La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux

J.-L. Waldspurger

1 février 2010

Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. Appelons espace quadratique un couple (V,q) où V est un espace vectoriel de dimension finie sur F et q est une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur V. Fixons deux tels espaces quadratiques (V,q) et (V',q'). On note d et d' leurs dimensions et G et G' leurs groupes spéciaux orthogonaux. On suppose d pair et d' impair. On suppose donné un isomorphisme entre le plus grand des espaces et la somme orthogonale du plus petit et d'un espace quadratique qui est lui-même somme orthogonale de plans hyperboliques et d'une droite quadratique (D,q_D). Le plus petit des deux groupes G, G' est alors un sous-groupe du plus grand. On définit un élément $\nu_0\in F^{\times}/F^{\times,2}$ en fixant un élément non nul $v_0\in D$ et en posant

$$\nu_0=\left\{\begin{array}{ll} q_D(v_0,v_0)/2, & \text{si } d>d',\\ -q_D(v_0,v_0)/2, & \text{si } d<d'.\end{array}\right.$$

Soit σ, resp. σ', une représentation admissible et irréductible de $G(F)$, resp. $G'(F)$. Gross et Prasad ont défini une multiplicité $m(\sigma,\sigma')$ en [GP2]. Rappelons la définition dans deux cas extrêmes. Supposons $d'=d+1$. Fixons des espaces E_σ et $E_{\sigma'}$ dans lesquels se réalisent les représentations σ et σ'. On note $Hom_G(\sigma',\sigma)$ l'espace des applications linéaires $l:E_{\sigma'}\to E_\sigma$ telles que $l\circ\sigma'(g)=\sigma(g)\circ l$ pour tout $g\in G(F)$. La multiplicité $m(\sigma,\sigma')$ est la dimension de l'espace complexe $Hom_G(\sigma',\sigma)$. Supposons maintenant $d=0$. Le groupe G est égal à $\{1\}$ et la représentation σ disparaît. Le groupe G' est déployé. Fixons un sous-groupe unipotent maximal U' de G' et un caractère régulier $\psi_{U'}$ de $U'(F)$. On note $Hom_{\psi_{U'}}(\sigma',\mathbb{C})$ l'espace des formes linéaires l sur $E_{\sigma'}$ telles que $l\circ\sigma'(u')=\psi_{U'}(u')l$ pour tout $u'\in U'(F)$. La multiplicité $m(\sigma')$ est la dimension de l'espace $Hom_{\psi_{U'}}(\sigma',\mathbb{C})$. La définition générale est rappelée en 2.1 ci-dessous. D'après [AGRS], [W5] et [GGP] corollaire 15.2, on a toujours $m(\sigma,\sigma')\leq 1$.

On se limitera désormais aux représentations tempérées. Rappelons la classification conjecturale de ces représentations (conjecture de Langlands, précisée par Deligne et Lusztig). Notons W_F le groupe de Weil de $\bar{F}/F$, où $\bar{F}$ est une clôture algébrique de F et $W_{DF}=W_F\times SL(2,\mathbb{C})$ le groupe de Weil-Deligne. Notons $Sp(d'-1,\mathbb{C})$ le groupe symplectique d'un espace symplectique complexe de dimension $d'-1$. Notons $\Phi_{temp}(G')$ l'ensemble des classes de conjugaison par $Sp(d'-1,\mathbb{C})$ d'homomorphismes $\varphi:W_{DF}\to Sp(d'-1,\mathbb{C})$ qui vérifient quelques propriétés usuelles et qui sont tempérés, c'est-à-dire que leurs restrictions à W_F sont d'images relativement compactes. Considérons un tel

φ. Poussons-le en un homomorphisme à valeurs dans $GL(d'-1,\mathbb{C})$. On peut alors le décomposer sous la forme

$$(1) \qquad \varphi = \oplus_{i\in I} l_i\varphi_i$$

où chaque φ_i est un homomorphisme irréductible de W_{DF} dans un groupe $GL(N(\varphi_i),\mathbb{C})$ et l_i est sa multiplicité. On note I^{symp} le sous-ensemble des $i\in I$ tels que $N(\varphi_i)$ est pair et, à conjugaison près, l'image de φ_i est contenue dans $Sp(N(\varphi_i),\mathbb{C})$. Notons S_φ le commutant de l'image de φ dans $Sp(d'-1,\mathbb{C})$ et S_φ^0 sa composante neutre.Le groupe S_φ/S_φ^0 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{symp}}$. Notons z_φ l'image dans ce groupe de l'élément central $-1\in Sp(d'-1,\mathbb{C})$. Il s'identifie à $(l_i)_{i\in I^{symp}}\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{symp}}$. Posons

$$\mu(G') = \begin{cases} 1, & \text{si } G' \text{ est déployé,}\\ -1, & \text{sinon,}\end{cases}$$

et notons $\mathcal{E}^{G'}(\varphi)$ l'ensemble des caractères ϵ du groupe S_φ/S_φ^0 tels que $\epsilon(z_\varphi)=\mu(G')$. On conjecture que l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles et tempérées de $G'(F)$ est union disjointe de L-paquets $\Pi^{G'}(\varphi)$ indexés par les $\varphi\in\Phi_{temp}(G')$. Pour un tel φ, on conjecture que l'ensemble $\Pi^{G'}(\varphi)$ est en bijection avec $\mathcal{E}^{G'}(\varphi)$, on notera $\epsilon\mapsto\sigma'(\varphi,\epsilon)$ cette bijection. Cette paramétrisation doit être compatible avec deux types d'endoscopie. D'une part avec l'endoscopie usuelle entre G' et ses groupes endoscopiques elliptiques. Ceux-ci sont des produits $G'_+\times G'_-$ de groupes spéciaux orthogonaux déployés d'espaces quadratiques de dimensions d'_+ et d'_- impaires et telles que $d'_+ + d'_- = d'+1$. On renvoie à 4.2 pour la description des propriétés que doivent vérifier les paramétrages relativement à ce type d'endoscopie. D'autre part, dans le cas où G' est déployé, on veut une compatibilité avec une endoscopie tordue. Usuellement, on considère G' comme un groupe endoscopique du groupe $GL(d'-1)$ tordu par un automorphisme extérieur. Mais G' est aussi un groupe endoscopique du groupe $GL(d')$ tordu et c'est ce cas d'endoscopie que nous utiliserons. Plus précisément, notons θ l'automorphisme usuel $g\mapsto {}^tg^{-1}$ de $GL(d')$. Introduisons le groupe $GL(d')\rtimes\{1,\theta\}$ et sa composante non neutre $\tilde{GL}(d')$. Notons $\mathbf{1}$ la représentation triviale de dimension 1 de W_{DF}. Soit $\varphi\in\Phi_{temp}(G')$, posons $\varphi_> = \varphi\oplus\mathbf{1}$. La correspondance de Langlands, prouvée par Harris-Taylor ([HT]) et Henniart ([H]), associe à $\varphi_>$ une représentation admissible irréductible $\pi(\varphi_>)$ de $GL(d',F)$. Elle est tempérée et autoduale, donc se prolonge en une représentation de $GL(d',F)\rtimes\{1,\theta\}$. On normalise cette extension de façon adéquate et on note $\tilde{\pi}(\varphi_>)$ sa restriction à $\tilde{GL}(d',F)$. On définit son caractère $\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi_>)}$. De même, pour toute représentation irréductible σ' de $G'(F)$, on note $\Theta_{\sigma'}$ son caractère. On pose

$$\Theta^{G'}(\varphi) = \sum_{\sigma'\in\Pi^{G'}(\varphi)} \Theta_{\sigma'}.$$

On conjecture alors que $\Theta^{G'}(\varphi)$ est une distribution stablement invariante sur $G'(F)$ et qu'il existe un nombre complexe $c^{G'}(\varphi)$ de module 1 tel que $c^{G'}(\varphi)\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi_>)}$ soit le transfert endoscopique de $\Theta^{G'}(\varphi)$.

Rappelons plus succinctement la paramétrisation conjecturale des représentations tempérées de $G(F)$ (on utilise la formulation de [M]). Fixons un "espace quadratique complexe" de dimension d, notons $O(d,\mathbb{C})$ et $SO(d,\mathbb{C})$ son groupe orthogonal, resp. spécial orthogonal. Considérons un homomorphisme $\varphi: W_{DF}\to O(d,\mathbb{C})$. En composant avec le déterminant, on obtient un caractère quadratique de W_{DF} qui est forcément trivial sur $SL(2,\mathbb{C})$ et se restreint en un caractère de W_F. Par la théorie du corps de classes, celui-ci détermine un élément $\delta(\varphi) \in F^\times/F^{\times,2}$. On définit un autre élément de ce groupe par $\delta(q) = (-1)^{d/2}det(q)$. Notons $\Phi_{temp}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $SO(d,\mathbb{C})$ d'homomorphismes $\varphi : W_{DF} \to O(d,\mathbb{C})$ qui sont tempérés et tels que $\delta(\varphi) = \delta(q)$. Considérons un tel φ. En le poussant en un homomorphisme à valeurs dans $GL(d,\mathbb{C})$, on peut le décomposer sous la forme (1). On note I^{orth} le sous-ensemble des $i \in I$ tels que, à conjugaison près, l'image de φ_i soit contenue dans $O(N(\varphi_i),\mathbb{C})$. Notons S_φ le commutant de l'image de φ dans $SO(d,\mathbb{C})$ et S_φ^0 sa composante neutre.Le groupe S_φ/S_φ^0 est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{orth}}$. Notons z_φ l'image dans ce groupe de l'élément central $-1 \in SO(d,\mathbb{C})$. Il s'identifie à $(l_i)_{i\in I^{orth}} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{orth}}$. Si $\delta(q) = 1$, on pose

$$\mu(G) = \begin{cases} 1, & \text{si } G \text{ est déployé,} \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\delta(q) \neq 1$, le groupe G est toujours quasi-déployé. Dans ce cas, on fixe $\mu(G) \in \{\pm 1\}$. Notons $\mathcal{E}^G(\varphi)$ l'ensemble des caractères ϵ du groupe S_φ/S_φ^0 tels que $\epsilon(z_\varphi) = \mu(G)$. On conjecture que l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles et tempérées de $G(F)$ est union disjointe de L-paquets $\Pi^G(\varphi)$ indexés par les $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$. Pour un tel φ, on conjecture que l'ensemble $\Pi^G(\varphi)$ est en bijection avec $\mathcal{E}^G(\varphi)$, on notera $\epsilon \mapsto \sigma(\varphi,\epsilon)$ cette bijection. Ces paramétrages doivent être compatibles avec l'endoscopie entre G et ses groupes endoscopiques elliptiques. Ceux-ci sont des produits $G_+ \times G_-$ de groupes spéciaux orthogonaux quasi-déployés d'espaces quadratiques de dimensions paires, leurs dimensions et discriminants devant satisfaire certaines égalités. D'autre part, dans le cas où $\mu(G) = 1$, les paramétrages doivent être compatibles avec l'endoscopie entre G et le groupe $GL(d)$ tordu.

Revenons un instant sur la définition de $\mu(G)$. Comme on le sait, pour un discriminant δ fixé, il y a deux classes d'isomorphie d'espaces quadratiques (V,q) de dimension d et de discriminant $\delta(q) = \delta$ (du moins si $d \geq 4$). Pour $\delta = 1$, les groupes spéciaux orthogonaux de ces deux espaces sont différents : l'un est déployé et l'autre n'est pas quasi-déployé. Par contre, si $\delta \neq 1$, les deux espaces ont le même groupe spécial orthogonal, qui est quasi-déployé. La division traditionnelle entre groupes quasi-déployés et groupes non quasi-déployés n'est pas assez fine pour notre propos et le signe $\mu(G)$ s'introduit dans les preuves pour distinguer les deux classes d'espaces quadratiques dont G est le groupe spécial orthogonal. Remarquons que, selon le choix de $\mu(G)$, on obtient des paramétrages des mêmes paquets $\Pi^G(\varphi)$ par des ensembles de caractères différents. La relation entre ces paramétrages est facile à expliciter, cf. 4.6

Pour que les conjectures aient un sens, il faut définir précisément les notions de transfert, c'est-à-dire fixer des facteurs de transfert. C'est ce que l'on fait en 1.7 et 1.8. D'autre part, notre énoncé des conjectures laisse place à des constantes non précisées (par exemple la constante $c^{G'}(\varphi)$ ci-dessus). Un résultat préliminaire est que, quitte à modifier les paramétrages, on peut préciser ces constantes (lemme 4.8). Une fois cela fait, les paramétrages sont entièrement déterminés pour le groupe G' et le sont presque pour le groupe G, le "presque" provenant du problème délicat de la distinction entre conjugaison par le groupe spécial orthogonal et conjugaison par le groupe orthogonal tout entier, cf. ci-dessous. Les paramétrages pour le groupe G' sont indépendants de l'espace (V,q). Par contre, ceux pour le groupe G dépendent, sinon de l'espace (V',q'), du moins de l'élément $\nu_0 \in F^\times/F^{\times,2}$ que l'on a défini ci-dessus. Cela parce que cet élément nous sert à normaliser les facteurs de transfert.

Posons encore une définition. Pour deux entiers naturels N et N', avec N' pair, soient

$\varphi : W_{DF} \to O(N,\mathbb{C})$ et $\varphi' : W_{DF} \to Sp(N',\mathbb{C})$ deux homomorphismes tempérés. Par la correspondance de Langlands, on leur associe des représentations irréductibles $\pi(\varphi)$ de $GL(N,F)$ et $\pi(\varphi')$ de $GL(N',F)$. On pose

$$E(\varphi,\varphi') = (\delta(\varphi),-1)_F^{N'/2}\epsilon(1/2,\pi(\varphi)\times\pi(\varphi'),\psi_F).$$

Le premier terme est un symbole de Hilbert. Le second est le facteur ϵ de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika, défini à l'aide d'un caractère ψ_F de F. Il ne dépend pas de ce caractère et $E(\varphi,\varphi')$ est un élément de $\{\pm 1\}$.

Cela étant, soient $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$ et $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$. On décompose φ et φ' sous la forme (1), en ajoutant des $'$ aux notations concernant φ'. On définit un caractère $\boldsymbol{\epsilon}'$ de $S_{\varphi'}/S^0_{\varphi'} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(I')^{symp}}$ par

$$\boldsymbol{\epsilon}'((e_{i'})_{i'\in(I')^{symp}}) = \prod_{i'\in(I')^{symp}} E(\varphi,\varphi'_{i'})^{e_{i'}}.$$

On définit un caractère $\boldsymbol{\epsilon}$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{orth}}$, que l'on restreint en un caractère de S_φ/S^0_φ, par

$$\boldsymbol{\epsilon}((e_i)_{i\in I^{orth}}) = \prod_{i\in I^{orth}} E(\varphi_i,\varphi')^{e_i}.$$

Dans le cas où $\delta(q)=1$, on vérifie que G et G' sont simultanément déployés où non quasi-déployés. Autrement dit $\mu(G)=\mu(G')$. Dans le cas où $\delta(q)\neq 1$, on choisit désormais $\mu(G)=\mu(G')$. On vérifie que

$$\boldsymbol{\epsilon}(z_\varphi) = \boldsymbol{\epsilon}'(z_{\varphi'}) = E(\varphi,\varphi').$$

Si $E(\varphi,\varphi') = \mu(G')$, on a $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathcal{E}^G(\varphi)$ et $\boldsymbol{\epsilon}' \in \mathcal{E}^{G'}(\varphi')$. Si $E(\varphi,\varphi') = -\mu(G')$, on a $\boldsymbol{\epsilon} \notin \mathcal{E}^G(\varphi)$ et $\boldsymbol{\epsilon}' \notin \mathcal{E}^{G'}(\varphi')$.

On admet la validité des conjectures ci-dessus. On en utilise la forme précisée par le lemme 4.8. On admet aussi certains résultats de la formule des traces locale tordue afin d'assurer la validité des résultats de [W3]. Notre résultat principal est le théorème 4.9(i) dont voici l'énoncé.

Théorème. *Soient $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$ et $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$. Si $E(\varphi,\varphi') = -\mu(G')$, on a $m(\sigma,\sigma')=0$ pour tous $\sigma\in\Pi^G(\varphi)$, $\sigma'\in\Pi^{G'}(\varphi')$. Si $E(\varphi,\varphi')=\mu(G')$, on a*

$$m(\sigma(\varphi,\boldsymbol{\epsilon}),\sigma'(\varphi',\boldsymbol{\epsilon}'))=1$$

et $m(\sigma,\sigma')=0$ pour tous $\sigma\in\Pi^G(\varphi)$, $\sigma'\in\Pi^{G'}(\varphi')$ tels que $(\sigma,\sigma')\neq(\sigma(\varphi,\boldsymbol{\epsilon}),\sigma'(\varphi',\boldsymbol{\epsilon}'))$.

C'est la conjecture 6.9 de [GP2], limitée aux représentations tempérées. On a admis beaucoup de choses. En ce qui concerne la formule des traces locale tordue, on a tout lieu de penser qu'elle sera démontrée prochainement. Les conjectures de classification sont beaucoup plus profondes. Celles concernant le groupe G' sont annoncées par Arthur, du moins si G' est déployé. Pour le groupe G, dans le cas où celui-ci est quasi-déployé, Arthur annonce un résultat un peu moins précis, où on ne distingue pas deux représentations conjuguées par le groupe orthogonal tout entier. Nous ignorons si la forme plus précise énoncée ci-dessus pourra se déduire de son résultat. Mais le théorème ci-dessus reste valable, sous une forme affaiblie, si l'on admet des conjectures affaiblies conformes aux annonces d'Arthur (cf. le (ii) du théorème 4.9).

Un mot sur la démonstration. Soient φ, φ' comme dans l'énoncé ci-dessus et soient $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$. Dans [W1], on a calculé $m(\sigma, \sigma')$ par une formule intégrale où interviennent les caractères de σ et σ'. En utilisant l'endoscopie ordinaire entre G, G' et leurs groupes endoscopiques, on peut exprimer ces caractères à l'aide de caractères stables (c'est-à-dire les $\Theta^{G'}(\varphi')$ ci-dessus), le prix à payer étant que ces caractères ne vivent pas sur les groupes de départ, mais sur leurs groupes endoscopiques (c'est le principe de base de l'endoscopie). Par endoscopie tordue, ces caractères stables s'expriment à l'aide de caractères sur des groupes tordus $\tilde{GL}(d'_+)$, $\tilde{GL}(d'_-)$ etc.... On obtient ainsi une expression de $m(\sigma, \sigma')$ en termes de tels caractères. Dans [W3], on a démontré une formule, parallèle à celle de [W1], qui calcule des facteurs ϵ de paires de représentations de groupes linéaires en termes du même genre de caractères. Il s'avère qu'à l'aide de cette formule, on peut transformer l'expression obtenue pour $m(\sigma, \sigma')$ en une autre où les intégrales de caractères tordus disparaissent et sont remplacées par des facteurs ϵ de paires. Il est alors aisé d'en déduire le théorème, puisque celui-ci dit justement que $m(\sigma, \sigma')$ se calcule à l'aide de tels facteurs.

Je remercie vivement C. Moeglin. Sans ses explications, cet article serait faux.

1 Paramétrages

1.1 Notations générales

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note $|.|_F$ sa valeur absolue usuelle. On fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F et un caractère $\psi_F : F \to \mathbb{C}^\times$, continu et non trivial. On note $(\alpha, \beta)_F$ le symbole de Hilbert quadratique de deux éléments $\alpha, \beta \in F^\times$. Pour toute extension quadratique E de F, on note $\tau_{E/F}$ l'unique élément non trivial du groupe de Galois $Gal(E/F)$ et $sgn_{E/F}$ le caractère quadratique de $F^\times$ dont le noyau est le groupe des normes $Norm_{E/F}(E^\times)$.

Pour tout espace topologique X localement compact et totalement discontinu, on note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions de X dans $\mathbb{C}$ qui sont localement constantes et à support compact. Considérons un groupe G qui agit sur un ensemble X. Pour un sous-ensemble Y de X, on note $Norm_G(Y)$ le sous-groupe des éléments de G qui conservent Y et $Z_G(Y)$ le sous-groupe des éléments de G qui fixent tout point de Y.

Soit G un groupe réductif défini sur F. Tous les sous-groupes que nous considérerons seront supposés définis sur F. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On note $Nil(\mathfrak{g}(F))$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}(F)$. On note $Temp(G(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles et tempérées de $G(F)$. Pour un élément $\pi \in Temp(G(F))$, on note E_σ un espace (complexe) dans lequel σ se réalise.

1.2 Mesures

Pour tout tore T défini sur F, on note A_T le plus grand sous-tore de T déployé sur F. On munit $A_T(F)$ de la mesure de Haar pour laquelle le plus grand sous-groupe compact de $A_T(F)$ est de mesure 1. On munit $A_T(F)\backslash T(F)$ de la mesure de Haar de masse totale 1. On munit $T(F)$ de la mesure de Haar telle que, pour $f \in C_c^\infty(T(F))$, on ait l'égalité

$$\int_{T(F)} f(t)dt = \int_{A_T(F)\backslash T(F)} \int_{A_T(F)} f(a\bar{t})da\, d\bar{t}.$$

On dit que T est anisotrope si $A_T = \{1\}$.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On note G_{reg} le sous-ensemble des éléments semi-simples fortement réguliers de G et $G_{reg}(F)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $G_{reg}(F)$. On dit que deux éléments de $G_{reg}(F)$ sont stablement conjugués si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de $G(\bar{F})$. On note $G_{reg}(F)/stconj$ l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $G_{reg}(F)$. Il y a un diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} & G_{reg}(F) & \\ \phi_G \swarrow & & \searrow \phi_G^{st} \\ G_{reg}(F)/conj & \stackrel{\phi^{st}_{G/conj}}{\rightarrow} & G_{reg}(F)/stconj \end{array}$$

On peut munir l'ensemble $G_{reg}(F)/conj$ d'une structure de variété analytique sur F et d'une mesure caractérisées par la propriété suivante. Soit $\gamma \in G_{reg}(F)$, notons G_γ son commutant dans G, qui est un sous-tore maximal de G. Soit ω un voisinage ouvert de 1 dans $G_\gamma(F)$. Alors, si ω est assez petit, l'application $t \mapsto \phi_G(t\gamma)$ de ω dans $G_{reg}(F)/conj$ est un isomorphisme analytique de ω sur un voisinage ouvert de $\phi_G(\gamma)$ dans $G_{reg}(F)/conj$ et cet isomorphisme préserve les mesures. On peut de la même façon munir l'ensemble $G_{reg}(F)/stconj$ d'une structure de variété analytique sur F et d'une mesure. Alors l'application $\phi^{st}_{G/conj}$ du diagramme ci-dessus est un revêtement analytique qui préserve localement les mesures.

Pour toute fonction f définie sur $G_{reg}(F)$ et invariante par conjugaison, resp. par conjugaison stable, on note encore f la fonction sur $G_{reg}(F)/conj$, resp. $G_{reg}(F)/stconj$, qui s'en déduit.

Pour un élément semi-simple γ de $G(F)$, on pose

$$D^G(\gamma) = |det((1 - ad(\gamma))_{|\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_\gamma(F)})|_F.$$

Munissons $G(F)$ d'une mesure de Haar. Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. Pour $\gamma \in G_{reg}(F)$, on pose

$$\Phi(\gamma, f) = \int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)dg.$$

Pour $y \in G_{reg}(F)/stconj$, on définit $\Phi^{st}(y, f) = \sum_x \Phi(x, f)$, où x parcourt la fibre de $\phi_{G/conj}$ au-dessus de y. Avec ces définitions, la formule de Weyl prend l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\int_{G(F)} f(g)dg = \int_{G_{reg}(F)/conj} \Phi(x, f)D^G(x)dx = \int_{G_{reg}(F)/stconj} \Phi^{st}(y, f)D^G(y)dy.$$

Soit $(M, \tilde{M})$ un groupe tordu défini sur F. Cela signifie que M est un groupe réductif connexe défini sur F, que $\tilde{M}$ est une variété algébrique définie sur F telle que $\tilde{M}(F)$ soit non vide et qu'il y a deux actions à droite et à gauche de M sur $\tilde{M}$, notées

$$\begin{array}{ccc} M \times \tilde{M} \times M & \to & \tilde{M} \\ (m, \tilde{m}, m') & \mapsto & m\tilde{m}m', \end{array}$$

de sorte que, pour chacune des actions, $\tilde{M}$ soit un espace principal homogène sous M. Pour $\tilde{m} \in \tilde{M}$, on note $\theta_{\tilde{m}}$ l'automorphisme de M tel que $\tilde{m}m = \theta_{\tilde{m}}(m)\tilde{m}$ pour tout $m \in M$. On note $Z_M(\tilde{m})$ le sous-groupe des points fixes de $\theta_{\tilde{m}}$, c'est-à-dire le groupe des $m \in M$ tels que $m\tilde{m}m^{-1} = \tilde{m}$. On note $M_{\tilde{m}}$ la composante neutre de $Z_M(\tilde{m})$. On dit que $\tilde{m}$ est semi-simple fortement régulier si $Z_M(\tilde{m})$ est abélien et $M_{\tilde{m}}$ est un tore. On note $\tilde{M}_{reg}$ l'ensemble des éléments fortement réguliers de $\tilde{M}$ et $\tilde{M}_{reg}(F)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $M(F)$ dans $\tilde{M}_{reg}(F)$, en appelant conjugaison l'action $(m, \tilde{m}) \mapsto m\tilde{m}m^{-1}$ de M sur $\tilde{M}$. On dit que deux éléments de $\tilde{M}_{reg}(F)$ sont stablement conjugués si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de $M(\bar{F})$. On note $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$ l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $\tilde{M}_{reg}(F)$. Il y a un diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{M}_{reg}(F) & \\ \phi_{\tilde{M}} \swarrow & & \searrow \phi^{st}_{\tilde{M}} \\ \tilde{M}_{reg}(F)/conj & \overset{\phi^{st}_{\tilde{M}/conj}}{\to} & \tilde{M}_{reg}(F)/stconj \end{array}$$

On peut munir l'ensemble $\tilde{M}_{reg}(F)/conj$ d'une structure de variété analytique sur F et d'une mesure caractérisées par la propriété suivante. Soient $\tilde{\gamma} \in \tilde{M}_{reg}(F)$ et ω un voisinage ouvert de 1 dans $M_{\tilde{\gamma}}(F)$. Alors, si ω est assez petit, l'application $t \mapsto \phi_{\tilde{M}}(t\tilde{\gamma})$ de ω dans $\tilde{M}_{reg}(F)/conj$ est un isomorphisme analytique de ω sur un voisinage ouvert de $\phi_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma})$ dans $\tilde{M}_{reg}(F)/conj$ et cet isomorphisme préserve les mesures. On munit de même l'ensemble $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$ d'une structure de variété analytique sur F et d'une mesure. L'application $\phi^{st}_{\tilde{M}/conj}$ est un revêtement analytique qui préserve localement les mesures.

Pour un élément semi-simple $\tilde{\gamma} \in \tilde{M}(F)$, posons

$$D^{\tilde{M}}(\gamma) = |det((1-\theta_{\tilde{\gamma}}))_{|\mathfrak{m}(F)/\mathfrak{m}_{\tilde{\gamma}}(F)})|_F.$$

Munissons $M(F)$ d'une mesure de Haar. On en déduit une mesure sur $\tilde{M}(F)$ en considérant cet ensemble comme un espace principal homogène pour l'action à gauche, resp. à droite, de $M(F)$, et on obtient en fait la même mesure quelle que soit l'action choisie. Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{M}(F))$. Pour $\tilde{\gamma} \in \tilde{M}_{reg}(F)$, posons

$$\Phi(\tilde{\gamma}, \tilde{f}) = [Z_M(\tilde{\gamma})(F) : M_{\tilde{\gamma}}(F)]^{-1} \int_{M_{\tilde{\gamma}}(F)\backslash M(F)} \tilde{f}(m^{-1}\tilde{\gamma}m)dm.$$

Alors, avec les mêmes conventions de notations que dans le cas non tordu, la formule de Weyl prend la forme :

$$\int_{\tilde{M}(F)} \tilde{f}(\tilde{m})d\tilde{m} = \int_{\tilde{M}_{reg}(F)/conj} \Phi(\tilde{x}, \tilde{f})D^{\tilde{M}}(\tilde{x})d\tilde{x}.$$

1.3 Espace de paramètres

On appelle ici extension algébrique de F un sous-corps de $\bar{F}$ contenant F. Notons Ξ l'ensemble des familles $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I})$ vérifiant les conditions suivantes :

• I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$;

• pour tout $i \in I$, $F_{\pm i}$ est une extension finie de F et F_i est une $F_{\pm i}$-algèbre commutative de dimension 2 ; c'est-à-dire F_i est une extension quadratique de $F_{\pm i}$ ou $F_i = F_{\pm i} \oplus F_{\pm i}$; on note τ_i l'unique automorphisme non trivial de $F_{\pm i}$-algèbre de F_i ;

• pour tout $i \in I$, y_i est un élément de $F_i^\times$ tel que $y_i\tau_i(y_i) = 1$.

Pour une telle famille, on note I^* l'ensemble des $i \in I$ tels que F_i soit un corps. Pour $i \in I$, on fixe $\delta_i \in F_{\pm i}^\times$ tel que $F_i = F_{\pm i}(\sqrt{\delta_i})$, avec la convention que δ_i appartient au groupe des carrés $F_{\pm i}^{\times,2}$ si $i \notin I^*$. On note δ_ξ l'image de $\prod_{i\in I} Norm_{F_{\pm i}/F}(\delta_i)$ dans $F^\times/F^{\times,2}$. Cet élément ne dépend évidemment pas des choix des δ_i. On pose

$$d_\xi = \sum_{i\in I}[F_i : F].$$

Un isomorphisme entre deux éléments

$$\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \text{ et } \xi' = (I', (F'_{\pm i'})_{i'\in I'}, (F'_{i'})_{i'\in I'}, (y'_{i'})_{i'\in I'})$$

de $\underline{\Xi}$ est une famille $(\iota, (\iota_{\pm i})_{i\in I}, (\iota_i)_{i\in I})$, où

• $\iota : I \to I'$ est une bijection ;

• pour tout $i \in I$, $\iota_{\pm i} : F_{\pm i} \to F'_{\pm\iota(i)}$ est un isomorphisme défini sur F et $\iota_i : F_i \to F'_{\iota(i)}$ est un isomorphisme compatible avec $\iota_{\pm i}$ en un sens évident ;

• pour tout $i \in I$, $\iota_i(y_i) = y'_{\iota(i)}$.

En particulier, tout élément ξ possède un automorphisme "identité". On dit que ξ est régulier si l'identité est le seul automorphisme de ξ. On note $\underline{\Xi}_{reg}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\underline{\Xi}$ et Ξ_{reg} le quotient de $\underline{\Xi}_{reg}$ obtenu en identifiant les éléments isomorphes. En pratique, on notera un élément de Ξ_{reg} comme un élément de $\underline{\Xi}_{reg}$ qui le représente.

Soit $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \Xi_{reg}$. Introduisons le tore T_ξ défini sur F tel que $T_\xi(F) = \prod_{i\in I}\{t_i \in F_i^\times; t_i\tau_i(t_i) = 1\}$. Soit ω un voisinage ouvert de l'unité dans $T_\xi(F)$. Si ω est assez petit, l'application

$$(t_i)_{i\in I} \mapsto (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i t_i)_{i\in I})$$

est une injection de ω dans Ξ_{reg}. On peut munir et on munit Ξ_{reg} d'une structure de variété analytique sur F et d'une mesure de sorte que cette injection soit un isomorphisme qui préserve les mesures.

Si on fixe un entier pair d, ou un élément $\delta \in F^\times/F^{\times,2}$, ou les deux, on définit les variantes Ξ_d, Ξ_δ, $\Xi_{d,\delta}$, $\Xi_{reg,d}$ etc... des objets précédents en se limitant aux ξ tels que $d_\xi = d$, ou $\delta_\xi = \delta$, ou $d_\xi = d$ et $\delta_\xi = \delta$.

Soit $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I})$ un élément de Ξ_{reg}. On pose

$$C(\xi) = \prod_{i\in I^*} F_{\pm i}^\times/Norm_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^\times).$$

Ce groupe s'identifie naturellement à $\{\pm 1\}^{I^*}$. On note $C(\xi)^1$ le sous-groupe qui s'identifie au sous-groupe des éléments $(\epsilon_i)_{i\in I^*} \in \{\pm 1\}^{I^*}$ tels que $\prod_{i\in I^*}\epsilon_i = 1$. Si $I^* \neq \emptyset$, on note $C(\xi)^{-1} = C(\xi) \setminus C(\xi)^1$.

Pour $i \in I$, notons $\Gamma(y_i)$ l'ensemble des éléments $\gamma_i \in F_i^\times$ tels que $\gamma_i\tau_i(\gamma_i)^{-1} = y_i$. On pose

$$\Gamma_{pair}(\xi) = \prod_{i\in I^*}\Gamma(y_i)/Norm_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^\times),$$

$$\Gamma_{imp}(\xi) = (F^\times/F^{\times,2}) \times \prod_{i\in I^*}\Gamma(y_i)/Norm_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^\times).$$

En pratique, pour un élément $c = (c_i)_{i\in I^*}$ de $C(\xi)$, on identifiera chaque c_i à un élément de $F_{\pm i}^\times$ qui le représente. On fera de même pour les éléments de $\Gamma_{pair}(\xi)$ ou $\Gamma_{imp}(\xi)$.

