
**LE LEMME FONDAMENTAL POUR L'ENDOSCOPIE
TORDUE : LE CAS OÙ LE GROUPE ENDOSCOPIQUE
ELLIPTIQUE NON RAMIFIÉ EST UN TORE**

Bertrand Lemaire & Jean-Loup Waldspurger

Résumé. — On prouve le lemme fondamental pour l'endoscopie tordue, pour les unités des algèbres de Hecke sphériques, dans le cas où la donnée endoscopique non ramifiée a pour groupe sous-jacent un tore. Cela entraîne que le lemme fondamental pour l'endoscopie tordue est désormais démontré, pour tous les éléments des algèbres de Hecke sphériques, en caractéristique nulle et en toute caractéristique résiduelle.

Abstract. — We prove the fundamental lemma for twisted endoscopy, for the unit elements of the spherical Hecke algebras, in the case of a non ramified elliptic endoscopic datum whose underlying group is a torus. This implies that the fundamental lemma for twisted endoscopy is now proved, for all elements in the spherical Hecke algebras, in characteristic zero and any residue characteristic.

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E50.

Mots clefs. — endoscopie tordue, donnée endoscopique elliptique non ramifiée, lemme fondamental.

Le premier auteur a bénéficié d'une subvention de l'Agence Nationale de la Recherche, projet ANR-13-BS01-00120-02 FERPLAY.

Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Relations entre différents lemmes fondamentaux.....	6
2.1. Les hypothèses.....	6
2.2. L'énoncé.....	8
2.3. Réalisation du tore T_0	9
2.4. Classes de conjugaison stable.....	10
2.5. Calcul d'un facteur de transfert.....	12
2.6. Calcul plus général.....	12
2.7. Comparaison de deux intégrales endoscopiques.....	13
2.8. Données endoscopiques pour le groupe adjoint.....	14
2.9. Un lemme sur les facteurs de transfert.....	17
2.10. Une égalité d'intégrales.....	19
2.11. Calcul d'un volume.....	21
2.12. Le résultat.....	24
3. Réduction au cas du changement de base pour $PGL(n)$	25
3.1. Les hypothèses (suite).....	25
3.2. Première réduction.....	26
3.3. Deuxième réduction.....	26
3.4. Troisième réduction.....	33
3.5. Troisième réduction (suite).....	36
3.6. Quatrième réduction.....	42
4. Réduction au résultat de Kazhdan par la méthode de Kottwitz.....	42
4.1. Réduction au cas du changement de base pour $GL(n)$	42
4.2. Une variante de la méthode de Kottwitz.....	43
4.3. Conclusion.....	46
Références.....	51

Le second auteur est heureux de dédier cet article à Roger Howe, à qui il sait devoir beaucoup.

1. Introduction

1.1. — Cet article est la suite de notre précédent travail avec Colette Mœglin [LMW]. Dans loc. cit., nous prouvons par une méthode purement locale que si le lemme fondamental pour l'endoscopie tordue (en caractéristique nulle) est vrai pour les unités des algèbres de Hecke sphériques, alors il l'est pour tous les éléments de ces algèbres de Hecke. La preuve, dont l'idée est due à Arthur, utilise le transfert spectral, obtenu par voie globale grâce au lemme fondamental pour les unités en presque toutes les places finies, ainsi que le lemme fondamental pour les unités (en la place qui nous intéresse) dans le cas où la donnée endoscopique non ramifiée a pour groupe sous-jacent un tore. Ce cas est très particulier. En effet, l'existence d'une telle donnée pour (\tilde{G}, ω) — voir plus loin — implique que le groupe adjoint \hat{G}_{AD} du groupe dual de G , l'action galoisienne sur \hat{G}_{AD} , ainsi que l'action $\hat{\theta}$ sur \hat{G}_{AD} donnée dualement par \tilde{G} , sont d'un type bien particulier décrit en [LMW, 5.2] : \hat{G}_{AD} est un produit

de groupes de type A_n , et le groupe de Galois ainsi que $\hat{\theta}$ opèrent par permutation des facteurs. On démontre ici le lemme fondamental pour les unités dans ce cas. Cela élimine la restriction sur la caractéristique résiduelle du corps de base dans [LMW].

1.2. — Rappelons que pour l'endoscopie ordinaire (avec caractère ω), Hales [H] a prouvé par une méthode globale que le lemme fondamental pour les unités des algèbres de Hecke sphériques en *presque toutes* les places finies implique le lemme fondamental pour tous les éléments de ces algèbres de Hecke en *toutes* les places finies. En particulier, il déduit le lemme fondamental pour les unités aux “mauvaises places” du lemme fondamental pour les unités en presque toutes les autres places. Curieusement, cette méthode n'utilise aucun résultat local en la place en question. En revanche, dans notre méthode pour l'endoscopie tordue, le principe local-global et le lemme fondamental pour les unités en presque toutes les places finies sont cachés dans le transfert spectral (dû à Arthur dans le cas non tordu, puis étendu par Mœglin au cas tordu). Mais on a quand même besoin d'un résultat local en la place qui nous intéresse, et c'est ce résultat qui est démontré ici. L'histoire est encore plus enchevêtrée puisqu'au bout du compte on se ramène au cas du changement de base (avec caractère ω) pour $GL(n)$, puis en adaptant la méthode de Kottwitz [Ko], à celui de l'endoscopie ordinaire (toujours avec caractère ω) pour $GL(n)$. Ce cas a été traité par Kazhdan [Ka]. Remarquons que Hales utilise lui aussi ce résultat de Kazhdan, cf. [H] lemme 4.4.

1.3. — Rappelons brièvement l'énoncé du lemme fondamental démontré ici. Soit F une extension finie d'un corps p -adique \mathbb{Q}_p . On fixe un élément de Frobénius $\phi \in W_F$, où W_F est le groupe de Weil de F . Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini et quasi-déployé sur F , et déployé sur une extension non ramifiée de F . Soient \tilde{G} un G -espace tordu défini sur F , et ω un caractère de $G(F)$. On suppose que le couple (\tilde{G}, ω) vérifie toutes les hypothèses de [LMW, 2.1, 2.6], à savoir que :

- l'ensemble $\tilde{G}(F)$ n'est pas vide ;
- le F -automorphisme θ de $Z(G)$ défini par \tilde{G} est d'ordre fini ;
- le caractère ω est non ramifié, et trivial sur $Z(G; F)^\theta$;
- l'espace tordu $(G(F), \tilde{G}(F))$ possède un sous-espace hyperspécial (K, \tilde{K}) .

Soit $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \bar{s})$ une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour (\tilde{G}, ω) telle que T' est un tore. Le choix d'un élément $(h, \phi) \in \mathcal{T}'$ permet d'identifier \mathcal{T}' à ${}^L T'$ (on n'a donc pas besoin de données auxiliaires). À cette donnée \mathbf{T}' est associé un T -espace tordu \tilde{T}' , défini sur F et à torsion intérieure. À (K, \tilde{K}) sont associés un sous-espace hyperspécial (K', \tilde{K}') de $\tilde{T}'(F)$, et un facteur de transfert normalisé $\Delta : \mathcal{D}(\mathbf{T}') \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Soit $\delta \in \tilde{T}'(F)$ un élément fortement \tilde{G} -régulier. À toute fonction $f \in C_c^\infty(F)$ est associée une intégrale orbitale endoscopique

$$(1) \quad I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta, f) = d(\theta^*)^{1/2} \sum_{\gamma} [G^\gamma(F) : G_\gamma(F)]^{-1} \Delta(\delta, \gamma) I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$$

où γ parcourt les éléments de $\tilde{G}(F)$ tels que $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$, modulo conjugaison par $G(F)$; on renvoie à 2.2 pour la définition des termes à droite de l'égalité. Le lemme fondamental pour la donnée \mathbf{T}' et la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\tilde{K}'}$ de \tilde{K}' dit que pour tout élément fortement \tilde{G} -régulier $\delta \in \tilde{T}'(F)$, on a l'égalité

$$(2) \quad \mathbf{1}_{\tilde{K}'}(\delta) = I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta, \mathbf{1}_{\tilde{K}'}).$$

1.4. — Pour démontrer l'égalité (2) de 1.3, on se ramène par étapes successives à des cas de plus en plus simples à traiter, pour finalement tomber sur le cas de l'endoscopie ordinaire

(avec caractère ω) pour $GL(n)$. La première étape, qui est aussi la plus difficile, consiste à se ramener au cas où le groupe G est adjoint. Elle fait l'objet de la section 2. On pose

$$\tilde{G}_{\text{AD}} = \tilde{G}/Z(G) = Z(G)\backslash\tilde{G}.$$

C'est un espace tordu sous G_{AD} , défini sur F . L'homomorphisme naturel $\rho : G \rightarrow G_{\text{AD}}$ se prolonge (tout aussi naturellement) en une application $\tilde{\rho} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}_{\text{AD}}$, $\gamma \mapsto \gamma_{\text{ad}}$. Le sous-espace hyperspécial (K, \tilde{K}) de $\tilde{G}(F)$ détermine un sous-espace hyperspécial $(K_{\text{ad}}, \tilde{K}_{\text{ad}})$ de $\tilde{G}_{\text{AD}}(F)$ — cf. 2.8. On fixe une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \tilde{s})$ pour (\tilde{G}, ω) telle que T' est un tore. Alors les choix d'un élément $(h, \phi) \in \mathcal{T}'$, d'une décomposition $h = z_h \hat{\rho}(h_{\text{sc}})$ avec $z_h \in Z(\hat{G})$ et $h_{\text{sc}} \in \hat{G}_{\text{SC}}$, et d'un élément $\tilde{s}_{\text{sc}} \in \hat{G}_{\text{SC}}$ dont l'image dans \hat{G}_{AD} coïncide avec celle de \tilde{s} , déterminent une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée $\mathbf{T}'_{\text{ad}} = (T'_{\text{ad}}, \mathcal{T}'_{\text{sc}}, \tilde{s}_{\text{sc}})$ pour $(\tilde{G}_{\text{AD}}, \omega'_{\text{ad}})$, où ω'_{ad} est un caractère de $G_{\text{AD}}(F)$. La classe d'isomorphisme de cette donnée \mathbf{T}'_{ad} (tout comme le caractère ω'_{ad}) dépend des choix. Pour d'autres choix, et plus généralement pour un paramètre β variant dans un certain groupe de cohomologie noté B , on construit une autre donnée endoscopique elliptique $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta] = (T'_{\text{ad}}, \mathcal{T}'_{\text{sc}}[\beta], \tilde{s}_{\text{sc}})$ pour $(\tilde{G}_{\text{AD}}, \omega'_{\text{ad}}[\beta])$. Cette donnée $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta]$ n'est pas forcément non ramifiée, mais elle vérifie encore $\mathcal{T}'_{\text{sc}}[\beta] \simeq {}^L(T'_{\text{ad}})$. On a aussi un sous-groupe $B^{\text{nr}} \subset B$ correspondant aux données $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta]$ qui sont non ramifiées. Au sous-espace hyperspécial $(K_{\text{ad}}, \tilde{K}_{\text{ad}})$ de $\tilde{G}_{\text{AD}}(F)$ sont associés un sous-espace hyperspécial $(K'_{\text{ad}}, \tilde{K}'_{\text{ad}})$ de \tilde{T}'_{ad} et un facteur de transfert normalisé $\Delta : \mathcal{D}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Pour $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$, le couple $(\delta_{\text{ad}}, \gamma_{\text{ad}})$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{T}'_{\text{ad}})$. Via le choix d'un point-base $(\delta_0, \gamma_0) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$ tel que $\delta_0 \in \tilde{K}'$ et $\gamma_0 \in \tilde{K}$, on peut normaliser les facteurs de transfert $\Delta[\beta]$ pour $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta]$ ($\beta \in B$) en imposant la condition $\Delta[\beta](\delta_{0,\text{ad}}, \gamma_{0,\text{ad}}) = \Delta(\delta_0, \gamma_0)$. On vérifie que pour $\beta \in B^{\text{nr}}$, cette normalisation coïncide avec la normalisation non ramifiée, c'est-à-dire que $\Delta[\beta]$ est le facteur de transfert normalisé associé à \tilde{K}_{ad} . On peut alors comparer ces différents facteurs de transfert $\Delta[\beta](\delta_0, \gamma)$, $\beta \in B$, pour $\gamma \in \tilde{G}(F)$ dans la classe de conjugaison stable de γ_0 , et en déduire que

$$(1) \quad I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) = |B^{\text{nr}}|^{-1} \sum_{\beta \in B^{\text{nr}}} I^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta], \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) = I^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}, \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}).$$

On obtient que :

- (i) Si le lemme fondamental est vérifié pour la donnée \mathbf{T}'_{ad} et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}$, alors il l'est pour la donnée \mathbf{T}' et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$.
- (ii) Supposons l'homomorphisme naturel $K' \rightarrow K'_{\text{ad}}$ surjectif. Si le lemme fondamental est vérifié pour la donnée \mathbf{T}' et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$, alors il l'est pour la donnée \mathbf{T}'_{ad} et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}$.

Notons que si le centre $Z(G)$ est connexe, alors l'homomorphisme $K' \rightarrow K'_{\text{ad}}$ est surjectif. D'après (i), pour montrer l'égalité (2) de 1.3, on peut supposer G adjoint.

1.5. — On suppose maintenant que G est adjoint. Dans la section 3, on se ramène au cas du changement de base (avec caractère ω) pour $PGL(n)$. Soit \mathcal{E} la paire de Borel épinglée définie sur F dont K est issu. Le stabilisateur $Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ de \mathcal{E} dans \tilde{G} est défini sur F , et comme c'est un espace principal homogène sous $Z(G) = \{1\}$, on a $Z(\tilde{G}, \mathcal{E}) = \{\epsilon\}$ pour un élément $\epsilon \in \tilde{G}(F)$. En posant $\theta = \text{Int}_\epsilon$, on a les identifications $\tilde{G} = G\theta$ et $\tilde{K} = K\theta$.

Notons Ω le groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin $\mathbf{\Delta}$ de G engendré par ϕ et par θ . Soient $\mathbf{\Delta}_1, \dots, \mathbf{\Delta}_d$ les orbites de Ω dans l'ensemble des composantes connexes de $\mathbf{\Delta}$. À la décomposition $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}_1 \amalg \dots \amalg \mathbf{\Delta}_d$ correspond une décomposition $G = G_1 \times \dots \times G_d$

qui est définie sur F et θ -stable. On a aussi une décomposition $\tilde{G} = \tilde{G}_1 \times \cdots \times \tilde{G}_d$, où $\tilde{G}_i = G_i \theta_i$, $\theta_i = \theta|_{G_i}$. Tout se décompose en produit, et on est ramené au cas $d = 1$.

On suppose que Ω opère transitivement sur les composantes connexes de Δ . Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_q$ les orbites de θ dans l'ensemble de ces composantes connexes. Puisque ϕ et θ commutent, ces orbites sont permutées transitivement par ϕ , et en notant F_1 l'extension non ramifiée de F de degré q et $\text{Res}_{F_1/F}$ le foncteur "restriction à la Weil", on a $G = \text{Res}_{F_1/F}(G_1)$ et $\tilde{G} = \text{Res}_{F_1/F}(\tilde{G}_1)$ pour un espace tordu (G_1, \tilde{G}_1) défini sur F_1 . Le groupe G_1 est adjoint, et $\tilde{G}_1 = G_1 \theta_1$ où θ_1 est le F_1 -automorphisme de G_1 tel que $\theta = \text{Res}_{F_1/F}(\theta_1)$. On a des identifications $G_1(F_1) = G(F)$ et $\tilde{G}_1(F_1) = \tilde{G}(F)$. La restriction à la Weil met en bijection tous les objets considérés (données endoscopiques, espaces hyperspéciaux, facteurs de transfert), et quitte à remplacer F par F_1 et (G, \tilde{G}) par (G_1, \tilde{G}_1) , on peut supposer $q = 1$.

On suppose que θ opère transitivement sur les composantes connexes de Δ . Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ les orbites de ϕ dans l'ensemble de ces composantes connexes. Puisque ϕ et θ commutent, ces orbites sont permutées transitivement par θ , et l'on est dans une situation similaire à celle du changement de base aux places décomposées [AC, chap. 1, 5], avec le caractère ω en plus. Comme dans loc. cit., les intégrales orbitales sur $\tilde{G}(F)$ se ramènent par produits de convolution à des intégrales orbitales sur $\tilde{G}_1(F)$, où (G_1, \tilde{G}_1) est l'espace tordu défini sur F correspondant à Δ_1 . On fait de même avec les intégrales orbitales endoscopiques, ce qui nous ramène au cas $r = 1$.

On suppose enfin que chacun des deux automorphismes θ et ϕ opère transitivement sur l'ensemble des composantes connexes de Δ . Alors on est dans la situation suivante :

- $G = \text{Res}_{F_1/F}(G_1)$ où F_1 est une extension non ramifiée de F de degré m et G_1 est un groupe adjoint défini sur F_1 ;
- l'action du groupe de Galois absolu $\Gamma_F = \text{Gal}(\bar{F}/F)$ de F sur $G(\bar{F}) = G_1(\bar{F})^{\times m}$ est donnée par $\sigma(x_1, \dots, x_m) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m))$ pour $\sigma \in \Gamma_{F_1}$ et par $\phi(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m, \phi^m(x_1))$;
- l'action de θ sur $G(\bar{F})$ est donnée par $\theta(x_1, \dots, x_m) = \phi^e(\theta_1(x_1), \dots, \theta_1(x_m))$ pour un entier $e \in \{1, \dots, m-1\}$ premier à m (si $m = 1$, on prend $e = 0$) et un F_1 -automorphisme θ_1 de G_1 .

On pose $\tilde{G}_1 = G_1 \theta_1$. D'après [LMW, 5.2], l'existence d'une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour (\tilde{G}, ω) ayant pour groupe sous-jacent un tore implique que $G_1 \simeq PGL(n)$ et $\theta_1 = \text{id}$. Alors θ est le F -automorphisme de $G = \text{Res}_{F_1/F}(G_1)$ défini par un générateur du groupe de Galois de F_1/F , et on est dans la situation du changement de base non ramifié (avec caractère ω) pour $PGL(n)$. Notons que si $m = 1$, alors $\theta = \text{id}$ et on peut appliquer [Ka]. Reste à traiter le cas $m > 1$.

1.6. — Le cas du changement de base non ramifié (avec caractère ω) pour $PGL(n)$ est traité dans la section 4. On suppose que $G = \text{Res}_{F_1/F}(PGL(n))$ pour une extension non ramifiée F_1/F de degré $m > 1$, et que θ est le F -automorphisme de G défini par un générateur de $\text{Gal}(F_1/F)$. Puisque le centre $Z(G)$ est connexe, on peut grâce au point (ii) de 1.3 remplacer $PGL(n)$ par $GL(n)$. Notons \mathfrak{o}_1 l'anneau des entiers de F_1 . On a $K = GL(n, \mathfrak{o}_1)$ et $\tilde{K} = K\theta$. Soit $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour $(G\theta, \omega)$ telle que T' est un tore. Si $\omega = 1$, alors le résultat de Kottwitz [Ko, prop. 1, p. 245] ramène le lemme fondamental pour \mathbf{T}' et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$ au lemme fondamental pour $\underline{\mathbf{T}'}$ et la fonction $\mathbf{1}_{GL(n, \mathfrak{o})}$, où $\underline{\mathbf{T}'}$ est une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour $GL(n)$ de groupe sous-jacent un tore $\underline{T}' \simeq T'$. On vérifie ici que la méthode de Kottwitz marche encore si $\omega \neq 1$. On conclut grâce au résultat de Kazhdan [Ka].

Pour traiter le cas du changement de base non ramifié (avec caractère ω) pour $PGL(n)$, une autre méthode semble possible : celle utilisée par le second auteur dans son article sur le lemme fondamental tordu pour les unités, qui est basée sur la descente d'Harish-Chandra. Mais l'article en question suppose que la caractéristique résiduelle est grande et il faudrait reprendre soigneusement les arguments pour vérifier que, dans le cas particulier ici considéré, cette restriction est inutile. Il ne nous semble pas clair que cela serait plus court que de faire appel à la méthode de Kottwitz comme nous le faisons.

Nous remercions le rapporteur pour sa lecture attentive.

2. Relations entre différents lemmes fondamentaux

2.1. Les hypothèses. — Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique nulle. On fixe une clôture algébrique \bar{F} de F , et on note Γ_F le groupe de Galois de l'extension \bar{F}/F , $I_F \subset \Gamma_F$ son groupe d'inertie, et $W_F \subset \Gamma_F$ son groupe de Weil. Soit $F^{\text{nr}} = \bar{F}^{I_F}$ la sous-extension non ramifiée maximale de \bar{F}/F . On fixe un élément de Frobenius $\phi \in W_F$, c'est-à-dire que la restriction de ϕ à F^{nr} est l'automorphisme de Frobenius de l'extension F^{nr}/F . On pose $W_F^{\text{nr}} = W_F/I_F \simeq \langle \phi \rangle$.

On note $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F , et $\mathfrak{o}^{\text{nr}} = \mathfrak{o}_{F^{\text{nr}}}$ celui de F^{nr} .

On considère un groupe algébrique réductif connexe G défini sur F , et un G -espace (algébrique) tordu \tilde{G} lui aussi défini sur F . Pour $\gamma \in \tilde{G}$, on note $\theta_\gamma = \text{Int}_\gamma$ l'automorphisme de G défini par γ . On munit les ensembles de points F -rationnels $G(F)$ et $\tilde{G}(F)$ de la topologie définie par F . On fixe un caractère ω de $G(F)$, c'est-à-dire un homomorphisme continu de $G(F)$ dans \mathbb{C}^\times . On suppose que le couple $(\tilde{G}, \omega) = ((G, \tilde{G}), \omega)$ est *non ramifié*, au sens où toutes les hypothèses de [LMW, 2.1, 2.6] sont satisfaites :

- le groupe G est quasi-déployé sur F , et déployé sur F^{nr} ;
- l'ensemble $\tilde{G}(F)$ des points F -rationnels de \tilde{G} n'est pas vide ;
- le F -automorphisme θ de $Z(G)$ défini par \tilde{G} est d'ordre fini ;
- le caractère ω de $G(F)$ est non ramifié, et trivial sur $Z(G; F)^\theta$;
- l'espace tordu $(G(F), \tilde{G}(F))$ possède un sous-espace hyperspécial (K, \tilde{K}) .

Précisons ces hypothèses. Puisque le groupe G est quasi-déployé sur F et déployé sur F^{nr} , il existe une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, \{E_\alpha\}_{\alpha \in \Delta})$ définie sur F et déployée sur une sous-extension finie F'/F de F^{nr}/F , c'est-à-dire telle que le tore maximal T de G est déployé sur F' (cela implique que les éléments E_α pour $\alpha \in \Delta$ sont F' -rationnels). Notons $Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ le stabilisateur de \mathcal{E} dans \tilde{G} . Cet ensemble n'est pas vide, et c'est un $Z(G)$ -espace tordu défini sur F . Soit $\theta_\mathcal{E}$ le F -automorphisme de G défini par $\theta_\mathcal{E} = \theta_\gamma$ pour $\gamma \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$.

Puisque l'ensemble $\tilde{G}(F)$ n'est pas vide, c'est un $G(F)$ -espace (topologique) tordu.

Pour $\gamma \in \tilde{G} (= \tilde{G}(\bar{F}))$, le \bar{F} -automorphisme θ_γ de G se restreint en un F -automorphisme du centre $Z(G)$ de G qui ne dépend pas de γ , et que l'on note simplement θ . L'hypothèse de finitude sur θ implique en particulier que \tilde{G} est une composante connexe d'un groupe algébrique affine défini sur F , de composante neutre G .

Au caractère ω de $G(F)$, la correspondance de Langlands associe une classe de cohomologie $\mathbf{a} \in H^1(W_F, Z(\hat{G}))$, où $Z(\hat{G})$ est le centre du groupe dual de G . On suppose que cette classe provient par inflation d'un élément de $H^1(W_F^{\text{nr}}, Z(\hat{G}))$. L'hypothèse $\omega|_{Z(G; F)^\theta} = 1$ est nécessaire pour que la théorie ne soit pas vide.

À la paire \mathcal{E} sont associés, par la théorie de Bruhat-Tits, un sous-groupe (ouvert, compact maximal) hyperspécial $K = K_\mathcal{E}$ de $G(F)$, et un \mathfrak{o} -schéma en groupe lisse $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\mathcal{E}$ de fibre

générique G tel que $K = \mathcal{K}(\mathfrak{o})$. Posons

$$N_{\tilde{G}(F)}(K) = \{\gamma \in \tilde{G}(F) : \text{Int}_\gamma(K) = K\}.$$

On suppose que l'ensemble $N_{\tilde{G}(F)}(K)$ n'est pas vide. Alors c'est un espace principal homogène sous le groupe $Z(G; F)K$, et tout élément $\gamma \in N_{\tilde{G}(F)}(K)$ définit un K -espace (topologique) tordu

$$\tilde{K} = K\gamma = \gamma K.$$

Si l'ensemble $\tilde{K} \cap \mathcal{K}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})Z(\tilde{G}, \mathcal{E}; F^{\text{nr}})$ n'est pas vide, ce que l'on suppose, alors on dit que \tilde{K} est un *sous-espace hyperspécial* de $\tilde{G}(F)$.

On fixe \mathcal{E} , $K = K_{\mathcal{E}}$ et $\tilde{K} = K\gamma = \gamma K$ vérifiant toutes les hypothèses ci-dessus.

Le groupe dual \hat{G} de G est muni d'une action algébrique de Γ_F , notée $\sigma \mapsto \sigma_G$, et d'une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, \{\hat{E}_\alpha\}_{\alpha \in \hat{\Delta}})$ qui est définie sur F , c'est-à-dire Γ_F -stable. Puisque G est déployé sur F^{nr} , l'action de Γ_F sur \hat{G} se factorise à travers Γ_F/I_F , et est donc entièrement déterminée par la donnée de l'automorphisme ϕ_G de \hat{G} . On pose

$${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F (= (\hat{G} \times I_F) \rtimes \langle \phi \rangle).$$

Le F -automorphisme $\theta_{\mathcal{E}}$ de G définit dualement un automorphisme $\hat{\theta}$ de \hat{G} qui conserve la paire $\hat{\mathcal{E}}$ et commute à l'action galoisienne sur \hat{G} (i.e. à ϕ_G) — cf. [LMW, 2.2].

