\mathcal{G}}_k$. De plus, l'égalité $\underline{G}' \cap \underline{G}^\dagger = \underline{G}'^\dagger$ est satisfaite si le diagramme commutatif obtenu est de surcroît cartésien, ce qui équivaut à la condition $\varphi^{-1}({}^u\underline{\mathcal{G}}_k) = {}^u\underline{\mathcal{G}}'_k$, en vertu de la dernière assertion de 5.3.

La situation un peu alambiquée étudiée dans le résultat suivant est, encore une fois, motivée par les exemples connus de la théorie des types.

Corollaire 5.10 *Gardons les notations ci-dessus avec l'hypothèse $\underline{G}' \cap \underline{G}^\dagger \supseteq \underline{G}'^\dagger$. Soit ε' un idempotent central essentiellement de niveau zéro de $R\underline{M}'$, et supposons qu'il existe un idempotent $\widetilde{\varepsilon}'$ de $R\underline{G}'^\dagger$, centralisé par $\underline{G}'$ et satisfaisant aux propriétés suivantes :*

i) $e_{\overline{\underline{U}}'^\dagger}\widetilde{\varepsilon}' e_{\underline{U}'^\dagger} = e_{\overline{\underline{U}}'^\dagger}\varepsilon' e_{\underline{U}'^\dagger}$ et $e_{\underline{U}'^\dagger}\widetilde{\varepsilon}' e_{\overline{\underline{U}}'^\dagger} = e_{\underline{U}'^\dagger}\varepsilon' e_{\overline{\underline{U}}'^\dagger}$.

ii) l'ensemble d'entrelacement $Int_{\underline{U}}(\widetilde{\varepsilon}') := \{u \in \underline{U}, \widetilde{\varepsilon}' u \widetilde{\varepsilon}' \neq 0\}$ est égal à $\underline{U}'$.

Alors

$$e_{\underline{U}^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} \varepsilon' \in R\underline{G} e_{\underline{U}} e_{\overline{\underline{U}}} \varepsilon'.$$

La suite de cette section est consacrée aux preuves des résultats ci-dessus.

5.11 *Construction de sous-groupes paraboliques $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles* : Commençons par rappeler quelques constructions de Borel et Tits. Soit $\mathcal{S}$ un K-tore déployé dans $\mathcal{G}$. Si Ω est un sous-ensemble de $X^*(\mathcal{S})$, nous noterons $\widetilde{\Omega}$ l'ensemble des demi-droites ouvertes de l'espace vectoriel réel $X^*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$ contenant un élément de Ω. Reprenant la terminologie de Bruhat-Tits [12, 1.1.2], un élément de $\widetilde{\Phi}(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ sera appelée *rayon radiciel de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$*. À tout rayon radiciel $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Phi}(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ est associé un K-sous-groupe algébrique fermé connexe $\mathcal{U}_{\widetilde{\alpha}}^{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{G}$, dont les poids de $\mathcal{S}$ dans l'algèbre de Lie appartiennent à $\widetilde{\alpha}$, et qui est maximal pour ces propriétés *cf.* [12, 1.1.3]. On prolonge cette définition à $\widetilde{\alpha} = 0$ en posant $\mathcal{U}_0^{\mathcal{S}} := \mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S})$ le centralisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$. Plus généralement, si $\Omega \subset \Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G}) \cup \{0\}$, on note $\mathcal{U}_\Omega^{\mathcal{S}}$ le sous-groupe fermé de $\mathcal{G}$ engendré par les $\mathcal{U}_{\widetilde{\alpha}}^{\mathcal{S}}$ pour $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Omega}$. Une propriété de ces constructions est que, si $\mathcal{T}$ est un sous tore de $\mathcal{S}$ et $\pi : X^*(\mathcal{S}) \longrightarrow X^*(\mathcal{T})$ désigne la projection duale, alors celle-ci se restreint en une surjection $\pi : \Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G}) \cup \{0\} \longrightarrow \Phi(\mathcal{T}, \mathcal{G}) \cup \{0\}$ et on a $\mathcal{U}_\Omega^{\mathcal{T}} = \mathcal{U}_{\pi^{-1}(\Omega)}^{\mathcal{S}}$ pour tout $\Omega \subset \Phi(\mathcal{T}, \mathcal{G}) \cup \{0\}$.

Rappelons qu'un sous-ensemble Ω de $\Phi := \Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ est dit *parabolique* s'il est l'intersection de Φ avec un demi-espace fermé, et *unipotent* s'il est l'intersection de Φ avec un demi-espace ouvert. Si $v^* \in V^*$ est une forme linéaire sur V, la composante de Levi du sous-ensemble parabolique $\Omega = \Omega(v^*) := \{\alpha \in \Phi,\ v^*(\alpha) \geqslant 0\}$ est par définition $\Omega^0 = \Omega^0(v^*) := \{\alpha \in \Phi,\ v^*(\alpha) = 0\} = \Omega(v^*) \cap (-\Omega(v^*))$, tandis que sa composante unipotente est $\Omega^+ = \Omega^+(v^*) := \{\alpha \in \Phi,\ v^*(\alpha) > 0\}$ et sa composante unipotente *opposée* est $\Omega^- = \Omega^-(v^*) := -\Omega(v^*)^+ = \Phi \setminus \Omega(v^*)$. Le groupe $\mathcal{P}_\Omega^{\mathcal{S}} := \mathcal{U}_{\Omega \cup \{0\}}^{\mathcal{S}}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ dont le radical unipotent est $\mathcal{U}_{\Omega^+}^{\mathcal{S}}$ et la composante de Levi est $\mathcal{M}_\Omega^{\mathcal{S}} := \mathcal{U}_{\Omega^0 \cup \{0\}}^{\mathcal{S}}$. L'opposé de $\mathcal{P}_\Omega^{\mathcal{S}}$ par rapport à $\mathcal{M}_\Omega^{\mathcal{S}}$ est $\mathcal{P}_{-\Omega}^{\mathcal{S}}$ dont le radical unipotent est $\mathcal{U}_{\Omega^-}^{\mathcal{S}}$.

Notons que $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{P}_\Omega^{\mathcal{S}}) = \Omega$ et $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{U}_{\Omega^+}^{\mathcal{S}}) = \Omega^+$. Ainsi un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{S}$ est de la forme $\mathcal{P}_\Omega^{\mathcal{S}}$ si et seulement si le sous-ensemble $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ de $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ est parabolique.

Lemme 5.12 *Gardons les notations ci-dessus et supposons que le tore déployé $\mathcal{S}$ est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible. Alors pour tout sous-ensemble parabolique Ω de $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G})$, la paire de sous-groupes paraboliques opposés $(\mathcal{P}_\Omega^{\mathcal{S}}, \mathcal{P}_{-\Omega}^{\mathcal{S}})$ est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible.*

Preuve : Par hypothèse $\underline{\mathcal{S}}$ est un tore, et on a $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G}) = \Phi(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{G}}_k) \subset X^*(\underline{\mathcal{S}})$. Fixons un sous-ensemble parabolique Ω et posons $\underline{\mathcal{S}}_\Omega := (\cap_{\alpha \in \Omega^0} \mathit{ker}\ \alpha)^\circ$, le $\circ$ désignant la composante connexe de l'identité. C'est un sous-tore de $\underline{\mathcal{S}}$ et on a dualement une projection $\pi :\ X^*(\underline{\mathcal{S}}) \longrightarrow X^*(\underline{\mathcal{S}}_\Omega)$. Par définition on a $\pi^{-1}(\{0\}) \cap \Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G}) = \Omega^0 \cup \{0\}$ et il s'ensuit que $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S}_\Omega) = \mathcal{U}_0^{\mathcal{S}_\Omega} = \mathcal{U}_{\Omega^0 \cup \{0\}}^{\mathcal{S}} = \mathcal{M}_\Omega$. En particulier, $\mathcal{M}_\Omega$ est un sous-groupe de Levi $\underline{\mathcal{G}}$-admissible. Soit v^* une forme linéaire sur $X^*(\mathcal{S})$ définissant le sous-groupe parabolique Ω comme expliqué ci-dessus. Comme le noyau de π est par définition engendré par Ω^0 et comme v^* annule Ω^0, celle-ci se descend en une forme linéaire $v_\Omega^* :\ X^*(\mathcal{S}_\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\pi(\Omega)$, resp. $\pi(\Omega^+)$, est le sous-ensemble parabolique, resp. unipotent, de $\Phi(\mathcal{S}_\Omega, \mathcal{G})$ associé à v_Ω^*. Or, $\pi(\Omega^+) = \Phi(\mathcal{S}_\Omega, \mathcal{U}_{\Omega^+})$, et on en déduit que la paire opposée $(\mathcal{P}_\Omega, \mathcal{P}_{-\Omega})$ est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible. $\square$

5.13 *Propriétés des tores déployés $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles* maximaux : Rappelons que si $\underline{\mathcal{S}}$ est un $\mathcal{O}_K$-tore, alors tout morphisme $\underline{\mathcal{S}}_k \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}_k$ se relève de manière unique à conjugaison près en un morphisme $\underline{\mathcal{S}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$, voir [17, Exp. IX, Thm 3.6]. De plus, si l'on est parti d'une immersion alors un tel relèvement est aussi une immersion, par [17, Exp. IX, Cor. 6.6]. En particulier les sous-tores déployés maximaux de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}_k$ se relèvent en des sous-tores déployés de $\underline{\mathcal{G}}$, nécessairement fermés par [17, Exp. VIII, Cor. 5.7]. Leurs fibres génériques sont des tores déployés, qui ne sont généralement *pas maximaux* en tant que tores déployés de $\mathcal{G}$, mais maximaux en tant que tores déployés *$\underline{\mathcal{G}}$-admissibles*. Le même argument montre que tout tore déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible maximal est obtenu de cette manière et, comme les tores déployés maximaux de la fibre spéciale sont conjugués sous $\underline{\mathcal{G}}(k)$, il résulte de [17, Exp. XI, Thm 5.2 bis] que les tores déployés $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles maximaux de $\mathcal{G}$ sont conjugués sous $\underline{\mathcal{G}}(\mathcal{O}_K)$.

Lemme 5.14 *Soit $\mathcal{S}$ un tore déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible maximal. Un sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$, resp. une paire $(\mathcal{P},\overline{\mathcal{P}})$ de sous-groupes paraboliques opposés de $\mathcal{G}$, est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible si et seulement s'il existe un sous-ensemble parabolique Ω de $\Phi(\mathcal{S},\mathcal{G})$ et un élément de $\underline{\mathcal{G}}(\mathcal{O}_K)$ conjuguant $\mathcal{P}$, resp. $(\mathcal{P},\overline{\mathcal{P}})$, à $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\Omega}$, resp. à $(\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\Omega},\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{-\Omega})$.*

Preuve : Soit $(\mathcal{P},\overline{\mathcal{P}})$ une paire $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de sous-groupes paraboliques opposés. On peut donc trouver un tore $\mathcal{T}$ déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible dont le centralisateur est la composante de Levi commune $\mathcal{M}$ et tel que $\Phi(\mathcal{T},\mathcal{U})$ soit un sous-ensemble unipotent de $X^*(\mathcal{T})$. Il résulte alors de [5, Thm. 4.15.a)] que $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}_{\Phi(\mathcal{T},\mathcal{P})}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ de composante de Levi $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) = \mathcal{M}$. Comme on a évidemment $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{\mathcal{T}}_{\Phi(\mathcal{T},\mathcal{U})}$, il s'ensuit que $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathcal{T}}_{\Phi(\mathcal{T},\mathcal{P})}$.

Maintenant, comme la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{T}}$ est conjuguée par un élément de $\underline{\mathcal{G}}_k(k)$ à un sous-tore de $\underline{\mathcal{S}}_k$, il résulte de [17, Exp. XI, Thm 5.2 bis] que $\mathcal{T}$ est lui-même conjugué par un élément de $\underline{\mathcal{G}}(\mathcal{O}_K)$ à un sous-tore de $\mathcal{S}$. Ainsi quitte à conjuguer, on peut supposer $\mathcal{S} \supset \mathcal{T}$ et on a dualement une projection $\pi :\ X^*(\mathcal{S}) \longrightarrow X^*(\mathcal{T})$. Posons alors $\Omega := \Phi(\mathcal{S},\mathcal{G}) \cap \pi^{-1}\Phi(\mathcal{T},\mathcal{P})$. C'est un sous-ensemble parabolique (défini par la composition de π avec n'importe quelle forme linéaire sur $X^*(\mathcal{T})$ définissant le sous-ensemble parabolique $\Phi(\mathcal{T},\mathcal{P})$), et par ce qui précède on a $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\Omega}$. On en déduit au passage que $\Omega = \Phi(\mathcal{S},\mathcal{P})$. $\square$

Les sous-groupes paraboliques $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles de la forme $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\Omega}$ pour $\mathcal{S}$ tore déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible maximal seront appelés *$\mathcal{S}$-semi-standard*. Le lemme ci-dessus nous permet de nous raccrocher à une étude de Bruhat et Tits.

Corollaire 5.15 *(Bruhat-Tits) Soit $(\mathcal{P},\overline{\mathcal{P}})$ une paire $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de sous-groupes paraboliques opposés de $\mathcal{G}$. Alors*

i) le morphisme produit induit un isomorphisme $\underline{\mathcal{U}} \rtimes \underline{\mathcal{M}} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}}$.

ii) le morphisme produit induit une immersion ouverte $\underline{\mathcal{C}} := \underline{\mathcal{U}} \times \underline{\mathcal{M}} \times \underline{\overline{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\mu} \underline{\mathcal{G}}$. En particulier, $\underline{\mathcal{U}}$ et $\underline{\overline{\mathcal{U}}}$ sont lisses et connexes. De plus l'image de μ est le complémentaire d'un diviseur.

iii) le morphisme produit induit un isomorphisme $({}^u\underline{\mathcal{G}}_k \cap \underline{\mathcal{U}}_k) \times ({}^u\underline{\mathcal{G}}_k \cap \underline{\mathcal{M}}_k) \times ({}^u\underline{\mathcal{G}}_k \cap \underline{\overline{\mathcal{U}}_k}) \xrightarrow{\sim} {}^u\underline{\mathcal{G}}_k$, et de plus on a ${}^u\underline{\mathcal{G}}_k \cap \underline{\mathcal{M}}_k = {}^u\underline{\mathcal{M}}_k$.

iv) Supposons que $\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{P}}$ sont $\mathcal{S}$-semi-standards et soit $\mathcal{Q}$ un autre sous-groupe parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible $\mathcal{S}$-semi-standard, de radical unipotent $\mathcal{V}$. Alors l'application produit $(\underline{V} \cap \underline{U}) \times (\underline{V} \cap \underline{M}) \times (\underline{V} \cap \underline{\overline{U}}) \longrightarrow \underline{V}$ est bijective.

Preuve : Choisissons une représentation fidèle de $\underline{\mathcal{G}}$ sur un $\mathcal{O}_K$-module libre de type fini A, c'est-à-dire une immersion fermée $\underline{\mathcal{G}} \hookrightarrow \mathcal{GL}(A)$. D'après 5.14, on peut supposer que la paire $(\mathcal{P},\overline{\mathcal{P}})$ est semi-standard relativement au choix d'un tore déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible maximal $\mathcal{S}$. Le tore $\underline{\mathcal{S}}$ agit donc sur A. Nous sommes donc dans le contexte de [12, 2.2] et pouvons appliquer les résultats qui y sont démontrés. Ainsi les deux premiers points sont donnés par [12, 2.2.3 ii) et iii)]. Pour le troisième point, la décomposition de ${}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ est donnée par [12, 1.1.11] et la relation entre les radicaux unipotents a déjà été mentionnée plus haut. Une fois choisis des sous-ensembles paraboliques Ω et Θ de $\Phi(\mathcal{S},\mathcal{G})$ tels que $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\Omega}$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\Theta}$, le point iv) est donné par [12, 2.2.3 i)]. $\square$

Le lemme suivant est une source d'exemples de groupes munis d'une décomposition d'Iwahori au sens de 2.1.

Lemme 5.16 *Soit* $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ *une paire* $\underline{\mathcal{G}}$*-admissible de paraboliques opposés, et* $\underline{\mathcal{G}}' \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathcal{G}}$ *la dilatation dans* $\underline{\mathcal{G}}$ *d'un sous-groupe lisse connexe* $\mathcal{H}_k$ *de* $\underline{\mathcal{G}}_k$ *de la forme* $(\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{U}}_k)(\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{M}}_k)(\mathcal{H}_k \cap \overline{\underline{\mathcal{U}}}_k)$*. Alors le triplet* $(\underline{U}', \underline{M}', \overline{\underline{U}}')$ *induit une décomposition d'Iwahori de* $\underline{G}' = \underline{\mathcal{G}}'(\mathcal{O}_K)$ *au sens de 2.1.*

Preuve : Il est sous-entendu dans l'énoncé que les notations $\underline{U}'$, $\underline{M}'$ et $\overline{\underline{U}}'$ désignent les groupes de points entiers des adhérences schématiques respectives $\underline{\mathcal{U}}'$, $\underline{\mathcal{M}}'$ et $\overline{\underline{\mathcal{U}}}'$ de $\mathcal{U}$, $\mathcal{M}$ et $\overline{\mathcal{U}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}'$. Ces groupes sont bien fermés dans $\underline{G}'$ et il est clair que $\underline{M}'$ normalise $\underline{U}'$ et $\overline{\underline{U}}'$.

Montrons qu'ils satisfont le point i) de 2.1. Considérons pour cela le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathcal{U}}' \times \underline{\mathcal{M}}' \times \overline{\underline{\mathcal{U}}}' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\varphi"'] & \underline{\mathcal{G}}' \arrow[d, "\varphi"] \\ \underline{\mathcal{U}} \times \underline{\mathcal{M}} \times \overline{\underline{\mathcal{U}}} \arrow[r, "\mu"] & \underline{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches horizontales sont données par le morphisme produit dans le groupe ambiant ($\underline{\mathcal{G}}'$ en haut et $\underline{\mathcal{G}}$ en bas) et les flèches verticales sont induites par φ. D'après 5.3, la restriction $\underline{\mathcal{U}}' \longrightarrow \underline{\mathcal{U}}$ de φ s'identifie à la dilatation de $\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{U}}_k$ dans $\underline{\mathcal{U}}$, et de même pour $\mathcal{M}$ et $\overline{\mathcal{U}}$. Par commutation des dilatations aux produits [6, 3.2. Prop 2(d)], le morphisme φ de gauche est donc la dilatation du produit $(\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{U}}_k) \times (\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{M}}_k) \times (\mathcal{H}_k \cap \overline{\underline{\mathcal{U}}}_k)$. Comme μ est une immersion par 5.15 ii), notre hypothèse sur $\mathcal{H}_k$ implique que $\mu^{-1}(\mathcal{H}_k) = (\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{U}}_k) \times (\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{M}}_k) \times (\mathcal{H}_k \cap \overline{\underline{\mathcal{U}}}_k)$. Comme μ est une immersion *ouverte* par 5.15 ii), et donc un morphisme plat, il résulte de la dernière assertion de 5.3 que le diagramme est cartésien.

Notons alors, comme dans 5.15 ii), $\underline{\mathcal{C}} := \underline{\mathcal{U}} \times \underline{\mathcal{M}} \times \overline{\underline{\mathcal{U}}}$ et de même avec des $'$. Soit $d \in \mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}]$ une équation du diviseur complémentaire de $\underline{\mathcal{C}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$. On a donc $\mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{C}}] = \mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}][1/d]$ et $\mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{C}}'] = \mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}'][1/d]$. Comme le support $\mathcal{H}_k$ de la dilatation effectuée dans $\underline{\mathcal{G}}$ est disjoint du diviseur $d = 0$, l'élément d est inversible dans le localisé $\mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}']_{(\varpi)}$ de $\mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}']$ en l'idéal engendré par une uniformisante ϖ de $\mathcal{O}_K$, et on a donc $\mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{C}}']_{(\varpi)} \simeq \mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}']_{(\varpi)}$. En particulier μ' induit une bijection $\underline{\mathcal{C}}'(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}'(\mathcal{O}_K)$. D'où le point i) de 2.1.