1.4 Paramétrage des classes de conjugaison

Soient V un espace vectoriel de dimension finie n sur F et q une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V (on appellera le couple (V,q) un espace quadratique). On définit son discriminant $\delta(q) = (-1)^{[n/2]}det(q) \in F^{\times}/F^{\times,2}$. On note G le groupe spécial orthogonal du couple (V,q).

Supposons d'abord n impair. Soient $\xi = (I,(F_{\pm i})_{i\in I},(F_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}) \in \Xi_{reg,n-1}$ et $c = (c_i)_{i\in I} \in C(\xi)$. Posons

$$V_\xi = \oplus_{i\in I}F_i$$

et munissons cet espace de la forme bilinéaire symétrique et non dégénérée $q_{\xi,c}$ définie par

$$q_{\xi,c}(\sum_{i\in I} v_i, \sum_{i\in I} v'_i) = \sum_{i\in I} trace_{F_i/F}(c_i\tau_i(v_i)v'_i).$$

Considérons la condition : il existe une droite D sur F et une forme bilinéaire symétrique non dégénérée q_D sur D telles que les espaces quadratiques (V,q) et $(D\oplus V_\xi, q_D \oplus q_{\xi,c})$ soient isomorphes. On montre qu'il existe une unique classe $C(\xi)^\epsilon \subset C(\xi)$ (avec $\epsilon = \pm 1$ dépendant de ξ et (V,q)) telle que cette condition soit vérifiée si et seulement si c appartient à cette classe. Supposons-la vérifiée. La droite quadratique (D,q_D) est alors unique à isomorphisme près. Fixons un isomorphisme entre (V,q) et $(D\oplus V_\xi, q_D\oplus q_{\xi,c})$. Introduisons l'élément $x \in G(F)$ qui, modulo cet isomorphisme, agit sur chaque F_i par multiplication par y_i et sur D par l'identité. C'est un élément de $G_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison est bien déterminée. Inversement, toute classe de conjugaison dans $G_{reg}(F)$ est obtenue par ce procédé. On obtient ainsi une application de $G_{reg}(F)/conj$ dans $\Xi_{reg,n-1}$ qui se factorise en un diagramme

$$\begin{tikzcd} G_{reg}(F)/conj \arrow[rr, "\phi^{st}_{G/conj}"] \arrow[dr, "p_G"'] & & G_{reg}(F)/stconj \arrow[dl, "p^{st}_G"] \\ & \Xi_{reg,n-1} & \end{tikzcd}$$

L'application p^{st}_G est un isomorphisme analytique qui préserve les mesures. La fibre en un point ξ de l'application p_G s'identifie à une classe $C(\xi)^\epsilon \subset C(\xi)$.

Supposons maintenant que n est pair et $n \geq 2$. Posons $\delta = \delta(q)$. Soient $\xi = (I,(F_{\pm i})_{i\in I},(F_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}) \in \Xi_{reg,n,\delta}$ et $c = (c_i)_{i\in I} \in C(\xi)$. Définissons V_ξ et $q_{\xi,c}$ comme précédemment. Considérons la condition : les espaces quadratiques (V,q) et $(V_\xi, q_{\xi,c})$ sont isomorphes. Il existe une unique classe $C(\xi)^\epsilon \subset C(\xi)$ telle que cette condition soit vérifiée si et seulement si c appartient à cette classe. Supposons-la vérifiée et fixons un isomorphisme entre nos deux espaces quadratiques. Introduisons l'élément $x \in G(F)$ qui, modulo cet isomorphisme, agit sur chaque F_i par multiplication par y_i. C'est un élément de $G_{reg}(F)$. Il y a deux différences avec le cas n impair. D'une part, c'est seulement la classe de conjugaison de x par le groupe orthogonal tout entier qui est bien déterminée. Or cette classe se décompose en deux classes de conjugaison par $G(F)$. D'autre part, on n'obtient par ce procédé que les classes d'éléments $x \in G_{reg}(F)$ qui n'ont pas de valeurs propres égales à ± 1. On élimine ce deuxième problème en modifiant la définition de G_{reg}.

Convention. *Pour un groupe spécial orthogonal G d'un espace quadratique de dimension paire, on note dorénavant G_{reg} l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de G qui n'ont aucune valeur propre égale à ± 1.*

On obtient alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} G_{reg}(F)/conj & & \stackrel{\phi^{st}_{G/conj}}{\to} & & G_{reg}(F)/stconj \\ & p_G \searrow & & \swarrow p^{st}_G & \\ & & \Xi_{reg,n,\delta} & & \end{array}$$

L'application p^{st}_G est un revêtement qui préserve localement les mesures. Ses fibres sont d'ordre 2 et formées de deux classes de conjugaison stable qui sont conjuguées par l'action du groupe orthogonal. Soit $\xi \in \Xi_{reg,n,\delta}$ et $y \in G_{reg}(F)/stconj$ tel que $p^{st}_G(y) = \xi$. La fibre de $\phi^{st}_{G/conj}$ au-dessus de y s'identifie à une classe $C(\xi)^\epsilon \subset C(\xi)$.

Variante. Notons G^+ le groupe orthogonal de (V, q_V). On définit les ensembles $G_{reg}(F)/conj^+$ et $G_{reg}(F)/stconj^+$ en remplaçant dans les définitions conjugaison par G par conjugaison par G^+. On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} G_{reg}(F)/conj^+ & & \stackrel{\phi^{st}_{G/conj^+}}{\to} & & G_{reg}(F)/stconj^+ \\ & p^+_G \searrow & & \swarrow p^{st+}_G & \\ & & \Xi_{reg,n,\delta} & & \end{array}$$

où cette fois, p^{st+}_G est un isomorphisme.

Pour simplifier certaines constructions ultérieures, il convient de considérer le cas $n = 0$. Dans ce cas, on pose $\delta = 1$ et $G_{reg} = G = \{1\}$. Les diagrammes ci-dessus se trivialisent, tous les ensembles y figurant ayant un seul élément.

Que d soit pair ou impair, notons $G(F)_{ani}$ l'ensemble des éléments de $G_{reg}(F)$ dont le commutant est un tore anisotrope. Il s'agit des éléments appelés usuellement elliptiques, sauf dans le cas où $n = 2$ et G est déployé, auquel cas tout élément est elliptique alors que $G(F)_{ani}$ est vide. Notons Ξ^* l'ensemble des éléments $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \Xi$ tels que $I = I^*$. On définit aussi Ξ^*_{reg}, Ξ^*_n etc... Dans les diagrammes ci-dessus, on peut remplacer les ensembles $G_{reg}(F)$ par $G(F)_{ani}$ et les $\Xi_{reg,n}$ etc... par $\Xi^*_{reg,n}$ etc... Les diagrammes obtenus conservent les mêmes propriétés.

Soit U un espace vectoriel sur F de dimension finie n. On note M le groupe des automorphismes F-linéaires de U. On note $\tilde{M}$ l'ensemble des formes bilinéaires non dégénérées sur U. Le groupe M agit à droite et à gauche sur $\tilde{M}$ par la formule

$$(m\tilde{m}m')(u, u') = \tilde{m}(m^{-1}u, m'u')$$

pour $m, m' \in M$, $\tilde{m} \in \tilde{M}$ et $u, u' \in U$. Le couple $(M, \tilde{M})$ est un groupe tordu.

Supposons d'abord n pair. Soit $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \Xi_{reg,n}$ et $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I} \in \Gamma_{pair}(\xi)$. Introduisons le même espace V_ξ que ci-dessus et fixons un isomorphisme F-linéaire de U sur V_ξ. Introduisons l'élément $\tilde{x} \in \tilde{M}(F)$ défini, modulo cet isomorphisme, par la formule

$$(1) \qquad \tilde{x}(\sum_{i\in I} u_i, \sum_{i\in I} u'_i) = \sum_{i\in I} trace_{F_i/F}(\tau_i(u_i)u'_i\gamma_i).$$

C'est un élément de $\tilde{M}_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison est uniquement déterminée. Inversement, toute classe semi-simple régulière est obtenue par ce procédé. On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{M}_{reg}(F)/conj & & \stackrel{\phi^{st}_{\tilde{M}/conj}}{\to} & & \tilde{M}_{reg}(F)/stconj \\ & p_{\tilde{M}} \searrow & & \swarrow p^{st}_{\tilde{M}} & \\ & & \Xi_{reg,n} & & \end{array}$$

La fibre de $p_{\tilde{M}}$ au-dessus de $\xi \in \Xi_{reg,n}$ s'identifie à $\Gamma_{pair}(\xi)$. L'application $p^{st}_{\tilde{M}}$ est un isomorphisme analytique mais ne préserve pas localement les mesures. En effet, fixons $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \Xi_{reg,n}$ et construisons $\tilde{x}$ comme ci-dessus. Le tore $M_{\tilde{x}}$ est égal à T_ξ. Soit ω un voisinage ouvert assez petit de l'unité dans $T_\xi(F)$. La mesure sur $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$ a été définie de sorte que l'application $t \mapsto \tilde{x}t$ de ω dans $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$ préserve les mesures. Changer $\tilde{x}$ en $\tilde{x}t$ revient à changer γ_i en $\gamma_i t_i$ dans la formule (1). D'après la relation $y_i = \gamma_i\tau_i(\gamma_i)^{-1}$, on a l'égalité $p^{st}_{\tilde{M}}(\tilde{x}t) = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i t_i^2)_{i\in I})$ Or la mesure sur $\Xi_{reg,n}$ a été définie de sorte que l'application $t = (t_i)_{i\in I} \mapsto (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i t_i)_{i\in I})$ préserve les mesures. Le jacobien de l'application $p^{st}_{\tilde{M}}$ est donc le même que celui de l'application $t \mapsto t^2$ de $T_\xi(F)$ dans lui-même, c'est-à-dire $|2|_F^{n/2}$.

Supposons maintenant n impair. $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \Xi_{reg,n-1}$ et $\gamma = (\gamma_D, (\gamma_i)_{i\in I}) \in \Gamma_{imp}(\xi)$. Posons $D = F$ et fixons un isomorphisme de U sur $D \oplus V_\xi$. Introduisons l'élément $\tilde{x} \in \tilde{M}(F)$ défini, modulo cet isomorphisme, par la formule

$$\tilde{x}(u_D + \sum_{i\in I} u_i, u'_D + \sum_{i\in I} u'_i) = \gamma_D u_D u'_D + \sum_{i\in I} trace_{F_i/F}(\tau_i(u_i)u'_i\gamma_i).$$

C'est un élément de $\tilde{M}_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison est uniquement déterminée. Inversement, toute classe semi-simple régulière est obtenue par ce procédé. On obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}_{reg}(F)/conj & \overset{\phi^{st}_{\tilde{M}/conj}}{\to} & \tilde{M}_{reg}(F)/stconj \\ p_{\tilde{M}} \searrow & & \swarrow p^{st}_{\tilde{M}} \\ & \Xi_{reg,n-1} & \end{array}$$

La fibre de $p_{\tilde{M}}$ au-dessus de $\xi \in \Xi_{reg,n-1}$ s'identifie à $\Gamma_{imp}(\xi)$. L'application $p^{st}_{\tilde{M}}$ est un isomorphisme analytique dont le jacobien vaut $|2|_F^{(n-1)/2}$ d'après le même calcul que ci-dessus.

Que n soit pair ou impair, notons $\tilde{M}(F)_{ani}$ l'ensemble des éléments $\tilde{\gamma} \in \tilde{M}_{reg}(F)$ tels que $M_{\tilde{\gamma}}$ soit un tore anisotrope. Dans les diagrammes ci-dessus, on peut remplacer $\tilde{M}_{reg}(F)$ par $\tilde{M}(F)_{ani}$ et les ensembles $\Xi_{reg,n}$ ou $\Xi_{reg,n-1}$ par $\Xi^*_{reg,n}$ ou $\Xi^*_{reg,n-1}$. Les diagrammes obtenus conservent les mêmes propriétés.

1.5 Définition de fonctions sur l'ensemble de paramètres

Soit $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \Xi_{reg}$. Pour tout $i \in I$, notons Φ_i l'ensemble des homomorphismes non nuls de F-algèbres de F_i dans $\bar{F}$. On définit un polynôme

$$P_\xi(T) = \prod_{i\in I}\prod_{\phi\in\Phi_i}(T - \phi(y_i)).$$

Introduisons un espace quadratique (V_ξ, q_ξ) tel que $dim(V_\xi) = d_\xi$ et $\delta(q_\xi) = \delta_\xi$. Notons G_ξ son groupe spécial orthogonal. Alors ξ paramètre deux classes de conjugaison stable dans $G_{\xi,reg}(F)$. Fixons-en une et un élément t de cette classe. On pose

$$\Delta(\xi) = |det((1-t)_{|V_\xi}|_F.$$

Ce terme ne dépend ni du choix de l'espace (V_ξ, q_ξ), ni du choix de t. En fait, il est clair que

$$\Delta(\xi) = P_\xi(1).$$

Pour un entier $n \geq d_\xi$, fixons un espace quadratique (Z, q_Z) tel que $dim(Z) = n - d_\xi$. Notons G le groupe spécial orthogonal de la somme orthogonale $(V_\xi, q_\xi) \oplus (Z, q_Z)$. Alors t est un élément semi-simple de $G(F)$. Il n'est plus régulier, mais on a néanmoins défini $D^G(t)$. On pose

$$D^n(\xi) = D^G(t).$$

Ici encore, ce terme ne dépend pas des choix. On pose simplement $D(\xi) = D^{d_\xi}(\xi)$. On vérifie l'égalité

$$(1) \qquad D^n(\xi) = D(\xi)\Delta(\xi)^{n-d_\xi}.$$

Soient $\xi_+ = (I_+, (F_{\pm i})_{i\in I_+}, (F_i)_{i\in I_+}, (y_i)_{i\in I_+}) \in \Xi_{reg}$ et $\xi_- = (I_-, (F_{\pm i})_{i\in I_-}, (F_i)_{i\in I_-}, (y_i)_{i\in I_-}) \in \Xi_{reg}$, où l'on suppose, ainsi qu'il est loisible, que $I_+ \cap I_- = \emptyset$. Posons $\xi = \xi_+ \sqcup \xi_-$ et $I = I_+ \sqcup I_-$. Supposons ξ régulier. Soit $c = (c_i)_{i\in I} \in C(\xi)$. On note $P'_\xi(T)$ le polynôme dérivé du polynôme P_ξ. Pour tout $i \in I$, posons

$$C_i = (-1)^{d_\xi/2} c_i P'_\xi(y_i) P_\xi(-1) y_i^{1-d_\xi/2}(y_i - 1)^{-1}(y_i + 1).$$

C'est un élément de $F_{\pm i}$. Pour $\nu \in F^\times$, on pose

$$\Delta_\nu(\xi_+, \xi_-, c) = \prod_{i\in I_-^*} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(\nu C_i).$$

Soit $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \Xi_{reg}$. Soit $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I} \in \Gamma_{pair}(\xi)$. Pour $i \in I$, posons

$$C_i = -\gamma_i^{-1} P_\xi(1) P'_\xi(y_i) y_i^{1-d_\xi/2}(y_i - 1).$$

Soit maintenant $\gamma = (\gamma_D, (\gamma_i)_{i\in I}) \in \Gamma_{imp}(\xi)$ (la composante γ_D appartient à $F^\times/F^{\times,2}$). Pour $i \in I$, posons

$$C_i = \gamma_D \gamma_i^{-1} P_\xi(1) P'_\xi(y_i) y_i^{1-d_\xi/2}(y_i - 1).$$

Dans les deux cas, on pose

$$\Delta(\xi, \gamma) = \prod_{i\in I^*} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(C_i).$$

1.6 Endoscopie

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. Fixons une forme quasi-déployée $\underline{G}$ de G et un torseur intérieur $\psi_G : G \to \underline{G}$. On fixe une fonction $u : Gal(\bar{F}/F) \to \underline{G}$ telle que $\psi_G \circ \sigma(g) = u(\sigma)\sigma \circ \psi_G(g) u(\sigma)^{-1}$ pour tous $g \in G$ et $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$. Le composé de u et de l'application naturelle de $\underline{G}$ dans son groupe adjoint $\underline{G}_{ad}$ est un cocycle. Nous considérons le cas favorable où u lui-même est un cocycle, à valeurs dans $\underline{G}$. Fixons une paire de Borel épinglée de $\underline{G}$, définie sur F. C'est-à-dire que l'on fixe un sous-groupe de Borel $\underline{B}$ défini sur F, un sous-tore maximal $\underline{T}$ de $\underline{B}$ défini sur F. Notons Π l'ensemble des racines simples de $\underline{T}$ associé à $\underline{B}$. Pour $\alpha \in \Pi$, on fixe un élément non nul E_α de l'espace radiciel associé à α et on suppose que la famille $(E_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ est stable par l'action de $Gal(\bar{F}/F)$. Remarquons que $N = \sum_{\alpha\in\Pi} E_\alpha$ est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}(F)$ et la classe de conjugaison de la paire de Borel épinglée est déterminée par celle de N. Il nous suffit en fait de fixer la classe de conjugaison de N. Considérons enfin une donnée endoscopique $(H, s, {}^L\xi)$ de G, cf. [LS] 1.2. On peut définir une application, la correspondance endoscopique, dont l'ensemble de départ est un sous-ensemble de $H_{reg}(F)/stconj$ et l'ensemble d'arrivée est $G_{reg}(F)/stconj$. Elle préserve localement les mesures. Pour $y \in H_{reg}(F)/stconj$ et $x \in G_{reg}(F)/conj$ tels que $\phi^{st}_{G/conj}x$ corresponde à y, on définit le facteur de transfert $\Delta_{H,G}(y,x)$ (nous en supprimons le terme Δ_{IV}). Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $f^H \in C_c^\infty(H(F))$, on dit que f^H est un transfert de f si on a l'égalité

$$D^H(y)^{1/2}\Phi^{st}(y, f^H) = \sum_x \Delta_{H,G}(y,x)D^G(x)^{1/2}\Phi(x,f)$$

pour presque tout $y \in H_{reg}(F)/stconj$, où x parcourt l'ensemble des éléments de $G_{reg}(F)/conj$ tels que $\phi^{st}_{G/conj}(x)$ soit l'image de y dans $G_{reg}(F)/stconj$ (c'est l'ensemble vide si y n'a pas d'image dans $G_{reg}(F)/stconj$).

Remarque. Pour être précis, il conviendrait d'introduire l'ensemble des éléments G-réguliers dans H et de dire que l'égalité doit être vérifiée pour tout y G-régulier au lieu de dire comme ci-dessus qu'elle l'est presque partout.

Soient Θ une distribution sur $G(F)$ invariante par conjugaison et Θ^H une distribution sur $H(F)$ invariante par conjugaison stable. On dit que Θ est un transfert de Θ^H si et seulement si $\Theta(f) = \Theta^H(f^H)$ pour tout couple de fonctions (f, f^H) tel que f^H soit un transfert de f. Supposons Θ et Θ^H localement intégrable, ce qui permet de les identifier à des fonctions définies presque partout. Les formules d'intégration du paragraphe 1.2 montrent que Θ est un transfert de Θ^H si et seulement si on a l'égalité

$$(1) \qquad \Theta(x)D^G(x)^{1/2} = \sum_y D^H(y)^{1/2}\Delta_{H,G}(y,x)\Theta^H(y)$$

pour tout $x \in G_{reg}(F)/conj$, où y parcourt l'ensemble des éléments de $H_{reg}(F)/stconj$ tels que $\phi^{st}_{G/conj}(x)$ soit l'image de y par la correspondance endoscopique.

La théorie de l'endoscopie s'adapte au cas d'un groupe tordu $(M, \tilde{M})$. On ne l'utilisera que sous des hypothèses simplificatrices. On suppose M déployé. On fixe un élément $\tilde{\theta} \in \tilde{M}(F)$, on suppose qu'il existe une paire de Borel épinglée de M, définie sur F et conservée par $\theta_{\tilde{\theta}}$. On fixe une telle paire. L'élément N construit comme ci-dessus est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{m}_{\tilde{\theta}}(F)$ et c'est sa classe de conjugaison par $M_{\tilde{\theta}}(F)$ qui compte. Considérons une donnée endoscopique $(H, s, {}^L\xi)$ de $(M, \tilde{M})$, cf. [KS] 2.1. On définit une correspondance endoscopique, qui est une application dont l'ensemble de départ est un sous-ensemble de $H_{reg}(F)/stconj$ et l'ensemble d'arrivée est $\tilde{M}(F)/stconj$. Il y a une difficulté avec les mesures. Soient $h \in H_{reg}(F)$ et $\tilde{m} \in \tilde{M}(F)$ tels que $\phi^{st}_{\tilde{M}}(\tilde{m})$ soit l'image de $\phi^{st}_H(h)$. Notons $T^\flat = M_{\tilde{m}}$, $T^H = H_h$, T le commutant de $T^\flat$ dans M et $\theta = \theta_{\tilde{m}}$. Posons

$$d(\tilde{\gamma}) = |det((1-\theta)_{|\mathfrak{t}/\mathfrak{t}^\flat}|_F$$

et

$$D_0^{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}) = |det((1-\theta)_{|\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}|_F = D^{\tilde{M}}(\tilde{\gamma})d(\tilde{\gamma})^{-1}.$$

Il y a une application naturelle de $T^\flat(F)$ dans $T^H(F)$ qui est localement un isomorphisme. On a défini des mesures sur $T^\flat(F)$ et $T^H(F)$. D'après [KS] 5.5, il convient de remplacer la mesure sur $T^H(F)$ par celle telle que le jacobien de l'application précédente soit égal à

$d(\tilde{\gamma})$. On change de façon correspondante la mesure sur $H_{reg}(F)/stconj$. Alors la correspondance endoscopique ci-dessus est de jacobien $d(\tilde{y})^{-1}$ en un point $y \in H_{reg}(F)/stconj$ d'image $\tilde{y} \in \tilde{M}_{reg}/stconj$. On définit un facteur de transfert $\Delta_{H,\tilde{M}}$. Pour $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{M}(F))$ et $f^H \in C_c^\infty(H(F))$, on dit que f^H est un transfert de $\tilde{f}$ si on a l'égalité

$$D^H(y)^{1/2}\Phi^{st}(y, f^H) = \sum_{\tilde{x}} \Delta_{H,\tilde{M}}(y, \tilde{x}) D_0^{\tilde{M}}(\tilde{x})^{1/2}\Phi(\tilde{x}, \tilde{f})$$

pour presque tout $y \in H_{reg}(F)/stconj$, où $\tilde{x}$ parcourt l'ensemble des éléments de $\tilde{M}_{reg}(F)/conj$ tels que $\phi^{st}_{\tilde{M}/conj}(\tilde{x})$ soit l'image de y dans $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$ (cf. [KS] 5.5). On définit la notion de transfert de distributions comme ci-dessus. Soit $\tilde{\Theta}$ une distribution sur $\tilde{M}(F)$ invariante par conjugaison et Θ^H une distribution sur $H(F)$ invariante par conjugaison stable. Supposons-les localement intégrables. Les normalisations de mesures ci-dessus et les formules d'intégration de 1.2 montrent que $\tilde{\Theta}$ est un transfert de Θ^H si et seulement si on a l'égalité

$$(2) \qquad \tilde{\Theta}(\tilde{x}) D_0^{\tilde{M}}(\tilde{x})^{1/2} = \sum_y D^H(y)^{1/2}\Delta_{H,\tilde{M}}(y, \tilde{x})\Theta^H(y)$$

pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}_{reg}(F)/conj$, où y parcourt l'ensemble des éléments de $H_{reg}(F)/stconj$ tels que $\phi^{st}_{\tilde{M}/conj}(\tilde{x})$ soit l'image de y par la correspondance endoscopique.

On a modifié ci-dessus nos mesures pour traduire les définitions de [KS]. Mais l'égalité (2) ne fait intervenir aucune mesure. Dans la suite, on revient aux mesures définies en 1.2, en considérant (2) comme la définition du transfert de la distribution Θ^H.

1.7 Endoscopie pour les groupes spéciaux orthogonaux

Soient (V', q'), (V'_+, q'_+) et (V'_-, q'_-) trois espaces quadratiques sur F. Notons d', d'_+ et d'_- leurs dimensions et G', G'_+ et G'_- leurs groupes spéciaux orthogonaux. On suppose

- d', d'_+ et d'_- impairs ;
- $d'_+ + d'_- = d' + 1$;
- G'_+ et G'_- sont déployés.

Comme on le sait, $G'_+ \times G'_-$ est un groupe endoscopique de G'.

Remarque. La notion correcte est celle de donnée endoscopique et non de groupe endoscopique. Ici, les termes que l'on doit ajouter pour obtenir une donnée endoscopique sont presque évidents, on renvoie à [W4] 1.8 pour plus de détails.

Pour définir des facteurs de transfert, on doit fixer quelques données supplémentaires, à savoir une forme intérieure quasi-déployée $\underline{G}'$ de G', un torseur intérieur $\psi_{G'} : G' \to \underline{G}'$ et un cocycle $u' : Gal(\bar{F}/F) \to \underline{G}'$. Supposons G' déployé. On pose $(\underline{V}', \underline{q}') = (V', q')$, $\underline{G}' = G'$, on prend pour torseur intérieur l'identité et pour cocycle le cocyle trivial. Supposons maintenant G' non déployé. On introduit l'espace quadratique $(\underline{V}', \underline{q}')$ qui a mêmes dimension et discriminant que (V', q') mais un indice de Witt opposé. Le groupe spécial orthogonal $\underline{G}'$ de cet espace est déployé. On fixe un isomorphisme $\bar{F}$-linéaire $\beta : V' \otimes_F \bar{F} \to \underline{V}' \otimes_F \bar{F}$ qui identifie les prolongements $\bar{F}$-bilinéaires de q' et $\underline{q}'$. Pour $g' \in G'$, on pose $\psi_{G'}(g') = \beta g' \beta^{-1}$. Pour $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$, on pose $u'(\sigma) = \beta\sigma(\beta)^{-1}$. On a a priori besoin de fixer une classe de conjugaison d'élément nilpotent régulier dans $\underline{\mathfrak{g}}'(F)$, mais il n'y en a qu'une.

Avec ces données, on peut définir la notion de correspondance entre classes de conjugaison stable semi-simples régulières dans $G'(F)$ et dans $G'_+(F)\times G'_-(F)$, et définir un facteur de transfert $\Delta_{G'_+\times G'_-,G'}$. La correspondance entre classes de conjugaison stable s'explicite aisément. Il y a une application naturelle

$$\begin{array}{ccc}\Xi_{d'_+-1}\times\Xi_{d'_--1} & \to & \Xi_{d'-1}\\ (\xi_+,\xi_-) & \mapsto & \xi_+\sqcup\xi_-.\end{array}$$

Via les applications $p^{st}_{G'_+}$, $p^{st}_{G'_-}$ et $p^{st}_{G'}$, c'est la correspondance endoscopique (encore une fois, pour être correct, il faut se restreindre aux éléments G'-réguliers).

Soient $y'_+\in G'_{+,reg}(F)/stconj$, $y'_-\in G'_{-,reg}(F)/stconj$ et $x'\in G'_{reg}(F)/conj$. Posons $\xi_+=p^{st}_{G'_+}(y_+)$, $\xi_-=p^{st}_{G'_-}(y_-)$, $\xi=\xi_+\sqcup\xi_-$, suposons $p_{G'}(x')=\xi$. Soit $c\in C(\xi)$ qui paramètre x'. Alors, avec la notation introduite en 1.5,

$$(1)\qquad \Delta_{G'_+\times G'_-,G'}((y'_+,y'_-),x')=\Delta_{-2\delta(q')}(\xi_+,\xi_-,c).$$

Cf. [W4] proposition 1.10. Le η de cette référence vaut ici $(-1)^{(d'-1)/2}\delta(q')$.

Remarque. Soit $\alpha\in F^\times$, remplaçons q' par $\alpha q'$. Cela ne change pas le groupe G'. Pour y'_+, y'_- et x' comme ci-dessus, le paramètre ξ est inchangé. En se reportant au paragraphe 1.5, on voit que l'élément $c=(c_i)_{i\in I^*}$ est remplacé par $(\alpha c_i)_{i\in I^*}$. On a aussi $\delta(\alpha q')=\alpha\delta(q')$. On conclut que le facteur de transfert ne change pas.

Soient (V,q), (V_+,q_+) et (V_-,q_-) trois espaces quadratiques sur F. Notons d, d_+ et d_- leurs dimensions et G, G_+ et G_- leurs groupes spéciaux orthogonaux. On suppose

• d, d_+ et d_- pairs ;

• $d_++d_-=d$;

• G_+ et G_- sont quasi-déployés.

Le groupe $G_+\times G_-$ est un groupe endoscopique de G. On doit fixer des données supplémentaires. Pour cela,

on fixe pour la suite de l'article un élément $\nu_0\in F^\times$.

On introduit l'espace quadratique $(Z_1,q_{1,-\nu_0})$ suivant : $Z_1=F$ et $q_{1,-\nu_0}(\lambda,\lambda')=-2\nu_0\lambda\lambda'$. Considérons la condition :

(QD) le groupe spécial orthogonal de $(V,q)\oplus(Z_1,q_{1,-\nu_0})$ est déployé.

Il est facile de l'expliciter. Si $\delta(q)=1$, elle est équivalente à chacune des conditions suivantes : G est déployé ; (V,q) est somme orthogonale de plans hyperboliques. Supposons $\delta(q)\neq 1$. Posons $E=F(\sqrt{\delta(q)})$. Alors (V,q) est somme orthogonale de plans hyperboliques et de l'espace E muni d'une forme $(\lambda\lambda')\mapsto trace_{E/F}(\tau_{E/F}(\lambda)\lambda'\eta)$, pour un élément $\eta\in F^\times$. La condition (QD) équivaut alors à $sgn_{E/F}(\eta\nu_0)=1$.

Rappelons que les orbites nilpotentes régulières dans $\mathfrak{g}(F)$ sont paramétrées par un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $F^\times/F^{\times,2}$, cf. [W1] 7.1. Sous l'hypothèse (QD), on a $\mathcal{N}=F^\times/F^{\times,2}$ si $\delta(q)=1$, tandis que $\mathcal{N}=\eta Norm_{E/F}(E^\times)/F^{\times,2}$ si $\delta(q)\neq 1$, avec les notations ci-dessus.

Si (QD) est vérifiée, on pose $(\underline{V},\underline{q})=(V,q)$, $\underline{G}=G$ (ce groupe est quasi-déployé). On prend pour torseur intérieur l'identité et pour cocycle le cocyle trivial. Supposons maintenant que (QD) ne soit pas vérifiée. On introduit l'espace quadratique $(\underline{V},\underline{q})$ qui a mêmes dimension et discriminant que (V,q) mais un indice de Witt opposé. Cet espace vérifie (QD). On fixe un isomorphisme $\bar{F}$-linéaire $\beta:V\otimes_F\bar{F}\to\underline{V}\otimes_F\bar{F}$ qui identifie les prolongements $\bar{F}$-bilinéaires de q et $\underline{q}$. Comme en dimension impaire, on en déduit un torseur intérieur $\psi_G:G\to\underline{G}$ et un cocycle $u:Gal(\bar{F}/F)\to\underline{G}$. On doit encore fixer une orbite nilpotente régulière dans $\underline{\mathfrak{g}}(F)$. D'après ce qui précède, l'élément ν_0 paramètre une telle orbite $\mathcal{O}_{\nu_0}$ et c'est celle que l'on choisit.

Il y a une application naturelle

$$\begin{array}{ccc} \Xi_{d_+,\delta(q_+)} \times \Xi_{d_-,\delta(q_-)} & \to & \Xi_{d,\delta(q)} \\ (\xi_+,\xi_-) & \mapsto & \xi_+ \sqcup \xi_-. \end{array}$$

Via les applications $p^{st,+}_{G_+}$, $p^{st,+}_{G_-}$ et $p^{st,+}_{G}$, elle définit une correspondance entre classes de conjugaison stable au sens de la conjugaison par le groupe orthogonal tout entier, autrement dit entre couples de classes de conjugaison stable. La correspondance endoscopique raffine cette première correspondance. Pour la décrire plus commodément, introduisons l'ensemble $\Lambda(V)$ formé des classes de conjugaison par $G(\bar{F})$ dans l'ensemble des lagrangiens définis sur $\bar{F}$ de $V\otimes_F\bar{F}$. Il a deux éléments. Le groupe orthogonal $G^+(\bar{F})$ agit naturellement sur cet ensemble, un élément de déterminant -1 échangeant les deux éléments. Considérons le produit $G_{reg}(F)\times\Lambda(V)$. Disons que deux éléments (g_1,L_1) et (g_2,L_2) de ce produit sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $g\in G^+(\bar{F})$ tel que $g_2=gg_1g^{-1}$ et $L_2=g(L_1)$. Notons $\Lambda G_{reg}(F)/stconj^+$ l'ensemble des classes de conjugaison stable et $\phi^{st,+}_{\Lambda G}: G_{reg}(F)\times\Lambda(V)\to\Lambda G_{reg}(F)/stconj^+$ l'application naturelle. Il y a une application naturelle de cet ensemble dans $G_{reg}(F)/stconj^+$ qui, à $\phi^{st,+}_{\Lambda G}(g,L)$, associe la classe $\phi^{st,+}_G(g)$ de g dans l'ensemble d'arrivée. D'autre part

(2) si l'on fixe $L\in\Lambda(V)$, l'application $g\mapsto(g,L)$ se quotiente en une bijection de $G_{reg}(F)/stconj$ sur $\Lambda G_{reg}(F)/stconj^+$.