Soit $\mathfrak{E}_{\text{t-nr}} = \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}(\tilde{G}, \omega)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de données endoscopiques elliptiques non ramifiées $(G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ pour (\tilde{G}, ω) telles que le groupe sous-jacent G' est un tore — cf. [LMW, 2.3, 2.6, 2.10] (ou [MW, I, 6]). Par abus d'écriture, on écrit simplement " $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s}) \in \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}$ " pour " $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s})$ un représentant d'une classe dans $\mathfrak{E}_{\text{t-nr}}$ ".

Soit $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s}) \in \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}$. On suppose, ce qui loisible, que $\tilde{s} = s\hat{\theta}$ avec $s \in \hat{T}$. Alors le tore dual \hat{T}' de T' s'identifie à $\hat{T}^{\hat{\theta}, \circ}$ muni d'une action galoisienne convenable; où $\hat{T}^{\hat{\theta}, \circ}$ est la composante neutre du sous-groupe $\hat{T}^{\hat{\theta}}$ de \hat{T} formé des points fixes sous $\hat{\theta}$. Puisque la donnée \mathbf{T}' est non ramifiée, le tore T' est déployé sur F^{nr} , et l'action de Γ_F sur T' , notée $\sigma \mapsto \sigma_{T'}$, est entièrement déterminée par la donnée de l'automorphisme $\phi_{T'}$ de \hat{T}' . Pour $(h, \phi) \in \mathcal{J}'$, l'automorphisme $x \mapsto h\phi(x)h^{-1}$ de \hat{G} agit comme $\phi_{T'}$ sur \hat{T}' . On a $\mathcal{J}' = (\hat{T}' \times I_F) \rtimes \langle (h, \phi) \rangle$, et l'application

$$(1) \quad \mathcal{J}' \rightarrow {}^L T' = \hat{T}' \rtimes W_F, (x, w)(h, \phi)^n \mapsto (x, w\phi^n), \quad (x, w) \in \hat{T}' \times I_F, n \in \mathbb{Z},$$

est un isomorphisme. Il existe un cocycle $a : W_F \rightarrow Z(\hat{G})$ dans la classe \mathbf{a} tel que pour tout $(x, w) \in \mathcal{J}'$, on a l'égalité dans ${}^L G$

$$(2) \quad \text{Int}_{\tilde{s}}(x, w) = (xa(w), w), \quad (x, w) \in \mathcal{J}'.$$

Posons $\mathbf{h} = h\phi \in \hat{G}W_F$. Alors (2) équivaut à l'égalité dans $\hat{G}W_F\hat{\theta} = \hat{G}\hat{\theta}W_F$

$$(3) \quad \tilde{s}\mathbf{h} = a(\phi)\mathbf{h}\tilde{s}.$$

Du plongement $\hat{T}' \hookrightarrow \hat{T}$ se déduit par dualité un morphisme

$$\xi : T \rightarrow T/(1 - \theta_{\mathcal{E}})(T) \simeq T'.$$

Ce morphisme n'est en général pas défini sur F , mais sa restriction à Z , notée

$$\xi_Z : Z(G) \rightarrow Z(T') = T',$$

est définie sur F . Le morphisme ξ_Z se quotiente un morphisme (lui aussi défini sur F)

$$\xi_Z : \mathcal{Z}(G) = Z(G)/(1 - \theta)(Z(G)) \rightarrow T'.$$

On note $\mathcal{Z}(\tilde{G}, \mathcal{E})$ le quotient de $Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ par l'action de $Z(G)$ par conjugaison, et on pose

$$\tilde{T}' = T' \times_{Z(G)} Z(\tilde{G}, \mathcal{E}).$$

Les actions à gauche et à droite de T' sur $T' \times Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ se descendent en des actions sur \tilde{T}' , et l'action de Γ_F sur $T' \times Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ se descend en une action sur \tilde{T}' , faisant de \tilde{T}' un espace (algébrique) tordu sous T' , défini sur F et à torsion intérieure. En [MW, I, 1.8] — voir aussi [LMW, 2.5] — est défini un sous-ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{T}')$ de $\tilde{T}'(F) \times \tilde{G}(F)$. C'est l'ensemble des couples $(\delta, \gamma) \in \tilde{T}'(F) \times \tilde{G}(F)$ d'éléments semisimples dont les classes de conjugaison stable se correspondent et tels que γ soit fortement régulier. On sait que la donnée \mathbf{T}' est *relevante* [MW, 6.2], c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{T}')$ n'est pas vide (en particulier $\tilde{T}'(F) \neq \emptyset$). On note $K' = T'(\mathfrak{o})$ le sous-groupe compact maximal de $T'(F)$; c'est l'unique sous-groupe hyperspécial de $T'(F)$. À \tilde{K} sont associés en [MW, I, 6.2, 6.3] un sous-espace hyperspécial \tilde{K}' de $T'(F)$ — c'est-à-dire un élément de $T'(F)/K'$ —, et un facteur de transfert normalisé

$$\Delta : \mathcal{D}(\mathbf{T}') \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

2.2. L'énoncé. — Continuons avec la donnée $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \tilde{s}) \in \mathfrak{E}_{t\text{-nr}}$ de 2.1. On munit $G(F)$ de la mesure de Haar dg qui donne le volume 1 à K , et $T'(F)$ de la mesure de Haar dt' qui donne le volume 1 à K' . Soit un couple $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$. L'élément γ de $\tilde{G}(F)$ est semisimple et *fortement régulier* (dans \tilde{G}), au sens où son centralisateur G_γ dans G est abélien et son centralisateur connexe $G_\gamma = G^{\gamma, \circ}$ est un tore. Le commutant T_0 de G_γ dans G est un tore maximal de G , défini sur F , et on a

$$G_\gamma = T_0^{\theta_\gamma, \circ}.$$

Il y a un homomorphisme naturel $G_\gamma(F) \rightarrow T'(F)$ ($= T'_\delta(F)$), qui est un revêtement sur son image. C'est la restriction à $G_\gamma(F)$ du F -morphisme $\xi_{T_0, T'} : T_0 \rightarrow T'$ obtenu en choisissant un diagramme $(\delta, T', T', B_0, T_0, \gamma)$ comme en [MW, I, 1.10]. On note $\mathfrak{t}_0 = \text{Lie}(T_0)$ l'algèbre de Lie de T_0 , et $\mathfrak{t}' = \text{Lie}(T')$ celle de T' . L'automorphisme θ_γ de G donne un automorphisme de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, que l'on note encore θ_γ ; il est défini sur F et stabilise \mathfrak{t}_0 . Le sous-espace $\mathfrak{t}_0^{\theta_\gamma}$ de \mathfrak{t}_0 formé des points fixes sous θ_γ coïncide avec $\mathfrak{g}_\gamma = \text{Lie}(G_\gamma)$. L'homomorphisme naturel $\mathfrak{t}_0^{\theta_\gamma}(F) \rightarrow \mathfrak{t}'(F)$ est un homéomorphisme. De la mesure de Haar dt' sur $T'(F)$ ($= T'_\delta(F)$) se déduit une mesure sur $\mathfrak{t}'(F)$, que l'on transporte en une mesure sur $\mathfrak{t}_0^{\theta_\gamma}(F)$. On remonte cette dernière en une mesure de Haar dg_γ sur $T_0^{\theta_\gamma, \circ}(F)$. Ces choix de mesures permettent de définir, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, l'intégrale orbitale ordinaire

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = D^{\tilde{G}}(\gamma) \int_{G_\gamma(F) \backslash G(F)} \omega(g) f(g^{-1} \gamma g) \frac{dg}{dg_\gamma},$$

où l'on a posé

$$D^{\tilde{G}}(\gamma) = |\det(1 - \text{ad}_\gamma; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{t}_0^{\theta_\gamma}(F))|_F.$$

Ici $|\cdot|_F$ est la valeur absolue normalisée sur F . On pose aussi

$$(1) \quad I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta, f) = d(\theta^*)^{1/2} \sum_{\gamma} [G^\gamma(F) : G_\gamma(F)]^{-1} \Delta(\delta, \gamma) I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$$

où γ parcourt les éléments semisimples fortement réguliers de $\tilde{G}(F)$ modulo conjugaison par $G(F)$ (on a $\Delta(\delta, \gamma) = 0$ si $(\delta, \gamma) \notin \mathcal{D}(\mathbf{T}')$), et où $d(\theta^*) = d(\theta_\varepsilon)$ est le facteur de normalisation défini par

$$d(\theta^*) = |\det(1 - \theta_\varepsilon; \mathfrak{t}(F)/\mathfrak{t}^{\theta_\varepsilon}(F))|_F, \quad \mathfrak{t} = \text{Lie}(T).$$

REMARQUE. — La notation $d(\theta^*)$ est reprise de [MW] I.2.4 où elle se justifiait. Ici, on n'a pas défini d'automorphisme θ^* mais on conserve cette notation par souci de cohérence avec [MW]. En tout cas, la constante $d(\theta^*)$ est définie par la formule ci-dessus. ■

On rappelle qu'un élément $\delta \in \tilde{T}'(F)$ est dit *fortement \tilde{G} -régulier* s'il existe un élément semisimple fortement régulier $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tel que $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$. Le lemme fondamental qui nous intéresse ici affirme que la fonction caractéristique de \tilde{K}' , que l'on note $\mathbf{1}_{\tilde{K}'}$, est un transfert de $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$ à $\tilde{T}'(F)$:

THÉORÈME. — *Pour tout élément fortement \tilde{G} -régulier $\delta \in \tilde{T}'(F)$, on a l'égalité*

$$\mathbf{1}_{\tilde{K}'}(\delta) = I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta, \mathbf{1}_{\tilde{K}}).$$

Ce théorème sera démontré dans la section 4. Dans cette section 2, on le relie au même énoncé pour le G_{AD} -espace tordu $\tilde{G}_{\text{AD}} = \tilde{G}/Z(G)$ ($= Z(G)\backslash\tilde{G}$), où G_{AD} est le groupe adjoint de G .

2.3. Réalisation du tore T_0 . — La donnée $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \tilde{s}) \in \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}$ est fixée pour toute cette section 2. Rappelons que $\tilde{s} = s\hat{\theta}$ avec $s \in \hat{T}$.

D'après [MW, I, 6.1.(5)], il existe des éléments $\epsilon \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}; F^{\text{nr}})$ et $t^* \in T(\mathfrak{o})$ tels que $t^*\epsilon \in \tilde{K}$. On a donc $\theta_{\mathcal{E}} = \theta_{\epsilon}$. De \mathcal{E} se déduisent des paires de Borel épinglées d'autres groupes. D'abord la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_{\text{sc}} = (B_{\text{sc}}, T_{\text{sc}}, \{E_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta})$ du revêtement simplement connexe G_{SC} du groupe dérivé de G , où B_{sc} et T_{sc} sont les images réciproques de B et T par l'homomorphisme naturel $G_{\text{SC}} \rightarrow G$. D'autre part, notons G_1 (resp. B_1, T_1) la composante neutre de $G^{\theta_{\mathcal{E}}}$ (resp. $B^{\theta_{\mathcal{E}}}, T^{\theta_{\mathcal{E}}}$). L'ensemble des racines simples Δ_1 de T_1 dans G_1 relatif à B_1 s'identifie à celui des orbites dans Δ du groupe de permutations engendré par $\theta_{\mathcal{E}}$. Pour une telle orbite (α) , on note $E_{(\alpha)}$ la somme des E_{α} pour α dans l'orbite (α) . La donnée $\mathcal{E}_1 = (B_1, T_1, \{E_{(\alpha)}\}_{(\alpha) \in \Delta_1})$ est une paire de Borel épinglée de G_1 . On en déduit comme ci-dessus une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_{1,\text{sc}} = (B_{1,\text{sc}}, T_{1,\text{sc}}, \{E_{(\alpha)}\}_{(\alpha) \in \Delta_1})$ de $G_{1,\text{SC}}$. Toutes ces paires sont définies sur F et donnent naissance à des \mathfrak{o} -schémas en groupes lisses, notés respectivement $\mathcal{K}_{\text{sc}}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_{1,\text{sc}}$. On note $K_{\text{sc}}, K_1, K_{1,\text{sc}}$ les groupes des points \mathfrak{o} -rationnels $\mathcal{K}_{\text{sc}}(\mathfrak{o}), \mathcal{K}_1(\mathfrak{o}), \mathcal{K}_{1,\text{sc}}(\mathfrak{o})$. On introduit aussi les groupes $K^{\text{nr}} = \mathcal{K}(\mathfrak{o}), K_{\text{sc}}^{\text{nr}} = \mathcal{K}_{\text{sc}}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$, etc. On a des homomorphismes naturels, par exemple $K_{\text{sc}} \rightarrow K$ et $K_{1,\text{sc}} \rightarrow K_1 \rightarrow K$.

Soit $k \in K_{1,\text{sc}}^{\text{nr}}$. Posons $\mathcal{E}_0 = \text{Int}_{k^{-1}}(\mathcal{E})$ — c'est une paire de Borel épinglée de G définie sur F^{nr} — et notons (B_0, T_0) la paire de Borel de G sous-jacente à \mathcal{E}_0 . Puisque $\theta_{\mathcal{E}}(k) = k$, l'élément ϵ appartient encore à $Z(\tilde{G}, \mathcal{E}_0)$. On a donc $\theta_{\mathcal{E}_0} = \theta_{\epsilon} = \theta_{\mathcal{E}}$. Posons $\tilde{T}_0 = T_0\epsilon$. C'est le normalisateur dans \tilde{G} de la paire (B_0, T_0) . De cette paire se déduit un homomorphisme $\xi_0 = \xi_{T_0, T'} : T_0 \rightarrow T'$ qui se prolonge en une application $\tilde{\xi}_0 : \tilde{T}_0 \rightarrow \tilde{T}'$. La preuve du lemme de [MW, I, 6.2] montre que l'on peut choisir $k \in K_{1,\text{sc}}^{\text{nr}}$ de sorte que T_0 et ξ_0 soient définis sur F . Ces conditions entraînent automatiquement que :

- le tore T_0 est non ramifié ;
- \tilde{T}_0 et $\tilde{\xi}_0$ sont définis sur F ;
- on a les égalités $T_0(F) \cap K = T_0(\mathfrak{o})$ et $\tilde{T}_0(F) \cap \tilde{K} = \tilde{T}_0(F) \cap T_0(\mathfrak{o}^{\text{nr}})\epsilon$;
- l'ensemble $\tilde{T}_0(\mathfrak{o}) := \tilde{T}_0(F) \cap \tilde{K}$ n'est pas vide, et on a l'inclusion $\tilde{\xi}_0(\tilde{T}_0(\mathfrak{o})) \subset \tilde{K}'$.

La suite

$$1 \rightarrow (1 - \theta_{\mathcal{E}})(T_0) \rightarrow T_0 \xrightarrow{\xi_0} T' \rightarrow 1$$

est exacte et les tores en question sont non ramifiés. Le théorème de Lang entraîne alors que ξ_0 se restreint en une surjection de $T_0(\mathfrak{o})$ sur $T'(\mathfrak{o})$. La dernière assertion ci-dessus se renforce donc en l'égalité $\tilde{\xi}_0(\tilde{T}_0(\mathfrak{o})) = \tilde{K}'$.

On fixe pour la suite de cette section 2 un élément $k \in K_{1,\text{sc}}^{\text{nr}}$ vérifiant les conditions ci-dessus, d'où les différents objets $T_0, \tilde{T}_0, \xi_0, \tilde{\xi}_0$ (etc.) que l'on vient d'introduire.

Pour alléger l'écriture, on note désormais simplement θ le F -automorphisme $\theta_\varepsilon = \theta_{\varepsilon_0}$ de G . Remarquons que $\theta|_{T_0} = \theta_\gamma|_{T_0}$ pour tout $\gamma \in \tilde{T}_0$.

LEMME. — *Pour tout élément fortement \tilde{G} -régulier $\delta \in \tilde{T}(F)$ tel que $\delta \notin \tilde{K}'$, on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) = 0.$$

Démonstration. — Supposons $\delta \notin \tilde{K}'$. Il suffit de vérifier qu'aucun élément semisimple fortement régulier $\gamma \in \tilde{K}$ ne correspond à δ (pour la correspondance donnée par l'appartenance à l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{T}')$). D'après la construction ci-dessus, on peut fixer des éléments $\delta_0 \in \tilde{K}'$ et $\gamma_0 \in \tilde{T}_0(\mathfrak{o}) \subset \tilde{K}$ tels que $(\delta_0, \gamma_0) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$. On utilise les homomorphismes d'Harish-Chandra

$$H_{\tilde{G}} : G(F) \rightarrow \mathcal{A}_{\tilde{G}}, \quad H_{\tilde{T}'} = H_{T'} : T'(F) \rightarrow \mathcal{A}_{T'} = \mathcal{A}_{\tilde{T}'},$$

définis de la manière habituelle (cf. [MW, II, 1.6]). Rappelons que $\mathcal{A}_G = X_*(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, où A_G est le plus grand sous-tore déployé central dans G . De l'espace \tilde{G} se déduit un automorphisme θ de \mathcal{A}_G dont on note $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ l'espace des points fixes. L'application $H_{\tilde{G}}$ est la composée de l'application d'Harish-Chandra usuelle $H_G : G(F) \rightarrow \mathcal{A}_G$ et de la projection θ -invariante de \mathcal{A}_G sur son sous-espace de points fixes. On peut définir des applications

$$\tilde{H}_{\tilde{G}} : \tilde{G}(F) \rightarrow \mathcal{A}_{\tilde{G}}, \quad \tilde{H}_{T'} : \tilde{T}'(F) \rightarrow \mathcal{A}_{T'}$$

compatibles à ces homomorphismes en posant simplement

$$\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma_0) = 0, \quad \tilde{H}_{T'}(\delta_0) = 0.$$

En choisissant une uniformisante ϖ_F de F , le groupe $T'(F)$ s'identifie au produit de $T'(\mathfrak{o}_F)$ et de $X_*(T')^{\Gamma_F}$. La restriction de $H_{T'}$ à ce dernier groupe est injective. L'hypothèse sur δ implique donc $\tilde{H}_{T'}(\delta) \neq 0$. D'autre part, on a un isomorphisme $\mathcal{A}_{\tilde{G}} \simeq \mathcal{A}_{T'}$ (on a un homomorphisme naturel $A_G \rightarrow A_{T'}$, d'où un homomorphisme $\mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}_{T'}$; puisque \mathbf{T}' est elliptique, ce dernier se restreint en l'isomorphisme en question). Modulo cet isomorphisme, on sait que, pour tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$ semisimple fortement régulier correspondant à δ , on a $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma) = \tilde{H}_{T'}(\delta)$. Donc $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma) \neq 0$. Mais, puisque $\tilde{K} = K\gamma_0$, $\tilde{H}_{\tilde{G}}$ est nulle sur \tilde{K} , ce qui démontre l'assertion. \square

2.4. Classes de conjugaison stable. — On fixe des éléments $\delta_0 \in \tilde{K}'$ et $\gamma_0 \in \tilde{T}_0(\mathfrak{o})$ tels que $\xi_0(\gamma_0) = \delta_0$. On suppose γ_0 fortement régulier (dans \tilde{G}), c'est-à-dire que (δ_0, γ_0) appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{T}')$. Ce couple $(\delta_0, \gamma_0) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}') \cap (\tilde{K}' \times \tilde{T}_0(\mathfrak{o}))$ sera conservé jusqu'à la fin de cette section 2 (excepté en 2.6 où nous affaiblirons les hypothèses sur \mathbf{T}').

Posons

$$\mathcal{Y} = \{g \in G : g\sigma(g)^{-1} \in T_0^\theta, \forall \sigma \in \Gamma_F\}.$$

L'application $g \mapsto g^{-1}\gamma_0 g$ se quotiente en une bijection de $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}$ sur la classe de conjugaison stable de γ_0 , autrement dit sur l'ensemble des éléments $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tels que $(\delta_0, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$. Rappelons que l'on définit une application

$$q : \mathcal{Y} \rightarrow H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} (1-\theta)(T_0))$$

de la façon suivante. Pour $g \in \mathcal{Y}$, on écrit $g = z\pi(g_{\text{sc}})$ avec $z \in Z(G)$ et g_{sc} , où $\pi : G_{\text{SC}} \rightarrow G$ est l'homomorphisme naturel. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on pose $\alpha(\sigma) = g_{\text{sc}}\sigma(g_{\text{sc}})^{-1}$. L'application q envoie g sur la classe du couple $(\alpha, (1-\theta)(z))$. Elle se quotiente en une bijection

$$\bar{q} : T_0^\theta \backslash \mathcal{Y} / \pi(G_{\text{SC}}(F)) \xrightarrow{\simeq} H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} (1-\theta)(T_0)).$$

On a un diagramme de complexes de tores

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} T_{0,\text{sc}} & \xrightarrow{1-\theta} & (1-\theta)(T_0) \\ \downarrow 1-\theta & & \downarrow \\ T_{0,\text{sc}} & \longrightarrow & T_0 \end{array}$$

D'où un homomorphisme

$$\varphi : \mathbf{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} (1-\theta)(T_0)) \rightarrow \mathbf{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0).$$

Le tore T_0 étant non ramifié, d'après [KS, C.1], le groupe $\mathbf{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0)$ contient un sous-groupe

$$\mathbf{H}^{1,0}(\mathfrak{o}; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0) := \mathbf{H}^{1,0}(\Gamma_F/I_F; T_{0,\text{sc}}(\mathfrak{o}^{\text{nr}}) \rightarrow T_0(\mathfrak{o}^{\text{nr}})).$$

On note $\mathcal{Y}_c \subset \mathcal{Y}$ l'image réciproque de ce sous-groupe par l'application $\varphi \circ q$.

LEMME. — Soit $g \in \mathcal{Y}$ tel que $g^{-1}\gamma_0 g \in \tilde{K}$. Alors $g \in \mathcal{Y}_c$.

Démonstration. — On doit commencer par quelques rappels. On définit un homomorphisme

$$\iota : G(F) \rightarrow \mathbf{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0)$$

de la façon suivante. Pour $g \in G(F)$, on écrit $g = z\pi(g_{\text{sc}})$ avec $z \in Z(G)$ et $g_{\text{sc}} \in G_{\text{SC}}$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on pose $\alpha(\sigma) = g_{\text{sc}}\sigma(g_{\text{sc}})^{-1}$. L'homomorphisme ι envoie g sur la classe du couple (α, z) . Il se quotiente en un isomorphisme

$$\bar{\iota} : G_{\text{ab}}(F) := G(F)/\pi(G_{\text{SC}}(F)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0).$$

REMARQUE. — La notation $G_{\text{ab}}(F)$ est commode mais ne doit pas abuser : il ne s'agit pas de l'ensemble des points sur F d'un groupe algébrique. La même remarque vaut pour la notation $G_{\text{ab}}(\mathfrak{o})$ ci-dessous. ■

Montrons que :

- (2) Les sous-groupes K , $T(\mathfrak{o})$ et $T_0(\mathfrak{o})$ de $G(F)$ ont même image dans $G_{\text{ab}}(F)$, disons $G_{\text{ab}}(\mathfrak{o})$, et on a $\bar{\iota}(G_{\text{ab}}(\mathfrak{o})) = \mathbf{H}^{1,0}(\mathfrak{o}; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0)$.

D'après la théorie de Bruhat–Tits, le groupe K est engendré par $T(\mathfrak{o})$, par des sous-groupes compacts des sous-groupes unipotents de $G(F)$ associés aux racines de T_d — le sous-tore déployé maximal de T — dans G , et par des relèvements dans K des éléments du groupe de Weyl $W^G(T)$. Or ces deux derniers types d'éléments (ceux dans les sous-groupes unipotents associés aux racines de T_d dans G , et les relèvements des éléments de $W^G(T)$) appartiennent à $\pi(K_{\text{sc}})$. Donc K et $T(\mathfrak{o})$ ont même image dans $G_{\text{ab}}(F)$. D'après [MW, VII, 1.5.(3)], $T(\mathfrak{o})$ et $T_0(\mathfrak{o})$ ont aussi même image dans $G_{\text{ab}}(F)$. Dans loc. cit., les hypothèses de non-ramification sont plus fortes que celles que l'on impose ici, mais pour la propriété ci-dessus, nos présentes hypothèses sont suffisantes. Enfin d'après [KS, lemma C.1.A], l'image de $T_0(\mathfrak{o})$ dans $\mathbf{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0)$ est égale à $\mathbf{H}^{1,0}(\mathfrak{o}; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0)$. Cela prouve (2).

Soit $g \in \mathcal{Y}$. Alors $g^{-1}\text{Int}_{\gamma_0}(g)$ appartient à $G(F)$. Un calcul facile montre que

$$\varphi \circ q(g) = \iota(g^{-1}\text{Int}_{\gamma_0}(g))^{-1}.$$

Supposons $g^{-1}\gamma_0 g \in \tilde{K}$. Puisque $g^{-1}\gamma_0 g = g^{-1}\text{Int}_{\gamma_0}(g)\gamma_0$ et $\gamma_0 \in \tilde{K}$, on a $g^{-1}\text{Int}_{\gamma_0}(g) \in K$. Donc $\iota(g^{-1}\text{Int}_{\gamma_0}(g))$ appartient au groupe $\mathbf{H}^{1,0}(\mathfrak{o}; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0)$, et $\varphi \circ q(g)$ appartient à ce groupe, ce qui signifie que g appartient à \mathcal{Y}_c . □

2.5. Calcul d'un facteur de transfert. — On va calculer le facteur de transfert $\Delta(\delta_0, \gamma_0)$. On identifie le tore dual \hat{T}_0 de T_0 à \hat{T} muni d'une action galoisienne tordue par un cocycle à valeurs dans le groupe $W^{\hat{\theta}}$, où W est le groupe de Weyl $W^G(T)$ que l'on a identifié à $W^{\hat{G}}(\hat{T})$ comme en [LMW, 2.2]. Le groupe \hat{T}' s'identifie à $\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ}$ et cette identification est cette fois équivariante pour les actions galoisiennes. On doit fixer des a -data et des χ -data pour l'action de Γ_F sur T_0 (ou \hat{T}_0). Les extensions du corps F qui interviennent dans la définition de ces termes sont non ramifiées. On peut supposer — et on suppose — que les données sont non ramifiées, c'est-à-dire que pour toute racine α de T_0 dans G , l'élément a_α appartient à $\mathfrak{o}^{\text{nr}, \times}$ et le caractère χ_α est non ramifié.