Pour obtenir le point ii), on remarque que la discussion ci-dessus s'applique à la dilatation $\underline{\mathcal{G}}^1 \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ de l'unité de $\underline{\mathcal{G}}_k$ dans $\underline{\mathcal{G}}$, et par récurrence, aux dilatations successives $\underline{\mathcal{G}}^n \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}^{n-1}$ de l'unité de la fibre spéciale. Or les groupes $\underline{G}^n = \underline{\mathcal{G}}^n(\mathcal{O}_K)$ sont les groupes de congruences de $\underline{G}$; ils sont normaux et forment un système de voisinages ouverts de l'unité, *cf.* [32, 2.8]. $\square$

5.17 *Preuve de 5.4 :* Notons $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}}$ le faisceau d'anneaux structural de $\underline{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux définissant Y dans $\underline{\mathcal{X}}$. Ce dernier contient donc $\varpi\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}}$, et le quotient $\mathcal{I}_k := \mathcal{I}/\varpi\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}}$ est l'idéal qui définit Y dans $\underline{\mathcal{X}}_k$. Par définition, le morphisme $\underline{\mathcal{X}}_Y \longrightarrow \underline{\mathcal{X}}$ est le spectre relatif du faisceau de $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}}$-algèbres $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}^n\right)_{(\varpi_1)}$ des éléments de degré 0 dans le localisé du faiscau d'anneaux gradué $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}^n$ en la section constante de valeur ϖ de $\mathcal{I}$ (en degré 1 donc noté ϖ_1 pour éviter toute ambiguïté). Ainsi la fibre spéciale $\underline{\mathcal{X}}_{Y\,k}$, qui est canoniquement isomorphe à $\underline{\mathcal{X}}_Y \otimes_{\underline{\mathcal{X}}} Y$ puisque $\varphi_{Y\,k}$ se factorise par Y , est le spectre relatif du faisceau de $\mathcal{O}_Y$-algèbres $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}\right)_{(\varpi_1)}$ des éléments de degré 0 dans le localisé en ϖ_1 (ou plus précisément son image dans $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$) de l'anneau gradué $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$.

Maintenant, nos hypothèses de lissité impliquent que les immersions $Y \hookrightarrow \underline{\mathcal{X}}_k$ et $Y \hookrightarrow \underline{\mathcal{X}}$ sont régulières, [19, Prop. 19.1.1]. Ceci signifie en particulier que

- l'on a une suite exacte $\varpi_1\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \twoheadrightarrow \mathcal{I}_k/\mathcal{I}_k^2$ de $\mathcal{O}_Y$-modules localement libres de type fini (ici ϖ_1 désigne l'image de ϖ dans $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$) [19, Prop. 19.1.5 iii)].
- le morphisme évident de $\mathcal{O}_Y$-algèbres graduées $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$ est un isomorphisme [19, Prop. 16.9.4].

Maintenant, si l'on dispose d'un scindage $\iota : \mathcal{I}_k/\mathcal{I}_k^2 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ de la suite exacte ci-dessus, alors le morphisme de $\mathcal{O}_Y$-algèbres $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}_k/\mathcal{I}_k^2) \longrightarrow \left(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\right)_{(\varpi_1)}$ qui envoie une section s de

$\mathcal{I}_k/\mathcal{I}_k^2$ sur $\frac{\iota(s)}{\varpi_1}$ est un isomorphisme. Comme de tels scindages existent localement sur Y, il s'ensuit que le morphisme $\underline{\mathcal{X}}_{Y\,k} \longrightarrow Y$ est un fibré vectoriel, localement isomorphe au fibré normal de Y dans $\underline{\mathcal{X}}_k$. En particulier c'est un épimorphisme.

Supposons maintenant que $\underline{\mathcal{X}}$ et Y sont des schémas en groupes affines lisses et notons N le noyau de l'épimorphisme de k-groupes $\underline{\mathcal{X}}_{Y\,k} \longrightarrow Y$. On veut montrer que N est un groupe vectoriel. Pour cela il faut quelqu'information sur le coproduit de $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}_Y}$. Celui-ci est induit, avant localisation, par l'application graduée $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}^n \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{I}\otimes\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}} + \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}}\otimes\mathcal{I})^n$ donnée sur chaque composante par le coproduit de $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}}$. En particulier, il respecte la filtration naturelle de $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}_Y}$ donnée par $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}_Y}^{\leqslant n} := \mathit{im}\left((\bigoplus_{m\leqslant n}\mathcal{I}^m) \longrightarrow \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}_Y}\right)$. Soit alors $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}}$, resp. $\mathcal{J}_k$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}_k}$, associé à la section unité de $\underline{\mathcal{X}}_k$. Par la discussion qui précède, on a donc une suite exacte $\varpi_1.k \hookrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{J}\mathcal{I} \twoheadrightarrow \mathcal{I}_k/\mathcal{J}_k\mathcal{I}_k$ de k-espaces vectoriels, tandis que N est le spectre de la k-algèbre $\mathcal{O}_N := (\mathrm{Sym}_k(\mathcal{I}/\mathcal{J}\mathcal{I}))_{(\varpi_1)}$ des éléments de degré 0 dans la localisation de l'algèbre de polynômes $\mathrm{Sym}_k(\mathcal{I}/\mathcal{J}\mathcal{I})$ en l'élément ϖ_1, image de ϖ dans $\mathcal{I}/\mathcal{J}\mathcal{I}$. Maintenant, la counité $\mathcal{O}_N \longrightarrow k$ est induite par l'application k-linéaire $\varepsilon : \mathcal{I}/\mathcal{J}\mathcal{I} \longrightarrow k$ qui envoie un élément $i \in \mathcal{I}$ sur l'image dans k de l'entier $\varpi^{-1}\varepsilon_{\underline{\mathcal{X}}}(i)$ où $\varepsilon_{\underline{\mathcal{X}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}} \longrightarrow \mathcal{O}$ désigne la counité de $\underline{\mathcal{X}}$. Comme l'application linéaire ε envoie ϖ_1 sur 1, elle scinde la suite exacte ci-dessus, d'où des isomorphismes canoniques $\mathit{ker}\,\varepsilon \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_k/\mathcal{J}_k\mathcal{I}_k$ et $\mathrm{Sym}_k(\mathit{ker}\,\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_N$. Ce dernier isomorphisme étant compatible à la filtration usuelle de Sym et à la filtration sur $\mathcal{O}_N$ image de celle définie plus haut sur $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{X}}_Y}$, on en déduit que le coproduit sur $\mathrm{Sym}(\mathit{ker}\,\varepsilon)$ envoie $\mathit{ker}\,\varepsilon$ dans $\mathit{ker}\,\varepsilon\otimes k + k\otimes \mathit{ker}\,\varepsilon$. Mais alors, comme on le voit en utilisant les égalités $\mu_N\circ(\varepsilon_N\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta_N = \mu_N\circ(\mathrm{Id}\otimes\varepsilon_N)\circ\Delta_N = \mathrm{Id}$ (où Δ_N, μ_N et ε_N désignent respectivement le coproduit, le produit et la counité de $\mathcal{O}_N$), il s'ensuit que le coproduit est donné sur $\mathit{ker}\,\varepsilon$ par la formule $\Delta_N(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$. Donc N est le k-schéma en groupes vectoriel sous-jacent au k-espace normal de Y dans $\underline{\mathcal{X}}_k$ en l'unité de Y.

5.18 *Dilatations associées aux sous-groupes paraboliques $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles* : Si $\mathcal{P}$ est un sous-groupe parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de $\mathcal{G}$, le groupe $\widetilde{\mathcal{P}}_k := {}^u\underline{\mathcal{G}}_k\underline{\mathcal{P}}_k$ est un sous-groupe parabolique de $\underline{\mathcal{G}}_k$. Plus précisément, supposons $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\Omega^{\mathcal{S}}$ comme dans 5.14, et introduisons le quotient réductif ${}^q\underline{\mathcal{G}}_k := \underline{\mathcal{G}}_k/{}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ de $\underline{\mathcal{G}}_k$ et son système de racines $\Phi_\dagger := \Phi(\underline{\mathcal{S}}_k, {}^q\underline{\mathcal{G}}_k) \subseteq \Phi \subset V$. Il résulte alors des définitions que $\widetilde{\mathcal{P}}_k/{}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ est le parabolique de ${}^q\underline{\mathcal{G}}_k$ contenant $\underline{\mathcal{S}}_k$ et associé au sous-ensemble parabolique $\Omega_\dagger := \Omega\cap\Phi_\dagger$ de $\Phi_\dagger$. L'application

$$\{\text{Paraboliques } \underline{\mathcal{G}}\text{-admissibles de } \mathcal{G}\} \longrightarrow \{\text{Paraboliques de } \underline{\mathcal{G}}_k\}$$

ainsi obtenue est croissante pour la relation de contenance, surjective, mais généralement pas injective. Nous appelons *co-rang résiduel* de $\mathcal{P}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$ le co-rang du parabolique associé $\widetilde{\mathcal{P}}_k$ dans $\underline{\mathcal{G}}_k$, c'est-à-dire la différence des k-rangs semi-simples de $\underline{\mathcal{G}}_k$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_k$. Il est toujours inférieur ou égal au co-rang de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{G}$.

On considère maintenant $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\nu_{\mathcal{P}}} \underline{\mathcal{G}}$ la dilatation dans $\underline{\mathcal{G}}$ de $\widetilde{\mathcal{P}}_k$. Ainsi le $\mathcal{O}_K$-schéma $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$ est un modèle lisse connexe de $\mathcal{G}$. Notons que $\mathcal{P}$ a un corang résiduel nul dans $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$ et que $\nu_{\mathcal{P}}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{P}$ a un corang résiduel nul dans $\underline{\mathcal{G}}$. Le lemme 5.9 montre que les tores $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$-admissibles sont exactement les $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{O}_K)$-conjugués des tores $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles qui sont contenus dans $\mathcal{P}$. En particulier, si $\mathcal{P}$ est $\mathcal{S}$-semi-standard, alors tous les sous-groupes paraboliques $\mathcal{S}$-semi-standard sont $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$-admissibles.

Soit $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}^\dagger \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$ la dilatation du radical unipotent de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$. D'après le lemme 5.4, ce radical unipotent est l'image réciproque du radical unipotent ${}^u\widetilde{\mathcal{P}}_k$ de $\widetilde{\mathcal{P}}_k$. La propriété universelle des dilatations montre donc que la composée $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}^\dagger \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ s'identifie à la dilatation de ${}^u\widetilde{\mathcal{P}}_k$ dans $\underline{\mathcal{G}}$. On a donc, par définition, $\underline{G}_{\mathcal{P}} = \underline{G}^\dagger\underline{P}$ et $\underline{G}_{\mathcal{P}}^\dagger = \underline{G}^\dagger\underline{U}$, et par 5.16, le triplet $(\overline{\underline{U}}^\dagger, \underline{M}, \underline{U})$, resp. $(\overline{\underline{U}}^\dagger, \underline{M}^\dagger, \underline{U})$, induit une décomposition d'Iwahori de $\underline{G}_{\mathcal{P}}$, resp. $\underline{G}_{\mathcal{P}}^\dagger$.

Si maintenant $\mathcal{Q}\subset\mathcal{P}$ est un autre sous-groupe parabolique admissible, alors le même argument que ci-dessus montre qu'il existe un isomorphisme canonique $(\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}})_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{Q}}$ qui identifie la composée $(\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}})_{\mathcal{Q}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ à $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\nu_{\mathcal{Q}}} \underline{\mathcal{G}}$.

Enfin, si $\mathcal{Q}$ est un autre sous-groupe parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible, la projection $\underline{G} \longrightarrow {}^q\underline{\mathcal{G}}_k(k)$ induit une bijection des doubles classes :

$$\underline{Q}\backslash\underline{G}/\underline{G}_{\mathcal{P}} \simeq \underline{G}_{\mathcal{Q}}\backslash\underline{G}/\underline{P} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{Q}}_k\backslash\underline{\mathcal{G}}_k/\widetilde{\mathcal{P}}_k.$$

Précisons cela dans le cas où $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ sont semi-standard pour un choix de tore déployé maximal $\underline{\mathcal{S}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$. D'après [17, Exp. XI, Cor. 5.3.bis], le $\mathcal{O}_K$-foncteur en groupes “normalisateur de $\underline{\mathcal{S}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$” est représentable par un schéma lisse sur $\mathcal{O}_K$. On sait [12, 1.1.13] que le groupe de Weyl $W(\Phi_\dagger)$ s'identifie à $W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{G}}_k) := \mathcal{N}_{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\mathcal{S}})(k)/\mathcal{Z}_{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\mathcal{S}})(k)$. Par lissité, on peut donc relever chaque $w \in W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{G}}_k)$ en une $\mathcal{O}_K$-section n_w de $\mathcal{N}_{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\mathcal{S}})$. On obtient donc, en relevant la décomposition de Bruhat de $\underline{\mathcal{G}}_k$ relativement à la paire de sous-groupes paraboliques $(\widetilde{\mathcal{P}}_k, \widetilde{\mathcal{Q}}_k)$, la décomposition

$$\underline{G} = \bigsqcup_{w\in[W(\underline{\mathcal{S}}_k,\widetilde{\mathcal{Q}}_k)\backslash W(\underline{\mathcal{S}}_k,\underline{\mathcal{G}}_k)/W(\underline{\mathcal{S}}_k,\widetilde{\mathcal{P}}_k)]} \underline{Q}n_w\underline{P}\underline{G}^\dagger \tag{5.19}$$

où les crochets désignent un ensemble de représentants des doubles classes dans $W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{G}}_k)$.

5.20 *Preuve du lemme 5.6 :* Montrons d'abord l'implication *i)* $\Rightarrow$ *ii)* de ce lemme. Fixons une paire $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ comme dans 5.6 ii). Sous l'hypothèse 5.6 i), on a $\varepsilon \in R\underline{G}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} R\underline{G}^\dagger \cap R\underline{G}^\dagger e_{\overline{\underline{U}}^\dagger} R\underline{G}^\dagger$ donc $\varepsilon \in R\underline{G}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} R\underline{G}^\dagger e_{\overline{\underline{U}}^\dagger} R\underline{G}^\dagger$ puisque ε est idempotent. En vertu du point iii) de 5.15, on peut appliquer le lemme 5.16 à $\underline{\mathcal{G}}' = \underline{\mathcal{G}}^\dagger$ pour obtenir une décomposition d'Iwahori $\underline{G}^\dagger = \underline{U}^\dagger \underline{M}^\dagger \overline{\underline{U}}^\dagger$, et donc $e_{\underline{U}^\dagger} R\underline{G}^\dagger e_{\overline{\underline{U}}^\dagger} = R\underline{M}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}^\dagger}$.

Montrons maintenant l'implication *ii)* $\Rightarrow$ *i)* de 5.6. Soit $\mathcal{Q}$ un sous-groupe parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de radical unipotent $\mathcal{V}$. On peut supposer grâce à 5.14 que $\mathcal{Q}$ est $\mathcal{S}$-semi-standard pour un tore déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible maximal $\mathcal{S}$. Notons $\underline{\mathcal{G}}^s$ la dilatation de ${}^u\underline{\mathcal{G}}_k\mathcal{S}_k$ dans $\underline{\mathcal{G}}$. Remarquons que pour tout rayon radiciel $\widetilde{\alpha} \in \Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G})$, on a (avec une notation évidente) $U^\dagger_{\widetilde{\alpha}} = U^s_{\widetilde{\alpha}}$. Appliquons alors à $\underline{\mathcal{G}}^s$ le point iv) du corollaire 5.15 avec $\mathcal{P}$ minimal et $\mathcal{S}$-semi-standard. On a donc $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = \{1\}$, et on obtient pour les idempotents associés $e_{V^\dagger} = e_{V^\dagger\cap U} e_{V^\dagger\cap\overline{U}}$.

5.21 *Preuve de 5.8 : réduction au co-rang résiduel* 1 : Commençons par remarquer que l'énoncé de 5.8 est vide lorsque $\mathcal{P}$ est de corang résiduel nul dans $\mathcal{G}$, puisqu'on a alors $\underline{U} = \underline{U}^\dagger$. Nous supposerons donc ce corang résiduel strictement positif et nous allons nous ramener au cas où il vaut 1. Pour cela, il sera pratique de supposer, comme nous le permet le lemme 5.14, que la paire $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ est $\mathcal{S}$-semi-standard, *i.e.* de la forme $(\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_\Omega, \mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{-\Omega})$ pour un choix de tore déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible maximal $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$ et un sous-ensemble parabolique Ω de $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G})$.

Rappelons alors qu'on peut trouver une suite $\Omega_0 := -\Omega, \Omega_1, \cdots, \Omega_r := \Omega$ de sous-ensembles paraboliques de $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G})$, de composante de Levi commune Ω^0 et tels que

i) pour tout i, la réunion $\Theta_i := \Omega_{i-1} \cup \Omega_i$ est un sous-ensemble parabolique engendrant un sous-espace vectoriel réel $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Omega^0)$ de $X^*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$ de codimension 1 dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Theta^0_i)$.

ii) la suite $\Omega^+ \cap \Omega^+_i$ est strictement croissante.

(Pour mémoire : les paraboliques dont la composante de Levi contient Ω^0 sont de la forme $\Omega(v^*)$ pour $v^* \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Omega^0)^\perp$. Les classes d'équivalence pour la relation $\Omega(v^*_1) = \Omega(v^*_2)$ sur $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Omega^0)^\perp$ sont les facettes d'une décomposition en cônes convexes. Les cônes ouverts (chambres) correspondent aux paraboliques de Levi Ω^0. On obtient des Ω_i comme dans l'énoncé en choisissant une galerie tendue (*i.e.* de longueur minimale, *cf.* [11, 1.1]) entre les cônes correspondant à Ω et $-\Omega$.)

Posons alors $\underline{\mathcal{G}}_i := \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}_{\Theta_i}}$. Par construction, $\mathcal{P}$ est de co-rang résiduel $\leqslant 1$ dans chaque $\underline{\mathcal{G}}_i$.

Lemme 5.22 *Supposons que pour chaque i, l'énoncé de 5.8 est vérifié lorsqu'on remplace $\underline{\mathcal{G}}$ par $\underline{\mathcal{G}}_i$. Alors l'énoncé de 5.8 est vérifié pour $\underline{\mathcal{G}}$.*

Preuve : Restant cohérents avec le système de notations utilisé jusqu'ici, nous notons $\underline{\mathcal{U}}_i$, resp. $\underline{\mathcal{U}}^\dagger_i$, l'adhérence schématique de $\mathcal{U}$ dans $\underline{\mathcal{G}}_i$, resp. dans $\underline{\mathcal{G}}^\dagger_i$. Insistons sur le fait que le $\dagger$ de $\underline{\mathcal{G}}^\dagger_i$ se rapporte à $\underline{\mathcal{G}}_i$ et non à $\underline{\mathcal{G}}$, *cf.* plus haut. En particulier $\underline{U}^\dagger_i$ est généralement distinct de $\underline{U}^\dagger \cap \underline{G}_i$.