Soit $(g,L)\in G_{reg}(F)\times\Lambda(V)$. On peut représenter L par un lagrangien, encore noté L, tel que $g(L)=L$. Notons $\mathcal{E}(g,L)$ l'ensemble des valeurs propres de g dans L (ce sont des éléments de $\bar{F}$). Quand on change de représentant L, l'ensemble $\mathcal{E}(g,L)$ peut changer. Un tel changement consiste à remplacer un nombre pair de valeurs propres par leurs inverses. Disons que deux ensembles de valeurs propres sont équivalents s'ils diffèrent par un tel changement. La classe d'équivalence de $\mathcal{E}(g,L)$ est alors bien déterminée et ne dépend que de $\phi^{st,+}_{\Lambda G}(g,L)$. On remarque que, si L' désigne l'autre élément de $\Lambda(V)$, les classes $\mathcal{E}(g,L')$ et $\mathcal{E}(g,L)$ sont distinctes : on passe de l'une à l'autre en remplaçant un nombre impair de valeurs propres par leurs inverses. Cela étant, l'application précédemment définie entre couples de conjugaison stable se relève en une application

$$E:\Lambda G_{+,reg}(F)/stconj^+\times\Lambda G_{-,reg}(F)/stconj^+\to\Lambda G_{reg}(F)/stconj^+$$

définie ainsi. Soit $(g_+,\Lambda_+)\in G_{+,reg}(F)\times\Lambda(V_+)$ et $(g_-,\Lambda_-)\in G_{-,reg}(F)\times\Lambda(V_-)$. Soit $g\in G_{reg}$ tel que $\phi^{st,+}_G(g)$ corresponde à $(\phi^{st,+}_{G_+}(g_+),\phi^{st,+}_{G_-}(g_-))$. Il y a un unique $L\in\Lambda(V)$ tel que $\mathcal{E}(g,L)$ soit équivalent à la réunion disjointe $\mathcal{E}(g_+,L_+)\sqcup\mathcal{E}(g_-,L_-)$. On choisit L ainsi. On définit $E(\phi^{st,+}_{\Lambda G_+}(g_+,L_+),\phi^{st,+}_{\Lambda G_-}(g_-,L_-))=\phi^{st,+}_{\Lambda G}(g,L)$.

Comme on l'a dit, une donnée endoscopique est plus riche que la seule donnée des groupes. Elle contient une identification sur $\bar{F}$ entre un tore maximal de $G_+\times G_-$ et un tore maximal de G, modulo l'action du groupe de Weyl de G. On a vu ci-dessus qu'un élément de $\Lambda(V)$ déterminait une classe d'équivalence d'ensembles de valeurs propres. Il détermine de même une classe d'équivalence d'ensembles de caractères d'un tore. De l'identification des tores se déduit une application $\Lambda(V_+)\times\Lambda(V_-)\to\Lambda(V)$. Soit alors $(\Lambda_+,\Lambda_-)\in\Lambda(V_+)\times\Lambda(V_-)$, notons Λ son image par cette application. En utilisant (2) appliqué respectivement à Λ_+, Λ_- et Λ, l'application E devient une application

$$G_{+,reg}(F)/stconj\times G_{-,reg}(F)/stconj\to G_{reg}(F)/stconj.$$

On voit qu'elle ne dépend pas du choix de (Λ_+,Λ_-). C'est la correspondance endoscopique cherchée.

Soient $y_+ \in G_{+,reg}(F)/stconj$, $y_- \in G_{-,reg}(F)/stconj$ et $x \in G_{reg}(F)/conj$. Posons $\xi_+ = p^{st}_{G_+}(y_+)$, $\xi_- = p^{st}_{G_-}(y_-) = \xi_-$, $\xi = \xi_+ \sqcup \xi_-$, supposons que la classe de conjugaison stable de x corresponde à (y_+, y_-), a fortiori $p_G(x) = \xi$. Soit $c \in C(\xi)$ qui paramètre x. Alors

$$(3) \qquad \Delta_{G_+\times G_-,G}((y_+,y_-),x) = \Delta_{\nu_0\delta(q)}(\xi_+,\xi_-,c).$$

Cf. [W4] proposition 1.10. Le η de cette référence vaut ici $2(-1)^{d/2}\nu_0\delta(q)$.

Remarque. Soit $\alpha \in F^\times$. Remplaçons q par αq. Le groupe G reste inchangé. Si l'on conservait le même cocycle et si l'on remplaçait ν_0 par $\alpha\nu_0$, on conserverait le même facteur de transfert. Mais, avec nos définitions, le cocycle peut changer et, par contre, on veut conserver le même ν_0. Donc le facteur de transfert n'est plus le même. Précisément, on voit qu'il est multiplié par $(\delta(q_-),\alpha)_F$.

1.8 Endoscopie pour les groupes linéaires tordus

On considère un espace U sur F de dimension n et on introduit le groupe tordu $(M,\tilde{M})$ correspondant, cf. 1.4. Introduisons d'autre part un espace quadratique (V,q), dont on note G le groupe spécial orthogonal. On suppose $dim(V) = n$ et G quasi-déployé. Le groupe G est un groupe endoscopique de $\tilde{M}$. Il convient ici de préciser les plongements de L-groupes. On renvoie pour cela à [W4] 1.8. Si n est pair, c'est dans cette référence le cas du groupe linéaire tordu avec $d = n$ pair, $d^- = d$, $d^+ = 0$. Si n est impair, c'est le cas du groupe linéaire tordu avec $d = n$ impair, $d^- = d$, $d^+ = 0$ et $\chi = 1$. Pour définir des facteurs de transfert, on doit fixer un élément de base de $\tilde{M}(F)$ (l'élément noté $\tilde{\theta}$ en 1.6). On fixe une base $(u_j)_{j=1,...,n}$ de U et on prend pour point-base l'élément $\boldsymbol{\theta}_n \in \tilde{M}(F)$ défini par

$$\boldsymbol{\theta}_n(u_j,u_k) = (-1)^{k+[(n+1)/2]}\delta_{j,n+1-k},$$

où le dernier terme est le symbole de Kronecker. On doit aussi choisir une classe de conjugaison d'élément nilpotent régulier dans $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{\theta}_n}(F)$. Si n est impair, le groupe $M_{\boldsymbol{\theta}_n}$ est spécial orthogonal "impair", il n'y a qu'une seule classe possible. Si n est pair, le groupe $M_{\boldsymbol{\theta}_n}$ est symplectique, il y a le choix. On prend la classe de l'élément N tel que $N(u_j) = -u_{j-1}$ pour $j = 2,...,n$ et $N(u_1) = 0$. On peut alors définir une correspondance entre classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples réguliers dans $G(F)$ et dans $\tilde{M}(F)$, ainsi qu'un facteur de transfert $\Delta_{G,\tilde{M}}$. La correspondance entre classes de conjugaison stable s'explicite aisément. Supposons n impair. On a les bijections

$$G_{reg}(F)/stconj \stackrel{p^{st}_G}{\to} \Xi_{reg,n-1} \stackrel{p^{st}_{\tilde{M}}}{\leftarrow} \tilde{M}_{reg}(F)/stconj$$

et la correspondance est celle qui vient de ces bijections. Supposons maintenant n pair. On définit une bijection $\xi \mapsto -\xi$ de Ξ_{reg} dans lui-même : si $\xi = (I,(F_{\pm i})_{i\in I},(F_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})$, on pose $-\xi = (I,(F_{\pm i})_{i\in I},(F_i)_{i\in I},(-y_i)_{i\in I})$. On a les applications

$$G_{reg}(F)/stconj \stackrel{p^{st}_G}{\to} \Xi_{reg,n,\delta(q)} \stackrel{\xi\mapsto-\xi}{\to} \Xi_{reg,n} \stackrel{p^{st}_{\tilde{M}}}{\leftarrow} \tilde{M}_{reg}(F)/stconj$$

et la correspondance est celle qui vient de ces applications.

Soient $y \in G_{reg}(F)/stconj$ et $\tilde{x} \in \tilde{M}_{reg}(F)/conj$. Posons $\xi = p_{\tilde{M}}(\tilde{x})$. Supposons d'abord n impair et $p^{st}_G(y) = \xi$. Soit $\gamma \in \Gamma_{imp}(\xi)$ qui paramètre la classe de conjugaison de $\tilde{x}$. Alors, avec la notation de 1.5,

$$(1) \qquad \Delta_{G,\tilde{M}}(y,\tilde{x}) = \Delta(\xi,\gamma).$$

Supposons maintenant n pair et $p_G^{st}(y) = -\xi$. Soit $\gamma \in \Gamma_{pair}(\xi)$ qui paramètre la classe de conjugaison de $\tilde{x}$. Alors

$$(2) \qquad \Delta_{G,\tilde{M}}(y, \tilde{x}) = \Delta(\xi, \gamma).$$

Cf. [W4] proposition 1.10. Dans le cas n pair, le η de cette référence vaut $(-1)^{n/2}$. On doit remplacer les ξ et y_i par $-\xi$ et $-y_i$ car, dans [W4], ces termes paramétraient y et non pas la classe de conjugaison stable de $\tilde{x}$.

2 Quelques formules revisitées

2.1 Multiplicités pour les groupes spéciaux orthogonaux

Soient (V, q) et (V', q') deux espaces quadratiques sur F de dimensions respectives d et d'. On note G et G' leurs groupes spéciaux orthogonaux. On suppose d pair et d' impair. Pour un entier $r \in \mathbb{N}$ introduisons un espace Z_{2r+1} de dimension $2r+1$ sur F, muni d'une base $(z_j)_{j=-r,...,r}$. Pour $\nu \in F^\times$, définissons une forme bilinéaire symétrique $q_{2r+1,\nu}$ sur Z_{2r+1} par

$$q_{2r+1,\nu}(\sum_{i=-r,...,r} \lambda_j z_j, \sum_{j=-r,...,r} \lambda'_j z_j) = 2\nu\lambda_0\lambda'_0 + \sum_{j=1,...,r} (\lambda_{-j}\lambda'_j + \lambda_j\lambda'_{-j}).$$

On a fixé $\nu_0 \in F^\times$ en 1.7. Supposons

- si $d < d'$, (V', q') est isomorphe à $(V, q) \oplus (Z_{d'-d}, q_{d'-d,-\nu_0})$;
- si $d > d'$, (V, q) est isomorphe à $(V', q') \oplus (Z_{d-d'}, q_{d-d',\nu_0})$.

On fixe de tels isomorphismes. Pour fixer les idées, supposons $d' > d$, les constructions étant similaires dans l'autre cas. Alors G s'identifie à un sous-groupe de G'. On pose $r = (d' - d - 1)/2$. On note P le sous-groupe parabolique de G' qui conserve le drapeau de sous-espaces

$$Fz_r \subset Fz_r \oplus Fz_{r-1} \subset ... \subset Fz_r \oplus ... \oplus Fz_1.$$

On note U son radical unipotent et on définit un caractère ψ_U de $U(F)$ par la formule

$$\psi_U(u) = \psi_F(\sum_{j=0,...,r-1} q(uz_j, z_{-j-1})).$$

Le groupe G est inclus dans P et ψ_U est invariant par conjugaison par $G(F)$.

Soient $\sigma \in Temp(G(F))$ et $\sigma' \in Temp(G'(F))$. On note $Hom_{G,\psi_F}(\sigma', \sigma)$ l'espace des applications linéaires $\varphi : E_{\sigma'} \to E_\sigma$ telles que

$$\varphi(\sigma'(ug)e) = \psi_U(u)\sigma(g)\varphi(e)$$

pour tous $u \in U(F)$, $g \in G(F)$ et $e \in E_{\sigma'}$. D'après [AGRS] (complété par [W5]) et [GGP] corollaire 15.2, cet espace est de dimension au plus 1. On pose

$$m(\sigma, \sigma') = m(\sigma', \sigma) = dim(Hom_{G,\psi_F}(\sigma', \sigma)).$$

Ce nombre est indépendant de ψ_F.

Dans [W2], on a calculé cette dimension par une formule intégrale. Rappelons-la. Notons $\underline{\mathcal{T}}$ l'ensemble des sous-tores T de G (on suppose encore $d' > d$) pour lesquels il existe une décomposition orthogonale $V = W_T \oplus V_T$ de sorte que les conditions (1) à (4) ci-dessous soient vérifiées. On pose $V'_T = V_T \oplus Z_{2r+1}$ et on note G_T, G_{V_T} et $G_{V'_T}$ les groupes spéciaux orthogonaux de W_T, V_T et V'_T.

(1) T est anisotrope.

(2) $dim(W_T)$ est paire.

(3) T est inclus dans G_T et c'en est un sous-tore maximal.

(4) Les groupes G_{V_T} et $G_{V'_T}$ sont quasi-déployés.

Pour $T \in \underline{\mathcal{T}}$, on pose

$$W(G,T) = Norm_{G(F)}(T)/Z_{G(F)}(T).$$

Pour $t \in T(F)$, on pose $\Delta(t) = |det((1-t)_{|W_T})|_F$. Supposons t en position générale. Alors $G'_t = T \times G_{V'_T}$ et $G_t = T \times G_{V_T}$. La représentation σ' admet un caractère $\Theta_{\sigma'}$. Rappelons dans ce contexte un résultat de Harish-Chandra. Pour $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}'_t(F))$, on définit l'intégrale orbitale $J_{\mathcal{O}}$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}'_t(F))$ et sa transformée de Fourier. Celle-ci est une distribution localement intégrable, donc s'identifie à une fonction $\hat{J}_{\mathcal{O}}$. Alors il existe une famille $(c_{\sigma',\mathcal{O}}(t))_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}'_t(F))}$ de nombres complexes de sorte que, pour X régulier dans un voisinage assez petit de 0 dans $\mathfrak{g}'_t(F)$, on ait l'égalité

$$(5) \qquad \Theta_{\sigma'}(texp(X)) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}'_t(F))} c_{\sigma',\mathcal{O}}(t)\hat{J}_{\mathcal{O}}(X).$$

Evidemment, pour que ceci ait un sens précis, on doit normaliser les mesures et la transformation de Fourier utilisée, on renvoie pour cela à [W1] 1.2 et 2.6. On a $Nil(\mathfrak{g}'_t(F)) = Nil(\mathfrak{g}_{V'_T}(F))$. Puisque le groupe $G_{V'_T}$ est quasi-déployé et que $dim(V'_T)$ est impaire, il y a une unique orbite nilpotente régulière. Notons-la $\mathcal{O}_{reg}$. On pose $c_{\sigma'}(t) = c_{\sigma',\mathcal{O}_{reg}}(t)$. Cela définit une fonction $c_{\sigma'}$ presque partout sur $T(F)$. Le même procédé s'applique pour définir une fonction c_σ, à ceci près que, parce que $dim(V_T)$ est paire, il peut y avoir plusieurs orbites régulières dans $Nil(\mathfrak{g}_{V_T}(F))$. Précisons ce point. Si $dim(V_T) \leq 2$, il n'y a encore qu'une orbite régulière $\mathcal{O}_{reg}$ et on définit $c_\sigma(t) = c_{\sigma,\mathcal{O}_{reg}}(t)$. Supposons $dim(V_T) \geq 4$. L'hypothèse que $G_{V'_T}$ est quasi-déployé implique qu'il existe un élément $v_0 \in V_T$ tel que $q(v_0,v_0) = 2\nu_0$. Fixons un tel élément et notons G'_0 le groupe spécial orthogonal de l'hyperplan orthogonal à Fv_0. La même hypothèse implique que G'_0 est déployé. Il y a donc une unique orbite nilpotente régulière dans $\mathfrak{g}'_0(F)$. Fixons un point de cet orbite. Alors sa $G_{V_T}(F)$-orbite est encore régulière dans $\mathfrak{g}_{V_T}(F)$, on la note $\mathcal{O}_{\nu_0}$ (c'est l'orbite paramétrée par ν_0 dans le paramétrage évoqué en 1.7). On pose $c_\sigma(t) = c_{\sigma,\mathcal{O}_{\nu_0}}(t)$.

Le groupe $G(F)$ agit par conjugaison sur $\underline{\mathcal{T}}$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{T}$ des orbites. Posons

$$m_{geom}(\sigma,\sigma') = m_{geom}(\sigma',\sigma) = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(G,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_\sigma(t)c_{\sigma'}(t)D^G(t)\Delta(t)^r dt.$$

Cette expression est absolument convergente et le théorème principal de [W2] affirme que l'on a l'égalité

$$m_{geom}(\sigma,\sigma') = m(\sigma,\sigma').$$

Remarque. Dans les définitions de [W1], c'est l'orbite $\mathcal{O}_{-\nu_0}$ et non $\mathcal{O}_{\nu_0}$ qui intervient. Ce n'est plus le cas ici car on a glissé le signe $-$ dans les hypothèses concernant le plongement de (V,q) dans (V',q').

2.2 Reformulation de $m_{geom}(\sigma,\sigma')$

Notons $\mathcal{D}(q,q')$ l'ensemble des couples $(\mathbf{d},\boldsymbol{\delta})\in\mathbb{N}\times F^\times/F^{\times,2}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) $\mathbf{d}$ est pair et $0\leq \mathbf{d}\leq inf(d,d')$;

(2) si G ou G' n'est pas quasi-déployé, $\mathbf{d}\geq 2$; si G et G' sont quasi-déployés et $\mathbf{d}=0$, alors $\boldsymbol{\delta}=1$;

(3) si $\mathbf{d}=inf(d,d')$ (ce qui entraîne par parité $\mathbf{d}=d<d'$), $\boldsymbol{\delta}=\delta(q)$;

(4) si $\mathbf{d}=2$, $\boldsymbol{\delta}\neq 1$.

Pour $(\mathbf{d},\boldsymbol{\delta})\in\mathcal{D}(q,q')$, considérons les espaces quadratiques (W,q_W) tels que $dim(W)=\mathbf{d}$ et $\delta(q_W)=\boldsymbol{\delta}$. Si $\mathbf{d}=0$, il n'y en a qu'un, évidemment. Si $\mathbf{d}\neq 0$, il y en a deux, à équivalence près, que l'on distingue selon leurs indices de Witt. D'autre part, pour un espace quadratique (W,q_W) considérons la condition suivante :

(H) si $d<d'$, il existe un espace quadratique (V_1,q_1) tel que (V,q) soit isomorphe à $(W,q_W)\oplus(V_1,q_1)$ et que les groupes spéciaux orthogonaux de (V_1,q_1) et de $(V_1,q_1)\oplus(Z_{2r+1},q_{2r+1,-\nu_0})$ soient quasi-déployés ; si $d>d'$, il existe un espace quadratique (V_1,q_1) tel que (V',q') soit isomorphe à $(W,q_W)\oplus(V_1,q_1)$ et que les groupes spéciaux orthogonaux de (V_1,q_1) et de $(V_1,q_1)\oplus(Z_{2r+1},q_{2r+1,\nu_0})$ soient quasi-déployés.

Montrons que

(5) pour tout $(\mathbf{d},\boldsymbol{\delta})\in\mathcal{D}(q,q')$, il existe à équivalence près un unique espace quadratique (W,q_W) qui vérifie la condition (H) ainsi que les égalités $dim(W)=\mathbf{d}$, $\delta(q_W)=\boldsymbol{\delta}$.

On suppose pour fixer les idées $d<d'$, le cas opposé étant similaire. Si $\mathbf{d}=0$, l'espace nul convient d'après la condition (2). Si $\mathbf{d}=d>0$, un seul espace convient, à savoir $(W,q_W)=(V,q)$. Supposons $0<\mathbf{d}<d$. Montrons d'abord que la condition (H) équivaut à

(H') il existe un espace quadratique (V_1',q_1') tel que son groupe spécial orthogonal soit déployé et que (V',q') soit isomorphe à $(W,q_W)\oplus(V_1',q_1')$.

Rappelons que pour un espace quadratique (V_1',q_1') de dimension impaire, les trois propriétés suivantes sont équivalentes : son groupe spécial orthogonal est quasi-déployé ; il est déployé ; l'espace (V_1',q_1') est somme orthogonale d'une droite et de plans hyperboliques. Si (H) est vérifié, (H') l'est aussi car l'espace $(V_1',q_1')=(V_1,q_1)\oplus(Z_{2r+1},q_{2r+1,-\nu_0})$ convient. Inversement, supposons (H') vérifiée. Puisque $\mathbf{d}<d$, l'espace (V_1',q_1') peut se décomposer en somme orthogonale d'un espace de dimension $d-\mathbf{d}-1$ et de $r+1$ plans hyperboliques. A fortiori, il existe un espace quadratique (V_1,q_1) de dimension $d-\mathbf{d}$ tel que $(V_1',q_1')=(V_1,q_1)\oplus(Z_{2r+1},q_{2r+1,-\nu_0})$. Cette égalité entraîne que (V_1,q_1) est somme orthogonale de plans dont au plus un n'est pas hyperbolique. Donc le groupe spécial orthogonal de (V_1,q_1) est quasi-déployé. D'autre part, d'après le théorème de Witt, l'égalité $(V',q')=(W,q_W)\oplus(V_1',q_1')$ entraîne $(V,q)=(W,q_W)\oplus(V_1,q_1)$. Cela vérifie (H).

Cela étant, soit (W,q_W) ayant les dimension et discriminant requis. A équivalence près, il existe un unique espace quadratique (V_1',q_1') tel que son groupe spécial orthogonal soit déployé et que l'espace $(V_2',q_2')=(W,q_W)\oplus(V_1',q_1')$ ait le même discriminant que (V',q') : c'est la somme de plans hyperboliques et d'une droite sur laquelle la forme est uniquement déterminée par cette condition. Le fait que (V_2',q_2') soit isomorphe à (V',q') se lit sur les indices de Witt. Quand on remplace (W,q_W) par l'espace qui a même dimension et discriminant, mais l'indice de Witt opposé, cela ne change pas (V_1',q_1'), mais cela change l'indice de Witt de (V_2',q_2'). Il y a donc un et un seul choix de (W,q_W) pour lequel l'indice de Witt de (V_2',q_2') est égal à celui de (V',q'). Cela prouve (5).

Pour tout $(\mathbf{d},\boldsymbol{\delta})\in\mathcal{D}(q,q')$, on note $(W_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}},q_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}})$ l'espace quadratique dont (1) affirme l'existence, que l'on réalise comme un sous-espace de (V',q') ou (V,q) conformément à la propriété (H).

A tout $T\in\underline{\mathcal{T}}$ est associé un espace quadratique (W_T,q_T), où q_T est la restriction de q à W_T. Montrons que :

(6) l'ensemble des classes d'équivalence d'espaces (W_T,q_T) quand T décrit $\underline{\mathcal{T}}$ est égal à celui des classes d'équivalence d'espaces $(W_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}},q_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}})$ quand $(\mathbf{d},\boldsymbol{\delta})$ décrit $\mathcal{D}(q,q')$.

Le second ensemble est inclus dans le premier : le groupe spécial orthogonal d'un espace $(W_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}},q_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}})$ contient au moins un sous-tore maximal anisotrope (grâce à (4)) et un tel tore appartient à $\underline{\mathcal{T}}$. Montrons que le premier ensemble est inclus dans le second. D'après 2.1(4), tout espace (W_T,q_T) vérifie (H). Il suffit donc de prouver que le couple formé de la dimension de W et du discriminant de q_T appartient à $\mathcal{D}(q,q')$, ce qui est immédiat. Cela prouve (6).

D'après (6), on peut supposer que, pour tout $T\in\mathcal{T}$, l'espace (W_T,q_T) est l'un des espaces $(W_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}},q_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}})$. Cela décompose $\mathcal{T}$ en union disjointe de sous-ensembles $\mathcal{T}_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}$. Fixons maintenant $(\mathbf{d},\boldsymbol{\delta})\in\mathcal{D}(q,q')$ et considérons la contribution de l'ensemble $\mathcal{T}_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}$ à $m_{geom}(\sigma,\sigma')$. Supposons d'abord $0<\mathbf{d}<inf(d,d')$ et, pour fixer les idées, supposons $d<d'$. Notons $G^+_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}$ le groupe orthogonal de $(W_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}},q_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}})$ et $G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}$ le groupe spécial orthogonal. L'ensemble $\mathcal{T}_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}$ est un ensemble de représentants des sous-tores maximaux et anisotropes de $G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}$ pour la relation d'équivalence suivante : deux tores sont équivalents s'ils sont conjugués par un élément de $G(F)$. On vérifie que cette relation équivaut à la conjugaison par un élément de $G^+_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)$. De même, pour un tel tore T, on voit que le nombre d'éléments de $W(G,T)$ est le même que celui de $W(G^+_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}},T)$, cet ensemble étant défini de façon évidente. Pour une fonction f sur $G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)_{ani}$, invariante par conjugaison par $G^+_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)$, on a alors l'égalité

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}}|W(G,T)|^{-1}\int_{T(F)}f(t)dt=\int_{G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)_{ani}/conj^+}f(x)dx.$$

On a défini les fonctions c_σ et $c_{\sigma'}$ sur les éléments de $\mathcal{T}_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}$, mais la même définition permet de les définir sur l'ensemble $G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)_{ani}$ tout entier. Elles sont invariantes par l'action de $G^+_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)$: cela résulte du fait que la conjugaison par un élément de $G^+_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)$ peut se réaliser par celle d'un élément de $G(F)$ et du fait que toute orbite nilpotente régulière de l'algèbre de Lie d'un groupe spécial orthogonal est invariante par l'action du groupe orthogonal tout entier. Il en est de même des fonctions D^G et Δ. La contribution de $\mathcal{T}_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}$ à $m_{geom}(\sigma,\sigma')$ peut donc s'écrire

$$(7)\qquad\int_{G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)_{ani}/conj^+}c_\sigma(x)c_{\sigma'}(x)D^G(x)\Delta(x)^r dx.$$

Si $\mathbf{d}=0$, la contribution de $\mathcal{T}_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}$ a trivialement la même forme. Considérons maintenant le cas $\mathbf{d}=d<d'$. Dans ce cas, on voit que ce n'est plus la conjugaison par $G^+_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)$ qui intervient mais seulement celle par $G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)$. La fonction c_σ n'a d'ailleurs plus de raison d'être invariante par l'action du groupe orthogonal. On obtient dans ce cas

$$\int_{G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)_{ani}/conj}c_\sigma(x)c_{\sigma'}(x)D^G(x)\Delta(x)^r dx.$$

Mais, si l'on définit une fonction c_σ sur $G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)_{ani}/conj^+$ par $c_\sigma(x)=c_\sigma(x')+c_\sigma(x'')$, où x' et x'' sont les deux éléments de $G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)_{ani}/conj$ d'image x, on retrouve la formule (7).

Posons

$$\mathcal{C}(q,q') = \sqcup_{(\mathbf{d},\boldsymbol{\delta})\in\mathcal{D}(q,q')} G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)_{ani}/conj^{+}$$

et

$$\Xi^*(q,q') = \sqcup_{(\mathbf{d},\boldsymbol{\delta})\in\mathcal{D}(q,q')} \Xi^*_{reg,\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}.$$

D'après 1.4, $\mathcal{C}(q,q')$ est un revêtement de $\Xi^*(q,q')$. Avec les définitions précédentes, on obtient l'égalité

$$(8) \qquad m_{geom}(\sigma,\sigma') = \int_{\mathcal{C}(q,q')} c_\sigma(x)c_{\sigma'}(x)D^G(x)\Delta(x)^r dx.$$

2.3 Facteurs ϵ de paires

Soient U et U' deux espaces vectoriels sur F de dimensions d et d'. On suppose d pair et d' impair. On note M et M' leurs groupes linéaires et on introduit les ensembles $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'$ comme en 1.2. Posons $r = (d'-d-1)/2$ si $d' > d$, $r = (d-d'-1)/2$ si $d > d'$. Fixons un isomorphisme $U' = U \oplus Z_{2r+1}$ si $d' > d$, $U = U' \oplus Z_{2r+1}$ si $d > d'$, avec la notation introduite en 2.1. Fixons un élément $\nu_1 \in F^\times$. Si $d' > d$, on plonge $\tilde{M}$ dans $\tilde{M}'$ en identifiant toute forme bilinéaire $\tilde{m}$ sur U à la "somme directe" de $\tilde{m}$ et de la forme $q_{2r+1,-\nu_1}$ sur Z_{2r+1}. Si $d > d'$, on plonge $\tilde{M}'$ dans $\tilde{M}$ en identifiant toute forme bilinéaire $\tilde{m}'$ sur U' à la somme directe de $\tilde{m}'$ et de la forme q_{2r+1,ν_1} sur Z_{2r+1}.

Soit $\pi \in Temp(M(F))$, supposons π autoduale, c'est-à-dire isomorphe à sa contragrédiente $\pi^\vee$. Soit de même $\pi' \in Temp(M'(F))$, supposons π' autoduale. On note ω_π et $\omega_{\pi'}$ les caractères centraux de π et π' et $\epsilon(s,\pi\times\pi',\psi_F)$ le facteur ϵ défini par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika. On pose

$$\epsilon_{\nu_1}(\pi,\pi') = \epsilon_{\nu_1}(\pi',\pi) = \omega_\pi((-1)^{(d'-1)/2}2\nu_1)\omega_{\pi'}((-1)^{1+d/2}2\nu_1)\epsilon(1/2,\pi\times\pi',\psi_F).$$

Remarque. Ici encore, si $d' > d$, la formule n'est pas la même que celle de [W3] en ce qui concerne les signes. Mais on a aussi modifié dans ce cas le plongement de $\tilde{M}$ dans $\tilde{M}'$.

Dans [W3], on a calculé ce nombre $\epsilon_{\nu_1}(\pi,\pi')$ par une formule intégrale que nous allons rappeler. On peut prolonger la représentation π à $\tilde{M}(F)$. C'est-à-dire que l'on peut définir une application $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$ dans le groupe des automorphismes linéaires de E_π de sorte que $\tilde{\pi}(m\tilde{m}m') = \pi(m)\tilde{\pi}(\tilde{m})\pi(m')$ pour tous $m,m' \in M(F)$, $\tilde{m} \in \tilde{M}(F)$. On peut supposer $\tilde{\pi}$ unitaire. Alors $\tilde{\pi}$ est uniquement définie à une homothétie près de rapport un nombre complexe de module 1. Pour déterminer entièrement $\tilde{\pi}$, on utilise la théorie des modèles de Whittaker. Fixons une base $(u_j)_{j=1,...,d}$ de U, qui permet d'identifier M au groupe matriciel GL_d. On note N le groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures. On appelle fonctionnelle de Whittaker sur E_π toute forme linéaire $\phi : E_\pi \to \mathbb{C}$ telle que $\phi(\pi(n)e) = \psi_F(\sum_{j=1,...,d-1} n_{j,j+1})\phi(e)$ pour tous $n \in N(F)$ et $e \in E_\pi$. On sait que l'espace de ces fonctionnelles est une droite. On a défini un élément $\boldsymbol{\theta}_d$ de $\tilde{M}(F)$ en 1.8. On vérifie que l'application $\phi \mapsto \phi \circ \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_d)$ conserve la droite des fonctionnelles de Whittaker. On peut alors normaliser $\tilde{\pi}$ de sorte que cette application soit l'identité. On vérifie que cette normalisation dépend de ψ_F mais pas de la base $(u_j)_{j=1,...,d}$ choisie. On prolonge de la même façon la représentation π' en une représentation $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{M}'(F)$, que l'on normalise de même.

