Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo ℓ

J.-F. Dat*, with an appendix by M.-F. Vignéras†

Résumé

Let G be a general linear group over a p-adic field and let $D^\times$ be an anisotropic inner form of G. The Jacquet-Langlands correspondence between irreducible complex representations of $D^\times$ and discrete series of G does not behave well with respect to reduction modulo $\ell \neq p$. However we show that the Langlands-Jacquet transfer, from the Grothendieck group of admissible $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-representations of G to that of $D^\times$ is compatible with congruences and reduces modulo ℓ to a similar transfer for $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-representations, which moreover can be characterized by some Brauer characters identities. Studying more carefully this transfer, we deduce a bijection between irreducible $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-representations of $D^\times$ and "super-Speh" $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-representations of G. Via reduction mod ℓ, this latter bijection is compatible with the classical Jacquet-Langlands correspondence composed with the Zelevinsky involution. Finally we discuss the question whether our Langlands-Jacquet transfer sends irreducibles to effective virtual representations up to a sign. This presumably boils down to some unknown properties of parabolic affine Kazhdan-Lusztig polynomials.

In the appendix, we reproduce Vignéras' first construction of Brauer characters for p-adic groups. It follows Harish Chandra's classical approach while our construction uses resolutions on the building.

Table des matières

1 Exposé des résultats

Soit K un corps local non-archimédien de caractéristique résiduelle p, d un entier et D une algèbre à division de centre K et de dimension d^2 sur K. Notons aussi W_K le groupe de Weil d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K.

*Université Pierre et Marie Curie. 4, place Jussieu, 75005 Paris, France. L'auteur remercie l'Institute for Advanced Study où quelques corrections ont été apportées à ce texte, lors d'un séjour financé par la NSF (grant No. DMS-0635607). Il remercie aussi l'Institut Universitaire de France, et l'ANR (contrat ANR-10-BLANC 0114) pour leur soutien financier.

†Université Paris Diderot. 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France.

MSC : 22E50, 11S37

1.1 Rappels sur Jacquet-Langlands et Langlands-Jacquet classiques

(1.1.1) *Le point de vue de la fonctorialité de Langlands.* Les groupes $D^\times$ et G ont le même L-groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$. Pour G, tous les paramètres de Langlands $W_K \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ sont *relevants* au sens de [4, 3.3], tandis que pour $D^\times$, seuls ceux qui ne se factorisent pas à travers un sous-groupe parabolique propre de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ le sont. Le principe de fonctorialité de Langlands prédit donc dans ce cas l'existence d'une injection

$$\mathrm{JL}_{\mathbb{C}} : \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}\left(D^\times\right) \hookrightarrow \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$$

de l'ensemble $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(D^\times)$ des classes de représentations complexes lisses irréductibles de $D^\times$ dans l'ensemble correspondant pour G. Selon le desideratum [4, 10.3(3)], l'image de cette injection doit coïncider avec l'ensemble des séries discrètes de G.

(1.1.2) *Le point de vue de l'endoscopie.* Le groupe G est un groupe endoscopique elliptique pour $D^\times$. Cela signifie entre autres que l'on a une application des classes de conjugaison elliptiques régulières de G vers celles de $D^\times$, qui dans ce cas est même une bijection puisque G est forme intérieure de $D^\times$. Cette bijection est facile à expliciter puisque des deux côtés les classes de conjugaisons elliptiques régulières sont paramétrées par les polynômes unitaires irréductibles séparables de degré d, via l'application "polynôme caractéristique". Ce transfert des classes de conjugaison elliptiques implique un transfert des caractères virtuels que l'on peut résumer par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{ell}}, \mathbb{C})^G \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{C}^\infty(D^{\mathrm{ell}}, \mathbb{C})^{D^\times} \\
\mathcal{R}(G, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C} \arrow[u, "\theta^G"] \arrow[r, "\mathrm{LJ}_{\mathbb{C}}"'] & \mathcal{R}(D^\times, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C} \arrow[u, "\simeq"', "\theta^D"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{R}(G, \mathbb{C})$ désigne le groupe de Grothendieck des représentations lisses complexes de longueur finie de G, $\mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{ell}}, \mathbb{C})^G$ l'espace des fonctions lisses et invariantes par conjugaison sur l'ouvert elliptique de G, θ^G la fonction caractère de Harish Chandra restreinte aux elliptiques, et idem pour $D^\times$. Le fait que θ^D soit un isomorphisme vient de ce que $D^\times$ est compact modulo son centre, et que l'ouvert elliptique D^{ell} y est dense. Notons enfin que le transfert des fonctions $\mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{ell}}, \mathbb{C})^G \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(D^{\mathrm{ell}}, \mathbb{C})^{D^\times}$ est normalisé par un signe $(-1)^{d+1}$.

(1.1.3) Venons-en maintenant aux énoncés des "correspondances".

Jacquet-Langlands. ([10],[2])– *Il existe une injection* $\mathrm{JL}_{\mathbb{C}} : \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(D^\times) \hookrightarrow \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ *caractérisée par les deux propriétés suivantes :*
– *Son image est l'ensemble des séries discrètes de G.*
– *Pour tout $\rho \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(D^\times)$, on a $\mathrm{LJ}_{\mathbb{C}}[\mathrm{JL}_{\mathbb{C}}(\rho)] = [\rho]$.*

Rappelons que la preuve de ce théorème repose sur la formule des traces "simple" et est de nature essentiellement globale. Par contre, une fois connu ce résultat, c'est par des arguments purement locaux basés sur la classification de Zelevinsky que l'on prouve la propriété suivante de $\mathrm{LJ}_{\mathbb{C}}$.

Langlands-Jacquet. ([3],[8], Cor. 2.1.5)– *L'application* $\mathrm{LJ}_{\mathbb{C}}$ *envoie* $\mathcal{R}(G, \mathbb{C})$ *dans* $\mathcal{R}(D^\times, \mathbb{C})$. *De plus, pour toute $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$, on a $\mathrm{LJ}_{\mathbb{C}}([\pi]) = 0$ ou $\mathrm{LJ}_{\mathbb{C}}([\pi]) = \pm[\rho]$ pour une représentation $\rho \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(D^\times)$.*

1.2 Correspondances ℓ-modulaires

Soit maintenant $\ell \neq p$ un nombre premier. Notre but est de généraliser autant que possible les énoncés précédents aux $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations. Il y a deux approches possibles pour cela.

(1.2.1) *Caractères de Brauer.* L'approche directe se heurte à deux difficultés. D'une part il n'y a pas de notion évidente de série discrète sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, ce qui laisse perplexe quant à l'image d'une éventuelle injection $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$. D'autre part, bien que Vignéras ait adapté la théorie des caractères de Harish-Chandra aux $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations, ces caractères ne conduisent qu'à un transfert $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ et ne peuvent donc pas induire un *unique* transfert éventuel $\mathcal{R}(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times,\overline{\mathbb{F}}_\ell)$. De même une formule des traces modulo ℓ ne donne a priori que des informations “modulo ℓ”.

C'est pourquoi nous développons une notion de *caractère de Brauer*, calquée sur celle de Brauer pour les groupes finis. Il s'agit *grosso-modo* d'un homomorphisme

$$\widetilde{\theta}^G : \mathcal{R}(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{ell}}_{\ell'},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G$$

qui relève “canoniquement” le caractère ordinaire, mais que l'on ne définit que sur les éléments elliptiques “d'ordre premier à ℓ”. Nous renvoyons au théorème (2.1.4) et à la proposition (2.1.6) pour un énoncé précis de ses propriétés. Notons que M.-F. Vignéras avait déjà défini un caractère de Brauer en étendant l'approche de Harish-Chandra. Son manuscrit est resté non publié depuis 1998 et nous le reproduisons en appendice. Notre approche est différente et repose sur [16]. En l'état actuel, elle est aussi plus générale puisque nous définissons le caractère de Brauer sur tout élément semi-simple régulier compact, et pas seulement sur les elliptiques réguliers. De plus, notre construction fonctionne encore lorsque le corps local de définition est de caractéristique positive.

(1.2.2) *Congruences.* L'autre approche est de transporter les correspondances de $\mathbb{C}$ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, puis d'étudier les compatibilités aux congruences et à la réduction “modulo ℓ”. Un bon point est que le transfert de $\mathbb{C}$ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ se passe bien.

Fait.– Si l'on admet l'existence d'un isomorphisme[1] $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, les applications $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ et $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ que l'on en déduit ne dépendent pas du choix de cet isomorphisme, *cf.* [8, 2.1.1]. De plus, elles envoient représentations ℓ-entières sur représentations ℓ-entières, *cf.* (3.1.1).

Mais on voit rapidement que $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ ne peut pas être compatible, via la réduction modulo ℓ, avec une application analogue $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$. Par exemple, pour $d=2$, $q \equiv -1[\ell]$, la triviale $1_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ de $D^\times$ correspond à la Steinberg $\mathrm{St}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$, dont la réduction modulo ℓ est de longueur 2. C'est pourquoi, à rebours du cas complexe, on commence par étudier LJ.

(1.2.3) *Langlands-Jacquet modulo ℓ.* La preuve du résultat suivant est donnée au paragraphe (3.1.2). Elle utilise l'existence et les propriétés du caractère de Brauer, ainsi que la classification “à la Zelevinsky” par Vignéras des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles.

Théorème.– *Il existe un morphisme de groupes abéliens $\mathcal{R}(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \xrightarrow{\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}} \mathcal{R}(D^\times,\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ rendant commutatifs les deux diagrammes suivants :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{ell}}_{\ell'},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{C}^\infty(D^{\mathrm{ell}}_{\ell'},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)^{D^\times} \\ \mathcal{R}(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \arrow[u, "\tilde{\theta}^G"] \arrow[r, dotted, "\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}"'] & \mathcal{R}(D^\times,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \arrow[u, "\tilde{\theta}^{D^\times}"'] \end{tikzcd} \quad \textit{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{R}^{\mathrm{ent}}(G,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}"] \arrow[d, "r_\ell^G"'] & \mathcal{R}^{\mathrm{ent}}(D^\times,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[d, "r_\ell^{D^\times}"] \\ \mathcal{R}(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \arrow[r, dotted, "\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}"'] & \mathcal{R}(D^\times,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \end{tikzcd}.$$

De plus, ce morphisme est uniquement déterminé par l'un ou l'autre de ces diagrammes.

Ici, l'application r_ℓ^G désigne l'application de réduction modulo ℓ, ou “décomposition”, dont l'existence est prouvée dans [32, II.5.11b]. Notons que, contrairement au cas complexe, il est facile de voir que l'image d'une irréductible par $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ n'est pas nécessairement nulle ou “irréductible au signe près”. Par contre, on peut espérer que la variante suivante est vraie.

Question.– Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$. La représentation virtuelle $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)$ est-elle effective au signe près ?

Nous discutons quelques cas où cette propriété est non-trivialement vraie dans la section 3.2. Pour y répondre en général, en admettant l'analogue modulaire de l”'analogue p-adique des conjectures de

[1] Heureusement, on n'a pas besoin de supposer l'existence de tels isomorphismes pour définir $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ et $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$, car les séries discrètes de G, comme les irréductibles de $D^\times$, sont “essentiellement” définies sur la clôture de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$.

Kazhdan-Lusztig" (fortement plausible), on est ramené à examiner certains signes dans la matrice inverse de certaine matrice de polynômes de Kazhdan-Lusztig. Mais l'auteur n'a pas su tirer parti de cette traduction "concrète".

REMARQUE.– Nous montrerons dans [9] comment la tour de Lubin-Tate fournit une réalisation cohomologique de l'application $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$.

(1.2.4) *Jacquet-Langlands modulo ℓ.* Puisque nous disposons maintenant de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$, il est naturel de rechercher $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ sous la forme d'une section remarquable de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$. Comme on l'a déjà mentionné, la section $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ n'est en général pas compatible à la réduction modulo ℓ, *cf* l'exemple (3.1.3). En fait, cet exemple montre aussi qu'il n'existe pas nécessairement de section de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ envoyant les irréductibles sur des irréductibles. Néanmoins, le théorème ci-dessous exhibe une section de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ qui envoie les irréductibles sur des irréductibles au signe près.

Pour caractériser l'image de cette section, rappelons que dans la classification de Zelevinsky des représentations complexes en termes de multisegments, un rôle important est joué par les représentations "de Speh", qui sont celles associées aux segments. Ces représentations sont échangées avec les "séries discrètes" par l'involution de Zelevinsky $Z_{\mathbb{C}}$ sur $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$.

De même, sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, on peut associer une représentation "de Speh" à tout segment cuspidal, et on dit que c'est une représentation "*super*Speh" si le segment est *super*cuspidal, *cf.* paragraphe (2.2.3). Le résultat suivant est prouvé au paragraphe (3.1.8).

THÉORÈME.– *Il existe une injection* ${}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} : \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(D^\times) \hookrightarrow \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$*, caractérisée par les propriétés suivantes :*

– *son image est l'ensemble des représentations "superSpeh".*

– *pour toute* $\rho \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(D^\times)$*, on a* $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}[{}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\rho)] = \pm[\rho]$.

Elle est aussi uniquement déterminée par la relation suivante à $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$*. Pour toute* $\rho \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(D^\times)$ *et tout relèvement* $\tilde{\rho} \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(D^\times)$*, la représentation* $Z_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\rho}))$ *est entière, de réduction irréductible, et on a*

$$ {}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\rho) = r_\ell(Z_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\rho}))). $$

Notons que comme $D^\times$ est résoluble, le théorème de Fong-Swan assure que toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-irréductible ρ se relève. Précisons aussi que la seconde partie du théorème ne signifie pas que la composée $Z_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \circ \mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ est compatible à la réduction modulo ℓ. Elle ne l'est généralement pas, toujours par l'exemple (3.1.3).

Néanmoins, la situation rappelle celle de la correspondance de Langlands modulo ℓ puisque, d'après [28, 1.8], seule la correspondance de Langlands *composée avec l'involution de Zelevinsky* a des propriétés de compatibilité partielle à la réduction modulo ℓ. Comme dans *loc. cit.*, il est donc tentant d'utiliser l'involution de Zelevinsky-Vignéras $Z_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ sur $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$, voir [26], pour *définir* la correspondance de Jacquet-Langlands par la formule :

$$ \mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} := Z_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} \circ {}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}. $$

(1.2.5) *Correspondance de Langlands modulo ℓ pour $D^\times$.* Notons

$$ \sigma^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} : \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}^d_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(WD_K) $$

la correspondance de Langlands-Vignéras entre $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de G et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de Weil-Deligne de dimension d, voir [28, 1.8]. Rappelons qu'une représentation de Weil-Deligne est un couple $\sigma = (\sigma^{\mathrm{ss}}, N)$ formé d'une représentation *semi-simple* σ^{ss} "du" groupe de Weil W_K de K et d'un homomorphisme *nilpotent* $N : \sigma^{\mathrm{ss}} \longrightarrow \sigma^{\mathrm{ss}}(-1)$.

COROLLAIRE.– *L'application* $\sigma^{D^\times}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} := \sigma^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} \circ \mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ *est une bijection* $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(D^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}^d_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(WD_K)^{\mathrm{indec}}$ *entre* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentations irréductibles de* $D^\times$ *et* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentations de Weil-Deligne indécomposables de dimension d, caractérisée par la propriété suivante : si* $\rho \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(D^\times)$ *et* $\tilde{\rho}$ *est un relèvement de* ρ *à* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*, alors* $\sigma^{D^\times}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\rho) = R_\ell(\sigma^{D^\times}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\rho}))$.

Ici, $\sigma^{D^\times}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} = \sigma^{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \circ \mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ est la correspondance de Langlands classique pour $D^\times$, et R_ℓ est l'application de réduction modulo ℓ des (classes de) $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentaitions de Weil-Deligne entières, implicite dans [28, 1.8], et qui sera expliquée dans un article à venir.

La morale de ce corollaire est qu'une certaine forme du principe de fonctorialité semble être envisageable pour les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations. Mais ce principe de fonctorialité, s'il existe, fera plutôt intervenir le SL_2 d'Arthur que celui de Deligne-Langlands.

2 Caractères de Brauer et groupes de Grothendieck

Dans cette section, nous construisons le caractère de Brauer d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation lisse de longueur finie d'un groupe réductif p-adique quelconque, et nous spéculons sur les propriétés que l'on peut en attendre, par analogie avec les groupes finis. Puis nous rappelons les classifications de Zelevinsky et Vignéras des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_d(K)$ pour en déduire la surjectivité de la réduction modulo ℓ entre groupes de Grothendieck, qui est un point clef de la construction de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$. Enfin nous prouvons quelques propriétés des représentations de $D^\times$ utilisées dans la construction de ${}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$.

2.1 Caractère de Brauer

(2.1.1) *Rappels terminologiques.* Dans cette section, G désigne un groupe réductif p-adique quelconque, et $Z(G)$ désigne son centre. Un élément γ de G est dit *semi-simple régulier* si son centralisateur connexe $Z_G(\gamma)^\circ$ est un tore de G. Lorsque ce tore est anisotrope modulo $Z(G)$, on dit que γ est *elliptique.* Par exemple, pour $G = \mathrm{GL}_d(K)$ ou $D^\times$, l'élément γ est semi-simple régulier si et seulement si son polynôme minimal est séparable de degré d, et il est de plus elliptique si et seulement si ce polynôme minimal est de plus irréductible.

Rappelons aussi qu'un élément γ de G est *compact* si le sous-groupe qu'il engendre est relativement compact. Si Z est un sous-groupe fermé central de G on dira que γ est *compact modulo Z* si son image dans G/Z est un élément compact. De manière équivalente, γ est compact, resp. compact modulo $Z(G)$, s'il fixe un point de l'immeuble étendu de G, resp. de l'immeuble semi-simple (*i.e.* non étendu) X de G. En conséquence, un élément compact modulo le centre normalise des sous-groupes ouverts compacts arbitrairement petits.

Un élément elliptique γ est compact modulo le centre et l'ensemble des points fixes X^γ de γ dans l'immeuble de G est compact. Réciproquement, un élément semi-simple régulier dont l'ensemble des points fixes X^γ est compact, est elliptique.

L'ensemble G^{rs} des éléments semi-simples réguliers de G est ouvert dans G et stable par conjugaison. Pour tout anneau Λ, on note $\mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{rs}}, \Lambda)^G$ le Λ-module des fonctions à valeurs dans Λ sur G^{rs} qui sont localement constantes et invariantes par conjugaison. On utilisera des notations similaires $\mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{crs}}, \Lambda)^G$ et $\mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{ell}}, \Lambda)^G$ où les notations G^{crs} et G^{ell} désignent respectivement les sous-ensembles ouverts de G formés des éléments semi-simples réguliers et compacts modulo le centre, resp. elliptiques.

Si π est une représentation admissible de G sur un corps, les opérateurs $\pi(\mu)$, pour μ dans l'algèbre de Hecke de G, sont à image finie. Moyennant le choix d'une mesure de Haar dg sur G, on obtient un caractère-distribution $f \mapsto \mathrm{tr}(\pi(f dg))$ sur G. Lorsque le corps de coefficients est $\mathbb{C}$, Harish Chandra a montré que cette distribution est donnée par intégration contre une fonction invariante lisse définie sur G^{rs}. Pour un corps de coefficients de caractéristique différente de p, Vignéras et Waldspurger ont étendu les arguments de Harish Chandra, puis récemment Meyer et Solleveld ont trouvé une approche différente de ce résultat.

Rappelons que $\mathcal{R}(G, \Lambda)$ désigne le groupe de Grothendieck des représentations Λ-admissibles de longueur finie.

(2.1.2) Théorème. (Caractère ordinaire, [17], Thms 7.2 et 7.4 et [31], Thm. E.4.4)− *Supposons $\Lambda = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Il existe un unique homomorphisme*

$$\mathcal{R}(G, \Lambda) \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{rs}}, \Lambda)^G$$

appelé caractère ordinaire*, tel que pour toute $\pi \in \mathrm{Irr}_\Lambda(G)$ et tout $\gamma \in G^{\mathrm{rs}}$ il existe un sous-groupe ouvert compact $H_{\pi,\gamma}$ tel que pour tout pro-p-sous-groupe ouvert $H \subset H_{\pi,\gamma}$, on ait l'égalité*

$$\theta_\pi(\gamma) = \mathrm{tr}(\pi(\varepsilon_H * \gamma * \varepsilon_H)) \tag{2.1.2.1}$$

où ε_H désigne la mesure de Haar normalisée de H (un idempotent de l'algèbre de Hecke de G).

M.-F. Vignéras a proposé une définition, reproduite en appendice, du caractère de Brauer d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation sur certains éléments elliptiques. Nous allons ici utiliser les techniques de Meyer et Solleveld pour définir un caractère de Brauer sur certains éléments semi-simples réguliers et compacts modulo le centre.

(2.1.3) *Rappel sur la notion de caractère de Brauer.* Soit $\mu^{\ell'}(\Lambda)$ le groupe des racines de l'unité de l'anneau Λ qui sont d'ordre premier à ℓ. L'homomorphisme de réduction $r_\ell : \overline{\mathbb{Z}}_\ell \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell$ induit une bijection $\mu^{\ell'}(\overline{\mathbb{Z}}_\ell) \longrightarrow \mu^{\ell'}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ dont on note ι la bijection réciproque. On la prolonge en 0 en posant $\iota(0) := 0$.

Soit V un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel et ρ un endomorphisme de V tels que

B1) ρ satisfait l'égalité $\rho^{n+1} = \rho$ pour un entier n premier à ℓ,

B2) l'image de ρ est de dimension finie.