Nous allons prouver

(5.23) $$\overline{\underline{U}}_1 = \overline{\underline{U}},\ \ \overline{\underline{U}}_r^\dagger = \overline{\underline{U}}^\dagger \ \text{ et } \ \forall i = 1, \cdots, r,\ \ \overline{\underline{U}}_i^\dagger = \overline{\underline{U}}_{i+1}$$

et symétriquement

(5.24) $$\underline{U}_1^\dagger = \underline{U}^\dagger,\ \ \underline{U}_r = \underline{U} \ \text{ et } \ \forall i = 1, \cdots, r,\ \ \underline{U}_i = \underline{U}_{i+1}^\dagger$$

De 5.23 nous retiendrons en particulier $e_{\overline{\underline{U}}} = e_{\overline{\underline{U}}_i} e_{\overline{\underline{U}}}$ pour tout $i = 1, \cdots, r$, de sorte que l'hypothèse du lemme nous donne
$$\forall i = 1, \cdots, r,\ \ e_{\underline{U}_i^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} \in R\underline{G}_i e_{\underline{U}_i} e_{\overline{\underline{U}}}.$$

On termine alors la preuve du lemme en écrivant grâce à 5.24
$$e_{\underline{U}^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} = e_{\underline{U}_1^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} \in R\underline{G} e_{\underline{U}_1} e_{\overline{\underline{U}}} = R\underline{G} e_{\underline{U}_2^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} \subset R\underline{G} e_{\underline{U}_2} e_{\overline{\underline{U}}} \cdots \subset R\underline{G} e_{\underline{U}_r} e_{\overline{\underline{U}}} = R\underline{G} e_{\underline{U}} e_{\overline{\underline{U}}}$$

où les $\cdots$ désignent une récurrence évidente. Reste donc à prouver 5.23 et 5.24. Pour des raisons de symétrie,on se contentera de prouver 5.24. Vue la définition de $\mathcal{G}_r$, l'égalité $\underline{U}_r = \underline{U}$ équivaut à la relation $\Omega^+ \subseteq \Theta_r$, laquelle est vraie puisque $\Theta_r \supset \Omega$. Vue la définition de $\mathcal{G}_1^\dagger$, l'égalité $\underline{U}_1^\dagger = \underline{U}^\dagger$ équivaut à la relation $\Omega^+ \subseteq -\Theta_1$, laquelle est assurée par $\Theta_1 \supset \Omega_0 = -\Omega$. Enfin pour $i = 1, \cdots, r$, vues les définitions de $\mathcal{G}_i$ et $\mathcal{G}_{i+1}^\dagger$, l'égalité $\underline{U}_i = \underline{U}_{i+1}^\dagger$ équivaut à l'identité $\Omega^+ \cap \Theta_i = \Omega^+ \cap \Theta_{i+1}^+$. Or,
$$\Omega^+ \cap \Theta_{i+1}^+ = \Omega^+ \cap (\Omega_i^+ \cap \Omega_{i+1}^+) = \Omega^+ \cap \Omega_i^+$$
par la propriété ii) de la suite $(\Omega_i)_i$, tandis que
$$\Omega^+ \cap \Theta_i = \Omega^+ \cap (\Omega_i \cup \Omega_{i-1}) = \Omega^+ \cap (\Omega_i^+ \cup \Omega_{i-1}^+) = \Omega^+ \cap \Omega_i^+,$$
par cette même propriété ii) (la deuxième égalité vient de $\Omega^+ \cap \Omega^0 = \emptyset$).

□

5.25 *Preuve de 5.8 : récurrence* : Nous allons effectuer une double récurrence, la première portant sur le rang semisimple résiduel de $\underline{\mathcal{G}}$ (c'est-à-dire le k-rang semisimple de $\underline{\mathcal{G}}_k$), la deuxième portant sur le rang semisimple de la paire $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$.

L'amorce de la première récurrence ne pose pas de problème puisque lorsque $\underline{\mathcal{G}}$ est de rang semisimple résiduel nul, on a pour tout sous-groupe parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible $\mathcal{P}$ l'identité $\underline{\mathcal{U}}^\dagger = \underline{\mathcal{U}}$, donc l'énoncé de 5.8 est trivial. Fixons donc un modèle $\underline{\mathcal{G}}$ et supposons 5.8 prouvé pour les modèles de rang semisimple résiduel strictement inférieur à celui de $\underline{\mathcal{G}}$. Alors d'après le paragraphe précédent, 5.8 est vrai pour toute paire $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ de corang résiduel strictement supérieur à 1 ; en effet les modèles intermédiaires $\underline{\mathcal{G}}_i$ sont alors de rang résiduel strictement inférieur à celui de $\underline{\mathcal{G}}$. Fixons alors une paire $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ de corang résiduel égal à 1. Notre deuxième hypothèse de récurrence sera que 5.8 est connu pour toute paire $(\mathcal{P}', \overline{\mathcal{P}}')$ contenue dans $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$. Le raisonnement qui suit justifiera à la fois l'amorce et le pas de cette deuxième récurrence.

D'après 5.14, on peut supposer que la paire $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ est semi-standard relativement au choix d'un tore déployé $\underline{\mathcal{G}}$-admissible maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$. Enfin, en l'absence d'ambiguïté, nous allègerons les notations en cessant de souligner les groupes de points entiers ; $\underline{G}$ devient donc G, $\underline{U}^\dagger$ devient $U^\dagger$, etc...

Comme dans [20], le principe de la preuve repose sur l'égalité suivante dans RG :
$$[U : U^\dagger] e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} e_U e_{\overline{U}} = e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} + \sum_{u \in U/U^\dagger \setminus \{1\}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} u e_{U^\dagger} e_{\overline{U}}.$$

D'après 2.2 appliqué à $G_{\overline{\mathcal{P}}} = U^\dagger M^\dagger \overline{U}$, il existe un élément central inversible $z_{\mathcal{P}}$ dans RM tel que $e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} = z_{\mathcal{P}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}}$. Ainsi pour prouver l'énoncé de 5.8, il suffira de prouver que pour tout $u \in U \setminus U^\dagger$, on a

(5.26) $$X(u) := \varepsilon e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} u e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon \in RG e_U e_{\overline{U}} \varepsilon.$$

D'après la décomposition de Bruhat 5.19 relative au sous-groupe parabolique $\overline{\mathcal{P}}$ et appliquée à u, il existe un élément $n_w \in \mathcal{N}_{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\mathcal{S}})(\mathcal{O}_K)$, des éléments $\overline{u}_i \in \overline{U}$ et $m_i \in M$ pour $i = 1, 2$ et un élément $g^\dagger \in G^\dagger$ tels que $u = m_1\overline{u}_1 n_w \overline{u}_2 m_2 g^\dagger$. Comme u est dans $U \setminus U^\dagger$ qui est contenu dans $G \setminus \overline{P}G^\dagger$, l'image w de n_w dans $W(\mathcal{S}_k, {}^q\underline{\mathcal{G}}_k)$ n'appartient pas à $W(\mathcal{S}_k, {}^q\underline{\mathcal{M}}_k)$. Puisque M normalise $\overline{U}$ et $U^\dagger$, il s'ensuit que

$$X(u) \in RM.\varepsilon e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM.$$

Utilisons maintenant l'hypothèse faite sur ε d'être "essentiellement de niveau 0" ; comme le groupe $\mathcal{M} \cap {}^w\mathcal{U}$ (où on a posé ${}^w\mathcal{U} := n_w \mathcal{U} n_w{}^{-1}$) est le radical unipotent du sous-groupe parabolique $\mathcal{M} \cap {}^w\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}$ et comme $M \cap {}^wU^\dagger = (M \cap {}^wU)^\dagger$, elle nous permet d'écrire que $\varepsilon \in RM^\dagger e_{M\cap {}^wU^\dagger} RM^\dagger$. On en déduit

$$X(u) \in RM.\varepsilon e_{U^\dagger} e_{M\cap {}^wU^\dagger} e_{\overline{U}} n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM.$$

On décompose maintenant le premier $e_{\overline{U}}$ en un produit $e_{\overline{U}\cap {}^wU} e_{\overline{U}\cap {}^wM} e_{\overline{U}\cap {}^w\overline{U}}$ grâce au point iv) de 5.15 appliqué à $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \mapsto ({}^w\mathcal{P}, \mathcal{P})$. En remarquant que $e_{\overline{U}\cap {}^w\overline{U}} n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}} \subseteq n_w R(\overline{U}.G^\dagger).e_{\overline{U}} = n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}}$, on obtient

$$X(u) \in RM.\varepsilon e_{U^\dagger} e_{M\cap {}^wU^\dagger} e_{\overline{U}\cap {}^wU} e_{\overline{U}\cap {}^wM} n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM.$$

Observons que le produit $e_{U\cap {}^wU^\dagger} e_{M\cap {}^wU^\dagger} e_{\overline{U}\cap {}^wU}$ est l'idempotent associé au pro-p-groupe ${}^wU^\dagger({}^wU \cap \overline{U})$ et s'écrit encore $e_{{}^wU^\dagger} e_{\overline{U}\cap {}^wU} = e_{\overline{U}\cap {}^wU} e_{{}^wU^\dagger}$. Ainsi, en décomposant $e_{U^\dagger} = e_{U^\dagger\cap {}^w\overline{U}} e_{U^\dagger\cap {}^wM} e_{U^\dagger\cap {}^wU}$, puis en faisant commuter à n_w, on obtient, avec la notation $X^w := w^{-1}Xw = {}^{w^{-1}}X$, la première ligne de

$$\begin{array}{rcl}
X(u) & \in & (RM.\varepsilon e_{U^\dagger\cap {}^w\overline{U}}\, n_w)\, e_{M\cap U^{\dagger w}} (e_{U\cap \overline{U}^w}\, e_{U^\dagger}) e_{M\cap \overline{U}^w}.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM \\
& \subset & RG.e_{M\cap U^{\dagger w}} e_{U\cap \overline{U}^w} e_{M\cap \overline{U}^w} e_{U^\dagger}.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM \\
& = & RG.e_{M\cap U^{\dagger w}} e_{U\cap \overline{U}^w} e_{M\cap \overline{U}^w} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}}\varepsilon RM \\
& = & RG.e_{M\cap U^{\dagger w}} e_{U\cap \overline{U}^w} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} e_{M\cap \overline{U}^w}.\varepsilon RM \\
& = & RG.e_{U\cap \overline{U}^w} (e_{U^\dagger} e_{M\cap U^{\dagger w}})(e_{\overline{U}} e_{M\cap \overline{U}^w}).\varepsilon RM \qquad (*)
\end{array}$$

Dans la deuxième ligne, on fait commuter $e_{M\cap \overline{U}^w}$ et $e_{U^\dagger}$ car M normalise $U^\dagger$. À la troisième ligne, on utilise la décomposition à la Iwahori $G^\dagger = U^\dagger M^\dagger \overline{U}^\dagger$ pour écrire $e_{U^\dagger}.RG^\dagger.e_{\overline{U}} = e_{U^\dagger} e_{\overline{U}}.RM^\dagger$. La quatrième ligne vient encore du fait que M normalise $U^\dagger$ et $\overline{U}$, et la dernière vient du fait que $M^\dagger$ normalise le groupe $U^\dagger(U \cap \overline{U}^w)$ puisqu'il normalise U, $U^\dagger$ et agit trivialement sur le quotient.

Deux cas se présentent maintenant : supposons tout d'abord que $\mathcal{M} \cap \mathcal{P}^w$ soit un sous-groupe parabolique propre de $\mathcal{M}$ et posons $\mathcal{P}' := (\mathcal{M} \cap \mathcal{P}^w)\mathcal{U}$. C'est un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ strictement contenu dans $\mathcal{P}$. Il est $\mathcal{S}$-semistandard, associé au sous-ensemble parabolique $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{P}') = \Phi(\mathcal{S}, \mathcal{U}) \cup (\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{M}) \cap {}^w\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{P}))$, donc $\underline{\mathcal{G}}$-admissible par 5.12. Son radical unipotent est $\mathcal{U}' := (\mathcal{M} \cap \mathcal{U}^w)\mathcal{U}$, sa composante de Levi semi-standard est $\mathcal{L} := \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^w$, et son opposé semi-standard est $\overline{\mathcal{P}}' := (\mathcal{M} \cap \overline{\mathcal{P}}^w)\overline{\mathcal{U}}$. La décomposition d'Iwahori $M^\dagger = (M^\dagger \cap U^w)L^\dagger(M^\dagger \cap \overline{U}^w)$ nous fournit une unique distribution ε_L dans $RL^\dagger$ telle que $e_{M^\dagger\cap U^w}\varepsilon e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} = e_{M^\dagger\cap U^w}\varepsilon_L e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w}$. Par unicité et par la proposition 2.2, ε_L est un idempotent central de $RL^\dagger$. Vérifions que ε_L est essentiellement de niveau 0, et fixons pour cela un sous-groupe parabolique $\mathcal{S}$-semistandard minimal $\mathcal{R}$ de $\mathcal{G}$ dont le radical unipotent $\mathcal{V}$ contient $\mathcal{U}'$. Par la définition 5.6, on a $\varepsilon \in RM^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{V}} e_{M^\dagger\cap V} RM^\dagger$. On en déduit

$$\begin{array}{rcl}
e_{M^\dagger\cap U^w}\varepsilon e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} & \in & e_{M^\dagger\cap U^w} RM^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{V}} e_{M^\dagger\cap V} RM^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} \\
& = & e_{M^\dagger\cap U^w} RL^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} e_{L^\dagger\cap \overline{V}} e_{L^\dagger\cap V} e_{M^\dagger\cap U^w} RL^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} \\
& = & e_{M^\dagger\cap U^w} RL^\dagger e_{L^\dagger\cap \overline{V}} e_{L^\dagger\cap V} RL^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w}
\end{array}$$

On a utilisé la décomposition $M^\dagger = (M^\dagger \cap U^w)L^\dagger(M^\dagger \cap \overline{U}^w)$ pour changer M en L dans la seconde ligne, et on a appliqué 2.2 à cette même décomposition pour passer à la troisième ligne. Par l'unicité de cette décomposition, il s'ensuit que $\varepsilon_L \in RL^\dagger e_{L^\dagger\cap \overline{V}} e_{L^\dagger\cap V} RL^\dagger$, autrement dit, ε_L est essentiellement de niveau 0 dans RL. On peut donc appliquer notre deuxième hypothèse de récurrence à la paire $(\mathcal{P}', \overline{\mathcal{P}}')$ et pour l'idempotent ε_L ; celle-ci nous dit que $e_{U'^\dagger} e_{\overline{U}'} \varepsilon_L \in RGe_{U'} e_{\overline{U}'} \varepsilon_L$. Or d'après 5.15 iv) appliqué à $\mathcal{Q} = \mathcal{P}'$ ou $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{P}}'$, on a les égalités $U' = U(M \cap U^w)$ et $\overline{U'} = \overline{U}(M \cap \overline{U}^w)$, et d'après ce même point appliqué à $\mathcal{Q} = \mathcal{P}'$ et au modèle de $\mathcal{G}$ déduit de $\underline{\mathcal{G}}$ par dilatation de $\underline{\mathcal{S}}_k.{}^u\underline{\mathcal{G}}_k$, on a l'égalité $U'^\dagger = U^\dagger(M \cap U^{\dagger w})$. Par ailleurs, comme ε est central dans RM, on a par définition de ε_L l'égalité $e_{M\cap U^{\dagger w}} e_{M\cap \underline{U}^w} \varepsilon = e_{M\cap U^{\dagger w}} e_{M\cap \underline{U}^w} \varepsilon_L$, et on obtient finalement, à partir de la ligne $(*)$

$$\begin{aligned} X(u) &\in RG.(e_U e_{M\cap U^w})(e_{\overline{U}} e_{M\cap \overline{U}^w}).\varepsilon RM \\ &\subset RGe_U e_{\overline{U}} \varepsilon \end{aligned}$$

toujours en utilisant le fait que M normalise U et $\overline{U}$.

Supposons au contraire que $\mathcal{M} \cap \mathcal{P}^w = \mathcal{M}$, ou de manière équivalente, que $\mathcal{M} = w^{-1}\mathcal{M}w$, c'est-à-dire que n_w normalise $\mathcal{M}$. C'est ici qu'intervient l'hypothèse de corang résiduel 1. Celle-ci dit que ${}^q\underline{\mathcal{M}}_k$ est un sous-groupe de Levi maximal (et propre) de ${}^q\underline{\mathcal{G}}_k$, donc est la composante de Levi d'exactement deux sous-groupes paraboliques, à savoir $\widetilde{\mathcal{P}}_k$ et $\widetilde{\overline{\mathcal{P}}}_k$. Puisque n_w normalise ${}^q\underline{\mathcal{M}}_k$ et puisque w n'est pas dans $W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{M}}_k)$, il s'ensuit que la conjugaison par n_w échange les sous-groupes paraboliques $\widetilde{\mathcal{P}}_k$ et $\widetilde{\overline{\mathcal{P}}}_k$. Par conséquent, la conjugaison par n_w induit un isomorphisme $\mathcal{G}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{\overline{\mathcal{P}}}$, induisant à son tour un isomorphisme $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^\dagger_{\overline{\mathcal{P}}}$ qui sur les point entiers signifie simplement que $w^{-1}G^\dagger\overline{U}w = G^\dagger U$. On en tire immédiatement que $U = U^\dagger(U \cap \overline{U}^w)$, et la ligne $(*)$ ci-dessus nous donne

$$X(u) \in RG.e_U e_{\overline{U}} \varepsilon.$$

On a donc terminé la preuve de 5.26 et par là celle du théorème 5.8.

5.27 *Preuve du corollaire 5.10 :* Comme dans la preuve précédente, nous allégeons les notations en ne soulignant pas les groupes de points entiers. On a donc $U' \subset U$ et $\overline{U}' \subset \overline{U}$. De plus l'hypothèse $G' \cap G^\dagger \supseteq G'^\dagger$ entraine $U' \cap U^\dagger \supseteq U'^\dagger$, comme on le voit en prenant l'intersection avec $\mathcal{U}(K)$. D'après la proposition 2.2 appliquée à la décomposition d'Iwahori $G^\dagger_{\overline{\mathcal{P}}} = U^\dagger M^\dagger \overline{U}$, on a $e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \in RGe_{\overline{U}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}}$. On a donc $e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon' \in RGe_{\overline{U}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon' = RGe_{\overline{U}} \varepsilon' e_{U^\dagger} \varepsilon' e_{\overline{U}}$, et grâce à l'hypothèse i), il vient

$$e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon' \in RGe_{\overline{U}} \widetilde{\varepsilon}' e_{U^\dagger} \widetilde{\varepsilon}' e_{\overline{U}}.$$

D'après l'hypothèse ii) sur l'entrelacement de $\widetilde{\varepsilon}'$, on a donc $e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon' \in RG\widetilde{\varepsilon}' e_{U'\cap U^\dagger} \widetilde{\varepsilon}' e_{\overline{U}}$, et par l'inclusion $U^\dagger \cap U' \supseteq U'^\dagger$ et le fait que $\widetilde{\varepsilon}'$ est centralisé par G', on en déduit $e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon' \in RG\widetilde{\varepsilon}' e_{U'^\dagger} \widetilde{\varepsilon}' e_{\overline{U}}$. Utilisant à nouveau l'hypothèse i) et le fait que ε' commute à $e_{\overline{U}'}$, on obtient que $e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon' \in RG\widetilde{\varepsilon}' e_{U'^\dagger} e_{\overline{U}'} \varepsilon' e_{\overline{U}}$. D'après le théorème 5.8 appliqué à $\underline{\mathcal{G}}'$ et ε', on a $e_{U'^\dagger} e_{\overline{U}'} \varepsilon' \in RG' e_{U'} e_{\overline{U}'} \varepsilon'$. Utilisant à nouveau le fait que ε' commute à $e_{\overline{U}'}$, l'hypothèse i), puis le fait que $\widetilde{\varepsilon}'$ est centralisé par G', on en déduit que

$$e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon' \in RG\widetilde{\varepsilon}'\, RG'\, e_{U'} e_{\overline{U}'} \varepsilon' e_{\overline{U}} = RG\widetilde{\varepsilon}'\, RG'\, e_{U'} \widetilde{\varepsilon}' e_{\overline{U}} = RG\widetilde{\varepsilon}' e_{U'} \widetilde{\varepsilon}' e_{\overline{U}}.$$

Or, par l'hypothèse ii) sur l'entrelacement, on a $\widetilde{\varepsilon}' e_{U'} u \widetilde{\varepsilon}' = 0$ pour tout $u \in U \setminus U'$, et donc $\widetilde{\varepsilon}' e_{U'} \widetilde{\varepsilon}' = [U : U']^{-1} \widetilde{\varepsilon}' e_U \widetilde{\varepsilon}'$. On en déduit, moyennant une ultime application de l'hypothèse i), que

$$e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon' \in RGe_U \widetilde{\varepsilon}' e_{\overline{U}} = RGe_U e_{\overline{U}} \varepsilon'.$$

5.28 *Preuve de 5.7 :* Comme dans les preuves précédentes, nous allégeons les notations en ne soulignant pas les groupes de points entiers. Pour un caractère $\chi : U^\dagger/U^* \longrightarrow R^\times$, on note $[\chi]$ l'idempotent de $RU^\dagger$ associé. L'hypothèse ii) implique que R est suffisamment gros pour que $\sum_\chi [\chi] = e_{U^*}$, la somme étant sur tous les caractères χ. On a donc l'égalité dans $RG^\dagger$

$$[\theta] = \sum_\chi [\chi][\theta].$$

Fixons maintenant un tel caractère χ ainsi qu'un élément $u \in \overline{U}^\dagger$ et calculons l'expression $[\chi]u[\chi][\theta]$. On a

$$\begin{aligned}
|U^\dagger/U^*|.[\chi]u[\chi][\theta] &= \sum_{v\in U^\dagger/U^*} \chi^{-1}(v)e_{U^*}vu[\chi][\theta] \\
&= \sum_v \chi^{-1}(v)e_{U^*}vuv^{-1}\chi(v)[\chi][\theta] \\
&= e_{U^*}u\sum_v [u^{-1},v][\chi][\theta] = e_{U^*}u\sum_v \theta([u^{-1},v])[\chi][\theta]
\end{aligned}$$

D'après le ii) de notre hypothèse, la somme $\sum_v \theta([u^{-1},v])$ est nulle sauf si $u \in \overline{U}^*$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\overline{U}^\dagger/\overline{U}^*|[\chi]e_{\overline{U}^\dagger}[\chi][\theta] &= \sum_{u\in\overline{U}^\dagger/\overline{U}^*} [\chi]e_{\overline{U}^*}u[\chi][\theta] \\
&= [\chi]e_{\overline{U}^*}[\chi][\theta] = [\chi][\theta]
\end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned}
[\theta] &= \sum_\chi [\chi][\theta] = |\overline{U}^\dagger/\overline{U}^*|\sum_\chi [\chi]e_{\overline{U}^\dagger}[\chi][\theta] \\
&\in RG^\dagger e_{\overline{U}^\dagger}RG^\dagger
\end{aligned}$$

De même on prouve que $[\theta] \in RG^\dagger e_{U^\dagger}RG^\dagger$. On en déduit alors que $[\theta = [\theta][\theta]$ appartient à $RG^\dagger e_{\overline{U}^\dagger}RG^\dagger e_{U^\dagger}RG^\dagger$. Or par la décomposition d'Iwahori $G^\dagger = \overline{U}^\dagger M^\dagger U^\dagger$, ce dernier R-module s'écrit encore $RG^\dagger e_{\overline{U}^\dagger}e_{U^\dagger}RG^\dagger$. Il s'ensuit que $[\theta]$ vérifie le point ii) de la définition 5.6.