LEMME. — *On a l'égalité*

$$\Delta(\delta_0, \gamma_0) = \Delta_{\text{II}}(\delta_0, \gamma_0).$$

Démonstration. — On utilise la formule de [MW, I, 6.3]

$$(1) \quad \Delta(\delta_0, \gamma_0) = \Delta_{\text{II}}(\delta_0, \gamma_0) \tilde{\lambda}_\zeta(\delta_0)^{-1} \tilde{\lambda}_z(\gamma_0) \langle (V_{T_0}, \nu_{\text{ad}}), (t_{T_0, \text{sc}}, s_{\text{ad}}) \rangle^{-1}.$$

Ici $\zeta_1 = \zeta$ (et $\delta_1 = \delta_0$) puisqu'on a pris des données auxiliaires "triviales". Les applications $\tilde{\lambda}_\zeta : \tilde{T}'(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ et $\tilde{\lambda}_z : \tilde{G}(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ sont des caractères affines non ramifiés, qui valent 1 sur \tilde{K}' et sur \tilde{K} (en appelant caractère affine par exemple sur $\tilde{G}(F)$ une fonction sur cet espace qui se transforme par l'action de $G(F)$ à gauche selon un vrai caractère de ce groupe). Puisque $\delta_0 \in \tilde{K}'$ et $\gamma_0 \in \tilde{T}_0(\mathfrak{o}) \subset \tilde{K}$, on a

$$\tilde{\lambda}_\zeta(\delta_0) = \tilde{\lambda}_z(\gamma_0) = 1.$$

Il reste à calculer le produit $\langle (V_{T_0}, \nu_{\text{ad}}), (t_{T_0, \text{sc}}, s_{\text{ad}}) \rangle$ pour l'accouplement

$$H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0, \text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} T_{0, \text{ad}}) \times H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{0, \text{sc}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0, \text{ad}}) \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Le terme ν est l'élément de T_0 tel que $\gamma_0 = \nu\epsilon$, et ν_{ad} est son image dans $T_{0, \text{ad}}$. Il résulte des définitions que $\nu \in T_0(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$, d'où $\nu_{\text{ad}} \in T_{0, \text{ad}}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on a une égalité

$$V_{T_0}(\sigma) = r_{T_0}(\sigma) n_{\mathcal{E}_0}(\omega_{T_0}(\sigma)) u_{\mathcal{E}_0}(\sigma).$$

Sur F^{nr} , le sous-groupe $K_{\text{sc}}^{\text{nr}} = \mathcal{K}_{\text{sc}}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$ de $G_{\text{SC}}(F^{\text{nr}})$ associé à la paire de Borel épinglée \mathcal{E}_{sc} de G_{SC} est aussi celui associé à la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_{0, \text{sc}}$ de G_{SC} : cela résulte de la définition $\mathcal{E}_0 = \text{Int}_{k^{-1}}(\mathcal{E})$ avec $k \in K_{1, \text{sc}}^{\text{nr}}$. Il est clair qu'alors $n_{\mathcal{E}_0}(\omega_{T_0}(\sigma)) \in K_{\text{sc}}^{\text{nr}}$. Pour la même raison et parce que les a -data sont des unités, on a $r_{T_0}(\sigma) \in T_{0, \text{sc}}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$. Enfin, il résulte des définitions que l'on peut choisir $u_{\mathcal{E}_0}(\sigma) = k^{-1}\sigma(k)$. Donc $V_{T_0}(\sigma) \in K_{\text{sc}}^{\text{nr}}$. On sait de plus que ce terme $V_{T_0}(\sigma)$ appartient à $T_{0, \text{sc}}(\bar{F})$, donc il appartient à $T_{0, \text{sc}}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$. Alors la classe du cocycle $(V_{T_0}, \nu_{\text{ad}})$ appartient au groupe $H^{1,0}(\mathfrak{o}; T_{0, \text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} T_{0, \text{ad}})$, cf. [KS, C1]. Or, parce que les χ -data sont non ramifiées, le cocycle $(t_{T_0, \text{sc}}, s_{\text{ad}})$ est lui aussi non ramifié, c'est-à-dire que sa classe appartient au groupe $H^{1,0}(W_F^{\text{nr}}, \hat{T}_{0, \text{sc}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0, \text{ad}})$. On sait que l'accouplement de deux tels cocycles non ramifiés vaut 1. Donc $\langle (V_{T_0}, \nu_{\text{ad}}), (t_{T_0, \text{sc}}, s_{\text{ad}}) \rangle = 1$, ce qui achève la preuve. \square

2.6. Calcul plus général. — On va calculer le facteur $\Delta(\delta_0, g^{-1}\gamma_0 g)$ pour $g \in \mathcal{Y}$. Parce que nous en aurons besoin plus loin, affaiblissons les hypothèses sur \mathbf{T}' : dans ce numéro, on ne suppose plus que la donnée endoscopique $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s})$ pour (\tilde{G}, ω) est non ramifiée (en particulier on ne suppose plus " $\mathbf{T}' \in \mathfrak{E}_{t-\text{nr}}$ "), mais on suppose encore que T' est un tore et que \mathcal{J}' est identifié au L -groupe ${}^L T'$ de T' , c'est-à-dire que l'on suppose donné un isomorphisme

$${}^L T' \rightarrow \mathcal{J}', (t, w) \mapsto (th(w), w).$$

On suppose aussi que la donnée \mathbf{T}' est relevante, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{T}')$ n'est pas vide, et on fixe un couple $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$. On note T_0 le commutant de $G_\gamma = G^{\gamma, \circ}$ dans G (on a donc $T_0^{\theta_\gamma} = G^\gamma$), et comme en 2.4, on pose $\mathcal{Y} = \{g \in G : g\sigma(g)^{-1} \in T_0^{\theta_\gamma}, \forall \sigma \in \Gamma_F\}$. Comme précédemment, l'identification de \mathcal{T}' à ${}^L T'$ nous dispense d'utiliser des données auxiliaires. Il n'y a plus de choix naturel de facteur de transfert comme dans le cas où la donnée \mathbf{T}' est non ramifiée, mais, pour $g \in \mathcal{Y}$, le rapport $\Delta(\delta, g^{-1}\gamma g)\Delta(\delta, \gamma)^{-1}$ est bien défini.

Définissons la cochaîne $t_0 : W_F \rightarrow \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ}$ qui, à $w \in W_F$, associe l'image dans $\hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ}$ de $\hat{r}_{T_0}(w)\hat{n}(\omega_{T_0}(w))h(w)^{-1}$ — cf. [MW, I, 2.2] pour la définition des deux premiers termes. Le couple (t_0, s_{ad}) est un cocycle qui définit un élément de $H^{1,0}(W_F; \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,\text{ad}})$. On a un accouplement

$$H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta_\gamma} (1-\theta_\gamma)(T_0)) \times H^{1,0}(W_F; \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,\text{ad}}) \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

On définit comme en 2.4 une application

$$q : \mathcal{Y} \rightarrow H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta_\gamma} (1-\theta_\gamma)(T_0)).$$

LEMME. — *Pour tout $g \in \mathcal{Y}$, on a l'égalité*

$$\Delta(\delta, g^{-1}\gamma g)\Delta(\delta, \gamma)^{-1} = \langle q(g), (t_0, s_{\text{ad}}) \rangle.$$

Démonstration. — C'est le contenu du théorème 5.1.D.(1) de [KS]. La formule se retrouve aussi par un calcul sans mystère en appliquant les définitions de [MW, I, 2.2]. \square

2.7. Comparaison de deux intégrales endoscopiques. — Reprenons les hypothèses d'avant 2.6, c'est-à-dire la donnée $\mathbf{T}' \in \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}$ et le couple $(\delta_0, \gamma_0) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}') \cap (\tilde{K}' \times \tilde{T}_0(\mathfrak{o}))$.

Soit $z \in Z(\hat{G})$. Notons \mathcal{T}'_z le sous-groupe de ${}^L G$ engendré par $\hat{T}^{\hat{\theta}, \circ}$, par I_F et par l'élément (zh, ϕ) . Le triplet $\mathbf{T}'_z = (T'_z, \mathcal{T}'_z, \tilde{s})$ est une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour (\tilde{G}, ω_z) , où ω_z est le produit de ω et du caractère (non ramifié) de $G(F)$ correspondant au cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G})$ dont la valeur en ϕ est $\hat{\theta}(z)z^{-1}$. En particulier, on définit $I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}'_z, \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}'})$ comme on a défini $I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}'})$.

LEMME. — *On a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}'_z, \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}'}) = I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}'}).$$

Démonstration. — On affecte d'un indice z les termes relatifs à la donnée \mathbf{T}'_z . Quand on remplace \mathbf{T}' par \mathbf{T}'_z , la seule chose qui change est le facteur de transfert. On doit prouver que, pour $g \in \mathcal{Y}$ tel que $g^{-1}\gamma_0 g \in \tilde{K}$, on a l'égalité $\Delta_z(\delta_0, g^{-1}\gamma_0 g) = \Delta(\delta_0, g^{-1}\gamma_0 g)$. D'après le lemme de 2.5, cette égalité est vérifiée si $g = 1$, les deux facteurs de transfert étant alors égaux au terme Δ_{II} . Il suffit donc de prouver l'égalité

$$\Delta_z(\delta_0, g^{-1}\gamma_0 g)\Delta_z(\delta_0, \gamma_0)^{-1} = \Delta(\delta_0, g^{-1}\gamma_0 g)\Delta(\delta_0, \gamma_0)^{-1},$$

ou encore, d'après le lemme de 2.6, l'égalité

$$\langle q(g), (t_{0,z}, s_{\text{ad}}) \rangle = \langle q(g), (t_0, s_{\text{ad}}) \rangle.$$

D'après le lemme de 2.3, il suffit de prouver cette égalité pour $g \in \mathcal{Y}_c$. On a introduit en 2.4 l'homomorphisme

$$\varphi : H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} (1-\theta)(T_0)) \rightarrow H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0).$$

Le diagramme de complexe de tores (1) de 2.4 donne dualement un diagramme de complexes de tores

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \hat{T}_0 & \longrightarrow & \hat{T}_{0,\text{ad}} \\ \downarrow & & \downarrow 1-\hat{\theta} \\ \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ} & \xrightarrow{1-\hat{\theta}} & \hat{T}_{0,\text{ad}} \end{array} .$$

Il s'en déduit un homomorphisme

$$\hat{\varphi} : \mathrm{H}^{1,0}(W_F; \hat{T}_0 \rightarrow \hat{T}_{0,\text{ad}}) \rightarrow \mathrm{H}^{1,0}(W_F; \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,\text{ad}}).$$

D'après les définitions, on a

$$(t_{0,z}, s_{\text{ad}}) = (t_0, s_{\text{ad}})\hat{\varphi}(z, 1)^{-1},$$

où z est le cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans \hat{T}_0 tel que $z(\phi) = z$. On doit donc prouver, pour $g \in \mathcal{Y}_c$, que $\langle q(g), \hat{\varphi}(z, 1) \rangle = 1$, ou encore que $\langle \varphi \circ q(g), (z, 1) \rangle = 1$. Or la classe du cocycle $\varphi \circ q(g)$ appartient à $\mathrm{H}^{1,0}(\mathfrak{o}; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0)$ tandis que celle du cocycle $(z, 1)$ appartient à $\mathrm{H}^{1,0}(W_F; \hat{T}_0 \rightarrow \hat{T}_{0,\text{ad}})$. On sait que l'accouplement de deux tels cocycles vaut 1, ce qui achève la preuve. \square

2.8. Données endoscopiques pour le groupe adjoint. — On pose

$$\tilde{G}_{\text{AD}} = \tilde{G}/Z(G) = Z(G)\backslash\tilde{G}.$$

C'est un espace tordu sous G_{AD} , et on a une application naturelle $\tilde{\rho} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}_{\text{AD}}$, $\gamma \mapsto \gamma_{\text{ad}}$ qui prolonge l'application naturelle $\rho : G \rightarrow G_{\text{AD}}$. La paire de Borel épinglée \mathcal{E} de G se projette en une paire de Borel épinglée \mathcal{E}_{ad} de G_{AD} , qui détermine un sous-groupe hyperspécial $K_{\text{ad}} = \mathcal{K}_{\text{ad}}(\mathfrak{o})$ de $G_{\text{AD}}(F)$. On a introduit en 2.3 un élément $\epsilon \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$, qui se projette en un élément $\epsilon_{\text{ad}} \in Z(\tilde{G}_{\text{AD}}, \mathcal{E}_{\text{ad}})$. L'ensemble $Z(\tilde{G}_{\text{AD}}, \mathcal{E}_{\text{ad}})$ est défini sur F (parce que la paire \mathcal{E}_{ad} l'est), et est réduit à un point parce que G_{AD} est adjoint. On a donc $Z(\tilde{G}_{\text{AD}}, \mathcal{E}_{\text{ad}}) = \{\epsilon_{\text{ad}}\}$ avec $\epsilon_{\text{ad}} \in \tilde{G}_{\text{AD}}(F)$. Il en résulte que $\tilde{G}_{\text{AD}}(F) = G_{\text{AD}}(F)\epsilon_{\text{ad}}$ et que l'ensemble $\tilde{K}_{\text{ad}} = K_{\text{ad}}\epsilon_{\text{ad}} = \epsilon_{\text{ad}}K_{\text{ad}}$ est un sous-espace hyperspécial de $G_{\text{AD}}(F)$. On a les inclusions $\rho(K) \subset K_{\text{ad}}$ et $\tilde{\rho}(\tilde{K}) \subset \tilde{K}_{\text{ad}}$. Plus précisément, on tire des résultats de Bruhat–Tits que $\rho^{-1}(K_{\text{ad}}) \cap G(F) = Z(G; F)K$, d'où aussi

$$\tilde{\rho}^{-1}(\tilde{K}_{\text{ad}}) \cap \tilde{G}(F) = Z(G; F)\tilde{K} = \tilde{K}Z(G; F).$$

Rappelons que le L -groupe de G_{AD} est ${}^L(G_{\text{AD}}) = \hat{G}_{\text{SC}} \rtimes W_F$. On a fixé une donnée $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \tilde{s}) \in \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}$ avec $\tilde{s} = s\hat{\theta}$, $s \in \hat{T}$, et un élément $(h, \phi) \in \mathcal{T}'$. Choisissons :

— une décomposition $h = z_h \hat{\rho}(h_{\text{sc}})$ avec $z_h \in Z(\hat{G})$ et $h_{\text{sc}} \in \hat{G}_{\text{SC}}$;

— un élément $s_{\text{sc}} \in \hat{T}_{\text{sc}}$ dont l'image dans \hat{G}_{AD} coïncide avec celle de s .

Ici $\hat{\rho} : \hat{G}_{\text{SC}} \rightarrow \hat{G}$ est l'homomorphisme naturel, dual de ρ . On pose $\tilde{s}_{\text{sc}} = s_{\text{sc}}\hat{\theta}$ et on note \mathcal{T}'_{sc} le sous-groupe de ${}^L(G_{\text{AD}})$ engendré par le groupe $\hat{T}_{\text{sc}}^{\hat{\theta}}$ (qui est connexe), par le groupe d'inertie $I_F \subset W_F$, et par l'élément (h_{sc}, ϕ) . On note T'_{ad} le tore $T_{0,\text{ad}}/(1-\theta)(T_{0,\text{ad}})$. Le triplet $\mathbf{T}'_{\text{ad}} = (T'_{\text{ad}}, \mathcal{T}'_{\text{sc}}, \tilde{s}_{\text{sc}})$ est une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour $(G_{\text{AD}}, \omega'_{\text{ad}})$, pour un certain caractère ω'_{ad} de $G_{\text{AD}}(F)$ défini comme suit. Ecrivons $s = z_s \hat{\rho}(s_{\text{sc}})$ avec $z_s \in Z(\hat{G})$. L'égalité

$$s\hat{\theta}(h) = a(\phi)h\phi(s)$$

devient

$$\hat{\rho}(s_{\text{sc}}\hat{\theta}(h_{\text{sc}})) = z_h \hat{\theta}(z_h)^{-1} \phi(z_s) z_s^{-1} a(\phi) \hat{\rho}(h_{\text{sc}}\phi(s_{\text{sc}})).$$

L'élément

$$a'_{\text{sc}} = s_{\text{sc}} \hat{\theta}(h_{\text{sc}}) \phi(s_{\text{sc}})^{-1} h_{\text{sc}}^{-1}$$

appartient à $Z(\hat{G}_{\text{SC}})$, et on a

$$(1) \quad \hat{\rho}(a'_{\text{sc}}) = z_h \hat{\theta}(z_h)^{-1} \phi(z_s) z_s^{-1} a(\phi).$$

L'élément a'_{sc} définit un cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\text{SC}})$ dont la valeur en ϕ est a'_{sc} . La classe de cohomologie de ce cocycle, disons $\mathbf{a}'_{\text{sc}} \in H^1(W_F, Z(\hat{G}_{\text{SC}}))$, correspond au caractère ω'_{ad} de $G_{\text{AD}}(F)$. Le caractère ω'_{ad} , et a fortiori la classe d'isomorphisme de la donnée \mathbf{T}'_{ad} , dépendent des choix (de l'élément $(h, \phi) \in \mathcal{T}$ et de la décomposition $h = z_h \hat{\rho}(h_{\text{sc}})$). On reviendra plus loin sur ces choix (cf. la remarque 3).

REMARQUE 1. — À cause du z_h ci-dessus, ω n'est en général pas le composé du caractère ω'_{ad} et de l'homomorphisme $\rho_F : G(F) \rightarrow G_{\text{AD}}(F)$. Soit η_{z_h} le caractère de $G(F)$ associé au cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G})$ dont la valeur en ϕ est $\hat{\theta}(z_h) z_h^{-1}$. D'après (1), le caractère $\omega'_{\text{ad}} \circ \rho_F$ de $G(F)$ est donné par

$$\omega'_{\text{ad}} \circ \rho_F = \omega \cdot \eta_{z_h}^{-1}.$$

Rappelons qu'à la donnée \mathbf{T}' est associé un caractère non ramifié ω'_{\sharp} du groupe $G_{\sharp}(F)$, où l'on a posé $G_{\sharp} = G/Z(G)^{\theta}$. Ce caractère correspond à un cocycle non ramifié a'_{\sharp} de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\sharp})$, qui est déterminé par la projection de $a'_{\sharp}(\phi) \in Z(\hat{G}_{\sharp})$ sur $Z(\hat{G}_{\sharp})/(1-\phi)(Z(\hat{G}_{\sharp}))$. D'après la description de $Z(\hat{G}_{\sharp})$ donnée dans [MW, I, 2.7], on a un morphisme surjectif

$$(2) \quad Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta}, \circ}) \times Z(\hat{G}_{\text{SC}}) \rightarrow Z(\hat{G}_{\sharp}),$$

et il suffit de prendre pour $a'_{\sharp}(\phi)$ l'image de (z_h, a'_{sc}) dans $Z(\hat{G}_{\sharp})$ par ce morphisme. La projection naturelle $G \rightarrow G_{\sharp}$ induit un homomorphisme injectif $G(F)/Z(G; F)^{\theta} \rightarrow G_{\sharp}(F)$ qui, composé avec le caractère ω'_{\sharp} , redonne ω . On voit aussi que ω'_{\sharp} est le produit de deux caractères de $G_{\sharp}(F)$:

- le composé de ω'_{ad} et de l'homomorphisme naturel $G_{\sharp}(F) \rightarrow G_{\text{AD}}(F)$;
- le caractère non ramifié de $G_{\sharp}(F)$ donné par l'image de $(z_h, 1)$ dans $Z(\hat{G}_{\sharp})$.

En composant ω'_{\sharp} avec l'homomorphisme naturel $G(F) \rightarrow G_{\sharp}(F)$, on retrouve bien l'égalité $\omega = (\omega'_{\text{ad}} \circ \rho_F) \cdot \eta_{z_h}$. ■

Continuons avec la donnée \mathbf{T}'_{ad} . On identifie \mathcal{T}'_{sc} au L -groupe ${}^L(T'_{\text{ad}})$ comme en 2.1.(1) grâce à l'élément (h_{sc}, ϕ) . Il est clair que les applications ξ_0 et $\tilde{\xi}_0$ de 2.3 passent aux quotients et que l'on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} T_0 & \xrightarrow{\xi_0} & T' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{0, \text{ad}} & \xrightarrow{\xi_{0, \text{ad}}} & T'_{\text{ad}} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \tilde{T}_0 & \xrightarrow{\tilde{\xi}_0} & \tilde{T}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{T}_{0, \text{ad}} & \xrightarrow{\tilde{\xi}_{0, \text{ad}}} & \tilde{T}'_{\text{ad}} \end{array}.$$

Le sous-espace hyperspécial \tilde{K}'_{ad} de $\tilde{T}'_{\text{ad}}(F)$ associé à \tilde{K}_{ad} est le produit $T'_{\text{ad}}(\mathfrak{o})$ et de l'image naturelle de \tilde{K}' dans $\tilde{T}'_{\text{ad}}(F)$.

On va construire d'autres données endoscopiques pour la paire $(G_{\text{AD}}, \tilde{G}_{\text{AD}})$. De l'homomorphisme

$$Z(\hat{G}_{\text{SC}}) \hat{T}_{0, \text{sc}}^{\hat{\theta}} / \hat{T}_{0, \text{sc}}^{\hat{\theta}} \rightarrow Z(\hat{G}) \hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ} / \hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ}$$

se déduit un homomorphisme

$$\mathrm{H}^1(W_F; Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}) \rightarrow \mathrm{H}^1(W_F; Z(\hat{G})\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}).$$

On note $B \subset \mathrm{H}^1(W_F; Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}})$ l'image réciproque par cet homomorphisme du sous-groupe de $\mathrm{H}^1(W_F; Z(\hat{G})\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ})$ formé des éléments non ramifiés, c'est-à-dire de $\mathrm{H}^1(W_F^{\mathrm{nr}}; Z(\hat{G})\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ})$. On note $B^{\mathrm{nr}} \subset B$ le sous-groupe formé des éléments non ramifiés. Ce n'est autre que $\mathrm{H}^1(W_F^{\mathrm{nr}}; Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}})$. On a :

- (3) tout élément de B se relève en un cocycle de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$, et tout élément de B^{nr} se relève en un tel cocycle non ramifié.

Montrons (3). De la suite exacte

$$1 \rightarrow \hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}} \rightarrow \hat{T}_{0,\mathrm{sc}} \rightarrow \hat{T}_{0,\mathrm{sc}}/\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}} \rightarrow 1$$

est issu un homomorphisme

$$\mathrm{H}^1(W_F; \hat{T}_{0,\mathrm{sc}}) \rightarrow \mathrm{H}^1(W_F; \hat{T}_{0,\mathrm{sc}}/\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}})$$

qui est surjectif [L, p. 719]. Représentons un élément de B par un cocycle $b : W_F \rightarrow Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$. D'après la surjectivité ci-dessus, on peut fixer un cocycle $b' : W_F \rightarrow \hat{T}_{0,\mathrm{sc}}$ tel que, en poussant b et b' en des cocycles \underline{b} et \underline{b}' à valeurs dans $\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}/\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$, ces cocycles soient cohomologues. Quitte à remplacer b' par un cocycle cohomologue, on peut supposer $\underline{b}' = \underline{b}$. Alors b' est un cocycle à valeurs dans $\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}$ qui, modulo $\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$, coïncide avec b , donc b' prend ses valeurs dans $Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$. Dans le cas d'un élément $\beta \in B^{\mathrm{nr}}$, il suffit de relever $\beta(\phi)$ en un élément de $Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$ pour obtenir un relèvement non ramifié de β .

Pour chaque $\beta \in B$, on fixe un cocycle de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$ qui relève β et qui est non ramifié si β l'est, et l'on note encore β ce cocycle. Soit

$$W_F \rightarrow \mathcal{J}'_{\mathrm{sc}}, w \mapsto (h_{\mathrm{sc}}(w), w)$$

l'homomorphisme défini par $h_{\mathrm{sc}}(w) = 1$ si $w \in I_F$ et $h_{\mathrm{sc}}(\phi) = h_{\mathrm{sc}}$. Pour $\beta \in B$, on note $\mathcal{J}'_{\mathrm{sc}}[\beta]$ le sous-groupe de ${}^L(G_{\mathrm{AD}})$ engendré par $\hat{T}_{\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$ et par l'ensemble des $(\beta(w)h_{\mathrm{sc}}(w), w)$ pour $w \in W_F$. L'application $w \mapsto \hat{\theta}(\beta(w))\beta(w)^{-1}$ est un cocycle de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})$, et puisque $s_{\mathrm{sc}}\hat{\theta}(h_{\mathrm{sc}}) = a'_{\mathrm{sc}}h_{\mathrm{sc}}\phi(s_{\mathrm{sc}})$, pour $(h', w) \in \mathcal{J}'_{\mathrm{sc}}[\beta]$, on a

$$(4) \quad \mathrm{Int}_{\tilde{s}_{\mathrm{sc}}}(h', w) = (h'\hat{\theta}(\beta(w))\beta(w)^{-1}a'_{\mathrm{sc}}(w), w);$$

où l'on a noté $w \mapsto a'_{\mathrm{sc}}(w)$ le cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})$ tel que $a'_{\mathrm{sc}}(\phi) = a'_{\mathrm{sc}}$. Alors $\mathbf{T}'_{\mathrm{ad}}[\beta] = (T', \mathcal{J}'_{\mathrm{sc}}[\beta], \tilde{s}_{\mathrm{sc}})$ est encore une donnée endoscopique elliptique pour $(\tilde{G}_{\mathrm{AD}}, \omega'_{\mathrm{ad}}[\beta])$, pour un certain caractère $\omega'_{\mathrm{ad}}[\beta]$ de $G_{\mathrm{AD}}(F)$. D'après (4), $\omega'_{\mathrm{ad}}[\beta]$ est le produit de ω'_{ad} et du caractère de $G_{\mathrm{AD}}(F)$ correspondant au cocycle $w \mapsto \hat{\theta}(\beta(w))\beta(w)^{-1}$ de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})$. On voit que la donnée $\mathbf{T}'_{\mathrm{ad}}[\beta]$ est non ramifiée si et seulement si $\beta \in B^{\mathrm{nr}}$.