Alors pour tout sous-espace W de V contenant $\rho(V)$, l'endomorphisme $\rho_{|W}$ de W est diagonalisable à valeurs propres dans $\mu^{\ell'}(\overline{\mathbb{F}}_\ell) \cup \{0\}$. De plus, la multiplicité des valeurs propres non nulles est indépendante de W. Ainsi, notant $\mathrm{Sp}(\rho_{|W})$ le multi-ensemble de ces valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, la somme

$$\tilde{\mathrm{tr}}(\rho) := \sum_{\zeta \in \mathrm{Sp}(\rho_{|W})} \iota(\zeta) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell$$

est indépendante du choix de W puisque $\iota(0) = 0$. Les propriétés élémentaires de cette "trace de Brauer" sont résumées dans le lemme suivant :

Lemme.– *Avec les notations ci-dessus,*

i) *On a l'égalité $r_\ell(\tilde{\mathrm{tr}}(\rho)) = \mathrm{tr}(\rho)$.*

ii) *Si $\tilde\rho$ est un endomorphisme d'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel $\tilde V$ satisfaisant les propriétés B1) et B2) ci-dessus, et dont l'image contient un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau ω stable sous $\tilde\rho$ de réduction isomorphe à (V, ρ), alors $\tilde{\mathrm{tr}}(\rho) = \mathrm{tr}(\tilde\rho)$.*

iii) *Supposons qu'il existe une décomposition $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ et une permutation σ de I* sans points fixes *telle que $\forall i \in I$, $\rho(V_i) \subset V_{\sigma(i)}$. Alors $\tilde{\mathrm{tr}}(\rho) = 0$.*

iv) *Si $0 \longrightarrow (V_1, \rho_1) \longrightarrow (V_2, \rho_2) \longrightarrow (V_3, \rho_3) \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte, alors $\sum_{i=1}^{3} (-1)^i \tilde{\mathrm{tr}}(\rho_i) = 0$.*

Preuve. Les propriétés i) et iv) sont immédiates. La propriété ii) vient du fait que ω est somme directe de sous-$\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-modules propres pour ρ puisque l'équation $X^{n+1} - X$ est séparable sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Prouvons la propriété iii). On a $\rho(V) = \sum_{i\in I} \rho(V_i) \subset \sum_{i \in I}(\rho(V) \cap V_{\sigma(i)})$. Comme $\tilde{\mathrm{tr}}(\rho) = \tilde{\mathrm{tr}}(\rho_{|\rho(V)})$, on est ainsi ramené au cas où $V = \rho(V)$ est de dimension finie et ρ est un automorphisme d'ordre n premier à ℓ. Dans ce cas ρ induit un isomorphisme $V_i \xrightarrow{\sim} V_{\sigma(i)}$ pour tout i. Choisissant une base de chaque V_i pour i dans un système de représentants des orbites de σ dans I, on se ramène au cas où les V_i sont de dimension 1. Enfin, puisque ρ stabilise $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_{\sigma^n(i)}$, on peut supposer que σ a une seule orbite dans I. Dans ce cas, $d := \dim(V)$ divise n et ρ est la matrice de permutation circulaire d'une base de V. Ses valeurs propres sont les puissances d'une racine d-ème de l'unité et ont multiplicité 1. Leur somme est donc nulle et il s'ensuit que $\tilde{\mathrm{tr}}(\rho) = 0$. □

Remarque.– L'hypothèse n premier à ℓ dans B1) n'est pas nécessaire pour définir $\tilde{\mathrm{tr}}(\rho)$. Sans cette hypothèse les propriétés i) et iv) ci-dessus sont encore vraies mais les propriétés ii) et iii) ne le sont généralement plus.

On s'intéresse au cas où V est l'espace d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation π de G et $\rho = \pi(\gamma * \varepsilon_H)$ où H est un pro-p-sous-groupe ouvert normalisé par un élément γ de G. Ceci implique en particulier que γ est compact modulo le centre. La condition B2) est vérifiée si π est supposée *admissible*. Pour s'assurer que la condition B1) le soit on introduit les notions suivantes :

Définition.– *Soit Z un sous-groupe fermé central de G. Un élément γ de G est dit* d'ordre premier à ℓ modulo Z, *s'il satisfait à l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

i) il existe un pro-p-sous-groupe ouvert H et un entier n premier à ℓ tel que $\gamma^n \in H.Z$.

ii) l'adhérence du sous-groupe engendré par g dans G/Z est un groupe profini de pro-ordre premier à ℓ.

L'équivalence entre les deux conditions découle de la pro-nilpotence des pro-p-groupes. Reprenant la discussion précédente, on remarque que la condition B2) est vérifiée par $\rho = \pi(\gamma * \varepsilon_H)$ lorsqu'il existe un sous-groupe fermé central Z de G tel que

– γ est d'ordre premier à ℓ modulo Z

– π est Z-*semisimple* au sens où $\pi(\overline{\mathbb{F}}_\ell[Z]) \subset \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(V)$ est une algèbre semi-simple.

Par exemple, ces conditions sont remplies si γ est d'ordre premier à ℓ et π admissible, ou si γ est d'ordre premier à ℓ modulo le centre et π admet un caractère central. Dans chacun de ces cas on a alors l'égalité

$$\tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma * \varepsilon_H)) = \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma)_{|V^H}).$$

Nous noterons $G^{\mathrm{crs}}_{\ell'/Z}$, resp. $G^{\mathrm{ell}}_{\ell'/Z}$ l'ensemble des éléments compacts modulo Z, resp. elliptiques, de pro-ordre premier à ℓ modulo Z au sens ci-dessus. Ces ensembles sont clairement stables par conjugaison et ouverts.

(2.1.4) Théorème. (Caractère de Brauer)– *Soit (π, V) une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation de longueur finie de G et Z un sous-groupe central fermé de G tel que π soit Z-semisimple. Il existe une fonction*

$$\tilde{\theta}_\pi \in \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{crs}}_{\ell'/Z}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G,$$

appelée caractère de Brauer de π, *et caractérisée par la propriété suivante : pour tout $\gamma \in G^{\mathrm{crs}}_{\ell'/Z}$ il existe un sous-groupe ouvert compact $H_{\pi,\gamma}$ tel que pour tout pro-p-sous-groupe ouvert $H \subset H_{\pi,\gamma}$ normalisé par γ, on ait l'égalité*

(2.1.4.1) $$\tilde{\theta}_\pi(\gamma) = \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma)_{|V^H}).$$

Preuve. Nous allons utiliser les résultats d'acyclicité de [16] généralisant ceux de [19]. Rappelons de quoi il s'agit. Nous avons besoin de la structure polysimpliciale de l'immeuble semi-simple X de G et noterons pour cela X_q l'ensemble des facettes de dimension q de X. Le stabilisateur d'une facette σ est noté $P_\sigma^\dagger$. Nous utiliserons aussi les pro-p-sous-groupes ouverts distingués $U_\sigma^{(e)}$ de $P_\sigma^\dagger$, pour $e \geqslant 1$ entier, introduits par Schneider et Stuhler dans [19, I.2.7]. Le théorème 2.4 de [16] affirme que pour toute représentation lisse (π, V) de G sur laquelle p est inversible, et tout sous-complexe polysimplicial *convexe* Σ de X, le complexe cellulaire $C_*(\Sigma, \sigma \mapsto V^{U_\sigma^{(e)}})$ est une résolution du sous-espace $V_\Sigma := \sum_{x\in\Sigma_0} V^{U_x^{(e)}}$. Le cas $\Sigma = X$ remonte à [19, II.3.1].

Choisissons e assez grand pour que $V = \sum_{x\in X_0} V^{U_x^{(e)}}$. Fixons aussi un élément $\gamma \in G$, semi-simple régulier et compact modulo le centre. Soit H un pro-p-sous-groupe ouvert normalisé par γ. On peut alors trouver un sous-complexe polysimplicial convexe *fini* Σ de X, stable par H et γ, et tel que $V^H \subset V_\Sigma := \sum_{x\in\Sigma_0} V^{U_x^{(e)}}$. Pour un tel Σ, le sous-espace V_Σ est de dimension finie, muni d'une action du groupe $\langle H, \gamma\rangle$ engendré par H et γ, et le complexe cellulaire $C_*(\Sigma, \sigma \mapsto V^{U_\sigma^{(e)}})$ est une résolution $\langle H, \gamma\rangle$- équivariante de V_Σ. Supposons de plus γ d'ordre premier à ℓ modulo Z. C'est encore le cas de tout élément de $\langle H, \gamma\rangle$, et tout tel élément agit donc par un automorphisme de degré premier à ℓ sur V_Σ. En utilisant successivement les propriétés iv) et iii) du lemme (2.1.3), on obtient pour tout $g \in \langle H, \gamma\rangle$,

(2.1.4.2) $$\tilde{\mathrm{tr}}\left(\pi(g)_{|V_\Sigma}\right) = \sum_{\sigma\in\Sigma^g} (-1)^{\dim\sigma} \epsilon_\sigma(g) \tilde{\mathrm{tr}}\left(\pi(g)_{|V^{U_\sigma^{(e)}}}\right).$$

Ici Σ^g désigne l'ensemble des facettes σ de Σ qui sont stables par g, *i.e.* telles que $g \in P_\sigma^\dagger$. De plus, $\epsilon_\sigma : P_\sigma^\dagger \longrightarrow \{\pm 1\}$ est le caractère décrivant l'action de $P_\sigma^\dagger$ sur les orientations de σ.

Par ailleurs, soit $U_\Sigma^{(e)} := \bigcap_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma^{(e)}$. C'est un pro-$p$-sous-groupe ouvert de G qui agit trivialement sur V_Σ et dont l'intersection avec $\langle H,\gamma\rangle$ est distinguée dans celui-ci. D'après le lemme (2.1.5) appliqué à $\Gamma := \langle H,\gamma\rangle/(\langle H,\gamma\rangle \cap U_\Sigma^{(e)})$, $P := H/(H\cap U_\Sigma^{(e)})$ et γ, on a

$$\tilde{\mathrm{tr}}\left(\pi(\gamma)_{|V^H}\right) = \frac{1}{[H:(H\cap U_\Sigma^{(e)})]} \sum_{h\in H/(H\cap U_\Sigma^{(e)})} \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(h\gamma)_{|V_\Sigma}). \tag{2.1.4.3}$$

Supposons momentanément que γ est *elliptique*, de sorte que X^γ est un complexe polysimplicial fini. Posons $H_{\pi,\gamma} := \bigcap_{\sigma\in X^\gamma} U_\sigma^{(e)}$. C'est un pro-$p$-sous-groupe ouvert de G normalisé par γ, et qui fixe un voisinage de X^γ dans X (car $e \geqslant 1$). Par conséquent on a $X^{h\gamma} = X^\gamma$ pour tout $h \in H_{\pi,\gamma}$. De plus, comme $H_{\pi,\gamma}$ agit trivialement sur $V^{U_\sigma^{(e)}}$ pour toute facette $\sigma \in X^\gamma$, la formule (2.1.4.2) montre que pour tout Σ tel que $V_\Sigma \supset V^{H_{\pi,\gamma}}$, on a

$$\forall h \in H_{\pi,\gamma},\ \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(h\gamma)_{|V_\Sigma}) = \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma)_{|V_\Sigma}).$$

Soit alors $H \subset H_{\pi,\gamma}$ un sous-groupe ouvert normalisé par γ. La formule (2.1.4.3), appliquée à un Σ qui contient X^γ et pour lequel on a $V_\Sigma \supset V^H$, donne

$$\tilde{\mathrm{tr}}\left(\pi(\gamma)_{|V^H}\right) = \tilde\theta_\pi(\gamma) := \sum_{\sigma\in X^\gamma} (-1)^{\dim\sigma} \epsilon_\sigma(\gamma) \tilde{\mathrm{tr}}\left(\pi(\gamma)_{|V^{U_\sigma^{(e)}}}\right),$$

ce qui montre que le terme de gauche est indépendant de H, pourvu que $H \subset H_{\pi,\gamma}$. La fonction $\gamma \mapsto \tilde\theta_\pi(\gamma)$ ainsi définie est constante sur $H_{\pi,\gamma}\gamma$ et manifestement invariante par conjugaison ; elle appartient bien à $\mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{ell}}_{\ell'/Z}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G$.

Revenons au cas général d'un élément γ semi-simple régulier et d'ordre premier à ℓ modulo Z. Dans ce cas, X^γ n'est plus nécessairement fini et l'intersection $\bigcap_{\sigma\in X^\gamma} U_\sigma^{(e)}$ n'est plus nécessairement ouverte dans G. Cependant, fixons $\sigma_0 \in X^\gamma$: nous allons suivre les arguments de Meyer et Solleveld dans [17] pour prouver l'assertion suivante :

(*) : il existe un pro-p-sous-groupe ouvert distingué $H_{\pi,\gamma}$ de $P^\dagger_{\sigma_0}$ tel que pour tout Σ convexe fini stable sous $P^\dagger_{\sigma_0}$ et tout $h \in H_{\pi,\gamma}$, on a $\tilde{\mathrm{tr}}(\pi(h\gamma)_{|V_\Sigma}) = \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma)_{|V_\Sigma})$.

Admettons momentanément (*) et supposons H normalisé par γ et inclus dans $H_{\pi,\gamma}$. Choisissons Σ convexe fini stable sous $P^\dagger_{\sigma_0}$ tel que $V_\Sigma \supset V^H$. On a donc aussi $V_\Sigma \supset V^{H_{\pi,\gamma}}$. La formule (2.1.4.3) montre alors que $\tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma)_{|V^H})$ est égal à $\tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma)_{|V^{H_{\pi,\gamma}}})$ et est donc indépendant de H. La fonction $\gamma \mapsto \tilde\theta_\pi(\gamma) := \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma)_{|V^{H_{\pi,\gamma}}})$ est constante sur $H_{\pi,\gamma}\gamma$ et donc lisse sur $G^{crs}_{\ell'}$. Notons qu'on a encore des formules du type

$$\tilde\theta_\pi(\gamma) = \sum_{\sigma\in X_\gamma} (-1)^{\dim\sigma} \epsilon_\sigma(\gamma) \tilde{\mathrm{tr}}\left(\pi(\gamma)_{|V^{U_\sigma^{(e)}}}\right),$$

pour $X_\gamma \subset X^\gamma$ convenable, par exemple $X_\gamma = \Sigma^\gamma$ pour Σ comme ci-dessus. Si $g \in G$, on voit facilement que $\tilde\theta_\pi(g\gamma g^{-1}) = \sum_{\sigma\in gX_\gamma g^{-1}} (-1)^{\dim\sigma}\epsilon_\sigma(g\gamma g^{-1})\tilde{\mathrm{tr}}\left(\pi(g\gamma g^{-1})_{|V^{U_\sigma^{(e)}}}\right)$, d'où l'on déduit que $\tilde\theta_\pi$ est invariante par conjugaison, et appartient donc à $\mathcal{C}^\infty(G^{crs}_{\ell'}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G$.

Reste donc à prouver (*). Soit T le tore centralisateur de γ. D'après [14, 9.1] l'ensemble X^γ est compact modulo l'action de T. Il s'ensuit que l'intersection

$$T_{\pi,\gamma} := T \cap \left(\bigcap_{\sigma\in X^\gamma} U_\sigma^{(e)}\right)$$

est un sous-groupe ouvert de T. Comme plus haut dans le cas elliptique, on a $X^{t\gamma} = X^\gamma$ pour tout $t \in T_{\pi,\gamma}$, et puisque $T_{\pi,\gamma}$ agit trivialement sur chaque $V^{U_\sigma^{(e)}}$ pour $\sigma \in X^\gamma$, on en tire pour tout Σ convexe l'égalité

$$\forall t \in T_{\pi,\gamma},\ \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(t\gamma)_{|V_\Sigma}) = \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma)_{|V_\Sigma}).$$

Supposons de plus Σ stable sous $P^\dagger_{\sigma_0}$. Le sous-espace V_Σ est alors aussi stable sous $P^\dagger_{\sigma_0}$ et la fonction $g \in P^\dagger_{\sigma_0} \mapsto \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(g)_{|V_\Sigma})$ est clairement invariante par conjugaison sous $P^\dagger_\sigma$. En d'autres termes on a

$$\forall g \in P^\dagger_{\sigma_0},\ \forall t \in T_{\pi,\gamma},\ \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(gt\gamma g^{-1})_{|V_\Sigma}) = \tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma)_{|V_\Sigma}).$$

Or il est bien connu que l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_\gamma : & G \times T & \rightarrow & G \\ & (g,t) & \mapsto & gt\gamma g^{-1} \end{array}$$

est ouverte. Il suffit donc de prendre pour $H_{\pi,\gamma}$ n'importe quel sous-groupe ouvert, normalisé par γ, et tel que $H_{\pi,\gamma}.\gamma \subset \psi_\gamma(P^\dagger_{\sigma_0} \times T_{\pi,\gamma})$. On trouvera dans [17, Lemma 6.5] un exemple de $H_{\pi,\gamma}$ explicite.

□

(2.1.5) Lemme.– *Soit Γ un groupe fini, P un p-sous-groupe de Γ, et $\gamma \in \Gamma$ un élément d'ordre premier à ℓ qui normalise P. Alors pour toute représentation (π, V) de Γ, on a l'égalité*

$$\tilde{\mathrm{tr}}(\gamma_{|V^P}) = \frac{1}{|P|} \sum_{h \in P} \tilde{\mathrm{tr}}(\gamma h).$$

Preuve. Rappelons que $\tilde{\mathrm{tr}}(\gamma_{|V^P}) = \tilde{\mathrm{tr}}(\frac{1}{|P|}\sum_{h\in P} \gamma h)$. Ainsi la propriété que l'on veut montrer est une propriété de linéarité de $\tilde{\mathrm{tr}}$ dans un cas bien précis. Notons qu'il suffit de prouver l'énoncé lorsque Γ est engendré par P et γ, et par conséquent on peut supposer P distingué dans Γ. Soit alors $P' \subset P$ un sous-groupe distingué dans Γ. Si l'on sait prouver l'énoncé pour le triplet (Γ, P', γ) et le triplet $(\Gamma/P', P/P', \gamma.P')$, alors on l'en déduit immédiatement pour le triplet (Γ, P, γ). Comme un p-groupe est nilpotent, on voit qu'il suffit de prouver l'énoncé lorsque P est abélien. Mais alors on a une décomposition P-équivariante $V = V^P \oplus \bigoplus_{\chi\neq 1} V_\chi$ de V selon les caractères de P. Comme il est clair que $\tilde{\mathrm{tr}}(\gamma_{|V^P}) = \frac{1}{|P|}\sum_{h\in P} \tilde{\mathrm{tr}}(\gamma h_{|V^P})$, il nous suffira de prouver que $\sum_{h\in P} \tilde{\mathrm{tr}}(\gamma h_{|\bigoplus_{\chi\neq 1} V_\chi}) = 0$. Décomposons la somme

$$\bigoplus_{\chi \in \hat{P}, \chi\neq 1} V_\chi = \bigoplus_{[\chi]\in(\hat{P}/\gamma), [\chi]\neq 1} V_{[\chi]} \quad \text{avec} \quad V_{[\chi]} = \bigoplus_{\chi\in[\chi]} V_\chi$$

selon les orbites de γ dans le dual $\hat{P}$ de P. Pour une orbite $[\chi]$ de cardinal > 1, la propriété iv) du lemme (2.1.3) montre que $\tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma h)_{|V_{[\chi]}}) = 0$ pour tout h. Pour une orbite de cardinal 1, on a

$$\sum_{h\in P} \tilde{\mathrm{tr}}(\gamma h_{|V_\chi}) = \tilde{\mathrm{tr}}(\gamma_{|V_\chi}) \left(\sum_{h\in P} \iota(\chi(h)) \right)$$

et la somme dans le terme de droite est nulle dès que χ est non trivial. □

De l'égalité (2.1.4.1), il apparait clairement que si $\pi' \subset \pi$, alors $\tilde{\theta}_\pi = \tilde{\theta}_{\pi'} + \tilde{\theta}_{\pi/\pi'}$. Par contre le domaine de définition de $\theta_{\pi'}$ peut être plus grand que celui de θ_π. Par exemple, comme les irréductibles ont des caractères centraux, leurs caractères de Brauer sont définis sur tout élement d'ordre premier à ℓ modulo $Z(G)$. Ainsi on peut définir par linéarité un homomorphisme de groupes abéliens

$$\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \xrightarrow{\tilde{\theta}} \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{crs}}_{\ell'}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G$$

où nous avons posé $G^{\mathrm{crs}}_{\ell'} := G^{\mathrm{crs}}_{\ell'/Z(G)}$ pour alléger les notations.

Par ailleurs, nous noterons aussi $\mathcal{R}^{\mathrm{ent}}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, resp. $\mathcal{R}^{\mathrm{ent}}_{\ell'}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, le sous-groupe de $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ engendré par les représentations irréductibles $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-entières au sens de [32, II.4], resp. $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-entières et à caractère central d'ordre fini et premier à ℓ. Le principe de Brauer-Nesbitt [32, II.5.11.b)], nous fournit un morphisme de réduction $r_\ell : \mathcal{R}^{\mathrm{ent}}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ (aussi appelé "application de décomposition").