6 Paraboliques minimaux, niveau zéro

Nous reprenons maintenant les notations du paragraphe 2.11, tout en conservant les conventions de la section précédente concernant les sous-groupes paraboliques. En particulier si $x \in B(\mathcal{G}, K)$, on note $\mathcal{G}_x$ le modèle lisse de $\mathcal{G}$ associé à x par Bruhat-Tits, et $\mathcal{G}_x^\circ$ sa composante neutre. Commençons par la remarque suivante :

Remarque 6.1 *Soit $x \in B(\mathcal{G}, K)$ et $\mathcal{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathcal{G}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $x \in B(\mathcal{M}, K)$

ii) L'adhérence schématique dans $\mathcal{G}_x$ du tore déployé maximal du centre de $\mathcal{M}$ est un tore.

iii) $\mathcal{M}$ est $\mathcal{G}_x^\circ$-admissible au sens de 5.1.

Il sensuit qu'une paire de sous-groupes paraboliques opposés est $\mathcal{G}_x^\circ$-admissible si et seulement si sa composante de Levi commune l'est.

Preuve : Par construction des groupes de Bruhat-Tits, $\mathcal{G}_x$ a la propriété suivante : les tores déployés $\mathcal{G}_x^\circ$-admissibles maximaux de $\mathcal{G}$ sont exactement les tores déployés maximaux de $\mathcal{G}$ dont l'appartement associé contient x. Prouvons alors $i) \Rightarrow ii)$. Supposons $x \in B(\mathcal{M}, K)$. On peut alors trouver un tore déployé maximal de $\mathcal{M}$ dont l'appartement associé contient x. Celui-ci est $\mathcal{G}_x^\circ$-admissible, et contient la partie déployée du centre de $\mathcal{M}$. Donc celle-ci est aussi $\mathcal{G}_x^\circ$-admissible. L'implication $ii) \Rightarrow iii)$ est tautologique, vue la définition d'admissibilité. Prouvons maintenant $iii) \Rightarrow i)$. D'aprés 5.14 on peut trouver un tore déployé $\mathcal{G}_x^\circ$-admissible maximal contenu dans $\mathcal{M}$. Ce tore est déployé maximal dans $\mathcal{G}$, son appartement contient le point x et est contenu dans l'immeuble $B(\mathcal{M}, K)$ de M. Enfin, la dernière assertion découle de la remarque finale du paragraphe 5.1. □

Proposition 6.2 *Soit* $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ *une paire de sous-groupes paraboliques opposés de* $\mathcal{G}$ *et* x *un point de l'immeuble* $B(\mathcal{M}, K)$ *de leur composante de Levi commune.*

i) (niveau zéro) $e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} e_{M_x^+} \in (RG_x) e_{U_x} e_{\overline{U}_x} e_{M_x^+}$.

ii) Si $\mathcal{P}$ *est minimal, alors* $e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \in (RG_x) e_{U_x} e_{\overline{U}_x}$.

Preuve : Remarquons pour commencer que les groupes $\mathcal{U}_x$ et $\overline{\mathcal{U}}_x$ obtenus par adhérence schématique de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{G}_x$ sont *connexes* donc contenus dans $\mathcal{G}_x^\circ$. Pour le voir, on peut se ramener aux adhérences de groupes radiciels $\mathcal{U}_{\alpha,x}$, lesquelles sont explicitées par Bruhat-Tits (construction en [12, 4.3 et 5.2.2] et propriété d'immersion fermée de [12, 3.8.1 (S2)]) qui montrent que leurs schémas sous-jacents sont des vectoriels sur $\mathcal{O}_K$. Comme $G_x^+ = (\mathcal{G}_x^\circ)^\dagger(\mathcal{O}_K)$, on voit que tous les idempotents de l'énoncé sont en réalité dans G_x°.

Dans le point i), l'idempotent $e_{M_x^+}$ est clairement "essentiellement de niveau zéro" au sens de 5.6, donc on peut appliquer le théorème 5.8. Dans le point ii), on remarque que l'idempotent $1_{M_x^+}$ (élément unité) satisfait aussi les hypothèses de 5.6 puisque $\mathcal{M}$ n'a pas de sous-groupe parabolique $\mathcal{M}_x^\circ$-admissible propre. □

En combinant ce corollaire avec 3.6, on obtient bien la propriété de commutation 1.4 annoncée dans l'introduction pour les paraboliques minimaux, et par 3.9, la propriété de seconde adjonction dans ce cas.

En ce qui concerne le niveau zéro, voici le résultat obtenu :

Proposition 6.3 *Soit* $\mathrm{Mod}_R(G)_0$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Mod}_R(G)$ *formée des objets engendrés par la réunion de leurs* G_x^+*-invariants, pour* $x \in B(\mathcal{G}, K)$ *(objets de "niveau zéro"), et* $\mathrm{Mod}_R(G)_{>0}$ *celle des objets dont tous les* G_x^+*-invariants sont nuls, pour* $x \in B(\mathcal{G}, K)$ *(objets de "niveau strictement positif").*

i) On a une décomposition $\mathrm{Mod}_R(G) = \mathrm{Mod}_R(G)_0 \oplus \mathrm{Mod}_R(G)_{>0}$.

ii) Les foncteurs paraboliques envoient objets de niveau zéro, resp. positif, sur objets de niveau zéro, resp. positif.

iii) Pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ *de* $\mathcal{G}$*, la restriction du foncteur* $\mathrm{r}_{G,P}^M$ *à la catégorie* $\mathrm{Mod}_R(G)_0$ *est adjointe à droite de la restriction du foncteur* $\delta_P \mathrm{i}_{M,\overline{P}}^G$ *à la catégorie* $\mathrm{Mod}_R(M)_0$.

iv) La catégorie $\mathrm{Mod}_R(G)_0$ *est noethérienne.*

Preuve : La décomposition du point i) est expliquée dans l'appendice. Pour le point ii), soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique. D'après le corollaire précédent et 3.6, on a $i_{M,P}^G(ind_{M_x^+}^M(R)) \simeq ind_{G_x^+}^{G_x}(R)$ pour tout $x \in B(\mathcal{M}, K)$. Le foncteur $i_{M,P}^G$ étant exact, on en déduit qu'il envoie $Mod_R(M)_0$ dans $Mod_R(G)_0$. Étant aussi fidèle, et puisque toute G-orbite dans $B(\mathcal{G}, K)$ rencontre $B(\mathcal{M}, K)$, il envoie aussi $Mod_R(M)_{>0}$ dans $Mod_R(G)_{>0}$. Par réciprocité de Frobenius, on en déduit les propriétés analogues pour $r_{G,P}^M$.

Pour le point iii), on recopie la preuve de 3.9 en utilisant le fait que les $e_{M_x^+}$ pour $x \in B(\mathcal{M}, K)$ forment une famille génératrice de $Mod_R(M)_0$ d'idempotents P-bons. Enfin, les arguments de la partie 4 montrent que iii) implique iv). □

7 Le cas de $GL(N)$

Pour coller aux notations de Bushnell, Kutzko et Stevens, nous noterons F le corps local que nous notions K jusqu'ici.

7.1 *Dictionnaire Bruhat-Tits/Bushnell-Kutzko :* Ce dictionnaire est très bien expliqué dans [9] auquel on renvoie le lecteur pour les détails. Soit V un F-espace vectoriel. Une fonction réseau sur V relativement à F est une fonction Λ de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des $\mathcal{O}_F$-réseaux de V, qui est décroissante, continue à gauche, et telle que $\Lambda(r + v_F) = \mathfrak{P}_F \Lambda(r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, où $v_F \in \mathbb{R}_+$

désigne la valuation d'une uniformisante de F. L'ensemble $\mathcal{FR}_F(V)$ de ces fonctions est muni d'une action de G et d'une action de $\mathbb{R}$ par translations que nous noterons $\Lambda \mapsto \Lambda[t] : r \mapsto \Lambda(r-t)$. Soit $\mathcal{G}$ le F-schéma en groupes des automorphismes F-linéaires de V, dont le groupe des points rationnels est $G = Aut_F(V)$. D'après [9, Prop. 2.4], il y a une application naturelle $B(\mathcal{G}, F) \longrightarrow \mathcal{FR}_F(V)$. Celle-ci est bijective, G-équivariante, et $\mathbb{R}$-équivariante si on identifie $X_*(\mathcal{Z}(\mathcal{G}))\otimes\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$ en envoyant un endomorphisme scalaire de V sur l'opposé de la valuation de ce scalaire.

Notons $A := End_F(V)$. Une fonction réseau $\Lambda \in \mathcal{FR}_F(V)$ détermine une fonction réseau $\mathfrak{a}(\Lambda) \in \mathcal{FR}_F(A)$ définie par $\mathfrak{a}_r(\Lambda) = \{x \in A, \forall u \in \mathbb{R}, x\Lambda(u) \subseteq \Lambda(r+u)\}$ pour $r \in \mathbb{R}$. On note aussi $\mathfrak{a}_{r+}(\Lambda) := \bigcup_{s>r} \mathfrak{a}_s(\Lambda)$. Alors $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$ est un ordre héréditaire, $\mathfrak{a}_{0+}(\Lambda)$ est son radical de Jacobson et tous les $\mathfrak{a}_r(\Lambda)$ en sont des idéaux fractionnaires. Posons aussi $\mathfrak{u}_0(\Lambda) := \mathfrak{a}_0(\Lambda)^\times$, c'est un sous-groupe compact ouvert de $GL(V)$ dont la famille $\mathfrak{u}_r(\Lambda) := 1 + \mathfrak{a}_r(\Lambda)$ pour $r > 0$ est une filtration par des pro-p-sous-groupes ouverts normaux. Si $x \in B(\mathcal{G}, F)$ est le point correspondant à Λ, on a $\mathfrak{u}_0(\Lambda) = G_x$ et $\mathfrak{u}_{0+}(\Lambda) = G_x^+$, et d'après [9, Appendice A], la filtration $G_{x,r} := \mathfrak{u}_r(\Lambda)$, $r \geqslant 0$ est celle de Moy et Prasad.

Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ est le sous-groupe de Levi correspondant à une décomposition $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$, le "sous-immeuble" $B(\mathcal{M}, F)$ de $B(\mathcal{G}, F)$ s'identifie au sous-ensemble des fonctions réseaux décomposées par M au sens où pour tout nombre réel r, on a $\Lambda(r) = \bigoplus_{i\in I} \Lambda(r)\cap V_i$. Soit x le point de $B(\mathcal{M}, F)$ associé à une telle fonction réseau, alors l'ensemble $x + a_M$ est l'ensemble des fonctions réseau de la forme $\bigoplus \Lambda_i[t_i]$ où les t_i sont des nombres réels.

Nous dirons que Λ est rationnelle si ses sauts sont dans $\mathbb{Q}v_F \subset \mathbb{R}$. Il existe alors un plus petit entier positif $e = e(\Lambda)$ tel que la fonction $\widetilde{\Lambda} : r \mapsto \Lambda(er/v_F)$ soit une suite de réseaux au sens de Bushnell-Kutzko [15, 2.1] La période de $\widetilde{\Lambda}$ est justement $e(\Lambda)$. Réciproquement, une suite de réseaux détermine une unique fonction réseau ; il suffit de rendre la période égale à v_F.

7.2 *Strates et caractères semi-simples* : Soit V un espace vectoriel sur F et $A = End_F(V)$. Une strate dans V est un quadruplet $[\Lambda, n, r, \gamma]$ où Λ est une fonction réseau, n et r des nombres réels positifs tels que $r \leqslant n$, et γ un élément de $\mathfrak{a}_{-n}(\Lambda)$. On définit l'équivalence de telles strates comme dans le cas des suites de réseaux considéré par Bushnell et Kutzko. D'ailleurs, lorsque Λ est rationnelle et $n \in \frac{v_F}{e(\Lambda)}\mathbb{N}$, seul cas que l'on considèrera ici, le quadruplet $[\widetilde{\Lambda}, \frac{e(\Lambda)}{v_F}n, \frac{e(\Lambda)}{v_F}r, \gamma]$ est une honnête strate au sens de [14, 3.1]. On dira alors que $[\Lambda, n, r, \gamma]$ est fondamentale, simple, semi-simple si $[\widetilde{\Lambda}, \frac{e(\Lambda)}{v_F}n, \frac{e(\Lambda)}{v_F}r, \gamma]$ l'est, au sens de [14, Ch. 1] ou [26, Sec. 1].

À toute strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ simple, resp. semi-simple, Bushnell et Kutzko [15, Ch. 5], resp. Stevens [26, Sec. 3], associent deux sous-ordres $\mathfrak{j}(\Lambda, \beta) \supseteq \mathfrak{h}(\Lambda, \beta)$ de $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$, et un ensemble fini de caractères dits *simples*, resp. *semi-simples*, du sous-groupe $H^+(\Lambda, \beta) := \mathfrak{h}(\Lambda, \beta) \cap \mathfrak{u}_{0+}(\Lambda)$ de $J(\Lambda, \beta) := \mathfrak{j}(\Lambda, \beta) \cap \mathfrak{u}_0(\Lambda)$.

Comme le groupe $H^+(\Lambda, \beta)$ est un pro-p-groupe, les caractères simples ou semi-simples sont à valeurs dans l'anneau $\mathbb{Z}_{p-cycl}$ des entiers de l'extension p^∞-cyclotomique de $\mathbb{Q}$. Rappelons aussi que leur définition dépend du choix d'un caractère $\psi : F/\mathfrak{P}_F \longrightarrow \mathbb{Z}_{p-cycl}^\times$.

Proposition 7.3 *Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple et $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ une paire de sous-groupes paraboliques opposés de $\mathcal{G} = \mathcal{GL}(V)$ de composante de Levi commune $\mathcal{M}$. Supposons que M contienne le groupe $F[\beta]^\times$ et que $B(\mathcal{M}, F)$ contienne le point x de $B(\mathcal{G}, F)$ associé à Λ. Soit $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$, θ_M sa restriction à $H^+(\Lambda, \beta) \cap M$ et ε_{θ_M} l'idempotent de RM_x associé, où $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$. On a*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M} \in RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M}.$$

La preuve de cette proposition sera donnée en 7.6. Partons maintenant d'une paire opposée $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ dans $\mathcal{G}$ et notons $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ la décomposition de V associée à leur composante de Levi commune $\mathcal{M}$. Donnons-nous pour chaque i une strate semi-simple $[\Lambda_i, n_i, 0, \beta_i]$ dans $End_F(V_i)$ et un caractère semi-simple $\theta_i \in \mathcal{C}(\Lambda_i, 0, \beta_i)$. La collection des Λ_i correspond à un point de $B(\mathcal{M}, F)$ et la collection des caractères simples nous fournit un idempotent $\varepsilon \in RM_x$ que nous qualifierons de *semi-simple*. Nous prouverons la proposition suivante en 7.11.

Proposition 7.4 *Soit $\Lambda := \bigoplus_{i\in I} \Lambda_i$. Il existe une strate semisimple $[\Lambda, n, 0, \beta]$ avec $F[\beta]^\times \subset M$ et un caractère semi-simple $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ tel que $\varepsilon_{\theta_M} = \varepsilon$.*

En appliquant ce résultat aux collections translatées $\Lambda_i[t_i]$, avec $t_i \in \mathbb{Q}$, on en déduit que l'idempotent ε est P-bon au sens de 3.8. Enfin, la proposition suivante sera prouvée en même temps que son analogue pour les groupes classiques 8.5 au paragraphe 8.11.

Proposition 7.5 *(Stevens, Bushnell-Kutzko) La famille des idempotents semi-simples engendre la catégorie $Mod_R(M)$, où $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$.*

Avant de prouver ces trois propositions, expliquons comment descendre ces résultats à $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Remarquons que le groupe $\Gamma_p := Gal(\mathbb{Q}_{p-cycl}|\mathbb{Q})$ agit sur les caractères $\psi : F/\mathfrak{P}_F \longrightarrow \mathbb{Z}_{p-cycl}^{\times}$. Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple, on peut donc avec des notations évidentes considérer l'ensemble

$$\overline{\mathcal{C}}(\Lambda, 0, \beta) := \bigcup_{\gamma \in \Gamma_p} \mathcal{C}_{\psi^\gamma}(\Lambda, 0, \beta).$$

Cet ensemble est inclus dans l'ensembles des caractères de $H^+(\Lambda, \beta)$ qui sont triviaux sur $\mathfrak{u}_n(\Lambda)$, donc il est fini. Alors la somme

$$\varepsilon_{\Lambda,\beta} := \sum_{\theta \in \overline{\mathcal{C}}(\Lambda,0,\beta)} \varepsilon_\theta$$

est un idempotent de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G_x$ (où x correspond à Λ). La proposition 7.5 implique que la famille des idempotents de la forme $\times_{i\in I}\varepsilon_{\Lambda_i,\beta_i} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M_x$ engendre $Mod_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(M)$, et les propositions 7.3 et 7.4 assurent que ces idempotents sont P-bons au sens de 3.8.

7.6 *Preuve de la proposition 7.3 :* Nous voulons appliquer les énoncés “généraux” 5.7 et 5.10. Notons pour cela $A(\beta) := End_{F[\beta]}(V) \subset A = End_F(V)$, et $\mathfrak{a}_r(\Lambda, \beta) := A(\beta) \cap \mathfrak{a}_r(\Lambda)$ pour $r \in \mathbb{R}$. On sait alors que $\mathfrak{a}_0(\Lambda, \beta)$ est un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans la F-algèbre semi-simple $A(\beta)$ et que $\mathfrak{a}_{0+}(\Lambda, \beta)$ est son radical de Jacobson. De même notons $\mathfrak{j}_r(\Lambda, \beta) := \mathfrak{j}(\Lambda, \beta) \cap \mathfrak{a}_r(\Lambda)$. On sait que $\mathfrak{j}_{0+}(\Lambda, \beta)$ est le radical de Jacobson de $\mathfrak{j}(\Lambda, \beta)$ et on a par définition l'égalité $\mathfrak{j}(\Lambda, \beta) = \mathfrak{j}_{0+}(\Lambda, \beta) + \mathfrak{a}_0(\Lambda, \beta)$.