Supposons pour fixer les idées $d < d'$. On va définir un ensemble $\underline{\mathcal{T}}$ de "sous-tores" de $\tilde{M}$. Considérons une décomposition $U = W_T \oplus U_T$ telle que $dim(W_T)$ soit paire. Notons $(M_T, \tilde{M}_T)$ le groupe tordu associé à W_T. Soit $(T, \tilde{T}_W)$ un sous-tore tordu maximal de $(M_T, \tilde{M}_T)$. Une façon de définir cette notion est de dire qu'il existe un élément fortement régulier $\tilde{m} \in \tilde{M}_T(F)$ de sorte que, en notant $T^\flat$ le commutant de $\tilde{m}$ dans M_T, T soit le commutant dans M_T de $T^\flat$ et que $\tilde{T}_W$ soit égal à $T\tilde{m}$. Remarquons que $T^\flat$ ne dépend que de $\tilde{T}_W$ et pas de $\tilde{m}$. On suppose $T^\flat$ anisotrope. Soit $q_{M,T}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur U_T. On note $\tilde{T}$ l'ensemble des éléments de $\tilde{M}$ qui sont somme directe d'un élément de $\tilde{T}_W$ sur W_T et de l'élément $q_{M,T}$ sur U_T. On note $U'_T = U_T \oplus Z_{2r+1}$ et $q_{M',T}$ la somme directe de $q_{M,T}$ et de $q_{2r+1,-\nu_1}$. On suppose que les groupes spéciaux orthogonaux des formes $q_{M,T}$ et $q_{M',T}$ sont quasi-déployés. L'ensemble $\underline{\mathcal{T}}$ est l'ensemble des "sous-tores" $\tilde{T}$ vérifiant toutes ces conditions. Remarquons qu'à tout tel élément $\tilde{T}$ est associé un sous-tore maximal T de M_T ainsi qu'un automorphisme de ce tore que l'on note θ : c'est l'élément $\theta_{\tilde{t}}$ pour n'importe quel élément $\tilde{t} \in \tilde{T}$. On note T_θ la composante neutre du sous-groupe des points fixes de θ dans T (c'est le tore noté $T^\flat$ ci-dessus). On note $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ le quotient de $\tilde{T}(F)$ par la relation d'équivalence : deux éléments sont équivalents si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de $T(F)$. On munit $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ d'une mesure de sorte que, pour tout $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)_{/\theta}$, l'application $t \mapsto t\tilde{t}$ de $T_\theta(F)$ dans $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ conserve localement les mesures. Considérant que le groupe M agit par conjugaison sur $\tilde{M}$, on définit le normalisateur $Norm_M(\tilde{T})$. On note $G_{q_{M,T}}$ le groupe spécial orthogonal de $(U_T, q_{M,T})$. On pose

$$W(M, \tilde{T}) = Norm_M(\tilde{T})(F)/(T(F) \times G_{q_{M,T}}(F)).$$

Ce groupe est fini. Les représentations $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ admettent des caractères, lesquels ont localement des développements comme dans le cas des groupes non tordus ([C] théorème 3). On peut copier les définitions de 2.1 (en remplaçant ν_0 par ν_1) pour obtenir des fonctions $c_{\tilde{\pi}}$ et $c_{\tilde{\pi}'}$ presque partout sur $\tilde{T}(F)$. Il reste à définir une fonction Δ sur $\tilde{T}(F)$. Pour cela, soit $\tilde{t}$ un élément fortement régulier de $\tilde{T}(F)$. Notons $\xi \in \Xi$ son image par l'application $p_{\tilde{M}_T}$ de 1.4. On pose $\Delta(\tilde{t}) = \Delta(\xi)$.

Le groupe $M(F)$ agit par conjugaison sur $\underline{\mathcal{T}}$. On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{T}$ des classes d'équivalence. Posons

$$\epsilon_{geom,\nu_1}(\pi, \pi') = \epsilon_{geom,\nu_1}(\tilde{\pi}', \tilde{\pi}) = \sum_{\tilde{T} \in \mathcal{T}} |2|_F^{r^2+r+rdim(U_T)} |W(M, \tilde{T})|^{-1}$$

$$\int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}) c_{\tilde{\pi}'}(\tilde{t}) D^{\tilde{M}}(\tilde{t}) \Delta(\tilde{t})^r d\tilde{t}.$$

Cette expression est absolument convergente et le théorème principal de [W3] affirme l'égalité

$$\epsilon_{geom,\nu_1}(\pi, \pi') = \epsilon_{\nu_1}(\pi, \pi').$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de résultats issus de la formule des traces locale tordue. Cette formule n'existe pas encore dans la littérature. On a admis les résultats en question.

2.4 Reformulation de $\epsilon_{geom,\nu_1}(\pi,\pi')$

Notons $\mathcal{D}(d,d')$ l'ensemble des entiers $\mathbf{d}$ qui vérifient la condition

(1) $\mathbf{d}$ est pair et $0\leq \mathbf{d}\leq inf(d,d')$.

Pour tout élément $\mathbf{d}$ de cet ensemble, posons

$$\mathcal{M}(\mathbf{d})=\left\{\begin{array}{cc} F^{\times}/F^{\times,2}, & \text{si } \mathbf{d}<d,\\ \{-\nu_1\}, & \text{si } \mathbf{d}=d.\end{array}\right.$$

Supposons $d<d'$ (des considérations similaires s'appliquent au cas $d>d'$ en échangeant les rôles de M et M' et en changeant ν_1 en $-\nu_1$). Pour $\mathbf{d}\in\mathcal{D}(d,d')$ et $\mu\in\mathcal{M}(\mathbf{d})$, fixons une décomposition $U=W_{\mathbf{d}}\oplus U_{\mathbf{d}}$, où $dim(W_{\mathbf{d}})=\mathbf{d}$. Une preuve similaire à celle de 2.2(5) montre qu'à équivalence près,il existe une unique forme bilinéaire symétrique non dégénérée $q_{\mathbf{d},\mu}$ sur $U_{\mathbf{d}}$ telle que, d'une part le groupe spécial orthogonal de $(U_{\mathbf{d}},q_{\mathbf{d},\mu})$ soit quasi-déployé, d'autre part la forme $q_{\mathbf{d},\mu}\oplus q_{2r+1,-\nu_1}$ sur $U_{\mathbf{d}}\oplus Z_{2r+1}$ soit équivalente à la somme de plans hyperboliques et de la forme $(\lambda,\lambda')\mapsto 2\mu\lambda\lambda'$ sur F. On fixe une telle forme.

Soit $\tilde{T}\in\underline{\mathcal{T}}$. On vérifie qu'il existe un unique couple $(\mathbf{d},\mu)$, avec $\mathbf{d}\in\mathcal{D}(d,d')$ et $\mu\in\mathcal{M}(\mathbf{d})$, tel que le triplet $(W_T,U_T,q_{M,T})$ soit conjugué par un élément de $M(F)$ à $(W_{\mathbf{d}},U_{\mathbf{d}},q_{\mathbf{d},\mu})$. On peut donc supposer que pour tout $\tilde{T}\in\mathcal{T}$, le triplet $(W_T,U_T,q_{M,T})$ est égal à $(W_{\mathbf{d}},U_{\mathbf{d}},q_{\mathbf{d},\mu})$ pour un tel couple $(\mathbf{d},\mu)$. Cela décompose $\mathcal{T}$ en union disjointe de sous-ensembles $\mathcal{T}_{\mathbf{d},\mu}$. Fixons $(\mathbf{d},\mu)$ et considérons la contribution de $\mathcal{T}_{\mathbf{d},\mu}$ à $\epsilon_{geom,\nu_1}(\pi,\pi')$. Introduisons le groupe tordu $(M_{\mathbf{d}},\tilde{M}_{\mathbf{d}})$ associé à $W_{\mathbf{d}}$. A chaque $\tilde{T}\in\mathcal{T}_{\mathbf{d},\mu}$ est associé un sous-tore tordu maximal $(T_{\mathbf{d}},\tilde{T}_{\mathbf{d}})$ (que l'on notera simplement $\tilde{T}_{\mathbf{d}}$) de ce groupe tordu de sorte que $\tilde{T}$ soit l'ensemble des sommes directes d'un élément de $\tilde{T}_{\mathbf{d}}$ sur $W_{\mathbf{d}}$ et de $q_{\mathbf{d},\mu}$ sur $U_{\mathbf{d}}$. Quand $\tilde{T}$ décrit $\mathcal{T}_{\mathbf{d},\mu}$, le tore $\tilde{T}_{\mathbf{d}}$ décrit un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $M_{\mathbf{d}}(F)$ dans l'ensemble des sous-tores tordus maximaux $\tilde{T}'$ de $\tilde{M}_{\mathbf{d}}$ tels que T'_{θ} soit anisotrope. Le groupe $Norm_M(\tilde{T})$ est le produit de $Norm_{M_{\mathbf{d}}}(\tilde{T}_{\mathbf{d}})$ et du groupe orthogonal $G^+_{q_{\mathbf{d},\mu}}$ de l'espace quadratique $(U_{\mathbf{d}},q_{\mathbf{d},\mu})$. Donc

$$W(M,\tilde{T})=W(M_{\mathbf{d}},\tilde{T}_{\mathbf{d}})\times(G^+_{q_{\mathbf{d},\mu}}(F)/G_{q_{\mathbf{d},\mu}}(F)).$$

Le dernier quotient a 2 éléments si $\mathbf{d}<d$, un seul si $\mathbf{d}=d$. Cela conduit à poser

$$c(\mathbf{d})=\left\{\begin{array}{cc} 1/2, & \text{si } \mathbf{d}<inf(d,d'),\\ 1, & \text{si } \mathbf{d}=inf(d,d').\end{array}\right.$$

D'autre part, les fonctions $c_{\tilde{\pi}}$ et $c_{\tilde{\pi}'}$ sur $\tilde{T}(F)$ s'identifient à des fonctions sur $\tilde{T}_{\mathbf{d}}(F)$. On peut en fait étendre leur définition et les définir sur tout $\tilde{M}_{\mathbf{d},reg}(F)$. Il faut prendre garde au fait qu'elles dépendent de μ. Plus précisément, la donnée de μ définit un plongement de $\tilde{M}_{\mathbf{d}}$ dans $\tilde{M}$: on identifie tout élément $\tilde{m}_{\mathbf{d}}\in\tilde{M}_{\mathbf{d}}$ à l'élément de $\tilde{M}$ qui est la somme directe de $\tilde{m}_{\mathbf{d}}$ sur $W_{\mathbf{d}}$ et de $q_{\mathbf{d},\mu}$ sur $U_{\mathbf{d}}$. Posons

$$\mathcal{X}(d,d')=\sqcup_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}(d,d')}(\mathcal{M}(\mathbf{d})\times\tilde{M}_{\mathbf{d}}(F)_{ani}/conj).$$

On peut considérer que les fonctions $c_{\tilde{\pi}}$ et $c_{\tilde{\pi}'}$ sont définies sur cette variété. Il en est de même des fonctions $D^{\tilde{M}}$ et Δ. Il y a aussi une fonction évidente sur cette variété qui associe à tout point l'indice $\mathbf{d}$ de la composante qui contient ce point. Avec ces définitions, on obtient l'égalité

$$(1)\qquad \epsilon_{geom,\nu_1}=\int_{\mathcal{X}(d,d')}c(\mathbf{d})|2|_F^{r^2+r+r(d-\mathbf{d})}c_{\tilde{\pi}}(\tilde{x})c_{\tilde{\pi}'}(\tilde{x})D^{\tilde{M}}(\tilde{x})\Delta(\tilde{x})^r d\tilde{x}.$$

Posons

$$\Xi^*(d,d') = \sqcup_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}(d,d')}\Xi^*_{reg,\mathbf{d}}.$$

D'après 1.4, il y a une application naturelle de $\mathcal{X}(d,d')$ vers $\Xi^*(d,d')$ qui est un revêtement analytique. On prendra garde au fait que cette application ne préserve pas localement les mesures : le calcul de 1.4 montre que le jacobien est $|2|_F^{\mathbf{d}/2}$.

3 Endoscopie

3.1 Rappels sur le calcul des fonctions $c_{\sigma,\mathcal{O}}$

Considérons un espace quadratique (V',q') de dimension d' impaire. Soit $V' = W\oplus V'_\sharp$ une décomposition orthogonale telle que $dim(W)$ soit paire. On note G', G_W et $G'_\sharp$ les groupes spéciaux orthogonaux de V', W, $V'_\sharp$. On suppose $G'_\sharp$ déployé. Soient σ' une représentation admissible irréductible de $G'(F)$ et t un élément semi-simple de $G_W(F)$ tel que $G'_t = T\times G'_\sharp$, où T est un sous-tore de G_W. Le caractère $\Theta_{\sigma'}$ se développe au voisinage de t selon 2.1(5), et l'ensemble $Nil(\mathfrak{g}'_t(F)) = Nil(\mathfrak{g}'_\sharp(F))$ contient une unique orbite régulière $\mathcal{O}_{reg}$. Nous allons rappeler une formule qui calcule le coefficient $c_{\sigma',\mathcal{O}_{reg}}(t)$. Fixons un sous-tore déployé maximal $T_\sharp$ de $G'_\sharp$ et un élément régulier $Y_\sharp\in\mathfrak{t}_\sharp(F)$. On définit la fonction $D^{G'_\sharp}$ sur $\mathfrak{g}'_\sharp(F)$ comme on l'a définie sur $G'_\sharp(F)$. On a alors l'égalité

$$(1)\qquad c_{\sigma',\mathcal{O}_{reg}}(t) = |W(G'_\sharp,T_\sharp)|^{-1}lim_{\lambda\in F^\times,\lambda\to 0}\Theta_{\sigma'}(texp(\lambda Y_\sharp))D^{G'_\sharp}(\lambda Y_\sharp)^{1/2}$$

cf. [W1] p.115.

Considérons maintenant un espace quadratique (V,q) de dimension d paire. Soit $V = W\oplus V_\sharp$ une décomposition orthogonale telle que $dim(W)$ soit paire. On note G, G_W et $G_\sharp$ les groupes spéciaux orthogonaux de V, W, $V_\sharp$. On suppose $G_\sharp$ quasi-déployé. Soient σ une représentation admissible irréductible de $G(F)$ et t un élément semi-simple de $G_W(F)$ tel que $G_t = T\times G_\sharp$, où T est un sous-tore de G_W. Fixons un sous-tore maximal $T_\sharp$ de $G_\sharp$ contenu dans un sous-groupe de Borel, et un élément régulier $Y_\sharp\in\mathfrak{t}_\sharp(F)$. Si $dim(V_\sharp)\leq 2$, il n'y a encore qu'une orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}_{reg}$ dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ et on a l'égalité

$$(2)\qquad c_{\sigma,\mathcal{O}_{reg}}(t) = |W(G_\sharp,T_\sharp)|^{-1}lim_{\lambda\in F^\times,\lambda\to 0}\Theta_{\sigma}(texp(\lambda Y_\sharp))D^{G_\sharp}(\lambda Y_\sharp)^{1/2}.$$

Supposons maintenant $dim(V_\sharp)\geq 4$. Notons $q_\sharp$ la restriction de q à $V_\sharp$ et $\delta_\sharp$ son discriminant. Si $\delta_\sharp = 1$, l'ensemble des orbites nilpotentes régulières dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ est paramétré par $\mathcal{N}_\sharp = F^\times/F^{\times,2}$, cf. 1.7. On pose $\eta_\sharp = 1$ et on note $\mathcal{F}_\sharp$ l'ensemble des couples (F',F') où F' est une extension quadratique de F (il s'agit de vraies extensions quadratiques, l'algèbre $F' = F\oplus F$ est exclue ; la même remarque vaut ci-dessous). Si $\delta_\sharp\neq 1$, posons $E_\sharp = F(\sqrt{\delta_\sharp})$. Fixons $\eta_\sharp\in F^\times$ tel que $q_\sharp$ soit équivalente à une somme orthogonale de plans hyperboliques et de l'espace $E_\sharp$ muni de la forme $(v,v')\mapsto \eta_\sharp trace_{E_\sharp/F}(\tau_{E_\sharp/F}(v)v')$. L'ensemble des orbites nilpotentes régulières dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ est paramétré par $\mathcal{N}_\sharp = \eta_\sharp Norm_{E_\sharp/F}(E_\sharp^\times)/F^{\times,2}\subset F^\times/F^{\times,2}$. Considérons l'ensemble des couples d'extensions quadratiques $(F_1,F_2) = (F(\sqrt{\delta_1}),F(\sqrt{\delta_2}))$ de F tels que $\delta_1\delta_2 = \delta_\sharp$.On y introduit la relation d'équivalence : (F_1,F_2) est équivalent à (F_2,F_1). On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{F}_\sharp$ des classes d'équivalence. On a paramétré en 1.4 les classes de conjugaison d'éléments semi-simples réguliers de $G_\sharp(F)$. Un paramétrage analogue vaut pour les éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}_\sharp(F)$: il suffit de remplacer les données y_i telles que $y_i\tau_i(y_i)=1$ par des données Y_i telles que $Y_i+\tau_i(Y_i)=0$. Posons $J=\{1,...,dim(V_\sharp)/2\}$. Pour $j\in J$ posons $F_{\pm j}=F$ et, si $j\geq 3$, $F_j=F\oplus F$. Considérons un couple $(F_1,F_2)\in\mathcal{F}_\sharp$. Fixons une famille $(Y_j)_{j\in J}$, en "position générale", telle que, pour tout $j\in J$, Y_j soit un élément de F_j tel que $Y_j+\tau_j(Y_j)=0$. Fixons deux familles $c^+=(c_j^+)_{j=1,2}$ et $c^-=(c_j^-)_{j=1,2}$ d'éléments de $F^\times$ telles que pour $\epsilon=\pm$,

$$sgn_{F_1/F}(c_1^\epsilon)=\epsilon sgn_{F_1/F}(\eta_\sharp(1-Norm_{F_1/F}(Y_1)Norm_{F_2/F}(Y_2)^{-1})),$$

$$sgn_{F_2/F}(c_2^\epsilon)=\epsilon sgn_{F_2/F}(\eta_\sharp(1-Norm_{F_2/F}(Y_2)Norm_{F_1/F}(Y_1)^{-1})),$$

On vérifie que, pour $\epsilon=\pm$, les familles $\xi=(J,(F_{\pm j})_{j\in J},(F_j)_{j\in J},(Y_j)_{j\in J})$ et c^ϵ paramètrent une classe de conjugaison d'éléments semi-simples réguliers dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$. Plus exactement, elles en paramètrent deux, qui sont conjuguées par le groupe orthogonal. On fixe un élément $Y^\epsilon_{F_1,F_2}$ dans l'une de ces classes. On suppose que $Y^+_{F_1,F_2}$ et $Y^-_{F_1,F_2}$ sont stablement conjugués. On note $T^\epsilon_{F_1,F_2}$ le commutant de $Y^\epsilon_{F_1,F_2}$ dans $G_\sharp$. Pour $\mu\in\mathcal{N}_\sharp$, on a alors l'égalité

$$(3)\qquad c_{\sigma,\mathcal{O}_\mu}(t)=lim_{\lambda\in F^{\times,2},\lambda\to 0}(|W(G_\sharp,T_\sharp)|^{-1}\Theta_\sigma(texp(\lambda Y_\sharp))D^{G_\sharp}(\lambda Y_\sharp)^{1/2}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{(F_1,F_2)\in\mathcal{F}_\sharp}\sum_{\epsilon=\pm}\epsilon|W(G_\sharp,T^\epsilon_{F_1,F_2})|^{-1}sgn_{F_1/F}(\mu\eta_\sharp)\Theta_\sigma(texp(\lambda Y^\epsilon_{F_1,F_2}))D^{G_\sharp}(\lambda Y^\epsilon_{F_1,F_2})^{1/2})$$

cf. [W1], p.115 (les définitions de cette référence sont un peu plus compliquées, Dieu sait pourquoi). Remarquons que l'on pourrait remplacer le terme $sgn_{F_1/F}(\mu\eta_\sharp)$ par $sgn_{F_2/F}(\mu\eta_\sharp)$: si $\delta_\sharp=1$, $F_1=F_2$; si $\delta_\sharp\neq 1$, le produit de ces deux termes vaut $sgn_{E_\sharp/F}(\mu\eta_\sharp)=1$. La formule suivante nous sera utile :

$$(4)\qquad |\mathcal{N}_\sharp|^{-1}\sum_{\mu\in\mathcal{N}_\sharp}c_{\sigma,\mathcal{O}_\mu}(t)=lim_{\lambda\to 0}|W(G_\sharp,T_\sharp)|^{-1}\Theta_\sigma(texp(\lambda Y_\sharp))D^{G_\sharp}(\lambda Y_\sharp)^{1/2}.$$

En effet, cette formule est immédiate quand $dim(V_\sharp)\leq 2$. Supposons $dim(V_\sharp)\geq 4$. Quand μ décrit $\mathcal{N}_\sharp$, $\mu\eta_\sharp$ décrit $F^\times/F^{\times,2}$ si $\delta_\sharp=1$, le sous-groupe $Norm_{E_\sharp/F}(E_\sharp^\times)/F^{\times,2}$ quand $\delta_\sharp\neq 1$. Pour $(F_1,F_2)\in\mathcal{F}_\sharp$, les conditions $\delta_1\delta_2=\delta_\sharp$ et $\delta_1\neq 1$, $\delta_2\neq 1$ entraînent que $sgn_{F_1/F}$ est non trivial sur le groupe précédent. Donc

$$\sum_{\mu\in\mathcal{N}_\sharp}sgn_{F_1/F}(\mu\eta_\sharp)=0,$$

et (4) se déduit de (3).

3.2 Définition d'une multiplicité stable

On considère deux couples (V,q) et (V',q') d'espaces quadratiques de dimensions d et d'. On suppose d pair et d' impair. On note G et G' les groupes spéciaux orthogonaux et on les suppose quasi-déployés. On considère, dans un groupe de Grothendieck convenable, une combinaison linéaire finie

$$\Sigma=\sum_k a_k\sigma_k$$

où les a_k sont des nombres complexes et les σ_k appartiennent à $Temp(G(F))$. On pose $\Theta_\Sigma=\sum_k a_k\Theta_{\sigma_k}$ et on suppose que Θ_Σ est stable en tant que distribution ou, ce qui revient au même, qu'elle est constante, en tant que fonction, sur les classes de conjugaison stable. On considère de même une combinaison linéaire finie

$$\Sigma' = \sum_k a'_k \sigma'_k,$$

où les σ'_k appartiennent à $Temp(G'(F))$. On définit $\Theta_{\Sigma'}$ et on suppose que $\Theta_{\Sigma'}$ est stable.

On définit $\Xi^*(q,q')$ comme en 2.2. Soit $\xi = (I,(F_{\pm i})_{i\in I},(F_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}) \in \Xi^*(q,q')$. On pose $I_\xi = I = I^*$. En imitant la preuve de 2.2(5), on voit qu'il existe à équivalence près une unique décomposition orthogonale $(V',q') = (W,q_W) \oplus (V'_\sharp, q'_\sharp)$ telle que $dim(W) = d_\xi$, $\delta(q_W) = \delta_\xi$ et le groupe spécial orthogonal de $(V'_\sharp, q'_\sharp)$ soit déployé. L'élément ξ paramètre deux classes de conjugaison stable dans le groupe spécial orthogonal de (W,q_W). Fixons un élément t' dans l'une d'elles. Par linéarité, on peut définir le terme $c_{\Sigma',\mathcal{O}_{reg}}(t')$. Il est facile de voir que, parce que Σ' est stable, il ne dépend pas du choix de t'. On le note simplement $c_{\Sigma'}(\xi)$.

Supposons $d_\xi < d$. Il existe de même une décomposition orthogonale $(V,q) = (W,q_W)\oplus (V_\sharp, q_\sharp)$ telle que $dim(W) = d_\xi$, $\delta(q_W) = \delta_\xi$ et le groupe spécial orthogonal $G_\sharp$ de $(V_\sharp, q_\sharp)$ soit quasi-déployé. L'espace (W,q_W) n'est pas en général le même que ci-dessus et la décomposition n'est pas forcément unique. Fixons-la. De nouveau, ξ paramètre deux classes de conjugaison stable dans le groupe spécial orthogonal de (W,q_W). Fixons un élément t dans l'une d'elles. Notons $\mathcal{N}_\sharp$ l'ensemble des orbites nilpotentes régulières dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$. Par linéarité, on définit le terme $c_{\Sigma,\mathcal{O}}(t)$ pour $\mathcal{O} \in \mathcal{N}_\sharp$. Posons

$$c_\Sigma(\xi) = |\mathcal{N}_\sharp|^{-1} \sum_{\mathcal{O}\in\mathcal{N}_\sharp} c_{\Sigma,\mathcal{O}}(t).$$

Ce terme ne dépend pas du choix de t. En effet, la formule 3.1(4) le calcule comme la limite d'une expression où t n'intervient que par une valeur $\Theta_\Sigma(texp(\lambda Y_\sharp))$ du caractère Θ_Σ. Quand on change le choix de t, disons qu'on le remplace par t_1, on peut choisir $Y_{1,\sharp}$ qui vérifie relativement à t_1 les mêmes conditions que $Y_\sharp$ vérifiait relativement à t et qui est tel que $t_1exp(\lambda Y_{1,\sharp})$ soit stablement conjugué à $texp(\lambda Y_\sharp)$. L'indépendance du choix de t résulte alors de la stabilité de Σ.

Supposons maintenant $d_\xi = d$. L'élément ξ paramètre deux classes de conjugaison stable dans $G(F)$, qui sont conjuguées par le groupe orthogonal. On fixe des représentants t_1 et t_2 de chacune d'elles et on pose $c_\Sigma(\xi) = \Theta_\Sigma(t_1) + \Theta_\Sigma(t_2)$.

On pose $r = (|d-d'|-1)/2$ et

$$(1) \qquad S(\Sigma,\Sigma') = S(\Sigma',\Sigma) = \int_{\Xi^*(q,q')} 2^{d_\xi} c_\Sigma(\xi) c_{\Sigma'}(\xi) D^{inf(d,d')}(\xi)\Delta(\xi)^r d\xi,$$

cf. 1.5 pour les notations.

3.3 Transfert de multiplicités

On considère une paire d'espaces quadratiques (V,q) et (V',q') comme en 2.1. On considère de plus quatre espaces quadratiques (V_+,q_+), (V_-,q_-), (V'_+,q'_+), (V'_-,q'_-). On utilisera quelques notations que l'on espère maintenant évidentes : d_+ est la dimension de V_+, G_+ est le groupe spécial orthogonal de (V_+,q_+) etc... On impose les hypothèses suivantes :

(1) d_+ et d_- sont pairs, $d_++d_-=d$, $\delta(q_+)\delta(q_-)=\delta(q)$;

(2) d'_+ et d'_- sont impairs, $d'_++d'_-=d'+1$;

(3) les groupes G'_+, G'_- sont déployés et les espaces (V_+,q_+) et (V_-,q_-) vérifient la condition (QD) de 1.7.

Le groupe $G_+\times G_-$ est un groupe endoscopique de G et $G'_+\times G'_-$ est un groupe endoscopique de G'. On utilise les facteurs de transfert définis en 1.7. Dans les formules (1) et (3) de ce paragraphe interviennent des termes $\Delta_{-2\delta(q')}(\xi_+,\xi_-,c)$ et $\Delta_{\nu_0\delta(q)}(\xi_+,\xi_-,c)$. On remarque que ce sont les mêmes car $-2\delta(q')=\nu_0\delta(q)$. On note simplement ce terme $\Delta(\xi_+,\xi_-,c)$. Les hypothèses de 2.1 entraînent que G' est déployé si et seulement si l'hypothèse (QD) de ce paragraphe est vérifiée. Donc, ou bien on a les égalités

$(\underline{V},\underline{q})=(V,q)$ et $(\underline{V}',\underline{q}')=(V',q')$;

ou bien on a

$(\underline{V},\underline{q})\neq(V,q)$ et $(\underline{V}',\underline{q}')\neq(V',q')$.

Considérons une combinaison linéaire finie

$$\Sigma'_+=\sum_k b'_{k,+}\sigma'_{k,+}$$

où les $\sigma'_{k,+}$ appartiennent à $Temp(G'_+(F))$. On considère des combinaisons linéaires analogues Σ'_-, Σ', Σ_+, Σ_- et Σ relatives aux groupes G'_-, G', G_+, G_- et G. On suppose

(1) les caractères $\Theta_{\Sigma'_+}$, $\Theta_{\Sigma'_-}$, Θ_{Σ_+} et Θ_{Σ_-} sont stables ;

(2) $\Theta_{\Sigma'}$ est le transfert de $\Theta_{\Sigma'_+}\times\Theta_{\Sigma'_-}$ et Θ_Σ est le transfert de $\Theta_{\Sigma_+}\times\Theta_{\Sigma_-}$.

On a défini des termes $S(\Sigma_+,\Sigma'_+)$, $S(\Sigma_+,\Sigma'_-)$ etc... en 3.2. En prolongeant par bilinéarité l'application $(\sigma,\sigma')\mapsto m_{geom}(\sigma,\sigma')$ de 2.1, on définit $m_{geom}(\Sigma,\Sigma')$. On pose

$$\mu(G')=\begin{cases}1, & \text{si } G' \text{ est déployé,}\\ -1 & \text{, sinon.}\end{cases}$$

Proposition. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$m_{geom}(\Sigma,\Sigma')=\frac{1}{2}(S(\Sigma_+,\Sigma'_+)S(\Sigma_-,\Sigma'_-)+\mu(G')S(\Sigma_+,\Sigma'_-)S(\Sigma_-,\Sigma'_+)).$$

Preuve. On suppose pour fixer les idées $d<d'$. Le membre de gauche de l'égalité à prouver est une intégrale sur un revêtement de $\Xi^*(q,q')$. Le membre de droite est la somme de deux intégrales, l'une sur $\Xi^*(q_+,q'_+)\times\Xi^*(q_-,q'_-)$ et l'autre sur $\Xi^*(q_+,q'_-)\times\Xi^*(q_-,q'_+)$. Si G et G' sont quasi-déployés, l'application "réunion disjointe" envoie chacun de ces ensembles dans $\Xi^*(q,q')$ et préserve localement les mesures. Ce n'est plus tout-à-fait vrai si G ou G' n'est pas quasi-déployé, à cause de la condition (2) de 2.2 qui n'est pas vérifiée sur l'image de l'application réunion disjointe. Notons $\Xi^*_{et}(q,q')$ la réunion de $\Xi^*(q,q')$ et de l'ensemble réduit au terme $\xi=\emptyset$ (c'est-à-dire l'ensemble d'indices I est vide). On a $\Xi^*_{et}(q,q')=\Xi^*(q,q')$ si G et G' sont quasi-déployés. L'application réunion disjointe ci-dessus est toujours à valeurs dans cet ensemble. L'égalité de l'énoncé est de la forme

$$\int_{\Xi^*_{et}(q,q')}f_1(\xi)d\xi=\int_{\Xi^*_{et}(q,q')}f_2(\xi)d\xi,$$

où $f_1(\xi)=0$ si $\xi=\emptyset\not\in\Xi^*(q,q')$. Pour la prouver, il suffit de fixer $\xi\in\Xi^*_{et}(q,q')$ et de prouver l'égalité $f_1(\xi)=f_2(\xi)$. Fixons donc $\xi=(I,(F_{\pm i})_{i\in I},(F_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})$, en supposant d'abord $\xi \in \Xi^*(q,q')$. On pose $\mathbf{d} = d_\xi$ et $\boldsymbol{\delta} = \delta_\xi$. La fibre du revêtement $\mathcal{C}(q;q')$ au-dessus de ξ est en bijection avec une classe $C^\epsilon(\xi) \subset C(\xi)$. Pour $c = (c_i)_{i\in I^*} \in C^\epsilon(\xi)$, notons $x(\xi,c)$ le point de la fibre paramétré par c. D'après 2.2(8), on a

$$f_1(\xi) = \sum_{c\in C^\epsilon(\xi)} c_\Sigma(x(\xi,c))c_{\Sigma'}(x(\xi,c))D^G(x(\xi,c))\Delta(x(\xi,c))^r,$$

où $r = (d'-d-1)/2$. En utilisant les notations introduites en 1.5, c'est aussi

$$(1) \qquad f_1(\xi) = D^d(\xi)\Delta(\xi)^r \sum_{c\in C^\epsilon(\xi)} c_\Sigma(x(\xi,c))c_{\Sigma'}(x(\xi,c)).$$

Pour tout $I' \subset I$, posons $\xi(I') = (I', (F_{\pm i})_{i\in I'}, (F_i)_{i\in I'}, (y_i)_{i\in I'})$. L'application $(I_1,I_2) \mapsto (\xi(I_1),\xi(I_2))$ est une bijection de l'ensemble des couples (I_1,I_2) tels que $I_1 \sqcup I_2 = I$ sur l'ensemble des $(\xi_1,\xi_2) \in \Xi^*_{reg} \times \Xi^*_{reg}$ tels que $\xi_1 \sqcup \xi_2 = \xi$. Notons $\mathcal{I}^+$, resp $\mathcal{I}^-$, l'ensemble des couples (I_1,I_2) tels que $I_1 \sqcup I_2 = I$ et $(\xi(I_1),\xi(I_2)) \in \Xi^*(q_+,q'_+) \times \Xi^*(q_-,q'_-)$, resp. $(\xi(I_1),\xi(I_2)) \in \Xi^*(q_+,q'_-) \times \Xi^*(q_-,q'_+)$. En utilisant la définition 3.2(1), on a l'égalité

$$(2) \qquad f_2(\xi) = 2^{\mathbf{d}-1}\Big(\sum_{(I_1,I_2)\in\mathcal{I}^+} c_{\Sigma_+}(\xi(I_1))c_{\Sigma'_+}(\xi(I_1))c_{\Sigma_-}(\xi(I_2))c_{\Sigma'_-}(\xi(I_2))$$

$$D^{inf(d_+,d'_+)}(\xi(I_1))D^{inf(d_-,d'_-)}(\xi(I_2))\Delta(\xi(I_1))^{r_1^+}\Delta(\xi(I_2))^{r_2^-}\Big)+2^{\mathbf{d}-1}\mu(G')\Big(\sum_{(I_1,I_2)\in\mathcal{I}^-} c_{\Sigma_+}(\xi(I_1))$$

$$c_{\Sigma'_-}(\xi(I_1))c_{\Sigma_-}(\xi(I_2))c_{\Sigma'_+}(\xi(I_2))D^{inf(d_+,d'_-)}(\xi(I_1))D^{inf(d_-,d'_+)}(\xi(I_2))\Delta(\xi(I_1))^{r_1^-}\Delta(\xi(I_2))^{r_2^+}\Big),$$

où on a posé $|d_+-d'_+| = 1+2r_1^+$, $|d_--d'_-| = 1+2r_2^-$, $|d_+-d'_-| = 1+2r_1^-$, $|d_--d'_+| = 1+2r_2^+$.