(2.1.6) Proposition.– *Les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \arrow[r, "\tilde\theta"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{crs}}_{\ell'},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G \arrow[d, "r_\ell"] \\ \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{crs}},\overline{\mathbb{F}}_\ell)^G \arrow[r, "_{|G^{\mathrm{crs}}_{\ell'}}"'] & \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{crs}}_{\ell'},\overline{\mathbb{F}}_\ell)^G \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{R}^{\mathrm{ent}}_{\ell'}(G,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "r_\ell"'] & \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{crs}},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G \arrow[d, "_{|G^{\mathrm{crs}}_{\ell'}}"] \\ \mathcal{R}(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \arrow[r, "\tilde\theta"] & \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{crs}}_{\ell'},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G \end{tikzcd}.$$

Preuve. Prouvons la commutativité du premier diagramme. Par les caractérisations (2.1.4.1) de $\tilde\theta$ et (2.1.2.1) de θ, il suffit de prouver que pour tout élément $\gamma \in G^{crs}_{\ell'}$ et tout H normalisé par γ, on a $\mathrm{tr}(\pi(\gamma * \varepsilon_H)) = r_\ell(\tilde{\mathrm{tr}}(\pi(\gamma * \varepsilon_H)))$, ce qui découle de la propriété i) du lemme (2.1.3). Pour prouver la commutativité du second diagramme de l'énoncé, il suffit de partir de $\tilde\pi$ irréductible et entière et de prouver que pour tout γ, H comme ci-dessus on a $\mathrm{tr}(\tilde\pi(\gamma * \varepsilon_H)) = \tilde{\mathrm{tr}}(r_\ell\tilde\pi(\gamma * \varepsilon_H))$. Or ceci découle de la propriété ii) du lemme (2.1.3), à condition que $\rho := \gamma * \varepsilon_H$ satisfasse une équation $\rho^{n+1} = \rho$ avec n premier à ℓ. Ceci est toujours le cas si le caractère central de π est d'ordre fini et premier à ℓ. $\square$

(2.1.7) *Éléments non compacts.* On peut étendre le caractère de Brauer à certains éléments semi-simples réguliers γ de la manière suivante. Soit (P^+_γ, P^-_γ) la paire de sous-groupes paraboliques opposés associée à γ, et $M_\gamma = P^+_\gamma \cap P^-_\gamma$ leur composante de Levi commune. Alors γ est compact modulo le centre de M_γ. Supposons-le d'ordre premier à ℓ modulo ce centre. On pose alors

$$\tilde\theta_\pi(\gamma) := \tilde\theta_{r_{P_\gamma}(\pi)}(\gamma)^{\mathrm{ss}}$$

où r_{P_γ} désigne le foncteur de Jacquet associé à P_γ et le signe $^{\mathrm{ss}}$ désigne la semisimplifiée. On obtient ainsi une fonction $\tilde\theta_\pi$ définie sur l'ensemble $G^{\mathrm{rs}}_{\ell'}$ des semi-simples réguliers γ tels que $\gamma \in M^{\mathrm{crs}}_{\gamma,\ell'}$. On vérifie aisément que cet ensemble est ouvert et stable par conjugaison sous G, et que la fonction $\tilde\theta_\pi$ est lisse et invariante sous G. Il résulte alors de [17, Thm 7.4] que si on remplace $G^{\mathrm{crs}}_{\ell'}$ par $G^{\mathrm{rs}}_{\ell'}$ dans le premier diagramme de la proposition, alors le diagramme obtenu est encore commutatif. Par contre, le deuxième diagramme n'a pas de généralisation intéressante avec cette définition, car les exposants des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations "intéressantes" ne sont pas d'ordre fini. Penser par exemple à la représentation de Steinberg.

(2.1.8) *Élements d'ordre divisible par ℓ.* Le premier diagramme de la proposition (2.1.6) montre que le caractère de Brauer détermine la restriction du caractère ordinaire aux éléments d'ordre premier à ℓ. En fait, comme pour les groupes finis, le caractère de Brauer détermine entièrement le caractère ordinaire. Cela fait intervenir l'analogue suivant de la décomposition unique $x = x_\ell x_{\ell'}$ d'un élément d'ordre fini en le produit d'un ℓ-élément et d'un ℓ'-élément commutants.

Lemme.– *Soit γ un élément compact modulo un sous-groupe fermé central Z de G. Il existe un couple $(\gamma_\ell, \gamma_{\ell'})$ d'éléments de G satisfaisant les propriétés suivantes :*
– $\gamma = \gamma_\ell\gamma_{\ell'} = \gamma_{\ell'}\gamma_\ell$,
– *γ_ℓ est d'ordre fini égal à une puissance de ℓ dans G/Z,*
– *$\gamma_{\ell'}$ est d'ordre premier à ℓ modulo Z*
Cette décomposition est unique modulo l'action évidente de Z, et l'on a $\gamma_\ell, \gamma_{\ell'} \in Z.\overline{\langle\gamma\rangle}$.

Preuve. Cela découle de l'existence de décompositions de Jordan p-topologiques pour les éléments compacts du groupe localement p-profini G/Z, *cf* [22]. $\square$

Soit (π, V) une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation de longueur finie, Z un sous-groupe central fermé de G agissant de manière semi-simple sur π et $\gamma \in G$ un élément compact modulo Z. Choisissons une décomposition $\gamma = \gamma_\ell\gamma_{\ell'}$ comme ci-dessus. Tout pro-p-sous-groupe ouvert H normalisé par γ est encore normalisé par γ_ℓ et $\gamma_{\ell'}$. De plus, le produit $\pi(\gamma_\ell)_{|V^H}\pi(\gamma_{\ell'})_{|V^H}$ est la ℓ-décomposition usuelle de l'automorphisme d'ordre fini $\pi(\gamma)_{|V^H}$. On sait dans ces conditions, *cf* [7, Lemma (17.8)], que

$$\mathrm{tr}(\pi(\gamma)_{|V^H}) = \mathrm{tr}(\pi(\gamma_{\ell'})_{|V^H}.$$

Si $\gamma_{\ell'}$ est *régulier*, on en déduit $\theta_\pi(\gamma) = \theta_\pi(\gamma_{\ell'})$. Néanmoins, en général $\gamma_{\ell'}$ n'est pas nécessairement régulier. Cependant, supposons H assez petit pour que $H\gamma \subset G^{\rm crs}$ et pour que θ_π soit constant sur $H\gamma$. Pour tout $h \in H \cap Z_G(\gamma)$, on a $(\gamma h)_{\ell'} = \gamma_{\ell'} h$. Choisissons h tel que $\gamma_{\ell'} h$ soit régulier. On a alors $\theta_\pi(\gamma) = \theta_\pi(\gamma h) = \theta_\pi(\gamma_{\ell'} h)$. Ceci montre que $(\theta_\pi)_{|G^{\rm crs}}$ est déterminé par sa restriction $(\theta_\pi)_{|G^{\rm crs}_{\ell'}}$. Plus précisément on a prouvé :

Proposition.– *Soit $x \in \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$. Si la restriction de θ_x à $G^{\rm rs}_{\ell'}$, resp. à $G^{\rm crs}_{\ell'}$, resp. à $G^{\rm ell}_{\ell'}$, est nulle, alors il en est de même de sa restriction à $G^{\rm rs}$, resp. à $G^{\rm crs}$, resp. à $G^{\rm ell}$.*

Voici maintenant deux propriétés classiques des caractères de Brauer des groupes finis :
- *Injectivité :* l'application $\tilde{\theta} : \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{C}(G_{\ell'}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G$ est injective.
- *Surjectivité :* soit $x \in \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$, prolongeons $\tilde{\theta}_x$ à G en posant $\bar{\theta}_x(g) := \tilde{\theta}_x(g_{\ell'})$. Alors la fonction obtenue est le caractère d'un élément $\tilde{x} \in \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Ces propriétés s'étendent facilement à un groupe p-adique compact modulo son centre, bien que notre caractère de Brauer ne soit défini que sur les éléments réguliers. Cela découle en effet de la densité des élements réguliers, *cf* la preuve du théorème (1.2.3).

Pour un groupe réductif p-adique G plus général, il résulte de [31] que pour ℓ *assez grand*, le caractère de Brauer $\tilde{\theta}$ étendu à tout $G^{\rm rs}$ comme plus haut définit une injection de $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ dans $\mathcal{C}^\infty(G^{\rm rs}_{\ell'}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$. Les seules conditions explicites données dans *loc. cit.* sont $\ell > n$, pour $G = {\rm GL}_n(K)$ ou ${\rm SL}_n(K)$.

Néanmoins, que ce soit pour l'injectivité ou la surjectivité, il paraît plus utile d'obtenir un analogue modulaire de [13].

(2.1.9) Question.– Soit $\mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ le sous-groupe de $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ engendré par les induites paraboliques propres.

i) A-t-on $ker(\tilde{\theta}_{|G^{\rm ell}_{\ell'}} \otimes \mathbb{Q}) = \mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \otimes \mathbb{Q}$?

ii) Soit $\pi \in \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ et $\bar{\theta}_\pi$ le prolongement à $G^{\rm ell}$ de $\tilde{\theta}_\pi$ défini par

$$\bar{\theta}_\pi(\gamma) := \tilde{\theta}_\pi(\gamma_{\ell'} h)$$

où $h \in Z_G(\gamma) \cap H_{\pi,\gamma}$ est tel que $\gamma_{\ell'} h$ soit régulier. Est-ce que $\bar{\theta}_\pi$ est la restriction à $G^{\rm ell}$ du caractère d'un élément de $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$?

Concernant le point i), on vérifie en effet facilement, et par les mêmes arguments que pour le caractère ordinaire [23], que le caractère de Brauer d'une induite parabolique propre est nul sur les éléments elliptiques.

Une réponse à ces deux questions permettrait par exemple d'en déduire la surjectivité de la réduction de Brauer-Nesbitt r_ℓ. Dans les paragraphes suivants, nous répondrons affirmativement à ces deux questions dans le cas de $G = {\rm GL}_d(K)$. Contrairement aux arguments d'analyse harmonique de Kazhdan dans [13], nous utiliserons les résultats de classification des représentations de M.-F. Vignéras.

2.2 Représentations de ${\rm GL}_d(K)$. Classifications de Vignéras et Zelevinsky

Dans ce paragraphe nous rappelons l'énoncé de classification des représentations lisses irréductibles de $G_d := {\rm GL}_d(K)$ dû à Zelevinsky lorsque les coefficients sont $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et à Vignéras lorsque les coefficients sont $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Nous en déduisons facilement que l'homomorphisme de réduction $r_\ell : \mathcal{R}^{\rm ent}(G_d, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(G_d, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est surjectif, ce qui sera crucial pour définir ${\rm LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ au prochain paragraphe. Au passage, nous prouvons quelques propriétés des représentations de Speh et "superSpeh", qui seront utilisées pour la définition de ${}^z{\rm JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$. Dans ce qui suit, la lettre C désignera le corps $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ ou le corps $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Les représentations irréductibles considérées sont à coefficients dans C sauf précision contraire.

(2.2.1) *Modèles de Whittaker et dérivées.* Fixons un caractère non trivial $\psi : K \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$. À toute partition $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_t) \in \Lambda(d)$ de d est alors associé un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-caractère ψ_λ du sous-groupe unipotent maximal supérieur U_d de G_d, qui induit à son tour un caractère à valeurs dans C, encore noté ψ_λ, *cf.* [27, V.5]. Pour une C-représentation π de G_d, on définit

$$\Lambda(\pi) := \{\lambda \in \Lambda(d),\ m_{\pi,\lambda} := \dim\left({\rm Hom}_{U_d}(\pi, \psi_\lambda)\right) \neq 0\}.$$

Par réciprocité de Frobenius tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{U_d}(\pi, \psi_\lambda)$ induit un morphisme $\pi \longrightarrow \mathrm{Ind}_{U_d}^{G_d}(\psi_\lambda)$ qui, s'il est injectif, est appelé λ-modèle de Whittaker. Rappelons que lorsque π est irréductible et $(d) \in \Lambda(\pi)$, on dit que π est "générique" ou encore "non dégénérée". On sait alors [32, III.5.10.3)] que $m_{\pi,(d)} = 1$; c'est l'unicité du modèle de Whittaker.

Plus généralement, munissons l'ensemble $\Lambda(d)$ de l'ordre partiel défini par $\lambda \geqslant \lambda'$ si et seulement si $\forall i = 1, \cdots, t$, $\sum_{j=1}^{i} \lambda_j \geqslant \sum_{j=1}^{i} \lambda'_j$. La théorie des dérivées de Gelfand-Kazhdan montre alors [27, V.5] que *pour toute π irréductible, l'ensemble $\Lambda(\pi)$ admet un plus grand élément, que l'on notera λ_π.* Concrètement, la partition λ_π est donnée par les plus grandes dérivées successives. Plus précisément, $\lambda_{\pi,1}$ est l'ordre de la plus grand dérivée de π, $\lambda_{\pi,2} = \lambda_{\pi^{(\lambda_{\pi,1})},1}$ est celui de la dérivée $\pi^{(\lambda_{\pi,1})}$ qui est une représentation de $G_{d-\lambda_{\pi,1}}$, etc.

Notons que, comme dans l'article de Zelevinsky [33] sur les représentations complexes, une fois prouvé le théorème de classification (rappelé plus bas), on en déduit [27, V.12] que *le λ_π-modèle de Whittaker est unique,* i.e. $m_{\pi,\lambda_\pi} = 1$.

(2.2.2) *Dérivées et induites paraboliques.* Pour définir les induites paraboliques normalisées, il nous faut choisir une racine carrée de q dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Comme d'habitude, pour π_i une représentation de G_{d_i}, $i = 1, \cdots, t$, on note $\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_t$ l'induite normalisée de la représentation $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_t$ du sous-groupe de Levi diagonal par blocs $G_{d_1} \times \cdots \times G_{d_t}$ de $G_{d_1+\cdots+d_t}$, le long du parabolique triangulaire par blocs supérieur correspondant, noté $P_{d_1,\cdots,d_t}$.

La formule "de Leibniz" pour la dérivée d'une induite parabolique [32, III.1.10] montre que la partition $\lambda_{\pi_1} + \lambda_{\pi_2} + \cdots + \lambda_{\pi_t} \in \Lambda(d_1 + \cdots + d_t)$ est le plus grand élément de l'ensemble $\Lambda(\pi_1 \times \cdots \times \pi_t)$ et que de plus, on a $m_{\pi_1\times\cdots\times\pi_t,\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+\cdots+\lambda_{\pi_t}} = 1$ si l'on sait que chaque $m_{\pi_i,\lambda_{\pi_i}}$ vaut 1.

(2.2.3) *Segments (super)cuspidaux et représentations (super)Speh.* Pour tout d, la lettre ν désignera le caractère $g \mapsto q^{-\mathrm{val}_K \circ \det(g)}$ de G_d à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell^\times$. Un C-segment (super)cuspidal est une paire $\Delta = (\pi, r)$ formée d'une C-représentation irréductible (super)cuspidale de G_d et d'un entier positif r. Comme la seule dérivée non nulle de π est $\pi^{(d)}$, la formule de Leibniz montre que l'ensemble $\Lambda(\pi\times\pi\nu\times\cdots\times\pi\nu^{r-1})$ est formé de d-partitions de dr, *i.e.* dont les entrées sont divisibles par d. L'élément minimal de cet ensemble est la partition $(d^{(r)}) := (d, d, \cdots, d)$.

Lorsque $C = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, ou plus généralement lorsque les $\pi\nu^i$ sont deux à deux non isomorphes, on montre facilement que l'induite $\pi \times \pi\nu \times \cdots \times \pi\nu^{r-1}$ possède une unique sous-représentation irréductible, que nous noterons $\delta_r(\pi)$. Parmi les sous-quotients irréducibles de cette induite, elle est caractérisée par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

m1) Son module de Jacquet est donné par $r_{P_{d,d,\cdots,d}}(\delta_r(\pi)) \xrightarrow{\sim} \pi \otimes \pi\nu \otimes \cdots \otimes \pi\nu^{r-1}$

m2) Sa partition de Whittaker est donnée par $\lambda_{\delta_r(\pi)} = (d, d, \cdots, d)$.

Lorsque $C = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, il n'y a pas de définition aussi simple de $\delta_r(\pi)$, et l'auteur n'en connait pas qui n'utilise pas la théorie des types. La définition de [27, V.9.1] n'est pas tout à fait correcte car la propriété m1) ci-dessus ne suffit pas toujours à isoler une unique représentation. Cependant, en réordonnant les arguments de *loc. cit.*, on aboutit à la définition suivante, dont l'énoncé a été adapté à l'usage que nous ferons de ces représentations par la suite.

On rappelle auparavant [32, III.5.10.2] que *toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation cuspidale π admet un relèvement $\tilde{\pi}$ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*, c'est-à-dire une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation contenant un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell G$-sous-module de type fini ω générateur, dont la réduction $\omega \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est isomorphe à π.

PROPOSITION.– *Soient π et $\tilde{\pi}$ comme ci-dessus. La représentation $\delta_r(\tilde{\pi})$ est entière. Sa réduction $r_\ell(\delta_r(\tilde{\pi}))$ est irréductible, satisfait les propriétés m1) et m2) ci-dessus, et est indépendante, à isomorphisme près, du choix de $\tilde{\pi}$.*

Preuve. La représentation $\delta_r(\tilde{\pi})$ est entière, comme toute représentation dont le support cuspidal est formé de représentations entières, *cf.* [32, II.4.14]. La propriété m2) de $\delta_r(\tilde{\pi})$ et la compatibilité des dérivées (exactes) à la réduction mod ℓ impliquent que $\Lambda(\delta_r(\pi)) = \{(d, \cdots, d)\}$. Comme on a aussi $m_{\delta_r(\pi),(d,\cdots,d)} = 1$, il s'ensuit que $r_\ell(\delta_r(\tilde{\pi}))$ est irréductible (et même sa restriction au sous-groupe mirabolique est irréductible). Elle vérifie bien m2), et vérifie aussi m1) par compatibilité des foncteurs de Jacquet (exacts) avec la réduction modulo ℓ. Il reste à voir que $r_\ell(\delta_r(\tilde{\pi}))$ est indépendante des choix.

Choisissons un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-type simple (J°, λ) contenu dans l'induite $\pi \times \cdots \times \pi\nu^{r-1}$, *cf.* [32, Lemme 5.12] où la notation (J°_m, λ_m) est utilisée. On sait [32, III.4.20, 4.29] qu'il existe un relèvement $\tilde{\lambda}$ de λ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ tel que le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type simple $(J^\circ, \tilde{\lambda})$ soit contenu dans $\tilde{\pi} \times \cdots \times \tilde{\pi}\nu^{r-1}$. Fixons un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau stable $\lambda_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ dans $\tilde{\lambda}$, et notons $\mathcal{H}(G, \lambda_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell})$ son algèbre de Hecke. Dans [32, III.5.6-5.7] est construite une famille d'isomorphismes "canoniques"

(2.2.3.1) $$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\widetilde{\mathfrak{S}}_r, q') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(G, \lambda_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell})$$

depuis l'algèbre de Hecke affine étendue de type $\widetilde{A}_{r-1}$ spécialisée en une certaine puissance q' de q. Ces isomorphismes sont des versions entières de ceux de Bushnell-Kutzko [6, (5.6.6)]. Rappelons que l'on a une décomposition en produit tensoriel de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-modules

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\widetilde{\mathfrak{S}}_r, q') = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathfrak{S}_r, q') \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Z}}_\ell[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_r^{\pm 1}] =: \mathcal{H}^0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \mathcal{A}$$

où $\mathcal{H}^0$ est la sous-algèbre de Hecke de type A_{r-1} et $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative.

La théorie de Bushnell et Kutzko nous dit que $\tilde{M} := \mathrm{Hom}_{J^\circ}(\tilde{\lambda}, \delta_r(\tilde{\pi}))$ est un $\mathcal{H}(G, \tilde{\lambda})$-module simple [6, Thm. (7.5.7)], et que sa restriction à A est déterminée par $r_{P_{d,\cdots,d}}(\delta_r(\tilde{\pi})) = \tilde{\pi} \otimes \tilde{\pi}\nu \otimes \cdots \otimes \tilde{\pi}\nu^{r-1}$ [6, Thms. (7.6.1),(7.6.20)]. En particulier, $\tilde{M}$ est un caractère dont la restriction à $\mathcal{A}$ est donnée par $X_i \mapsto q^{i-1}t$ où $t \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$ dépend de la normalisation de l'isomorphisme (2.2.3.1). Il s'ensuit que la restriction à $\mathcal{H}^0$ doit être le caractère "trivial" $e_w \mapsto q^{l(w)}$ et que la restriction à $\mathcal{H}(G, \lambda_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell})$ est à valeurs entières.

Par réduction modulo ℓ, on constate que $M := \mathrm{Hom}_{J^\circ}(\lambda, r_\ell(\delta_r(\tilde{\pi}))) \neq 0$. Il résulte alors de la propriété de "quasi-projectivité" de $\mathrm{ind}_{J^\circ}^G(\lambda)$ que M est un module simple sur $\mathcal{H}(G, \lambda)$ [32, Thm IV.2.5, 3)], donc nécessairement égal à $r_\ell(\tilde{M})$. Ainsi, la restriction de M à $\mathcal{A}$ est déterminée par $\pi \otimes \pi\nu \otimes \cdots \otimes \pi\nu^{r-1}$ et sa restriction à $\mathcal{H}^0$ est le caractère "trivial". Ceci détermine entièrement M, et à nouveau par [32, Thm IV.2.5, 3)], cela détermine aussi $r_\ell(\delta_r(\tilde{\pi}))$ qui est donc bien indépendante de $\tilde{\pi}$.

□

Définition.– *Nous noterons $\delta_r(\pi) := r_\ell(\delta_r(\tilde{\pi}))$ "la" représentation donnée par la proposition ci-dessus. Une telle représentation sera appelée une* représentation de Speh *ou* représentation superSpeh *selon que π est cuspidale ou supercuspidale.*

Remarque.– Il devrait être possible d'écrire $\delta_r(\pi)$ comme image d'un opérateur d'entrelacement "explicite" $\pi\nu^{r-1} \times \pi\nu^{r-2} \times \cdots \times \pi \longrightarrow \pi \times \cdots \times \pi\nu^{r-1}$. Mais l'auteur n'a pas été capable d'écrire un tel opérateur lorsque les $\pi\nu^i$ ne sont pas deux à deux distincts. La définition ci-dessus a l'inconvénient minime de ne définir en fait qu'une classe d'isomorphisme de représentations irréductibles. Cependant, on peut aussi définir $\delta_r(\pi)$ comme "unique sous-représentation irréductible de $\pi \times \pi\nu \cdots \times \pi\nu^{r-1}$ vérifiant une certaine condition". Pour exprimer la condition, on utilise un foncteur $\kappa_{\max}$ convenable, comme dans [20, Sec. 5] et [18]. Un tel foncteur est exact, à valeurs dans les représentations d'un $\mathrm{GL}_{d'}(k')$ avec k' fini. La condition est alors que $\kappa_{\max}(\delta_r(\pi))$ contient (et même est égal à) la sous-représentation définie explicitement par James comme image d'un opérateur d'entrelacement explicite, *cf.* [32, III.2.4] où cette représentation est notée $S(\sigma, (m))$.

Notons que la représentation $\delta_r(\pi)$ vérifie bien les propriétés m1) et m2) ci-dessus, mais n'est généralement caractérisée par aucune des deux. Cependant, une fois prouvé le théorème de classification ci-dessous, il apparaît que ces deux conditions caractérisent $\delta_r(\pi)$. Par ailleurs, on vérifie aisément que la d-ème dérivée est donnée par $\delta_r(\pi)^{(d)} \simeq \delta_{r-1}(\pi)$ et que $m_{\delta_r(\pi), \lambda_{\delta_r(\pi)}} = 1$.