Lemme 7.7 *Soit B une $\mathcal{O}_F$-algèbre finie et plate. Nous notons $B_{k_F} := B \otimes k_F$ sa réduction modulo ϖ_F et $rad(B)$ son radical.*

- *i) Le foncteur sur les $\mathcal{O}_F$-algèbres qui à R associe $(B \otimes R)^\times$ est représentable par un schéma en groupes affine $\mathcal{B}^\times$ lisse et à fibres connexes sur $\mathcal{O}_F$.*
- *ii) Le radical unipotent ${}^u\mathcal{B}^\times_{k_F}$ de la fibre spéciale de $\mathcal{B}^\times$ représente le foncteur sur les k_F-algèbres qui à R associe le sous-groupe $1 + rad(B_{k_F}) \otimes R$ de $(B_{k_F} \otimes R)^\times$.*
- *iii) Si C est une sous-$\mathcal{O}_F$-algèbre de B qui est facteur direct en tant que $\mathcal{O}_F$-module, alors le morphisme $\mathcal{C}^\times \longrightarrow \mathcal{B}^\times$ induit par l'inclusion $C \subset B$ est une immersion fermée.*

Preuve : Prouvons i). Posons $B^* := Hom_{\mathcal{O}_F}(B, \mathcal{O}_F)$. Le foncteur $R \mapsto (B \otimes_{\mathcal{O}_F} R)$ est représenté par le spectre de l'algèbre de polynômes $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_F}(B^*)$. Soit $\delta_B \in \mathrm{Sym}^{r_B}_{\mathcal{O}_F}(B^*)$ la fonction polynômiale sur B, de degré le rang r_B de B sur $\mathcal{O}_F$, qui à b associe le déterminant de la multiplication à gauche par b dans B. Alors le foncteur envisagé est représenté par le spectre de l'algèbre $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_F}(B^*)_{\delta_B}$ localisée de $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_F}(B^*)$ en δ_B. Il s'agit d'un ouvert d'un espace affine, qui est donc lisse et connexe. Comme cette construction commute à tout changement de base, ses fibres sont aussi connexes. Prouvons alors iii) : par hypothèse, l'application $B^* \xrightarrow{\rho} C^*$ duale de l'inclusion est surjective. Il en est donc de même de l'application $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_F}(B^*) \xrightarrow{\mathrm{Sym}(\rho)} \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_F}(C^*)$ sur les algèbres de fonctions. Comme l'inclusion $C \hookrightarrow B$ est scindée sur $\mathcal{O}_F$, la fonction δ_C divise la fonction $\rho(\delta_B)$ dans l'anneau $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_F}(C^*)$. Si l'on choisit un épimorphisme de C-modules (à gauche) $C^n \longrightarrow B$, alors comme celui-ci est scindé sur $\mathcal{O}_F$, on en déduit que $\rho(\delta_B)$ divise δ_C^n. Il s'ensuit que la surjection $\mathrm{Sym}(\rho)$ se restreint en une surjection $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_F}(B^*)_{\delta_B} \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_F}(C^*)_{\delta_C}$, ce qui prouve iii).

Prouvons ii). Notons que le sous-ensemble $1 + \mathrm{rad}(B_{k_F}) \otimes R$ est bien un sous-groupe car $\mathrm{rad}(B_{k_F})$ est un idéal nilpotent de B_{k_F}. Le foncteur envisagé est représentable par l'espace affine sur k_F associé à $\mathrm{rad}(B_{k_F})$. Il admet une filtration décroissante et finie par les foncteurs $R \mapsto (1+\mathrm{rad}(B_{k_F})^i \otimes R)$, $i \in \mathbb{N}$, dont les quotients successifs sont des groupes vectoriels. C'est donc un sous-groupe algébrique unipotent et connexe de $\mathcal{B}_{k_F}^{\times}$, qui par ailleurs est clairement distingué. Il est donc contenu dans le radical unipotent de $\mathcal{B}_{k_F}^{\times}$. De plus le groupe algébrique quotient est le groupe algébrique $\overline{\mathcal{B}}^{\times}$ associé à la k_F-algèbre semisimple $\overline{B} := B_{k_F}/\mathrm{rad}(B_{k_F})$. Comme k_F est parfait, le centre de cette dernière est une extension séparable de k_F et le groupe algébrique qui lui est associé est donc réductif. $\square$

Nous noterons $\mathcal{G}_x$, resp. $\mathcal{G}_{\beta,x}$, le $\mathcal{O}_F$-schéma en groupes associé à $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$, resp. $\mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta)$ et $\mathcal{J}$ celui associé à $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$. Les relations de contenance de ces ordres induisent d'une part un morphisme $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{G}_x$ qui sur la fibre générique induit l'identité de $\mathcal{GL}(V)$ et d'autre part un morphisme $\psi : \mathcal{G}_{\beta,x} \longrightarrow \mathcal{J}$. Comme $\mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta) = A(\beta) \cap \mathfrak{j}(\Lambda,\beta) = A(\beta) \cap \mathfrak{a}_0(\Lambda)$, les plongements $\mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta) \hookrightarrow \mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$ et $\mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta) \hookrightarrow \mathfrak{a}(\Lambda)$ sont scindés sur $\mathcal{O}_F$, donc les morphismes ψ et $\varphi \circ \psi$ sont des immersions fermées, en vertu du point iii) du lemme précédent.

Remarque 7.8 *Notons les propriétés suivantes de ces morphismes, pour référence ultérieure :*

i) On a $\varphi_{k_F}^{-1}({}^u\mathcal{G}_{x,k_F}) = {}^u\mathcal{J}_{k_F}$ (ou, de manière équivalente, $\mathcal{J}^{\dagger}(\mathcal{O}_F) = J^+(\Lambda,\beta) := G_x^+ \cap J(\Lambda,\beta)$).

ii) La fibre spéciale de ψ induit un isomorphisme des quotients réductifs ${}^q\mathcal{G}_{\beta,x,k_F} \xrightarrow{\sim} {}^q\mathcal{J}_{k_F}$.

En effet, compte tenu du point ii) du lemme précédent, la première assertion découle du fait que $\mathfrak{a}_{0+}(\Lambda) \cap \mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$ est le radical de Jacobson de $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$ et la deuxième découle des égalités $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta) = \mathfrak{j}_{0+}(\Lambda,\beta) + \mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta)$ et $\mathfrak{a}_{0+}(\Lambda,\beta) = \mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta) \cap \mathfrak{j}_{0+}(\Lambda,\beta)$.

Décrivons maintenant les objets admissibles au sens de 5.1 relativement au modèle $\mathcal{J}$ de $\mathcal{G}$.

Lemme 7.9 *Si $\mathcal{L}$ est un sous-groupe de Levi de $\mathcal{G}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{L}$ est $\mathcal{J}$-admissible au sens de 5.1.

ii) Le tore déployé maximal du centre de $\mathcal{L}$ est $\mathcal{J}$-admissible.

iii) $x \in B(\mathcal{L},F)$ et L contient un conjugué sous $J(\Lambda,\beta)$ du groupe $F[\beta]^{\times}$.

Il s'ensuit qu'une paire de sous-groupes paraboliques opposés de $\mathcal{G}$ est $\mathcal{J}$-admissible si et seulement si sa composante de Levi commune l'est.

Preuve : Prouvons d'abord *iii)* $\Rightarrow$ *ii)*. Fixons un sous-groupe de Levi $\mathcal{L}$ comme dans le point iii) ; en vertu de l'hypothèse $x \in B(\mathcal{L},F)$ et de la remarque 6.1, l'adhérence schématique $\mathcal{Z}(\mathcal{L})_x$ dans $\mathcal{G}_x$ du centre $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ est un tore. Par ailleurs on peut supposer, quitte à conjuguer par un élément de $J(\Lambda,\beta)$, que $L \supset F[\beta]^{\times}$. Dans ce cas $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ est inclus dans le centralisateur de β, *i.e.* le sous-F-groupe algébrique $\mathcal{G}_\beta$ de $\mathcal{G}$ des éléments inversibles de la F-algèbre $A(\beta)$. Notons que $\mathcal{G}_{\beta,x}$ est un modèle de $\mathcal{G}_\beta$ qui s'identifie, via l'immersion fermée $\varphi \circ \psi$, à l'adhérence schématique de $\mathcal{G}_\beta$ dans $\mathcal{G}_x$. Il s'ensuit que l'immersion $\mathcal{Z}(\mathcal{L})_x \hookrightarrow \mathcal{G}_x$ se factorise par $\mathcal{G}_{\beta,x}$. En d'autres termes, l'adhérence de $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ dans $\mathcal{G}_{\beta,x}$ est un tore. Mais puisque ψ est une immersion fermée, on en déduit que son adhérence dans $\mathcal{J}$ aussi est un tore.

Comme l'implication *ii)* $\rightarrow$ *i)* est tautologique, il ne reste qu'à prouver *i)* $\Rightarrow$ *iii)*. Partons donc d'un sous-groupe de Levi $\mathcal{J}$-admissible $\mathcal{L}$ de $\mathcal{G}$. D'après 5.9 et grâce au morphisme φ, il est aussi $\mathcal{G}_x$-admissible, donc par la remarque 6.1, on a $x \in B(\mathcal{L},F)$. Choisissons un tore déployé $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$ dont le centralisateur est $\mathcal{L}$ et qui se prolonge en un tore $\mathcal{T}_x$ de $\mathcal{J}$. Comme l'immersion fermée $\mathcal{G}_{\beta,x,k_F} \longrightarrow \mathcal{J}_{k_F}$ induit un isomorphisme des quotients réductifs, *c.f.* remarque 7.8, il résulte de [17, Exp. XVII Th. 5.1.1 i)a)] que $\mathcal{G}_{\beta,x,k_F}$ contient un tore $\mathcal{T}'_{x,k_F}$ relevant l'image de $\mathcal{T}_{x,k_F}$ dans son quotient réductif. Mais alors, d'après [17, Exp. XVII Th. 5.6.1 c)], les tores $\mathcal{T}'_{x,k_F}$ et $\mathcal{T}_{x,k_F}$ de $\mathcal{J}_{k_F}$ sont conjugués par un élément de $\mathcal{J}(k_F)$. Par [17, Exp IX, Thm 3.6bis], il s'ensuit que $\mathcal{T}_x$ est conjugué par un élément de $j \in \mathcal{J}(\mathcal{O}_F) = J(\Lambda,\beta)$ à un sous-tore de $\mathcal{G}_{\beta,x}$. Par conséquent, ${}^j\mathcal{T}$ est un F-tore de $\mathcal{G}_\beta$, donc centralise le centre de $\mathcal{G}_\beta$, lequel se trouve ainsi contenu dans ${}^j\mathcal{L}$. Il s'ensuit que L contient le conjugué par j^{-1} de $F[\beta]^{\times}$.

La dernière assertion résulte de la remarque finale du paragraphe 5.1. $\square$

Rappelons maintenant les résultats suivants de la théorie des types :

Fait 7.10 *(Stevens) Avec les hypothèses et notations de la proposition 7.3,*

i) $J(\Lambda,\beta)$ *normalise* $H^+(\Lambda,\beta)$ *et* θ.

ii) $H^+(\Lambda,\beta)$ *a la décomposition d'Iwahori par rapport à* $P,\overline{P}$ *et les restrictions de tout caractère semi-simple dans* $\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$ *à* $H^+\cap U$, $H^+\cap\overline{U}$ *sont triviales.*

iii) $[J^+(\Lambda,\beta),J^+(\Lambda,\beta)]\subseteq H^+(\Lambda,\beta)\subseteq J^+(\Lambda,\beta)$ *et l'application* $(u,\overline{u})\mapsto\theta([u,\overline{u}])$ *induit un accouplement non-dégénéré*

$$(J^+\cap U)/(H^+\cap U)\times(J^+\cap\overline{U})/(H^+\cap\overline{U})\longrightarrow R^\times.$$

iv) Écrivons $V=\bigoplus V_i$ *la décomposition associée à* M *et* $\beta=\oplus_i\beta_i$ *la décomposition de* β *correspondante. Alors* $H^+(\Lambda,\beta)\cap M=\prod_i H^+(\Lambda_i,\beta_i)$ *et la restriction de tout caractère semi-simple dans* $\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$ *à* $H^+\cap M$ *est un produit de caractères semi-simples dans* $\mathcal{C}(\Lambda_i,0,\beta_i)$.

v) L'ensemble d'entrelacement $Int_{G_x}(\theta)$ *de* θ *dans* G_x *est* $J(\Lambda,\beta)$.

Preuve : (références et commentaires) le premier point est prouvé en [26, Coro 3.12 (iii)] et [26, Lemma 3.15.(iii)], et le dernier point découle de [26, Thm 3.22] (qui calcule l'entrelacement dans tout G). Le point iv) est une conséquence à peu près directe de la définition [26, 3.13] d'un caractère semi-simple et de la proposition 3.4 de [26]. La décomposition d'Iwahori du groupe H^+ et des caractères semisimples dans le point ii) découle de leur définition inductive, suivant le même argument que [14, 7.1.19] (qui est le cas simple), [15, Prop 5.2.ii)] ou [26, Lemma 3.15 i)]. Enfin le point iii) se déduit de [26, Prop. 3.24] et du point ii) suivant la même observation que [14, 7.2.3 (i)].

□

Terminons maintenant la preuve de la proposition 7.3. Fixons une paire de sous-groupes paraboliques opposés $\mathcal{J}$-admissible minimale $(\mathcal{Q},\overline{\mathcal{Q}})$ de $\mathcal{G}$, de composante de Levi commune $\mathcal{L}$; par 7.9 on a $x\in B(\mathcal{L},F)$ et on peut supposer, quitte à conjuguer par un élément de $J(\Lambda,\beta)$, que $F[\beta]^\times\subset\mathcal{L}$. On peut donc appliquer les points i), ii) et iii) ci-dessus à Q à la place de P, et obtenir grâce à 5.7 que tout idempotent de $RJ(\Lambda,\beta)$ associé à un caractère semi-simple est "essentiellement de niveau zéro", au sens de 5.6. D'après le point iv) ci-dessus, l'idempotent ε_{θ_M} de $R(J(\Lambda,\beta)\cap M)$ est donc essentiellement de niveau 0 pour le modèle lisse de $\mathcal{M}$ obtenu comme adhérence schématique de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{J}$. Mais d'après le point ii) à nouveau, le point v), et le point i) de la remarque 7.8, les hypothèses du corollaire 5.10 sont satisfaites pour le morphisme $\varphi:\mathcal{J}\longrightarrow\mathcal{G}_x$ et pour $\widetilde{\varepsilon}'=\varepsilon_\theta$. Il ne reste donc plus qu'à appliquer ce corollaire.

7.11 *Preuve de la proposition 7.4 :* Ce résultat ne figure explicitement ni dans [26], ni dans [15], mais découle pourtant des techniques développées dans ces deux articles. La discussion qui suit entend en convaincre le lecteur déjà familier de ces techniques.

Introduisons la famille de sous-groupes $H^r(\Lambda,\beta):=\mathfrak{h}(\Lambda,\beta)\cap\mathfrak{u}_r(\Lambda)$ pour $r\in\mathbb{R}_+$. Cette famille est décroissante et ses sauts appartiennent à $\frac{1}{e(\Lambda)}\mathbb{N}$. Pour $r\in\mathbb{R}$, nous conviendrons de noter $r+$, resp. $r-$ le plus petit saut strictement plus grand que r, resp. le plus grand saut strictement plus petit que r. Lorsque r est inférieur à l'entier $k_0(\beta,\Lambda)=k_0(\beta)$ défini en [26, (3.6)], Stevens définit [26, 3.13] un ensemble de caractères complexes $\mathcal{C}(\Lambda,r,\beta)$ du groupe $H^{r+}(\Lambda,\beta)$, pour $r\in\mathbb{R}_+$. D'après [26], Rk 3.14.ii) et Lemma 3.15.i), les applications de restriction $\mathcal{C}(\Lambda,r,\beta)\longrightarrow\mathcal{C}(\Lambda,r',\beta)$ pour $0\leqslant r\leqslant r'<k_0(\beta)$ sont surjectives. On peut donc prolonger la notation à tout $r\in\mathbb{R}_+$ en définissant $\mathcal{C}(\Lambda,r,\beta)$ comme l'ensemble des restrictions à $H^{r+}(\Lambda,\beta)$ des caractères dans $\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$. En particulier, pour $r\geqslant\frac{n}{2}$, on a $H^{r+}(\Lambda,\beta)=\mathfrak{u}_{r+}(\Lambda)$ et $\mathcal{C}(\Lambda,r,\beta)=\{\psi_{\beta|H^{r+}}\}$, où $\psi_\beta:\ \mathfrak{u}_{\frac{n}{2}+}(\Lambda)\longrightarrow\mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]^\times$ est le caractère $x\mapsto\psi(\mathrm{Tr}(\beta(x-1)))$ associé à β et ψ. De plus, par [26, 3.14.(ii)], on a $\mathcal{C}(\Lambda,r,\beta)=\mathcal{C}(\Lambda,r,\gamma)$ pour toute strate $[\Lambda,n,r,\gamma]$ semi-simple, équivalente à $[\Lambda,n,r,\beta]$ et telle que $F[\gamma]^\times\subset M(\beta)$ où $M(\beta)$ est le sous-groupe de Levi de G associé à la décomposition isotypique de V comme module sur l'algèbre semi-simple $F[\beta]\subset A$.

Revenons à l'énoncé de 7.4. Posons $n:=\max(n_{\beta_i})_{i\in I}$ et notons M le sous-groupe de Levi associé à la décomposition $\Lambda=\bigoplus_{i\in I}\Lambda_i$. La strate semi-simple $\prod_i[\Lambda_i,n_{\beta_i},0,\beta_i]$ pour M découpe un sous-groupe de Levi $M(\beta) \subset M$ dont nous noterons $V = \bigoplus_{j\in J_\beta} V_j$ la décomposition associée. On a donc une application surjective $J_\beta \longrightarrow I$ qui à j associe l'unique $i(j)$ tel que $V_j \subset \Lambda_{i(j)} \otimes F$, et des décompositions $\Lambda_i = \bigoplus_{j\mapsto i} \Lambda_i \cap V_j$.

La proposition 7.4 que nous voulons démontrer est le cas particulier $t = 0$ de l'énoncé suivant :

Lemme 7.12 *Pour tout nombre réel $0 \leqslant t \leqslant n$, il existe une strate semi-simple $[\Lambda, n, t, \gamma^t]$ avec $F[\gamma^t]^\times \subset M(\beta) \subset M(\gamma^t)$, et un caractère semi-simple $\theta^t \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \gamma^t)$ tels que*

- $H^{t+}(\Lambda, \gamma^t) \cap M = \prod_i H^{t+}(\Lambda_i, \beta_i)$,
- $\theta^t_{|H^{t+}(\Lambda,\gamma^t)\cap M} = \prod_i \theta_{i|H^{t+}(\Lambda_i,\beta_i)}$

Preuve : Il suffit bien sûr de prouver cet énoncé lorsque t est un saut de la filtration des $H^r(\Lambda, \beta)$, $0 \leqslant r \leqslant n$. Le premier saut dans l'ordre décroissant est $t = n$, pour lequel il suffit de prendre la strate nulle $[\Lambda, n, n, \gamma^n = 0]$ et le caractère trivial de $H^+(\Lambda, \gamma^n) = \mathfrak{u}_{0+}(\Lambda)$.