REMARQUE 2. — Pour $\beta \in B^{\mathrm{nr}}$, l'élément $\zeta = \beta(\phi)$ appartient à $Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})\hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$. Choisissons une décomposition $\zeta = z_{\zeta}t_{\zeta}$ avec $z_{\zeta} \in Z(\hat{G}_{\mathrm{SC}})$ et $t_{\zeta} \in \hat{T}_{0,\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$. La donnée $\mathbf{T}'_{\mathrm{ad}}[\beta]$ coïncide avec la donnée elliptique et non ramifiée $\mathbf{T}'_{\mathrm{ad},z_{\zeta}} = (T'_{\mathrm{ad}}, \mathcal{J}'_{\mathrm{sc},z_{\zeta}}, \tilde{s}_{\mathrm{sc}})$ pour $(G_{\mathrm{AD}}, \omega'_{\mathrm{ad},z_{\zeta}})$ introduite en 2.7. Ici $\mathcal{J}'_{\mathrm{sc},z_{\zeta}}$ est le sous-groupe de ${}^L(G_{\mathrm{AD}})$ engendré par $\hat{T}_{\mathrm{sc}}^{\hat{\theta}}$, par I_F et par $(z_{\zeta}h_{\mathrm{sc}}, \phi)$, et $\omega'_{\mathrm{ad},z_{\zeta}}$ est le produit de ω'_{ad} et du caractère (non ramifié) de $G_{\mathrm{AD}}(F)$ correspondant au

cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\text{SC}})$ dont la valeur en ϕ est $\hat{\theta}(z_\zeta)z_\zeta^{-1}$ (puisque $\hat{\theta}(z_\zeta)z_\zeta^{-1} = \hat{\theta}(\zeta)\zeta^{-1}$, on a bien $\omega'_{\text{ad},z_\zeta} = \omega'_{\text{ad}}[\beta]$). ■

REMARQUE 3. — On est parti d'une donnée \mathbf{T}'_{ad} construite à partir de \mathbf{T}' via le choix d'un élément $(h, \phi) \in \mathcal{T}'$ et d'une décomposition $h = z_h \hat{\rho}(h_{\text{sc}})$ avec $z_h \in Z(\hat{G})$ et $h_{\text{sc}} \in \hat{G}_{\text{sc}}$. On a aussi choisi un élément $s_{\text{sc}} \in \hat{T}_{\text{sc}}$ dont l'image dans \hat{G}_{AD} coïncide avec celle de s , mais ce choix n'a pas d'importance. Choisissons un autre élément $(\bar{h}, \phi) \in \mathcal{T}'$, et une décomposition $\bar{h} = z_{\bar{h}} \hat{\rho}(\bar{h}_{\text{sc}})$ avec $z_{\bar{h}} \in Z(\hat{G})$ et $\bar{h}_{\text{sc}} \in \hat{G}_{\text{SC}}$. Alors $\bar{h} = th$ pour un $t \in \hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta},\circ}$, et en écrivant $t = z_t \hat{\rho}(t_{\text{sc}})$ avec $z_t \in Z(\hat{G})$ et $t_{\text{sc}} \in \hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$, on obtient que l'élément $\zeta = \bar{h}_{\text{sc}} h_{\text{sc}}^{-1}$ appartient à $Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$. L'élément

$$\bar{a}'_{\text{sc}} = s_{\text{sc}} \hat{\theta}(\bar{h}_{\text{sc}}) \phi(s_{\text{sc}})^{-1} \bar{h}_{\text{sc}}^{-1}$$

vérifie

$$\bar{a}'_{\text{sc}} = \hat{\theta}(\zeta) \zeta^{-1} a'_{\text{sc}}.$$

Soit β le cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$ tel que $\beta(\phi) = \zeta$. En remplaçant (h_{sc}, ϕ) par $(\bar{h}_{\text{sc}}, \phi)$ dans la définition de \mathbf{T}'_{ad} , on obtient la donnée endoscopique elliptique et non ramifiée $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta] = (\mathbf{T}'_{\text{ad}}, \mathcal{T}'_{\text{sc}}[\beta], \tilde{s}_{\text{sc}})$ pour $(\tilde{G}_{\text{AD}}, \omega'_{\text{ad}}[\beta])$ définie plus haut. ■

Pour $\beta \in B$, les formules définissant le sous-groupe $\mathcal{T}'_{\text{sc}}[\beta] \subset {}^L G$ l'identifient au groupe dual ${}^L(T'_{\text{ad}})$. On n'a donc pas besoin de données auxiliaires. Rappelons que l'on a fixé en 2.4 un couple $(\delta_0, \gamma_0) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$. Les éléments $\delta_{0,\text{ad}} \in \tilde{T}'_{\text{ad}}(F)$ et $\gamma_{0,\text{ad}} \in \tilde{G}_{\text{AD}}(F)$ se correspondent, c'est-à-dire que l'on a $(\delta_{0,\text{ad}}, \gamma_{0,\text{ad}}) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}'_{\text{ad}})$. On normalise le facteur de transfert $\Delta[\beta]$ associé à la donnée $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta]$ en imposant la condition

$$(5) \quad \Delta[\beta](\delta_{0,\text{ad}}, \gamma_{0,\text{ad}}) = \Delta(\delta_0, \gamma_0).$$

Dans le cas où $\beta \in B^{\text{nr}}$, on a aussi un facteur de transfert non ramifié pour $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta]$, relatif à \tilde{K}' et \tilde{K}'_{ad} . Des a -data et χ -data fixées en 2.4 se déduisent naturellement de tels objets pour la donnée elliptique non ramifiée $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta]$. On a alors $\Delta_{\text{II}}(\delta_{0,\text{ad}}, \gamma_{0,\text{ad}}) = \Delta_{\text{II}}(\delta_0, \gamma_0)$, et le lemme de 2.5 montre que ce facteur de transfert non ramifié pour $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta]$ coïncide avec $\Delta[\beta]$.

2.9. Un lemme sur les facteurs de transfert. — De même que l'on a associé l'ensemble \mathcal{Y} à γ_0 , on associe un ensemble \mathcal{Y}_{ad} à $\gamma_{0,\text{ad}}$. De l'homomorphisme naturel $\rho : G \rightarrow G_{\text{AD}}$ se déduit une application $\rho : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{ad}}$. Elle n'est pas surjective en général.

LEMME. — (i) Pour $\beta \in B$ et $g \in \mathcal{Y}_c$, on a

$$\Delta[\beta](\delta_{0,\text{ad}}, g_{\text{ad}}^{-1} \gamma_{0,\text{ad}} g_{\text{ad}}) = \Delta(\delta_0, g^{-1} \gamma_0 g).$$

(ii) Pour $x \in \mathcal{Y}_{\text{ad}} \setminus \rho(\mathcal{Y}_c)$, on a

$$\sum_{\beta \in B} \Delta[\beta](\delta_{0,\text{ad}}, x^{-1} \gamma_{0,\text{ad}} x) = 0.$$

Démonstration. — D'après la normalisation des facteurs de transfert $\Delta[\beta]$, on peut remplacer l'égalité du (i) par

$$\Delta(\delta_0, g^{-1} \gamma_0 g) \Delta(\delta_0, \gamma_0)^{-1} = \Delta[\beta](\delta_{0,\text{ad}}, g_{\text{ad}}^{-1} \gamma_{0,\text{ad}} g_{\text{ad}}) \Delta[\beta](\delta_{0,\text{ad}}, \gamma_{0,\text{ad}})^{-1}$$

et celle du (ii) par

$$\sum_{\beta \in B} \Delta[\beta](\delta_{0,\text{ad}}, x^{-1} \gamma_{0,\text{ad}} x) \Delta[\beta](\delta_{0,\text{ad}}, \gamma_{0,\text{ad}})^{-1} = 0.$$

Tous ces termes sont calculés par le lemme de 2.6. Les tores et applications intervenant dans la formule de ce lemme varient selon le cas. Avec des notations qu'on espère compréhensibles, le (i) de l'énoncé se traduit par une égalité

$$(1) \quad \langle q(g), (t_0, s_{\text{ad}}) \rangle = \langle q_{\text{ad}}(g_{\text{ad}}), (t_{0,\text{sc}}[\beta], s_{\text{ad}}) \rangle$$

pour $\beta \in B$ et $g \in \mathcal{Y}_c$, tandis que le (ii) se traduit par une égalité

$$(2) \quad \sum_{\beta \in B} \langle q_{\text{ad}}(x), (t_{0,\text{sc}}[\beta], s_{\text{ad}}) \rangle = 0$$

pour $x \in \mathcal{Y}_{\text{ad}} \setminus \rho(\mathcal{Y}_c)$.

Commençons par prouver (2). On note simplement $t_{0,\text{sc}} : W_F \rightarrow \hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$ la cochaîne correspondant à la donnée \mathbf{T}'_{ad} , autrement dit à $\beta = 1$. Par construction, pour $\beta \in B$ et $w \in W_F$, on a

$$t_{0,\text{sc}}[\beta](w) = t_{0,\text{sc}}(w)\beta(w)^{-1}.$$

L'égalité à prouver se réécrit

$$\langle q_{\text{ad}}(x), (t_{0,\text{sc}}, s_{\text{ad}}) \rangle \sum_{\beta \in B} \langle q_{\text{ad}}(x), (\beta, 1) \rangle^{-1} = 0.$$

Posons

$$\mathfrak{H} = \mathrm{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} (1-\theta)(T_{0,\text{ad}})), \quad \mathfrak{Q} = q_{\text{ad}} \circ \rho(\mathcal{Y}_c) \subset \mathfrak{H}.$$

Le sous-ensemble $\rho(\mathcal{Y}_c) \subset G_{\text{AD}}$ est invariant par multiplication à gauche par $T_{0,\text{ad}}^{\theta}$ et à droite par $\pi_{\text{ad}}(G_{\text{SC}}(F))$, où $\pi_{\text{ad}} : G_{\text{SC}} \rightarrow G_{\text{AD}}$ est l'homomorphisme naturel. Il est donc égal à l'image réciproque de \mathfrak{Q} par q_{ad} . Il nous suffit donc de prouver l'égalité

$$(3) \quad \sum_{\beta \in B} \langle h, (\beta, 1) \rangle = 0$$

pour tout $h \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{Q}$. On rappelle que l'accouplement

$$\mathrm{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} (1-\theta)(T_{0,\text{ad}})) \times \mathrm{H}^{1,0}(W_F; \hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,\text{ad}})$$

devient une dualité parfaite si l'on quotiente le deuxième groupe par l'image naturelle de $\hat{T}_{0,\text{ad}}^{\Gamma_F, \circ}$. Pour prouver l'égalité (3), il suffit de prouver que l'annulateur \mathfrak{Q}^{\vee} de \mathfrak{Q} dans $\mathrm{H}^{1,0}(W_F; \hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,\text{ad}})$ est le produit de l'image de B par $\beta \mapsto (\beta, 1)$ et de l'image naturelle de $\hat{T}_{0,\text{ad}}^{\Gamma_F, \circ}$.

On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} (1-\theta)(T_0)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0) \\ \psi \downarrow & & \\ \mathrm{H}^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} (1-\theta)(T_{0,\text{ad}})) & & \end{array}$$

Le groupe \mathfrak{Q} est l'image par ψ de l'image réciproque par φ de $\mathrm{H}^{1,0}(\mathfrak{o}_F; T_{0,\text{sc}} \rightarrow T_0)$. Duale-ment, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{1,0}(W_F; \hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,\text{ad}}) & & \\ \hat{\psi} \downarrow & & \\ \mathrm{H}^{1,0}(W_F; \hat{T}_0 \rightarrow \hat{T}_{0,\text{ad}}) & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathrm{H}^{1,0}(W_F; \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,\text{ad}}) \end{array}$$

On a déjà dit que l'annulateur de $H^{1,0}(\mathfrak{o}_F; T_{0,sc} \rightarrow T_0)$ dans $H^{1,0}(W_F; \hat{T}_0 \rightarrow \hat{T}_{0,ad})$ est le groupe $H^{1,0}(W_F^{nr}; \hat{T}_0 \rightarrow \hat{T}_{0,ad})$. Il en résulte que Ω^\vee est l'image réciproque par $\hat{\psi}$ du groupe engendré par l'image par $\hat{\varphi}$ de $H^{1,0}(W_F^{nr}; \hat{T}_0 \rightarrow \hat{T}_{0,ad})$ et par l'image naturelle de $\hat{T}_{0,ad}^{\Gamma_F, \circ}$ dans $H^{1,0}(W_F; \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,ad})$. Soit (u_{sc}, t) un élément de Ω^\vee , ou plutôt un cocycle dont la classe de cohomologie appartient à Ω^\vee . Notons u le composé de u_{sc} et de l'homomorphisme $\hat{T}_{0,sc}/\hat{T}_{0,sc}^{\hat{\theta}} \rightarrow \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ}$. Alors (u, t) est cohomologue à un cocycle $(\underline{u}, \underline{t})$, où \underline{u} est un cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G})\hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ}$ et $\underline{t} \in \hat{T}_{0,ad}^{\Gamma_F, \circ}$. On peut donc fixer $v \in \hat{T}_0$ tel que $u(w) = \underline{u}(w)w(v)v^{-1}$ pour tout $w \in W_F$ et $t = \underline{t}(1-\theta)(v_{ad})$. On écrit $v = z_v \hat{\rho}(v_{sc})$ avec $z_v \in Z(\hat{G})$ et $v_{sc} \in \hat{T}_{0,sc}$. On peut remplacer le cocycle (u_{sc}, t) par le cocycle cohomologue (u'_{sc}, t') défini par $u'_{sc}(w) = u_{sc}(w)w(v_{sc})^{-1}v_{sc}$ pour tout $w \in W_F$ et $t' = t(1-\theta)(v_{ad})^{-1}$. Notons u' le composé de u'_{sc} et de l'homomorphisme $\hat{T}_{0,sc}/\hat{T}_{0,sc}^{\hat{\theta}} \rightarrow \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ}$. On obtient $u'(w) = \underline{u}(w)w(z_v)z_v^{-1}$ pour tout $w \in W_F$ et $t' = \underline{t}$. La première égalité implique que u'_{sc} est à valeurs dans $Z(\hat{G}_{SC})\hat{T}_{0,sc}/\hat{T}_{0,sc}^{\hat{\theta}}$ et que son image dans $H^1(W_F; Z(\hat{G})\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ}/\hat{T}_0^{\hat{\theta}, \circ})$ est non ramifiée. Autrement dit $u'_{sc} \in B$. L'image de (u'_{sc}, t') dans $H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{0,sc}/\hat{T}_{0,sc}^{\hat{\theta}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,ad})$ est donc bien dans le produit de l'image de B par $\beta \mapsto (\beta, 1)$ et de l'image naturelle de $\hat{T}_{0,ad}^{\Gamma_F, \circ}$. La réciproque est immédiate. Cela prouve (2).

Prouvons maintenant (1). Le calcul que l'on vient de faire montre que le membre de droite de l'égalité (1) ne dépend pas de β . On peut donc y remplacer $t_{0,sc}[\beta]$ par $t_{0,sc}$. Le terme $q_{ad}(g_{ad})$ étant l'image par ψ de $q(g)$, on a par compatibilité des produits l'égalité

$$\langle q_{ad}(g_{ad}), (t_{0,sc}, s_{ad}) \rangle = \langle q(g), \hat{\psi}(t_{0,sc}, s_{ad}) \rangle.$$

Le terme $\hat{\psi}(t_{0,sc}, s_{ad})$ est par construction égal au produit de $(t_{0,sc}, s_{ad})$ et du cocycle $(\zeta, 1)$, où ζ est le cocycle non ramifié de W_F tel que $\zeta(\phi) = z_h$ (on se rappelle la décomposition $h = z_h \pi(h_{sc})$). Or $(\zeta, 1)$ est l'image par $\hat{\varphi}$ de ce même couple vu comme un élément de $H^{1,0}(W_F^{nr}; \hat{T}_0 \rightarrow \hat{T}_{0,ad})$. Son produit avec $q(g)$ vaut 1 puisque l'hypothèse $g \in \mathcal{Y}_c$ entraîne que $\varphi \circ q(g)$ appartient à $H^{1,0}(\mathfrak{o}_F; T_{0,sc} \rightarrow T_0)$. Cela achève la preuve. \square

2.10. Une égalité d'intégrales. — Comme on l'a dit en 2.4, l'application $g \mapsto g^{-1}\gamma_0 g$ identifie $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}$ à la classe de conjugaison stable de γ_0 . Cette classe se décompose en un nombre fini de classes de conjugaison ordinaire (c'est-à-dire par $G(F)$) et ces dernières ont été munies de mesures qui permettent de définir les intégrales orbitales. La bijection précédente identifie la réunion de ces mesures à une mesure sur $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}$, que l'on note $d\bar{g}$. En reprenant les définitions, on obtient l'égalité

$$(1) \quad I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) = d(\theta^*)^{1/2} D^{\tilde{G}}(\gamma_0)^{1/2} \int_{T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}} \mathbf{1}_{\tilde{K}}(g^{-1}\gamma_0 g) \Delta(\delta_0, g^{-1}\gamma_0 g) d\bar{g}.$$

On a :

- (2) pour $g \in \mathcal{Y}$, la condition $g^{-1}\gamma_0 g \in \tilde{K}$ équivaut à la réunion des deux conditions $g_{ad}^{-1}\gamma_{0,ad}g_{ad} \in \tilde{K}_{ad}$ et $g \in \mathcal{Y}_c$.

Prouvons (2). Il est clair que, si $g^{-1}\gamma_0 g \in \tilde{K}$, on a aussi $g_{ad}^{-1}\gamma_{0,ad}g_{ad} \in \tilde{K}_{ad}$. Puisque $g \in \mathcal{Y}$, on a aussi $g \in \mathcal{Y}_c$ d'après le lemme de 2.4. Inversement, supposons $g_{ad}^{-1}\gamma_{0,ad}g_{ad} \in \tilde{K}_{ad}$. Alors $g^{-1}\gamma_0 g \in Z(G; F)\tilde{K}$, d'où $g^{-1}\text{Int}_{\gamma_0}(g) \in Z(G; F)K$. Supposons de plus $g \in \mathcal{Y}_c$. Comme on la vu dans la preuve du lemme de 2.4, cela entraîne $\iota(g^{-1}\gamma_0 g) \in \iota(K)$. Or la restriction de ι à $Z(G; F)$ est de noyau fini (égal à $\pi(Z(G_{SC}; F))$). Donc l'ensemble des $z \in Z(G; F)$ tels que $\iota(z) \in \iota(K)$ est un sous-groupe compact de $Z(G; F)$. Ce sous-groupe est contenu dans

le sous-groupe compact maximal $Z(G; F) \cap K$ de $Z(G; F)$ (et donc égal à $Z(G; F) \cap K$). Il en résulte que $g^{-1} \text{Int}_{\gamma_0}(g) \in K$, et donc que $g^{-1} \gamma_0 g \in \tilde{K}$.

Le sous-ensemble $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}_c \subset T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}$ est ouvert. On le munit de la restriction de la mesure $d\bar{g}$ sur $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}$. On déduit de (1) et (2) l'égalité

$$(3) \quad I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) = d(\theta^*)^{1/2} D^{\tilde{G}}(\gamma_0)^{1/2} \int_{T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}_c} \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}(g_{\text{ad}}^{-1} \gamma_{0, \text{ad}} g_{\text{ad}}) \Delta(\delta_0, g^{-1} \gamma_0 g) d\bar{g}.$$

L'application $\rho : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{ad}}$ induit par restriction et passage aux quotients une application surjective $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}_c \rightarrow T_{0, \text{ad}}^\theta \backslash \rho(\mathcal{Y}_c)$. Le sous-ensemble $T_{0, \text{ad}}^\theta \backslash \rho(\mathcal{Y}_c) \subset T_{0, \text{ad}}^\theta \backslash \mathcal{Y}_{\text{ad}}$ est ouvert. L'ensemble $T_{0, \text{ad}}^\theta \backslash \mathcal{Y}_{\text{ad}}$ est muni d'une mesure (similaire à celle sur $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}$), que l'on note $d\bar{x}$. On munit $T_{0, \text{ad}}^\theta \backslash \rho(\mathcal{Y})$ de la restriction de cette mesure $d\bar{x}$.

Notons \mathfrak{z} l'algèbre de Lie de $Z(G)^0$. On a les suites exactes

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{z}(F) \rightarrow \mathfrak{g}(F) \rightarrow \mathfrak{g}_{\text{ad}}(F) \rightarrow 0$$

et

$$(5) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{z}^\theta(F) \rightarrow \mathfrak{t}_0^\theta(F) \rightarrow \mathfrak{t}_{0, \text{ad}}^\theta(F) \rightarrow 0.$$

Les groupes $G(F)$, $G_{\text{AD}}(F)$, $T_0^{\theta, \circ}(F)$ et $T_{0, \text{ad}}^{\theta, \circ}(F)$ ont été munis de mesures de Haar dg , dx , dg_{γ_0} et $dx_{\gamma_{0, \text{ad}}}$. Via l'exponentielle, il s'en déduit des mesures sur les algèbres de Lie correspondantes. On munit $\mathfrak{z}(F)$ et $\mathfrak{z}^\theta(F)$ des mesures compatibles avec les suites ci-dessus. Le groupe $(Z(G)/Z(G)^\theta)^{\Gamma_F}$ (formé des points fixes de $Z(G; \bar{F})/Z(G; \bar{F})^\theta$ sous Γ_F) est une variété analytique et son espace tangent à l'origine est $\mathfrak{z}(F)/\mathfrak{z}^\theta(F)$. Des mesures que l'on vient de fixer se déduit une mesure sur cet espace tangent, que l'on relève en une mesure de Haar sur $(Z(G)/Z(G)^\theta)^{\Gamma_F}$. On note $d\bar{z}$ cette mesure. Pour $z \in (Z(G)/Z(G)^\theta)^{\Gamma_F}$, on a $(1-\theta)(z) \in Z(G; F)$. Notons $Z(G; F)^1$ le sous-groupe compact maximal de $Z(G; F)$ — c'est-à-dire l'intersection de $Z(G; F)$ avec K ou encore avec $T_0(\mathfrak{o})$ — et $\mathcal{Z}^1 \subset (Z(G)/Z(G)^\theta)^{\Gamma_F}$ le sous-groupe formé des z tels que $(1-\theta)(z) \in Z(G; F)^1$. Alors \mathcal{Z}^1 est un sous-groupe ouvert de $(Z(G)/Z(G)^\theta)^{\Gamma_F}$ que l'on munit de la restriction de la mesure $d\bar{z}$.

On a :

(6) les fibres de l'application $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}_c \rightarrow T_{0, \text{ad}}^\theta \backslash \rho(\mathcal{Y}_c)$ sont isomorphes à \mathcal{Z}^1 ; pour toute fonction f intégrable sur $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}_c$, on a l'égalité

$$\int_{T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}_c} f(g) d\bar{g} = \int_{T_{0, \text{ad}}^\theta \backslash \rho(\mathcal{Y}_c)} \int_{\mathcal{Z}^1} f(z\dot{x}) d\bar{z} d\dot{x}$$

où \dot{x} est un relèvement quelconque de $x \in \rho(\mathcal{Y}_c)$ dans \mathcal{Y}_c .

Prouvons (6). Soit $g \in T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}_c$. Un élément $g' \in T_0^\theta \backslash G$ qui a même projection que g dans $T_{0, \text{ad}}^\theta \backslash G_{\text{AD}}$ s'écrit de façon unique $g' = zg$ avec $z \in Z(G)/Z(G)^\theta$. Le même calcul que dans la preuve de (2) montre qu'un tel élément appartient encore à \mathcal{Y}_c si et seulement si z appartient à \mathcal{Z}^1 . Cela démontre la première assertion. Soit $g \in T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}_c$, et posons $\gamma = g^{-1} \gamma_0 g$. L'espace tangent à $T_0^\theta \backslash \mathcal{Y}_c$ en γ est $\mathfrak{g}_\gamma(F) \backslash \mathfrak{g}(F)$, où \mathfrak{g}_γ est l'algèbre de Lie de G_γ . Le résultat précédent montre qu'il est isomorphe à $(\mathfrak{z}^\theta(F) \backslash \mathfrak{z}(F)) \times (\mathfrak{g}_{\text{ad}, \gamma_{\text{ad}}}(F) \backslash \mathfrak{g}_{\text{ad}}(F))$. Cet isomorphisme préserve les mesures pourvu que la suite (4) les préserve, ainsi que la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \mathfrak{z}^\theta(F) \rightarrow \mathfrak{g}_\gamma(F) \rightarrow \mathfrak{g}_{\text{ad}, \gamma_{\text{ad}}}(F) \rightarrow 0.$$

Or la conjugaison par g identifie cette dernière suite à (5) et cette identification transporte les mesures sur les deux derniers termes de chaque suite. Par définition de nos mesures, l'isomorphisme d'espaces tangents ci-dessus préserve donc les mesures et la deuxième assertion de (6) s'ensuit.