(2.2.4) *Réduction et relèvements.* Nous adoptons et extrapolons la terminologie de Vignéras. Nous dirons qu'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation est

- *ℓ-entière* si elle admet un réseau stable comme dans [32, II.4].
- *ℓ-irréductible* si elle est ℓ-entière et si la réduction de tout réseau stable est irréductible.
- *ℓ-supercuspidale* si elle est ℓ-irréductible et de réduction supercuspidale.
- *ℓ-superSpeh* si elle est ℓ-irréductible de réduction superSpeh.
- *congrue* à une autre représentation (modulo ℓ), si les deux représentations sont ℓ-entières et leurs réductions semi-simplifiées sont isomorphes.
- *strictement congrue* à une autre représentation, si elle lui est congrue et si leurs caractères centraux coïncident sur la matrice diagonale $\varpi.I_d$, où I_d désigne la matrice identité de taille d.

Concernant les représentations supercuspidales, on sait que :

i) Une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation cuspidale se relève à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et tout relèvement est supercuspidal, [32, III.5.10.2)].

ii) Une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation supercuspidale π est ℓ-entière si et seulement si son caractère central est ℓ-entier. Dans ce cas, π est ℓ-irréductible, [32, III.1.1.d)], et on a les propriétés suivantes, [29, 2.3] :

  (a) le nombre $m(\pi)$ de représentations strictement congrues à π est inférieur à la plus grande puissance de ℓ divisant le nombre $a(\pi) := \frac{d}{t(\pi)}(q^{t(\pi)} - 1)$ dans lequel $t(\pi)$ désigne le nombre de caractères non ramifiés $\psi : K^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ tels que $\pi \simeq \pi \otimes (\psi \circ \det)$.

  (b) π est ℓ-supercuspidale si et seulement si l'inégalité précédente est une égalité.

LEMME.– *Toutes les propriétés précédentes sont vraies en remplaçant partout (super)cuspidale par (super)Speh.*

Preuve. i) Par définition, une représentation de Speh se relève, *cf.* proposition (2.2.3). Vérifions que ses relèvements sont tous des représentations de Speh. Soit $\tilde{\delta}$ un relèvement de $\delta = \delta_r(\pi)$. Posant $d' = d/r$, on voit que $r_{P_{d',\cdots,d'}}(\tilde{\delta})$ est un relèvement de $\pi \otimes \pi\nu \otimes \cdots \otimes \pi\nu^{r-1}$. Or, par exactitude des dérivées, on a $\Lambda(\tilde{\delta}) = \Lambda(\pi) = \{(d', d', \cdots, d')\}$. Le paramètre de Zelevinsky de $\tilde{\delta}$ est donc un segment, donc σ est une représentation de Speh.

ii) Pour le préambule de la propriété ii), partons de $\delta = \delta_r(\pi)$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation de Speh. On sait qu'elle est ℓ-entière si et seulement si son support cuspidal l'est donc si et seulement si π est ℓ-entière. On vérifie aisément que cela équivaut à ce que son caractère central soit ℓ-entier. Dans ce cas, d'après la proposition (2.2.3), sa réduction est irréductible, égale par définition à $\delta_r(\overline{\pi})$ où $\overline{\pi}$ est la réduction de π.

Passons aux propriétés ii)(a) et ii)(b). Gardons les notations ci-dessus, et soit δ' une représentation ℓ-entière de même réduction que δ. Par le point i), il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation π' cuspidale entière de $G_{d/r}$ telle que $\delta' = \delta_r(\pi')$. Par la propriété m1) d'une représentation de Speh, π' est uniquement déterminée par δ' et est congrue à π. On obtient de la sorte une injection de l'ensemble des représentations congrues à δ dans celui des représentations congrues à π. D'après la proposition (2.2.3), c'est même une bijection. Par l'égalité $\delta(\varpi I_d) = \pi(\varpi I_{d'})^r q^{-d'r(r-1)/2}$, on en déduit une bijection entre l'ensemble des représentations *strictement* congrues à δ et l'ensemble des représentations π' congrues à π vérifiant $\pi(\varpi I_d)^r = \pi'(\varpi I_d)^r$. Notons que cette dernière condition, jointe à la congruence $\pi(\varpi I_d) \equiv \pi'(\varpi I_d)[\ell]$ équivaut à la condition $\pi(\varpi I_d)^{\ell^{\mathrm{val}_\ell(r)}} = \pi'(\varpi I_d)^{\ell^{\mathrm{val}_\ell(r)}}$. Il s'ensuit que $m(\delta) = \ell^{\mathrm{val}_\ell(r)}.m(\pi)$.

Par ailleurs, comme $\delta_r(\pi \otimes (\psi \circ \det)) = \delta_r(\pi) \otimes (\psi \circ \det)$, on a $t(\delta) = t(\pi)$.

Notons $[n]_\ell := \ell^{\mathrm{val}_\ell(n)}$ la plus grande puissance de ℓ divisant l'entier n. On a obtenu l'inégalité

$$m(\delta)) = [r]_\ell m(\pi) \leqslant [r]_\ell \left[\frac{d'}{t(\pi)}(q^{t(\pi)} - 1)\right]_\ell = \left[\frac{d}{t(\delta)}(q^{t(\delta)} - 1)\right]_\ell$$

avec égalité si et seulement si π est ℓ-supercuspidale, donc si et seulement si δ est ℓ-superSpeh. □

(2.2.5) *Classification.* Un multi-C-segment (super)cuspidal est un multi-ensemble de C-segments (super)cuspidaux, *i.e.* un ensemble de C-segments avec multiplicités, ou en termes plus rigoureux, un élément du monoïde libre de base l'ensemble des C-segments au sens ci-dessus. Soit $a = \{(\pi_i, r_i), i = 1, \cdots, t\}$ un multi-segment supercuspidal, où π_i est une supercuspidale de G_{d_i}. Il détermine une partition $\lambda_a = (d_1^{(r_1)} + \cdots + d_t^{(r_t)})$ de l'entier $d(a) := r_1 d_1 + \cdots + r_t d_t$, que nous appellerons "longueur" de a .

Notons $\pi(a) := \delta_{r_1}(\pi_1) \times \cdots \times \delta_{r_t}(\pi_t)$, qui est une représentation de $G_{d(a)}$, induite depuis le parabolique standard associée à la partition *transposée* de λ_a. L'ensemble $\Lambda(\pi(a))$ a pour plus grand élément λ_a et on a $m_{\pi(a),\lambda_a} = 1$. Par conséquent la représentation $\pi(a)$ possède un unique sous-quotient irréductible $\langle a \rangle$ tel que $\lambda_{\langle a \rangle} = \lambda_a$.

Le théorème de classification affirme que

l'application $a \mapsto \langle a \rangle$ induit une bijection de l'ensemble des multi-C-segments supercuspidaux de longueur d sur l'ensemble $\mathrm{Irr}_C\,(G_d)$.

Lorsque $C = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, c'est[33, (6.1).d)], et lorsque $C = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, c'est [27, V.12] ou [18]. Notons que la définition originale de a et $\pi(a)$ dans [33, Thm (6.1).a)] coincide bien avec celle ci-dessus en vertu de [33, Thm (8.1)].

(2.2.6) Proposition.– *Soit $G = \mathrm{GL}_d(K)$ et $C = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Notons $\mathcal{R}_I(G,C)$ le sous-groupe de $\mathcal{R}(G,C)$ engendré par les représentations induites paraboliques propres et $\mathcal{R}_\Delta(G,C)$ celui engendré par les représentations superSpeh. On a une décomposition*

$$\mathcal{R}(G,C) = \mathcal{R}_I(G,C) \oplus \mathcal{R}_\Delta(G,C).$$

Preuve. Pour une partition λ de n, notons $\mathcal{R}(G,C)_{\leqslant\lambda}$ le sous-groupe de $\mathcal{R}(G,C)$ engendré par les classes de représentations irréductibles π telles que $\lambda_\pi \leqslant \lambda$. Soit π une telle représentation et a le multisegment associée par le théorème de classification rappelé ci-dessus. On a donc $\pi = \langle a\rangle$. Si π n'est pas superSpeh, alors la représentation $\pi(a)$ est induite parabolique propre, et par construction on a

$$[\pi] = [\langle a\rangle] \in [\pi(a)] + \sum_{\lambda'<\lambda} \mathcal{R}(G,C)_{\leqslant\lambda'}.$$

On en déduit que

$$\mathcal{R}(G,C)_{\leqslant\lambda} \subset \mathcal{R}_\Delta(G,C) + \mathcal{R}_I(G,C) + \sum_{\lambda'<\lambda} \mathcal{R}(G,C)_{\leqslant\lambda'}.$$

Puisque $\mathcal{R}(G,\lambda)_{\leqslant 1^{(d)}} \subset \mathcal{R}_\Delta(G,\lambda)$, et puisque l'ensemble des partitions est fini, il vient par récurrence l'égalité

$$\mathcal{R}(G,C) = \mathcal{R}_I(G,C) + \mathcal{R}_\Delta(G,C). \tag{2.2.6.1}$$

Reste à voir que $\mathcal{R}_I(G,C)\cap\mathcal{R}_\Delta(G,C) = \{0\}$. Pour cela, il suffit de voir que $\mathcal{R}_I(G,C)$ est engendré par les représentations $\pi(a)$ associées aux multisegments a contenant au moins deux segments. Or, par récurrence sur d, l'égalité (2.2.6.1) implique la suivante

$$\mathcal{R}_I(G,C) = \sum_{M<G} i_M^G(\mathcal{R}_\Delta(M,C)).$$

Ici, M décrit les sous-groupes de Levi diagonaux par blocs et i_M^G désigne l'induction parabolique normalisée le long du parabolique supérieur. Mais si $\delta = \delta_1 \otimes \cdots \otimes \delta_r$ est une représentation superSpeh de $M = G_{d_1} \times \cdots \times G_{d_r}$, avec $\delta_i = \delta_{r_i}(\pi_i)$, alors $[i_M^G(\delta)] = [\pi(a)]$ pour $a = \{(\pi_i, r_i), i = 1, \cdots, r\}$.

□

(2.2.7) Corollaire.– *Pour le groupe $G = \mathrm{GL}_d(K)$, le morphisme de réduction de Brauer-Nesbitt $r_\ell : \mathcal{R}^{\mathrm{ent}}_{\ell'}(G,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est surjectif.*

Preuve. Comme l'induction parabolique commute à r_ℓ, une récurrence sur d nous ramène à prouver que $\mathcal{R}_\Delta(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est dans l'image de r_ℓ, ce qui découle de la définition (2.2.3) des représentations superSpeh.. □

2.3 Représentations de $D^\times$

Ici D désigne une algèbre à division de centre K et de dimension d^2. Le groupe $D^\times$ étant compact modulo son centre, certaines propriétés des groupes finis s'y étendent facilement.

(2.3.1) Proposition.– *i) L'homomorphisme $\tilde\theta : \mathcal{R}(D^\times,\overline{\mathbb{F}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(D^{\mathrm{ell}},\overline{\mathbb{Z}}_\ell)^{D^\times}$ est injectif.*

ii) Toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible se relève à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. En particulier, l'homorphisme de réduction $r_\ell : \mathcal{R}(D^\times,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times,\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est surjectif.

Preuve. i) Soit $x \in ker(\tilde\theta)$. Comme les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations lisses irréductibles de $D^\times$ sont d'image finie, l'élément x est l'inflation d'une représentation virtuelle y d'un quotient fini $D^\times/H$ de $D^\times$ par un pro-p-groupe. Les éléments elliptiques étant denses dans $D^\times$, la projection induit une surjection de $D^{\mathrm{ell}}_{\ell'}$ sur l'ensemble des éléments d'ordre premier à ℓ de $D^\times/H$. Ainsi le caractère de Brauer (usuel) de y est nul, et par conséquent $y = 0$ (voir par exemple [7, Cor. (17.10)]). Donc $x = 0$ aussi.

ii) C'est le théorème de Fong-Swan [21, 16.3 et 17.6] appliqué aux quotients finis de $D^\times$, lesquels sont tous résolubles. □

Dans la proposition ci-dessous, on utilise la même terminologie que celle du paragraphe (2.2.4), sauf les notions de ℓ-supercuspidales et ℓ-superSpeh, qui n'ont guère d'intérêt ici. En particulier, on sait que $\rho \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(D^\times)$ est ℓ-entière si et seulement si son caractère central l'est, et dans ce cas, on note

- $t(\rho)$ le nombre de caractères $\psi : K^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ tels que $\rho \simeq \rho \otimes (\psi \circ \mathrm{Nrd})$.
- $m(\rho)$ le nombre de représentations irréductibles qui sont strictement congrues à ρ.
- $a(\rho) := \frac{d}{t(\rho)}(q^{t(\rho)} - 1)$.

(2.3.2) Proposition.– *Soit $\rho \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(D^\times)$ ℓ-entière. Alors $m(\rho)$ est inférieur à la plus grande puissance de ℓ qui divise $a(\rho)$, et lui est égal si et seulement si ρ est ℓ-irréductible.*

Preuve. Nous adaptons à $D^\times$ les arguments de Vignéras pour les représentations du groupe de Weil de K. On peut supposer, quitte à tordre par un caractère non ramifié, que le caractère central de ρ est trivial sur l'uniformisante ϖ, *i.e.* que ρ est une représentation de $D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}$. Soit $\mathcal{P}_D$ le radical de $\mathcal{O}_D$. On a une filtration

$$1 + \mathcal{P}_D \subset \mathcal{O}_D^\times \subset D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}$$

de quotients successifs isomorphes à $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ et $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, l'action de ce dernier sur le précédent étant donnée par le Frobenius.

Soit τ un facteur irréductible de $\rho_{|1+\mathcal{P}_D}$ et N_τ le normalisateur de la classe d'isomorphisme de τ dans $D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}$. Comme $1 + \mathcal{P}_D$ est un pro-p-groupe, la dimension de τ est une puissance de p. Comme un p-Sylow de $N_\tau/(1+\mathcal{P}_D)$ est cyclique l'argument de [25, Lemme 1.19] montre que τ admet un prolongement $\tilde{\tau}$ à N_τ. Soit alors ξ une sous-représentation irréductible de N_τ agissant sur $\mathrm{Hom}_{1+\mathcal{P}_D}(\tilde{\tau}, \rho)$. Comme l'ensemble d'entrelacement $I_{\tilde{\tau}\otimes\xi}$ de $\tilde{\tau} \otimes \xi$ est égal à N_τ, l'homorphisme $\tilde{\tau} \otimes \xi \longrightarrow \rho$ induit par adjonction un isomorphisme $\mathrm{ind}_{N_\tau}^{D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}}(\tilde{\tau} \otimes \xi) \xrightarrow{\sim} \rho$. La représentation ξ est de la forme $\xi \simeq \mathrm{ind}_J^{N_\tau}(\chi)$ pour un groupe J contenant $N_\tau \cap \mathcal{O}_D^\times$ et un caractère χ de J trivial sur $1 + \mathcal{P}_D$. On peut alors écrire

$$\rho = \mathrm{ind}_J^{D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}}\left(\tilde{\tau}_{|J} \otimes \chi\right).$$

L'ensemble d'entrelacement de $\tilde{\tau}_{|J} \otimes \chi$ est $I_{\tilde{\tau}\otimes\tilde{\chi}} = N_\tau \cap N_\chi$, où N_χ désigne le normalisateur de χ. On a donc $N_\tau \cap N_\chi = J$ par irréductibilité de ρ.

Calculons maintenant l'entier $t(\rho)$. Soit ψ un caractère de $D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_D^\times$. La représentation $\rho\psi$ est isomorphe à ρ si et seulement si il existe $x \in N_\tau$ tel que $\psi_{|J}\chi = \chi^x$. Pour un tel x, il faut alors que $\chi^{-1}\chi^x$ soit trivial sur $J \cap \mathcal{O}_D^\times = N_\tau \cap \mathcal{O}_D^\times$. En identifiant $J/(1+\mathcal{P}_D)$ au sous-groupe $(N_\tau \cap \mathcal{O}_D^\times)/(1+\mathcal{P}_D) \rtimes J/(N_\tau \cap \mathcal{O}_D^\times)$ du groupe $N_\tau/(1+\mathcal{P}_D) \simeq (N_\tau \cap \mathcal{O}_D^\times)/(1+\mathcal{P}_D) \rtimes N_\tau/(N_\tau \cap \mathcal{O}_D^\times)$, et en notant que $(N_\tau \cap \mathcal{O}_D^\times)$ est abélien, on constate que $\chi^x\chi^{-1}$ est alors trivial sur J tout entier, et donc que $x \in J$. Il s'ensuit que

$$t(\rho) = [D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}} : \mathcal{O}_D^\times J].$$

Analysons maintenant la réduction $r_\ell(\rho)$. Elle est de la forme $\mathrm{ind}_J^{D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}}\left(r_\ell(\tilde{\tau}_{|J}) \otimes r_\ell(\chi)\right)$. Commet τ est une représentation irréductible du *pro-p-groupe* $1 + \mathcal{P}_D$, la représentation $r_\ell(\tilde{\tau}_{|J})$ est irréductible, et son normalisateur est encore N_τ. On en déduit que la longueur de $r_\ell(\rho)$ est égale à $[N_\tau \cap N_{r_\ell(\chi)} : J]$. En particulier :

$$\rho \text{ est } \ell\text{-irréductible si et seulement si } N_\tau \cap N_{r_\ell(\chi)} = J.$$

Soit maintenant ρ' une représention congrue à ρ. Comme elle contient τ, on peut la mettre sous la forme $\rho' = \mathrm{ind}_{J'}^{D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}}\left(\tilde{\tau}_{|J'} \otimes \tilde{\chi}'\right)$. Comme ρ' a la même dimension que ρ, J' a le même indice que J dans N_τ, et puisqu'il contient $N_\tau \cap \mathcal{O}_D^\times$ et que le quotient $N_\tau/(N_\tau \cap \mathcal{O}_D^\times)$ est cyclique, on a $J = J'$. Il s'ensuit que $r_\ell(\chi')$ et $r_\ell(\chi)$ sont conjugués sous N_τ. On en déduit une bijection entre l'ensemble des ρ' congrues à ρ et l'ensemble des χ' congrus à χ modulo conjugaison par $N_\tau \cap N_{r_\ell(\chi)}$. En particulier on a

$$m(\rho) \leqslant m(\chi) \text{ avec égalité si et seulement si } N_\tau \cap N_{r_\ell(\chi)} = J.$$

Reste à calculer le nombre $m(\chi)$ de caractères de J congrus à χ. Il est clair que c'est la plus grande puissance de ℓ divisant l'ordre de l'abélianisé de $J/(1+\mathcal{P}_D)$. Pour calculer cet ordre, nous pouvons utiliser la construction explicite de Broussous : nous pouvons supposer que $(J, \tilde{\tau}_{|J} \otimes \chi)$ est de la forme [5, (10.1.4)]. Par construction, il existe des entiers f', d' et e' de produit égal à d tels que

$$J/(1+\mathcal{P}_D) = \mathbb{F}^{\times}_{q^{f'd'}} \rtimes m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z}, \tag{2.3.2.2}$$

où le générateur de $\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z}$ agit par le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_{q^{f'}}$. Avec les notations de *loc. cit*, f' est le degré résiduel de l'extension $F[\beta]$, e' est son indice de ramification, et $(d')^2$ est la dimension sur $F[\beta]$ du commutant B de $F[\beta]$ dans D (une algèbre à division de centre $F[\beta]$). L'entier m est celui de la définition [5, (10.1.4)]. C'est un diviseur de d' qui satisfait la relation

$$f'm = [D^{\times}/\varpi^{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_D^{\times}J] = t(\rho).$$

Maintenant l'abélianisé de $J/(1+\mathcal{P}_D)$ s'identifie à $\mathbb{F}^{\times}_{q^{f'm}} \times m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z}$ (le morphisme quotient étant induit par la norme). Par les égalités précédentes, son ordre est bien $(q^{t(\rho)}-1)d/t(\rho)$. $\square$

À partir de 2.3.2.2, la discussion de [25] pages 423 et 424 fournit l'analogue suivant de [25, 1.20].

(2.3.3) Proposition.– *Soit ρ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible ℓ-entière de $D^{\times}$. Il existe une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible $\bar{\rho}$ de $D^{\times}$ et un entier r tels que*

$$r_\ell([\rho]) = [\bar{\rho}] + [\bar{\rho}\nu] + \cdots + [\bar{\rho}\nu^{r-1}]$$

où ν désigne le caractère $g \mapsto q^{\mathrm{val}\circ\mathrm{Nrd}(g)}$.

3 Correspondances ℓ-modulaires

Nous reprenons les notations de l'introduction. En particulier G désigne le groupe $\mathrm{GL}_d(K)$ et D une algèbre à division de centre K et de dimension d^2.

3.1 Preuve des énoncés principaux

(3.1.1) *Langlands-Jacquet classique et intégralité.* On rappelle que $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ est l'unique flèche rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{ell}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^G \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{C}^\infty(D^{\mathrm{ell}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{D^\times} \\ \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[u, "\theta^G"] \arrow[r, dotted, "\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}"'] & \mathcal{R}(D^\times, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[u, "\theta^{D^\times}"'] \end{tikzcd} \tag{3.1.1.1}$$

et que cette flèche envoie une irréductible π sur 0 ou sur $\pm[\rho]$ pour une irréductible ρ de $D^{\times}$. Identifions les deux centres $Z(G)$ et $Z(D^{\times})$ à $K^{\times}$. Comme leur action à droite (ou à gauche) préserve les lieux elliptiques respectifs, on voit que π et ρ ont des caractères centraux égaux. Or, si π est ℓ-entière, en particulier son caractère central est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Comme une représentation irréductible de $D^{\times}$ est entière si et seulement si son caractère central l'est, il s'ensuit que $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ envoie $\mathcal{R}^{\mathrm{ent}}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans $\mathcal{R}^{\mathrm{ent}}(D^{\times}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

(3.1.2) *Preuve du théorème (1.2.3).* Montrons l'existence d'un unique morphisme $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ rendant commutatif le second diagramme de l'énoncé du théorème. L'unicité résulte de la surjectivité de r_ℓ^G du corollaire (2.2.7). Pour l'existence, toujours grâce à cette surjectivité, il suffit de prouver que $\mathit{ker}(r_\ell^G) \subset \mathit{ker}(r_\ell^D \circ \mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell})$. Soit donc $x \in \mathit{ker}(r_\ell^G)$. D'après le second diagramme de la proposition (2.1.6), on a $\theta_{x|G_{\ell'}^{\mathrm{ell}}} \equiv 0$. On en déduit que $\tilde{\theta}_{r_\ell^{D^\times}(\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(x))} = \theta_{\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(x)|D_{\ell'}^{\mathrm{ell}}} \equiv 0$. D'après le i) de la proposition (2.3.1) on a bien $r_\ell^{D^\times}(\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(x)) = 0$.