Introduisons le sous-espace quadratique $(W_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}, q_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}})$ de (V,q), cf. 2.2, les décompositions orthogonales $(V,q) = (W_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}, q_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}) \oplus (V_\sharp, q_\sharp)$, $(V',q') = (W_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}, q_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}) \oplus (V'_\sharp, q'_\sharp)$ et les notations afférentes. Les éléments $x(\xi,c)$ appartiennent au groupe spécial orthogonal $G_{\mathbf{d},\boldsymbol{\delta}}(F)$ et sont en position générale. Le terme $c_{\Sigma'}(x(\xi,c))$ est calculé par la formule 3.1(1). Dans celle-ci, $Y_\sharp$ appartient à l'algèbre de Lie d'un tore déployé. Sa classe de conjugaison stable est égale à sa classe de conjugaison. Elle est paramétrée par $(J,(F_{\pm j})_{j\in J},(F_j)_{j\in J},(Y_j)_{j\in J})$, où $J = \{1,...,(d'-\mathbf{d}-1)/2\}$ et, pour tout $j \in J$, $F_{\pm j} = F$, $F_j = F\oplus F$, Y_j est un élément de $F_j^\times$ tel que $Y_j+\tau_j(Y_j) = 0$. La classe de conjugaison stable de l'élément $x(\xi,c)exp(\lambda Y_\sharp)$ est paramétré par la réunion disjointe de ξ et de $\zeta = (J,(F_{\pm j})_{j\in J},(F_j)_{j\in J},(exp(\lambda Y_j))_{j\in J})$. De même que l'on a défini $\xi(I')$ pour $I' \subset I$, on définit $\zeta(J')$ pour $J' \subset J$. Les éléments de $G'_+(F)/stconj \times G'_-(F)/stconj$ dont l'image par la correspondance endoscopique est la classe de conjugaison stable de $x(\xi,c)exp(\lambda Y_\sharp)$ sont paramétrés par les couples $(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1),\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2))$, où (I_1,I_2,J_1,J_2) parcourent l'ensemble des quadruplets tels que $I_1\sqcup I_2 = I$, $J_1\sqcup J_2 = J$ et

$$d_{\xi(I_1)}+2|J_1|+1 = d'_+,\ d_{\xi(I_2)}+2|J_2|+1 = d'_-.$$

Assimilons toute fonction définie sur un ensemble de classes de conjugaison stable à une fonction définie sur l'ensemble de paramètres correspondant. Grâce à 1.7(1), la formule 1.6(1) s'écrit

$$(3) \qquad \Theta_{\Sigma'}(x(\xi,c)exp(\lambda Y_\sharp))D^{d'}(\xi\sqcup\zeta)^{1/2} = \sum_{I_1,I_2,J_1,J_2} \Theta_{\Sigma'_+}(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1))D^{d'_+}(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1))^{1/2}$$

$$\Theta_{\Sigma'_-}(\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2))D^{d'_-}(\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2))^{1/2}\Delta(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1),\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2),c),$$

où l'ensemble de sommation est celui que l'on vient de décrire. Montrons que

(4) on a l'égalité $\Delta(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1),\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2),c)=\Delta(\xi(I_1),\xi(I_2),c)$.

D'après les définitions de 1.5, il suffit de prouver que, pour tout $i\in I$, le terme

$$A=(-1)^{d_\zeta/2}P'_{\xi\sqcup\zeta}(y_i)P_{\xi\sqcup\zeta}(-1)y_i^{-d_\zeta/2}$$

est le produit de $B=P'_\xi(y_i)P_\xi(-1)$ et d'une norme de l'extension $F_i/F_{\pm i}$. Pour tout $j\in J$, écrivons $exp(\lambda Y_j)=(a_j,a_j^{-1})\in F\oplus F=F_j$. Alors

$$A=B\prod_{j\in J}(-y_i)^{-1}(y_i-a_j)(y_i-a_j^{-1})(-1-a_j)(-1-a_j^{-1}),$$

d'où

$$A=B\prod_{j\in J}(y_i-a_j)(y_i^{-1}-a_j)(-1-a_j^{-1})^2.$$

Le terme indexé par j dans ce produit est la norme de $(y_i-a_j)(-1-a_j^{-1})$, et cela prouve (4).

Faisons maintenant tendre λ vers 0. Remarquons que

$$D^{d'}(\xi\sqcup\zeta)^{1/2}=D^{d'}(\xi)^{1/2}D^{G'_\sharp}(exp(\lambda Y_\sharp))^{1/2}.$$

D'autre part, $W(G'_\sharp,T_\sharp)$ est le groupe de Weyl d'un système de racines de type $B_{|J|}$, notons $w(B_{|J|})$ son nombre d'éléments. Grâce à 3.1(1), le membre de gauche de (3) tend vers

$$w(B_{|J|})D^{G'}(\xi)^{1/2}c_{\Sigma'}(x(\xi,c)).$$

De la même façon, un terme comme

$$\Theta_{\Sigma'_+}(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1))D^{d'_+}(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1))^{1/2}$$

tend vers

$$w(B_{|J_1|})D^{d'_+}(\xi(I_1))^{1/2}c_{\Sigma'_+}(\xi(I_1)).$$

On obtient

$$w(B_{|J|})D^{d'}(\xi)^{1/2}c_{\Sigma'}(x(\xi,c))=\sum_{I_1,I_2,J_1,J_2}\Delta(\xi(I_1),\xi(I_2),c)w(B_{|J_1|})w(B_{|J_2|})D^{d'_+}(\xi(I_1))^{1/2}$$

$$D^{d'_-}(\xi(I_2))^{1/2}c_{\Sigma'_+}(\xi(I_1))c_{\Sigma'_-}(\xi(I_2)).$$

On décompose la somme en une somme sur les couples (I_1,I_2) et une somme intérieure sur les (J_1,J_2). Les couples (I_1,I_2) sont soumis aux seules conditions

$$(5)\qquad I_1\sqcup I_2=I,\ d_{\xi(I_1)}<d'_+,\ d_{\xi(I_2)}<d'_-.$$

Fixons un tel couple et considérons la somme intérieure. Posons $\mathbf{j}_1=(d'_+-d_{\xi(I_1)}-1)/2$, $\mathbf{j}_2=(d'_--d_{\xi(I_2)}-1)/2$. Les couples (J_1,J_2) sont soumis aux seules conditions $J_1\sqcup J_2=J$, $|J_1|=\mathbf{j}_1$ et $|J_2|=\mathbf{j}_2$. Le terme que l'on somme est simplement $w(B_{\mathbf{j}_1})w(B_{\mathbf{j}_2})$. La somme vaut donc

$$\frac{|J|!}{\mathbf{j}_1!\mathbf{j}_2!}w(B_{\mathbf{j}_1})w(B_{\mathbf{j}_2}),$$

et on montre que ceci n'est autre que $w(B_{|J|})$. On obtient finalement l'égalité

$$(6) \qquad c_{\Sigma'}(x(\xi,c)) = D^{d'}(\xi)^{-1/2}\sum_{I_1,I_2}\Delta(\xi(I_1),\xi(I_2),c)B'(I_1,I_2),$$

où l'on somme sur les (I_1,I_2) vérifiant (5) et où l'on a posé

$$B'(I_1,I_2) = D^{d'_+}(\xi(I_1))^{1/2}D^{d'_-}(\xi(I_2))^{1/2}c_{\Sigma'_+}(\xi(I_1))c_{\Sigma'_-}(\xi(I_2)).$$

Le terme $c_\Sigma(x(\xi,c))$ est calculé par la formule 3.1(2) ou 3.1(3) selon que $dim(V_\sharp)\leq 2$ ou $dim(V_\sharp)\geq 4$. Supposons d'abord $dim(V_\sharp)\geq 4$. Considérons un couple $(F_1,F_2)\in\mathcal{F}_\sharp$. Pour $\epsilon=\pm$, la classe de conjugaison de $exp(\lambda Y^\epsilon_{F_1,F_2})$ est paramétrée par

$$\zeta = (J,(F_{\pm j})_{j\in J},(F_j)_{j\in J},(exp(\lambda Y_j))_{j\in J})$$

et $c^\epsilon = (c^\epsilon_j)_{j=1,2}$, avec les mêmes définitions qu'en 3.1. Donc la classe de conjugaison de $x(\xi,c)exp(\lambda Y^\epsilon_{F_1,F_2})$ est paramétrée par $\xi\sqcup\zeta$ et $c\sqcup c^\epsilon$. Les éléments de $G_+(F)/stconj\times G_-(F)/stconj$ dont l'image par la correspondance endoscopique est la classe de conjugaison stable de $x(\xi,c)exp(\lambda Y^\epsilon_{F_1,F_2})$ sont paramétrés par les couples $(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1),\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2))$, où (I_1,I_2,J_1,J_2) parcourent l'ensemble des quadruplets tels que $I_1\sqcup I_2=I$, $J_1\sqcup J_2=J$,

$$(7) \qquad d_{\xi(I_1)}+2|J_1| = d_+,\ d_{\xi(I_2)}+2|J_2| = d_-$$

et

$$(8) \qquad \delta_{\xi(I_1)}\delta_{\zeta(J_1)} = \delta(q_+),\ \delta_{\xi(I_2)}\delta_{\zeta(J_2)} = \delta(q_-).$$

Il faut prendre garde au fait qu'ici le paramétrage n'est pas bijectif. D'après la description de 1.7, à un quadruplet sont associées deux classes de conjugaison stable dont l'image est celle requise, sauf dans le cas où l'un des groupes G_+ ou G_- est réduit à $\{1\}$, où il n'y a qu'une classe. Ignorons dans un premier temps cette difficulté, nous indiquerons plus tard comment la résoudre. Alors, grâce à 1.6(1) et 1.7(3), le terme indexé par (F_1,F_2) dans le membre de droite de 3.1(3) est égal à

$$(9) \qquad \frac{1}{2}D^d(\xi)^{-1/2}\sum_{I_1,I_2,J_1,J_2}\sum_{\epsilon=\pm}\epsilon|W(G_\sharp,T^\epsilon_{F_1,F_2}|^{-1}sgn_{F_1/F}(\nu_0\eta_\sharp)\Theta_{\Sigma_+}(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1))$$

$$D^{d_+}(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1))^{1/2}\Theta_{\Sigma_-}(\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2))D^{d_-}(\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2))^{1/2}\Delta(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1),\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2),c\sqcup c^\epsilon).$$

Considérons un couple (J_1,J_2) intervenant ci-dessus et supposons que le sous-ensemble $\{1,2\}$ de J est inclus dans J_1 ou dans J_2. On voit alors que $\Delta(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1),\xi(I_2)\sqcup\zeta(J_2),c\sqcup c^\epsilon)$ est indépendant de ϵ. Le nombre d'éléments de $W(G_\sharp,T^\epsilon_{F_1,F_2})$ est aussi indépendant de ϵ, notons-le simplement $|W(G_\sharp,T_{F_1,F_2})|$. La somme en ϵ est alors la somme de deux termes opposés, qui est nulle. On peut donc se limiter aux couples (J_1,J_2) tels que l'un des termes contienne 1 et l'autre contienne 2. Si par exemple J_1 contient 1 et J_2 contient 2, on a $\delta_{\zeta(J_1)}=\delta_1$ et $\delta_{\zeta(J_2)}=\delta_2$ (rappelons que $F_j=F(\sqrt{\delta_j})$ pour $j=1,2$). Mais alors (8) impose les valeurs de δ_1 et δ_2. On obtient le résultat suivant. Considérons la condition

(10) les deux couples $(\delta_{\xi(I_1)}\delta(q_+),\delta_{\xi(I_2)}\delta(q_-))$ et (δ_1,δ_2) sont égaux à permutation près.

Si elle n'est pas vérifiée, il n'y a pas de couple (J_1,J_2) vérifiant les conditions requises. Poursuivons le calcul en supposant (10) vérifiée. Pour fixer les idées, on suppose que les deux couples de cette relation sont égaux, le calcul étant similaire si l'on doit en permuter un. Alors les couples (J_1,J_2) autorisés sont ceux pour lesquels

(11) si $\delta_1 \neq \delta_2$, c'est-à-dire si $\delta_\sharp \neq 1$, alors $1 \in J_1$ et $2 \in J_2$;
(12) si $\delta_\sharp = 1$, alors $1 \in J_1$ et $2 \in J_2$ ou $1 \in J_2$ et $2 \in J_1$.
Pour un tel couple, montrons que, si λ est assez proche de 0, on a

$$(13) \qquad \epsilon sgn_{F_1/F}(\nu_0\eta_\sharp)\Delta(\xi(I_1) \sqcup \zeta(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta(J_2), c \sqcup c^\epsilon) = \Delta(\xi(I_1), \xi(I_2), c).$$

On doit encore montrer que, pour $i \in I$, le terme A défini plus haut est égal au produit de B et d'une norme de l'extension $F_i/F_{\pm i}$. Le terme A est produit de B, de termes similaires à ceux traités plus haut, et de deux termes

$$(-y_i)^{-1}(y_i - exp(\lambda Y_j))(y_i - exp(-\lambda Y_j))(-1 - exp(\lambda Y_j))(-1 - exp(-\lambda Y_j))$$

pour $j = 1, 2$. Ceci est un élément de $F_{\pm i}$. Quand λ est proche de 0, il est proche de

$$4(-y_i)^{-1}(y_i - 1)^2,$$

qui est la norme de $2(y_i - 1)$. D'où l'assertion. Cela ne suffit pas car, dans le membre de gauche de (13), il y a deux facteurs supplémentaires : le terme $\epsilon sgn_{F_1/F}(\nu_0\eta_\sharp)$ et, en supposant par exemple $2 \in J_2$, un terme $sgn_{F_2/F}(\nu_0\delta(q)C_2)$ correspondant à l'élément $2 \in J_2^*$. On doit prouver que le produit de ces deux termes vaut ϵ. Rappelons que

$$\nu_0\delta(q)C_2 = (-1)^{d/2}\nu_0\delta(q)c_2^\epsilon P'_{\xi\sqcup\zeta}(exp(\lambda Y_2))P_{\xi\sqcup\zeta}(-1)exp(\lambda Y_2)^{1-d/2}(exp(\lambda Y_2)-1)^{-1}(exp(\lambda Y_2)+1).$$

Pour $j \in J \setminus \{1, 2\}$, posons $exp(\lambda Y_j) = (a_j, a_j^{-1}) \in F^\times \oplus F^\times = F_j^\times$. On a les égalités

$$P_{\xi\sqcup\zeta}(-1) = P_\xi(-1)P_\zeta(-1),$$

$$P'_{\xi\sqcup\zeta}(exp(\lambda Y_2)) = P_\xi(exp(\lambda Y_2))P'_\zeta(exp(\lambda Y_2)),$$

$$P'_\zeta(exp(\lambda Y_2)) = (exp(\lambda Y_2) - exp(-\lambda Y_2)(exp(\lambda Y_2) - exp(\lambda Y_1))(exp(\lambda Y_2) - exp(-\lambda Y_1))$$
$$\prod_{j \in J\setminus\{1,2\}} (exp(\lambda Y_2) - a_j)(exp(\lambda Y_2) - a_j^{-1}).$$

On a donc l'égalité

$$\nu_0\delta(q)C_2 = D_1D_2D_3D_4D_5$$

où

$$D_1 = \nu_0\delta(q)c_2^\epsilon,$$

$$D_2 = (exp(\lambda Y_2) - exp(-\lambda Y_2))(exp(\lambda Y_2) - 1)^{-1}(exp(\lambda Y_2) + 1),$$

$$D_3 = exp(-\lambda Y_2)(exp(\lambda Y_2) - exp(\lambda Y_1))(exp(\lambda Y_2) - exp(-\lambda Y_1)),$$

$$D_4 = (-exp(\lambda Y_2))^{-d_\xi/2}P_\xi(exp(\lambda Y_2))P_\xi(-1),$$

$$D_5 = P_\zeta(-1)\prod_{j \in J\setminus\{1,2\}} (-exp(\lambda Y_2))^{-1}(exp(\lambda Y_2) - a_j)(exp(\lambda Y_2) - a_j^{-1}).$$

Introduisons la relation d'équivalence dans $\bar{F}^\times$: $a \equiv b$ si et seulement si ab^{-1} est une norme de l'extension F_2/F. Chacun des termes ci-dessus appartient à $F^\times$. A équivalence près, on peut les remplacer par des termes qui leur sont assez proches quand λ est assez proche de 0. Les racines de P_ζ sont proches de 1, donc $P_\zeta(-1)$ est équivalent à $(-2)^{2|J|} \equiv 1$. Pour $j \in J\setminus\{1, 2\}$, le facteur indexé par j dans D_5 est égal à $a_j^{-1}Norm_{F_2/F}(exp(\lambda Y_2) - a_j)$, qui est équivalent à 1 puisque a_j est proche de 1. Donc $D_5 \equiv 1$. Le terme D_4 est

équivalent à $(-1)^{d_\xi/2}P_\xi(1)P_\xi(-1)$, ou encore à $(-1)^{d_\xi/2}P_\xi(1)P_\xi(-1)^{-1}$. Ceci est le produit sur les $i\in I$ des termes
$$(-1)^{[F_{\pm i}:F]}Norm_{F_i/F}(Y_i),$$
où l'on a posé $Y_i=\frac{1-y_i}{1+y_i}$. On a $\tau_i(Y_i)=-Y_i$. Donc $Norm_{F_i/F_{\pm i}}(Y_i)\in -\delta_i F_{\pm i}^{\times,2}$, où l'on rappelle que $F_i=F_{\pm i}(\sqrt{\delta_i})$. Le terme ci-dessus est donc équivalent à $Norm_{F_{\pm i}/F}(\delta_i)$, et D_4 est équivalent à δ_ξ. Le terme D_3 est équivalent à
$$\lambda^2(Y_2-Y_1)(Y_2+Y_1)\equiv -Y_1^2(1-Norm_{F_2/F}(Y_2)Norm_{F_1/F}(Y_1)^{-1})$$
$$\equiv -\delta_1(1-Norm_{F_2/F}(Y_2)Norm_{F_1/F}(Y_1)^{-1}).$$
Le terme D_2 est équivalent à 1. Par définition de $\delta_\sharp$, on a les égalités
$$\delta(q)=\delta_\sharp\delta_\xi=\delta_1\delta_2\delta_\xi\equiv-\delta_1\delta_\xi.$$
En rassemblant ces calculs, on obtient
$$\nu_0\delta(q)C_2\equiv\nu_0 c_2^\epsilon(1-Norm_{F_2/F}(Y_2-Norm_{F_1/F}(Y_1)^{-1}).$$
En utilisant la définition de c_2^ϵ, on obtient $sgn_{F_2/F}(\nu_0\delta(q)C_2)=\epsilon sgn_{F_2/F}(\nu_0\eta_\sharp)$, qui est égal à $\epsilon sgn_{F_1/F}(\nu_0\eta_\sharp)$, ainsi qu'on l'a remarqué en 3.1. Cela achève la preuve de (13).

Maintenant, le terme que l'on somme dans (9) ne dépend plus de ϵ. La somme en ϵ revient à une multiplication par 2, qui compense le premier facteur $\frac{1}{2}$. Faisons tendre $\lambda\in F^{\times,2}$ vers 0. Comme plus haut, un terme comme
$$\Theta_{\Sigma_+}(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1))D^{d_+}(\xi(I_1)\sqcup\zeta(J_1))^{1/2}$$
tend vers
$$w(J_1)D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2}c_{\Sigma_+}(\xi(I_1)),$$
où $w(J_1)$ est le nombre d'éléments du groupe de Weyl d'un groupe spécial orthogonal "pair" contenant un élément paramétré par $\zeta(J_1)$. On vérifie l'égalité $w(J_1)=w(B_{|J_1|-1})$. Alors la limite quand λ tend vers 0 de l'expression (9) vaut
$$|W(G_\sharp,T_{F_1,F_2})|^{-1}\sum_{I_1,I_2,J_1,J_2}\Delta(\xi(I_1),\xi(I_2),c)w(B_{|J_1|-1})w(B_{|J_2|-1})D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2}$$
$$D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2}c_{\Sigma_+}(\xi(I_1))c_{\Sigma_-}(\xi(I_2)).$$
Il convient maintenant de tenir compte de la difficulté que l'on a signalé plus haut et de corriger cette formule en conséquence. A chaque quadruplet (I_1,I_2,J_1,J_2) sont en fait associées deux classes de conjugaison stable dans $G_{+,reg}(F)\times G_{-,reg}(F)$ (remarquons que les conditions imposées aux quadruplets assurent que J_1 et J_2 ont au moins un élément, donc que G_+ et G_- sont non triviaux si l'ensemble de sommation n'est pas vide). Or les calculs ci-dessus ne dépendent pas de la classe choisie. Donc le terme qui nous intéresse, à savoir la limite quand λ tend vers 0 du terme indexé par (F_1,F_2) dans le membre de droite de 3.1(3), est égale au terme ci-dessus multiplié par 2. On décompose la somme ci-dessus en une somme sur les couples (I_1,I_2) et une somme intérieure sur les couples (J_1,J_2). Fixons (I_1,I_2). La somme intérieure est
$$\sum_{J_1,J_2}w(B_{|J_1|-1})w(B_{|J_2|-1}).$$

Les couples (J_1, J_2) sont soumis aux conditions (7), (11) et (12) (toujours en supposant les deux couples de (10) égaux). Posons $\mathbf{j}_1 = (d_+ - d_{\xi(I_1)})/2$, $\mathbf{j}_2 = (d_- - d_{\xi(I_1)})/2$. Si $\delta_\sharp \neq 1$, l'application $(J_1, J_2) \mapsto (J_1 \setminus \{1\}, J_2 \setminus \{2\})$ est une bijection de notre ensemble de couples sur celui des couples (J_1', J_2') tels que $|J_1'| = \mathbf{j}_1 - 1$, $|J_2'| = \mathbf{j}_2 - 1$ et $J_1' \sqcup J_2' = J \setminus \{1, 2\}$. Dans ce cas, la somme intérieure vaut

$$\frac{(|J|-2)!}{(\mathbf{j}_1 - 1)!(\mathbf{j}_2 - 1)!} w(B_{\mathbf{j}_1 - 1}) w(B_{\mathbf{j}_2 - 1}),$$

et ceci est égal à $w(B_{|J|-2})$. Or on vérifie que ce nombre est égal à $|W(G_\sharp, T_{F_1,F_2})|/2$. Si $\delta_\sharp = 1$, il y a deux fois plus de couples (J_1, J_2) : la condition (12) nous permet d'intervertir les places de 1 et 2. Mais $W(G_\sharp, T_{F_1,F_2})$ est lui-aussi deux fois plus gros : puisque $F_1 = F_2$, il y a des éléments qui permutent les deux premières composantes du tore. Le résultat est donc le même. En tenant compte de la multiplication par 2 que l'on a rétabli ci-dessus, on obtient que la limite quand λ tend vers 0 du terme indexé par (F_1, F_2) dans le membre de droite de 3.1(3) est égale à

$$D^d(\xi)^{-1/2} \sum_{I_1, I_2} \Delta(\xi(I_1), \xi(I_2), c) D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2} D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2} c_{\Sigma_+}(\xi(I_1)) c_{\Sigma_-}(\xi(I_2)).$$

Rappelons à quelles conditions est soumis le couple (I_1, I_2). Il y a la condition de départ

$$(14) \qquad I_1 \sqcup I_2 = I,$$

la condition (10) et enfin il doit exister un couple (J_1, J_2) intervenant dans le calcul ci-dessus tel que (7) soit vérifié. Cette dernière condition est équivalente à

$$d_{\xi(I_1)} \leq d_+ - 2, \;\; d_{\xi(I_2)} \leq d_- - 2.$$

On peut la remplacer par la réunion des conditions

$$d_{\xi(I_1)} \leq d_+, \;\; d_{\xi(I_2)} \leq d_-$$

et

(15) si $d_{\xi(I_1)} = d_+$, $\delta_{\xi(I_1)} = \delta(q_+)$; si $d_{\xi(I_2)} = d_-$, $\delta_{\xi(I_2)} = \delta(q_-)$.

En effet, la réunion de cette condition et de (10) interdit les égalités $d_{\xi(I_1)} = d_+$ ou $d_{\xi(I_2)} = d_-$ puisque δ_1 et δ_2 sont tous deux différents de 1.

On doit maintenant traiter le premier terme du membre de droite de 3.1(3). Le calcul est essentiellement le même que ci-dessus, en remplaçant (δ_1, δ_2) par $(\delta_\sharp, 1)$. La seule différence notable est que l'on peut avoir des couples (J_1, J_2) dont l'un des termes est vide. Cela se produit pour un couple (I_1, I_2) tel que, par exemple $d_{\xi(I_2)} = d_-$. Détaillons ce cas. Il n'y a plus qu'un choix pour (J_1, J_2), à savoir $J_1 = J$ et $J_2 = \emptyset$. En supposant que $G_- \neq \{1\}$, il n'est plus vrai que les deux classes de conjugaison stable de $G_{+,reg}(F) \times G_{-,reg}(F)$ paramétrées par (I_1, I_2, J_1, J_2) donnent la même contribution. L'analogue de (13) reste vrai et la contribution du quadruplet est

$$|W(G_\sharp, T_\sharp)|^{-1} D^d(\xi)^{-1/2} D^{d_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta(J))^{1/2} D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2} \Delta(\xi(I_1), \xi(I_2), c)$$

$$(\Theta_{\Sigma_+}(y_+)\Theta_{\Sigma_-}(y_-) + \Theta_{\Sigma_+}(y_+')\Theta_{\Sigma_-}(y_-')),$$

où (y_+, y_-) et (y_+', y_-') sont les deux classes de conjugaison stable en question. Comme précédemment, quand λ tend vers 0, les termes $D^{d_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta(J))^{1/2}\Theta_{\Sigma_+}(y_+)$ et $D^{d_+}(\xi(I_1) \sqcup$

$\zeta(J))^{1/2}\Theta_{\Sigma_+}(y'_+)$ tendent tous deux vers $w(J)D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2}c_{\Sigma_+}(\xi(I_1))$. Ici $w(J)=|W(G_\sharp,T_\sharp)|$. La limite de l'expression précédente est donc

$$D^d(\xi)^{-1/2}D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2}D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2}\Delta(\xi(I_1),\xi(I_2),c)c_{\Sigma_+}(\xi(I_1))(\Theta_{\Sigma_-}(y_-)+\Theta_{\Sigma_-}(y'_-)).$$

Les deux éléments y_- et y'_- sont les deux classes de conjugaison stable dans $G_{-,reg}(F)$ paramétrées par $\xi(I_2)$. Par définition, la dernière somme ci-dessus est égale à $c_{\Sigma_-}(\xi(I_2))$, cf. 3.2. La contribution du couple (I_1,I_2) a donc la même forme que précédemment. On laisse un calcul plus détaillé au lecteur. Le résultat est le même que ci-dessus, en remplaçant dans la condition (10) le couple (δ_1,δ_2) par le couple $(\delta_\sharp,1)$.

Faisons maintenant la somme des contributions de tous les termes du membre de droite de 3.1(3). Notons que pour tout couple (I_1,I_2), il y a un unique couple (δ_1,δ_2) (en incluant ce dernier couple $(\delta_\sharp,1)$) tel que (10) soit vérifié. On obtient alors la formule

$$(16)\qquad c_\Sigma(x(\xi,c))=D^d(\xi)^{-1/2}\sum_{I_1,I_2}\Delta(\xi(I_1),\xi(I_2),c)B(I_1,I_2),$$

où on somme sur les (I_1,I_2) vérifiant (14) et (15) et où l'on a posé

$$B(I_1,I_2)=D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2}D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2}c_{\Sigma_+}(\xi(I_1))c_{\Sigma_-}(\xi(I_2))$$

On a supposé $dim(V_\sharp)\geq 4$. Le cas $dim(V_\sharp)\leq 4$ est similaire, avec encore des subtilités dues au dédoublement des classes. Le résultat est le même.

Grâce à (1), (6) et (16), on a l'égalité

$$f_1(\xi)=A(\xi)\sum_{I_1,I_2}\sum_{I'_1,I'_2}\sum_{c\in C(\xi)^\epsilon}B(I_1,I_2)B'(I'_1,I'_2)\Delta(\xi(I_1),\xi(I_2),c)\Delta(\xi(I'_1),\xi(I'_2),c),$$

où l'on somme sur les (I_1,I_2) vérifiant (14) et (15) et les (I'_1,I'_2) vérifiant (5) et où l'on a posé

$$A(\xi)=\Delta(\xi)^rD^d(\xi)^{1/2}D^{d'}(\xi)^{-1/2}.$$

Supposons $\mathbf{d}\neq 0$. On a une égalité

$$\Delta(\xi(I_1),\xi(I_2),c)\Delta(\xi(I'_1),\xi(I'_2),c)=\alpha(\prod_{i\in I_2}sgn_{F_i/F_{\pm i}}(c_i))(\prod_{i\in I'_2}sgn_{F_i/F_{\pm i}}(c_i)),$$

où α est un certain signe indépendant de c. Rappelons que $C(\xi)^\epsilon$ est une classe dans $C(\xi)$ modulo le sous-groupe $C(\xi)^1$ formé des $c=(c_i)_{i\in I}$ tels que $\prod_{i\in I}sgn_{F_i/F_{\pm i}}(c_i)=1$. La somme sur $c\in C(\xi)^\epsilon$ des termes ci-dessus n'est non nulle que si $I_2=I'_2$ ou $I_2\sqcup I'_2=I$, autrement dit que si (I_1,I_2) et (I'_1,I'_2) sont égaux à l'ordre près. Si ces deux couples sont égaux, on a

$$\Delta(\xi(I_1),\xi(I_2),c)\Delta(\xi(I'_1),\xi(I'_2),c)=1$$

pour tout c et la somme vaut $|C(\xi)^\epsilon|=2^{\mathbf{d}-1}$. Supposons $(I_1,I_2)=(I'_2,I'_1)$. La formule 1.7(1) relie le terme $\Delta(\xi(I'_1),\xi(I'_2),c)$ au facteur de transfert relatif au groupe endoscopique (G'_+,G'_-) du groupe G', . On sait que, quand on échange les deux termes G'_+ et G'_-, le facteur de transfert ne change pas si G' est déployé tandis qu'il est multiplié par -1 si G' n'est pas déployé. On en déduit

$$\Delta(\xi(I'_1),\xi(I'_2),c)=\mu(G')\Delta(\xi(I'_2),\xi(I'_1),c)$$

pour tout $c \in C_\xi^\epsilon$. La somme qui nous intéresse vaut alors $\mu(G')2^{\mathbf{d}-1}$. Donc

$$(17) \qquad f_1(\xi) = A(\xi)2^{\mathbf{d}-1}(A_1 + \mu(G')A_2),$$

où A_1 est la somme des $B(I_1, I_2)B'(I_1, I_2)$ sur les couples (I_1, I_2) vérifiant (5), (14) et (15), tandis que A_2 est la somme des $B(I_1, I_2)B'(I_2, I_1)$ sur les couples (I_1, I_2) vérifiant (14) et (15) et tels que (I_2, I_1) vérifie (5). On a supposé $\mathbf{d} \neq 0$. Supposons maintenant $\mathbf{d} = 0$, c'est-à-dire $\xi = \emptyset$. Sous l'hypothèse $\xi \in \Xi^*(q, q')$, cela implique que G et G' sont quasi-déployés, donc $\mu(G') = 1$. Il n'y a plus qu'un couple (I_1, I_2) qui intervient : le couple $(\emptyset, \emptyset)$ et on obtient

$$f_1(\xi) = A(\xi)A_1 = A_\xi A_2.$$

La formule (17) reste vraie. Considérons enfin le cas $\xi = \emptyset$ et G ou G' n'est pas quasi-déployé. Par définition, $f_1(\xi) = 0$ et $\mu(G') = -1$. Avec les définitions ci-dessus, on a $A_1 = A_2$ et la formule (17) est encore vérifiée.