On compare facilement les termes $D^{\tilde{G}}(\gamma_0)$ et $D^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\gamma_{0,\text{ad}})$. La seule différence dans leurs définitions est que le premier contient la valeur absolue du déterminant de $1 - \text{ad}_{\gamma_0}$ agissant sur $\mathfrak{t}_0(F)/\mathfrak{t}_0^\theta(F)$ tandis que le second contient la valeur absolue du déterminant de $1 - \text{ad}_{\gamma_{0,\text{ad}}}$ agissant sur $\mathfrak{t}_{0,\text{ad}}(F)/\mathfrak{t}_{0,\text{ad}}^\theta(F)$. Le rapport des deux est donc la valeur absolue du déterminant de $1 - \text{ad}_{\gamma_0}$ agissant sur $\mathfrak{z}(F)/\mathfrak{z}^\theta(F)$, et ceci vaut $d(\theta^*)d(\theta_{\text{ad}}^*)^{-1}$ où $d(\theta_{\text{ad}}^*) = d(\theta_{\varepsilon_{\text{ad}}})$ est le facteur de normalisation pour \tilde{G}_{AD} défini comme en 2.2. Donc

$$(7) \quad D^{\tilde{G}}(\gamma_0) = d(\theta^*)d(\theta_{\text{ad}}^*)^{-1}D^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\gamma_{0,\text{ad}}).$$

Soit $\beta \in B$. D'après le point (i) du lemme de 2.9, pour tout $g \in \mathcal{Y}_c$, on a

$$\Delta(\delta_0, g^{-1}\gamma_0g) = \Delta[\beta](\delta_{0,\text{ad}}, g_{\text{ad}}^{-1}\gamma_{0,\text{ad}}g_{\text{ad}}).$$

En utilisant (6) et (7), l'égalité (3) se réécrit

$$\begin{aligned} I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) &= d(\theta^*)d(\theta_{\text{ad}}^*)^{-1/2}\text{vol}(\mathcal{Z}^1, d\bar{z}) \cdots \\ &\cdots D^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\gamma_{0,\text{ad}})^{1/2} \int_{T_{0,\text{ad}}^\theta \setminus \rho(\mathcal{Y}_c)} \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}(x^{-1}\gamma_{0,\text{ad}}x) \Delta[\beta](\delta_0, x^{-1}\gamma_{0,\text{ad}}x) d\bar{x}. \end{aligned}$$

On peut sommer sur les $\beta \in B$ à condition de diviser par $|B|$. Mais on peut alors remplacer l'intégration sur $T_{0,\text{ad}}^\theta \setminus \rho(\mathcal{Y}_c)$ par une intégration sur $T_{0,\text{ad}}^\theta \setminus \mathcal{Y}_{\text{ad}}$ tout entier : la somme des intégrales qu'on ajoute est nulle d'après le point (ii) du lemme de 2.9. On obtient

$$\begin{aligned} I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) &= d(\theta^*)d(\theta_{\text{ad}}^*)^{-1/2}\text{vol}(\mathcal{Z}^1, d\bar{z}) \cdots \\ &\cdots |B|^{-1} \sum_{\beta \in B} D^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\gamma_{0,\text{ad}})^{1/2} \int_{T_{0,\text{ad}}^\theta \setminus \mathcal{Y}_{\text{ad}}} \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}(x^{-1}\gamma_{0,\text{ad}}x) \Delta[\beta](\delta_0, x^{-1}\gamma_{0,\text{ad}}x) dx. \end{aligned}$$

Cela se réécrit

$$(8) \quad I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) = d(\theta^*)d(\theta_{\text{ad}}^*)^{-1}\text{vol}(\mathcal{Z}^1, d\bar{z})|B|^{-1} \sum_{\beta \in B} I^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta], \delta_{0,\text{ad}}, \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}).$$

2.11. Calcul d'un volume. — Rappelons que l'on a noté \mathcal{Z}^1 le sous-groupe ouvert de $(Z(G)/Z(G)^\theta)^{\Gamma_F}$ formé des z tels que $(1 - \theta)(z) \in K$, et qu'on a muni ce sous-groupe de la restriction de la mesure $d\bar{z}$ sur $(Z(G)/Z(G)^\theta)^{\Gamma_F}$ — cf. 2.10.

LEMME. — *On a l'égalité*

$$\text{vol}(\mathcal{Z}^1, d\bar{z}) = d(\theta^*)^{-1}d(\theta_{\text{ad}}^*)|B||B^{\text{nr}}|^{-1}.$$

Démonstration. — Munissons $T_0(F)$ et $T_{0,\text{ad}}(F)$ des mesures de Haar donnant le volume 1 à $T_0(\mathfrak{o})$ et $T_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})$. Il s'en déduit des mesures sur $\mathfrak{t}_0(F)$ et $\mathfrak{t}_{0,\text{ad}}(F)$. Montrons que

- (1) la suite exacte $0 \rightarrow \mathfrak{z}(F) \rightarrow \mathfrak{t}_0(F) \rightarrow \mathfrak{t}_{0,\text{ad}}(F) \rightarrow 0$ préserve ces mesures.

Par définition, la suite exacte (4) de 2.10 préserve les mesures. Il en résulte que la suite (exacte)

$$1 \rightarrow Z(G; F) \rightarrow G(F) \xrightarrow{\rho} G_{\text{AD}}(F)$$

préserve les mesures. On en déduit l'égalité

$$\text{vol}(K, dg) = \text{vol}(Z(G; K), dz)\text{vol}(\rho(K), dx),$$

où la mesure de Haar dz sur $Z(G; F)$ est celle déduite de la mesure sur $\mathfrak{z}(F)$ via l'exponentielle. Or $\text{vol}(K, dg) = 1$ et

$$\text{vol}(\rho(K), dx) = [K_{\text{ad}} : \rho(K)]^{-1}\text{vol}(K_{\text{ad}}, dx) = [K_{\text{ad}} : \rho(K)]^{-1}.$$

Que la suite exacte $0 \rightarrow \mathfrak{z}(F) \rightarrow \mathfrak{t}_0(F) \rightarrow \mathfrak{t}_{0,\text{ad}}(F) \rightarrow 0$ préserve les mesures équivaut à ce que la suite (exacte)

$$1 \rightarrow Z(G; F) \rightarrow T_0(F) \rightarrow T_{0,\text{ad}}(F)$$

les préserve. Or $Z(G; F) \cap K = Z(G; F) \cap T_0(\mathfrak{o})$. Pour démontrer (1), il suffit donc de prouver l'égalité

$$(2) \quad [K_{\text{ad}} : \rho(K)] = [T_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o}) : \rho(T_0(\mathfrak{o}))].$$

On a une application naturelle

$$(3) \quad T_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})/\rho(T_0(\mathfrak{o})) \rightarrow K_{\text{ad}}/\rho(K).$$

Elle est clairement injective. D'après 2.4.(2), on a l'égalité

$$K_{\text{ad}}\pi_{\text{ad}}(G_{\text{SC}}(F)) = T_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})\pi_{\text{ad}}(G_{\text{SC}}(F)),$$

et a fortiori l'inclusion $K_{\text{ad}} \subset T_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})\pi_{\text{ad}}(G_{\text{SC}}(F))$. Mais si on a trois éléments $k' \in K_{\text{ad}}$, $t' \in T_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})$ et $g \in G(F)$ tels que $k' = t'g_{\text{ad}}$, on a $g_{\text{ad}} \in K_{\text{ad}}$ donc $g \in Z(G; F)K$ et l'on peut remplacer g par un élément de K . Donc $K_{\text{ad}} = T_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})\rho(K)$. La suite (3) est donc aussi surjective et l'égalité (2) s'ensuit. Cela prouve (1).

Puisque la suite exacte (5) de 2.10 préserve les mesures, on déduit de (1) que

$$(4) \quad \text{la suite exacte } 0 \rightarrow \mathfrak{z}(F)/\mathfrak{z}^\theta(F) \rightarrow \mathfrak{t}_0(F)/\mathfrak{t}_0^\theta(F) \rightarrow \mathfrak{t}_{0,\text{ad}}(F)/\mathfrak{t}_{0,\text{ad}}^\theta(F) \rightarrow 0 \text{ préserve les mesures.}$$

Posons $\bar{\mathfrak{t}}_0 = (1 - \theta)(\mathfrak{t}_0)$. On transporte la mesure sur $\mathfrak{t}_0(F)/\mathfrak{t}_0^\theta(F)$ en une mesure sur $\bar{\mathfrak{t}}_0(F)$ par l'isomorphisme $1 - \theta$ entre ces deux espaces. Notons \bar{T}_0 le F -tore $(1 - \theta)(T_0)$. On en déduit une mesure de Haar $d\bar{g}_0$ sur $\bar{T}_0(F)$ qui par restriction donne une mesure sur $\bar{T}_0(\mathfrak{o})$. De même, on note $\bar{T}_{0,\text{ad}}$ le F -tore $(1 - \theta)(T_{0,\text{ad}})$, et on construit une mesure de Haar $d\bar{x}_0$ sur $\bar{T}_{0,\text{ad}}(F)$ qui par restriction donne une mesure sur $\bar{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})$. D'après la définition de \mathcal{Z}^1 , l'application $z \mapsto (1 - \theta)(z)$ envoie \mathcal{Z}^1 dans $\bar{T}_0(\mathfrak{o})$, et cette application se complète en une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathcal{Z}^1 \xrightarrow{1-\theta} \bar{T}_0(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\rho} \bar{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o}).$$

D'après (4), les constructions entraînent que cette suite préserve les mesures. Comme dans la preuve de (1), on en déduit l'égalité

$$(5) \quad \text{vol}(\mathcal{Z}^1, d\bar{z}) = \text{vol}(\bar{T}_0(\mathfrak{o}), d\bar{g}_0) \text{vol}(\bar{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o}), d\bar{x}_0)^{-1} [\bar{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o}) : \bar{\rho}(\bar{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o}))],$$

où $\bar{\rho} : \bar{T}_0 \rightarrow \bar{T}_{0,\text{ad}}$ est l'homomorphisme naturel (déduit de ρ par restriction).

On vient de munir l'espace $\bar{\mathfrak{t}}_0(F)$ d'une mesure. Pour plus de précision, notons-la μ . On peut aussi munir l'espace $\bar{\mathfrak{t}}_0(F)$ de la mesure μ' tel que l'isomorphisme naturel

$$\bar{\mathfrak{t}}_0(F) \rightarrow \mathfrak{t}_0^\theta(F) \setminus \mathfrak{t}_0(F)$$

préserve les mesures. Il résulte de la définition de μ que l'automorphisme $1 - \theta$ de $\bar{\mathfrak{t}}_0(F)$ envoie μ' sur μ . Donc

$$\mu' = |\det(1 - \theta; \bar{\mathfrak{t}}_0(F))|_F \mu.$$

Munissons $\bar{T}_0(F)$ de la mesure de Haar $d\bar{g}'_0$ déduite de μ' . Alors, par définition, la suite (exacte)

$$1 \rightarrow \bar{T}_0(F) \rightarrow T_0(F) \xrightarrow{\xi_0} T'(F)$$

préserve les mesures. Le théorème de Lang implique que cette suite se restreint en une suite exacte

$$1 \rightarrow \bar{T}_0(\mathfrak{o}) \rightarrow T_0(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\xi_0} T'(\mathfrak{o}) \rightarrow 1.$$

Les deux derniers groupes ayant pour volume 1, on obtient $\text{vol}(\bar{T}_0(\mathfrak{o}), d\bar{g}'_0) = 1$, et donc aussi

$$\text{vol}(\bar{T}_0(\mathfrak{o}), d\bar{g}_0) = |\det(1 - \theta; \bar{\mathfrak{t}}_0(F))|_F^{-1}.$$

De la même manière, on a

$$\text{vol}(\overline{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o}), d\bar{x}_0) = |\det(1 - \theta; \bar{\mathfrak{t}}_{0,\text{ad}}(F))|_F^{-1}.$$

Comme dans la preuve de 2.10.(7), on obtient

$$\text{vol}(\overline{T}_0(\mathfrak{o}), d\bar{g}_0) \text{vol}(\overline{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o}), d\bar{x}_0)^{-1} = d(\theta^*)^{-1} d(\theta_{\text{ad}}^*).$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{H}^1(W_F^{\text{nr}}; Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}) & \longrightarrow & \text{H}^1(W_F^{\text{nr}}; \hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}) & \longrightarrow & \text{H}^1(W_F^{\text{nr}}; \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}) & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & c & & \\ \text{H}^1(W_F; Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}) & \xrightarrow{d_1} & \text{H}^1(W_F; \hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}) & \xrightarrow{d_2} & \text{H}^1(W_F; \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}) & & & & \\ & & \downarrow e_1 & & \downarrow e_2 & & \downarrow e_3 & & \\ \text{H}^1(I_F; Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}) & \xrightarrow{f_1} & \text{H}^1(I_F; \hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}) & \xrightarrow{f_2} & \text{H}^1(I_F; \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}) & & & & \end{array}$$

Les suites verticales sont exactes, les suites horizontales ne le sont pas. Les groupes centraux des deux dernières suites verticales sont respectivement les duaux de $\overline{T}_{0,\text{ad}}(F)$ et $\overline{T}_0(F)$. Les premiers groupes des deux dernières suites verticales sont respectivement les anneaux de $\overline{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})$ et $\overline{T}_0(\mathfrak{o})$. Donc les duaux de $\overline{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})$ et $\overline{T}_0(\mathfrak{o})$ sont respectivement les images $\text{Im}(e_2)$ et $\text{Im}(e_3)$. L'homomorphisme f_2 est dual de l'homomorphisme $\overline{T}_0(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\rho} \overline{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o})$. Il en résulte que

$$[\overline{T}_{0,\text{ad}}(\mathfrak{o}) : \rho(\overline{T}_0(\mathfrak{o}))] = |\ker(f_2) \cap \text{Im}(e_2)|.$$

Le groupe B est par définition un sous-groupe du groupe central de la première suite verticale. Montrons que :

$$(6) \text{ on a l'égalité } f_1 \circ e_1(B) = \ker(f_2) \cap \text{Im}(e_2).$$

On a l'inclusion $\text{Im}(f_1 \circ e_1) \subset \text{Im}(e_2)$ par commutativité du diagramme. Par définition, les éléments de B s'envoient sur des éléments non ramifiés de $\text{H}^1(W_F; Z(\hat{G})\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ})$. A fortiori, l'image de B par $d_2 \circ d_1$ est contenue dans $\text{Im}(c)$. Donc $e_3 \circ d_2 \circ d_1(B) = 0$ et, par commutativité du diagramme, $f_1 \circ e_1(B)$ est contenu dans $\ker(f_2)$. Inversement, on remarque que I_F agit trivialement sur les groupes complexes $Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$, $\hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$ et $\hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}$. En notant \hat{X} l'un de ces trois groupes, le groupe $\text{H}^1(I_F; \hat{X})$ n'est autre que le groupe des homomorphismes continus de I_F dans \hat{X} . Il en résulte que f_1 est injectif et que $\ker(f_2)$ est le groupe des homomorphismes continus de I_F dans $\ker(\hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}} \rightarrow \hat{T}_0/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ})$. Ce noyau est contenu dans $Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$. Soit u un élément de $\ker(f_2) \cap \text{Im}(e_2)$. Le groupe $u(I_F)$ est contenu dans $Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$. Choisissons un cocycle v de W_F à valeurs dans $\hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$ tel que $e_2([v]) = u$, où $[v] \in \text{H}^1(W_F; \hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}})$ désigne la classe de cohomologie de v . Introduisons le cocycle non ramifié v_ϕ^{nr} de W_F^{nr} à valeurs dans $\hat{T}_{0,\text{sc}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$ tel que $v_\phi^{\text{nr}}(\phi) = v(\phi)$. On a encore $e_2([(v_\phi^{\text{nr}})^{-1}v]) = u$. Quitte à remplacer v par $(v_\phi^{\text{nr}})^{-1}v$, on peut donc supposer $v(\phi) = 1$. Mais alors v prend ses valeurs dans $Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$ et définit un élément $\beta \in \text{H}^1(W_F; Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}/\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}})$. L'image β' de β dans $\text{H}^1(W_F; Z(\hat{G})\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ}/\hat{T}_0^{\hat{\theta},\circ})$ a pour restriction à I_F l'image de u par f_2 , c'est-à-dire 0. Donc β' est non ramifié, et β

appartient à B . On a $u = f_1 \circ e_1(\beta)$, ce qui démontre l'inclusion $\ker(f_2) \cap \text{Im}(e_2) \subset f_1 \circ e_1(B)$. Cela prouve (6).

On a déjà dit que f_1 était injectif. Puisque, par définition, B^{nr} est le noyau de e_1 restreint à B , on déduit de (6) l'égalité

$$|\ker(f_2) \cap \text{Im}(e_2)| = [B : B^{\text{nr}}].$$

En mettant ces calculs bout-à-bout, l'égalité (5) devient celle de l'énoncé. \square

2.12. Le résultat. — Revenons à l'égalité 2.10.(8). Le lemme de 2.11 remplace la constante $d(\theta^*)d(\theta_{\text{ad}}^*)^{-1}\text{vol}(\mathcal{Z}^1, d\bar{z})|B|^{-1}$ dans cette égalité par $|B^{\text{nr}}|^{-1}$. Pour $\beta \in B \setminus B^{\text{nr}}$, la donnée $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta]$ est ramifiée. D'après un argument de Kottwitz (cf. la proposition de [MW, VII, 2.1]), le transfert à cette donnée de la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}$ est nul. Donc

$$I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta], \delta_{0,\text{ad}}, \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}) = 0.$$

Pour $\beta \in B^{\text{nr}}$ (rappelons que β est un cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G}_{\text{SC}})\hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$), la donnée $\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta]$ est de la forme $\mathbf{T}'_{\text{ad},z}$ où $\beta(\phi) = zt$ avec $z \in Z(\hat{G}_{\text{SC}})$ et $t \in \hat{T}_{0,\text{sc}}^{\hat{\theta}}$ — cf. la remarque 2 de 2.8. Le lemme de 2.7 entraîne l'égalité

$$I^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta], \delta_{0,\text{ad}}, \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}) = I^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}, \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}).$$

L'égalité 2.10.(8) devient

$$(1) \quad I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta_0, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) = |B^{\text{nr}}|^{-1} \sum_{\beta \in B^{\text{nr}}} I^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}[\beta], \delta_{0,\text{ad}}, \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}) = I^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}, \delta_{0,\text{ad}}, \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}).$$

Cette égalité (1) est vraie pour tout élément $\delta_0 \in \tilde{K}'$ qui est fortement \tilde{G} -régulier.

Rappelons que l'on est parti d'une donnée $\mathbf{T}' \in \mathfrak{E}_{t-\text{nr}}(\tilde{G}, \omega)$, à laquelle on a associé en 2.8 une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée \mathbf{T}'_{ad} pour $(\tilde{G}_{\text{AD}}, \omega'_{\text{ad}})$.

PROPOSITION. — (i) *Supposons le lemme fondamental vérifiée pour la donnée \mathbf{T}'_{ad} et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}$. Alors il est vérifié pour la donnée \mathbf{T}' et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$.*

(ii) *Supposons l'homomorphisme $T'(\mathfrak{o}) \rightarrow T'_{\text{ad}}(\mathfrak{o})$ surjectif. Supposons le lemme fondamental vérifié pour la donnée \mathbf{T}' et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$. Alors il est vérifié pour la donnée \mathbf{T}'_{ad} et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}}$.*

Démonstration. — Pour (i), on doit vérifier l'égalité $\mathbf{1}_{\tilde{K}'}(\delta) = I^{\tilde{G}}(\mathbf{T}', \delta, \mathbf{1}_{\tilde{K}})$ pour tout élément $\delta \in \tilde{T}'(F)$ qui est fortement \tilde{G} -régulier. Si $\delta \notin \tilde{K}'$, c'est vrai d'après le lemme de 2.3. Si $\delta \in \tilde{K}'$, c'est vrai d'après l'égalité (1) et l'hypothèse de l'énoncé.

La preuve de (ii) est similaire. On doit vérifier l'égalité $\mathbf{1}_{\tilde{K}'_{\text{ad}}}(\underline{\delta}) = I^{\tilde{G}_{\text{AD}}}(\mathbf{T}'_{\text{ad}}, \underline{\delta}, \mathbf{1}_{\tilde{K}_{\text{ad}}})$ pour tout élément $\underline{\delta} \in \tilde{T}'_{\text{ad}}(F)$ qui est fortement \tilde{G}_{AD} -régulier. De nouveau, si $\underline{\delta} \notin \tilde{K}'_{\text{ad}}$, c'est vrai d'après le lemme de 2.3. Si $\underline{\delta} \in \tilde{K}'_{\text{ad}}$, l'hypothèse de surjectivité implique que l'application $\tilde{K}' \rightarrow \tilde{K}'_{\text{ad}}$ est surjective. On peut donc choisir un élément $\delta \in \tilde{K}'$ tel que $\delta_{\text{ad}} = \underline{\delta}$. Cet élément est fortement \tilde{G} -régulier, et on conclut en utilisant (1) comme pour (i). \square

REMARQUE 1. — Rappelons que l'on a posé $\bar{T}_0 = (1 - \theta)(T_0)$. En vertu de la suite exacte

$$1 \rightarrow Z(G)/(Z(G) \cap \bar{T}_0) \rightarrow T' \rightarrow T'_{\text{ad}} \rightarrow 1$$

et du théorème de Lang, la surjectivité de l'homomorphisme $T'(\mathfrak{o}) \rightarrow T'_{\text{ad}}(\mathfrak{o})$ est vérifiée si le groupe $Z(G)/(Z(G) \cap \bar{T}_0)$ est connexe. Il suffit pour cela que $Z(G)$ soit connexe. \blacksquare

REMARQUE 2. — Inversement, soit $\underline{T}' = (\underline{T}', \mathcal{T}', \tilde{s}_{\text{sc}})$ une donnée elliptique et non ramifiée pour $(\tilde{G}_{\text{AD}}, \underline{\omega})$ telle que le groupe sous-jacent \underline{T}' est un tore ; où $\underline{\omega}$ est un caractère non ramifiée de $G_{\text{AD}}(F)$. On suppose que $\tilde{s}_{\text{sc}} = s_{\text{sc}}\hat{\theta}$ avec $s_{\text{sc}} \in \hat{T}_{\text{sc}}$. Notons ω le caractère de $G(F)$ obtenu en composant ω avec l'homomorphisme naturel $G(F) \rightarrow G_{\text{AD}}(F)$. Il est trivial sur $Z(G; F)$ donc a fortiori sur $Z(G; F)^\theta$. Choisissons un élément $(h_{\text{sc}}, \phi) \in \underline{T}'$, et posons $\tilde{s} = \hat{\rho}(s_{\text{sc}})\hat{\theta} \in \hat{T}\hat{\theta}$ et $h = \hat{\rho}(h_{\text{sc}})$; où (rappel) $\hat{\rho} : \hat{G}_{\text{SC}} \rightarrow \hat{G}$ est l'homomorphisme naturel. Soit \mathcal{T}' le sous-groupe de ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F$ engendré par $\hat{T}^{\hat{\theta}, \circ}$, par I_F , et par (h, ϕ) . C'est une extension scindée de W_F par $\hat{T}^{\hat{\theta}, \circ}$, qui définit un cocycle de W_F à valeurs dans $W^\theta = W^{\hat{\theta}}$, où $W = W^G(T)$ est le groupe de Weyl de G . Notons T_0 le F -tore T muni de l'action galoisienne tordue par ce cocycle. Alors $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \tilde{s})$ est une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour (\tilde{G}, ω) , et \underline{T}' coïncide avec la donnée \mathbf{T}'_{ad} pour $(\tilde{G}_{\text{AD}}, \underline{\omega})$ associée à \mathbf{T}' comme en 2.8 (via les choix de $h = \hat{\rho}(h_{\text{sc}})$ et s_{sc}); en particulier on a $\underline{\omega} = \omega'_{\text{ad}}$. ■

3. Réduction au cas du changement de base pour $PGL(n)$

3.1. Les hypothèses (suite). — On continue avec les hypothèses et notations de 2.1. D'après le point (i) de la proposition de 2.12, on est ramené à prouver le théorème de 2.2 dans le cas où G est adjoint. Dans toute cette section 3, on suppose que $G = G_{\text{AD}}$.

On a fixé \mathcal{E} , $K = K_{\mathcal{E}}$ et $\tilde{K} = K\gamma = \gamma K$. Puisque G est adjoint, le groupe K est uniquement déterminé à conjugaison près par $G(F)$. Cela entraîne que l'espace tordu \tilde{K} est uniquement déterminé à conjugaison près par $G(F)$. En effet, pour toute paire de Borel épinglée \mathcal{E}' de G définie sur F , le sous-ensemble $Z(\tilde{G}, \mathcal{E}') \subset \tilde{G}$ n'est pas vide, il est défini sur F , et c'est un espace principal homogène sous $Z(G) = \{1\}$. Par conséquent $Z(\tilde{G}, \mathcal{E}') = \{\epsilon_{\mathcal{E}'}\}$ pour un élément $\epsilon_{\mathcal{E}'} \in \tilde{G}(F)$, et $K_{\mathcal{E}'}\epsilon_{\mathcal{E}'} = \epsilon_{\mathcal{E}'}K_{\mathcal{E}'}$ est l'unique sous-espace hyperspécial de $\tilde{G}(F)$ de groupe sous-jacent $K_{\mathcal{E}'}$. On pose $\epsilon = \epsilon_{\mathcal{E}}$ et $\theta = \text{Int}_{\tilde{G}}(\epsilon)$. On a les identifications

$$\tilde{G} = G\theta, \quad \tilde{K} = K\theta.$$

Puisque G est adjoint, pour $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \tilde{s}) \in \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}$, la torsion centrale définissant l'espace tordu \tilde{T}' est triviale : on a $\tilde{T}' = T' \times Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$, l'élément $\epsilon' = (1, \epsilon)$ est dans $\tilde{T}'(F)$, et $\theta' = \text{Int}_{\epsilon'}$ est l'identité de T' . L'espace \tilde{K} définit un sous-espace tordu \tilde{K}' de $\tilde{T}'(F)$ de groupe sous-jacent $K' = T(\mathfrak{o})$, qui est donné par $\tilde{K}' = K'\epsilon'$. On a les identifications

$$\tilde{T}' = T'\theta', \quad \tilde{K}' = K'\theta'.$$

Le choix d'un élément $(h, \phi) \in \mathcal{T}'$ permet comme en 2.1.(1) d'identifier \mathcal{T}' à ${}^L T'$. Puisque $\hat{G} = \hat{G}_{\text{SC}}$, on a $h = h_{\text{sc}}$ (c'est-à-dire que l'on peut prendre $z_h = 1$ dans la décomposition $h = z_h \hat{\rho}(h_{\text{sc}})$). Pour $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$, la formule de [MW, I, 6.3] — cf. 2.5.(1) — pour le facteur de transfert $\Delta(\delta, \gamma)$ se simplifie en

$$(1) \quad \Delta(\delta, \gamma) = \Delta_{\text{II}}(\delta, \gamma) \langle (V_{T_0}, \nu_{\text{ad}}), (t_{T_0, \text{sc}}, s_{\text{ad}}) \rangle^{-1}.$$

Ici T_0 est le commutant de G_γ dans G (on a $G_\gamma = T_0^{\theta\gamma, \circ}$). Les caractères affines non ramifiés $\tilde{\lambda}_\zeta : \tilde{T}'(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ et $\tilde{\lambda}_z : \tilde{G}(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ valent 1 sur \tilde{K}' et \tilde{K} , et comme par construction ils prolongent les caractères triviaux de $T'(F)$ et $G(F)$ (à cause de notre identification de ${}^L T'$ avec \mathcal{T}' , et du fait que l'on a pris $z_h = 1$), on a $\tilde{\lambda}_\zeta = 1$ et $\tilde{\lambda}_z = 1$. Bien sûr dans cette formule (1), le cocycle non ramifié $t_{T_0, \text{sc}}$ de W_F à valeurs dans $\hat{T}_{0, \text{sc}} = \hat{T}_0$ est défini à l'aide de l'élément $h_{\text{sc}} = h$.