Supposons donc l'énoncé connu pour t et déduisons-le pour $t-$. Écrivons $\gamma^t = \bigoplus_{i\in I} \gamma^t_i$ la décomposition de γ^t comme élément de M. Comme en 7.10 iv), pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ on a $H^{r+}(\Lambda, \gamma^t)\cap M = \prod_i H^{r+}(\Lambda_i, \gamma^t_i)$ et si $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, r, \gamma^t)$, alors $\theta_{|H^{r+}(\Lambda,\gamma^t)\cap M}$ est un produit sur i de caractères semi-simples dans $\mathcal{C}(\Lambda_i, r, \gamma^t_i)$. On déduit alors du lemme 7.13 ci-dessous et de l'hypothèse de récurrence que $H^t(\Lambda, \gamma^t)\cap M = \prod_i H^t(\Lambda_i, \beta_i)$. Il existe donc un élément $b = \bigoplus_i b_i \in \bigoplus_i \mathfrak{a}_{-t}(\Lambda_i) \subset \mathfrak{a}_{-t}(\Lambda)$ tel que

$$\theta^t_{|H^t(\Lambda,\gamma^t)\cap M}.\psi_{b|H^t(\Lambda,\gamma^t)\cap M} = \prod_{i\in I} \theta_{i|H^t(\Lambda_i,\beta_i)},$$

où ψ_b est le caractère de $\mathfrak{u}_t(\Lambda)/\mathfrak{u}_{t+}(\Lambda)$ associé à ψ et b. En fait, par décomposition d'Iwahori 7.10 ii) des caractères semi-simples, on peut supposer que chaque b_i se décompose en $b_i = \bigoplus_{j\mapsto i} b_j$ avec $b_j \in \mathfrak{a}_{-t}(\Lambda_i \cap V_j)$ et $j \in J_\beta$, de sorte que pour tout $j \in J_\beta$, on a

$$\theta^t_{|H^t(\Lambda_j,\gamma^t_j)}.\psi_{b_j|H^t(\Lambda_j,\gamma^t_j)} = \theta_{i(j)|H^t(\Lambda_j,\beta_j)}$$

où les deux θ ainsi restreints sont des caractères *simples*.

Soit alors $V = \bigoplus_{k\in K_t} V_k$ la décomposition déterminée par l'algèbre semi-simple $F[\gamma^t]$ (correspondant au Levi $M(\gamma^t)$). Puisque $M(\gamma^t) \supset M(\beta)$, on a une application surjective $J_\beta \longrightarrow K_t$ qui à j associe l'unique $k(j)$ tel que $V_j \subset V_{k(j)}$. On a aussi la décomposition en produit de corps $F[\gamma^t] \simeq \prod_{k\in K_t} E_k$. Choisissons alors pour chaque $k \in K_t$ une corestriction modérée $s_k : End_F(V_k) \longrightarrow End_{E_k}(V_k)$. Puisque $F[\gamma^t]^\times \subset M(\beta)$, celle-ci induit par restriction une corestriction modérée $s_j : End_F(V_j) \longrightarrow End_{E_k}(V_j)$ pour tout j tel que $k = k(j)$. D'après [15, 4.6], la $E_{k(j)}$-strate $[\Lambda_j, t, t-, s_j(b_j)]$ est équivalente à une strate simple, éventuellement nulle. On en déduit que pour tout $k \in K_t$, la E_k-strate $[\Lambda_k, t, t-, s_k(b_k)]$, où $\Lambda_k = \bigoplus_{j\mapsto k} \Lambda_j$ et $b_k := \bigoplus_{j\mapsto k} b_j$ est équivalente à une strate semi-simple (voir le commentaire de [26] qui suit la remarque 3.3.iii)). Par [26, 3.5], il s'ensuit que la strate $[\Lambda, n, t-, \gamma^t + b]$ est équivalente à une strate semi-simple, disons $[\Lambda, n, t-, \gamma^{t-}]$. En outre, comme dans la preuve de [26, 3.4], on peut choisit γ^{t-} tel que $F[\gamma^{t-}]^\times \subset M(\beta)$. D'après [26, Rk 3.14.(i)], on a $H^t(\Lambda, \gamma^{t-}) = H^t(\Lambda, \gamma^t)$ et $\mathcal{C}(\Lambda, t-, \gamma^{t-}) = \psi_b.\mathcal{C}(\Lambda, t-, \gamma^t)$. Comme l'application de restriction des caractères induit une surjection $\mathcal{C}(\Lambda, 0, \gamma^{t-}) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda, t-, \gamma^{t-})$ on peut choisir un $\theta^{t-} \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \gamma^{t-})$ tel que

$$\theta^{t-}_{|H^t(\Lambda,\gamma^{t-})} = (\psi_b\theta^t)_{|H^t(\Lambda,\gamma^t)}.$$

Ainsi la strate semisimple $[\Lambda, n, t-, \gamma^{t-}]$ et le caractère θ^{t-} satisfont aux requêtes du lemme pour le nombre réel $t-$. Comme il y a un nombre fini de sauts dans l'intervalle $[0, n]$, ceci achève la preuve du lemme. $\square$

Nous avons utilisé dans cette preuve le lemme suivant qui est une généralisation au cas semi-simple de [14, 3.5.9].

Lemme 7.13 *Soient $[\Lambda, n, 0, \beta_i]$, $i = 1, 2$, deux strates semi-simples et $r > 0$ telles que $H^{r+}(\Lambda, \beta_1) = H^{r+}(\Lambda, \beta_2)$, et $\mathcal{C}(\Lambda, r, \beta_1) \cap \mathcal{C}(\Lambda, r, \beta_2) \neq \emptyset$. Alors $H^r(\Lambda, \beta_1) = H^r(\Lambda, \beta_2)$.*

Preuve : Choisissons, comme nous le permet la preuve de la proposition 3.4 de [26], deux strates $[\Lambda, n, 2r, \gamma_i]$ semi-simples avec $\gamma_i \in M(\beta_i)$, et respectivement équivalentes à $[\Lambda, n, 2r, \beta_i]$. On sait alors que pour tout $t \geqslant r$, on a $\mathfrak{h}^t(\Lambda, \beta_i) = \mathfrak{h}^t(\Lambda, \gamma_i)$ et $\mathcal{C}(\Lambda, 2t, \beta_i) = \mathcal{C}(\Lambda, 2t, \gamma_i)$. En particulier, puisque pour tous $t \geqslant t'$ l'application de restriction $\mathcal{C}(\Lambda, t', \beta_i) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda, t, \beta_i)$ est surjective, on a $\mathcal{C}(\Lambda, 2r, \gamma_1) \cap \mathcal{C}(\Lambda, 2r, \gamma_2) \neq \emptyset$. Soit θ un élément de cette intersection, le théorème 3.22 de [26] calcule l'ensemble d'entrelacement de θ dans G et nous fournit l'égalité

$$\Gamma_{2r}(\Lambda, \gamma_1) G_{\gamma_1} \Gamma_{2r}(\Lambda, \gamma_1) = \Gamma_{2r}(\Lambda, \gamma_2) G_{\gamma_2} \Gamma_{2r}(\Lambda, \gamma_2)$$

avec les notations de *loc. cit.* En prenant l'intersection avec $\mathfrak{a}_r(\Lambda)$ et en prenant la clôture additive, on obtient l'indépendance de i de l'ensemble suivant :

$$(\mathfrak{a}_r(\Lambda) \cap A_{\gamma_i}) + (\mathfrak{a}_r(\Lambda) \cap A_{\gamma_i})(\mathfrak{n}_{-2r}(\Lambda, \gamma_i) \cap \mathfrak{a}_{r_i - 2r}(\Lambda)) + (\mathfrak{a}_r(\Lambda) \cap A_{\gamma_i}) \mathfrak{j}^{\frac{r_i}{2}}(\Lambda, \gamma_i) \tag{7.14}$$

où on a posé $r_i := k_0(\gamma_i, \Lambda)$ (*cf.* [26, (3.6)]). Soit $r'_i := 2r - \frac{r_i}{2} < r$. On a

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_{r'_i}(\Lambda) \cap A_{\gamma_i})(\mathfrak{n}_{-2r}(\Lambda, \gamma_i) \cap \mathfrak{a}_{r_i - 2r}(\Lambda)) &\subset (\mathfrak{n}_{-\frac{r_i}{2}}(\Lambda, \gamma_i) \cap \mathfrak{a}_{\frac{r_i}{2}}(\Lambda)) \\ &\subset \mathfrak{j}^{\frac{r_i}{2}}(\Lambda, \gamma_i)\end{aligned}$$

par [26, 3.10.i)], donc

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_r(\Lambda) \cap A_{\gamma_i})(\mathfrak{n}_{-2r}(\Lambda, \gamma_i) \cap \mathfrak{a}_{r_i - 2r}(\Lambda)) &\subset (\mathfrak{a}_{r - r'_i}(\Lambda) \cap A_{\gamma_i}) \mathfrak{j}^{\frac{r_i}{2}}(\Lambda, \gamma_i) \\ &\subset \mathfrak{h}^{\frac{r_i}{2}+}(\Lambda, \gamma_i) \subset \mathfrak{h}^{r+}(\Lambda, \gamma_i)\end{aligned}$$

par [26, 3.11.i)]. De plus, par [26, 3.11.ii)], on a $(\mathfrak{a}_r(\Lambda) \cap A_{\gamma_i}) \mathfrak{j}^{\frac{r_i}{2}}(\Lambda, \gamma_i) \subset \mathfrak{h}^{r+}(\Lambda, \gamma_i)$. Ajoutons alors à l'ensemble 7.14 le groupe $\mathfrak{h}^{r+}(\Lambda, \gamma_i)$ qui par hypothèse est aussi indépendant de i. On obtient que l'ensemble $(\mathfrak{a}_r(\Lambda) \cap A_{\gamma_i}) + \mathfrak{h}^{r+}(\Lambda, \gamma_i)$ est indépendant de i. Mais celui-ci n'est autre que $\mathfrak{h}^r(\Lambda, \gamma_i)$ puisque $r_i > 2r$. ☐

8 Groupes classiques

Nous adoptons les notations de Stevens dans [26]. Cette fois le corps de base, que nous notions K précédemment sera noté F_0 et sera supposé être le corps des points fixes d'une involution $x \mapsto \overline{x}$ sur un corps F de caractéristique résiduelle différente de 2. On n'écarte pas le cas où $F_0 = F$ et l'involution est l'identité. Soit V un F-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire h ε-hermitienne (pour $\varepsilon = \pm 1$) non dégénérée. La F-algèbre A est munie de l'anti-involution “adjoint pour h” qui prolonge l'involution donnée sur F et que nous noterons encore $x \mapsto \overline{x}$. Notons $\widetilde{\mathcal{G}}$ le F-groupe $\mathcal{GL}(V)$; alors cette anti-involution munit le F_0-schéma en groupes $\mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{G}})$ d'une involution σ dont le sous-schéma des points fixes $\mathcal{G}$ s'identifie au F_0-schéma en groupes unitaire, orthogonal ou symplectique associé à (V, h).

8.1 *Immeuble et fonctions réseaux autoduales :* La référence ici est [10]. Pour un $\mathcal{O}_F$-réseau L de V, on note $L^\# := \{v \in V,\ h(v, L) \subset \mathfrak{P}_F\}$, et pour une fonction réseau $\Lambda \in \mathcal{FR}_F(V)$, on note $\Lambda^\#$ la fontion réseau $r \mapsto \Lambda((-r)+)^\#$. La bijection naturelle $B(\mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{G}}), F_0) = B(\widetilde{\mathcal{G}}, F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{FR}_F(V)$ est compatible avec les involutions σ sur $B(\mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{G}}), F_0)$ et $\#$ sur $\mathcal{FR}_F(V)$. Par l'hypothèse de caractéristique résiduelle $\neq 2$, elle induit en prenant les invariants une application bijective et G-équivariante $B(\mathcal{G}, F_0) \longrightarrow \mathcal{FR}_F(V)^\#$.

Si $\Lambda \in \mathcal{FR}_F(V)^\#$, on a $\overline{\mathfrak{a}_r(\Lambda)} = \mathfrak{a}_r(\Lambda)$, resp. $\sigma(\mathfrak{u}_r(\Lambda)) = \mathfrak{u}_r(\Lambda)$, pour tout $r \in \mathbb{R}$, resp. $r \in \mathbb{R}_+$. Si $x \in B(\mathcal{G}, F_0)$ correspond à Λ, alors $G_x = G \cap \mathfrak{u}_0(\Lambda) = \mathfrak{u}_0(\Lambda)^\sigma$ et $G_x^+ = G \cap \mathfrak{u}_{0+}(\Lambda) = \mathfrak{u}_{0+}(\Lambda)^\sigma$, et les spécialistes s'accordent à penser que la filtration $(\mathfrak{u}_r(\Lambda)^\sigma)_{r \in \mathbb{R}_+}$ coïncide avec celle de Moy et Prasad $(G_{x,r})_{r \in \mathbb{R}}$ (ce qui ne nous importe guère ici).

Un sous-groupe de Levi $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ correspond à une décomposition h-orthogonale $V = \bigoplus_{i\in I}(V_i \oplus V_{-i}) \bigoplus V_0$ où $h_{|V_0\times V_0}$ est non-dégénérée et pour chaque $i \in I$, V_i est totalement isotrope et $h_{|V_i\times V_{-i}}$ est un accouplement parfait. On a alors $M := \mathcal{M}(F_0) \simeq \prod_{i\in I} Aut_F(V_i) \times Aut_F(V_0)^\sigma$. Le sous-immeuble $B(\mathcal{M}, F_0)$ correspond aux fonctions réseau Λ qui sont décomposées sous la forme $\Lambda = \bigoplus_{i\in I}(\Lambda_i \oplus \Lambda_{-i}) \bigoplus \Lambda_0$ où $\Lambda_0 \in \mathcal{FR}_F(V_0)^\#$ et les $\Lambda_{\pm i} \in \mathcal{FR}_F(V_{\pm i})$ sont telles que $\Lambda_{-i} = \Lambda_i^\#$. Si x est le point correspondant à Λ, alors le sous-espace affine $x + a_M$ de $B(\mathcal{M}, F_0)$ est l'ensemble des Λ' de la forme $\bigoplus_{i\in I}(\Lambda_i[t_i] \oplus \Lambda_i[t_i]^\#) \bigoplus \Lambda_0$ où $t_i \in \mathbb{R}$.

8.2 *Strates semi-simples autoduales* : Une F-strate $[\Lambda, n, r, \gamma]$ dans V est dite autoduale si $\Lambda = \Lambda^\#$ et $\overline{\gamma} = -\gamma$. Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate semi-simple et autoduale. La sous-algèbre $F[\beta] \subset A$ est stable par $x \mapsto \overline{x}$ et l'ensemble de ses idempotents centraux primitifs aussi. On peut donc arranger la décomposition de V associée à β sous la forme $V = \bigoplus_{i\in I_\beta}(V_i \oplus V_{-i}) \bigoplus_{j\in J_\beta} V_j$ où les espaces indexés par $I_\beta \cup J_\beta$ sont deux à deux orthogonaux et pour $i \in I_\beta$, V_i et V_{-i} sont isotropes maximaux dans $V_i \oplus V_{-i}$. Suivant Stevens, la strate semisimple autoduale $[\Lambda, n, r, \beta]$ est dite *gauche* (skew en anglais), si $I_\beta = \emptyset$, c'est-à-dire si β est elliptique.

Dans [26, 3.6], Stevens définit les caractères semi-simples pour G associés à une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$. L'hypothèse gauche n'est pas nécessaire pour cette définition, il suffit de supposer la strate autoduale ; le point est que pour tout $r > 0$, on peut trouver une strate semi-simple *autoduale* $[\Lambda, n, r, \gamma]$ équivalente à $[\Lambda, n, r, \beta]$, avec de plus γ dans le Levi de $GL(V)$ découpé par β (combiner [26, 3.4] et [25, (1.10)]). Il s'ensuit que les ordres $\mathfrak{h}(\Lambda, \beta)$ et $\mathfrak{j}(\Lambda, \beta)$ sont stables par l'involution $x \mapsto \overline{x}$, les groupes $H^{r+}(\Lambda, \beta)$ et $J^{r+}(\Lambda, \beta)$ sont stables par σ, ainsi que les ensembles de caractères semi-simples $\mathcal{C}(\Lambda, r, \beta)$. Un caractère semi-simple de $H^{r+}(\Lambda, \beta)^\sigma$ est alors, par définition, la restriction d'un caractère semi-simple σ-invariant de $H^{r+}(\Lambda, \beta)^\sigma$.

Proposition 8.3 *Soit* $[\Lambda, n, 0, \beta]$ *une strate semi-simple autoduale et* $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ *une paire de sous-groupes paraboliques opposés de* $\mathcal{G}$ *de composante de Levi commune* $\mathcal{M}$. *Supposons que* M *contienne le groupe* $(F[\beta]^\times)^\sigma$ *et que* $B(\mathcal{M}, F_0)$ *contienne le point* x *de* $B(\mathcal{G}, F_0)$ *associé à* Λ. *Soit* $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)^\sigma$, θ_M *sa restriction à* $H^+(\Lambda, \beta)^\sigma \cap M$ *et* ε_{θ_M} *l'idempotent de* RM_x *associé, où* $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$. *On a*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M} \in RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M}.$$

Nous prouverons cette proposition en 8.6. Partons maintenant d'une paire opposée $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ dans $\mathcal{G}$ et notons $V = \bigoplus_{i\in I}(V_i \oplus V_{-i}) \bigoplus V_0$ la décomposition orthogonale de V associée à leur composante de Levi commune $\mathcal{M}$. Donnons-nous pour chaque $i \neq 0$ une strate semi-simple $[\Lambda_i, n_i, 0, \beta_i]$ dans $End_F(V_i)$ et un caractère semi-simple $\theta_i \in \mathcal{C}(\Lambda_i, 0, \beta_i)$, ainsi qu'une strate semi-simple autoduale $[\Lambda_0, n_0, 0, \beta_0]$ et un caractère semi-simple $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Lambda_0, 0, \beta_0)^\sigma$. La collection des Λ_i correspond à un point de $B(\mathcal{M}, F_0)$ et la collection des caractères semi-simples nous fournit un idempotent $\varepsilon \in RM_x$ que nous qualifierons de *semi-simple*. La proposition suivante est l'analogue pour les groupes classiques de la proposition 7.4 et sera prouvée en 8.10.

Proposition 8.4 *Soit* $\Lambda := \bigoplus_{i\in I}(\Lambda_i \oplus \Lambda_{-i}^\#) \bigoplus \Lambda_0$. *Il existe une strate semisimple autoduale* $[\Lambda, n, 0, \beta]$ *avec* $(F[\beta]^\times)^\sigma \subset M$ *et un caractère semi-simple* $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)^\sigma$ *tel que* $\varepsilon_{\theta_M} = \varepsilon$.

En appliquant ce résultat aux collections translatées $\Lambda_i[t_i]$, avec $t_i \in \mathbb{Q}$ pour $i \neq 0$, on en déduit que l'idempotent ε est P-bon au sens de 3.8. Ceci étant, l'essentiel des arguments menant à la proposition suivante est dû à Stevens. Nous l'expliquerons en 8.11.

Proposition 8.5 *Les idempotents semi-simples forment une famille génératrice de la catégorie* $Mod_R(M)$.