Comparons les formules (17) et (2). On voit que les ensembles de sommation qui définissent A_1 et A_2 ne sont autres que $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$. Pour prouver l'égalité $f_1(\xi) = f_2(\xi)$ et la proposition, il reste à prouver que les termes que l'on somme sont égaux. Faisons-le pour les premières sommes. On fixe donc $(I_1, I_2) \in \mathcal{I}^+$ et on compare les termes indexés par ce couple dans les formules (17) et (2). Dans les deux apparaît en facteur le produit

$$2^{d_\xi - 1} c_{\Sigma_+}(\xi(I_1)) c_{\Sigma'_+}(\xi(I_1)) c_{\Sigma_-}(\xi(I_2)) c_{\Sigma'_-}(\xi(I_2)).$$

Les termes restants sont

$$(18) \qquad \Delta(\xi)^r D^d(\xi)^{1/2} D^{d'}(\xi)^{-1/2} D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2} D^{d'_+}(\xi(I_1))^{1/2} D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2} D^{d'_-}(\xi(I_2))^{1/2}$$

pour la formule (17) et

$$(19) \qquad D^{inf(d_+, d'_+)}(\xi(I_1)) D^{inf(d_-, d'_-)}(\xi(I_2)) \Delta(\xi(I_1))^{r_1^+} \Delta(\xi(I_2))^{r_2^-}$$

pour la formule (2). En utilisant 1.5(1), on a les égalités

$$\Delta(\xi)^r D^d(\xi)^{1/2} D^{d'}(\xi)^{-1/2} = \Delta(\xi)^{-1/2},$$

$$\begin{aligned} D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2} D^{d'_+}(\xi(I_1))^{1/2} &= D^{inf(d_+, d'_+)}(\xi(I_1)) \Delta(\xi(I_1))^{(max(d_+, d'_+) - inf(d_+, d'_+))/2} \\ &= D^{inf(d_+, d'_+)}(\xi(I_1)) \Delta(\xi(I_1))^{r_1^+ + 1/2}, \end{aligned}$$

et de même

$$D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2} D^{d'_-}(\xi(I_2))^{1/2} = D^{inf(d_-, d'_-)}(\xi(I_2)) \Delta(\xi(I_2))^{r_2^- + 1/2}.$$

Donc (18) est le produit de (19) et de $\Delta(\xi)^{-1/2} \Delta(\xi(I_1))^{1/2} \Delta(\xi(I_2))^{1/2}$. Ce dernier terme vaut 1. Cela achève la démonstration. $\square$

3.4 Transfert de valeurs de facteurs ϵ

On considère deux espaces U et U' comme en 2.3 et deux espaces quadratiques (V,q) et (V',q'), dont on note G et G' les groupes spéciaux orthogonaux. On suppose $dim(V) = dim(U) = d$, $dim(V') = dim(U') = d'$ et G et G' quasi-déployés. Le groupe G est un groupe endoscopique de $\tilde{M}$ et G' est un groupe endoscopique de $\tilde{M}'$. On utilise les facteurs de transfert définis en 1.8.

On considère une combinaison linéaire finie

$$\Sigma = \sum_k a_k \sigma_k,$$

où les σ_k appartiennent à $Temp(G(F))$. On considère une combinaison linéaire analogue Σ' relative au groupe G'. On considère une combinaison linéaire finie

$$\Pi = \sum_k b_k \pi_k,$$

où les π_k appartiennent à $Temp(M(F))$ et sont autoduales. Chaque π_k se prolonge en une représentation $\tilde{\pi}_k$ de $\tilde{M}(F)$, cf. 2.3. On pose

$$\tilde{\Pi} = \sum_k b_k \tilde{\pi}_k.$$

On considère une combinaison linéaire analogue Π' relative au groupe M', dont on déduit une combinaison linéaire $\tilde{\Pi}'$. Par linéarité, on définit les caractères $\Theta_{\tilde{\Pi}}$ et $\Theta_{\tilde{\Pi}'}$. On suppose :

• les caractères Θ_Σ et $\Theta_{\Sigma'}$ sont stables ;

• $\Theta_{\tilde{\Pi}}$ est le transfert de Θ_Σ et $\Theta_{\tilde{\Pi}'}$ est le transfert de $\Theta_{\Sigma'}$.

Notons -1 l'élément central de $G(F)$ qui agit sur V par multiplication par -1. Toute représentation irréductible σ de $G(F)$ possède un caractère central ω_σ. Posons

$$\Sigma(-1) = \sum_k a_k \omega_{\sigma_k}(-1)\sigma_k.$$

Si une distribution localement intégrable D sur $G(F)$ est stablement invariante, la distribution $g \mapsto D(-g)$ l'est aussi. Donc $\Theta_{\Sigma(-1)}$ est stable et on peut définir $S(\Sigma(-1),\Sigma')$.

En prolongeant par bilinéarité l'application $(\pi,\pi') \mapsto \epsilon_{geom,\nu_1}(\pi,\pi')$ de 2.3, on définit $\epsilon_{geom,\nu_1}(\Pi,\Pi')$.

Proposition. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$\epsilon_{geom,\nu_1}(\Pi,\Pi') = (\delta(q), 2\nu_1)_F S(\Sigma(-1),\Sigma').$$

Preuve. On suppose comme toujours $d < d'$. D'après 2.4(1), le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé est une intégrale sur $\mathcal{X}(d,d')$, qui est un revêtement de $\Xi^*(d,d')$. Le membre de droite est une intégrale sur $\Xi^*(q,q')$, qui est inclus dans $\Xi^*(d,d')$. On peut donc écrire l'égalité de l'énoncé sous la forme

$$\int_{\Xi^*(d,d')} f_1(\xi)d\xi = \int_{\Xi^*(d,d')} f_2(\xi)d\xi.$$

Il suffit de fixer $\xi \in \Xi^*(d,d')$ et de prouver l'égalité $f_1(\xi) = f_2(\xi)$.

Fixons donc $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \Xi^*(d,d')$. Posons $\mathbf{d} = d_\xi$. La fibre de $\mathcal{X}(d,d')$ au-dessus de ξ est en bijection avec $\mathcal{M}(\mathbf{d}) \times \Gamma_{pair}(\xi)$. Pour un élément (μ,γ) de cet ensemble, notons $\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)$ l'élément de la fibre paramétré par (μ,γ). En se rappelant que l'on doit tenir compte du jacobien de l'application de $\mathcal{X}(d,d')$ vers $\Xi^*(d,d')$, de la formule 2.4(1) se déduit l'égalité

$$f_1(\xi) = c(\mathbf{d})|2|_F^{r^2+r+r(d-\mathbf{d})-\mathbf{d}/2} \sum_{(\mu,\gamma)\in\mathcal{M}(\mathbf{d})\times\Gamma_{pair}(\xi)} c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma))c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma))$$

$$D^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma))\Delta(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma))^r.$$

On a l'égalité $\Delta(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)) = \Delta(\xi)$. Il est clair que $D^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma))$ ne dépend que de d et ξ. Notons-le $\tilde{D}^d(\xi)$. On obtient

$$(1) \qquad f_1(\xi) = c(\mathbf{d})|2|_F^{r^2+r+r(d-\mathbf{d})-\mathbf{d}/2}\tilde{D}^d(\xi)\Delta(\xi)^r$$

$$\sum_{(\mu,\gamma)\in\mathcal{M}(\mathbf{d})\times\Gamma_{pair}(\xi)} c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma))c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)).$$

La seconde fonction est donnée par

$$(2) \qquad f_2(\xi) = \begin{cases} 2^{\mathbf{d}}(\delta(q), 2\nu_1)_F c_{\Sigma(-1)}(\xi)c_{\Sigma'}(\xi)D^d(\xi)\Delta(\xi)^r, & \text{si } \xi \in \Xi^*(q,q'), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(\mu,\gamma) \in \mathcal{M}(\mathbf{d}) \times \Gamma_{pair}(\xi)$. Introduisons l'espace quadratique $(U_{\mathbf{d}}, q_{\mathbf{d},\mu})$ de 2.4. Notons-le plutôt $(V_\sharp, q_\sharp)$ et notons $(V'_\sharp, q'_\sharp)$ la somme orthogonale $(V_\sharp, q_\sharp)\oplus(Z_{2r+1}, q_{2r+1,-\nu_1})$. Notons $G_\sharp$ et $G'_\sharp$ les groupes spéciaux orthogonaux de ces espaces. L'élément $\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)$ de $\tilde{M}'(F)$ (ou plus exactement un représentant de cette classe) a pour commutant connexe le produit d'un tore et de $G'_\sharp$. Ce dernier groupe est déployé et $c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma))$ est donné par une formule analogue à 3.1(1), c'est-à-dire

$$(3) \qquad c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)) = |W(G'_\sharp, T_\sharp)|^{-1} lim_{\lambda\to 0}\Theta_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)exp(\lambda Y_\sharp))D^{G'_\sharp}(\lambda Y_\sharp)^{1/2}.$$

En tant qu'élément de $\mathfrak{g}'_\sharp(F)$, la classe de conjugaison de $Y_\sharp$, qui est égale à sa classe de conjugaison stable, est paramétrée par $(J, (F_{\pm j})_{j\in J}, (F_j)_{j\in J}, (Y_j)_{j\in J})$, où $J = \{1, ..., (d' - \mathbf{d} - 1)/2\}$ et, pour tout $j \in J$, $F_{\pm j} = F$, $F_j = F \oplus F$ et Y_j est un élément de $F_j^\times$ tel que $Y_j + \tau_j(Y_j) = 0$. Cela signifie que l'on peut décomposer $(V'_\sharp, q'_\sharp)$ en somme orthogonale

$$D \oplus (\oplus_{j\in J} F_j),$$

où D est une droite et chaque F_j est un plan hyperbolique, et Y agit par multiplication par 0 sur D et par Y_j sur F_j. La restriction de $q'_\sharp$ à D est forcément équivalente à la forme $(\alpha,\alpha') \mapsto 2\mu\alpha\alpha'$ sur F. On en déduit le paramétrage de $\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)exp(\lambda Y_\xi)$ dans $\tilde{M}'(F)$. Sa classe de conjugaison stable est paramétrée par $\xi\sqcup\zeta$, où $\zeta = (J, (F_{\pm j})_{j\in J}, (F_j)_{j\in J}, (exp(2\lambda Y_j))_{j\in J})$. Sa classe de conjugaison est paramétrée par l'élément supplémentaire $(2\mu,\gamma)$ de $\Gamma_{imp}(\xi\sqcup\zeta)$. D'après 1.6(2) et 1.8(1), l'égalité (3) se transforme en

$$c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)) = |W(G'_\sharp, T_\sharp)|^{-1} lim_{\lambda\to 0}\Delta(\xi\sqcup\zeta, (2\mu,\gamma))d'(\lambda)\Theta_{\Sigma'}(\xi\sqcup\zeta),$$

où on a posé

$$d'(\lambda) = D_0^{\tilde{M}'}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma))^{-1/2}D^{G'_\sharp}(\lambda Y_\sharp)^{1/2}D^{d'}(\xi\sqcup\zeta)^{1/2}.$$

On vérifie comme en 3.3(4) l'égalité

$$\Delta(\xi \sqcup \zeta, (2\mu, \gamma)) = \Delta(\xi, (2\mu, \gamma)).$$

En se reportant à la définition de la fonction $D_0^{\tilde{M}'}$, cf. 1.6, on voit que

$$D_0^{\tilde{M}'}(\tilde{x}) = |2|_F^{-(d'+1)/2} D^{\tilde{M}'}(\tilde{x})$$

pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}'_{reg}(F)$. L'exposant $-(d'+1)/2$ est obtenu ainsi : notons T le commutant de $M'_{\tilde{x}}$ dans M' ; alors l'exposant est $dim(M'_{\tilde{x}}) - dim(T)$. On obtiendrait $-d/2$ si l'on remplaçait $\tilde{M}'$ par $\tilde{M}$. Donc

$$d'(\lambda) = |2|_F^{(d'+1)/4} \tilde{D}^{d'}(\xi)^{-1/2} D^{d'}(\xi \sqcup \zeta)^{1/2}.$$

La formule 3.1(1) montre que

$$|W(G'_\sharp, T_\sharp)|^{-1} lim_{\lambda \to 0} D^{d'}(\xi \sqcup \zeta)^{1/2} \Theta_{\Sigma'}(\xi \sqcup \zeta) = D^{d'}(\xi)^{1/2} c_{\Sigma'}(\xi).$$

D'où

$$(4) \qquad c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi, \mu, \gamma)) = |2|_F^{(d'+1)/4} \tilde{D}^{d'}(\xi)^{-1/2} D^{d'}(\xi)^{1/2} \Delta(\xi, (2\mu, \gamma)) c_{\Sigma'}(\xi).$$

Calculons maintenant $c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \mu, \gamma))$ en supposant d'abord $dim(V_\sharp) \geq 4$. Alors ce terme est donné par une formule analogue à 3.1(3). Considérons la contribution d'un couple $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}_\sharp$. Il intervient un terme $\Theta_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \mu, \gamma) exp(\lambda Y^\epsilon_{F_1,F_2}))$. Comme ci-dessus, on peut le calculer comme une somme sur les éléments $y \in G_{reg}(F)/stconj$ qui correspondent à la classe de conjugaison stable de $\tilde{x}(\xi, \mu, \gamma) exp(\lambda Y^\epsilon_{F_1,F_2})$. Ces y ne dépendent pas de ϵ. Le terme que l'on somme est le produit de

$$\Delta_{G,\tilde{M}}(y, \tilde{x}(\xi, \mu, \gamma) exp(\lambda Y^\epsilon_{F_1,F_2}))$$

et d'un terme qui ne dépend pas de ϵ. Le point est qu'en se reportant à la formule 1.8(2) qui calcule ce facteur de transfert, on voit que le facteur ci-dessus ne dépend pas non plus de ϵ. Puisque ϵ intervient en facteur dans la formule 3.1(3), la somme sur ϵ de ces termes est nulle. Il ne reste que la contribution du premier terme de 3.1(3). En tant qu'élément de $\mathfrak{g}_\sharp(F)$, la classe de conjugaison stable de $Y_\sharp$ est paramétrée par $(J, (F_{\pm j})_{j \in J}, (F_j)_{j \in J}, (Y_j)_{j \in J})$, où :

- $J = \{1, ..., (d - \mathbf{d})/2\}$;
- si $\delta(q_\sharp) = 1$, $F_{\pm j} = F$ et $F_j = F \oplus F$ pour tout $j \in J$; si $\delta(q_\sharp) \neq 1$, il en est ainsi pour tout $j \in J \setminus \{1\}$, tandis que $F_{\pm 1} = F$ et $F_1 = F(\sqrt{\delta(q_\sharp)})$;
- pour tout $j \in J$, Y_j est un élément de $F_j^\times$ tel que $Y_j + \tau_j(Y_j) = 0$.

La classe de conjugaison stable de $\tilde{x}(\xi, \mu, \gamma) exp(\lambda Y_\sharp)$ est paramétrée par $\xi \sqcup \zeta$, où $\zeta = (J, (F_{\pm j})_{j \in J}, (F_j)_{j \in J}, (exp(2\lambda Y_j))_{j \in J})$. Si $\delta_\sharp = 1$, sa classe de conjugaison est paramétrée par l'élément supplémentaire $\gamma \in \Gamma_{pair}(\xi \sqcup \zeta) = \Gamma_{pair}(\xi)$. Poursuivons le calcul en supposant $\delta(q_\sharp) \neq 1$, le cas où ce terme vaut 1 ne différant que par les notations. L'espace quadratique $V_\sharp$ est somme orthogonale des F_j pour $j \in J$. Pour $j \neq 1$, F_j est un plan hyperbolique. Pour $j = 1$, F_1 est muni d'une forme $(v, v') \mapsto trace_{F_1/F}(\tau_1(v) v' \eta)$. Mais, par définition de l'espace quadratique $(U_{\mathbf{d}}, q_{\mathbf{d},\mu})$, on sait que $V_\sharp$ est somme orthogonale de plans hyperboliques et d'un plan F^2 muni de la forme

$$((\alpha, \beta), (\alpha', \beta')) \mapsto 2\mu\alpha\alpha' + 2\nu_1 \beta\beta'.$$

On en déduit les égalités $\delta(q_\sharp) = -\nu_1\mu$ et $\eta \equiv \mu \; mod \; Norm_{F_1/F}(F_1^\times)$. Notons $\gamma_\sharp$ la famille indexée par l'unique élément $1 \in J$, dont l'unique élément est $\mu exp(\lambda Y_1)$. On voit alors que la classe de conjugaison de $\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)exp(\lambda Y_\sharp)$ est paramétrée par le terme supplémentaire $\gamma \sqcup \gamma_\sharp \in \Gamma_{pair}(\xi \sqcup \zeta)$. .

Si $\delta_{\xi\sqcup\zeta} \neq \delta(q)$, il ne correspond à $\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)exp(\lambda Y_\sharp)$ aucun élément de $G_{reg}(F)/stconj$. Alors $\Theta_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)exp(\lambda Y_\sharp)) = 0$. Supposons $\delta_{\xi\sqcup\zeta} = \delta(q)$. En vertu du calcul de $\delta_\zeta = \delta(q_\sharp)$ ci-dessus, cette condition équivaut à $-\nu_1\mu\delta_\xi = \delta(q)$. Dans ce cas, il y a deux éléments de $G_{reg}(F)/stconj$ qui correspondent à $\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)exp(\lambda Y_\sharp)$. Comme dans le calcul de 3.3, ces deux éléments ont en fait la même contribution. Le fait qu'il y en ait deux va simplement multiplier le résultat par 2. Ces éléments sont paramétrés par $-(\xi \sqcup \zeta)$. On obtient

$$c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma)) = 2|W(G_\sharp,T_\sharp)|^{-1} lim_{\lambda\to 0}\Delta(\xi\sqcup\zeta,\gamma\sqcup\gamma_\sharp)d(\lambda)\Theta_\Sigma(-(\xi\sqcup\zeta)),$$

où l'on a posé

$$d(\lambda) = D_0^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi,\mu,\gamma))^{-1/2}D^{G_\sharp}(\lambda Y_\sharp)^{1/2}D^d(-(\xi\sqcup\zeta)).$$

On calcule comme ci-dessus

$$d(\lambda) = |2|_F^{d/4}\tilde{D}^d(\xi)^{-1/2}D^d(-(\xi\sqcup\zeta))^{1/2}.$$

Montrons que

(5) supposons $-\nu\mu\delta_\xi = \delta(q)$; alors on a l'égalité

$$\Delta(\xi\sqcup\zeta,\gamma\sqcup\gamma_\sharp) = (\delta(q),2\nu_1)_F\Delta(\xi,\gamma)\prod_{i\in I} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(-2\mu).$$

Le rapport $\Delta(\xi\sqcup\zeta,\gamma\sqcup\gamma_\sharp)\Delta(\xi,\gamma)^{-1}$ est le produit de termes indexés par I et, dans le cas où $\delta(q_\sharp)\neq 1$, d'un terme supplémentaire indexé par $j = 1 \in J$. Faisons le calcul dans le cas où $\delta(q_\sharp) \neq 1$. Soit $i \in I$. Le terme correspondant est $sgn_{F_i/F_{\pm i}}(B_i)$, où

$$B_i = P_\xi(1)^{-1}P'_\xi(y_i)^{-1}P_{\xi\sqcup\zeta}(1)P'_{\xi\sqcup}(y_i)y_i^{-|J|}.$$

Ecrivons $exp(2\lambda Y_j) = (a_j, a_j^{-1}) \in F \oplus F$ pour $j \in J \setminus \{1\}$. Alors B_i est le produit des $y_i^{-1}(y_i - a_j)(y_i - a_j^{-1})(1-a_j)(1-a_j^{-1})$ sur ces j et du terme

$$y_i^{-1}(y_i - exp(2\lambda Y_1))(y_i - exp(-2\lambda Y_1))(1-exp(2\lambda Y_1))(1-exp(-2\lambda Y_1)).$$

Les premiers termes sont égaux à $Norm_{F_i/F_{\pm i}}((y_i-a_j)(1-a_j^{-1}))$. Pour λ proche de 0, le terme restant est proche de

$$-4\lambda^2Y_1^2y_i^{-1}(y_i-1)^2.$$

Puisque $Y_1+\tau_1(Y_1) = 0$ et $F_1 = F(\sqrt{\delta(q_\sharp)})$, Y_1^2 est le produit de $\delta(q_\sharp)$ et d'un élément de $F^{\times,2}$. Le terme ci-dessus est alors le produit de $\delta(q_\sharp)Norm_{F_i/F_{\pm i}}(y_i-1))$ et d'un élément de $F^{\times,2}$. D'où

$$sgn_{F_i/F_{\pm i}}(B_i) = sgn_{F_i/F_{\pm i}}(\delta(q_\sharp)).$$

On se rappelle que $\delta(q_\sharp) = -\nu_1\mu$ et que l'on a fixé un élément δ_i de $F_{\pm i}^\times$ tel que $F_i = F_{\pm i}(\sqrt{\delta_i})$. Pour tout $\alpha \in F^\times$, on a l'égalité

$$sgn_{F_i/F_{\pm i}}(\alpha) = (Norm_{F_{\pm i}/F}(\delta_i),\alpha)_F$$

cf. [S] p.216, exercice. Donc

$$sgn_{F_i/F_{\pm i}}(B_i)=(Norm_{F_{\pm i}/F}(\delta_i),2\nu_1)_F sgn_{F_i/F_{\pm i}}(-2\mu),$$

puis, en se rappelant la définition $\delta_\xi=\prod_{i\in I}Norm_{F_{\pm i}/F}(\delta_i)$,

$$(6)\qquad \prod_{i\in I}sgn_{F_i/F_{\pm i}}(B_i)=(\delta_\xi,2\nu_1)_F\prod_{i\in I}sgn_{F_i/F_{\pm i}}(-2\mu).$$

Le terme supplémentaire est $sgn_{F_1/F}(B_1)$, où

$$B_1=-\mu exp(-\lambda Y_1)P_{\xi\sqcup\zeta}(1)P'_{\xi\sqcup\zeta}(exp(2\lambda Y_1))exp(2\lambda Y_1)^{1-d_{\xi\sqcup\zeta}/2}(exp(2\lambda Y_1)-1).$$

On peut décomposer $B_1=D_1D_2D_3$, où

$$D_1=-\mu exp(-\lambda Y_1)(1-exp(2\lambda Y_1))(1-exp(-2\lambda Y_1))(exp(2\lambda Y_1)-exp(-2\lambda Y_1))(exp(2\lambda Y_1)-1),$$

$$D_2=P_\xi(1)P_\xi(exp(2\lambda Y_1))exp(2\lambda Y_1)^{-d_\xi/2},$$

$$D_3=\prod_{j\in J\setminus\{1\}}(1-a_j)(1-a_j)^{-1}(exp(2\lambda Y_1)-a_j)(exp(2\lambda Y_1-a_j^{-1})exp(2\lambda Y_1)^{-1}.$$

On voit comme ci-dessus que D_3 est une norme de l'extension F_1/F. Pour λ proche de 0, D_2 est proche de $P_\xi(1)^2$, qui est aussi une norme. Enfin, D_1 est proche de $2^5\mu\lambda^4Y_1^4$, qui est le produit de 2μ et d'une norme. On obtient

$$sgn_{F_1/F}(B_1)=sgn_{F_1/F}(2\mu)=(\delta(q_\sharp),2\mu)_F.$$

D'après cette relation et l'égalité (6), il suffit, pour prouver (5), de prouver l'égalité

$$(\delta_\xi,2\nu_1)_F(\delta(q_\sharp),2\mu)_F=(\delta(q),2\nu_1)_F.$$

Cela résulte des égalités $-2\mu=2\nu_1\delta(q_\sharp)$ et $\delta_\xi\delta(q_\sharp)=\delta(q)$. □

On a les égalités $\Theta_\Sigma(-(\xi\sqcup\zeta))=\Theta_{\Sigma(-1)}(\xi\sqcup\zeta)$ et $D^d(-(\xi\sqcup\zeta))=D^d(\xi\sqcup\zeta)$. La formule 3.1(4) montre que

$$|W(G_\sharp,T_\sharp)|^{-1}lim_{\lambda\to 0}D^d(\xi\sqcup\zeta)^{1/2}\Theta_{\Sigma(-1)}(\xi\sqcup\zeta)=D^d(\xi)^{1/2}c_{\Sigma(-1)}(\xi).$$

On obtient finalement

• si $\mu=-\nu_1\delta_\xi\delta(q)$,

$$(7)\qquad c_{\tilde\Pi}(\tilde x(\xi,\mu,\gamma))=2|2|_F^{d/4}\tilde D^d(\xi)^{-1/2}D^d(\xi)^{1/2}c_{\Sigma(-1)}(\xi)(\delta(q),2\nu_1)_F\Delta(\xi,\gamma)\prod_{i\in I}sgn_{F_i/F_{\pm i}}(-2\mu);$$

• si $\mu\neq-\nu_1\delta_\xi\delta(q)$, $c_{\tilde\Pi}(\tilde x(\xi,\mu,\gamma))=0$.

On a supposé $dim(V_\sharp)\geq 4$. Un calcul similaire vaut si $dim(V_\sharp)=2$. Si $dim(V_\sharp)=0$, il y a une différence. Supposons $d\geq 2$. Il y a encore deux éléments de $G_{reg}(F)/stconj$ paramétrés par $-\xi$ (ici, ζ disparaît). Ils n'ont plus de raison de donner la même contribution. Mais, dans ce cas, $c_{\Sigma(-1)}(\xi)$ est justement défini comme la somme des valeurs de $\Theta_{\Sigma(-1)}$ sur ces deux éléments. On obtient la même formule, privée du premier facteur 2. Si $d=0$, il n'y a plus qu'une classe de conjugaison stable, et obtient le même résultat. En se reportant à la définition de $c(\mathbf{d})$, on voit que le résultat ci-dessus est général, à condition de remplacer le premier facteur 2 par $c(\mathbf{d})^{-1}$.

Revenons à la formule (1). D'après le résultat ci-dessus, la somme en (μ, γ) est limitée au sous-ensemble de ces couples pour lesquels $\mu = -\nu_1\delta_\xi\delta(q)$. Mais μ appartient à $\mathcal{M}(\mathbf{d})$. Si $\mathbf{d} < d$, on a $\mathcal{M}(\mathbf{d}) = F^\times/F^{\times,2}$ et il n'y a pas de problème. Par contre, si $\mathbf{d} = d$, on a $\mathcal{M}(\mathbf{d}) = \{-\nu_1\}$, et l'appartenance de μ à cet ensemble impose $\delta_\xi = \delta(q)$, ce qui équivaut à $\xi \in \Xi^*(q, q')$. Si $\xi \notin \Xi^*(q, q')$, la somme est donc vide et $f_1(\xi) = 0$. On a aussi $f_2(\xi) = 0$, d'où l'égalité cherchée dans ce cas. Supposons désormais $\xi \in \Xi^*(q, q')$. On vérifie sur les définitions que le facteur $\Delta(\xi, (2\mu, \gamma))$ qui intervient dans l'égalité (4) est égal à

$$\Delta(\xi, \gamma) \prod_{i \in I} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(-2\mu).$$

Alors le produit de (4) et de (7) devient indépendant de (μ, γ). Sommer sur ce couple revient à multiplier par le nombre d'éléments de l'ensemble de sommation. On a déjà dit que μ était en fait fixé. Ce nombre d'éléments est donc celui de $\Gamma_{pair}(\xi)$, c'est-à-dire $2^{\mathbf{d}}$. En utilisant (4) et (7) (où l'on se rappelle que le premier facteur 2 doit être remplacé par $c(\mathbf{d})^{-1}$), on obtient la formule suivante. Posons

$$r(\xi) = r^2 + r + r(d - \mathbf{d}) - \mathbf{d}/2 + (d' + 1)/4 + d/4,$$
$$E(\xi) = |2|_F^{r(\xi)} \tilde{D}^d(\xi)^{1/2} \tilde{D}^{d'}(\xi)^{-1/2} D^d(\xi)^{-1/2} D^{d'}(\xi)^{1/2}.$$

Alors

$$f_1(\xi) = 2^{\mathbf{d}}(\delta(q), 2\nu_1)_F E(\xi) c_{\Sigma(-1)}(\xi) c_{\Sigma'}(\xi) D^d(\xi) \Delta(\xi)^r.$$

D'après (2), pour démontrer l'égalité $f_1(\xi) = f_2(\xi)$, il reste à prouver l'égalité $E(\xi) = 1$. On doit calculer $\tilde{D}^d(\xi)$ et $\tilde{D}^{d'}(\xi)$. Pour cela, on écrit $U = W_{\mathbf{d}} \oplus U_{\mathbf{d}}$ comme en 2.4. On représente un élément $\tilde{x}$ de la classe de conjugaison stable de $\tilde{G}_{reg}(F)$ paramétré par ξ comme la somme d'une forme bilinéaire sur $W_{\mathbf{d}}$ elle-aussi paramétrée par ξ et d'une forme bilinéaire symétrique sur $U_{\mathbf{d}}$. Notons M_1 et M_2 les groupes linéaires $GL(W_{\mathbf{d}})$ et $GL(U_{\mathbf{d}})$. On a la décomposition

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{m}_2,$$

où

$$\mathfrak{r} = (W_{\mathbf{d}} \otimes_F U_{\mathbf{d}}^*) \oplus (W_{\mathbf{d}}^* \otimes_F U_{\mathbf{d}}).$$

L'automorphisme $1 - \theta_{\tilde{x}}$ respecte cette décomposition, donc $\tilde{D}^d(\xi)$ est produit de trois termes. Chacun d'eux est la valeur absolue du déterminant de $1 - \theta_{\tilde{x}}$ agissant sur un facteur de la décomposition ci-dessus, quotienté par le noyau de cet automorphisme. Le terme correspondant au facteur $\mathfrak{m}_1$ n'est autre que $\tilde{D}^{\mathbf{d}}(\xi)$. On vérifie que $\theta_{\tilde{x}}$ agit sans point fixe sur $\mathfrak{r}$ et que le terme correspondant à ce facteur est $\Delta(\xi)^{dim(U_{\mathbf{d}})} = \Delta(\xi)^{d-\mathbf{d}}$. Sur $\mathfrak{m}_2$, $\theta_{\tilde{x}}$ n'a que deux valeurs propres, 1 et -1. L'espace propre pour 1 est l'algèbre de Lie d'un groupe spécial orthogonal. Il est de dimension $dim(U_{\mathbf{d}})(dim(U_{\mathbf{d}}) - 1)/2$. L'espace propre pour -1 est donc de dimension $dim(U_{\mathbf{d}})^2 - dim(U_{\mathbf{d}})(dim(U_{\mathbf{d}}) - 1)/2 = (d - \mathbf{d})(d - \mathbf{d} + 1)/2$. Chaque valeur propre -1 contribue par $|2|_F$. Le terme correspondant à $\mathfrak{m}_2$ est donc $|2|_F^{(d-\mathbf{d})(d-\mathbf{d}+1)/2}$, et finalement

$$\tilde{D}^d(\xi) = |2|_F^{(d-\mathbf{d})(d-\mathbf{d}+1)/2} \Delta(\xi)^{d-\mathbf{d}} \tilde{D}^{\mathbf{d}}(\xi).$$

Une même formule vaut pour $\tilde{D}^{d'}(\xi)$. En utilisant ces formules ainsi que 1.5(1), on obtient $E(\xi) = |2|_F^{s(\xi)}$, où

$$s(\xi) = r(\xi) + (d - \mathbf{d})(d - \mathbf{d} + 1)/4 - (d' - \mathbf{d})(d' - \mathbf{d} + 1)/4.$$

Un simple calcul montre que $s(\xi) = 0$, donc $E(\xi) = 1$, ce qui achève la démonstration. $\square$

3.5 Une première conséquence

Conservons les espaces et les groupes du paragraphe précédent.

Corollaire. *(i) Soient Σ' comme en 3.4, π' un élément autodual de $Temp(M'(F))$ et $b' \in \mathbb{C}^\times$. Supposons que $\Theta_{\Sigma'}$ soit stable et que $b'\Theta_{\tilde{\pi}'}$ soit le transfert de $\Theta_{\Sigma'}$. Alors le caractère central $\omega_{\pi'}$ est trivial.*

(ii) Soient Σ comme en 3.4, π un élément autodual de $Temp(M(F))$ et $b \in \mathbb{C}^\times$. Supposons que Θ_Σ soit stable et que $b\Theta_{\tilde{\pi}}$ soit le transfert de Θ_Σ. Alors le caractère central ω_π est égal au caractère $\alpha \mapsto (\delta(q), \alpha)_F$.

(iii) Soient Σ', π' et b' vérifiant les hypothèses de (i) et Σ, π et b vérifiant les hypothèses de (ii). On a l'égalité

$$bb'(\delta(q), -1)_F^{(d'-1)/2}\epsilon(1/2, \pi \times \pi', \psi_F) = S(\Sigma(-1), \Sigma').$$

Remarque. La dépendance de ψ_F du premier terme ci-dessus n'est qu'apparente, car b et b' dépendent aussi de ψ_F. En effet, les hypothèses sont que $b\Theta_{\tilde{\pi}}$ et $b'\Theta_{\tilde{\pi}'}$ sont des transferts de Θ_Σ et $\Theta_{\Sigma'}$. Mais les normalisations que l'on a choisies de $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ dépendent de ψ_F.

Preuve. Dans la situation de (iii), la proposition précédente et le résultat rappelé en 2.3 entraînent

(1) $$bb'\omega_\pi((-1)^{(d'-1)/2}2\nu_1)\omega_{\pi'}((-1)^{1+d/2}2\nu_1)\epsilon(1/2, \pi\times\pi', \psi_F) = (\delta(q), 2\nu_1)_F S(\Sigma(-1), \Sigma').$$

L'élément ν_1 est un ingrédient de la preuve, mais on peut le choisir quelconque et ni le facteur ϵ, ni le terme $S(\Sigma(-1), \Sigma')$ n'en dépendent. L'égalité ci-dessus étant vraie pour tout ν_1, le caractère $\omega_\pi\omega_{\pi'}$ est forcément égal à $\alpha \mapsto (\delta(q), \alpha)_F$.

Dans la situation de (i), on remplace l'espace V par 0, on complète les données Σ', π' et b' par Σ réduit à l'unique représentation irréductible de $G(F) = \{1\}$, π l'unique représentation irréductible de $M(F) = \{1\}$ et $b = 1$. Alors $\omega_\pi = 1$ et $\delta(q) = 1$. La relation que l'on vient de prouver entraîne que $\omega_{\pi'} = 1$.