La commutativité du premier diagramme de l'énoncé du théorème découle maintenant de celle du diagramme (3.1.1.1) et de celle du second diagramme de la proposition (2.1.6). Enfin, le fait que ce premier diagramme suffise à caractériser $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ provient à nouveau de l'injectivité de $\tilde{\theta}^{D^\times}$. $\square$

(3.1.3) *Jacquet-Langlands classique et réduction mod ℓ.* Les propriétés caractéristiques de l'application $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} : \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(D^\times) \longrightarrow \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ rappelées au paragraphe (1.1.3) font de son prolongement par linéarité, que nous noterons encore $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$, une *section remarquable* de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$. Comme les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles de la "série discrète" de G – *i.e.* les représentations de Steinberg généralisées – sont ℓ-entières si et seulement si leur caractère central l'est, on voit que l'application $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ envoie une représentation entière sur une représentation entière. Par contre, l'exemple suivant montre que la section $\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ n'est pas compatible à la réduction modulo ℓ.

EXEMPLE.– Soit $K = \mathbb{Q}_5$, $\ell = 3$ et $d = 2$, et soit $\chi : \mathbb{F}_{5^2}^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_3^\times$ un caractère d'ordre 3. Il se prolonge à un caractère de $\mathcal{O}_D^\times Z(D^\times)$ qui par induction fournit une $\overline{\mathbb{Q}}_3$-représentation irréductible ρ de dimension 2 de $D^\times$. La représentation $\pi = \mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_3}(\rho)$ est la représentation de Weil associée au même caractère χ. Sa réduction modulo 3 est la représentation cuspidale non supercuspidale notée $\pi(1)$ dans l'exemple p.99 de [32]. Maintenant, la représentation ρ est évidemment congrue modulo 3 à l'induite du caractère trivial, laquelle se décompose en la somme directe du caractère trivial 1 et du caractère "signe" ε de $D^\times$. Or on a

$$\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}([\rho] - [1] - [\varepsilon]) = [\pi] - [\mathrm{St}] - [\varepsilon \otimes \mathrm{St}]$$

où St désigne la représentation de Steinberg. Mais l'exemple page 99 de [32] montre que la réduction modulo ℓ de St est égale à $[\pi(1)] + [\varepsilon]$. Par conséquent, le terme de droite est égal à $-[\mathrm{Ind}_B^G(1)]$ et n'est donc pas nul.

Dans ce même exemple, on voit qu'il n'existe pas de section de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ envoyant les irréductibles sur des irréductibles. En effet, la seule représentation $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$ telle que $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}[\pi] = \pm[1_{D^\times}]$ est la représentation triviale $\pi = 1_G$. Or on a $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}[1_G] = -[1_{D^\times}]$. Le théorème suivant permet néanmoins d'exhiber en toute généralité une section de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ envoyant les irréductibles sur des irréductibles au signe près.

(3.1.4) THÉORÈME.– *L'homomorphisme $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ est surjectif, et son noyau est $\mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$. Il envoie la classe d'une représentation superSpeh de G sur celle d'une irréductible de $D^\times$ au signe près, induisant une bijection*

$$\{\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-}\textit{représentations superSpeh de } G\} \xrightarrow{\sim} \{\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-}\textit{représentations irréductibles de } D^\times\}.$$

Notons que la surjectivité de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ découle de celle de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ et du point ii) de la proposition (2.3.1). On a aussi déjà remarqué que $\mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est inclus dans le noyau de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$. La proposition suivante est une étape importante de la preuve du théorème.

(3.1.5) PROPOSITION.– *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation superSpeh ℓ-entière de G. Notons $\rho := |LJ_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi)|$ sa correspondante dans $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(D^\times)$. Alors π est ℓ-superSpeh si et seulement si ρ est ℓ-irréductible.*

Preuve. La preuve est très clairement inspirée de celle du lemme 2.3.a) de [28]. En effet, si π' est congrue à π, et si ρ' désigne sa correspondante, alors le deuxième diagramme du théorème (1.2.3) montre que ρ' est congrue à ρ. Utilisant les notations du paragraphe (2.2.4), on en déduit l'inégalité $m(\pi) \leqslant m(\rho)$. Par ailleurs, la correspondance de Jacquet-Langlands étant compatible à la torsion par les caractères, on a $t(\pi) = t(\rho)$ et donc $a(\pi) = a(\rho)$.

Supposons alors que π est ℓ-supercuspidale. D'après le lemme (2.2.4), on a $m(\pi) = \ell^{\mathrm{val}_\ell(a(\pi))}$. Grâce à la proposition (2.3.2), on en déduit que $m(\rho) = \ell^{\mathrm{val}_\ell(a(\rho))}$, puis que ρ est ℓ-irréductible.

Il s'ensuit que $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ envoie les superSpeh sur des irréductibles de $D^\times$. Par ailleurs on sait que la restriction de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ à $R_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est surjective, puisque $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ est surjective et nulle sur $\mathcal{R}_I(G, \Delta)$. On en déduit que l'application

(3.1.5.1) $$\{\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-repr. superSpeh de } G\} \xrightarrow{|\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}|} \{\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-repr. irréductibles de } D^\times\}$$

est surjective.

Revenons maintenant à la représentation π de l'énoncé et supposons que ρ est ℓ-irréductible. De ce qui précède, on déduit que π est congrue à une représentation ℓ-superSpeh. La caractérisation du lemme (2.2.4) montre alors que π elle-même est ℓ-superSpeh. $\square$

Fin de la preuve du théorème (3.1.4). Vue la preuve de la proposition précédente, il reste à établir l'injectivité de (3.1.5.1). Cela revient à montrer que deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations ℓ-superSpeh dont les correspondantes ρ et ρ' sont congrues, sont elle même congrues. Mais cela découle à nouveau des critères du lemme (2.2.4) et de la proposition (2.3.2). $\square$

Avant de passer à la preuve du théorème (1.2.4), signalons les deux corollaires suivants du théorème (3.1.4), qui ne concernent que le groupe G, mais que l'auteur ne sait pas prouver directement.

(3.1.6) Corollaire.– *Le noyau de la restriction $\tilde{\theta}_{|G^{\mathrm{ell}}_{\ell'}} : \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G^{\mathrm{ell}}_{\ell'}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G$ du caractère de Brauer $\tilde{\theta}$ aux éléments elliptiques (d'ordre premier à ℓ) est exactement $\mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$.*

(3.1.7) Corollaire.– *La question (2.1.9) ii) a une réponse affirmative pour $G = \mathrm{GL}_d(K)$.*

(3.1.8) *Preuve du théorème (1.2.4).* Notons ${}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ l'inverse de la bijection du théorème (3.1.4). D'après ce théorème, ${}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ vérifie bien les deux propriétés annoncées dans l'énoncé du théorème (1.2.4), et est uniquement déterminée par ces propriétés.

Le reste de l'énoncé du théorème (1.2.4) découle du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. irréductibles de } D^\times\} & \{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. de Speh de } G\} \arrow[l, "\sim"', "Z_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\circ \mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}"] \\
\{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. } \ell\text{-irréductibles de } D^\times\} \arrow[u, hook] \arrow[d, "r_\ell"'] & \{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. } \ell\text{-superSpeh de } G\} \arrow[l, "\sim"', "Z_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\circ \mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}"] \arrow[u, hook] \arrow[d, "r_\ell"'] \\
\{\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-repr. irréductibles de } D^\times\} & \{\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-repr. superSpeh de } G\} \arrow[l, "\sim"', "{}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}"]
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, la bijection du haut vient simplement de ce que l'involution $Z_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ induit une bijection entre séries discrètes et représentations de Speh. L'inverse de la bijection du haut est donnée par $|\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}|$. Le fait que cette bijection induise la bijection du milieu découle alors de la proposition (3.1.5). La commutativité du carré du bas provient enfin de la définition de ${}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ comme inverse de $|\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}|$, laquelle est induite par $|\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}|$ via la réduction modulo ℓ d'après le théorème (1.2.3). $\square$

(3.1.9) *Preuve du corollaire (1.2.5).* Nous rappelons d'abord l'énoncé de la correspondance de Langlands modulo ℓ pour $\mathrm{GL}_d(K)$, dû à Vignéras [28, 1.8]. Comme dans le cas ℓ-adique ou complexe, la correspondance est établie en deux temps. D'abord pour les (super)cuspidales, puis pour les autres représentations à partir de la classification. Il s'avère que pour rendre à la correspondance une certaine compatibilité à la réduction modulo ℓ, il faut la composer avec l'involution de Zelevinsky. Notons donc $\tau^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} := \sigma^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \circ Z_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ cette composée et appelons-la "correspondance de Zelevinski sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$". Rappelons que son image est l'ensemble $\mathrm{Rep}^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(WD_K)$ des classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation de Weil-Deligne $\tau = (\tau^{\mathrm{ss}}, N)$ de dimension d. Une telle représentation est dite entière si sa partie semi-simple l'est. On sait alors que $\tau^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ et $\sigma^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ respectent les représentations entières. On dispose d'une application de réduction modulo ℓ

$$R_\ell :\ \mathrm{Rep}^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(WD_K)^{\mathrm{ent}} \longrightarrow \mathrm{Rep}^d_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(WD_K)$$

qui sur la partie semi-simple est donnée par r_ℓ. Cette application est jugée évidente dans [28, 1.8], mais on pourra en trouver une construction dans [8, 4.1.8]. Parallèlement on a une application

$$J_\ell :\ \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G_d) \longrightarrow \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G_d)$$

qui envoie une représentation ℓ-entière π sur l'unique constituent $\overline{\pi}$ de $r_\ell\pi$ qui vérifie $\lambda_\pi = \lambda_{\overline{\pi}}$. D'après [27, Thm V.12], cette application est surjective. Le théorème principal de [28] dit alors :

THÉORÈME.– *Il existe une bijection*

$$\tau^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} : \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{GL}_d(K)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}^d_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(WD_K)$$

uniquement déterminée par la propriété $\tau^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} \circ J_\ell = R_\ell \circ \tau^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$.

La correspondance de Langlands-Vignéras est alors définie par $\sigma^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} := \tau^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} \circ Z_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$.

Dans l'énoncé du corollaire (1.2.5), nous avons défini $\sigma^D_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} := \sigma^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} \circ \mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} = \tau^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} \circ {}^z\mathrm{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$. Il s'agit bien d'une injection $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(D^\times) \hookrightarrow \mathrm{Rep}^d_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(WD_K)$. Remarquons que sa définition ne fait intervenir que la restriction de $\tau^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ aux représentations superSpeh. Pour déterminer l'image de $\sigma^D_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME.– *Soit* $\sigma = (\sigma^{\mathrm{ss}}, N)$ *une* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-représentation de Weil-Deligne entière. On a équivalence entre*

i) $R_\ell(\sigma)$ *est indécomposable (*σ *est alors dite* ℓ*-indécomposable).*

ii) σ *est indécomposable et* $\mathrm{long}(r_\ell(\sigma^{\mathrm{ss}})) = \mathrm{long}(\sigma^{\mathrm{ss}})$.

iii) Il existe une représentation ℓ*-irréductible* λ *de* W_K *telle que* $\sigma^{\mathrm{ss}} = \bigoplus_{i=0}^{r-1} \lambda(-i)$ *et* N *est donné par la composée de la projection évidente* $\sigma^{\mathrm{ss}} \twoheadrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \lambda(-i)$ *suivie de l'injection évidente* $\bigoplus_{i=1}^{r-1} \lambda(-i) \hookrightarrow \sigma^{\mathrm{ss}}(-1)$.

iv) $(\tau^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell})^{-1}(\sigma)$ *est une représentation* ℓ*-superSpeh de* G.

Preuve. L'équivalence entre les trois premiers points est laissée au lecteur. Pour y incorporer le point iv), rappelons que $\tau^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ induit une bijection

$$\tau^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} : \{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. de Speh de } G\} \xrightarrow{\sim} \{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. de dim. } d \text{ indécomposables de } WD_K\}.$$

Compte tenu du lemme (2.2.4) et de la compatibilité de $\tau^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ à la torsion et aux congruences, il nous suffira de prouver le critère numérique de ℓ-indécomposabilité d'une représentation indécomposable σ suivant.

Soit $t(\sigma)$ *le nombre de caractères non ramifiés* ψ *de* W_K *tels que* $\sigma\psi \simeq \sigma$. *Soit* $m(\sigma)$ *le nombre de représentations de Weil-Deligne entières* σ' *telles que* $R_\ell(\sigma) = R_\ell(\sigma')$ *et* $\det(\sigma'(\varphi)) = \det(\sigma(\varphi))$ *où* φ *est un relèvement de Frobenius fixé. Alors* $m(\sigma)$ *est inférieur à la plus grande puissance de* ℓ *divisant le nombre* $a(\sigma) := \frac{d}{t(\sigma)}(q^{t(\sigma)} - 1)$*, et lui est égal si et seulement si* σ *est* ℓ*-indécomposable.*

En effet, écrivons σ^{ss} sous la forme $\bigoplus_{i=0}^{r-1} \lambda(-i)$ avec λ irréductible et N comme dans le point iii). On voit que σ est ℓ-indécomposable si et seulement si λ est ℓ-irréductible. D'après [29, 2.3], cela équivaut à $m(\lambda) = \ell^{\mathrm{val}_\ell(a(\lambda))}$, avec des notations similaires à ci-dessus. Or, par un argument similaire à celui du lemme (2.2.4), on vérifie que $m(\sigma) = \ell^{\mathrm{val}_\ell(r)} m(\lambda)$ et $t(\sigma) = t(\lambda)$, d'où l'on conclut à nouveau comme dans le lemme (2.2.4). □

Le lemme justifie le carré commutatif supérieur du diagrammes suivant.

$$\begin{array}{ccc}
\{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. de Speh de } G\} & \xrightarrow[\tau^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}]{\sim} & \{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. de dim. } d \text{ indécomposables de } WD_K\} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. } \ell\text{-superSpeh de } G\} & \xrightarrow[\tau^G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}]{\sim} & \{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-repr. de dim. } d,\ \ell\text{-indécomposables de } WD_K\} \\
{\scriptstyle r_\ell}\downarrow & & {\scriptstyle R_\ell}\downarrow \\
\{\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-repr. superSpeh de } G\} & \xrightarrow[\tau^G_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}]{\sim} & \{\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{-repr. de dim. } d \text{ indécomposables de } WD_K\}
\end{array}$$

Le carré inférieur est la traduction du théorème rappelé ci-dessus, puisque pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation de Speh entière δ, on a simplement $J_\ell(\delta) = r_\ell(\delta)$. Finalement on a identifié l'image de $\sigma^D_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ à $\mathrm{Rep}^d_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(WD_K)^{\mathrm{indec}}$. La caractérisation en termes de relèvements découle de la caractérisation analogue dans le théorème (1.2.4). □

3.2 Langlands-Jacquet mod ℓ et effectivité au signe près

Dans cette section, nous étudions la question (1.2.3). Remarquons qu'elle relève purement de la théorie des représentations de G. En effet, soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$, il s'agit de savoir si la projection de la classe $[\pi]$ sur $\mathcal{R}_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ modulo $\mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est une combinaison linéaire positive ou négative de représentations superSpeh. En conséquence, il y a "beaucoup" de cas où la question admet presque trivialement une réponse positive. Avant d'exposer ces cas, nous avons besoin d'un raffinement de la proposition (2.2.6).

(3.2.1) *Support supercuspidal.* Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$. On peut trouver un sous-groupe de Levi $M = G_{d_1} \times \cdots \times G_{d_r}$ de G et une représentation *supercuspidale* $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ de M telle que π apparaisse comme sous-quotient de l'induite $\tau_1 \times \tau_2 \times \cdots \times \tau_r$. D'après [27, V.4], cette paire (M, τ) est *unique à conjugaison près.* La classe de conjugaison de (M, τ) est appelée *support supercuspidal* de π.

Définissons alors $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau$ comme le sous-groupe de $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ engendré par les irréductibles dont le support supercuspidal contient (M, τ), et posons $\mathcal{R}_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau := \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau \cap \mathcal{R}_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ et de même $\mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau := \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau \cap \mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$.

Lemme.– *On a une décomposition $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau = \mathcal{R}_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau \oplus \mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau$, où le rang de $\mathcal{R}_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau$ est le nombre de représentations supercuspidales τ_0 de $G_{d/r}$ telles que la paire (M, τ) soit conjuguée à la paire $(G_{d/r}^r, \tau_0 \otimes \tau_0\nu \otimes \cdots \otimes \tau_0\nu^{r-1})$. Plus précisément, ce nombre est donné comme suit.*

- *i) Si τ est conjuguée à $\tau_0 \otimes \tau_0\nu \otimes \cdots \otimes \tau_0\nu^{r-1}$ pour τ_0 supercuspidale de $G_{d/r}$, alors posons r_0 le cardinal de l'orbite $\{\tau_0\nu^i, i \in \mathbb{Z}\}$.*
  - *(a) Si r_0 divise r, alors $\mathrm{rk}(\mathcal{R}_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau) = r_0$.*
  - *(b) Si r_0 ne divise pas r, alors $\mathrm{rk}(\mathcal{R}_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau) = 1$.*
- *ii) Sinon, $\mathrm{rk}(\mathcal{R}_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau) = 0$.*

Preuve. La décomposition se prouve exactement comme celle de la proposition (2.2.6), une fois qu'on a remarqué la conséquence suivante de la propriété d'"unicité" du support supercuspidal : si π apparaît comme sous-quotient d'une représentation i paraboliquement induite d'une représentation irréductible, alors tous les sous-quotients de i ont le même support supercuspidal que π.

Le rang de $\mathcal{R}_\Delta(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau$ est le nombre de représentations superSpeh de support supercuspidal contenant (M, τ). Vue la condition m1) dans la caractérisation des représentations superSpeh au paragraphe (2.2.3), ce nombre est bien celui annoncé dans le lemme. La discussion détaillée est alors élémentaire. Précisons seulement que sous l'hypothèse i)(a), les superSpeh dans $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_\tau$ sont exactement

$$\delta_r(\tau_0), \delta_r(\tau_0\nu) = \delta_r(\tau_0)\nu, \cdots, \delta_r(\tau_0\nu^{r_0-1}) = \delta_r(\tau_0)\nu^{r_0-1}. \tag{3.2.1.1}$$

□

Par commodité, nous dirons qu'une représentation $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$ est *elliptique de type* (τ_0, r) si τ_0 est une représentation supercuspidale de $G_{d/r}$ et le support supercuspidal de π contient la paire $((G_{d/r})^r, \tau_0 \otimes \tau_0\nu \otimes \cdots \otimes \tau_0\nu^{r-1})$.

(3.2.2) Corollaire.– *Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$.*

- *i) Si π n'est pas elliptique, on a $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) = 0$.*
- *ii) Si π est elliptique de type (τ_0, r), alors dans les cas ci-dessous, $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)$ est effective au signe près.*
  - *(a) Si π se relève à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (exemple : π générique ou de Speh).*
  - *(b) Si τ_0 n'est pas isomorphe à $\tau_0\nu^r$.*
  - *(c) Si $\pi\nu \simeq \pi$.*

Preuve. Le cas i) découle du point ii) du lemme. Dans le cas ii)(a), choisissons un relèvement $\widetilde{\pi}$ de π. On a alors $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) = r_\ell(\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\widetilde{\pi}))$. Or on sait que $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\widetilde{\pi})$ est effective au signe près.

Le cas ii) (b) est justiciable du cas i)(b) du lemme. Enfin le dernier cas relève du cas i)(a) du lemme. On a vu dans ce cas en (3.2.1.1) que les superSpeh de même support supercuspidal que π forment une orbite $(\delta, \delta\nu, \cdots \delta\nu^{r_0-1})$ sous l'action de ν par torsion. Écrivons alors

$$[\pi] = \sum_{i=0}^{r_0-1} a_i[\delta\nu^i] \bmod \mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell).$$

Comme $\mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est stable par torsion par ν, l'hypothèse $[\pi] = [\pi\nu]$ implique que tous les a_i sont égaux. Ils ont donc *a fortiori* le même signe. $\square$

On peut maintenant écrémer encore un peu en utilisant le support cuspidal.

(3.2.3) PROPOSITION.– *Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$ une représentation elliptique. Si le support cuspidal de π est différent de son support supercuspidal, alors $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)$ est effective au signe près.*

Preuve. Soit $\lambda = \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_s$ un élément du support cuspidal de π. D'après [27, Thm V.10], il existe un multisegment cuspidal b de support $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\}$ tel que $\pi \simeq \langle b\rangle$.

Supposons dans un premier temps que l'ensemble $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\}$ n'est pas connexe, au sens de [27, V.3]. Écrivons b comme somme $b = b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_k$ de composantes connexes. Par construction, la représentation $\langle b\rangle$ apparaît avec multiplicité 1 dans l'induite $\langle b_1\rangle \times \langle b_2\rangle \times \cdots \times \langle b_k\rangle$. Or, d'après [27, Prop V.3], cette induite est irréductible. La représentation π est donc induite parabolique propre et on a $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) = 0$.