On sait que l'existence d'une donnée $\mathbf{T}' \in \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}$ implique que le groupe \hat{G}_{AD} est d'un type bien particulier, décrit en [LMW, 5.2]. On reprend ici la construction de loc. cit., mais du

côté $G = G_{\text{AD}}$, et en procédant dans le sens inverse, c'est-à-dire en partant du cas général, et en se ramenant par étapes successives au cas du changement de base pour $PGL(n)$. Le résultat de loc. cit. ne sera utilisé que dans la dernière étape (3.6).

Notons Δ le diagramme de Dynkin de G . L'action de Γ_F sur $G(\overline{F})$ induit une action sur Δ , qui se factorise en une action de $\text{Gal}(F^{\text{nr}}/F)$ et est complètement déterminée par l'action de ϕ . De même, l'action de θ sur $G(\overline{F})$ induit une action sur Δ , qui commute à celle de ϕ . On note Ω le sous-groupe de $\text{Aut}(\Delta)$ engendré par ϕ et θ , et on s'intéresse à l'action de Ω sur l'ensemble des composantes connexes de Δ .

3.2. Première réduction. — Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_d$ les Ω -orbites dans l'ensemble des composantes connexes de Δ . À la décomposition

$$\Delta = \Delta_1 \coprod \dots \coprod \Delta_d$$

correspond une décomposition

$$G = G_1 \times \dots \times G_d,$$

qui est définie sur F et θ -stable. Pour $i = 1, \dots, d$, on note $\theta_i \in \text{Aut}_F(G_i)$ la restriction de θ à G_i . La paire de Borel épinglée \mathcal{E} de G se décompose en $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_d$, où \mathcal{E}_i est une paire de Borel épinglée de G_i définie sur F . On a

$$K = K_1 \times \dots \times K_d, \quad K_i = \mathcal{K}_i(\mathfrak{o}),$$

où \mathcal{K}_i est le σ -schéma en groupes lisse de fibre générique G_i associé à \mathcal{E}_i par la théorie de Bruhat–Tits. Pour $i = 1, \dots, d$, on pose $\tilde{G}_i = \tilde{G}/(\prod_{j \neq i} G_j)$. Alors on a la décomposition

$$\tilde{G} = \tilde{G}_1 \times \dots \times \tilde{G}_d.$$

On a donc

$$Z(\tilde{G}, \mathcal{E}) = Z(\tilde{G}_1, \mathcal{E}_1) \times \dots \times Z(\tilde{G}_d, \mathcal{E}_d).$$

Pour $i = 1, \dots, d$, on pose $\theta_i = \text{Int}_{\tilde{G}_i}(\epsilon_{\mathcal{E}_i})$. On a les identifications

$$\tilde{G}_i = G_i \theta_i, \quad \tilde{K}_i = K_i \theta_i.$$

Notons ω_i la restriction de ω au sous-groupe $G_i(F)$ de $G(F)$. Alors on a la décomposition

$$\mathfrak{E}_{\text{t-nr}}(\tilde{G}, \omega) = \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}(\tilde{G}_1, \omega_1) \times \dots \times \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}(\tilde{G}_d, \omega_d).$$

Comme les facteurs de transfert et les intégrales orbitales (ainsi que tous les autres termes) dans l'égalité (1) de 2.2 sont compatibles aux produits, on peut supposer $d = 1$.

3.3. Deuxième réduction. — On suppose dans ce numéro que le groupe Ω opère transitivement sur les composantes connexes de Δ . Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_q$ les θ -orbites dans l'ensemble de ces composantes connexes. Puisque ϕ et θ commutent, ces ensembles Δ_i sont permutés transitivement par ϕ , et on peut supposer que

$$\phi(\Delta_{i+1}) = \Delta_i, \quad i = 1, \dots, q-1.$$

On a donc $\phi(\Delta_1) = \Delta_q$, et $\phi^q(\Delta_1) = \Delta_1$. À la décomposition

$$\Delta = \Delta_1 \coprod \dots \coprod \Delta_q$$

correspond une décomposition

$$G = G_1 \times \dots \times G_q,$$

qui est définie sur le sous-corps F_1 de F^{nr} formé des éléments fixés par $\phi_1 = \phi^q$ (c'est-à-dire la sous-extension de degré q de F^{nr}/F). Pour $i = 1, \dots, q-1$, on identifie G_{i+1} à G_1 via ϕ^i . Pour $(x_1, \dots, x_q) \in G_1(\bar{F})^{\times q}$, on a

$$\sigma(x_1, \dots, x_q) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_q)), \quad \sigma \in \Gamma_{F_1} = \text{Gal}(\bar{F}/F_1),$$

et

$$\phi^j(x_1, \dots, x_q) = (x_{1+j}, \dots, x_q, \phi_1(x_1), \dots, \phi_1(x_j)), \quad j = 1, \dots, q-1.$$

Autrement dit, on a

$$G = \text{Res}_{F_1/F}(G_1),$$

où $\text{Res}_{F_1/F}$ désigne le foncteur « restriction à la Weil ». Puisque θ est défini sur F et commute à ϕ , avec l'identification $G = G_1^{\times q}$ ci-dessus, on a $\theta = \theta_1^{\otimes q}$ pour un F_1 -automorphisme θ_1 de G_1 . Posons $\tilde{G}_1 = G_1\theta_1$. C'est un G_1 -espace tordu défini sur F_1 , et on a

$$\tilde{G} = \text{Res}_{F_1/F}(\tilde{G}_1).$$

Le plongement diagonal $\iota : G_1 \rightarrow G = G_1^{\times q}$ est défini sur F_1 , et il se prolonge en un morphisme d'espaces tordus

$$\tilde{\iota} : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}, \quad g_1\theta_1 \mapsto \iota(g_1)\theta,$$

qui est lui aussi défini sur F_1 . On a

$$\iota(G_1(F_1)) = G(F), \quad \tilde{\iota}(\tilde{G}_1(F_1)) = \tilde{G}(F).$$

En d'autres termes, ι induit un isomorphisme de groupes topologiques

$$\iota_{F_1} : G_1(F_1) \xrightarrow{\cong} G(F),$$

et $\tilde{\iota}$ induit un isomorphisme d'espaces topologiques tordus

$$\tilde{\iota}_{F_1} : \tilde{G}_1(F_1) \xrightarrow{\cong} \tilde{G}(F).$$

On a donc le

LEMME 1. — *Deux éléments $\gamma_1, \bar{\gamma}_1 \in \tilde{G}_1(F_1)$ sont conjugués dans $G_1(F_1)$ si et seulement si les éléments $\tilde{\iota}(\gamma_1)$ et $\tilde{\iota}(\bar{\gamma}_1)$ de $\tilde{G}(F)$ sont conjugués dans $G(F)$.*

Écrivons

$$B = B_1 \times \dots \times B_q, \quad T = T_1 \times \dots \times T_q.$$

On a $B = \text{Res}_{F_1/F}(B_1)$ et $T = \text{Res}_{F_1/F}(T_1)$, et (B_1, T_1) est une paire de Borel de G_1 définie sur F_1 . La paire de Borel épinglée \mathcal{E} de G se décompose en $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_q$ où \mathcal{E}_i est une paire Borel épinglée de G_i de paire de Borel sous-jacente (B_i, T_i) . La paire \mathcal{E}_1 est définie sur F_1 , et avec l'identification $G = G_1^{\times q}$ ci-dessus, on a $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_{q-1} = \dots = \mathcal{E}_1$. Posons $\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{o}_{F_1}$, et soit \mathcal{K}_1 le \mathfrak{o}_1 -schéma en groupes lisse de fibre générique G_1 associé à \mathcal{E}_1 par la théorie de Bruhat–Tits. Le groupe $K_1 = \mathcal{K}_1(\mathfrak{o}_1)$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_1(F_1)$. Par construction, on a $\mathcal{K} = \text{Res}_{\mathfrak{o}_1/\mathfrak{o}}(\mathcal{K}_1)$, d'où $\iota(K_1) = K$. De plus, puisque $Z(\tilde{G}_1, \mathcal{E}_1) = \{\theta_1\}$, le groupe K_1 est θ_1 -stable, et posant $\tilde{K}_1 = K_1\theta_1$, on a $\tilde{\iota}(\tilde{K}_1) = \tilde{K}$.

Le groupe G est quasi-déployé sur F et déployé sur une extension non ramifiée de F . Le groupe G_1 est quasi-déployé sur F_1 et déployé sur une extension non ramifiée de F_1 . Le L -groupe ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F$ s'obtient à partir du L -groupe ${}^L G_1 = G_1 \rtimes W_{F_1}$ en munissant $\hat{G} = \hat{G}_1^{\times q}$ de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$ ($\sigma \in \Gamma_F$) donnée par :

- $\sigma_G = \sigma_{G_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{G_1}$ si $\sigma \in \Gamma_{F_1}$;
- $\phi_G(x_1, \dots, x_q) = (x_2, \dots, x_q, (\phi_1)_{G_1}(x_1))$.

Notons que puisque le groupe d'inertie $I_F = I_{F_1}$ opère trivialement sur \hat{G} (resp. sur \hat{G}_1), la première égalité est impliquée par la seconde.

REMARQUE. — L'action galoisienne ci-dessus s'obtient en identifiant la i -ème composante \hat{G}_1 de $\hat{G} = \hat{G}_1^{\times q}$ ($i = 1, \dots, q$) au groupe dual de la $(q - i + 1)$ -composante G_1 de $G = G_1^{\times q}$. Si on l'identifie à la i -ème composante G_1 de $G = G_1^{\times q}$, on obtient

$$\phi_G(x_1, \dots, x_q) = ((\phi_1)_{G_1}(x_q), x_2, \dots, x_{q-1}).$$

On passe d'une action galoisienne à l'autre via l'automorphisme $(x_1, \dots, x_q) \mapsto (x_q, \dots, x_1)$ de \hat{G} . ■

Notons ω_1 le caractère $\omega \circ \iota$ de $G_1(F_1)$. Soit $\mathbf{T}'_1 = (T'_1, \mathcal{T}'_1, \tilde{s}_1)$ un élément de $\mathfrak{E}_{t-\text{nr}}(\tilde{G}_1, \omega_1)$. On reprend les hypothèses habituelles (cf. [LMW, 2.6]) : l'action $(\phi_1)_{G_1}$ de $\phi_1 = \phi^q$ sur \hat{G}_1 stabilise une paire de Borel épinglée $\hat{E}_1 = (\hat{B}_1, \hat{T}_1, \{\hat{E}_\alpha\}_{\alpha \in \hat{\Delta}_1})$ de \hat{G}_1 , et on note $\hat{\theta}_1$ l'automorphisme de \hat{G}_1 qui stabilise \hat{E}_1 et commute à l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G_1}$ ($\sigma \in \Gamma_{F_1}$). L'automorphisme $\text{Int}_{\tilde{s}_1}$ de \hat{G}_1 stabilise la paire de Borel (\hat{B}_1, \hat{T}_1) . On a donc $\tilde{s}_1 = s_1 \hat{\theta}_1$ pour un élément $s_1 \in \hat{T}_1$. Choisissons un élément $(h_1, \phi_1) \in \mathcal{T}'_1$. Il définit un isomorphisme $\mathcal{T}'_1 \xrightarrow{\simeq} {}^L T'_1$. Posons $\mathbf{h}_1 = h_1 \phi_1 \in \hat{G}_1 W_{F_1}$. On a l'égalité dans $\hat{G}_1 W_{F_1} \hat{\theta}_1 = \hat{G}_1 \hat{\theta}_1 W_{F_1}$

$$\tilde{s}_1 \mathbf{h}_1 = a_1(\phi_1) \mathbf{h}_1 \tilde{s}_1,$$

où $a_1 \in Z(\hat{G}_1)$ définit la classe de cohomologie non ramifiée $\mathbf{a}_1 \in H^1(W_{F_1}, Z(\hat{G}_1))$ correspondant à ω_1 . Posons $\hat{E} = \hat{E}_1 \times \dots \times \hat{E}_1$. C'est une paire de Borel épinglée de \hat{G} , qui est stable sous l'action ϕ_G de ϕ sur \hat{G} et aussi sous l'action de l'automorphisme $\hat{\theta} = \hat{\theta}_1^{\otimes q}$. Soit

$$\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_1) \in \hat{G} \hat{\theta} = (\hat{G}_1 \hat{\theta}_1)^{\times q}.$$

L'automorphisme $\text{Int}_{\tilde{s}}$ de \hat{G} stabilise la paire de Borel (\hat{B}, \hat{T}) sous-jacente à \hat{E} , et on a $\tilde{s} = s \hat{\theta}$ avec $s = (s_1, \dots, s_1) \in \hat{T}_1^{\times q}$. Soient

$$h = (1, \dots, 1, h_1) \in \hat{G}, \quad a(\phi) = (1, \dots, 1, a_1(\phi_1)) \in Z(\hat{G}).$$

L'élément $a(\phi)$ définit la classe de cohomologie $\mathbf{a} \in H^1(W_F, Z(\hat{G}))$ correspondant à ω . Posons $\mathbf{h} = h \phi \in \hat{G} W_F$. Alors $\mathbf{h}^q = (h_1, \dots, h_1) \phi_1$, et on a l'égalité dans $\hat{G} W_F \hat{\theta} = \hat{G} \hat{\theta} W_F$

$$\tilde{s} \mathbf{h} = a(\phi) \mathbf{h} \tilde{s}.$$

Notons \mathcal{T}' le sous-groupe fermé de ${}^L G$ engendré par $\hat{G}_{\tilde{s}} = (\hat{G}_1)_{\tilde{s}_1}^{\times q}$, par I_F et par (h, ϕ) . Pour $(x_1, \dots, x_q) \in \hat{G}_{\tilde{s}}$, on a

$$(h, \phi)(x_1, \dots, x_q)(h, \phi)^{-1} = (x_2, x_3, \dots, x_q, h_1 \phi_1(x_1) h_1^{-1}).$$

Puisque \mathcal{T}'_1 est une extension scindée de W_F par $(\hat{G}_1)_{\tilde{s}_1}$, on en déduit que \mathcal{T}' est une extension scindée de W_F par $\hat{G}_{\tilde{s}}$. Notons que \mathcal{T}' ne dépend pas du choix du Frobenius ϕ , ni du choix de l'élément $(h_1, \phi^d) \in \mathcal{T}'_1$.

Posons $T' = \text{Res}_{F_1/F}(T'_1)$. C'est un tore défini sur F et déployé sur F^{nr} . Par construction, le triplet $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \tilde{s})$ est une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour (\tilde{G}, ω) . De plus, l'élément $(h, \phi) \in \mathcal{T}'$ définit un isomorphisme $\mathcal{T}' \xrightarrow{\simeq} {}^L T'$.

LEMME 2. — *La classe d'isomorphisme de la donnée \mathbf{T}' ne dépend que de celle de la donnée \mathbf{T}'_1 , et l'application*

$$\mathfrak{E}_{t-\text{nr}}(\tilde{G}_1, \omega_1) \rightarrow \mathfrak{E}_{t-\text{nr}}(\tilde{G}, \omega), \quad \mathbf{T}'_1 \mapsto \mathbf{T}'$$

ainsi définie est bijective.

Démonstration. — Soient $\mathbf{T}'_1 = (T'_1, \mathcal{J}'_1, \tilde{s}'_1)$ et $\mathbf{T}''_1 = (T''_1, \mathcal{J}''_1, \tilde{s}''_1)$ des données endoscopiques elliptiques et non ramifiées pour (\hat{G}_1, ω_1) , telles que les groupes T'_1 et T''_1 sont des tores. Soient $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s}')$ et $\mathbf{T}'' = (T'', \mathcal{J}'', \tilde{s}'')$ les données endoscopiques elliptiques et non ramifiées pour (\hat{G}, ω) associées à \mathbf{T}' et \mathbf{T}'' par la construction ci-dessus.

Supposons tout d'abord que les données \mathbf{T}'_1 et \mathbf{T}''_1 sont isomorphes : il existe des éléments $x_1 \in \hat{G}_1$ et $z_1 \in Z(\hat{G}_1)$ tels que

$$x_1 \mathcal{J}'_1 x_1^{-1} = \mathcal{J}''_1, \quad x_1 \tilde{s}'_1 x_1^{-1} = z_1 \tilde{s}''_1.$$

Soient $x = (x_1, \dots, x_1) \in \hat{G}$ et $z = (z_1, \dots, z_1) \in Z(\hat{G})$. Alors on a

$$x \mathcal{J}' x^{-1} = \mathcal{J}'', \quad x \tilde{s}' x^{-1} = z \tilde{s}'',$$

et les données \mathbf{T}' et \mathbf{T}'' sont isomorphes. D'où la première assertion du lemme.

Supposons maintenant que les données \mathbf{T}' et \mathbf{T}'' sont isomorphes : il existe des éléments $x \in \hat{G}$ et $z \in Z(\hat{G})$ tels que

$$x \mathcal{J}' x^{-1} = \mathcal{J}'', \quad x \tilde{s}' x^{-1} = z \tilde{s}''.$$

D'après la première assertion du lemme, on peut supposer que $\tilde{s}'_1 = s'_1 \hat{\theta}_1$ et $\tilde{s}''_1 = s''_1 \hat{\theta}_1$ pour des éléments $s'_1, s''_1 \in \hat{T}_1$. On a donc

$$\tilde{s}' = s' \hat{\theta}, \quad s' = (s'_1, \dots, s'_1),$$

et

$$\tilde{s}'' = s'' \hat{\theta}, \quad s'' = (s''_1, \dots, s''_1).$$

Choisissons un élément $(h'_1, \phi_1) \in \mathcal{J}'_1$, et posons

$$\mathbf{h}' = h' \phi, \quad h' = (1, \dots, 1, h'_1) \in \hat{G}.$$

De même, choisissons un élément $(h''_1, \phi_1) \in \mathcal{J}''_1$, et posons

$$\mathbf{h}'' = h'' \phi, \quad h'' = (1, \dots, 1, h''_1) \in \hat{G}.$$

Par construction, on a $(h', \phi) \in \mathcal{J}'$ et $(h'', \phi) \in \mathcal{J}''$, et

$$x(h', \phi)x^{-1} = (yh'', \phi)$$

pour un élément $y \in \hat{G}_{\tilde{s}''} = ((\hat{G}_1)_{\tilde{s}''})^{\times q}$. Écrivons

$$x = (x_1, \dots, x_q), \quad z = (z_1, \dots, z_q), \quad y = (y_1, \dots, y_q).$$

Pour $i = 1, \dots, q$, on a $x_i \in \hat{G}_1$, $z_i \in Z(\hat{G}_1)$ et $y_i \in (\hat{G}_1)_{\tilde{s}''}$. On obtient :

- $x_i x_{i+1}^{-1} = y_i$ pour $i = 1, \dots, q-1$;
- $x_q h'_1 \phi_1(x_1) = y_q h''_1$.

On en déduit que

$$x_1 h'_1 \phi_1(x_1)^{-1} = \bar{y} h''_1, \quad \bar{y} = y_1 \cdots y_q.$$

Puisque \bar{y} appartient à $(\hat{G}_1)_{\tilde{s}''}$, on obtient que $x_1 \mathcal{J}'_1 x_1^{-1} = \mathcal{J}''_1$. Comme d'autre part on a $x_1 \tilde{s}'_1 x_1^{-1} = z_1 \tilde{s}''_1$, les données \mathbf{T}'_1 et \mathbf{T}''_1 sont isomorphes. Cela prouve que l'application du lemme est injective.

Il reste à prouver qu'elle est surjective. Soit $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s}) \in \mathfrak{E}_{t-\text{nr}}$. On peut supposer que $\tilde{s} = s \hat{\theta}$ pour un élément $s \in \hat{T} = \hat{T}_1^{\times q}$. Choisissons un élément $(h, \phi) \in \mathcal{J}'$, et posons $\mathbf{h} = h \phi \in \hat{G}W_F$. On a l'égalité $\tilde{s}\mathbf{h} = a'(\phi)\mathbf{h}\tilde{s}$ dans $\hat{G}W_F\hat{\theta} = \hat{G}\hat{\theta}W_F$, où a' est un cocycle non ramifié de W_F à valeurs dans $Z(\hat{G})$ dans la classe \mathbf{a} . Puisque les cocycle a et a' sont cohomologues, il existe un élément $z \in Z(\hat{G})$ tel que $a'(\phi) = z^{-1}\phi(z)a(\phi)$. Quitte à remplacer \tilde{s} par $z\tilde{s}$, on peut supposer $a' = a$. Écrivons

$$s = (s_1, \dots, s_q), \quad h = (h_1, \dots, h_q),$$

suivant la décomposition $\hat{G} = \hat{G}_1^{\times q}$. Alors l'équation $\bar{s}\mathbf{h} = a(\phi)\mathbf{h}\bar{s}$ s'écrit :

- $s_i\hat{\theta}_1(h_i) = h_i s_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, q-1$;
- $s_q\hat{\theta}_1(h_q) = a_1(\phi_1)h_q\phi_1(s_1)$.

Soit $x = (1, h_1, h_1 h_2, \dots, h_1 \cdots h_{q-1}) \in \hat{G}$. Alors en posant $\bar{h} = h_1 \cdots h_{q-1} \in \hat{G}_1$, on a

$$x\bar{s}x^{-1} = (s_1, \dots, s_1)\hat{\theta}, \quad x(h, \phi)x^{-1} = ((1, \dots, 1, \bar{h}), \phi),$$

et en posant $\tilde{s}_1 = s_1\hat{\theta}_1$ et $\mathbf{h}_1 = \bar{h}\phi_1$, on a l'égalité dans $\hat{G}_1 W_{F_1} \hat{\theta}_1 = \hat{G}_1 \hat{\theta}_1 W_{F_1}$

$$\tilde{s}_1 \mathbf{h}_1 = a_1(\phi_1) \mathbf{h}_1 \tilde{s}_1.$$

Soit \mathcal{J}'_1 le sous-groupe fermé de ${}^L G_1$ engendré par $(G_1)_{\tilde{s}_1}$, par I_F et par (\bar{h}, ϕ_1) . C'est une extension scindée de W_{F_1} par $(G_1)_{\tilde{s}_1}$, et en notant T'_1 le tore défini sur F_1 et déployé sur F^{nr} tel que $\hat{T}'_1 = (\hat{G}_1)_{\tilde{s}}$ muni de l'action $(\phi_1)_{T'_1}$ de ϕ_1 donnée par (\bar{h}, ϕ_1) , on obtient une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée $\mathbf{T}'_1 = (T'_1, \mathcal{J}'_1, \tilde{s}_1)$ pour (\tilde{G}_1, ω_1) . Cette donnée s'envoie sur la classe d'isomorphisme de la donnée \mathbf{T}' par l'application du lemme, qui est donc surjective. \square

Revenons à la situation d'avant le lemme 2. Rappelons que $T' = \text{Res}_{F_1/F}(T'_1)$. On identifie T' à $(T'_1)^{\times q}$ comme on l'a fait pour G , et on note

$$\iota' : T'_1 \rightarrow T' = (T'_1)^{\times q}$$

le plongement diagonal. Il est défini sur F_1 (tout comme l'identification $T' = (T'_1)^{\times q}$). Du plongement $\hat{\xi}_1 : \hat{T}'_1 = (\hat{G}_1)_{\tilde{s}_1} \rightarrow \hat{T}'_1$ se déduit par dualité un morphisme

$$\xi_1 : T_1 \rightarrow T'_1 \simeq T_1/(1 - \theta_1)(T_1).$$

Ce morphisme n'est en général pas défini sur F_1 , mais il vérifie $\sigma(\xi_1) = \xi_1 \circ \text{Int}_{\alpha_{T'_1}(\sigma)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_1}$, où $\sigma \mapsto \alpha_{T'_1}(\sigma)$ est le cocycle de Γ_{F_1} à valeurs dans $W_1^{\hat{\theta}_1} = W_1^{\theta_1}$ défini par $\text{Int}_{\alpha_{T'_1}(\sigma)} \circ \sigma(\hat{\xi}_1) = \hat{\xi}_1$. Ici W_1 est le groupe de Weyl $W^{G_1}(T_1)$ de G_1 , que l'on identifie à $W^{\hat{G}_1}(\hat{T}'_1)$. On pose

$$\tilde{T}'_1 = T'_1 \times Z(\tilde{G}_1, \varepsilon_1) = T'_1 \theta'_1, \quad \theta'_1 = \text{id}_{T'_1}.$$

De la même manière, du plongement $\hat{\xi} = \hat{\xi}_1^{\otimes q} : \hat{T}' = \hat{G}_{\tilde{s}} \rightarrow \hat{T}$ se déduit par dualité un morphisme

$$\xi : T \rightarrow T' \simeq T/(1 - \theta)(T)$$

qui vérifie $\sigma(\xi) = \xi \circ \text{Int}_{\alpha_{T'}(\sigma)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, où $\sigma \mapsto \alpha_{T'}(\sigma)$ est le cocycle de Γ_F à valeurs dans $W^{\hat{\theta}} = W^{\theta}$ donné par

- $\alpha_{T'}(\sigma) = (\alpha_{T'_1}(\sigma), \dots, \alpha_{T'_1}(\sigma))$ si $\sigma \in \Gamma_{F_1}$,
- $\alpha_{T'}(\phi) = (1, \dots, 1, \alpha_{T'_1}(\phi_1))$.