Dans la situation de (ii), on remplace l'espace V' par une droite, on complète les données Σ, π et b par Σ' réduit à l'unique représentation irréductible de $G'(F) = \{1\}$, π' la représentation triviale de $M'(F) = F^\times$ et $b' = 1$. On vérifie aisément que ces données satisfont les hypothèses requises. De nouveau, la relation ci-dessus entraîne la conclusion de (ii).

En revenant à la situation de (iii), on remplace dans l'égalité (1) les caractères par leurs valeurs que l'on vient de calculer et on obtient la relation cherchée. □

4 Preuve du théorème principal

4.1 Représentations du groupe de Weil-Deligne

On note W_F le groupe de Weil de $\bar{F}/F$ et W_{DF} le groupe de Weil-Deligne, c'est-à-dire $W_{DF} = W_F \times SL(2, \mathbb{C})$. Pour tout entier $N \geq 1$, notons $\Phi_{temp}(GL(N))$ l'ensemble des classes de conjugaison par $GL(N, \mathbb{C})$ d'homomorphismes continus $\varphi : W_{DF} \to GL(N, \mathbb{C})$ qui vérifient les conditions suivantes :

• φ est semi-simple ;
• la restriction de φ à $SL(2,\mathbb{C})$ est algébrique ;
• φ est tempéré, c'est-à-dire que l'image de W_F par φ est relativement compacte.

Notons $\Phi_{temp,irr}(GL(N))$ le sous-ensemble des éléments irréductibles de $\Phi_{temp}(GL(N))$. D'après la correspondance de Langlands (théorème de Harris-Taylor et Henniart), tout $\varphi \in \Phi_{temp,irr}(GL(N))$ détermine une représentation admissible $\pi(\varphi)$ de $GL(N,F)$, qui est unitaire et de la série discrète.

Définissons une involution $\varphi \mapsto \varphi^\theta$ dans $\Phi_{temp}(GL(N))$ par $\varphi^\theta(w) = {}^t\varphi(w)^{-1}$ pour tout $w \in W_{DF}$. On note $\Phi_{temp,N}$ le sous-ensemble des $\varphi \in \Phi_{temp}(GL(N))$ tels que φ est conjugué à φ^θ et $\Phi_{temp,N,irr}$ le sous-ensemble des éléments irréductibles de $\Phi_{temp,N}$. On note $\Phi_{temp}(GL)$, Φ_{temp} etc... la réunion des $\Phi_{temp}(GL(N))$, $\Phi_{temp,N}$ etc... pour $N \geq 1$. Pour $\varphi \in \Phi_{temp}(GL)$,on note $N(\varphi)$ l'entier tel que φ appartienne à $\Phi_{temp}(GL(N))$.

Tout élément $\varphi \in \Phi_{temp,N}$ admet une décomposition

$$(1) \qquad \varphi = (\oplus_{i\in I} l_i\varphi_i) \oplus (\oplus_{j\in J} l_j(\varphi_j \oplus \varphi_j^\theta))$$

vérifiant les conditions suivantes. Les ensembles I et J sont finis et disjoints. Pour tout $i \in I$, resp. $j \in J$, l_i, resp. l_j, est un entier strictement positif. L'application $i \mapsto \varphi_i$ est injective et prend ses valeurs dans $\Phi_{temp,irr}$. L'application $j \mapsto \{\varphi_j, \varphi_j^\theta\}$ est injective et prend ses valeurs dans l'ensemble des ensembles de la forme $\{\varphi', (\varphi')^\theta\}$, où φ' est un élément de $\Phi_{temp}(GL)$ qui n'est pas autodual. On a l'égalité

$$N = (\sum_{i\in I} l_i N(\varphi_i)) + (\sum_{j\in J} 2l_j N(\varphi_j)).$$

De (1) se déduit une représentation

$$\pi(\varphi)^L = (\otimes_{i\in I}(\pi(\varphi_i)\otimes ...\otimes \pi(\varphi_i)))\otimes(\otimes_{j\in J}(\pi(\varphi_j)\otimes ...\otimes \pi(\varphi_j))\otimes(\pi(\varphi_j)^\vee \otimes ...\otimes \pi(\varphi_j)^\vee))$$

d'un groupe de Lévi $L(F)$ de $GL(N,F)$. Chaque $\pi(\varphi_i)$, resp. $\pi(\varphi_j)$, $\pi(\varphi_j)^\vee$, est répétée l_i fois, resp. l_j fois. Choisissons un sous-groupe parabolique P de composante de Lévi L et posons $\pi(\varphi) = Ind_P^{GL(N)}(\pi(\varphi)^L)$. C'est une représentation admissible, irréductible, tempérée et autoduale de $GL(N,F)$.

Posons $U_N = \mathbb{C}^N$. Plus concrètement, la décomposition (1) provient d'une décomposition

$$(2) \qquad U_N = (\oplus_{i\in I} U_{l_i} \otimes_{\mathbb{C}} U_{N(\varphi_i)}) \oplus \oplus_{j\in J}((U_{l_j} \otimes_{\mathbb{C}} U_{N(\varphi_j)}) \oplus (U_{l_j} \otimes_{\mathbb{C}} U_{N(\varphi_j)})).$$

Pour $i \in I$, le groupe W_{DF} agit sur $U_{N(\varphi_i)}$ par φ_i. Pour $j \in J$, il agit sur la première copie de $U_{N(\varphi_j)}$ par φ_j et sur la seconde copie par φ_j^θ. Il agit trivialement sur les autres espaces.

Fixons une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{C}^N$. On note $O(N,\mathbb{C})$ et $SO(N,\mathbb{C})$ ses groupes orthogonaux et spéciaux orthogonaux. Si N est pair, fixons une forme symplectique sur $\mathbb{C}^N$ et notons $Sp(N,\mathbb{C})$ son groupe symplectique. Notons $\Phi^{orth}_{temp,N}$, resp. $\Phi^{symp}_{temp,N}$ si N est pair, l'ensemble des $\varphi \in \Phi_{temp,N}$ dont l'image est incluse dans $O(N,\mathbb{C})$, resp. $Sp(N,\mathbb{C})$ (plus exactement des φ qui sont conjugués à un élément vérifiant cette propriété). Pour simplifier l'écriture, on pose $\Phi^{symp}_{temp,N} = \emptyset$ si N est impair. On pose $\Phi^{orth}_{temp,N,irr} = \Phi_{temp,N,irr} \cap \Phi^{orth}_{temp,N}$, $\Phi^{symp}_{temp,N,irr} = \Phi_{temp,N,irr} \cap \Phi^{symp}_{temp,N}$. On vérifie que $\Phi_{temp,N,irr}$ est la réunion disjointe de $\Phi^{orth}_{temp,N,irr}$ et de $\Phi^{symp}_{temp,N,irr}$. Soit $\varphi \in \Phi_{temp,N}$, que l'on écrit sous la forme (1). On note I^{orth}, resp. I^{symp}, le sous-ensemble des $i \in I$ tels que φ_i appartienne à $\Phi^{orth}_{temp,irr}$, resp. $\Phi^{symp}_{temp,irr}$. L'élément φ appartient à $\Phi^{orth}_{temp,N}$, resp.

$\Phi^{symp}_{temp,N}$, si et seulement si les coefficients l_i sont pairs pour tout $i \in I^{symp}$, resp. $i \in I^{orth}$. Soit $\varphi \in \Phi^{orth}_{temp,N}$. Par composition avec le déterminant, on obtient un caractère de W_{DF} à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Il est forcément trivial sur $SL(2,\mathbb{C})$. Sa restriction à W_F s'identifie par la théorie du corps de classes à un caractère quadratique de $F^\times$. On note $\delta(\varphi)$ l'élément de $F^\times/F^{\times,2}$ tel que ce caractère soit $a \mapsto (\delta(\varphi), a)_F$.

Il est utile de calculer le commutant S_φ dans $SO(N,\mathbb{C})$ de l'image d'un élément $\varphi \in \Phi^{orth}_{temp,N}$. Considérons la décomposition (2). L'espace U_N est muni d'une forme quadratique. Pour $i \in I$, les espaces $U_{N(\varphi_i)}$ sont munis d'une forme soit quadratique, soit symplectique. Pour $j \in J$, la première copie de $U_{N(\varphi_j)}$ est en dualité avec la seconde. De ces données s'en déduisent d'autres : pour $i \in I$, l'espace U_{l_i} est muni d'une forme du même type que celle sur $U_{N(\varphi_i)}$; pour $j \in J$, la première copie de U_{l_j} est en dualité avec la seconde. Le commutant dans $O(N,\mathbb{C})$ de l'image de φ est alors

$$(\prod_{i\in I^{orth}} O(l_i,\mathbb{C})) \times (\prod_{i\in I^{symp}} Sp(l_i,\mathbb{C})) \times (\prod_{j\in J} GL(l_j,\mathbb{C})).$$

Considérons un élément $x = ((x_i)_{i\in I^{orth}}, (x_i)_{i\in I^{symp}}, (x_j)_{j\in J})$ de ce produit. En tenant compte de la façon dont ce produit est plongé dans $O(N,\mathbb{C})$, on voit que le déterminant de x agissant dans U_N est égal à

$$\prod_{i\in I^{orth}} det(x_i)^{N(\varphi_i)}.$$

Le commutant dans $SO(N,\mathbb{C})$ est donc le sous-groupe des x tels que ce produit vaille 1. Notons $I^{orth,pair}$, resp. $I^{orth,imp}$, le sous-ensemble des $i \in I^{orth}$ tels que $N(\varphi_i)$ est pair, resp. impair. Notons S^0_φ la composante neutre de S_φ. On obtient que S_φ/S^0_φ est le sous-groupe des éléments $(e_i)_{i\in I^{orth}} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{orth}}$ tels que $\sum_{i\in I^{orth,imp}} e_i = 0$. Supposons N pair. Le centre du groupe $O(N,\mathbb{C})$ est égal à $\{\pm 1\}$. Notons z_φ l'image de -1 dans S_φ/S^0_φ. On a $z_\varphi = (l_i)_{i\in I^{orth}}$.

Supposons N pair. On calcule de même le commutant dans $Sp(N,\mathbb{C})$ de l'image d'un élément $\varphi \in \Phi^{symp}_{temp,N}$. Avec des notations similaires à celles du cas orthogonal, on obtient que $S_\varphi/S^0_\varphi = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{symp}}$ et que $z_\varphi = (l_i)_{i\in I^{symp}}$.

4.2 Conjectures pour les groupes spéciaux orthogonaux impairs

Considérons un espace quadratique (V', q') de dimension d' impaire, pour lequel on utilise les notations maintenant habituelles. On utilise les constructions de 1.7 et 1.8. En particulier, les transferts apparaissant ci-dessous sont relatifs aux facteurs de transfert définis dans ces paragraphes.

Considérons l'ensemble des homomorphismes $\varphi' : W_{DF} \to Sp(d'-1,\mathbb{C})$ tels que, par composition avec l'inclusion de ce dernier groupe dans $GL(d'-1,\mathbb{C})$, on obtienne un élément de $\Phi_{temp}(GL(d'-1))$. Notons $\Phi_{temp}(G')$ l'ensemble des classes de conjugaison par $Sp(d'-1,\mathbb{C})$ dans cet ensemble. L'application qui, à $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$, associe sa composition avec l'inclusion dans $GL(d'-1,\mathbb{C})$, est une bijection de $\Phi_{temp}(G')$ sur $\Phi^{symp}_{temp,d'-1}$. On peut identifier ces deux ensembles. On conjecture qu'il existe une partition

$$Temp(G'(F)) = \sqcup_{\varphi'\in\Phi_{temp}(G')} \Pi^{G'}(\varphi')$$

vérifiant les propriétés ci-dessous.

Fixons $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$. Notons $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$ l'ensemble des caractères ϵ' de $S_{\varphi'}/S^0_{\varphi'}$ tels que $\epsilon'(z_{\varphi'}) = 1$ si G' est déployé, $\epsilon'(z_{\varphi'}) = -1$ sinon. Alors il existe une bijection $\epsilon' \mapsto \sigma'(\varphi', \epsilon')$ de $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$ sur $\Pi^{G'}(\varphi')$. Pour $s' \in S_{\varphi'}/S^0_{\varphi'}$, on pose

$$(1) \qquad \Theta^{G'}_{s'}(\varphi') = \sum_{\epsilon' \in \mathcal{E}^{G'}(\varphi')} \epsilon'(s')\Theta_{\sigma'(\varphi',\epsilon')}.$$

Supposons G' déployé. Alors $\Theta^{G'}_0(\varphi')$ est une distribution stable (on note 0 l'élément neutre de S_φ/S^0_φ puisqu'on a adopté une notation additive). Introduisons un espace U' de dimension d' sur F et le groupe tordu $(M', \tilde{M}')$ associé. La représentation φ de W_{DF} est à valeurs dans $GL(d'-1, \mathbb{C})$. Notons $\mathbf{1}$ la représentation triviale de W_{DF} de dimension 1 et posons $\varphi'_> = \varphi' \oplus \mathbf{1}$. Alors $\varphi'_>$ est un élément de $\Phi_{temp,d'}$ et on en déduit une représentation $\pi(\varphi'_>)$ de $M'(F)$. Cette représentation est autoduale et se prolonge comme en 2.3 en une représentation $\tilde{\pi}(\varphi'_>)$ de $\tilde{M}(F)$. Rappelons que G' est un groupe endoscopique de $(M', \tilde{M}')$, cf. 1.8. Alors il existe $c^{G'}(\varphi') \in \mathbb{C}^\times$ tel que $|c^{G'}(\varphi')| = 1$ et que $c^{G'}(\varphi')\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi'_>)}$ soit le transfert de $\Theta^{G'}_0(\varphi')$.

Remarque. Introduisons un espace U de dimension $d'-1$ sur F et le groupe tordu $(M, \tilde{M})$ associé. Le groupe G' est aussi un groupe endoscopique de $(M, \tilde{M})$. Le facteur de transfert est trivial dans ce cas. Une propriété beaucoup plus caractéristique de $\Pi^{G'}(\varphi')$ est que le transfert de $\Theta^{G'}(\varphi')$ à $\tilde{M}(F)$ est un multiple de $\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi')}$. Mais nous n'utiliserons pas ce cas d'endoscopie tordue.

Revenons au cas où G' est quelconque. Introduisons des espaces quadratiques (V'_+, q'_+) et (V'_-, q'_-) vérifiant les mêmes conditions qu'en 1.7. Soient $\varphi'_+ \in \Phi_{temp}(G'_+)$ et $\varphi'_- \in \Phi_{temp}(G'_-)$. Supposons $\varphi' = \varphi'_+ \oplus \varphi'_-$. L'espace $\mathbb{C}^{d'-1}$ de φ' se décompose conformément en somme directe $\mathbb{C}^{d'_+-1} \oplus \mathbb{C}^{d'_--1}$ de sous-espaces stables par la représentation φ'. L'automorphisme qui agit par l'identité sur le premier espace et par multiplication par -1 sur le second est un élément de $S_{\varphi'}$. Notons s' son image dans $S_{\varphi'}/S^0_{\varphi'}$. Alors il existe $\gamma^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-) \in \mathbb{C}^\times$ tel que $|\gamma^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-)| = 1$ et que la distribution $\gamma^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-)\Theta^{G'}_{s'}(\varphi')$ soit le transfert de $\Theta^{G'_+}_0(\varphi'_+) \times \Theta^{G'_-}_0(\varphi'_-)$.

D'après la première remarque de 1.7, les conjectures ci-dessus sont insensibles au remplacement de q' par $\alpha q'$, pour $\alpha \in F^\times$.

4.3 Conjectures pour les groupes spéciaux orthogonaux pairs

Considérons un espace quadratique (V, q) de dimension d paire. On utilise les constructions de 1.7 et 1.8. Les transferts intervenant ci-dessous sont relatifs aux facteurs de transfert définis dans ces paragraphes.

Considérons l'ensemble des homomorphismes $\varphi : W_{DF} \to O(d, \mathbb{C})$ tels que $\delta(\varphi) = \delta(q)$ et que, par composition avec l'inclusion de $O(d, \mathbb{C})$ dans $GL(d, \mathbb{C})$, on obtienne un élément de $\Phi_{temp}(GL(d))$. Notons $\Phi_{temp}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $SO(d, \mathbb{C})$ dans cet ensemble. La composition avec l'inclusion de $O(d, \mathbb{C})$ dans $GL(d, \mathbb{C})$ définit une application de $\Phi_{temp}(G)$ dans $\Phi^{orth}_{temp,d}$. Son image est bien sûr l'ensemble des $\varphi \in \Phi^{orth}_{temp,d}$ tels que $\delta(\varphi) = \delta(q)$. Le point fâcheux est que l'application n'est pas injective en général : deux homormophismes $\varphi : W_{DF} \to O(d, \mathbb{C})$ qui ont même image dans $\Phi^{orth}_{temp,d}$ sont conjugués par un élément de $O(d, \mathbb{C})$, mais pas forcément par un élément de $SO(d, \mathbb{C})$. Pour poser des conjectures raisonnables, on doit considérer $O(d, \mathbb{C})$ comme le L-groupe de G, ce qui sous-entend des données supplémentaires. En particulier, ces données permettent d'identifier un sous-tore maximal de $SO(d,\mathbb{C})$ au groupe dual d'un sous-tore maximal de G, cette identification étant bien définie modulo l'action du groupe de Weyl de G.

On conjecture qu'il existe une partition

$$(1) \qquad Temp(G(F)) = \sqcup_{\varphi\in\Phi_{temp}(G)}\Pi^G(\varphi)$$

vérifiant les propriétés ci-dessous.

Fixons $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$. Notons $\mathcal{E}^G(\varphi)$ l'ensemble des caractères ϵ de S_φ/S_φ^0 tels que $\epsilon(z_\varphi) = 1$ si (V,q) vérifie la condition (QD) de 1.7, $\epsilon(z_\varphi) = -1$ sinon. Alors il existe une bijection $\epsilon \mapsto \sigma(\varphi,\epsilon)$ de $\mathcal{E}^G(\varphi)$ sur $\Pi^G(\varphi)$. Pour $s \in S_\varphi/S_\varphi^0$, on définit $\Theta_s^G(\varphi)$ par une formule similaire à 4.2(1).

Supposons que (V,q) vérifie la condition (QD) de 1.7. Alors $\Theta_0^G(\varphi)$ est une distribution stable. Introduisons un espace U de dimension d sur F et le groupe tordu $(M,\tilde{M})$ associé. Rappelons que G est un groupe endoscopique de $\tilde{M}$. On dispose de la représentation $\pi(\varphi)$ de $M(F)$, que l'on prolonge comme en 2.3 en une représentation $\tilde{\pi}(\varphi)$ de $\tilde{M}(F)$. Alors il existe $c^G(\varphi) \in \mathbb{C}^\times$ tel que $|c^G(\varphi)| = 1$ et que $c^G(\varphi)\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi)}$ soit le transfert de $\Theta_0^G(\varphi)$.

Revenons au cas où G est quelconque. Introduisons des espaces quadratiques (V_+,q_+) et (V_-,q_-) vérifiant les mêmes conditions qu'en 1.7. On suppose plus précisément que ces espaces vérifient la condition (QD) de 1.7. Soient $\varphi_+ \in \Phi_{temp}(G_+)$ et $\varphi_- \in \Phi_{temp}(G_-)$. Posons $\varphi = \varphi_+\oplus\varphi_-$. C'est un élément de $\Phi_{temp}(G)$. Comme dans le paragraphe précédent, la définition de φ permet de définir un élément $s \in S_\varphi/S_\varphi^0$. Alors il existe $\gamma^G(\varphi_+,\varphi_-) \in \mathbb{C}^\times$ tel que $|\gamma^G(\varphi_+,\varphi_-)| = 1$ et que la distribution $\gamma^G(\varphi_+,\varphi_-)\Theta_s^G(\varphi)$ soit le transfert de $\Theta_0^{G_+}(\varphi_+) \times \Theta_0^{G_-}(\varphi_-)$. Comme plus haut, pour définir ces dernières distributions, on doit considérer $O(d_+,\mathbb{C})$ et $O(d_-,\mathbb{C})$ comme les L-groupes de G_+ et G_-, c'est-à-dire fixer des données supplémentaires.

Remarque. On pourrait rendre les conjectures plus canoniques de la façon suivante. Considérons l'ensemble des couples (σ,L), où $\sigma \in Temp(G(F))$ et $L \in \Lambda(V)$, cf. 1.7. Le groupe orthogonal $G^+(F)$ agit diagonalement sur cet ensemble. Notons $\Lambda Temp(G(F))$ l'ensemble des orbites. Si l'on fixe $L \in \Lambda(V)$, l'application qui, à $\sigma \in Temp(G(F))$, associe l'orbite de (σ,L) est une bijection de $Temp(G(F))$ sur $\Lambda Temp(G(F))$. Notons $\hat{\Lambda}$ l'ensemble des orbites de lagrangiens dans $\mathbb{C}^d$, pour l'action du groupe spécial orthogonal $SO(d,\mathbb{C})$. Il a deux éléments. Considérons l'ensemble des couples $(\varphi,\hat{L})$, où $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$ et $\hat{L} \in \hat{\Lambda}$. Le groupe $O(d,\mathbb{C})$ agit diagonalement sur cet ensemble. Notons $\Lambda\Phi_{temp}(G)$ l'ensemble des orbites. De nouveau, si l'on fixe $\hat{L} \in \hat{\Lambda}$, l'application qui, à $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$, associe l'orbite $\{(\varphi,\hat{L})\}$ de $(\varphi,\hat{L})$ est une bijection de $\Phi_{temp}(G)$ sur $\Lambda\Phi_{temp}(G)$. Il doit exister une partition canonique

$$\Lambda Temp(G(F)) = \sqcup_{\{(\varphi,\hat{L})\}\in\Lambda\Phi_{temp}(G)}\Pi^G(\{(\varphi,\hat{L})\})$$

dont (1) se déduise de la façon suivante. Considérons $O(d,\mathbb{C})$ comme le L-groupe de G, ce qui sous-entend que l'on fixe des données supplémentaires occultes. Celles-ci définissent une bijection entre $\hat{\Lambda}$ et $\Lambda(V)$. Soit $\hat{L} \in \hat{\Lambda}$ et L son image dans $\Lambda(V)$. En utilisant ces éléments, on identifie $\Lambda\Phi_{temp}(G)$ à $\Phi_{temp}(G)$ et $\Lambda Temp(G(F))$ à $Temp(G(F))$. Alors la partition ci-dessus devient la partition (1). Remarquons que cela ne dépend pas du choix de $\hat{L}$. On pourrait traduire de la même façon le reste des conjectures. On ne développera pas davantage cette voie un peu trop sophistiquée.

4.4 Version faible des conjectures pour les groupes spéciaux orthogonaux pairs

Soit (V,q) comme dans le paragraphe précédent. Notons G^+ son groupe orthogonal. Le groupe $G^+(F)$ agit naturellement dans $Temp(G(F))$. On note $\overline{Temp}(G(F))$ l'ensemble des orbites. Chacune d'elles a au plus deux éléments. Pour $\bar{\sigma} \in \overline{Temp}(G(F))$, on définit le caractère $\Theta_{\bar{\sigma}}$: si $\bar{\sigma}$ est réduit à un élément σ, on pose $\Theta_{\bar{\sigma}} = \Theta_\sigma$; si $\bar{\sigma}$ est formé de deux éléments σ_1 et σ_2, on pose $\Theta_{\bar{\sigma}} = \frac{1}{2}(\Theta_{\sigma_1} + \Theta_{\sigma_2})$.

Considérons le même ensemble d'homomorphismes $\varphi : W_{DF} \to O(d,\mathbb{C})$ que dans le paragraphe précédent. Notons $\bar{\Phi}_{temp}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $O(d,\mathbb{C})$ dans cet ensemble. Cette fois, la composition avec l'inclusion de $O(d,\mathbb{C})$ dans $GL(d,\mathbb{C})$ définit une injection de $\bar{\Phi}_{temp}(G)$ dans $\Phi^{orth}_{temp,d}$. On conjecture qu'il existe une partition

$$\overline{Temp}(G(F)) = \sqcup_{\varphi \in \bar{\Phi}_{temp}(G)} \bar{\Pi}^G(\varphi)$$

vérifiant des propriétés similaires à celles décrites au paragraphe précédent. On ne récrit pas ces propriétés, il suffit d'ajouter judicieusement des $^-$ un peu partout.

Remarque. Il est parfois commode de considérer les sous-ensembles de $\overline{Temp}(G(F))$ comme des sous-ensembles de $Temp(G(F))$ qui sont invariants (globalement) par l'action de $G^+(F)$. C'est ce que nous ferons si besoin est.

4.5 Remarques sur les conjectures

Il est probable que les travaux en cours de Arthur démontreront la conjecture 4.2, du moins si l'on se restreint aux groupes déployés (cf. [A1] théorème 30.1). De même pour les conjectures de 4.4, du moins si l'on se restreint aux groupes quasi-déployés. Arthur n'a pas encore publié la preuve de son théorème. Nous ignorons bien entendu quel sera son résultat final. Il est possible qu'il inclue le cas des groupes non quasi-déployés. En tout cas, il est clair que les méthodes d'Arthur permettront de traiter ce cas à court terme. Il est moins clair qu'elles permettent de prouver les conjectures plus fines de 4.3. On verra. En fait, les résultats d'Arthur, outre qu'ils ne se limiteront pas au cas tempéré, seront certainement plus précis, c'est-à-dire que les constantes $c^{G'}(\varphi)$ etc... que l'on a introduites seront explicites, pour des normalisations convenables. Ces normalisations n'étant peut-être pas les mêmes que les nôtres, on a préféré formuler les conjectures sous une forme plus vague.

Dans les conjectures 4.3 et 4.4, on a considéré que le L-groupe d'un groupe spécial orthogonal pair était un groupe orthogonal plutôt que le produit semi-direct d'un groupe spécial orthogonal et de W_F. Cette présentation des conjectures est due à Moeglin ([M]). De même, le fait que la valeur centrale $\epsilon(z_\varphi)$ des caractères servant aux paramétrages dépend de la forme du groupe se trouve dans [M], ainsi que dans [V] et [A2].

Dans la situation de 4.2, soit $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$, les propriétés de la correspondance de Langlands pour les groupes linéaires impliquent que les caractères centraux de $\pi(\varphi')$ et $\pi(\varphi'_>)$ sont triviaux. Pour le second caractère, cela résulte aussi du corollaire 3.5(i). De même, dans la situation de 4.3, resp. 4.4, pour $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$, resp. $\varphi \in \bar{\Phi}_{temp}(G)$, le caractère central de $\pi(\varphi)$ est le caractère $\lambda \mapsto (\delta(q), \lambda)_F$.

4.6 Remarques sur les constantes

Considérons la situation de 4.2, soit $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$. Pour tout $\epsilon' \in \mathcal{E}^{G'}(\varphi')$, on a la formule d'inversion

$$(1) \qquad \Theta_{\sigma'(\varphi',\epsilon')} = |S_{\varphi'}/S^0_{\varphi'}|^{-1} \sum_{s' \in S_{\varphi'}/S^0_{\varphi'}} \epsilon'(s')\Theta^{G'}_{s'}(\varphi').$$

Si les constantes $\gamma^{G'}(\varphi'_+,\varphi'_-)$ qui figurent dans les conjectures sont connues, cela détermine entièrement le paramétrage du paquet $\Pi^{G'}(\varphi')$. Inversement, il est loisible de changer le paramétrage de la façon suivante. Fixons un caractère ϵ'_0 de $S_{\varphi'}/S^0_{\varphi'}$ tel que $\epsilon'_0(z_{\varphi'}) = 1$. Définissons un nouveau paramétrage en notant $\sigma'(\varphi',\epsilon')$ la représentation précédemment notée $\sigma'(\varphi',\epsilon'\epsilon'_0)$. Les conjectures sont encore vérifiées, les constantes $\gamma^{G'}(\varphi'_+,\varphi'_-)$ étant multipliées par $\epsilon'_0(s')$.

Regardons ce qui se passe quand, dans la dernière partie de la conjecture, on échange les rôles des couples (G'_+,φ'_+) et (G'_-,φ'_-). L'élément s' est remplacé par $s'z_{\varphi'}$. D'après la définition de $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$, on a $\Theta^{G'}_{s'z_{\varphi'}}(\varphi') = \Theta^{G'}_{s'}(\varphi')$ si G' est déployé, tandis que $\Theta^{G'}_{s'z_{\varphi'}}(\varphi') = -\Theta^{G'}_{s'}(\varphi')$ si G' n'est pas déployé. Les groupes endoscopiques $G'_+ \times G'_-$ et $G'_- \times G'_+$ sont équivalents. Mais les facteurs de transfert, tels qu'on les a normalisés, ne sont pas forcément les mêmes. Permuter les deux groupes ne change pas ce facteur si G' est déployé et le multiplie par -1 si G' n'est pas déployé. Cela entraîne que l'on peut imposer aux constantes d'être symétriques, c'est-à-dire de vérifier l'égalité $\gamma^{G'}(\varphi'_-,\varphi'_+) = \gamma^{G'}(\varphi'_+,\varphi'_-)$. Des remarques similaires valent pour les conjectures de 4.3 et 4.4.

Il y a quelques cas où on peut déterminer les constantes. Il y a d'abord un cas formel, celui de 4.3 avec $V = 0$. On peut poser formellement $c^G(0) = 1$. Le cas de 4.2 avec $dim(V') = 1$ est moins formel. On a $G' = \{1\}$ mais $\pi(0_>)$ est la représentation triviale de $F^\times$. On voit néanmoins que dans ce cas, $c^{G'}(0) = 1$. Dans le cas de 4.2, avec G' déployé et $G'_+ = G'$, $G'_- = \{1\}$, le transfert est l'identité, donc $\gamma^{G'}(\varphi',0) = 1$. De même, dans le cas de 4.3, si (V,q) vérifie la condition (QD) de 1.7, on a $\gamma^G(\varphi,0) = 1$.

Considérons la situation de 4.3, supposons que $\delta(q)$ n'est pas un carré et que (V,q) ne vérifie pas la condition (QD) de 1.7. L'espace $(\underline{V},\underline{q})$ est équivalent à $(V,\alpha q)$, pour un élément $\alpha \in F^\times$. Fixons un tel α et une racine carrée $\sqrt{\alpha}$ dans $\bar{F}$. Identifions $(\underline{V},\underline{q})$ à $(V,\alpha q)$ de sorte que l'isomorphisme $\beta : V \otimes_F \bar{F} \to \underline{V} \otimes_F \bar{F}$ fixé en 1.7 soit $v \mapsto \sqrt{\alpha}^{-1}v$. Le groupe $\underline{G}$ s'identifie à G et le torseur intérieur ψ_G devient l'identité. Les conjectures s'appliquent à G comme à $\underline{G}$, mais ne disent pas la même chose. En effet, pour $\varphi \in \Phi_{temp}(G) = \Phi_{temp}(\underline{G})$, le paquet $\Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ est paramétré par les caractères ϵ tels que $\epsilon(z_\varphi) = 1$, tandis que le paquet $\Pi^G(\varphi)$ est paramétré par les ϵ tels que $\epsilon(z_\varphi) = -1$. Introduisons le caractère ϵ_α de S_φ/S^0_φ défini par

$$\epsilon_\alpha((e_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} (\delta(\varphi_i),\alpha)_F^{e_i}$$

dans les notations de 4.1. On vérifie que $\epsilon(z_\varphi) = -1$. Supposons les conjectures vérifiées pour le groupe $\underline{G}$, ou plus précisément pour l'espace $(\underline{V},\underline{q})$. Soit $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$. On dispose du paquet $\Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ et d'un paramétrage, que l'on note ici $\epsilon \mapsto \sigma^{\underline{G}}(\varphi,\epsilon)$, de ce paquet par le groupe $\mathcal{E}^{\underline{G}}(\varphi)$. Posons $\Pi^G(\varphi) = \Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ et, pour $\epsilon \in \mathcal{E}^G(\varphi)$, posons $\sigma^G(\varphi,\epsilon) = \sigma^{\underline{G}}(\varphi,\epsilon_\alpha\epsilon)$. En utilisant la seconde remarque de 1.7, on voit qu'avec ces définitions, les conjectures 4.3 sont encore vérifiées pour G, avec les mêmes constantes que pour $\underline{G}$. C'est à dire $\gamma^G(\varphi_+,\varphi_-) = \gamma^{\underline{G}}(\varphi_+,\varphi_-)$. En particulier, d'après ce que l'on a vu plus haut, on a $\gamma^G(\varphi,0) = 1$.

4.7 Caractère central

Soient (V, q) comme en 4.4. Le groupe $G(F)$ a pour centre $\{\pm 1\}$. Pour toute représentation admissible irréductible σ de $G(F)$, $\sigma(-1)$ est une homothétie de rapport ± 1. On note $\zeta(\sigma)$ ce rapport. Si σ' est conjugué de σ par un élément du groupe orthogonal, on a $\zeta(\sigma') = \zeta(\sigma)$. Cela permet de définir $\zeta(\bar{\sigma})$ pour $\bar{\sigma} \in \overline{Temp}(G(F))$.