Supposons maintenant que l'ensemble $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\}$ est connexe. Cela signifie en particulier que tous les λ_i sont de la forme $\lambda\nu^{j_i}$ pour un certain entier j_i. Par hypothèse, λ n'est pas supercuspidale. D'après [32, III.5.14], elle est donc de la forme "Steinberg généralisée". Par construction, une telle représentation vérifie $\lambda \simeq \lambda\nu$. Par conséquent $\pi \simeq \pi\nu$ et on peut appliquer le point ii)(c) du corollaire précédent. $\square$

En utilisant les algèbres de Hecke de types de Bushnell-Kutzko comme dans [27, IV], la proposition précédente permet en principe[2] de ramener la question d'effectivité de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)$ au cas où π est elliptique *superunipotente*, c'est-à-dire au cas où le support cuspidal de π contient la paire $(\mathbb{G}^d, 1 \otimes \nu \otimes \cdots \otimes \nu^{d-1})$, à torsion par un caractère $\chi \otimes \chi \otimes \cdots \otimes \chi$ près. Notons alors ε l'ordre de q dans $\mathbb{F}_\ell^\times$. Le corollaire (3.2.2) dit que $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)$ est effectif si $\varepsilon = 1$ ou si ε ne divise pas d. Le premier cas "non trivial" d'"effectivité est donc donné par la proposition suivante.

(3.2.4) PROPOSITION.– *Soit π elliptique superunipotente. Si l'ordre ε de q dans $\mathbb{F}_\ell^\times$ est d, alors $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)$ est effective au signe près.*

Preuve. Nous allons simplement expliciter la classification dans ce cas particulier, c'est-à-dire la matrice de passage entre "modules standard" et "modules simples". En prenant $\chi = \nu^{\frac{1-d}{2}}$ ci-dessus, on voit qu'il s'agit d'expliciter la classification des sous-quotients de l'induite $\nu^{\frac{1-d}{2}} \times \cdots \times \nu^{\frac{d-1}{2}} = \mathrm{Ind}_B^G(1)$. On peut trouver une classification dans [25, 2.17] dans un langage différent, mais sans le calcul de la matrice de passage.

Puisque l'ordre multiplicatif de q est d, un multisegment de support $\nu^{\frac{1-d}{2}} \otimes \cdots \otimes \nu^{\frac{d-1}{2}}$ s'écrit $a = \{(i_k, r_k), k = 1, \cdots, |a|\}$ où $|a|$ est le nombre de segments de a, les i_k sont des éléments de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, les r_k sont des entiers positifs de somme d et on a $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \bigsqcup_{k=1}^{|a|}[i_k, i_k+r_k-1] \bmod d$. Pour chaque $k = 1, \cdots, |a|$, notons $P(a, k)$ le sous-groupe parabolique standard $P_{r_k, r_{k+1}, \cdots, r_{|a|}, r_1, \cdots, r_{k-1}}$. Par définition de $\pi(a)$, on a dans $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ l'égalité

$$[\pi(a)] = \left[\mathrm{Ind}_{P(a,k)}^G(\nu^{i_k})\right].$$

Notre but est de calculer les multiplicités définies par les formules $[\pi(a)] = \sum_b m(b, a)\langle b\rangle$. La première remarque importante est que ces multiplités sont 1 ou 0, car le caractère $\nu^{\frac{1-d}{2}} \otimes \cdots \otimes \nu^{\frac{d-1}{2}}$ est régulier pour l'action du groupe de Weyl, et il y a une seule représentation non-superunipotente, à savoir la non-dégénérée (ou "Steinberg généralisée"), qui est cuspidale. Remarquons maintenant que les segments a comme ci-dessus sont en bijection $a \mapsto I_a := \{i_1, \cdots, i_{|a|}\}$ avec les sous-ensembles *non vides* de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

[2] Les détails restent toutefois à écrire.

Par cette bijection, les représentations superSpeh correspondent aux singletons et la non-dégénérée à l'ensemble plein. Voici alors la formule de multiplicité

$$m(b,a) = 1 \Leftrightarrow I_b \subseteq I_a. \tag{3.2.4.2}$$

Admettons un instant cette formule. La matrice inverse définie par $\langle a\rangle = \sum_b n(b,a)[\pi(b)]$ est alors facile à calculer. On vérifie en effet que

$$n(b,a) \quad = \quad \begin{cases} (-1)^{I_a\setminus I_b} & \text{si} \qquad I_b \subseteq I_a \\ \qquad 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, on obtient la formule

$$\langle a\rangle = (-1)^{|a|-1}\left(\sum_{k=1}^{|a|}[\nu^{i_k}]\right) \bmod \mathcal{R}_I(G,\overline{\mathbb{F}}_\ell).$$

Il reste à prouver la formule (3.2.4.2). À un sous-ensemble I de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ muni d'un élément $i\in I$ on associe un sous-groupe parabolique standard $P(I,i)$ de la manière suivante. Considérons la bijection $\pi_i : x\in\{1,\cdots,d-1\}\mapsto x+i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\setminus\{i\}$. Le sous-ensemble $J := \pi_i^{-1}(I\setminus\{i\})$ de $\{1,\cdots,d-1\}$ détermine une matrice de Jordan $N_J = \sum_{j\in J} E_{j,j+1}$, et on définit $P(I,i)$ comme le plus grand sous-groupe parabolique standard dont le radical unipotent contient N_J. On a alors $P(a,k) = P(I_a,i_k)$ et $[\pi(a)] = \left[\mathrm{Ind}_{P(I_a,i_k)}^G(\nu^{i_k})\right]$.

Supposons alors que $I_b\subseteq I_a$ et soit i un élément de I_b. On a une inclusion $\mathrm{Ind}_{P(I_b,i)}^G(\nu^i)\subseteq \mathrm{Ind}_{P(I_a,i)}^G(\nu^i)$ d'où en particulier $m(b,a)=1$.

Supposons au contraire que I_b n'est pas inclus dans I_a. Deux cas se présentent. Si l'intersection $I_b\cap I_a$ contient un élément i, les deux représentations $\mathrm{Ind}_{P(I_b,i)}^G(\nu^i)$ et $\mathrm{Ind}_{P(I_a,i)}^G(\nu^i)$ sont contenues dans $\mathrm{Ind}_B^G(\nu^i)$ qui est de multiplicité 1. Leur intersection est $\mathrm{Ind}_{P(I_b\cap I_a,i)}^G(\nu^i)$. Par hypothèse, $I_b\cap I_a$ est strictement inclus dans I_b, donc pour tout sous-quotient irréductible π de $\mathrm{Ind}_{P(I_b\cap I_a,i)}^G(\nu^i)$, on a $\lambda_\pi < \lambda_b$. En particulier, $\langle b\rangle$ n'est pas sous-quotient de $\mathrm{Ind}_{P(I_b\cap I_a,i)}^G(\nu^i)$, donc ne l'est pas plus de $\mathrm{Ind}_{P(I_a,i)}^G(\nu^i)$, et on a bien $m(b,a)=0$. Il nous reste à considérer le cas $I_a\cap I_b=\emptyset$. Fixons $i\in I_b$. Si I_b contient un autre élément j, on peut appliquer le cas précédent au multisegment a_j correspondant à l'ensemble $I_a\cup\{j\}$. En effet, le cas précédent dit que $m(b,a_j)=0$ donc *a fortiori* $m(b,a)=0$ puisque $\pi(a)\subset\pi(a_j)$. Dans le cas contraire, $I_b=\{i\}$ est un singleton avec $i\notin I_a$. Il s'agit de voir que le caractère ν^i n'intervient pas dans $r_{P_{1,\cdots,1}}(\pi(a))$, ce qui résulte d'un calcul de foncteur de Jacquet. □

(3.2.5) COROLLAIRE.– *Si l'ordre ε de q dans $\mathbb{F}_\ell^\times$ n'est pas un diviseur* propre *de d, alors $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ envoie toute représentation irréductible sur une effective au signe près.*

Preuve. Le cas $\varepsilon=1$ et le cas où ε ne divise pas d découlent respectivement des points ii)(b) et ii)(c) du corollaire (3.2.2). Supposons donc $\varepsilon=d$. Fixons un diviseur r de d et une représentation supercuspidale τ_0 de $G_{d/r}$. Notons r_0 le cardinal de l'orbite de τ_0 par torsion par les puissances de ν. C'est un diviseur de d. Supposons que ce soit un diviseur *propre* de r. Alors, d'après [32, III.5.14 i)], la représentation de Steinberg généralisée $\mathrm{St}(\tau_0,r_0)$ serait une représentation cuspidale non supercuspidale de $G_{dr_0/r}$. Or ceci est impossible puisque l'hypothèse $\varepsilon=d$ implique que le pro-ordre de $G_{dr_0/r}$ est inversible dans $\mathbb{F}_\ell$, donc que toute cuspidale est supercuspidale (et même projective modulo le centre). On a donc deux cas. Soit r_0 ne divise pas r, auquel cas on peut appliquer le lemme i)(b) (3.2.1). Soit $r_0=r$, auquel cas nous laisserons le lecteur se convaincre que l'argument de la proposition précédente s'adapte sans autre difficulté que celles inhérentes aux notations. □

(3.2.6) *Une stratégie possible dans le cas $\ell > n$.* Voici quelques étapes d'une stratégie possible. Chaque étape semble non triviale, et comme de toutes façons la dernière étape échappe à l'auteur, il n'y a pas grand sens à les développer ici.

i) Pour chaque bloc de $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$, ramener la question à une question de q-algèbres de Schur. Pour le bloc unipotent, une grande partie du travail est faite dans [30].

ii) Prouver que pour $\ell > n$, la matrice de décomposition de la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbre de Schur en une racine ε-ème de l'unité vers la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre de Schur en q est l'identité (analogue affine de la "conjecture de James").

iii) Utiliser l'interprétation géométrique par Ginzburg-Vasserot des multiplicités des modules simples dans les modules standard d'une algèbre de Schur en une racine de l'unité.

iv) "Inverser" la matrice de polynômes de Kazhdan-Lusztig à laquelle on s'est ainsi ramené.

Voici à quoi ressemble l'interprétation géométrique des multiplicités. Soit ζ une racine ε-ème de l'unité et s la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, \zeta, \cdots, \zeta^{d-1}) \in M_d(\mathbb{C})$. Considérons la variété algébrique affine complexe

$$\mathcal{N}_s := \{N \in M_d(\mathbb{C}),\ \text{nilpotente et t.q. } sNs^{-1} = \zeta N\}.$$

Le centralisateur $C(s)$ est connexe et agit par conjugaison sur $\mathcal{N}_s$ avec un nombre fini d'orbites, toutes simplement connexes. Considérons le groupe de Grothendieck $\mathcal{K} := \mathcal{K}_{C(s)}(\mathcal{N}_s)$ des faisceaux constructibles $C(s)$-équivariants sur $\mathcal{N}_s$. Il admet deux bases remarquables indexées par les orbites. Soit $j^{\mathcal{O}}$ l'inclusion d'une orbite $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{N}_s$. La première base naturelle est données par les faisceaux $[\mathcal{O}] := j^{\mathcal{O}}_!(\mathbb{C})$ et la seconde par les complexes de faiceaux $[IC(\mathcal{O})] := j^{\mathcal{O}}_{!*}(\mathbb{C})$. Un fait remarquable est que les $j^{\mathcal{O}}_{!*}(\mathbb{C})$ n'ont de cohomologie qu'en degrés pairs, de sorte que la matrice de passage $(\langle[\mathcal{O}'], [IC(\mathcal{O})]\rangle)_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}$ des $[\mathcal{O}]$ vers les $[IC(\mathcal{O})]$ est à coefficients positifs. Notons que cette matrice est triangulaire si l'on ordonne (partiellement) les orbites selon l'inclusion des adhérences.

Les travaux de Ginzburg, Vasserot et Ariki [11] [24] [1] exhibent une bijection $a \mapsto \mathcal{O}_a$ entre les multisegments de support $(1, \zeta, \cdots, \zeta^{d-1})$ et les orbites de $C(s)$ dans $\mathcal{N}_s$. telle que pour tous multisegments a, b on a

$$m(b, a) = \langle[\mathcal{O}_a], [IC(\mathcal{O}_b)]\rangle.$$

Dans cette bijection, les segments $\{(\zeta^i, d)\}$ correspondent aux orbites maximales, dont les adhérences sont les composantes irréductibles de $\mathcal{N}_s$.

Exemple.– Dans le cas $\varepsilon = d$, la variété $\mathcal{N}_s$ est celle des matrices de la forme $\sum_{i=1}^d x_i E_{i,i+1}$ où au moins un x_i est nul, et où l'on convient que $E_{d,d+1} = E_{d,1}$. Ainsi, $\mathcal{N}_s$ est la réunion des hyperplans de coordonnées dans $\mathbb{C}^d$. Les orbites sont paramétrées par les sous-ensemble de $\{1, \cdots, d\}$. À I correspond $\mathcal{O}_I = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{C}^d, i \in I \Leftrightarrow x_i = 0\}$. Dans ce cas, le calcul des complexes d'intersection est facile : on a simplement $j^{\mathcal{O}}_{!*}(\mathbb{C}) = j^{\overline{\mathcal{O}}}_*(\mathbb{C})$ où $j^{\overline{\mathcal{O}}}$ est l'inclusion de l'adhérence de l'orbite $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}_J \subset \overline{\mathcal{O}}_I \Leftrightarrow J \supset I$, on retrouve ainsi la matrice de passage calculée dans la proposition (3.2.4).

Dans le cas où ε divise strictement d, la géométrie des orbites est beaucoup plus compliquée. Par exemple les inclusions $\mathcal{O} \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}$ ne sont généralement pas affines, et les $j^{\mathcal{O}}_!(\mathbb{C})$ ne sont pas nécessairement pervers décalés, ce qui empêche de prévoir simplement les signes dans la matrice inverse par une formule du type $\mathrm{sgn}(\langle[IC(\mathcal{O}')], [\mathcal{O}]\rangle) = (-1)^{\mathrm{codim}(\mathcal{O}',\mathcal{O})}$.

Cependant, d'après Lusztig [15, Sec. 11], les $\langle[\mathcal{O}'], [IC(\mathcal{O})]\rangle$ sont les valeurs en 1 de certains polynômes de Kazhdan-Lusztig. Plus précisément, soit $\widetilde{\mathfrak{S}}_d$ le groupe de Weyl affine étendu de type $\widetilde{A_{d-1}}$. Notons ${}_\varepsilon[\widetilde{\mathfrak{S}}_d]_\varepsilon$ l'ensemble des représentants de longueur maximale des doubles classes modulo le sous-groupe parabolique (fini) $(\mathfrak{S}_{d/\varepsilon})^\varepsilon$. Munissons-le de l'ordre de Bruhat. Alors il existe un isomorphisme $\mathcal{O} \mapsto w_{\mathcal{O}}$ du poset des orbites de $C(s)$ dans $\mathcal{N}_s$ sur un idéal du poset ${}_\varepsilon[\widetilde{\mathfrak{S}}_d]_\varepsilon$, tel que

$$\langle[\mathcal{O}'], [IC(\mathcal{O})]\rangle = P_{w_{\mathcal{O}}, w_{\mathcal{O}'}}(1),$$

où $P_{w,w'}$ désigne le polynôme de Kazhdan-Lusztig usuel associé à deux éléments de $\widetilde{\mathfrak{S}}_d$, *cf.* [12]. Pour des petites valeurs de d, on peut donc espérer calculer par ordinateur les coefficients qui nous intéressent dans la matrice inverse.

Références

[1] S. Ariki. On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$. *J. Math. Kyoto Univ.*, 36(4) :789–808, 1996.

[2] I. Badulescu. Orthogonalité des caractères pour $GL(n)$ sur un corps local de caractéristique non nulle. *Manuscripta Math.*, 101 :49–70, 2000.

[3] I. Badulescu. Jacquet-Langlands et unitarisabilité. *J. Inst. Math. Jussieu*, 6(3) :349–379, 2007.

[4] A. Borel. Automorphic L-functions. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 27–61. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[5] P. Broussous. Extension du formalisme de Bushnell-Kutzko au cas d'une algèbre à division. *Proc. London Math. Soc.*, 77(3) :292–326, 1998.

[6] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. *The admissible dual of $GL(n)$ via compact open subgroups.* Number 129 in Annals Math. Studies. P.U.P., 1993.

[7] C. Curtis and I. Reiner. *Methods of Representation theory I.* Wiley Interscience, 1988.

[8] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *Invent. Math.*, 169 :75–152, 2007.

[9] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non abélienne ℓ-entière. Preprint, disponible à l'adresse `http ://www.math.jussieu.fr/ dat/recherche/travaux.html`.

[10] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras. Représentations des algèbres centrales simples p-adiques. In *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, pages 33–117. Hermann, Paris, 1984.

[11] V. Ginzburg and E. Vasserot. Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n. *Internat. Math. Res. Notices*, (3) :67–85, 1993.

[12] A. Henderson. Nilpotent orbits of linear and cyclic quivers and Kazhdan-Lusztig polynomials of type A. *Represent. Theory*, 11 :95–121 (electronic), 2007.

[13] D. Kazhdan. Cuspidal geometry of p-adic groups. *J. Analyse Math.*, 47 :1–36, 1986.

[14] J. Korman. A character formula for compact elements (the rank one case). *preprint arXiv :math.RT/0409292v1*, 2004.

[15] G. Lusztig. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(2) :447–498, 1990.

[16] R. Meyer and M. Solleveld. Resolutions for representations of reductive p-adic groups via their buildings. *J. Reine Angew. Math.*, 647 :115–150, 2010.

[17] R. Meyer and M. Solleveld. Characters and growth of admissible representations of reductive p-adic groups. *To appear in J. Inst. Math. Jussieu*, 2010.

[18] A. Minguez and V. Sécherre. Représentations ℓ-modulaires des formes intérieures de gl_n sur un corps p-adique, $\ell \neq p$. *En préparation*, 2009.

[19] P. Schneider and U. Stuhler. Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. *Publ. Math. I.H.É.S*, 85 :97–191, 1995.

[20] P. Schneider and E.-W. Zink. K-types for the tempered components of a p-adic general linear group. *J. reine angew. Math.*, 517 :161–208, 1999.

[21] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris 1967.

[22] L. Spice. Topological Jordan decompositions. *J. Algebra*, 319(8) :3141–3163, 2008.

[23] G. van Dijk. Computation of certain induced characters of p-adic groups. *Math. Ann.*, 199 :229–240, 1972.

[24] E. Vasserot. Affine quantum groups and equivariant K-theory. *Transform. Groups*, 3(3) :269–299, 1998.

[25] M.-F. Vignéras. À propos d'une conjecture de Langlands modulaire. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 415–452. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.

[26] M.-F. Vignéras. Cohomology of sheaves on the building and R-representations. *Invent. Math.*, 127 :349–373, 1997.

[27] M.-F. Vignéras. Induced R-representations of p-adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.

[28] M.-F. Vignéras. Correspondance de Langlands semi-simple pour $GL(n, F)$ modulo $\ell \neq p$. *Invent. Math.*, 144 :177–223, 2001.

[29] M.-F. Vignéras. La conjecture de Langlands locale pour $\mathrm{GL}(n, F)$ modulo l quand $l \neq p$, $l > n$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 34(6) :789–816, 2001.

[30] M.-F. Vignéras. Schur algebras of reductive p-adic groups. I. *Duke Math. J.*, 116(1) :35–75, 2003.

[31] M.-F. Vignéras and J.-L. Waldspurger. Premiers réguliers de l'analyse harmonique mod l d'un groupe réductif p-adique. *J. Reine Angew. Math.*, 535 :165–205, 2001.

[32] M.F. Vignéras. *Représentations l-modulaires d'un groupe p-adique avec l différent de p*. Number 137 in Progress in Math. Birkhäuser, 1996.

[33] A.V. Zelevinsky. Induced representations on reductive p-adic groups II. *Ann.Sci.Ec.Norm.Sup*, 13 :165–210, 1980.

A Caractère d'une représentation modulo ℓ d'un groupe p-adique

Texte écrit en mars 1998, révisé en janvier 2010

Marie-France Vignéras

Soient $\ell \neq p$ deux nombres premiers distincts. On note $\overline{\mathbf{Q}}_\lambda$ une clôture algébrique du corps $\mathbf{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques, $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda$ et $\overline{\mathbf{F}}_\lambda$ l'anneau des entiers et le corps résiduel. Soient F un corps local non archimédien de caractéristique 0, de corps résiduel fini de caractéristique p et R un corps algébriquement clos contenant $\overline{\mathbf{F}}_\lambda$. Soit G le groupe des points F-rationnels d'un F-groupe réductif connexe.

On note $C_c^\infty(X; R)$ le R-module des fonctions localement constantes à support compact sur X, pour toute partie fermée X de G. On note $\mathrm{Mod}_R\, G$ l'ensemble des R-représentations lisses de G, et $\mathrm{Irr}_R\, G$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des R-représentations irréductibles lisses de G.

On choisit, comme on le peut, une R-mesure de Haar dg sur G. Soient $f \in C_c^\infty(G; R)$ et $(\pi, V) \in \mathrm{Mod}_R\, G$ admissible, i.e $\dim_R V^K$ fini pour tout sous-groupe ouvert K de G. L'endomorphisme $\pi(fdg)$ de V est de rang fini. Sa trace $\mathrm{tr}(\pi(fdg))$ définit une forme linéaire sur $C_c^\infty(G; R)$, dépendant du choix de la mesure de Haar dg, appelée la trace de π. Les R-représentations irréductibles de G sont admissibles ([Vig], II.2.8) et leurs traces sont des formes linéaires linéairement indépendantes sur $C_c^\infty(G; R)$ ([Vig] I.6.13).

L'ensemble G^{reg} des éléments semisimples réguliers est un ouvert dense de G invariant par conjugaison.

Théorème 1 CARACTERE *Soit π une R-représentation de G de longueur finie. Il existe une fonction localement constante $\chi_\pi : G^{reg} \to R$ telle que*

$$\mathrm{tr}(\pi(fdg)) = \int_G \chi_\pi(g)\ f(g)\ dg$$

pour tout $f \in C_c^\infty(G^{reg}; R)$. On dit que χ_π est le caractère de π.

Le caractère de π ne dépend pas du choix de la mesure de Haar dg, il est invariant par conjugaison par G, et il est unique.