8.6 *Preuve de la proposition 8.3* : Comme dans la preuve de la proposition 7.3, on veut appliquer 5.7 et 5.10. Rappelons que dans ladite preuve, nous avons introduit et utilisé des morphismes de $\mathcal{O}_F$-schémas en groupes lisses

$$\widetilde{\mathcal{G}}_{\beta,x} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \widetilde{\mathcal{J}} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \widetilde{\mathcal{G}}_x$$

(on rajoute ici des $\widetilde{\ }$ pour être cohérent avec les notations du paragraphe 8.1). Comme les ordres auxquels ils sont associés, ces schémas en groupes sont munis d'une action semi-linéaire de σ. Appliquons-leur le foncteur $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F|\mathcal{O}_{F_0}}(-)^\sigma$. On sait que la restriction des scalaires préserve la lissité, et d'après [18, 3.4] et l'hypothèse de caractéristique résiduelle $\neq 2$, le passage aux σ-invariants aussi. On obtient donc des morphismes de $\mathcal{O}_{F_0}$-schémas en groupes lisses

$$\mathcal{G}_{\beta,x} \xrightarrow{\psi} \mathcal{J} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_x,$$

le premier et la composée des deux étant des immersions fermées, le second induisant un isomorphisme des fibres génériques. Les points entiers sont donnés par $\mathcal{G}_x(\mathcal{O}_{F_0}) = G_x$ et $\mathcal{J}(\mathcal{O}_{F_0}) = J(\Lambda,\beta)^\sigma$. En particulier $\mathcal{G}_x$ est le modèle lisse de $\mathcal{G}$ associé par Bruhat-Tits à $x \in B(\mathcal{G},F)$. Vient maintenant une difficulté technique par rapport au cas linéaire : si la restriction des scalaires préserve la connexité, il n'en va pas de même du passage aux σ-invariants. En fait, dans les cas unitaires et symplectiques, où $\mathcal{G}$ est connexe et simplement connexe, on sait par [12, Prop. 4.6.32] que $\mathcal{G}_x$ et $\mathcal{G}_{\beta,x}$ sont connexes et donc, comme on va le voir dans le lemme ci-dessous, $\mathcal{J}$ l'est aussi. Dans le cas orthogonal impair, $\mathcal{G}$ est connexe mais pas simplement connexe et les $\mathcal{G}_x$ et $\mathcal{G}_{\beta,x}$ peuvent ne pas être connexes. Dans le cas orthogonal pair, $\mathcal{G}$ lui-même n'est déjà pas connexe ! Dans le lemme ci-dessous, l'adjectif "réductif" ne sous-entend pas "connexe".

Lemme 8.7 *Notons k le corps résiduel de $\mathcal{O}_{F_0}$:*

i) On a $\varphi_k^{-1}({}^u\mathcal{G}_{x,k}) = {}^u\mathcal{J}_k$ (ou, de manière équivalente, $\mathcal{J}^\dagger(\mathcal{O}_{F_0}) = G_x^+ \cap J(\Lambda,\beta)$).

ii) La fibre spéciale de ψ induit un isomorphisme des quotients réductifs ${}^q\mathcal{G}_{\beta,x,k} \xrightarrow{\sim} {}^q\mathcal{J}_k$.

iii) La fibre spéciale de ψ induit un isomorphisme $\pi_0(\mathcal{G}_{\beta,x,k}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathcal{J}_k)$

Preuve : Notons $\breve{\mathcal{J}}$, $\breve{\mathcal{G}}_x$ et $\breve{\mathcal{G}}_{x,\beta}$ les $\mathcal{O}_{F_0}$-schémas en groupes obtenus par restriction des scalaires de $\mathcal{O}_F$ à $\mathcal{O}_{F_0}$ dans les $\mathcal{O}_F$-schémas en groupes $\widetilde{\mathcal{J}}$, $\widetilde{\mathcal{G}}_x$ et $\widetilde{\mathcal{G}}_{x,\beta}$. Ils sont associés, selon la procédure de 7.7 i), aux mêmes anneaux respectifs $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$, $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$ et $\mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta)$, mais vus comme $\mathcal{O}_{F_0}$-ordres. Ainsi par les mêmes arguments que pour la remarque 7.8, on a les propriétés :

i) $\breve{\varphi}_k^{-1}({}^u\breve{\mathcal{G}}_{x,k}) = {}^u\breve{\mathcal{J}}_k$.

ii) La fibre spéciale de $\breve{\psi}$ induit un isomorphisme des quotients réductifs ${}^q\breve{\mathcal{G}}_{\beta,x,k} \xrightarrow{\sim} {}^q\breve{\mathcal{J}}_k$.

Notons que les radicaux unipotents de ces k-groupes sont stables sous l'involution σ et l'isomorphisme des quotients réductifs est compatible à l'action résiduelle de σ. Ainsi, pour prouver les assertions i) et ii) du lemme, il suffit de prouver que pour chacun des groupes $\breve{\mathcal{G}}_{x,k}$, $\breve{\mathcal{G}}_{x,\beta,k}$ et $\breve{\mathcal{J}}_k$, les σ-invariants du radical unipotent, resp. du quotient réductif, sont le radical unipotent, resp. le quotient réductif (éventuellement non connexe), des σ-invariants.

Pour cela, l'ingrédient essentiel est : *soit $\mathcal{N}_k$ un groupe unipotent sur un corps parfait de caractéristique différente de* 2 *et σ une involution. Alors $H^1(\langle\sigma\rangle,\mathcal{N}_k) = 0$, et si de plus $\mathcal{N}_k$ est lisse et connexe, alors $\mathcal{N}_k^\sigma$ l'est aussi.* En effet, utilisant une série centrale caractéristique, l'assertion sur le H^1 se dévisse immédiatement au cas abélien où elle est évidente. Pour l'assertion de connexité, on peut commencer par étendre les scalaires à une clôture algébrique. Utilisant ensuite une série centrale caractéristique dont les sous-quotients sont des produits de $\mathbb{G}_a$ [17, Exp. 4.1.1 iii) et 4.1.5] et la nullité du H^1 qu'on vient de vérifier, on est ramené au cas $\mathcal{N}_k \simeq \mathbb{G}_a^r$. On peut alors diagonaliser la matrice de σ et réduire encore au cas $r = 1$ où c'est évident.

Appliquons ceci à $\breve{\mathcal{J}}_k$, les cas de $\breve{\mathcal{G}}_{x,k}$ et $\breve{\mathcal{G}}_{x,\beta,k}$ étant similaires. Par l'assertion de connexité ci-dessus, $({}^u\breve{\mathcal{J}}_k)^\sigma$ est connexe, et donc est contenu dans ${}^u\mathcal{J}_k$. Par ailleurs, on sait [24, Thm. 2.1] que le groupe des invariants d'un groupe réductif sur un corps de caractéristique différente de 2 sous une involution est réductif, donc $({}^q\breve{\mathcal{J}}_k)^\sigma$ est réductif. Mais l'assertion de nullité du H^1 ci-dessus montre qu'en appliquant le foncteur des σ-invariants, la suite exacte ${}^u\breve{\mathcal{J}}_k \hookrightarrow \breve{\mathcal{J}}_k \twoheadrightarrow {}^q\breve{\mathcal{J}}_k$ reste exacte. Il s'ensuit que $({}^u\breve{\mathcal{J}}_k)^\sigma = {}^u\mathcal{J}_k$ et $({}^q\breve{\mathcal{J}}_k)^\sigma = {}^q\mathcal{J}_k$. Ceci clôt la preuve des points i) et ii). Par ailleurs, le point iii) est une conséquence du point ii).

□

Lemme 8.8 *Si $\mathcal{L}$ est un sous-groupe de Levi de $\mathcal{G}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{L}$ est $\mathcal{J}^\circ$-admissible au sens de 5.1.

ii) Le tore déployé maximal du centre de $\mathcal{L}$ est $\mathcal{J}^\circ$-admissible.

iii) $x \in B(\mathcal{L}, F_0)$ et L contient un conjugué sous $J(\Lambda, \beta)$ du groupe $(F[\beta]^\times)\sigma$.

Il s'ensuit qu'une paire de sous-groupes paraboliques opposés de $\mathcal{G}$ est $\mathcal{J}$-admissible si et seulement si sa composante de Levi commune l'est.

Preuve : Pour *iii)* $\Rightarrow$ *ii)*, on raisonne comme dans la preuve du lemme 7.9, en remplaçant le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ par le tore déployé maximal de ce centre, et en utilisant le fait que son adhérence schématique dans $\mathcal{G}_x$, resp. $\mathcal{G}_{\beta,x}$ ou $\mathcal{J}$, est un tore si et seulement si son adhérence schématique dans $\mathcal{G}_x^\circ$, resp. $\mathcal{G}_{\beta,x}^\circ$ ou $\mathcal{J}^\circ$, en est un (grâce à [17, Exp. VIII, Cor. 5.7]). Pour *i)* $\Rightarrow$ *iii)*, on raisonne comme dans la preuve de 7.9, le point clef étant donné par 8.7 ii) au lieu de 7.8 ii). $\square$

Pour suivre la stratégie de la preuve de 7.3, l'analogue de 7.10 est :

Fait 8.9 *(Stevens) Avec les hypothèses et notations de la proposition 7.3,*

i) $J(\Lambda, \beta)^\sigma$ normalise $H^+(\Lambda, \beta)^\sigma$ et θ.

ii) $H^+(\Lambda, \beta)^\sigma$ a la décomposition d'Iwahori par rapport à $P, \overline{P}$ et les restrictions de tout caractère semi-simple dans $\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)^\sigma$ à $H^+ \cap U$, $H^+ \cap \overline{U}$ sont triviales.

iii) $[J^+(\Lambda, \beta)^\sigma, J^+(\Lambda, \beta)^\sigma] \subseteq H^+(\Lambda, \beta)^\sigma \subseteq J^+(\Lambda, \beta)^\sigma$ et l'application $(u, \overline{u}) \mapsto \theta([u, \overline{u}])$ induit un accouplement non-dégénéré

$$(J^+ \cap U)/(H^+ \cap U) \times (J^+ \cap \overline{U})/(H^+ \cap \overline{U}) \longrightarrow R^\times.$$

iv) Écrivons $V = \bigoplus_i (V_i \oplus V_i) \bigoplus V_0$ la décomposition orthogonale de V associée à M, $\beta = \oplus_i(\beta_i \oplus \beta_{-i}) \oplus \beta_0$ la décomposition de β correspondante, et identifions M à $\prod_i GL(V_i) \times GL(V_0)^\sigma$. Alors $H^+(\Lambda, \beta) \cap M \simeq \prod_i H^+(\Lambda_i, \beta_i) \times H^+(\Lambda_0, \beta_0)^\sigma$ et la restriction de tout caractère semi-simple dans $\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ à $H^+ \cap M$ s'identifie à un produit de caractères semi-simples dans $\mathcal{C}(\Lambda_i, 0, \beta_i)$ par un caractère semi-simple autodual dans $\mathcal{C}(\Lambda_0, 0, \beta_0)^\sigma$.

v) L'ensemble d'entrelacement $Int_{G_x}(\theta)$ de θ dans G_x est $J(\Lambda, \beta)^\sigma$.

Preuve : (références et commentaires) les deux premiers points découlent immédiatement des points correspondants de 7.10. Le point iii) est prouvé dans [26, 3.28]. Le point iv) se prouve comme le point correspondant de 7.10, en combinant [25, (1.10)] et [26, Prop 3.4]. Enfin, le dernier point découle de [26, Thm 3.27] qui calcule l'entrelacement dans tout G. $\square$

Terminons maintenant la preuve de la proposition 8.3. On raisonne comme dans le cas linéaire, sauf qu'il faut tenir compte de la non-connexité éventuelle de $\mathcal{G}_x$ et $\mathcal{J}$. On remarque que les points ii), iii) et iv) de 8.9 concernent des objets relatifs à $\mathcal{J}^\circ$ et on peut toujours restreindre le point i) à $\mathcal{J}^\circ(\mathcal{O}_{F_0})$. On en déduit en particulier comme dans le cas linéaire que ε_{θ_M} est un idempotent essentiellement de niveau zéro pour le modèle lisse de $\mathcal{M}$ obtenu par adhérence schématique dans $\mathcal{J}^\circ$. Le point v) nous donne $\mathrm{Int}_{G_x^\circ}(\theta) = J(\Lambda, \beta)^\sigma \cap G_x^\circ$, ce qui, compte tenu de ce que $\mathcal{U}_x$ est connexe (voir preuve de 6.2) implique $\mathrm{Int}_{U_x}(\varepsilon_\theta) = \mathcal{J}(\mathcal{O}_{F_0}) \cap U_x$. Ainsi, vu 8.7 i), pour pouvoir appliquer 5.10 au morphisme $\mathcal{J}^\circ \longrightarrow \mathcal{G}_x^\circ$, avec $\varepsilon' := \varepsilon_{\theta_M}$ et $\widetilde{\varepsilon}' := \varepsilon_\theta$, puis terminer la preuve de 8.3 comme dans le cas linéaire, il reste à prouver l'égalité $\mathcal{J}(\mathcal{O}_{F_0}) \cap U_x = \mathcal{J}^\circ(\mathcal{O}_{F_0}) \cap U_x$. Il suffit pour cela de voir que l'adhérence schématique de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{J}$ est connexe. Or, celle-ci est la partie σ-invariante de l'adhérence schématique de $\mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{U}})$ dans $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F|\mathcal{O}_{F_0}}(\widetilde{\mathcal{J}})$, laquelle est connexe par 5.15 ii), puisque $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F|\mathcal{O}_{F_0}}(\widetilde{\mathcal{J}})$ est connexe. On conclut donc grâce à l'assertion de connexité de l'énoncé en italiques de la preuve du lemme 8.7.

8.10 *Preuve de la proposition 8.4 :* On peut faire le même raisonnement inductif que dans le lemme 7.12, en demandant que les strates intermédiaires $[\Lambda, n, t, \gamma^t]$ vérifient $\gamma^t = -\overline{\gamma^t}$ et que les caractères $\theta^t \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \gamma^t)$ soient invariants par σ. Pour assurer la propriété requise des γ^{t-} dans la construction inductive, on utilise [25, (1.10)]. L'invariance des caractères θ^{t-} sous σ est alors automatique par décomposition d'Iwahori.

8.11 *Preuve de la proposition 8.5 :* Le groupe M est un produit de groupes linéaires et d'un groupe classique, il suffit donc de traiter chacun de ces groupes séparément. En fait nous ne traiterons que le cas classique car c'est le cadre dans lequel les outils nécessaires ont été développés par Stevens (notamment le lemme 5.4. de [26]). Nous laisserons le lecteur se convaincre que la même preuve fonctionne dans le cas linéaire, en admettant que les outils correspondants sont encore valables (ils sont en fait plus faciles à obtenir et souvent, un analogue "simple" se trouve dans [14, Ch. 8.1]).

Supposons donc $M = G$, $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$ et $V \in Mod_R(G)$. On veut trouver un idempotent semi-simple ε tel que $\varepsilon V \neq 0$. Il suffit bien sûr de le faire pour V irréductible. Quitte à étendre les scalaires on peut supposer que V est définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

Donnons-nous une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ semi-simple autoduale avec $r \leqslant n$ et un caractère $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, r, \beta)^\sigma$ tels que $\varepsilon_\theta V \neq 0$. Remarquons que pour r assez grand, il existe de telles données. Choisissons un prolongement $\widetilde{\theta} \in \mathcal{C}(\Lambda, r-, \beta)$ de θ. Nous noterons $A_- := \{x \in A = End_F(V), x = -\overline{x}\}$ et $\mathfrak{a}_\bullet(\Lambda)_- := A_- \cap \mathfrak{a}_\bullet(\Lambda)$. Comme dans le début de la preuve du théorème 5.1 de [26], il existe un élément $c \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)_-$ tel que le caractère $\vartheta := \widetilde{\theta}\psi_{c|H^r(\Lambda,\beta)^\sigma}$ apparaisse dans $V_{|H^r(\Lambda,\beta)^\sigma}$. Décomposons $F[\beta] = \prod_{i\in I_\beta}(E_i \times E_{-i}) \times \prod_{j\in J_\beta} E_j$ en un produit de corps où l'involution $x \mapsto \overline{x}$ identifie E_i et E_{-i} et stabilise chaque E_j. On a aussi la décomposition orthogonale $V = \bigoplus_{i\in I_\beta}(V_i \oplus V_{-i}) \bigoplus_{j\in J_\beta} V_j$ selon les idempotents primitifs de ce produit. Par le même argument que le lemme 5.2 et le paragraphe qui le suit dans [26], on peut supposer que c se décompose en $c = \bigoplus_{i\in I_\beta}(c_i \oplus \overline{c_i}) \bigoplus_{j\in J_\beta} b_j$ avec $c_i \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda_i)$ pour $i \in I_\beta$ et $c_j \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda_j)_-$ pour $j \in J_\beta$.

Choisissons des corestrictions modérées $s_k : End_F(V_k) \longrightarrow End_{E_k}(V_k)$ pour $k \in I_\beta \sqcup J_\beta$. On définit comme dans [26, (5.3)] la $F[\beta]$-strate dérivée (autoduale) $[\Lambda, r, r-, s(c)]$ comme la somme

$$\bigoplus_{i\in I_\beta}([\Lambda_i, r, r-, s_i(c_i)] \oplus [\Lambda_{-i}, r, r-, s_i(c_{-i})]) \bigoplus_{j\in J_\beta}[\Lambda_j, r, r-, s_j(c_j)].$$

L'élément $s(c)$ est donc dans l'algèbre $A_\beta \subset A$ centralisatrice de β et vérifie $\overline{s(c)} = -s(c)$.

Lemme 8.12 *[25, Thm 4.4] Il existe une $F[\beta]$-strate autoduale* semi-simple $[\Lambda', r, r-, \alpha']$ *dans V telle que*

$$s(c) + \left(\mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda) \cap A_\beta\right) \subset \alpha' + \left(\mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda') \cap A_\beta\right).$$

Preuve : Cet énoncé est une "somme" d'énoncés analogues pour chaque $i \in I_\beta$, $j \in J_\beta$. Nous traitons seulement le cas $j \in J_\beta$, les autres cas se traitant de la même manière mais sans les complications "autoduales". D'après [25, Prop 4.2], il existe une E_j-fontion réseau autoduale dans V_j telle que $\mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda_j) \subset \mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda'_j)$ et $s_j(c_j) \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda_j)_-$ soit "de réduction semisimple" (voir *loc. cit* pour le sens de cette expression). Si cette réduction est nulle, on a $s_j(c_j) \in \mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda'_j)$ et on peut prendre $\alpha'_j = 0$. Sinon, le réel r est nécessairement de la forme $n/e(\Lambda'_j)$ et on peut suivre la procédure de la preuve de [25, Thm 4.4]. □

Pour terminer la preuve de la proposition 8.5, l'outil fondamental est le lemme suivant qui n'est énoncé que pour les strates *gauches* dans [26], mais dont la preuve s'étend aux strates *autoduales* :

Lemme 8.13 *[26, Lemma 5.4] Soit $[\Lambda', r', r'_-, \alpha']$ une $F[\beta]$-strate autoduale dans V telle que*

$$s(c) + \left(\mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda) \cap A_\beta\right) \subset \alpha' + \left(\mathfrak{a}_{-(r'_-)}(\Lambda') \cap A_\beta\right).$$

Alors il existe $\widetilde{\theta}' \in \mathcal{C}(\Lambda', r'-, \beta)$ et $c' \in \mathfrak{a}_{-r'}(\Lambda')$ de corestriction $s(c') = \alpha'$ tels que la représentation V contienne le caractère $\vartheta' := \theta'\psi_{c'|H^{r'}(\Lambda',\beta)^\sigma}$. Si de plus $\alpha' = 0$, alors on peut choisir $c' = 0$.

Preuve : Nous nous contenterons de remarquer que les arguments de type "théorie des représentations" de la preuve de Stevens (lemme 5.9 de [26]) concernent des représentations de pro-p-groupes et restent valables dans notre situation où $\mathbb{C}$ est remplacé par un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. On pourrait aussi facilement remplacer ces arguments en prouvant

$$\varepsilon_{\widetilde{\theta}\psi_c} \in RG\varepsilon_{\widetilde{\theta}'\psi'_{c'}}RG$$

de manière analogue à la preuve de la proposition 5.7. $\square$

Appliquons ce lemme à la strate $[\Lambda', r, r-, \alpha']$ du lemme 8.12. D'après [26, Lemma 3.5], la strate $[\Lambda', n, r-, \beta + c']$ est équivalente à une strate semi-simple, disons $[\Lambda', n, r-, \beta']$ et par [26, Rk 3.14.ii)], on a $\vartheta' \in \mathcal{C}(\Lambda', r-, \beta)$.