Lemme. *On admet les conjectures 4.4. Soit $\varphi \in \bar{\Phi}_{temp}(G)$. Alors il existe $\zeta(\varphi) \in \{\pm 1\}$ tel que $\zeta(\bar{\sigma}) = \zeta(\varphi)$ pour tout $\bar{\sigma} \in \bar{\Pi}(\varphi)$. Ce terme $\zeta(\varphi)$ est le même pour G et $\underline{G}$.*

Preuve. Supposons la première assertion du lemme prouvée pour le groupe $\underline{G}$, ce qui nous fournit un terme $\zeta(\varphi)$ relatif à ce groupe. Considérons les distributions

$$\Theta^G(\varphi) = \sum_{\bar{\sigma} \in \bar{\Pi}^G(\varphi)} \Theta_{\bar{\sigma}}$$

et

$$\Gamma^G(\varphi) = \sum_{\bar{\sigma} \in \bar{\Pi}^G(\varphi)} \zeta(\bar{\sigma}) \Theta_{\bar{\sigma}}$$

sur $G(F)$. On doit prouver que $\Gamma^G(\varphi) = \zeta(\varphi)\Theta^G(\varphi)$. En considérant ces distributions comme des fonctions localement intégrables, on a l'égalité $\Gamma^G(\varphi)(g) = \Theta^G(\varphi)(-g)$ pour tout $g \in G(F)$. On introduit les distributions analogues $\Theta^{\underline{G}}(\varphi)$ et $\Gamma^{\underline{G}}(\varphi)$ sur $\underline{G}(F)$, qui vérifient une relation analogue. Les conjectures impliquent que $\Theta^G(\varphi)$ est le transfert de $\Theta^{\underline{G}}(\varphi)$. Mais la multiplication par -1 commute au transfert. Donc $\Gamma^G(\varphi)$ est le transfert de $\Gamma^{\underline{G}}(\varphi)$. Or, d'après l'hypothèse que l'on a faite, on a $\Gamma^{\underline{G}}(\varphi) = \zeta(\varphi)\Theta^{\underline{G}}(\varphi)$. Cela entraîne l'égalité cherchée.

Cela nous ramène au cas où (V, q) vérifie (QD). Ecrivons φ comme en 4.1(1). Posons

$$\varphi_0 = \oplus_{i \in I; l_i \text{ impair}} \varphi_i,$$

et $d_0 = N(\varphi_0)$. Le nombre d_0 est pair. Posons $N = (d - d_0)/2$. Il y a un élément $\varphi_1 \in \Phi(GL(N)$ tel que $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_0 \oplus \varphi_1^\theta$. L'espace V possède un sous-espace isotrope de dimension N. En effet, si V est somme de plans hyperboliques, c'est évident. Sinon, la condition $\delta(\varphi) = \delta(q)$ impose $N(\varphi_0) \geq 2$ et l'assertion s'ensuit. On peut donc décomposer V en somme directe $V = X \oplus V_0 \oplus Y$, où X et Y sont des espaces isotropes de dimension N et V_0 est l'orthogonal de $X \oplus Y$. Cette décomposition donne naissance à un groupe de Lévi $L = GL(N) \times G_0$ de G, où G_0 est le groupe spécial orthogonal de V_0. On fixe un sous-groupe parabolique de G de composante de Lévi L. On a $\varphi_0 \in \bar{\Phi}_{temp}(G_0)$ et φ_1 détermine une représentation $\pi(\varphi_1)$ de $GL(N, F)$. Les applications de transfert entre groupes spéciaux orthogonaux pairs et groupes linéaires tordus commutent à l'induction, pour peu que l'on ait effectué des choix cohérents de facteurs de transfert, ce qui est le cas. On peut alors déduire des conjectures, d'une part que le paquet $\bar{\Pi}^{G_0}(\varphi_0)$ est formé de représentations de la série discrète, d'autre part que le paquet $\bar{\Pi}^G(\varphi)$ est formé des sous-représentations irréductibles des induites $Ind_P^G(\pi(\varphi_1) \times \sigma_0)$ pour $\sigma_0 \in \bar{\Pi}^{G_0}(\varphi_0)$ (et de leurs conjugués par le groupe orthogonal dans le cas où $V_0 = \{0\}$). Dans une telle sous-représentation irréductible, l'élément central -1 agit par $\omega_{\pi(\varphi_1)}(-1)\zeta(\sigma_0)$. Donc l'assertion du lemme résulte de la même assertion pour G_0 et φ_0.

Cela nous ramène au cas où $\bar{\Pi}^G(\varphi)$ est formé de représentations de la série discrète. Avec les notations ci-dessus, on sait que $\Theta^G(\varphi)$ est une distribution stable. Puisque

$\Gamma^G(\varphi)(g) = \Theta_0^G(\varphi)(-g)$ pour tout $g \in G(F)$, $\Gamma^G(\varphi)$ est stable elle-aussi. Il nous suffit de prouver l'assertion plus générale suivante :

(1) on considère une combinaison linéaire

$$\Delta = \sum_{\bar{\sigma}\in\bar{\Pi}^G(\varphi)} a_{\bar{\sigma}}\Theta_{\bar{\sigma}};$$

supposons que Δ est stable ; alors Δ est proportionnelle à $\Theta^G(\varphi)$.

D'après 4.6(1), Δ est combinaison linéaire des $\Theta_s^G(\varphi)$. Ecrivons

$$\Delta = \sum_{s\in S(\varphi)/S(\varphi)^0\{0,z_\varphi\}} b_s\Theta_s^G(\varphi).$$

Fixons un élément régulier elliptique $g \in G(F)$. Soient $(g_k)_{k=1,...,l}$ des représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable de g. Puisque Δ est stable, on a l'égalité

$$\Delta(g) = l^{-1}\sum_{k=1,...,l}\Delta(g_k).$$

Soit $s \in S(\varphi)/S(\varphi)^0\{0, z_\varphi\}$, $s \neq 0$. Alors $\Theta_s^G(\varphi)$ est le transfert d'une distribution sur un groupe endoscopique différent de G. Ainsi qu'il est bien connu, l'ensemble $\{g_k; k = 1, ..., l\}$ peut être muni d'une structure de groupe abélien. La restriction à ce groupe de toute distribution localement constante sur les éléments réguliers et transfert d'une distribution sur un groupe endoscopique différent de G est combinaison linéaire de caractères non triviaux de ce groupe. Donc

$$\sum_{k=1,...,l}\Theta_s^G(\varphi)(g_k) = 0.$$

Par contre, on a $\Theta_0^G(\varphi) = \Theta^G(\varphi)$ qui est stable, donc

$$\sum_{k=1,...,l}\Theta_0^G(\varphi)(g_k) = l\Theta_0^G(g).$$

Il en résulte l'égalité $\Delta(g) = b_0\Theta^G(\varphi)(g)$. Cela est vrai pour tout g régulier elliptique. Mais on sait qu'une combinaison linéaire de caractères de représentations de la série discrète qui est nulle sur les éléments réguliers elliptiques est nulle partout. Cela prouve (1) et le lemme. □

4.8 Détermination des constantes

Lemme. *(i) Supposons la conjecture 4.2 vérifiée. Alors les constantes $c^{G'}(\varphi')$ sont égales à 1. Quitte à changer les paramétrages, on peut supposer que les constantes $\gamma^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-)$ sont égales à 1 si G' est déployé, à -1 sinon.*

(ii) Supposons la conjecture 4.3, resp. 4.4, vérifiée. Alors les constantes $c^G(\varphi)$ sont égales à $\zeta(\varphi)\epsilon(1/2, \pi(\varphi), \psi_F)^{-1}$. Quitte à changer les paramétrages, on peut supposer que les constantes $\gamma^G(\varphi_+, \varphi_-)$ sont égales à 1.

Ce lemme sera démontré en 4.11 et 4.12. Dans le (ii), on a noté $\epsilon(1/2, \pi(\varphi), \psi_F)$ le facteur ϵ usuel de Godement-Jacquet. Il dépend de ψ_F, donc $c^G(\varphi)$ également. Ce n'est pas surprenant puisque la normalisation de la représentation $\tilde{\pi}(\varphi)$ dépend elle-aussi de ψ_F.

4.9 Le théorème

Soient N et N' deux entiers naturels, avec N' pair, et soient $\varphi \in \Phi_{temp,N}$ et $\varphi' \in \Phi^{symp}_{temp,N'}$. On pose

$$E(\varphi,\varphi') = (\delta(\varphi),-1)_F^{N'/2}\epsilon(1/2,\pi(\varphi)\times\pi(\varphi'),\psi_F).$$

Ce terme est bilinéaire en φ et φ'. On a

(1) $E(\varphi,\varphi')$ appartient à $\{\pm 1\}$ et est indépendant de ψ_F.

Cela résulte de la preuve de [GP1], proposition 10.5. Celle-ci s'appuie sur les deux relations bien connues suivantes. Soient ρ et ρ' deux représentations admissibles irréductibles de groupes linéaires $GL(N,F)$ et $GL(N',F)$. Soit $\alpha \in F^\times$, notons ψ_F^α le caractère $\lambda \mapsto \psi_F(\alpha\lambda)$ de F. Alors

$$\epsilon(1/2,\rho\times\rho',\psi_F^\alpha) = \omega_\rho(\alpha)^{N'}\omega_{\rho'}(\alpha)^N\epsilon(1/2,\rho\times\rho',\psi_F);$$

$$(2)\qquad \epsilon(1/2,\rho\times\rho',\psi_F)\epsilon(1/2,\rho^\vee\times(\rho')^\vee,\psi_F) = \omega_\rho(-1)^{N'}\omega_{\rho'}(-1)^N.$$

Ici N' est pair et $\omega_{\pi(\varphi')} = 1$.

On considère deux espaces quadratiques (V',q') et (V,q) vérifiant les conditions de 2.1. On fixe $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$ et $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$. On écrit

$$\varphi' = (\oplus_{i'\in I'} l_{i'}\varphi_{i'}) \oplus (\oplus_{j'\in J'} l_{j'}(\varphi_{j'}\oplus\varphi_{j'}^\theta)),$$

$$\varphi = (\oplus_{i\in I} l_i\varphi_i) \oplus (\oplus_{j\in J} l_j(\varphi_j\oplus\varphi_j^\theta)),$$

avec des ensembles d'indices disjoints.

Pour $i' \in (I')^{symp}$, on pose

$$\boldsymbol{\epsilon}_{i'} = E(\varphi,\varphi'_{i'}).$$

Pour $i \in I^{orth}$, on pose

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = E(\varphi_i,\varphi').$$

On définit un caractère $\boldsymbol{\epsilon}'$ de $S_{\varphi'}/S^0_{\varphi'} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(I')^{symp}}$ par

$$\boldsymbol{\epsilon}'((e_{i'})_{i'\in(I')^{symp}}) = \prod_{i'\in(I')^{symp}}\boldsymbol{\epsilon}_{i'}^{e_{i'}}.$$

On définit un caractère $\boldsymbol{\epsilon}$ de $S_\varphi/S^0_\varphi \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{orth}}$ par

$$\boldsymbol{\epsilon}((e_i)_{i\in I^{orth}}) = \prod_{i\in I^{orth}}\boldsymbol{\epsilon}_i^{e_i}.$$

En utilisant la relation (2), on démontre l'égalité

$$\boldsymbol{\epsilon}(z_\varphi) = \boldsymbol{\epsilon}'(z_{\varphi'}) = E(\varphi,\varphi').$$

On a défini $\mu(G')$ en 3.3. Si $\mu(G') = E(\varphi,\varphi')$, le caractère $\boldsymbol{\epsilon}$, resp.$\boldsymbol{\epsilon}'$, appartient à $\mathcal{E}^G(\varphi)$, resp. $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$. Sinon, aucun des deux caractères n'appartient à l'ensemble en question.

Pour $\sigma \in Temp(G(F))$ et $\sigma' \in Temp(G'(F))$, on a défini en 2.1 la multiplicité $m(\sigma,\sigma')$. On vérifie que si σ_1 est conjuguée à σ par un élément du groupe orthogonal, on a $m(\sigma_1,\sigma') = m(\sigma,\sigma')$. Cela permet de définir $m(\bar\sigma,\sigma')$ pour $\bar\sigma \in \overline{Temp}(G(F))$.

Rappelons que l'on a admis en 2.3 quelques résultats issus d'une hypothétique formule des traces locale tordue. Dans l'énoncé ci-dessous, on suppose que les constantes des conjectures satisfont aux conclusions du lemme 4.8.

Théorème. *(i) On admet les conjectures de 4.2 et 4.3. Si $\mu(G') \neq E(\varphi,\varphi')$, on a $m(\sigma,\sigma') = 0$ pour tout $(\sigma,\sigma') \in \Pi^G(\varphi) \times \Pi^{G'}(\varphi')$. Supposons $\mu(G') = E(\varphi,\varphi')$. Soit $(\epsilon,\epsilon') \in \mathcal{E}^G(\varphi) \times \mathcal{E}^{G'}(\varphi')$. Alors on a les égalités*

$$m(\sigma(\varphi,\epsilon),\sigma(\varphi',\epsilon')) = \begin{cases} 1, & si\ (\epsilon,\epsilon') = (\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\epsilon}'), \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

(ii) On admet les conjectures de 4.2 et 4.4. On a le même résultat qu'en (i), en remplaçant $\Pi^G(\varphi)$ par $\bar{\Pi}^G(\varphi)$ et les représentations $\sigma(\varphi,\epsilon)$ par $\bar{\sigma}(\varphi,\epsilon)$.

C'est la conjecture 6.9 de [GP2] restreinte aux représentations tempérées, à ceci près que Gross et Prasad utilisent les facteurs ϵ de représentations galoisiennes au lieu de ceux associés aux paires de représentations du groupe linéaire. Mais l'égalité de ces deux types de facteurs fait partie des résultats de Harris-Taylor et Henniart.

Le théorème sera démontré en 4.11 et 4.12. Les preuves de (i) et (ii) étant similaires, on se contentera de prouver la première assertion. Pour la fin de l'article, on admet les conjectures 4.2 et 4.3.

4.10 Utilisation des résultats antérieurs

Considérons les données du paragraphe précédent. Pour $s \in S_\varphi/S_\varphi^0$ et $s' \in S_{\varphi'}/S_{\varphi'}^0$, on pose

$$m(\varphi,s;\varphi',s') = \sum_{(\epsilon,\epsilon')\in\mathcal{E}^G(\varphi)\times\mathcal{E}^{G'}(\varphi')} \epsilon(s)\epsilon'(s')m(\sigma(\varphi,\epsilon),\sigma(\varphi',\epsilon')).$$

Considérons des espaces (V_+,q_+), (V_-,q_-), (V'_+,q'_+) et (V'_-,q'_-) vérifiant les hypothèses de 3.3. On impose que (V_+,q_+) et (V_-,q_-) vérifient la condition (QD) de 1.7. Soient $\varphi_+ \in \Phi_{temp}(G_+)$, $\varphi_- \in \Phi_{temp}(G_-)$, $\varphi'_+ \in \Phi_{temp}(G'_+)$ et $\varphi'_- \in \Phi_{temp}(G'_-)$. Supposons que $\varphi = \varphi_+ \oplus \varphi_-$ et $\varphi' = \varphi'_+ \oplus \varphi'_-$. Ces données endoscopiques déterminent des éléments $s \in S_\varphi/S_\varphi^0$ et $s' \in S_{\varphi'}/S_{\varphi'}^0$. On définit les combinaisons linéaires suivantes :

$$\Sigma'_+ = \sum_{\sigma'\in\Pi^{G'_+}(\varphi'_+)} \sigma',$$

$$\Sigma' = \gamma^{G'}(\varphi'_+,\varphi'_-) \sum_{\epsilon'\in\mathcal{E}^{G'}(\varphi')} \epsilon'(s')\sigma(\varphi',\epsilon'),$$

et on définit de même Σ'_-, Σ_+, Σ_- et Σ. Les conjectures nous disent que les hypothèses de 3.3 sont satisfaites. Appliquons la proposition de ce paragraphe. D'après 2.1 et les définitions, le membre de gauche de l'égalité de cette proposition vaut

$$(1) \qquad \gamma^G(\varphi_+,\varphi_-)\gamma^{G'}(\varphi'_+,\varphi'_-)m(\varphi,s;\varphi',s').$$

Le membre de gauche contient des termes $S(\Sigma_+,\Sigma'_+)$ etc... Considérons la situation de 3.4, où l'on remplace les couples (V,q) et (V',q') par (V_+,q_+) et (V'_+,q'_+), les données Σ et Σ' par Σ_+ et Σ'_+ et où l'on pose

$$\Pi = c^{G_+}(\varphi_+)\pi(\varphi_+),\ \Pi' = c^{G'_+}(\varphi'_+)\pi((\varphi'_+)_>).$$

Les conjectures nous disent que les hypothèses de 3.4 sont vérifiées. En appliquant le corollaire 3.5(iii), on obtient

$$S(\Sigma_+(-1),\Sigma'_+) = c^{G_+}(\varphi_+)c^{G'_+}(\varphi'_+)(\delta(q_+),-1)_F^{(d'_+-1)/2}\epsilon(1/2,\pi(\varphi_+)\times\pi((\varphi'_+)_>),\psi_F).$$

Rappelons que $(\varphi'_+)_> = \varphi'_+\oplus\mathbf{1}$. Donc

$$\epsilon(1/2,\pi(\varphi_+)\times\pi((\varphi'_+)_>),\psi_F) = \epsilon(1/2,\pi(\varphi_+),\psi_F)\epsilon(1/2,\pi(\varphi_+)\times\pi(\varphi'_+),\psi_F).$$

D'autre part, le lemme 4.6 entraîne que $\Sigma_+(-1) = \zeta(\varphi_+)\Sigma_+$. Alors

$$S(\Sigma_+,\Sigma'_+) = \zeta(\varphi_+)c^{G_+}(\varphi_+)c^{G'_+}(\varphi'_+)\epsilon(1/2,\pi(\varphi_+),\psi_F)E(\varphi_+,\varphi'_+).$$

On calcule de même les autres termes du membre de droite de l'égalité de la proposition 3.3. Celui-ci est donc égal au produit de

$$(2)\qquad c^{G_+}(\varphi_+)c^{G'_+}(\varphi'_+)c^{G_-}(\varphi_-)c^{G'_-}(\varphi'_-)\zeta(\varphi_+)\zeta(\varphi_-)\epsilon(1/2,\pi(\varphi_+),\psi_F)\epsilon(1/2,\pi(\varphi_-),\psi_F)$$

et de

$$(3)\qquad \frac{1}{2}(E(\varphi_+,\varphi'_+)E(\varphi_-,\varphi'_-)+\mu(G')E(\varphi_+,\varphi'_-)E(\varphi_-,\varphi'_+)).$$

Etudions l'expression (3). Ecrivons

$$\varphi'_+ = (\oplus_{i'\in I'}l_{i',+}\varphi_{i'})\oplus(\oplus_{j'\in J'}l_{j',+}(\varphi_{j'}\oplus\varphi_{j'}^\theta)),$$

et écrivons de façon similaire φ'_-, φ_+ et φ_-. On a les égalités

$$s = (l_{i,-})_{i\in I^{orth}},\ \ s' = (l'_{i',-})_{i'\in(I')^{symp}}.$$

Parce que l'application E est bilinéaire et de carré 1, on a

$$E(\varphi_+,\varphi'_-)E(\varphi_-,\varphi'_+) = E(\varphi,\varphi'_-)E(\varphi_-,\varphi')$$

et

$$E(\varphi_+,\varphi'_+)E(\varphi_-,\varphi'_-) = E(\varphi,\varphi')E(\varphi,\varphi'_-)E(\varphi_-,\varphi').$$

En utilisant 4.9(2), on vérifie que

$$E(\varphi,\varphi'_-) = \prod_{i'\in(I')^{symp}}E(\varphi,\varphi'_{i'})^{l_{i',-}} = \boldsymbol{\epsilon}'(s'),$$

$$E(\varphi_-,\varphi') = \prod_{i\in I^{orth}}E(\varphi_i,\varphi')^{l_{i,-}} = \boldsymbol{\epsilon}(s).$$

On obtient que (3) est égal à

$$(4)\qquad \boldsymbol{\epsilon}(s)\boldsymbol{\epsilon}'(s')(E(\varphi,\varphi')+\mu(G'))/2.$$

La proposition 3.3 dit que (1) est égal au produit de (2) et de (4).

4.11 La preuve dans le cas G' déployé

Modifions les hypothèses de départ. On considère seulement (V',q'), $\varphi'\in\Phi_{temp}(G')$ et on suppose G' déployé. Posons $V=\{0\}$, $q=0$. Les conjectures de 4.2 ne dépendent d'aucun paramètre. On peut remplacer la forme q' par un de ses multiples, cela ne change rien. Quitte à effectuer un tel changement, on peut supposer que les espaces quadratiques (V',q') et (V,q) vérifient les hypothèses de 2.1. Posons $\varphi=0$ et choisissons $(V'_+,q'_+)=(V',q')$, $\varphi'_+=\varphi'$ dans les constructions du paragraphe précédent. On a $E(0,\varphi')=\mu(G')=1$ et le terme 4.10(4) est égal à 1. Donc les termes 4.10(1) et 4.10(2) sont égaux. D'après les remarques de 4.6, le terme 4.10(1) est égal à $m(0,0;\varphi',0)$. C'est le nombre d'éléments du paquet $\Pi^{G'}(\varphi')$ qui admettent un modèle de Whittaker. C'est donc un entier naturel. Le terme 4.10(2) est égal à $c^{G'}(\varphi')$. C'est un nombre complexe de module 1. L'égalité des deux termes entraîne $c^{G'}(\varphi')=1$.

La même égalité entraîne qu'il y a un unique élément du paquet $\Pi^{G'}(\varphi')$ qui admet un modèle de Whittaker. Comme on l'a dit en 4.6, on peut modifier le paramétrage de sorte que cette représentation soit paramétrée par le caractère trivial. Sous les mêmes hypothèses concernant (V',q') et (V,q), prenons maintenant (V'_+,q'_+), φ'_+, (V'_-,q'_-) et φ'_- quelconques. Avec le paramétrage que l'on vient de fixer, on a $m(0,0;\varphi',s')=1$ et le terme 4.10(1) vaut $\gamma^{G'}(\varphi'_+,\varphi'_-)$. Le terme 4.10(2) vaut 1 d'après ce que l'on vient de prouver, appliqué à G'_+ et G'_-. Le caractère $\boldsymbol{\epsilon}'$ est trivial par construction donc le terme 4.10(4) vaut 1. On obtient $\gamma^{G'}(\varphi'_+,\varphi'_-)=1$.

Considérons maintenant un espace (V,q) et $\varphi\in\Phi_{temp}(G)$. On suppose que (V,q) vérifie la condition (QD) de 1.7. On peut alors trouver une droite quadratique (V',q') de sorte que les hypothèses de 2.1 soient satisfaites. Le groupe $G'=\{1\}$ est déployé. On choisit $(V_+,q_+)=(V,q)$ et $\varphi_+=\varphi$ dans les constructions du paragraphe précédent. De nouveau, le terme 4.10(4) vaut 1 et le terme 4.10(1) est le nombre d'éléments du paquet $\Pi^G(\varphi)$ qui admettent un modèle de Whittaker relativement à l'orbite unipotente régulière paramétrée par ν_0. Le terme 4.10(2) se réduit à $c^G(\varphi)\zeta(\varphi)\epsilon(1/2,\pi(\varphi),\psi_F)$, qui est un nombre complexe de module 1. L'égalité des deux termes entraîne $c^G(\varphi)=\zeta(\varphi)\epsilon(1/2,\pi(\varphi),\psi_F)^{-1}$.

Il y a encore un unique élément de $\Pi^G(\varphi)$) qui admet un modèle de Whittaker du type ci-dessus. On modifie le paramétrage de sorte que cet élément soit paramétré par le caractère trivial. On prend maintenant (V_+,q_+), φ_+, (V_-,q_-), φ_- quelconques. Le même raisonnement que dans le cas impair prouve que $\gamma^G(\varphi_+,\varphi_-)=1$.

Revenons à la situation générale de 4.10, en supposant G' déployé. On a calculé toutes les constantes et l'égalité de ce paragraphe se réduit à

$$(1)\qquad m(\varphi,s;\varphi',s')=\boldsymbol{\epsilon}(s)\boldsymbol{\epsilon}'(s')(E(\varphi,\varphi')+1)/2.$$

Supposons d'abord $(V_+,q_+)=(V,q)$ et $(V'_+,q'_+)=(V',q')$. Alors $s=0$, $s'=0$ et $m(\varphi,0;\varphi',0)$ est le nombre de couples $(\sigma,\sigma')\in\Pi^G(\varphi)\times\Pi^{G'}(\varphi')$ tels que $m(\sigma,\sigma')=1$. Si $E(\varphi,\varphi')=-1$, ce nombre vaut 0. Supposons $E(\varphi,\varphi')=1$. Le nombre vaut 1 c'est-à-dire qu'il y a un unique couple (σ,σ') comme ci-dessus. Soit (ϵ,ϵ') le couple de caractères qui le paramètre. Revenons à des données endoscopiques quelconques. On a l'égalité $m(\varphi,s;\varphi',s')=\epsilon(s)\epsilon'(s')$ et l'égalité (1) ci-dessus est vérifiée pour tous s et s'. Cela entraîne $\epsilon=\boldsymbol{\epsilon}$ et $\epsilon'=\boldsymbol{\epsilon}'$.

4.12 Le cas G' non déployé

Considérons seulement un espace quadratique (V',q') et $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$. Supposons G' non déployé et $\Pi^{G'}(\varphi')$ non vide. Quitte à remplacer q' par un multiple, on peut supposer que V' est somme orthogonale de plans hyperboliques et d'un espace de dimension 3 possédant un élément v tel que $q(v,v) = -2\nu_0$. Fixons un tel élément, notons (V,q) son orthogonal. Alors (V,q) et (V',q') vérifient les hypothèses de 2.1 et $\delta(q) \neq 1$. Montrons que

(1) il existe $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$ tel que l'application $(\sigma,\sigma') \mapsto m(\sigma,\sigma')$ soit non identiquement nulle sur $\Pi^G(\varphi) \times \Pi^{G'}(\varphi')$.

Fixons $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$, munissons son espace $E_{\sigma'}$ d'un produit hermitien invariant défini positif. Pour $e'_1, e'_2 \in E_{\sigma'}$, considérons la fonction sur $G(F)$: $g \mapsto f'(g) = (e'_1, \sigma'(g)e'_2)$. Pour e'_1 et e'_2 convenables, elle est non nulle. D'après [W2] lemme 4.9, c'est une fonction de Schwartz-Harish-Chandra sur $G(F)$. La formule de Plancherel entraîne qu'il y a au moins une représentation irréductible et tempérée σ de $G(F)$ telle que $\sigma^\vee(f')$ soit non nulle. Munissons l'espace E_σ d'un produit hermitien invariant défini positif. On peut trouver $e_1, e_2 \in E_\sigma$ tels que

$$\int_{G(F)} (\sigma(g)e_1, e_2)(e'_1, \sigma'(g)e'_2)dg \neq 0.$$

D'après [W2] proposition 5.7, cela entraîne $m(\sigma,\sigma') \neq 0$. Il suffit de choisir pour φ l'élément de $\Phi_{temp}(G)$ tel que σ appartienne à $\Pi^G(\varphi)$. $\square$

Choisissons φ vérifiant (1), appliquons les constructions de 4.10 à $(V_+, q_+) = (\underline{V}, \underline{q})$, $\varphi_+ = \varphi$. Puisque $\delta(q) \neq 1$, on a $\gamma^G(\varphi, 0) = 1$ d'après la dernière remarque de 4.6. En utilisant ce que l'on a déjà démontré, l'égalité de 4.10 se réduit à

$$(2) \qquad \gamma^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-)m(\varphi, 0; \varphi', s') = \boldsymbol{\epsilon}'(s')(E(\varphi,\varphi') - 1)/2.$$

Considérons d'abord le cas où $(V'_+, q'_+) = (\underline{V}', \underline{q}')$, $\varphi'_+ = \varphi'$. Alors $s' = 0$ et $m(\varphi, 0, \varphi', 0)$ est le nombre de couples $(\sigma,\sigma') \in \Pi^G(\varphi) \times \Pi^{G'}(\varphi')$ tels que $m(\sigma,\sigma') = 1$. D'après le choix de φ, c'est un entier strictement positif. L'égalité (2) entraîne que ce nombre est égal à 1 et que $E(\varphi,\varphi') = -1$. Soit (σ,σ') l'unique couple tel que $m(\sigma,\sigma') = 1$. Quitte à changer le paramétrage de $\Pi^{G'}(\varphi')$, on peut supposer que σ' est paramétré par $\boldsymbol{\epsilon}'$. Revenons à un groupe endoscopique général de G'. Alors $m(\varphi, 0; \varphi', s')$ est égal à $\boldsymbol{\epsilon}'(s')$. L'égalité (2) entraîne $\gamma^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-) = -1$. Cela achève de prouver le (i) du lemme 4.8. On a utilisé des données auxiliaires (V,q) et φ. Dans la suite, on les oublie, mais on suppose le lemme 4.8(i) vérifié.

Considérons maintenant un espace quadratique (V,q) et $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$. Supposons que (V,q) ne vérifie pas l'hypothèse (QD) de 1.7 et que $\Pi^G(\varphi)$ est non vide. Si $\delta(q) \neq 1$, on déduit comme en 4.6 du paramétrage de $\Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ fixé dans le paragraphe précédent un paramétrage de $\Pi^G(\varphi)$ qui satisfait le (ii) du lemme 4.8. Supposons que $\delta(q) = 1$, donc que G n'est pas quasi-déployé. Dans ce cas, on peut décomposer (V,q) en somme orthogonale d'un espace (V',q') et d'une droite (D,q_D) possédant un élément v tel que $q_D(v,v) = 2\nu_0$. Les espaces (V,q) et (V',q') satisfont les hypothèses de 2.1 et G' n'est pas déployé. On démontre l'analogue de (1) : il existe $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$ tel qu'il existe $(\sigma,\sigma') \in \Pi^G(\varphi) \times \Pi^{G'}(\varphi')$ de sorte que $m(\sigma,\sigma') = 1$. On fixe un tel φ' et on applique les constructions de 4.10 à $(V'_+, q'_+) = (\underline{V}', \underline{q}')$ et $\varphi'_+ = \varphi'$. D'après le calcul ci-dessus de $\gamma^{G'}(\varphi', 0)$, l'égalité de 4.10 devient

$$-\gamma^G(\varphi_+, \varphi_-)m(\varphi, s; \varphi', 0) = \boldsymbol{\epsilon}(s)(E(\varphi,\varphi') - 1)/2.$$

Le même raisonnement que ci-dessus montre que, quitte à modifier le paramétrage de $\Pi^G(\varphi)$, le (ii) du lemme 4.8 est vérifié.

On suppose désormais le lemme 4.8 vérifié et on revient à la situation générale de 4.10, en supposant G' non déployé. L'égalité de ce paragraphe se réduit à

$$-m(\varphi, s; \varphi', s') = \boldsymbol{\epsilon}(s)\boldsymbol{\epsilon}'(s')(E(\varphi, \varphi') - 1)/2.$$

C'est la même égalité que 4.11(1), à ceci près que $E(\varphi, \varphi')$ est changé en $-E(\varphi, \varphi')$. On achève la preuve du théorème comme dans ce paragraphe.

Bibliographie

[AGRS] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, G. Schiffmann : *Multiplicity one theorems*, prépublication 2007

[A1] J. Arthur : *An introduction to the trace formula*, Clay Math. Proc. 4 (2005), p.1-253

[A2] ——— : *A note on L-packets*, Pure and A. Math. Quart. 2 (2006), p.199-217

[C] L. Clozel : *Characters of non-connected, reductive p-adic groups*, Can. J. Math. 39 (1987), p.149-167

[GGP] W.T. Gan, B. Gross, D. Prasad : *Symplectic local root numbers, central critical L-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, prépublication 2009

[GP] B. Gross, D. Prasad : *On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}*, Can. J. Math. 44 (1992), p.974-1002

[GP2] ————————- : *On irreducible representations of $SO_{2n+1} \times SO_{2m}$*, Can. J. Math. 46 (1994), p.930-950

[HT] M. Harris, R. Taylor : *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. of Math. Studies 151, PUP 2002

[H] G. Henniart : *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p-adique*, Invent. Math. 139 (2000), p. 439-456

[KS] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[LS] R.P. Langlands, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Annalen 278 (1987), p.219-271

[M] C. Moeglin : *Représentations quadratiques unipotentes des groupes classiques p-adiques*, Duke Math. 84 (1996), p.267-332

[S] J.-P. Serre : *Corps locaux*, Hermann 1968

[V] D. Vogan : *The local Langlands conjecture*, Contemp. Math. 145 (1993), p.305-379

[W1] J.-L. Waldspurger : *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad*, prépublication 2009

[W2] ———————— : *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, 2ème partie : extension aux représentations tempérées*, prépublication 2009

[W3] ———————— : *Calcul d'une valeur d'un facteur ϵ par une formule intégrale*, prépublication 2009

[W4] ———————— : *Les facteurs de transfert pour les groupes classiques : un formulaire*, prépublication 2009

[W5] ———————— : *Une variante d'un résultat de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann*, prépublication 2009