Pour les $\overline{\mathbf{F}}_\lambda$-représentations de longueur finie d'un groupe fini, R. Brauer a introduit un autre caractère qui prend ses valeurs dans $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda$, et qui permet de décrire le groupe de Grothendieck de ces $\overline{\mathbf{F}}_\lambda$-représentations. Nous allons donner une construction analogue pour le groupe p-adique G, utilisant la méthode de Howe pour construire le caractère, avec l'espoir d'applications au groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbf{F}}_\lambda$-représentations de longueur finie de G.

Une $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda$-structure d'une représentation lisse de type fini de G sur un $\overline{\mathbf{Q}}_\lambda$-espace vectoriel V est un $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda$-module libre G-stable, contenant une $\overline{\mathbf{Q}}_\lambda$-base de V, et qui est de type fini comme $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda G$-module.

Nous supposons pour simplifier que le centre de G est compact (le cas général ne pose aucune difficulté). Notons $G^{ell}_{\lambda'}$ l'ensemble des éléments elliptiques λ-réguliers de G (voir III.2 et 4), Λ l'idéal maximal de $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda$ et $r_\Lambda : \overline{\mathbf{Z}}_\lambda \to \overline{\mathbf{F}}_\lambda$ la réduction modulo Λ.

Théorème 2 CARACTERE DE BRAUER *Pour toute représentation $\pi \in \mathrm{Mod}_{\overline{\mathbf{F}}_\lambda} G$ de longueur finie, il existe une fonction*

$$\phi_\pi : G^{ell}_{\lambda'} \to \overline{\mathbf{Z}}_\lambda$$

ayant les propriétés suivantes :

1) ϕ_π est localement constante, invariante par G-conjugaison.

2) ϕ_π relève le caractère χ_π de π sur $G^{ell}_{\lambda'}$,

$$r_\Lambda \circ \phi_\pi = \chi_\pi .$$

3) ϕ_π ne dépend que de la semi-simplification de π.

4) Si π est la réduction modulo Λ d'une $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda$-structure d'une $\overline{\mathbf{Q}}_\lambda$-représentation Π de G, alors ϕ_π est égal à la restriction du caractère χ_Π de Π sur $G^{ell}_{\lambda'}$.

On dit que ϕ_π est un caractère de Brauer de π.

On définit un caractère de Brauer ϕ_π comme ceci. Soit $g \in G^{ell}_{\lambda'}$ et soit $(K_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante pro-p-sous-groupes ouverts compacts normalisés par g d'intersection $\{1\}$; notons μ_n la R-mesure de Haar sur G telle que le volume de K_n est 1, et 1_{gK_n} la fonction caractéristique de gK_n ; posons $e_{gK_n} := 1_{gK_n}\mu_n$. L'endomorphisme $\pi(e_{gK_n})$ de l'espace de dimension finie $V(\pi)^{K_n}$, est d'ordre fini premier à λ. Pour tout n assez grand, le caractère de Brauer de $\pi(e_{gK_n})$ est égal à $\phi_\pi(g)$.

Le caractère de Brauer est unique, si l'on sait que chaque $\overline{\mathbf{F}}_\lambda$-représentation irréductible de G apparait dans la réduction modulo Λ d'une $\overline{\mathbf{Q}}_\lambda$-représentation irréductible de G ayant une $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda$-structure.

Les théorèmes 1 et 2 sont démontrés dans la partie II en admettant l'existence des certaines filtrations séparées décroissantes de G en pro-p-sous-groupes ouverts compacts (propositions I.1 et II.1). Ces propositions sont démontrées (III.4,5) en utilisant la théorie de Kirillov-Howe et un lemme de Harish-Chandra (III.3) qui supposent que la caractéristique de F est 0. C'est le seul endroit où cette hypothèse apparait.

I Caractère d'une representation

On connait deux démonstrations différentes du théorème 1, lorsque R est le corps des nombres complexes, l'une due à R.Howe, l'autre à Harish-Chandra. Les deux démonstrations s'étendent sans problèmes lorsque $\mathbf{C}$ est remplacé par R.

Nous rappelons la démonstration de Howe, valable sur un corps commutatif contenant des racines de l'unité d'ordre une puissance quelconque de p, que l'on adaptera dans la partie II pour définir le caractère de Brauer.

Une suite décroissante de sous-groupes de G d'intersection triviale est appelée filtration séparée décroissante de sous-groupes de G.

Une R-représentation σ d'un pro-p-sous-groupe K de G est appelée entrelacée avec la représentation triviale d'un pro-p-sous-groupe K' de G s'il existe $g \in G$ tel que la restriction de σ à $K \cap gK'g^{-1}$ contient la représentation triviale. On dit que $g \in G$ entrelace σ avec elle-même si σ et la représentation $g(\sigma)$ de gKg^{-1} restreintes à $K \cap gKg^{-1}$ ont un composant irréductible isomorphe.

I.1 Proposition *Il existe une filtration séparée décroissante de pro-p-sous-groupes ouverts $(K_n)_{n\geqslant 0}$ de G ayant la propriété de finitude suivante :*

Pour tout entier $n_o \geqslant 0$ et tout $\gamma \in G^{reg}$, il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ et un voisinage $V(\gamma)$ de γ dans G^{reg} tels que pour tout entier $n \geqslant n_1$, l'ensemble des classes d'isomorphisme des R-représentations irréductibles σ de K_n, entrelacées avec la représentation triviale de K_{n_o}, et avec elles-même par un élément de $V(\gamma)$, est fini.

La démonstration est donnée en III.4.

I.2 *Démonstration du théorème 1* La proposition I.1 implique le théorème 1, par l'argument simple suivant de Howe.

Soient π une R-représentation lisse de longueur finie d'espace $V(\pi)$ de G et $\gamma \in G^{reg}$. On choisit, comme on le peut, un entier $n_o \geqslant 0$ tel que π est engendrée par ses vecteurs K_{n_o}-invariants. On applique la proposition I.1, et l'on obtient un entier n_1 et un voisinage $V(\gamma)$. On choisit un entier $n \geqslant n_1$. Toute représentation $\sigma \in \mathrm{Irr}_R K_n$ contenue dans π est entrelacée avec la représentation triviale de K_{n_o} ([Vig] I.8.1). Par la proposition I.1, il n'existe qu'un ensemble fini S de $\sigma \in \mathrm{Irr}_R K_n$ contenues dans π tels que g entrelace σ avec elle-même. La restriction de π au groupe K_n est semi-simple. On décompose l'espace $V(\pi)$ de π comme une somme directe de ses parties σ-isotypiques $V(\pi)_\sigma$ pour $\sigma \in \mathrm{Irr}_R K_n$, et l'on note p_σ la projection de $V(\pi)$ sur $V(\pi)_\sigma$,

$$V(\pi) = \oplus_\sigma V(\pi)_\sigma, \quad p_\sigma : V(\pi) \to V(\pi)_\sigma.$$

Soit $g \in V(\gamma)$. L'intersection $V(\pi)_\sigma \cap \pi(g)V(\pi)_\sigma$ est stable par $K_n \cap gK_ng^{-1}$. Si elle est non vide, g entrelace σ ([Vig] 1.8.1-2). Si elle est vide, la trace de l'endomorphisme $p_\sigma\pi(g) \in \mathrm{End}\, V(\pi)$ est nulle. La fonction sur $V(\gamma)$ définie par

$$g \mapsto \chi(g) := \sum_{\sigma \in S} \mathrm{tr}(p_\sigma \pi(g))$$

est localement constante. Si $f \in C_c^\infty(G; R)$ on a

$$\mathrm{tr}(\pi(f\,dg)) = \sum_\sigma \int_G f(g)\,\mathrm{tr}(p_\sigma\pi(g))dg.$$

Si le support de f est contenu dans $V(\gamma)$, on a

$$\mathrm{tr}(\pi(f\,dg)) = \int_G f(g)\chi(g)dg.$$

Cette formule montre que χ est canonique, quoique sa construction ne le fut pas. Par cette méthode, on définit une fonction localement constante

$$\chi_\pi : G^{reg} \to R$$

qui vérifie le théorème 1.

II Caractère modulaire d'une représentation

On dit qu'un élément de G est elliptique s'il est semi-simple régulier, de G-centralisateur compact modulo le centre. On note G^{ell} l'ouvert des éléments elliptiques de G.

On suppose pour simplifier que le centre est compact et l'on note $G^{ell}_{\lambda'}$ l'ensemble ouvert des éléments elliptiques λ-réguliers (III.2, 4).

II.1 Proposition *Pour tout $g \in G^{ell}_{\lambda'}$, il existe une filtration séparée décroissante de pro-p-sous-groupes ouverts compacts $(K_{g,n})_{n\geqslant 0}$ de G normalisés par g, ayant les propriétés suivantes :*

a) Pour tout $\gamma \in G^{ell}_{\lambda'}$, il existe un voisinage $V'(\gamma)$ de γ dans $G^{ell}_{\lambda'}$ tel que $K_{g,n} = K_{\gamma,n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $g \in V'(\gamma)$.

b) Pour tout $x \in G$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $xK_{g,n}x^{-1} = K_{xgx^{-1},n}$.

c) Pour tout entier $n_o \geqslant 0$ et tout $\gamma \in G^{ell}_{\lambda'}$, il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ et un voisinage $V''(\gamma)$ de γ dans $G^{ell}_{\lambda'}$ tels que pour tout entier $n \geqslant n_1$, l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles σ de $K_{\gamma,n}$ entrelacées avec la représentation triviale de K_{γ,n_o} et avec elle-mêmes par un élément de $V''(\gamma)$ est fini.

II.2 Nous admettons la proposition qui sera démontrée en III.5, et nous définissons le caractère de Brauer.

Soit π une R-représentation de G de longueur finie (donc admissible) d'espace $V(\pi)$ et $\gamma \in G^{ell}_{\lambda'}$. Pour simplifier, pour tout entier $m \geqslant 0$, on notera $K_m := K_{\gamma,m}$ et $V(\pi)^{(m)}$ l'espace des vecteurs K_m-invariants de $V(\pi)$. On choisit, comme on le peut, un entier $n_o \geqslant 0$ tel que π est engendrée par $V(\pi)^{(n_o)}$.

On applique la proposition. On obtient un entier n_1 et des voisinages $V'(\gamma)$ et $V''(\gamma)$ de γ et l'on pose $V(\gamma) := V'(\gamma) \cap V''(\gamma)$. Par c), le nombre de classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de K_{n_1} entrelacées avec la représentation triviale de K_{n_o} et avec elles-même par un élément de $V(\gamma)$, est fini. On choisit un entier $m_1 \geqslant n_1$ tel que ces représentations soient triviales sur K_{m_1}.

Soit $g \in V(\gamma)$ et soit n un entier tel que $n \geqslant m_1 \geqslant n_1$. L'ensemble des représentations de $\mathrm{Irr}_R\, K_{n_1}$, non triviales sur K_{m_1} mais triviales sur K_n est fini. Soit E l'ensemble fini des représentations $\sigma \in \mathrm{Irr}_R\, K_{n_1}$ contenues dans π non triviales sur K_{m_1} mais triviales sur K_n. Comme g normalise les K_m, il agit sur E. Les representations de E sont entrelacées avec la representation triviale de K_{n_o} car $V(\pi)^{(n_0)}$ engendre π ([Vig], I.8.1). Par le choix de m_1, une représentation de E n'est pas entrelacée par un élément de $V(\gamma)$, donc g agit sans points fixes dans E, i.e toute orbite C de g dans E a au moins 2 éléments. On note

$$V(\pi)_C := \oplus_{\sigma\in C} V(\pi)_\sigma$$

On décompose l'espace vectoriel de dimension finie $V(\pi)^{(n)}$ comme une somme directe stable par $\pi(g)$,

$$V(\pi)^{(n)} = V(\pi)^{(m_1)} \oplus_C \ V(\pi)_C$$

C parcourant les orbites de g dans E.

Lorsque $g \in G$ est compact et ℓ-régulier l'endomorphisme de $\pi(g)$ du R-espace vectoriel $V(\pi)^{(n)}$ de dimension finie est d'ordre fini premier à ℓ (voir III.2). On peut définir son caractère ordinaire (la trace) et son caractère de Brauer (voir III.1). Le caractère (ordinaire ou de Brauer) de $\pi(g)$ sur $V(\pi)^{(n)}$ est la somme des caractères (ordinaire ou de Brauer) de $\pi(g)$ sur $V(\pi)^{(m_1)}$ et sur les $V(\pi)_C$. Il est clair que le caractère ordinaire de $\pi(g)$ sur $V(\pi)_C$ est nul pour chaque orbite C de g dans E. Nous montrons que le caractère de Brauer de $\pi(g)$ sur $V(\pi)_C$ est nul.

On note $t \geqslant 2$ le nombre d'éléments de C, et A l'action de $\pi(g)$ sur $V(\pi)_C$. Soit $\sigma \in C$. On note $W_j := A^{j-1}V(\pi)_\sigma$ pour pour tout $1 \leqslant j \leqslant t$. On a $V(\pi)_C = W_1 \oplus \ldots \oplus W_t$. L'isomorphisme A^t sur W_1 est diagonalisable, car A^t est d'ordre fini premier à λ comme A. On choisit une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ de W_1 formée de vecteurs propres pour A^t. L'espace W'_i de dimension t engendré par $(A^j e_i)_{1\leqslant j\leqslant t}$ est stable par A, et la décomposition

$$V(\pi)_C = \oplus_{1\leqslant i\leqslant s} W'_i$$

est stable par A. Le caractère de Brauer de A sur chaque W'_i est nul (voir la partie III), donc le caractère de Brauer de A sur $V(\pi)_C$ est nul. $\diamond$

Rappelons que $K_n = K_{\gamma,n} = K_{g,n}$ pour tout $n \geqslant 0$ et $g \in V(\gamma)$. Nous avons montré :

Proposition 3 *Pour tout $\gamma \in G^{ell}_{\lambda'}, g \in V(\gamma)$, le caractère $\chi_n(g)$ et le caractère de Brauer $\phi_n(g)$ de l'endomorphisme $\pi(g)$ sur $V(\pi)^{K_n}$ et ne dépendent pas de l'entier n si $n \geqslant m_1$.*

On définit les fonctions sur $G^{ell}_{\lambda'}$

$$g \mapsto \chi(g) = \lim_{n\to\infty} \ \chi_n(g), \quad g \mapsto \phi(g) = \lim_{n\to\infty} \ \phi_n(g).$$

Par le théorème 1, χ est le caractère de π.

II.3 Nous allons montrer que ϕ est un caractère de Brauer de π.

1) *ϕ est localement constante.* Soit $\gamma \in G^{ell}_{\lambda'}$. Par la proposition de II.2, $\phi(g)$ est le caractère de Brauer de l'endomorphisme $\pi(g)$ sur $V(\pi)^{K_{m_1}}$ pour tout $g \in V(\gamma)$. Donc la fonction ϕ est constante sur le voisinage $V(\gamma) \cap \gamma K_{\gamma,m_1}$ de γ.

ϕ est invariante par G-conjugaison. Ceci provient de la propriété (II.1.b) $K_{xgx^{-1},n} = xK_{g,n}x^{-1}$ pour tout $g \in G^{ell}_{\lambda'}$, $x \in G$, en remarquant que le caractère de Brauer de $\pi(xgx^{-1})$ sur $V(\pi)^{xKx^{-1}}$ est le même que celui de $\pi(g)$ sur $V(\pi)^K$ pour tout sous-groupe ouvert compact K de G.

2) *La réduction de ϕ modulo Λ est égale à χ* car pour tout $g \in G^{ell}_{\lambda'}$, si n est assez grand, la réduction de $\phi_n(g)$ modulo Λ est égale à $\chi_n(g)$.

3) *ϕ ne dépend que de la semi-simplifiée de π* car le caractère de Brauer de l'endomorphisme $\pi(g)$ sur $V(\pi)^{K_{g,n}}$ ne dépend que de la semi-simplifiée de π pour tout entier $n \geqslant 0$.

4) *Si π est la réduction d'un $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda$-structure L d'une $\overline{\mathbf{Q}}_\lambda$-représentation irréductible* Π*, on a $\chi_\Pi = \phi_\pi$.* En effet, pour tout $g \in G^{ell}_{\lambda'}$, et tout entier n assez grand, la réduction modulo Λ de $L^{K_{g,n}}$ est $V(\pi)^{K_{g,n}}$ et $L^{K_{g,n}} \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_\lambda} \overline{\mathbf{Q}}_\lambda \simeq V(\Pi)^{K_{g,n}}$. Les valeurs propres de $\Pi(g)$ sur $V^{K_{g,n}}$ sont des racines de l'unité dans $\mu_{\ell'}$ de somme est égale à $\phi_n(g)$. Par (I.2) et (II.2), on obtient $\chi_\Pi(g) = \phi(g)$.

II.4 Nous montrons maintenant que le caractère de Brauer ci-dessus, peut être défini par une filtration quelconque.

Théorème *Soit $g \in G^{ell}_{\lambda'}$. Pour toute filtration décroissante séparée $(K_n)_{n \geqslant 0}$ en pro-p-sous-groupes ouverts compacts de G normalisés par g, il existe un entier $n_g \geqslant 0$ tel que $\phi_\pi(g)$ est égal au caractère de Brauer de $\pi(g)$ sur $V(\pi)^{K_n}$ quelque soit l'entier $n \geqslant n_g$.*

Preuve Soit $g \in G^{ell}_{\lambda'}$. On choisit une filtration $(K_{g,n})$ et un entier m_1 comme en (II.1, II.2). On choisit un entier n_g tel que $K_{n_g} \subset K_{g,m_1}$. Soit $n \geqslant n_g$, alors $K_n \subset K_{n_g}$. On choisit un entier $r \geqslant 1$ tel que

$$K_{g,m_1+r} \subset K_n \subset K_{g,m_1}.$$

On a alors les décompositions en somme directe stables par $\pi(g)$:

$$V(\pi)^{K_{g,m_1+r}} = V(\pi)^{K_{g,m_1}} \oplus W,$$

et

$$V(\pi)^{K_n} = V(\pi)^{K_{g,m_1}} \oplus W^{K_n}$$

où

$$W \;=\; \oplus_{\sigma \in E}\, V(\pi)_\sigma \quad , \quad W^{K_n} \;=\; \oplus_{\sigma \in E}\, V(\pi)_\sigma^{K_n} \ ,$$

où E est l'ensemble fini des représentations irréductibles de K_n contenues dans π non triviales sur K_{g,m_1} et triviales sur K_{g,m_1+r} (modulo isomorphisme). Les $V(\pi)_\sigma^{K_n}$ sont permutés par $\pi(g)$ car g normalise K_n, et aucun d'entre eux n'est stable par $\pi(g)$ par définition de m_1. On en déduit comme en (II.2) que le caractère de Brauer de $\pi(g)$ sur W^{K_n} est nul. Le caractère de Brauer de $\pi(g)$ sur $V(\pi)^{K_n}$ est donc égal au caractère de Brauer de $\pi(g)$ sur $V(\pi)^{K_{g,m_1}}$. $\diamond$.

III Rappels et démonstration des propositions I.1 et II.1

Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 ont admis l'existence de certaines filtrations de G et des propriétés des caractères de Brauer des endomorphismes finis que nous vérifions dans cette partie. Nous ne supposons pas que le centre de G est compact. On fixe un isomorphisme de groupes

$$\zeta : \overline{\mathbf{F}}_\lambda^* \to \mu_{\lambda'}$$

de $\overline{\mathbf{F}}_\lambda^*$ dans le groupe $\mu_{\lambda'}$ des racines de l'unité d'ordre premier à λ dans $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda^*$, qui est une section de la réduction modulo Λ.

III.1 *Caractère de Brauer d'un endomorphisme.* Soit A un endomorphisme d'ordre fini premier à λ d'un $\overline{\mathbf{F}}_\lambda$-espace vectoriel W de dimension finie s. Alors A est diagonalisable ; notons $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant s-1}$ ses valeurs propres, et $\zeta_i = \zeta(\alpha_i) \in \mu_{\lambda'}$ les relèvements de α_i pour $0 \leqslant i \leqslant s-1$. Le caractère de Brauer de A sur W est la somme

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant s-1} \zeta_i .$$

Soit W' un $\overline{\mathbf{F}}_\lambda$-sous-espace vectoriel de W stable par A. Alors le caractère de Brauer de A sur W est la somme du caractère de Brauer de A sur W' et du caractère de Brauer de A sur W/W'.

Pour toute $\overline{\mathbf{F}}_\lambda$-représentation (π, W) de dimension finie d'un groupe fini H, le caractère de Brauer des éléments λ-réguliers (d'ordre premier à λ) de H sur W est appelé le caractère de Brauer de π [Serre].

Lemme *Soit s un entier > 1. Supposons qu'il existe $w \in W$ tel que les éléments $w, A(w), \ldots, A^{s-1}(w)$ forment une base de W, et tel que $A^s(w)$ soit un multiple de w. Alors le caractère de Brauer de A sur W est nul.*

Preuve Il existe $x \in \overline{\mathbf{F}}_\lambda^*$ tel que $A^s w = x^s w$ et une racine de l'unité x_s dans $\overline{\mathbf{F}}_\lambda^*$ d'ordre exactement s car $(s, \lambda) = 1$. Les valeurs propres de A sur W sont $\alpha_i = x x_s^i, \quad 0 \leqslant i \leqslant s-1$. Notons $\eta, \eta_s \in \mu_{\lambda'}$ les relèvements de x, x_s. Alors $\zeta_i = \eta \eta_s^i, (0 \leqslant i \leqslant s-1)$. Le caractère de Brauer de A sur W est $\eta \sum_{0 \leqslant i \leqslant s-1} \eta_s^i = 0$ car la somme des racines de l'équation $X^s - 1 = 0$ dans $\overline{\mathbf{Z}}_\lambda$ est nulle. $\diamond$

III.2 *Elements compacts et ℓ-réguliers* Un élément g de G est dit *compact* s'il est contenu dans un sous-groupe compact de G. Notons cl $< g >$ la clôture du groupe $< g >$ engendré par $g \in G$. Un élément compact g est le produit

$$g = hk = kh$$

d'un λ-élément $k \in$ cl $< g >$ et d'un élément λ-régulier $h \in$ cl $< g >$ qui commutent entre eux. La décomposition est unique [SerreSLN5]. L'ordre de k est un entier λ^a, et le pro-ordre de h est rp^∞ pour un entier $r \geqslant 1$ premier à ℓ. On dit que h est λ-*régulier* et qu'il est la partie λ-*régulière* de g.