Ici W est le groupe de Weyl $W^G(T)$ de G , que l'on identifie à $W^{\hat{G}}(\hat{T})$. On pose

$$\tilde{T}' = T' \times Z(\tilde{G}, \varepsilon) = T' \theta', \quad \theta' = \text{id}_{T'}.$$

Le morphisme $\iota' : T'_1 \rightarrow T'$ se prolonge trivialement en un morphisme d'espaces tordus

$$\tilde{\iota}' : \tilde{T}'_1 \rightarrow \tilde{T}', \quad t'_1 \theta'_1 \mapsto \iota'(t'_1) \theta',$$

qui est lui aussi défini sur F_1 . On a

$$\iota'(T'_1(F_1)) = T'(F), \quad \tilde{\iota}'(\tilde{T}'_1(F_1)) = \tilde{T}'(F).$$

Le diagramme suivant

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{\xi_1} & T'_1 \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota' \\ T & \xrightarrow{\xi} & T' \end{array}$$

est commutatif. Le morphisme $\tilde{\mu} = \tilde{\iota}' \times \tilde{\iota} : \tilde{T}'_1 \times \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{T}' \times \tilde{G}$ est défini sur F_1 , et il induit un isomorphisme d'espaces topologiques tordus

$$\tilde{\mu}_{F_1} : \tilde{T}'_1(F_1) \times \tilde{G}_1(F_1) \rightarrow \tilde{T}'(F) \times \tilde{G}(F).$$

On sait que les données \mathbf{T}'_1 et \mathbf{T}' sont pertinentes. Les choix effectués plus haut permettent de définir des facteurs de transfert normalisés

$$\Delta_1 : \mathcal{D}(\mathbf{T}'_1) \rightarrow \mathbb{C}^\times \quad \Delta : \mathcal{D}(\mathbf{T}') \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

LEMME 3. — *Le morphisme $\tilde{\mu}_{F_1}$ induit par restriction une application bijective*

$$\mathcal{D}(\mathbf{T}'_1) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{T}').$$

De plus, pour $(\delta_1, \gamma_1) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)$ et $(\delta, \gamma) = \tilde{\mu}_{F_1}(\delta_1, \gamma_1) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$, on a

$$\Delta_1(\delta_1, \gamma_1) = \Delta(\delta, \gamma).$$

Démonstration. — La commutativité du diagramme (1) assure que $\tilde{\mu}_{F_1}$ envoie $\mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{T}')$, et il s'agit de vérifier que l'application obtenue $\mathcal{D}(\mathbf{T}'_1) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{T}')$ est surjective. Un élément $(\delta, \gamma) = (g'\theta', g\theta)$ de $\tilde{T}'(F) \times \tilde{G}(F)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbf{T}')$ si et seulement s'il existe un $x \in G$ tel que $x^{-1}g\theta(x) \in T$ et $\xi(x^{-1}g\theta(x)) = g'$. Écrivons $x = (x_1, \dots, x_q)$. Comme $g' = \iota'(g'_1)$ et $g = \iota(g_1)$ avec $g'_1 \in T'_1(F_1)$ et $g_1 \in G_1(F_1)$, pour $i = 1, \dots, q$, on a

$$x_i^{-1}g_1\theta_1(x_i) \in T_1, \quad \xi_1(x_i^{-1}g_1\theta_1(x_i)) = g'_1.$$

Donc $(g'_1\theta'_1, g_1\theta_1) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)$, et $\tilde{\mu}_{F_1}(g'_1\theta'_1, g_1\theta_1) = (\delta, \gamma)$.

Quant à l'égalité des facteurs de transfert, il s'agit de vérifier que chacun des deux termes à droite de l'égalité (1) de 3.1 pour (δ_1, γ_1) coïncide avec le même terme pour (δ, γ) . Commençons par le terme Δ_{II} . On note $T_{1,0}$ le tore maximal T_1 de G_1 muni de l'action galoisienne tordue par le cocycle $\sigma \mapsto \alpha_{T'_1}(\sigma)$ de Γ_{F_1} à valeurs dans $W_1^{\theta_1}$, et T_0 le tore maximal T de G muni de l'action galoisienne tordue par le cocycle $\sigma \mapsto \alpha_{T'}(\sigma)$ de Γ_F à valeurs dans W^θ . Soit $\Sigma(T_{0,1})$ l'ensemble des racines de $T_{0,1}$ dans l'algèbre de Lie de G . On définit de la même manière l'ensemble $\Sigma(T_0)$, et on identifie $\Sigma(T_{0,1})$ à un sous-ensemble de $\Sigma(T_0)$ via le F_1 -plongement $x \mapsto (1, \dots, 1, x)$ de T_1 dans T . Alors on a

$$\Sigma(T_0) = \prod_{i=0}^{q-1} \phi^i(\Sigma(T_{1,0})).$$

On fixe des a -data et des χ -data non ramifiées pour l'action de Γ_{F_1} sur $T_{1,0}$. Elles définissent des a -data et des χ -data non ramifiées pour l'action de Γ_F sur T_0 , et par définition du facteur Δ_{II} , on a l'égalité

$$\Delta_{1,\text{II}}(\delta_1, \gamma_1) = \Delta_{\text{II}}(\delta, \gamma).$$

Reste à traiter le second terme à droite de l'égalité (1) de 3.1. Soit un couple (α_1, t_1) formé d'un cocycle $\sigma \mapsto \alpha_1(\sigma)$ de Γ_{F_1} à valeurs dans $\hat{T}_{1,0,\text{sc}} = \hat{T}_{1,0}$ et d'un élément $t_1 \in \hat{T}_{1,0,\text{ad}}$, définissant une classe de cohomologie dans $H^{1,0}(W_{F_1}; \hat{T}_{1,0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}_{\gamma_1}} \hat{T}_{1,0,\text{ad}})$. À ce couple on

associe comme suit un couple (α, t) formé d'un cocycle de W_F à valeurs dans $\hat{T}_{0,sc} = \hat{T}_0$ et d'un élément $t \in \hat{T}_{0,ad}$:

- $\alpha(\sigma) = (\alpha_1(\sigma), \dots, \alpha_1(\sigma))$ pour $\sigma \in W_{F_1}$;
- $\alpha(\phi) = (1, \dots, 1, \alpha_1(\phi_1))$;
- $t = (t_1, \dots, t_1)$.

Ce couple définit une classe de cohomologie $H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{0,sc} \xrightarrow{1-\hat{\theta}_\gamma} \hat{T}_{0,ad})$, et l'application $(\alpha_1, t_1) \mapsto (\alpha, t)$ induit un isomorphisme

$$H^{1,0}(W_{F_1}; \hat{T}_{1,0,sc} \xrightarrow{1-\hat{\theta}_{\gamma_1}} \hat{T}_{1,0,ad}) \xrightarrow{\simeq} H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{0,sc} \xrightarrow{1-\hat{\theta}_\gamma} \hat{T}_{0,ad}).$$

On a aussi un isomorphisme

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_1}; T_{1,0,sc} \xrightarrow{1-\theta_{\gamma_1}} T_{1,0,ad}) \xrightarrow{\simeq} H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,sc} \xrightarrow{1-\theta_\gamma} T_{0,ad}),$$

en dualité avec le précédent. À $h_1 = h_{1,sc} \in \hat{G}_{1,sc} = \hat{G}_1$ est associé un cocycle non ramifié $t_{T_{1,0,sc}}$ de W_F à valeurs dans $\hat{T}_{1,0,sc} = \hat{T}_{1,0}$, et à $h = h_{sc} \in \hat{G}_{sc} = \hat{G}$ est associé un cocycle non ramifié $t_{T_{0,sc}}$ de W_F à valeurs dans $\hat{T}_{0,sc} = \hat{T}_0$ (cf. [MW, I, 6.3]). On vérifie que les éléments $(t_{T_{1,0,sc}}, s_{1,ad})$ et $(t_{T_{0,sc}}, s_{ad})$ se correspondent par le premier isomorphisme, et que les éléments $(V_{T_{1,0}}, \nu_{1,0,ad})$ et (V_{T_0}, ν_{ad}) se correspondent par le second. \square

Soit $(\delta_1, \gamma_1) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)$, et soit $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$ l'élément $\tilde{\mu}_{F_1}(\delta_1, \gamma_1)$. On a

$$G_\gamma = \text{Res}_{F_1/F}((G_1)_{\gamma_1}).$$

On identifie G_γ à $(G_{\gamma_1})^{\times q}$ comme on l'a fait pour G . Cette identification est définie sur F_1 , et le plongement diagonal $\iota : G_1 \rightarrow G$ induit par restriction un morphisme $\iota_\gamma : (G_1)_{\gamma_1} \rightarrow G_\gamma$ qui n'est autre que le plongement diagonal. Il est défini sur F_1 , et on a

$$\iota_\gamma((G_1)_{\gamma_1}(F_1)) = G_\gamma(F).$$

Via $\iota_{F_1} : G_1(F_1) \xrightarrow{\simeq} G(F)$ et $\iota_{\gamma, F_1} : (G_1)_{\gamma_1}(F_1) \xrightarrow{\simeq} G_\gamma(F)$, les mesures normalisées définissant les intégrales orbitales ordinaires sur $\tilde{G}_1(F_1)$ et sur $\tilde{G}(F)$ se correspondent, et comme

$$D^{\tilde{G}_1}(\gamma_1) = D^{\tilde{G}}(\gamma),$$

on a

$$I^{\tilde{G}_1}(\gamma_1, \omega_1, f \circ \tilde{\iota}_{F_1}) = I^{\tilde{G}}(f, \omega, \gamma), \quad f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)).$$

On a aussi

$$d(\theta_1^*) = d(\theta^*)$$

et

$$\tilde{\iota}_{F_1}(\tilde{K}_1) = \tilde{K}, \quad \tilde{\iota}'_{F_1}(\tilde{K}'_1) = \tilde{K}'.$$

Grâce aux lemmes 1, 2 et 3, on en déduit que pour prouver le lemme fondamental pour les données $\mathbf{T}' \in \mathfrak{E}_{t\text{-nr}}(\tilde{G}, \omega)$ et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$ (théorème de 2.2), il suffit de le faire pour les données $\mathbf{T}'_1 \in \mathfrak{E}_{t\text{-nr}}(G_1, \omega_1)$ et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}'_1}$.

On peut donc supposer $q = 1$.

3.4. Troisième réduction. — On suppose dans ce numéro que l'automorphisme θ opère transitivement sur les composantes connexes de Δ . Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ les ϕ -orbites dans l'ensemble de ces composantes connexes. Puisque ϕ et θ commutent, ces ensembles Δ_i sont permutés transitivement par θ , et on peut supposer que $\theta(\Delta_{i+1}) = \Delta_i$ pour $i = 1, \dots, r-1$. À la décomposition

$$\Delta = \Delta_1 \coprod \dots \coprod \Delta_r$$

correspond une décomposition

$$G = G_1 \times \dots \times G_r,$$

qui est définie sur F et θ -stable. Pour $i = 1, \dots, r-1$, on identifie G_{i+1} à G_1 via θ^i . Avec ces identifications, le F -automorphisme θ de $G = G_1^{\times r}$ est donné par

$$\theta(x_1, \dots, x_r) = (x_2, \dots, x_r, \theta_1(x_1)), \quad x_i \in G_1,$$

où θ_1 est le F -automorphisme de G_1 donné par $\theta^r|_{G_1}$. Quant à l'automorphisme ϕ de $G(\overline{F})$, puisqu'il commute à θ , il est donné par $\phi = \phi_1^{\otimes r}$ pour un automorphisme ϕ_1 de $G_1(\overline{F})$ qui commute à θ_1 . En d'autres termes, pour $(x_1, \dots, x_r) \in G(\overline{F}) = G_1(\overline{F})^{\times r}$, on a

$$\sigma(x_1, \dots, x_r) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_r)), \quad \sigma \in \Gamma_F.$$

On pose $\tilde{G}_1 = G_1\theta_1$. Le groupe G_1 est quasi-déployé sur F et déployé sur une extension non ramifiée de F , et \tilde{G}_1 est un G_1 -espace tordu défini sur F .

On procède comme dans [AC, chap. 1, 5]. Pour une fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on note $f_\theta \in C_c^\infty(G(F))$ la fonction définie par $f_\theta(g) = f(g\theta)$, $g \in G(F)$. Soit une fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ telle que f_θ est de la forme $f_\theta = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_r$ pour des fonctions $\varphi_i \in C_c^\infty(G_1(F))$. Pour $\gamma = g\theta \in \tilde{G}(F)$ et $x \in G(F)$, on a

$$f(x^{-1}\gamma x) = \varphi_1(x_1^{-1}g_1x_2) \cdots \varphi_{r-1}(x_{r-1}^{-1}g_{r-1}x_r) \varphi_r(x_r^{-1}g_r\theta_1(x_1)),$$

où l'on a posé $g = (g_1, \dots, g_r)$ et $x = (x_1, \dots, x_r)$. Posons

$$\bar{\gamma} = \bar{g}\theta_1 \in \tilde{G}_1(F), \quad \bar{g} = g_1 \cdots g_r.$$

Posons aussi

$$\bar{g}_i = g_1 \cdots g_i, \quad i = 1, \dots, r-1.$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_r) \in G(\overline{F})$, on $x^{-1}\gamma x = \gamma$ si et seulement si

- $x_i^{-1}g_ix_{i+1} = g_i$ pour $i = 1, \dots, r-1$,
- $x_r^{-1}g_r\theta_1(x_1) = g_r$;

c'est-à-dire si et seulement si

- $x_{i+1} = \bar{g}_i^{-1}x_1\bar{g}_i$ pour $i = 1, \dots, r-1$,
- $x_1\bar{g}\theta_1(x_1) = \bar{g}$.

Posons

$$x_\gamma = (1, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{r-1}) \in G(F).$$

Le plongement diagonal $\iota : G_1 \rightarrow G_1^{\times r} = G$ est défini sur F , et le morphisme $\text{Int}_{x_\gamma} \circ \iota$ induit un F -isomorphisme de $(G_1)^{\bar{\gamma}}$ sur G^γ . On en déduit en particulier que γ est fortement régulier (dans \tilde{G}) si et seulement si $\bar{\gamma}$ fortement régulier (dans \tilde{G}_1). Dans ce cas, le morphisme $\text{Int}_{x_\gamma} \circ \iota$ induit un F -isomorphisme de $(G_1)^{\bar{\gamma}}$ sur G_γ , que l'on note ι_γ .

REMARQUE 1. — On a

$$\text{Int}_{x_\gamma}(\gamma) = (1, \dots, 1, \bar{g})\theta,$$

et l'isomorphisme

$$\iota_{(1, \dots, 1, \bar{g})\theta} : G_{1, \bar{\gamma}} \xrightarrow{\simeq} G_{(1, \dots, 1, \bar{g})\theta} \subset (G_{1, \bar{\gamma}})^{\times r}$$

n'est autre que celui donné par le plongement diagonal. ■

LEMME 1. — Deux éléments $\gamma = g\theta$ et $\gamma' = g'\theta$ de $\tilde{G}(F)$ sont conjugués dans $G(F)$ si et seulement si les éléments $\bar{\gamma} = \bar{g}\theta_1$ et $\bar{\gamma}' = \bar{g}'\theta_1$ de $\tilde{G}_1(F)$ sont conjugués dans $G_1(F)$.

Démonstration. — D'après la remarque 1, γ et γ' sont conjugués dans $G(F)$ si et seulement s'il existe un $x = (x_1, \dots, x_r) \in G(F)$ tel que

$$x(1, \dots, 1, \bar{g})\theta(x^{-1}) = (1, \dots, 1, \bar{g}').$$

Puisque $\theta(x^{-1}) = (x_2^{-1}, \dots, x_r^{-1}, \theta_1(x_1)^{-1})$, on a $x_r = \dots = x_1$, c'est-à-dire $x = \iota(x_1)$, et $x_1 \bar{g}\theta_1(x_1)^{-1} = \bar{g}'$, c'est-à-dire $x_1 \bar{\gamma} x_1^{-1} = \bar{\gamma}'$. D'où le lemme. \square

Le caractère ω de $G(F)$ se décompose en

$$\omega = \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_r$$

pour des caractères ω_i de $G_1(F)$. Soit $\bar{\omega}$ le caractère produit $\omega_1 \dots \omega_r$ de $G_1(F)$. Pour $\gamma = g\theta \in \tilde{G}(F)$ fortement régulier, puisque $\text{Int}_{\bar{g}_i^{-1}}$ conserve évidemment le caractère ω_i pour $i = 2, \dots, r$, on voit que le caractère ω est trivial sur $G_\gamma(F)$ si et seulement si le caractère $\bar{\omega}$ est trivial sur $(G_1)_{\bar{\gamma}}(F)$.

Soit dg_1 la mesure de Haar sur $G_1(F)$ telle que $dg = (dg_1)^{\otimes r}$ (mesure produit). On munit l'espace $C_c^\infty(G_1(F))$ du produit de convolution donné par

$$\varphi * \varphi'(x) = \int_{G_1(F)} \varphi(g_1) \varphi'(g_1^{-1}x) dg_1, \quad \varphi, \varphi' \in C_c^\infty(G_1(F)).$$

Soit $\gamma = g\theta \in \tilde{G}(F)$ fortement régulier (dans \tilde{G}). Soit $dg_{1,\bar{\gamma}}$ une mesure de Haar sur le centralisateur connexe $(G_1)_{\bar{\gamma}}(F)$, et soit dg_γ la mesure de Haar sur $G_\gamma(F)$ déduite de $dg_{1,\bar{\gamma}}$ par l'isomorphisme ci-dessus. On suppose que le caractère ω est trivial sur $G_\gamma(F)$. Alors l'intégrale $\int_{G_\gamma(F) \backslash G(F)} \omega(x) f(x^{-1}\gamma x) \frac{dx}{dx_\gamma}$ est égale à

$$\int_{G_\gamma(F) \backslash G_1(F)^{\times r}} \omega_1(x_1) \dots \omega_r(x_r) \varphi_1(x_1^{-1} g_1 x_2) \dots \varphi_r(x_r^{-1} g_r \theta_1(x_1)) \frac{dx}{dx_\gamma}.$$

En posant (changement de variables)

- $y_1 = x_1$,
- $y_i = x_{i-1}^{-1} g_{i-1} x_i$ pour $i = 2, \dots, r$,

on obtient

$$x_i = \bar{g}_{i-1}^{-1} y_1 \dots y_i \quad (i = 2, \dots, r),$$

et l'intégrale ci-dessus devient

$$\int_{(G_1)_{\bar{\gamma}}(F) \times G_1(F)^{r-1}} \omega_1(y_1) \omega_2(\bar{g}_1^{-1} y_1 y_2) \dots \omega_r(\bar{g}_{r-1}^{-1} y_1 \dots y_r) \varphi_1(y_2) \dots \varphi_{r-1}(y_r) \varphi_r(y_r^{-1} y_{r-1}^{-1} \dots y_1^{-1} \bar{g}\theta_1(y_1)) \frac{dy_1}{dy_{1,\bar{\gamma}}} dy_2 \dots dy_r.$$

Pour $i = 1, \dots, r-1$, soit $\varphi'_i \in C_c^\infty(G_1(F))$ la fonction définie par

$$\varphi'_i = (\omega_{i+1} \dots \omega_r) \varphi_i.$$

Soit $\bar{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}_1(F))$ la fonction définie par

$$\bar{f}(y_1 \theta_1) = \bar{\varphi}(y_1), \quad \bar{\varphi} = \varphi'_1 * \dots * \varphi'_{r-1} * \varphi_r.$$

Alors on a

$$\int_{G_\gamma(F) \backslash G(F)} \omega(x) f(x^{-1}\gamma x) \frac{dx}{dx_\gamma} = c(\gamma, \omega)^{-1} \int_{(G_1)_{\bar{\gamma}}(F) \backslash G_1(F)} \bar{\omega}(y_1) \bar{f}(y_1^{-1} \bar{\gamma} y_1) \frac{dy_1}{dy_{1,\bar{\gamma}}},$$

où la constante $c(\gamma, \omega) \in \mathbb{C}^\times$ est donnée par

$$c(\gamma, \omega) = \omega_2(\bar{g}_1)\omega_3(\bar{g}_2) \cdots \omega_r(\bar{g}_{r-1}),$$

c'est-à-dire par

$$c(\gamma, \omega) = \omega(x_\gamma).$$

On a noté \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , et soit \mathfrak{g}_γ celle de G_γ (on suppose toujours que γ est fortement régulier dans \tilde{G}). De même, on note \mathfrak{g}_1 et $\mathfrak{g}_{1, \bar{\gamma}}$ les algèbres de Lie de G_1 et $G_{1, \bar{\gamma}}$. Rappelons que l'on a posé

$$D^{\tilde{G}}(\gamma) = |\det(1 - \text{ad}_\gamma; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_\gamma(F))|_F.$$

On pose aussi

$$D^{\tilde{G}_1}(\bar{\gamma}) = |\det(1 - \text{ad}_{\bar{\gamma}}; \mathfrak{g}_1(F)/\mathfrak{g}_{1, \bar{\gamma}}(F))|_F.$$

LEMME 2. — *On a l'égalité*

$$D^{\tilde{G}}(\gamma) = D^{\tilde{G}_1}(\bar{\gamma}).$$

Démonstration. — Quitte à conjuguer $\gamma = g\theta$ par $x_\gamma \in G(F)$, on peut supposer que $g = (1, \dots, 1, \bar{g})$, où (rappel) on a posé $\bar{g} = g_1 \cdots g_r$. Le F -endomorphisme ad_γ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1^{\times r}$ est alors donné par la matrice $r \times r$ par blocs (où chaque bloc est un F -endomorphisme de \mathfrak{g}_1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ -\text{ad}_{\bar{\gamma}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En multipliant A à droite par la matrice $r \times r$ par blocs

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \text{ad}_{\bar{\gamma}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \text{ad}_{\bar{\gamma}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient la matrice triangulaire supérieure $r \times r$ par blocs

$$AB = \begin{pmatrix} 1 - \text{ad}_{\bar{\gamma}} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque γ est semisimple, l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_γ coïncide avec le centralisateur

$$\{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}_\gamma(X) = X\}.$$

De même $\mathfrak{g}_{1, \bar{\gamma}}$ coïncide avec $\{X_1 \in \mathfrak{g}_1 : \text{ad}_{\bar{\gamma}}(X_1) = X_1\}$, et on a

$$\mathfrak{g}_\gamma = \{(X_1, \dots, X_1) : X_1 \in \mathfrak{g}_{1, \bar{\gamma}}\}.$$

La matrice B est inversible, et elle induit un F -isomorphisme de $\mathfrak{g}_{1,\bar{\gamma}} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ sur $\mathfrak{g}_{\bar{\gamma}}$. D'où le résultat (par passage aux points F -rationnels), puisque le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux. \square

Posons

$$I^{\tilde{G}_1}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}, \bar{f}) = D^{\tilde{G}_1}(\bar{\gamma}) \int_{G_{1,\bar{\gamma}}(F) \backslash G_1(F)} \bar{\omega}(x_1) \bar{f}(x_1^{-1} \bar{\gamma} x_1) \frac{dx_1}{dx_{1,\bar{\gamma}}}.$$

On a donc l'égalité

$$(1) \quad c(\gamma, \omega) I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = I^{\tilde{G}_1}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}, \bar{f}).$$

REMARQUE 2. — D'après la remarque 1, on a

$$c(\gamma, \omega) I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = I^{\tilde{G}}((1, \dots, 1, \bar{g})\theta, \omega, f),$$

où, pour définir l'intégrale orbitale de droite, on a pris comme mesure de Haar sur $G_{(1, \dots, 1, \bar{g})\theta}(F)$ l'image de dg_1 par l'isomorphisme

$$\iota_{(1, \dots, 1, \bar{g})\theta} : G_{1,\bar{\gamma}}(F) \rightarrow G_{(1, \dots, 1, \bar{g})\theta}(F), x_1 \mapsto (x_1, \dots, x_1). \quad \blacksquare$$

La paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, \{E_\alpha\}_{\alpha \in \Delta})$ de $G = G_1^{\times r}$ est définie sur F et θ -stable. Elle se décompose en $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_1$ pour une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_1 = (B_1, T_1, \{E_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_1})$ de G_1 , définie sur F et θ_1 -stable (i.e. on a $Z(\tilde{G}_1, \mathcal{E}_1) = \{\theta_1\}$). Le sous-groupe hyperspécial K de $G(F)$ associé à \mathcal{E} se décompose en $K = K_1^{\times r}$, où K_1 est le sous-groupe hyperspécial de $G_1(F)$ associé à \mathcal{E}_1 . Ce dernier est θ_1 -stable, et l'on pose $\tilde{K}_1 = K_1 \theta_1$. Soit $f = \mathbf{1}_{\tilde{K}}$. Alors $\varphi = f_\theta$ est la fonction caractéristique de K , et elle se décompose en $\varphi = \mathbf{1}_{K_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{K_1}$. Puisque le caractère ω de $G(F)$ est non ramifié, pour $i = 1, \dots, r$, le caractère ω_i de $G_1(F)$ est non ramifié, donc trivial sur K_1 . La fonction $\bar{\varphi}$ est donc égale à

$$\mathbf{1}_{K_1} * \cdots * \mathbf{1}_{K_1} = \mathbf{1}_{K_1},$$

et on a $\bar{f} = \mathbf{1}_{\tilde{K}_1}$. Pour $\gamma = g\theta \in \tilde{G}(F)$ fortement régulier, on a donc

$$(2) \quad c(\gamma, \omega) I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, \mathbf{1}_{\tilde{K}}) = I^{\tilde{G}_1}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}, \mathbf{1}_{\tilde{K}_1}).$$

3.5. Troisième réduction (suite). — Continuons avec les notations de 3.4, et passons du côté dual. Le groupe G est quasi-déployé sur F et déployé sur une extension non ramifiée de F . Le groupe G_1 est lui aussi quasi-déployé sur F et déployé sur une extension non ramifiée de F (la même que pour G). Le L -groupe ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F$ s'obtient à partir du L -groupe ${}^L G_1 = \hat{G}_1 \rtimes W_F$ en munissant le groupe dual $\hat{G} = \hat{G}_1^{\times r}$ de l'action galoisienne produit $\sigma \mapsto \sigma_G = \sigma_{G_1} \otimes \cdots \otimes \sigma_{G_1}$ ($\sigma \in \Gamma_F$).