On a donc une procédure pour baisser *strictement* le "niveau" d'un caractère semi-simple autodual intervenant dans V. Cependant, il n'est pas encore clair que cette procédure produise après plusieurs itérations un caractère semi-simple autodual de "niveau" 0 ; on peut en effet supposer les r rationnels, mais on ne contrôle pas les dénominateurs. Pour les contrôler, il faut appliquer le lemme 8.13 dans la situation où

i) $\widetilde{\theta}$ intervient dans V et $c = 0$.

ii) Λ' est une somme sur i, j de fonctions-réseaux *optimales* (au sens de Moy-Prasad, *cf.* [25, (4.3)] dans le contexte présent), $r' \leqslant r$ est tel que $\mathfrak{a}_{-r'_-}(\Lambda') \supset \mathfrak{a}_{-r_-}(\Lambda)$ et $\alpha' = 0$.

L'existence de telle strates optimales est donnée par [25, (4.3)]. Le lemme 8.13 nous dit alors que V contient un caractère de $\mathcal{C}(\Lambda', r'-, \beta)$, mais cette fois Λ' est somme de strates optimales et sa période est bornée par un entier dépendant seulement de $dim_F(V)$. Ainsi les $r \in \mathbb{Q}$ qui sont des sauts pour de telles strates ont leur dénominateurs bornés, et la procédure de raffinement ci-dessus produit bien un caractère dans un certain $\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ intervenant dans V.

9 Groupes modérés

Dans cette section, le corps de base redevient K et le groupe réductif connexe $\mathcal{G}$ est supposé modérément ramifié. Nous allons appliquer les résultats généraux de la partie 5 aux caractères génériques introduits par Yu dans [31].

9.1 *Groupes de Yu* : Suivant [31, sec. 2], un sous-groupe fermé $\mathcal{G}^0$ de $\mathcal{G}$ est appelé *sous-groupe de Levi tordu modéré* si après extension des scalaires de K à une extension modérément ramifiée, il devient un sous-groupe de Levi. On sait alors –toujours de manière non canonique, mais peu importe– identifier $B(\mathcal{G}^0, K)$ à un sous-ensemble de $B(\mathcal{G}, K)$, et ce de telle sorte que pour un point $x \in B(\mathcal{G}^0, K)$, on ait $G^0_x = G^0 \cap G_x$ et $G^{0+}_x = G^0 \cap G^+_x$.

Étant donnée une suite de sous-groupes de Levi tordus modérément ramifiés $\vec{\mathcal{G}} := \{\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{G}^1 \subset \cdots \subset \mathcal{G}^d := \mathcal{G}\}$, et une suite $\vec{r} = \{0 \leqslant r_0 \leqslant \cdots \leqslant r_d\}$, Yu définit dans [31, sec 2] un groupe $\vec{G}_{x,\vec{r}}$ qu'il réalise dans dans [32, sec 10] comme groupe des points entiers d'un modèle lisse $\vec{\mathcal{G}}_{x,\vec{r}}$ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_K$.

D'après [32, Prop. 10.4], la fibre spéciale de $\vec{\mathcal{G}}_{x,\vec{r}}$ est unipotente si $r_0 > 0$. Dans le cas contraire $r_0 = 0$, il y a une immersion fermée $\mathcal{G}^0_x \hookrightarrow \vec{\mathcal{G}}_{x,\vec{r}}$ qui induit sur les fibres spéciales un isomorphisme des quotients réductifs. Comme dans la preuve du lemme 7.9, on en déduit qu'un sous-groupe de Levi $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ est $\vec{\mathcal{G}}^\circ_{x,\vec{r}}$-admissible si et seulement si i) $x \in B(\mathcal{M}, K)$, ii) $\mathcal{M}$ contient la composante neutre $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^0)^\circ$ du centre de $\mathcal{G}^0$ éventuellement conjugué par un élément de $G_{x,\vec{r}}$. On en déduit aussi que $\vec{\mathcal{G}}^\dagger_{x,\vec{r}}(\mathcal{O}_K) = G^+_{x,\vec{r}} := G_{x,\vec{r}} \cap G^+_x$.

9.2 *Caractères génériques* : Gardons les notations précédentes et donnons-nous aussi une suite $\vec{\phi} := \{\phi_0, \cdots, \phi_d\}$ où chaque ϕ_i est un caractère de $G^i := \mathcal{G}^i(F)$ qu'on supposera G^{i+1}-générique (pour $i < d$), au sens de [31, sec. 5]. On suppose que la suite $\vec{r}$ des niveaux r_i des ϕ_i vérifie $0 < r_0 < \cdots < r_{d-1} \leqslant r_d$, on pose $s_i := r_i/2$ et on note $\vec{s} := (0, s_0, \cdots, s_{d-1})$ et $\vec{s}+ := (0+, s_0+, \cdots, s_{d-1}+)$.

Selon [31, Prop 4.1], la donnée de $\vec{\phi}$ définit un caractère $\theta = \prod_i \hat{\phi}_i$ de $\vec{G}_{x,\vec{s}+}$, normalisé par $\vec{G}_{x,\vec{s}}$, et tel que

i) $\mathrm{Int}_{G_x}(\theta) = \vec{G}_{x,\vec{s}}$, *cf.* [31, Prop 4.1]

ii) la forme bilinéaire $(x,y) \mapsto \theta([x,y])$ sur $\vec{G}^{+}_{x,\vec{s}}/\vec{G}_{x,\vec{s}+}$ est non dégénérée ; c'est la somme de $i=0$ à $d-1$ des assertions de non-dégénérescence de [31, 11.1] appliquées à $(G^i, G^{i+1})_{r_i,s_i}$ et $\hat{\phi}_i$.

Soit alors $\mathcal{M}$ un sous-groupe de Levi $\vec{\mathcal{G}}^{\circ}_{x,\vec{r}}$-admissible contenant $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^0)^{\circ}$, et $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ une paire de sous-groupes paraboliques opposés de Levi commun $\mathcal{M}$. Il résulte immédiatement des définitions qu'on a une décomposition d'Iwahori $\vec{G}_{x,\vec{s}+} = \vec{U}_{x,\vec{s}+}\vec{M}_{x,\vec{s}+}\vec{\overline{U}}_{x,\vec{s}+}$ pour laquelle les restrictions $\theta_{|\vec{U}_{x,\vec{s}+}}$ et $\theta_{|\vec{\overline{U}}_{x,\vec{s}+}}$ sont triviales. De plus, le groupe $\vec{M}_{x,\vec{s}+}$ est le groupe de Yu associé à la suite de sous-groupes de Levi modérés $\vec{\mathcal{M}} := \{\mathcal{M}\cap\mathcal{G}^0 \subset \cdots \subset \mathcal{M}\cap\mathcal{G}^d = \mathcal{M}\}$ de $\mathcal{M}$ et à la suite de "réels" $\vec{s}+$, et la restriction $\theta_M := \theta_{|\vec{M}_{x,\vec{s}+}}$ est le caractère associé à la suite de caractères génériques $\vec{\phi}_{|\vec{\mathcal{M}}}$.

On a donc rassemblé tous les ingrédients pour prouver de la même manière que pour les groupes linéaires et classiques la proposition suivante qui est un analogue de 7.3 et 8.3 :

Proposition 9.3 *Gardons les notations ci-dessus, posons $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$, et notons ε_{θ_M} l'idempotent de $R\vec{M}_{x,\vec{s}}$ associé à θ_M. Alors*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M} \in RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M}.$$

Preuve : Par ce qui précède et par 5.7, ε_{θ_M} est un idempotent essentiellement de niveau zéro pour le modèle lisse $\vec{\mathcal{M}}^{\circ}_{x,\vec{s}}$ de $\mathcal{M}$. Par ce qui précède encore, on peut appliquer 5.10 avec $\mathcal{G}' = \vec{\mathcal{G}}^{\circ}_{x,\vec{s}}$ et $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\circ}_x$, et $\varepsilon' = \varepsilon_{\theta_M}$ et $\widetilde{\varepsilon}' = \varepsilon_\theta$. On omet les détails en renvoyant aux preuves de 7.3 et 8.3. $\square$

Remarquons maintenant que $\mathcal{G}^0$ contient la composante neutre du centre de $\mathcal{M}$ et par conséquent, l'intersection $B(\mathcal{G}^0, K) \cap B(\mathcal{M}, K)$ est stable par translations sous a_M. Appliquant la proposition précédente aux points de $x + a_M$, on en déduit que l'idempotent ε_{θ_M} de $R\vec{M}_{x,\vec{r}}$ est P-bon au sens de 3.8. Les résultats obtenus récemment par Ju-Lee Kim sur l'exhaustivité de la construction de Yu pour les groupes modérés (ceux dont tous les tores sont modérément ramifiés) laissent espérer que la famille des idempotents du type ε_{θ_M} comme ci-dessus soit génératrice dans $Mod_R(M)$. Néanmoins ses arguments sont de nature analytique et n'impliquent pas directement cette propriété. Il faudrait plutôt des arguments algébriques de type "raffinement de strates", comme dans la théorie de Bushnell-Kutzko.

A Décomposition "par le niveau" de $Mod_R(G)$

Le but de cette section est d'étendre à la catégorie $Mod_R(G)$ la décomposition "par le niveau", implicite dans les travaux de Moy et Prasad lorsque $R = \mathbb{C}$ et explicitée dans le cas où R est un corps par Vignéras dans [30, II.5].

Les arguments reposent *in fine* sur les constructions de Moy et Prasad dans [23], et notamment sur la comparaison entre deux familles de filtrations concernant le groupe et l'algèbre de Lie. Pour cette comparaison, des hypothèses sont nécessaires, *cf.* le commentaire qui suit [32, Cor 5.6.]. Ces hypothèses, peu contraignantes, sont vérifiées dans tous les cas considérés dans le présent article, et quoiqu'il en soit, Yu explique dans [32, 5-6] comment modifier la construction originale de Moy-Prasad dans le cas général.

A.1 *Décomposition de catégories abéliennes* : Nous rappelons ici un peu d'*abstract nonsense*. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec limites inductives exactes. Pour une famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{C}$ on considère les propriétés suivantes :

- (PROJ) Chaque Q_n est projectif et de type fini ("compact").
- (DISJ) Si $n \neq m$, alors $Hom_{\mathcal{C}}(Q_n, Q_m) = 0$.
- (GEN) Pour tout objet V de $\mathcal{C}$, on a $Hom_{\mathcal{C}}(\bigoplus_n Q_n, V) \neq 0$.

Par ailleurs, pour tout objet V de $\mathcal{C}$, posons

$$V_n := \sum_{\phi \in Hom_G(Q_n, V)} im\, \phi \subseteq V,$$

un sous-objet de V. Les propriétés (PROJ) et (GEN) impliquent que $V = \sum_n V_n$. La propriété (DISJ), toujours avec (PROJ), assure que la somme est directe, *i.e.* $V = \bigoplus_n V_n$. On peut paraphraser cela en introduisant la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{C}$ formée des objets vérifiant $Hom_{\mathcal{C}}(Q_m, V) = 0$ pour tout $m \neq n$. On obtient en effet une décomposition de $\mathcal{C}$ en une somme directe de sous-catégories "facteurs directs" $\mathcal{C} \simeq \bigoplus_n \mathcal{C}_n$.

Plus généralement, pour $I \subset \mathbb{N}$, notons $\mathcal{C}_I$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets vérifiant $Hom_{\mathcal{C}}(Q_m, V) = 0$ pour $m \notin I$. Alors $\mathcal{C}_I$ est une sous-catégorie "facteur direct" de $\mathcal{C}$.

A.2 *Types non raffinés de Moy-Prasad et décomposition de* $Mod_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$: Soit $x \in B(\mathcal{G}, K)$. Moy et Prasad ont défini ([22], [23] et [30, II.5]), une certaine filtration décroissante de G_x par des pro-p-sous-groupes ouverts $G_{x,r}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Les sauts de cette filtration sont discrets et on a des relations de commutateurs $(G_{x,r}, G_{x,s}) \subset G_{x,r+s}$. Si l'on convient de noter $G_{x,r^+} := \bigcup_{s>r} G_{x,s}$, alors $G_{x,0^+} = G_x^+$, et pour tout $r > 0$, le groupe fini $G_{x,r}/G_{x,r^+}$ est naturellement un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. Ils ont ensuite défini certains caractères complexes des gradués $G_{x,r}/G_{x,r^+}$ appelés *types non raffinés minimaux de niveau* r, dont nous noterons l'ensemble $NR_{x,r}$. Ces caractères sont donc à valeurs dans l'extension $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}, \zeta_p]$ si ζ_p est une racine p-ième de l'unité. Enfin, Moy et Prasad ont défini un ensemble PO de "points optimaux" dans l'immeuble, fini modulo action de G, et nous noterons $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des sauts des filtrations associées aux points de PO.

Posons maintenant $Q_0 := \bigoplus_x ind_{G_{x,0^+}}^G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ où x décrit un ensemble (fini) de représentants des G-orbites de sommets de $\mathcal{I}$. Pour $r \in \mathbb{R}_+$, posons (comme dans la remarque de [30, p. 136])

$$P(r) := \bigoplus_{x \in PO, \chi \in NR_{x,r}} ind_{G_{x,r}}^G(\chi)$$

que l'on voit comme une représentation de type fini à coefficients dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

Lemme A.3 *La famille* $Q_n := P(r_n)$, $n \in \mathbb{N}$ *d'objets de* $Mod_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$ *vérifie les propriétés (PROJ), (GEN) et (DISJ).*

Preuve : D'après [30, II.5], pour tout corps algébriquement clos R de caractéristique $\neq p$, la famille de représentations $(Q_n \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} R)_{n\in\mathbb{N}}$ de $Mod_R(G)$ vérifie les propriétés (PROJ), (DISJ) [30, II.5.8] et (GEN) [30, II.5.3] de la section précédente. Nous allons montrer que cela implique formellement qu'il en est de même de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $Mod_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$.

(PROJ) : En tant que somme d'induites de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-représentations de type fini de pro-p-sous-groupes ouverts, $P(r)$ est projective et de type fini dans $Mod_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$.

(DISJ) : puisque Q_m est sans torsion, $Hom_G(Q_n, Q_m) \hookrightarrow Hom_G(Q_n \otimes \mathbb{C}, Q_m \otimes \mathbb{C})$. Ce dernier est nul par [30, II.5.8] appliqué à $R = \mathbb{C}$.

(GEN) : soit V un objet de $Mod_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$ tel qu'il existe $l \neq p$ premier tel que $V_l := \{v \in V, lv = 0\} \neq 0$. On peut voir V_l comme une $\mathbb{F}_l$-représentation de G. On sait alors par [30, II.5.3] qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un morphisme non nul $\phi : Q_n \longrightarrow V_l \otimes \overline{\mathbb{F}}_l$. Par engendrement fini de Q_n, ce morphisme se factorise par $V_l \otimes \mathbb{F}_{l^k}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. D'où un morphisme non nul $Q_n \longrightarrow (V_l)^k$ et par suite l'existence d'un morphisme non nul $Q_n \longrightarrow V_l$ que l'on peut composer avec l'injection $V_l \hookrightarrow V$.

Si maintenant $V_l = 0$ pour tout $l \neq p$, c'est à dire si V n'a pas de torsion, V se plonge dans $V \otimes \mathbb{Q}$. Comme précédemment on déduit de [30, II.5.3] l'existence d'un morphisme non nul $Q_n \longrightarrow V \otimes \mathbb{Q}$. Par engendrement fini de Q_n, on peut multiplier par un "dénominateur commun" pour obtenir un morphisme à image dans V.

$\square$

Bien sûr on obtient des décompositions similaires en étendant les scalaires à toute $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-algèbre R. On obtient aussi la décomposition annoncée dans la preuve de 6.3. Enfin, on déduit de cette décomposition que si une représentation est engendrée par ses invariants sous un sous-groupe ouvert compact, alors tous ses sous-objets ont la même propriété (éventuellement pour un sous-groupe ouvert compact plus petit). Ceci justifie le corollaire 4.5.

Références

[1] I.N. Bernstein and V. Zelevinski. Induced representations on reductive p-adic groups. *Ann.Sci.Ec.Norm.Sup*, 10 :441–472, 1977.

[2] J. Bernstein. Second adjointness for representations of p-adic groups. *http ://www.math.uchicago.edu/ arinkin/langlands/*, 1993 ?

[3] J.-N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, and M.F. Vignéras. *Représentations des groupes réductifs sur un corps local.* Travaux en cours. Hermann, Paris, 1984.

[4] R. Bezrukavnikov. Homological properties of representations of p-adic groups related to the geometry of the group at infinity. *http ://fr.arxiv.org/abs/math.RT/0406223*, 1999.

[5] A. Borel and J. Tits. Groupes réductifs. 27 :55–151, 1965.

[6] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud. *Neron Models.* Number 21 in Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1990.

[7] Bourbaki. *Algèbre Commutative IX.* Masson, Paris, 1983.

[8] Bourbaki. *Algèbre Commutative VII.* Masson, Paris, 1985.

[9] P. Broussous and B. Lemaire. Building of $GL_m(D)$ and centralizers. *Tranform. Groups*, 7(1) :15–50, 2002.

[10] P. Broussous and S. Stevens. Buildings of classical groups and centralizers of Lie algebra elements. *Prépublication.*

[11] F. Bruhat and J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local I. Données radicielles valuées.*, volume 41 of *Publ. Math. I.H.E.S.* Le Bois Marie – Bures-sur-Yvette, 1972.

[12] F. Bruhat and J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local II. Existence d'une donnée radicielle valuée.*, volume 60 of *Publ. Math. I.H.E.S.* Le Bois Marie – Bures-sur-Yvette, 1984.

[13] C.J. Bushnell. Representations of reductive p-adic groups : localization of Hecke algebras and applications. *J. London Math. Soc. (2)*, 63(2) :364–386, 2001.

[14] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. *The Admissible Dual of $GL(n)$ via open compact groups.* Number 129 in Annals of maths. Studies. Princeton university press, 1993.

[15] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. Semisimple types in GL_n. *Compositio Math.*, (119) :53–97, 1999.

[16] J.-F. Dat. ν-tempered representations of p-adic groups. I. l-adic case. *Duke Math. J.*, 126(3) :397–469, 2005.

[17] M. Demazure and A. Grothendieck, editors. *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie. Schémas en groupes.*, number 151, 152, 153 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1970.

[18] B. Edixhoven. Néron models and tame ramification. *Compositio Math.*, (81) :291–306, 1992.

[19] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32) :361, 1967.

[20] R.B. Howlett and G.I. Lehrer. On Harish-Chandra induction for modules of Levi subgroups. *J. of Algebra*, 165 :172–183, 1994.

[21] J.-L. Kim. Supercuspidal representations : an exhaustion theorem. *to appear in J. Amer. Math. Soc.*

[22] A. Moy and G. Prasad. Unrefined minimal K-types. *Invent. Math.*, 116 :393–408, 1994.

[23] A. Moy and G. Prasad. Jacquet functors and unrefined minimal K-types. *Comment. Math. Helv.*, 71(1) :98–121, 1996.

[24] Gopal Prasad and Jiu-Kang Yu. On finite group actions on reductive groups and buildings. *Invent. Math.*, 147(3) :545–560, 2002.

[25] S. Stevens. Intertwining and supercuspidal types for p-adic classical groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 83(1) :120–140, 2001.

[26] S. Stevens. Semisimple characters for p-adic classical groups. *Duke Math. J.*, 127(1) :123–173, 2005.

[27] J. Tits. Reductive groups over local fields. *Proc. Symp. Pure Math.*, 33 :29–69, 1979.

[28] M.-F. Vignéras. Cohomology of sheaves on the building and R-representations. *Invent. Math.*, 127 :349–373, 1997.

[29] M.-F. Vignéras. Appendice à *types et induction pour les représentations modulaires de groupes p-adiques*, par J.-F. Dat. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 32 :1–38, 1999.

[30] M.F. Vignéras. *Représentations l-modulaires d'un groupe p-adique avec l différent de p*. Number 137 in Progress in Math. Birkhäuser, 1996.

[31] J.-K. Yu. Construction of tame supercuspidal representations. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3) :579–622 (electronic), 2001.

[32] J.-K. Yu. Smooth models associated to concave functions in Bruhat-Tits theory. *Prépublication, http ://www.math.purdue.edu/ jyu/prep/model.pdf*, 2002.