Le calcul de la décomposition de g se ramène au cas d'un groupe fini ; pour tout sous-groupe K d'indice fini de $cl < g >$, l'image de h dans le groupe fini $cl < g > /K$ est la partie λ-régulière h_K de l'image g_K de g dans $cl < g > /K$. On calcule h_K facilement dans le groupe fini $cl < g > /K$, en utilisant le théorème de Bézout ([Vig] III.2.1).

Soit maintenant K un sous-pro-p-groupe ouvert compact de G normalisé par un élément compact (ℓ-régulier) $g \in G$. L'idempotent

$$\epsilon_{gK} = 1_{gK} \mathrm{vol}(K, dg)^{-1}$$

de $C_c^\infty(G; R)$ est d'ordre fini (premier à ℓ) car l'ordre de ϵ_{gK} divise l'ordre de g dans le groupe $cl < g > /(K \cap cl < g >)$ d'ordre fini (premier à ℓ).

Si (π, V) est une R-représentation lisse admissible de G alors V^K est stable par l'endomorphisme $\pi(g)$ et par $\pi(\epsilon_{gK})$. De plus $\pi(g) = \pi(\epsilon_{gK})$ sur V^K. On en déduit :

Lemme *Si (π, V) est une R-représentation lisse admissible de G et si K est un sous-pro-p-groupe ouvert compact de G normalisé par un élément compact ℓ-régulier $g \in G$, alors V^K est un R-espace vectoriel de dimension finie et $\pi(g)$ restreint à V^K est un endomorphisme de V^K d'ordre fini premier à ℓ.*

III.3 *La théorie de Kirillov-Howe et le lemme de Harish-Chandra*

Le groupe G agit sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ par la représentation adjointe Ad, qui est triviale sur le centre Z de G. On choisit un domaine de définition $(G, \mathcal{G})$-admissible et Ad(G)-stable $\mathcal{G}_0$ d'une application exponentielle exp : $\mathcal{G}_0 \to G$ ([dBS] §10, 17) .

On note O_F l'anneau des entiers de F et p_F un générateur de l'idéal maximal de O_F. On note r l'entier égal à $e' + 1$ où e' est égal à l'indice de ramification e de $F/\mathbf{Q}_p$ si $p = 3$ et au plus grand entier $\geqslant 3e/2(p-1)$ si $p \neq 3$.

Un O_F-réseau L de $\mathcal{G}$ sera appelé admissible s'il est contenu dans $\mathcal{G}_0$ et si $[L, L] \subset p_F^r L$; lorsque $p = 2$ on demande aussi que $L \subset 2\mathcal{G}_0$ et $[L, L] \subset 2^3 L$. On vérifie facilement les propriétés suivantes.

Lemma *Si L est un O_F-réseau de $\mathcal{G}$ alors $p_F^n L$ est un O_F-réseau admissible de $\mathcal{G}$ pour tout entier n assez grand.*

Soit L un O_F-réseau admissible de $\mathcal{G}$. Alors $p_F^n L$, $\mathrm{Ad}(g)L$, $L \cap L'$ sont des O_F-réseaux admissibles de $\mathcal{G}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, pour tout élément $g \in G$, et pour tout O_F-réseau L' admissible de $\mathcal{G}$.

On choisit un O_F-réseau L de $\mathcal{G}$ admissible. Alors $K_L := \exp(L)$ et $K_{L/2} := \exp(L/2)$ sont des sous-groupes ouverts compacts de G et K_L est un sous-groupe distingué de $K_{L/2}$. Le groupe $K_{L/2}$ agit naturellement sur $\mathrm{Irr}_R K$.

On choisit un caractère non trivial $\psi : F \to R^*$ (l'image de ψ est formée par les racines de l'unité d'ordre p^m pour tout entier $m > 0$), et B une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathcal{G}$ qui est G-invariante (qui existe lorsque la caractéristique de F est 0 ou strictement supérieure au nombre de Coxeter de G). Le dual de L par rapport à $\psi \circ B$ est défini par :

$$L^* = \{Y \in \mathcal{G} \mid \psi(B(X,Y)) = 1 \ \forall X \in L\} \ .$$

Il est stable par Ad(L/2) donc $K_{L/2}$ agit sur $\mathcal{G}/L^*$. On identifiera un sous-ensemble de $\mathcal{G}/L^*$ avec son image inverse dans $\mathcal{G}$. Nous utiliserons la partie suivante de la théorie de Kirillov-Howe ([dBS] th. 17.1, cor. 17.2, [Kir] th. 1.1) :

Théorème (Howe) *Pour tout O_F-réseau L admissible de $\mathcal{G}$ il existe une bijection $\mathcal{O} \mapsto \sigma_{\mathcal{O}}$ des $K_{L/2}$-orbites dans $\mathcal{G}/L^*$ sur les $K_{L/2}$-orbites dans $\mathrm{Irr}_R K_L$ telle que*

a) $\mathcal{O} = L^*$ correspond à la représentation triviale de K_L.

b) Si $g \in G$ normalise $K_{L/2}$ et K_L alors $\mathrm{Ad(g)}\mathcal{O}$ correspond à $g(\sigma_{\mathcal{O}})$.

c) Deux O_F-réseaux L, L' admissibles arbitraires de $\mathcal{G}$ vérifient la propriété suivante :

Soient $g \in G$, $\mathcal{O}$ une $K_{L/2}$-orbite dans $\mathcal{G}/L^*$, $\mathcal{O}'$ une $K_{L'/2}$-orbite dans $\mathcal{G}/L'^*$. Alors

$$\mathcal{O} \ \cap \ \mathrm{Ad(g)}\mathcal{O}' \ = \ \emptyset$$

iff g n'entrelace pas $\sigma_{\mathcal{O}'}$ avec $\sigma_{\mathcal{O}}$.

Lorsque $p = 2$, seul cas où $K_{L/2} \neq K$, on a noté $g(\sigma_{\mathcal{O}})$ l'ensemble des $g(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Irr}_R K_L$ dans la $K_{L/2}$-orbite $\mathcal{O}$; on a convenu que $g \in G$ entrelace $\sigma_{\mathcal{O}'}$ avec $\sigma_{\mathcal{O}}$ s'il existe $\sigma' \in \mathrm{Irr}_R K_{L'}$ contenu dans $\sigma_{\mathcal{O}'}$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}_R K_L$ contenu dans $\sigma_{\mathcal{O}}$ tel que g entrelace σ' avec σ, i.e. tel que les restrictions de $g(\sigma') \in \mathrm{Irr}_R gK_{L'}g^{-1}$ et de $\sigma \in \mathrm{Irr}_R K_L$ à $gK_{L'}g^{-1} \cap K_L$ ont un composant irréductible isomorphe. Le caractère $\chi_{\sigma_{\mathcal{O}}}$ de $\sigma_{\mathcal{O}}$ (la somme des caractères des $\sigma \in \sigma_{\mathcal{O}}$ si $p = 2$) est "la transformée de Fourier" de $\mathcal{O}$:

$$\chi_{\sigma_{\mathcal{O}}}(\exp(\lambda)) = d_{\mathcal{O}}^{-1} \sum_{X \in \mathcal{O}/L^*} \psi(B(X,\lambda)) \quad \text{pour tout } \lambda \in L \ ,$$

où $d_{\mathcal{O}}$ est l'indice dans K_L du stabilisateur $\{k \in K_L \mid \mathrm{Ad}(k)X \in X + L^*\}$ d'un élément arbitraire $X \in \mathcal{O}$ et $\psi : F \to R^*$ est un caractère additif non trivial fixé (à valeurs dans le groupe des racines de l'unité dans R^* d'ordre une puissance de p).

Les propriétés a) et b) ne figurent pas explicitement dans la référence mais se déduisent facilement de la formule donnant le caractère $\chi_{\sigma_{\mathcal{O}}}$. Si $\mathcal{O} = L^*$ le membre de droite égal à 1 est le caractère de la représentation triviale. Si $g \in G$ normalise $K_{L/2}$ et K_L alors $g(\sigma_0)$ est une $K_{L/2}$-orbite dans $\mathrm{Irr}_R K_L$ et

$$\chi_{g(\sigma_{\mathcal{O}})}(\exp(\lambda)) = \chi_{\sigma_{\mathcal{O}}}(g^{-1}\exp(\lambda)g) = \chi_{\sigma_{\mathcal{O}}}(\exp(\mathrm{Ad}(g)^{-1}\lambda) = d_{\mathcal{O}}^{-1} \sum_{X \in \mathcal{O}/L^*} \psi(B(X, \mathrm{Ad}(g)^{-1}\lambda))$$

$$= d_{\mathcal{O}}^{-1} \sum_{X \in \mathcal{O}/L^*} \psi(B(\mathrm{Ad}(g)X,\lambda)) = d_{\mathrm{Ad}(g)\mathcal{O}}^{-1} \sum_{X \in \mathrm{Ad}(g)\mathcal{O}/L^*} \psi(B(X,\lambda)) \ .$$

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{G}$. Les $\mathrm{Ad}(G)$-orbites ne s'éloignent pas de $\mathcal{N}$. Pour tout compact C de $\mathcal{G}$, il existe un O_F-réseau L_C de $\mathcal{G}$ tel que ([dBS] lemma 12.2, [Fou] lemma 1)

$$\mathrm{Ad}(G)C \subset \mathcal{N} + L_C \ .$$

On l'applique à $C = L^*$ en notant que $L_C \subset p_F^{-n} L^*$ si n est assez grand. On déduit que toute $K_{p_F^n L/2}$-orbite $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{G}/p_F^{-n} L^*$ qui rencontre $\mathrm{Ad}(G) L^*$ contient un élément nilpotent. Ces orbites correspondent dans la théorie de Kirillov-Howe (propriété a)) aux $K_{p_F^n L/2}$-orbites dans $\mathrm{Irr}_R\, K_{p_F^n L}$ entrelacées avec la représentation triviale de K_L dans G.

Soit $\gamma \in G$ semi-simple. On note $M = Z_G(\gamma)^o$ la composante connexe du centralisateur de γ dans G. C'est un groupe réductif comme G. On note $\mathcal{M}$ l'algèbre de Lie de M. On a une décomposition

$$\mathcal{G} = \mathcal{M} \oplus (\mathrm{Ad}(\gamma) - 1)\mathcal{G}$$

B-orthogonale ([dBS] §18). On note $p_{\mathcal{M}}$ la projection sur $\mathcal{M}$. Soit M_γ l'ensemble des $m \in M$ tels que $\det(\mathrm{Ad}(\gamma \mathrm{m}) - 1)|_{\mathcal{G}/\mathcal{M}} \neq 0$. Alors M_γ est ouvert $\mathrm{Ad}(M)$-stable et contient 1 ; l'application

$$G \times M_\gamma \to G$$

$$(x, m) \mapsto x\gamma m x^{-1}$$

est submersive [HC162]. L'image d'un ouvert est ouverte. On choisit un domaine de définition $(M, \mathcal{M})$-admissible et Ad(M)-stable $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{G}_0$ d'une application exponentielle $\exp : \mathcal{M}_0 \to M$, restriction d'une application exponentielle $\exp : \mathcal{G}_0 \to G$. Ceci détermine la notion de O_F-réseau admissible dans $\mathcal{M}$.

On fixe un O_F-réseau de référence dans $\mathcal{G}$, ce qui définit une valuation sur $\mathcal{G}$ de boule unité $\mathcal{G}(0)$ égale à ce réseau. Le choix du réseau ne compte pas vraiment puisque deux réseaux sont commensurables. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on note $\mathcal{G}(n) = p_F^n \mathcal{G}(0)$ l'ensemble des éléments de valuation $\geqslant n$. On note $\mathcal{N}_0$ l'ensemble des éléments nilpotents de valuation nulle, et pour tout entier $a > 0$, on considère le voisinage de $\mathcal{N}_0$

$$\mathcal{V}_a := \mathcal{N}_0 + \mathcal{G}(a)$$

contenu dans la boule unité $\mathcal{G}(0)$. On note $\mathcal{M}_a$ le F-espace vectoriel engendré par $\mathcal{V}_a \cap \mathcal{M}$.

Enoncons maintenant le lemme d'Harish-Chandra ([HC] Lemme 38) ([dBS] 21.3).

Lemme (Harish-Chandra) *Soit $\gamma \in G$ semi-simple et $M = Z_G(\gamma)^0$. Il existe des O_F-réseaux admissibles L de $\mathcal{G}$ et L' de $\mathcal{M}$ et un entier $c > 0$ vérifiant la propriété (HC) :*

Si a est un entier > 0, pour tout entier $n \geqslant n_a$ assez grand, et pour toute $K_{p_F^n L/2}$-orbite $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{G}/p_F^{-n} L^*$ on a

$$p_{\mathcal{M}}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_a$$

si $\mathcal{O}$ vérifie les trois conditions suivantes :

1) $\mathcal{O}$ contient un élément nilpotent,

2) $\mathcal{O}$ contient un élément de valuation $< -c\,n$,

3) $\mathcal{O}$ contient un élément de $\mathrm{Ad}(\gamma K_{L'})(\mathcal{O})$.

Cette propriété reste vraie pour tous les O_F-réseaux admissibles L_1 de $\mathcal{G}$ et L'_1 de $\mathcal{M}$ plus petits que L et L'.

Dans le dictionnaire de Kirillov-Howe, la troisième condition dit que la $K_{p_F^n L/2}$-orbite de $\mathrm{Irr}_R\, K_{p_F^n L}$ correspondant à $\mathcal{O}$ est entrelacée avec elle-même par un élément de $\mathrm{Ad}(\gamma K_{L'})$. Lorsque γ est semi-simple régulier le centralisateur connexe M de γ est un tore, $\mathcal{M}$ ne contient aucun nilpotent. Les parties compactes $\mathcal{N}_0$ et $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}(0)$ de $\mathcal{G}$ ayant une intersection vide, $\mathcal{M}_a = \emptyset$ pour a assez grand. On obtient :

Lemme *Si $\gamma \in G^{reg}$ la propriété (HC) du lemme d'Harish-Chandra est équivalente à :*

Pour tout n assez grand, aucune $K_{p_F^n L/2}$-orbite $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{G}/p_F^{-n} L^*$ ne peut vérifier les trois conditions 1), 2), 3).

III.4 *Démonstration de la proposition I.1*

Soit L un O_F-réseau admissible de $\mathcal{G}$. Nous allons montrer que la suite $(K_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $K_n := K_{p_F^n L}$ vérifie la proposition I.1. Il est clair que c'est une filtration séparée décroissante de pro-p-sous-groupes ouverts de G. La condition de finitude fait intervenir un entier $n_0 \geqslant 0$. On se ramène à $n_0 = 0$ en remplacant L par $p_F^{n_0} L$ ce qui allège les notations.

Soit $\gamma \in G^{reg}$ et M son centralisateur connexe dans G. On choisit un entier $n_1 \geqslant 0$ et un O_F-réseau admissible L' de $\mathcal{M}$ tel que $p_F^{n_1} L$ et L' vérifient le lemme de Harish-Chandra, et $\gamma K_{L'} \subset G^{reg}$. On se ramène à $n_1 = 0$ en remplacant L par $p_F^{n_1} L$. On pose

$$V(\gamma) := \cup_{k\in K_L} k\ \gamma K_{L'}\ k^{-1}\ .$$

C'est un voisinage ouvert de γ dans G^{reg}. On va montrer que pour n très grand, il n'existe qu'un nombre fini de $K_{p_F^n L/2}$-orbites dans $\mathrm{Irr}_R\, K_{p_F^n L}$ entrelacées avec la représentation triviale I_L de K_L et avec elle-mêmes par un élément de $V(\gamma)$. Ceci est une assertion un peu plus forte que la condition de finitude de la proposition 1.

Supposons n très grand. Par le dictionnaire de Kirillov-Howe les $K_{p_F^n L/2}$-orbites dans $\mathrm{Irr}_R\, K_{p_F^n L}$ correspondent à des $K_{p_F^n L/2}$-orbites $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{G}/p_F^{-n} L^*$. Comme nous l'avons déja remarqué, la propriété "entrelacée avec I_L " implique $\mathcal{O}$ contient un élément nilpotent, et la propriété "entrelacée avec elle-même par un élément de $\gamma K_{L'}$ " est équivalente à $\mathcal{O}$ contient un élément de $\mathrm{Ad}(\gamma K_{L'})(\mathcal{O})$. Le lemme de Harish-Chandra pour $\gamma \in G^{reg}$ implique que les orbites $\mathcal{O}$ ayant ces deux propriété ne contiennent pas un élément de valuation $< -cn$ pour un $c > 0$ fixé. Elles sont donc en nombre fini.

Pour terminer la démonstration on remplace $\gamma K_{L'}$ par l'ouvert $V(\gamma)$ de G. Le groupe K_L normalise les groupes $K_{p_F^n L/2}$ et $K_{p_F^n L}$. Les images par K_L des $K_{p_F^n L/2}$-orbites dans $\mathrm{Irr}_R\, K_{p_F^n L}$ entrelacées avec I_L et avec elle-mêmes par un élément de $\gamma K_{L'}$ sont égales aux $K_{p_F^n L/2}$-orbites dans $\mathrm{Irr}_R\, K_{p_F^n L}$ entrelacées avec I_L et avec elle-mêmes par un élément de $V(\gamma)$. Elles correspondent par les propriétés a) et b) du dictionnaire de Kirillov-Howe aux images par $\mathrm{Ad}(K_L)$ de certaines $K_{p_F^n L/2}$-orbites $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{G}/p_F^{-n} L^*$ contenant un élément nilpotent et un élément de $\mathrm{Ad}(\gamma K_{L'})(\mathcal{O})$. Nous avons vu que le nombre de ces orbites $\mathcal{O}$ est fini, et il est évident que l'image de $\mathcal{O}$ par $\mathrm{Ad}(K_L)$ est un ensemble fini d'orbites. Donc le nombre $K_{p_F^n L/2}$-orbites dans $\mathrm{Irr}_R\, K_{p_F^n L}$ entrelacées avec I_L et avec elle-mêmes par un élément de $V(\gamma)$ est fini.

III.5 *Démonstration de la proposition II.1*

Un tore maximal T de G est appelé elliptique, s'il est compact modulo le centre Z de G. Posons $T^{reg} := T \cap G^{reg}$. Alors l'application

$$(x, t) \to xtx^{-1} :\ G \times T^{reg} \to G$$

est submersive. Son image est un ouvert que l'on notera $G.T^{reg}$. L'ouvert G^{ell} des éléments elliptiques de G, est une union disjointe d'ouverts de la forme $G.T^{reg}$ pour T appartenant à l'ensemble fini $\{T_1, \ldots, T_r\}$ de tores maximaux elliptiques de G modulo G-conjugation.

Soit $g \in G^{ell}$ et soit $T \in \{T_1, \ldots, T_r\}$ tel que $g \in G.T^{reg}$. Le normalisateur $N_G(T)$ de T dans G est aussi compact modulo Z. Il existe une classe unique $xN_G(T)$ telle que $g \in xT^{reg}x^{-1}$.

Soit L un O_F-réseau admissible de $\mathcal{G}$ qui est stable par $\mathrm{Ad(N_G(T))}$. Il suffit de partir d'un O_F-réseau admissible quelconque L' de $\mathcal{G}$ et de prendre

$$L\ :=\ \cap_{n\in N_G(F)}\ \mathrm{Ad(n)L'}\ .$$

C'est un O_F-réseau admissible de $\mathcal{G}$ car le nombre des O_F-réseaux $\mathrm{Ad(n)L'}$ pour $n \in N_G(F)$ est fini. Il est clairement $N_G(F)$-stable. La suite $(K_{g,n})_{n\geqslant 0}$ définie par

$$K_{g,n} := K_{p_F^n \mathrm{Ad}(x)L} = xK_{p_F^n L}x^{-1}$$

est une filtration séparée décroissante de pro-p-sous-groupes ouverts de G normalisés par g qui ne dépend pas du choix de x. Nous montrons maintenant que ces filtrations $(K_{g,n})_{n\geqslant 0}$ pour tout $g \in G^{ell}$ vérifient la proposition II.1.

a) L'application $g' \mapsto K_{g',n}$ est constante sur le voisinage $V(g) := \cup_{y\in xK_L} yT^{reg}y^{-1}$ de g dans G car K_L normalise $K_{p_F^n L}$ donc $K_{',n} = yK_{p_F^n L}y^{-1} = K_{g,n}$ pour tout $g' \in yT^{reg}y^{-1}$, $y \in xK_L$.

b) On a $yK_{g,n}y^{-1} = yxK_{p_F^n L}(xy)^{-1} = K_{ygy^{-1},n}$ pour tout $y \in G$ par définition de $K_{g,n}$.

c) Le réseau $\mathrm{Ad}(x)L$ est admissible. Par le preuve de la proposition I.1 la filtration $K_{p^n \mathrm{Ad}(x)L} = K_{g,n}$ vérfie la condition de finitude c).

Bibliographie

[HC1] Harish-Chandra. Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups, dans : Collected Papers II, Springer 1984, 371-438.

[dBS] Harish-Chandra. Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups, dans Notes by DeBacker and Sally 1997. University Lecture series 16 (1999).

[HC162] Harish-Chandra. Notes by G. van Dijk. Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups. Lecture Notes in Mathematics 162 Springer-Verlag 1970.

[Fou] Howe R. The Fourier transform and germs of characters. Math. Ann. 208 (1974) 305-322.

[Kir] Howe R. Kirillov Theory for compact p-adic groups. Pacific J. of Math. Vo. 73, No. 2. 1997.

[Serre] Serre J.-P. Représentations linéaires des groupes finis. Hermann, deuxième édition 1971.

[SerreSLN5] Serre J.-P. Cohomologie galoisienne. Lecture Notes in Mathematics 5. Springer-Verlag, cinquième édition 1994.

[Vig] Vignéras M.-F. Représentations λ-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $\lambda \neq p$. Progress in Math 137. Birkhauser 1996.