Soit $\mathbf{T}'_1 = (T'_1, \mathcal{T}'_1, \tilde{s}_1) \in \mathfrak{E}_{t\text{-nr}}(G_1, \bar{\omega})$. Comme en 3.3, on reprend les hypothèses habituelles (cf. [LMW, 2.6]) : l'action ϕ_{G_1} de ϕ sur \hat{G}_1 stabilise une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}_1$ de \hat{G}_1 . La paire de Borel (\hat{B}_1, \hat{T}_1) sous-jacente à $\hat{\mathcal{E}}_1$ est stabilisée par $\text{Int}_{\tilde{s}_1}$, et on note $\hat{\theta}_1$ l'automorphisme de \hat{G}_1 qui stabilise $\hat{\mathcal{E}}_1$ et commute à l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G_1}$ ($\sigma \in \Gamma_F$), c'est-à-dire à ϕ_{G_1} . On a donc $\tilde{s}_1 = s_1 \hat{\theta}_1$ pour un élément $s_1 \in \hat{T}_1$. Choisissons un élément $(h_1, \phi) \in \mathcal{T}'_1$. Il définit un isomorphisme $\mathcal{T}'_1 \xrightarrow{\simeq} {}^L T'_1$. Posons $\mathbf{h}_1 = h_1 \phi \in \hat{G}_1 W_F$. On a l'égalité dans $\hat{G}_1 W_F \hat{\theta}_1 = \hat{G}_1 \hat{\theta}_1 W_F$

$$\tilde{s}_1 \mathbf{h}_1 = \bar{a}(\phi) \mathbf{h}_1 \tilde{s}_1,$$

où $\bar{a}(\phi)$ est un élément de $Z(\hat{G}_1)$ définissant la classe de cohomologie non ramifiée $\bar{a} \in H^1(W_F, Z(\hat{G}_1))$ correspondant à $\bar{\omega}$. Puisque $\bar{\omega} = \omega_1 \cdots \omega_r$, on peut écrire

$$\bar{a}(\phi) = a_1(\phi) \cdots a_r(\phi),$$

où $a_i(\phi)$ est un élément de $Z(\hat{G}_1)$ définissant la classe de cohomologie non ramifiée $\bar{a}_i \in H^1(W_F, Z(\hat{G}_1))$ correspondant à ω_i . Posons $\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}_1 \times \cdots \times \hat{\mathcal{E}}_1$. C'est une paire de Borel épinglée de \hat{G} , qui est stable sous l'action ϕ_G de ϕ sur \hat{G} et aussi sous l'action de l'automorphisme $\hat{\theta}$ de \hat{G} donné par

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_r) = (x_2, \dots, x_r, \hat{\theta}_1(x_1)), \quad (x_1, \dots, x_r) \in \hat{G} = \hat{G}_1^{\times r}.$$

Notons que $\hat{\theta}$ s'obtient en identifiant la i -ième composante \hat{G}_1 de $\hat{G} = \hat{G}_1^{\times r}$ au groupe dual de la $(r - i + 1)$ -ième composante G_1 de $G = G_1^{\times r}$ (cf. la remarque de 3.3). Posons

$$\tilde{s} = s\hat{\theta}, \quad s = (1, \dots, 1, s_1) \in \hat{G}.$$

L'automorphisme $\text{Int}_{\tilde{s}}$ de \hat{G} stabilise la paire de Borel (\hat{B}, \hat{T}) sous-jacente à $\hat{\mathcal{E}}$, et s appartient à \hat{T} . Posons

$$\begin{aligned} \bar{a}_i(\phi) &= a_1(\phi) \cdots a_i(\phi) \in Z(\hat{G}_1), \quad i = 1, \dots, r-1, \\ \zeta &= (1, \bar{a}_1(\phi), \dots, \bar{a}_{r-1}(\phi)) \in Z(\hat{G}), \end{aligned}$$

et

$$h = \zeta(h_1, \dots, h_1) \in \hat{G}.$$

Par définition, l'élément $a(\phi) = (a_1(\phi), \dots, a_r(\phi))$ de $Z(\hat{G})$ définit la classe de cohomologie $\mathbf{a} \in H^1(W_F, Z(\hat{G}))$ correspondant à ω , et on a

$$a(\phi)\zeta = \hat{\theta}(\zeta)(1, \dots, 1, \bar{a}(\phi)).$$

Posons $\mathbf{h} = h\phi$. On a l'égalité dans $\hat{G}W_F\hat{\theta} = \hat{G}\hat{\theta}W_F$

$$\tilde{s}\mathbf{h} = a(\phi)\mathbf{h}\tilde{s}.$$

On a $\hat{G}_{\tilde{s}} = \{(x_1, \dots, x_1) : x_1 \in (\hat{G}_1)_{\tilde{s}_1}\}$. Notons \mathcal{J}' le sous-groupe fermé de ${}^L G$ engendré par $\hat{G}_{\tilde{s}}$, par I_F et par (h, ϕ) . Pour $(x_1, \dots, x_1) \in \hat{G}_{\tilde{s}}$, on a

$$(h, \phi)(x_1, \dots, x_1)(h, \phi)^{-1} = ((h_1, \phi)x_1(h_1, \phi)^{-1}, \dots, (h_1, \phi)x_1(h_1, \phi)^{-1}).$$

Puisque \mathcal{J}'_1 est une extension scindée de W_F par $(\hat{G}_1)_{\tilde{s}_1}$, le groupe \mathcal{J}' est une extension scindée de W_F par $\hat{G}_{\tilde{s}}$. De plus, \mathcal{J}' ne dépend pas du choix du Frobenius ϕ , ni du choix de l'élément $(h_1, \phi) \in \mathcal{J}'_1$. Posons $T' = T'_1$. Par construction, le triplet $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s})$ est un triplet endoscopique elliptique et non ramifié pour (\tilde{G}, ω) , et l'élément $(h, \phi) \in \mathcal{J}'$ définit un isomorphisme $\mathcal{J}' \xrightarrow{\cong} {}^L T'$.

LEMME 1. — *La classe d'isomorphisme de la donnée \mathbf{T}' ne dépend que de celle de la donnée \mathbf{T}'_1 , et l'application*

$$\mathfrak{E}_{t\text{-nr}}(\tilde{G}_1, \bar{\omega}) \rightarrow \mathfrak{E}_{t\text{-nr}}(\tilde{G}, \omega), \quad \mathbf{T}'_1 \mapsto \mathbf{T}'$$

ainsi définie est bijective.

Démonstration. — Soient $\mathbf{T}'_1 = (T'_1, \mathcal{J}'_1, \tilde{s}'_1)$ et $\mathbf{T}''_1 = (T''_1, \mathcal{J}''_1, \tilde{s}''_1)$ des données endoscopiques elliptiques et non ramifiées pour $(\tilde{G}_1, \bar{\omega})$, telles que T'_1 et T''_1 sont des tores. Soient $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s}')$ et $\mathbf{T}'' = (T'', \mathcal{J}'', \tilde{s}'')$ les données endoscopiques elliptiques et non ramifiées pour (\tilde{G}, ω) associées à \mathbf{T}' et \mathbf{T}'' par la construction ci-dessus.

Supposons tout d'abord que les données \mathbf{T}'_1 et \mathbf{T}''_1 sont isomorphes : il existe des éléments $x_1 \in \hat{G}_1$ et $z_1 \in Z(\hat{G}_1)$ tels que

$$x_1 \mathcal{T}'_1 x_1^{-1} = \mathcal{T}''_1, \quad x_1 \tilde{s}'_1 x_1^{-1} = z_1 \tilde{s}''_1.$$

Soient $x = (x_1, \dots, x_r) \in \hat{G}$ et $z = (1, \dots, 1, z_1) \in Z(\hat{G})$. Alors on a

$$x \mathcal{T}' x^{-1} = \mathcal{T}'', \quad x \tilde{s}' x^{-1} = z \tilde{s}'',$$

et les données \mathbf{T}' et \mathbf{T}'' sont isomorphes. D'où la première assertion du lemme.

Supposons maintenant que les données \mathbf{T}' et \mathbf{T}'' sont isomorphes : il existe des éléments $x \in \hat{G}$ et $z \in Z(\hat{G})$ tels que

$$x \mathcal{T}' x^{-1} = \mathcal{T}'', \quad x \tilde{s}' x^{-1} = z \tilde{s}'.$$

D'après la première assertion du lemme, on peut supposer que $\tilde{s}'_1 = s'_1 \hat{\theta}_1$ et $\tilde{s}''_1 = s''_1 \hat{\theta}_1$ pour des éléments $s'_1, s''_1 \in \hat{T}_1$. On a donc

$$\tilde{s}' = s' \hat{\theta}, \quad s' = (1, \dots, 1, s'_1),$$

et

$$\tilde{s}'' = s'' \hat{\theta}, \quad s'' = (1, \dots, 1, s''_1).$$

Alors les éléments $x = (x_1, \dots, x_r)$ et $z = (z_1, \dots, z_r)$ vérifient :

- $x_i x_{i+1}^{-1} = z_i, i = 1, \dots, r-1,$
- $x_r s'_1 \hat{\theta}_1(x_1)^{-1} = z_r s''_1.$

En posant $\bar{z} = z_1 \dots z_r$, on a donc

$$x_1 \tilde{s}'_1 x_1^{-1} = \bar{z} \tilde{s}''_1.$$

Choisissons un élément $(h'_1, \phi) \in \mathcal{T}'_1$, et posons

$$\mathbf{h}' = h'_1 \phi, \quad \mathbf{h}' = \zeta(h'_1, \dots, h'_1) \in \hat{G}.$$

De même, choisissons un élément $(h''_1, \phi) \in \mathcal{T}''_1$, et posons

$$\mathbf{h}'' = h''_1 \phi, \quad \mathbf{h}'' = \zeta(h''_1, \dots, h''_1) \in \hat{G}.$$

Par construction, on a $(h', \phi) \in \mathcal{T}'$ et $(h'', \phi) \in \mathcal{T}''$, et

$$x(h', \phi)x^{-1} = (yh'', \phi)$$

pour un élément $y \in \hat{G}_{\tilde{s}''}$. Écrivons $y = (y_1, \dots, y_1)$, $y_1 = (\hat{G}_1)_{\tilde{s}''_1}$. Pour $i = 1, \dots, r$, on a $x_i h'_1 \phi(x_i)^{-1} = y_1 h''_1$. En particulier on a $x_1 \mathcal{T}'_1 x_1^{-1} = \mathcal{T}''_1$, et les données \mathbf{T}'_1 et \mathbf{T}''_1 sont isomorphes. Cela prouve que l'application du lemme est injective.

Prouvons qu'elle est surjective. Soit $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}', \tilde{s}) \in \mathfrak{E}_{t-\text{nr}}$. On peut supposer que $\tilde{s} = s \hat{\theta}$ pour un élément $s \in \hat{T} = \hat{T}_1^{\times q}$ de la forme $s = (1, \dots, 1, s_1)$. Choisissons un élément $(h, \phi) \in \mathcal{T}'$, et écrivons $h = (h_1, \dots, h_q)$. Posons $\mathbf{h} = h\phi$. Puisque $\tilde{s}\mathbf{h} = a(\phi)\mathbf{h}\tilde{s}$, on a :

- $h_{i+1} = a_i(\phi)h_i, i = 1, \dots, r-1,$
- $s_1 \hat{\theta}_1(h_1) = a_r(\phi)h_r \phi(s_1).$

On a donc

$$h = \zeta(h_1, \dots, h_1), \quad s_1 \hat{\theta}_1(h_1) = \bar{a}(\phi)h_1 \phi(s_1).$$

Posons $\tilde{s}_1 = s_1 \hat{\theta}_1$, et notons \mathcal{T}'_1 le sous-groupe fermé de ${}^L G_1$ engendré par $(\hat{G}_1)_{\tilde{s}_1}$, I_F et (h_1, ϕ) . C'est une extension scindée de W_F par $(\hat{G}_1)_{\tilde{s}_1}$, et le triplet $\mathbf{T}'_1 = (T', \mathcal{T}'_1, \tilde{s}_1)$ est une donnée endoscopique elliptique et non ramifié pour (\hat{G}, ω) . Cette donnée s'envoie sur la classe d'isomorphisme de \mathbf{T}' par l'application du lemme, qui est donc surjective. \square

Revenons à la situation d'avant le lemme 1. Du plongement $\hat{\xi}_1 : \hat{T}'_1 = (\hat{G}_1)_{\mathfrak{s}_1} \rightarrow \hat{T}_1$ se déduit par dualité un morphisme

$$\xi_1 : T_1 \rightarrow T'_1 \simeq T_1/(1 - \theta_1)(T_1),$$

qui vérifie

$$\sigma(\xi_1) = \xi_1 \circ \text{Int}_{\alpha_{T'_1}(\sigma)}, \quad \sigma \in \Gamma_F,$$

où $\sigma \mapsto \alpha_{T'_1}(\sigma)$ est un cocycle de Γ_F à valeurs dans $W_1^{\hat{\theta}_1} = W_1^{\theta_1}$, $W_1 = W^{G_1}(T_1)$. On pose

$$\tilde{T}'_1 = T'_1 \times Z(\tilde{G}_1, \varepsilon_1) = T'_1 \theta'_1, \quad \theta'_1 = \text{id}_{T'_1}.$$

De même, du plongement $\hat{\xi} : \hat{T}' = \hat{G}_{\mathfrak{s}} \rightarrow \hat{T}$ se déduit par dualité un morphisme

$$\xi : T \rightarrow T' \simeq T/(1 - \theta)(T),$$

qui vérifie

$$\sigma(\xi) = \xi \circ \text{Int}_{\alpha_{T'}(\sigma)}, \quad \alpha_{T'}(\sigma) = (\alpha_{T'_1}(\sigma), \dots, \alpha_{T'_l}(\sigma)), \quad \sigma \in \Gamma_F.$$

On pose

$$\tilde{T}' = T' \times Z(\tilde{G}, \varepsilon) = T' \theta', \quad \theta' = \text{id}_{T'}.$$

L'identité $T' \rightarrow T'_1$ se prolonge trivialement en un morphisme d'espaces tordus

$$\tilde{T}' \rightarrow \tilde{T}'_1, \quad g' \theta' \mapsto g' \theta'_1.$$

Le F -morphisme

$$j : G_1 \rightarrow G, \quad y \mapsto (1, \dots, 1, y)$$

induit par restriction et passage aux quotients un F -isomorphisme

$$T_1/(1 - \theta_1)(T_1) \xrightarrow{\simeq} T/(1 - \theta)(T),$$

et le diagramme suivant

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{\xi_1} & T'_1 \\ \downarrow j & & \parallel \\ T & \xrightarrow{\xi} & T' \end{array}$$

est commutatif. Soit

$$\tilde{\mu} : \tilde{T}'_1 \times \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{T}' \times \tilde{G}$$

le F -morphisme défini par

$$\tilde{\mu}(g'_1 \theta'_1, g_1 \theta_1) = (g'_1 \theta', j(g_1) \theta).$$

Il induit une application

$$\tilde{\mu}_F : \tilde{T}'_1(F) \times \tilde{G}_1(F) \rightarrow \tilde{T}'(F) \times \tilde{G}(F).$$

Les données \mathbf{T}'_1 et \mathbf{T}' sont relevantes, et les choix effectués plus haut permettent de définir des facteurs de transfert normalisés

$$\Delta_1 : \mathcal{D}(\mathbf{T}'_1) \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \Delta : \mathcal{D}(\mathbf{T}') \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

On note $\mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)/G_1(F)$ l'ensemble des orbites dans $\mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)$ pour l'action de $G_1(F)$ par conjugaison sur le second facteur, et on définit $\mathcal{D}(\mathbf{T}')/G(F)$ de la même manière.

LEMME 2. — *L'application $\tilde{\mu}_F$ induit par restriction une application*

$$\mathcal{D}(\mathbf{T}'_1) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{T}'),$$

qui se quotiente en une application bijective

$$\mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)/G_1(F) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{T}')/G(F).$$

De plus, pour $(\delta_1, \gamma_1) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)$ et $(\delta, \gamma) = \tilde{\mu}_F(\delta_1, \gamma_1) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$, on a

$$\Delta_1(\delta_1, \gamma_1) = \Delta(\delta, \gamma).$$

Démonstration. — Pour $x_1 \in G_1$ et $x = \iota(x_1) (= (x_1, \dots, x_1)) \in G$, on a

$$j(x_1^{-1} g_1 \theta_1(x_1)) = x^{-1} j(g_1) \theta(x).$$

La commutativité du diagramme (1) entraîne que l'application $\tilde{\mu}_F$ envoie $\mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{T}')$, et qu'elle se quotiente en une application $\mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)/G_1(F) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{T}')/G(F)$. Cette dernière est surjective car tout élément $\gamma = g\theta \in \tilde{G}(F)$ est conjugué à $(1, \dots, 1, \bar{g})\theta$ par un élément de $G(F)$, et elle est injective car pour $g_1, y_1 \in G_1(F)$, les éléments $j(g_1)\theta$ et $j(y_1)\theta$ sont conjugués par un élément de $G(F)$ si et seulement si cet élément est dans $\iota(G_1(F))$.

Quant à l'égalité des facteurs de transfert, on procède terme par terme comme dans la preuve du lemme 3 de 3.4 (grâce à l'égalité (1) de 3.1). Commençons par le terme Δ_{Π} . L'égalité des termes $\Delta_{1,\Pi}(\delta_1, \gamma_1)$ et $\Delta_{\Pi}(\delta, \gamma)$ est immédiate : le premier (resp. le second) est un produit sur l'ensemble des orbites dans l'ensemble des racines pour G_1 (resp. pour G) pour le groupe engendré par θ_1 (resp. par θ) et par l'action galoisienne. Les deux ensembles d'orbites sont en bijection, l'orbite pour G ayant simplement r fois plus d'éléments que l'orbite correspondante pour G_1 , et les facteurs associés à des orbites correspondantes sont les mêmes.

On doit ensuite montrer que

$$(1) \quad \langle (V_{T_{1,0}}, \nu_{1,\text{ad}}), t_{T_{1,0,\text{sc}}}, s_{1,\text{ad}} \rangle = \langle (V_{T_0}, \nu_{\text{ad}}), t_{T_{0,\text{sc}}}, s_{\text{ad}} \rangle.$$

Le premier produit est pour l'accouplement

$$H^{1,0}(\Gamma_F; T_{1,0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta_1} T_{1,0,\text{ad}}) \times H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{1,0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}_1} \hat{T}_{1,0,\text{ad}}) \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

le second est pour l'accouplement

$$H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} T_{0,\text{ad}}) \times H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,\text{ad}}) \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

On écrit $\gamma = g_1 \theta_1$ et $\gamma = j(g_1) \theta$. On voit que $T_0 = T_{1,0}^{\times r}$. On note $\iota_0 : T_{1,0} \rightarrow T_0$ le plongement diagonal et $j_0 : T_{1,0} \rightarrow T_0$ le plongement $y \mapsto (1, \dots, 1, y)$. On définit de la même manière les plongements $\iota_{0,\text{sc}} : T_{1,0,\text{sc}} \rightarrow T_{0,\text{sc}}$ et $j_{0,\text{ad}} : T_{1,0,\text{ad}} \rightarrow T_{0,\text{ad}}$. On vérifie que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} T_{1,0,\text{sc}} & \xrightarrow{1-\theta_1} & T_{1,0,\text{ad}} \\ \iota_{0,\text{sc}} \downarrow & & \downarrow j_{0,\text{ad}} \\ T_{0,\text{sc}} & \xrightarrow{1-\theta} & T_{0,\text{ad}} \end{array}$$

est commutatif. Dualement, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \hat{T}_{0,\text{sc}} & \xrightarrow{1-\hat{\theta}} & \hat{T}_{0,\text{ad}} \\ \hat{j}_{0,\text{ad}} \downarrow & & \downarrow \hat{i}_{0,\text{sc}} \\ \hat{T}_{1,0,\text{sc}} & \xrightarrow[1-\hat{\theta}_1]{} & \hat{T}_{1,0,\text{ad}} \end{array}$$

où les homomorphismes $\hat{j}_{0,\text{ad}} : \hat{T}_{0,\text{sc}} \rightarrow \hat{T}_{1,0,\text{sc}}$ et $\hat{i}_{0,\text{sc}} : \hat{T}_{0,\text{ad}} \rightarrow \hat{T}_{1,0,\text{ad}}$ sont donnés par

$$\hat{j}_{0,\text{ad}}(x_1, \dots, x_r) = x_1, \quad \hat{i}_{0,\text{sc}}(x_1, \dots, x_r) = x_1 \cdots x_r.$$

Le changement d'indice entre $j_{0,\text{ad}}$ et $\hat{j}_{0,\text{ad}}$ vient du fait que l'on a identifié la première composante \hat{G}_1 de $\hat{G} = \hat{G}_1^{\times r}$ au groupe dual de la r -ième composante de $G = G_1^{\times r}$. On considère ces diagrammes comme des homomorphismes de 2-complexes de tores. Ils donnent naissance à des homomorphismes en dualité

$$u : H^{1,0}(\Gamma_F; T_{1,0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta_1} T_{1,0,\text{ad}}) \rightarrow H^{1,0}(\Gamma_F; T_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\theta} T_{0,\text{ad}})$$

et

$$\hat{u} : H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{0,\text{ad}}) \rightarrow H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{1,0,\text{sc}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}_1} \hat{T}_{1,0,\text{ad}}).$$

Avec les objets déjà fixés, pour construire les termes V_{T_0} et ν_{ad} (resp. $V_{T_{1,0}}$ et $\nu_{1,\text{ad}}$), on a seulement besoin de fixer un élément $x \in G_{\text{SC}}$ (resp. $x_1 \in G_{1,\text{SC}}$), noté g en [MW, I, 6.3]. Brièvement, cet élément conjugue T_0 en T (resp. $T_{1,0}$ en T_1) de façon appropriée relativement aux actions galoisiennes. On voit que, x_1 étant choisi, on peut prendre $x = (x_1, \dots, x_1)$. Il résulte alors des définitions que $V_{T_0} = \iota_{0,\text{sc}} \circ V_{T_{1,0}}$ tandis que $\nu_{\text{ad}} = j_{0,\text{ad}}(\nu_{1,\text{ad}})$. Du côté dual, puisque $\hat{G} = \hat{G}_{\text{SC}}$, on peut prendre les décompositions triviales $h = h_{\text{sc}}$ et $h_1 = h_{1,\text{sc}}$. On a donc $h_{\text{sc}} = (h_{1,\text{sc}}, \dots, h_{1,\text{sc}})$. Le terme h_{sc} (resp. $h_{1,\text{sc}}$) entre dans la définition de $t_{T_{0,\text{sc}}}$ (resp. $t_{T_{1,0,\text{sc}}}$). Avec ces choix, on voit que $t_{T_{1,0,\text{sc}}} = \hat{j}_{0,\text{ad}} \circ t_{T_{0,\text{sc}}}$ tandis que $s_{1,\text{ad}} = \hat{i}_{0,\text{sc}}(s_{\text{ad}})$. D'où l'égalité

$$(t_{T_{1,0,\text{sc}}}, s_{1,\text{ad}}) = \hat{u}(t_{T_{0,\text{sc}}}, s_{\text{ad}}).$$

La compatibilité des produits entraîne alors l'égalité (1) cherchée. Cela achève la preuve. \square

Soit $(\delta_1, \gamma_1) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}'_1)$, et soit $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$ l'élément $\tilde{\mu}_{F_1}(\delta_1, \gamma_1)$. On a $\bar{\gamma} = \gamma_1$, et d'après la remarque 1 de 3.4, le plongement diagonal $\iota : G_1 \rightarrow G$ induit par restriction un F -isomorphisme $(G_1)_{\gamma_1} \xrightarrow{\simeq} G_\gamma$, noté ι_γ . Via l'isomorphisme $\iota_{\gamma,F} : (G_1)_{\bar{\gamma}}(F) \xrightarrow{\simeq} G_\gamma(F)$, les mesures de Haar sur $(G_1)_{\bar{\gamma}}(F)$ et $G_\gamma(F)$ normalisées par $T'_1(\mathfrak{o}_F) = T'(\mathfrak{o}_F)$ se correspondent, et d'après l'égalité (1) et la remarque 2 de 3.4, pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on a l'égalité entre intégrales orbitales normalisées

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = I^{\tilde{G}_1}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}, \bar{f}).$$

La démonstration du lemme 2 de 3.4 donne aussi

$$d(\theta^*) = d(\theta_1^*).$$

On a $\tilde{K}' = K'\theta'$ et $\tilde{K}'_1 = K'_1\theta'_1$ avec $K' = K'_1 (= T'_1(\mathfrak{o}_F))$, et pour $f = \mathbf{1}_{\tilde{K}}$, on a vu en 3.4 que $\bar{f} = \mathbf{1}_{\tilde{K}_1}$. On en déduit que pour prouver le lemme fondamental pour les données $\mathbf{T}' \in \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}(\tilde{G}, \omega)$ et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$ (théorème de 2.2), il suffit de le faire pour les données $\mathbf{T}'_1 \in \mathfrak{E}_{\text{t-nr}}(\tilde{G}_1, \bar{\omega})$ et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}_1}$.

On peut donc supposer $r = 1$.

3.6. Quatrième réduction. — On suppose dans ce numéro que chacun des deux automorphismes θ et ϕ opère transitivement sur l'ensemble des composantes connexes de Δ . Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ ces composantes connexes, ordonnées de telle manière que $\phi(\Delta_{i+1}) = \Delta_i$ pour $i = 1, \dots, m-1$. Si l'on oublie θ , on est dans la situation de 3.3 : à la décomposition

$$\Delta = \Delta_1 \coprod \dots \coprod \Delta_m$$

correspond une décomposition

$$G = G_1 \times \dots \times G_m,$$

qui est définie sur le sous-corps F_1 de F^{nr} formé des éléments fixés par $\phi_1 = \phi^m$ (c'est-à-dire la sous-extension de degré m de F^{nr}/F). Pour $i = 1, \dots, m-1$, on identifie G_{i+1} à G_1 via ϕ^i . On a donc $G = \text{Res}_{F_1/F}(G_1)$, et le plongement diagonal (défini sur F_1) $\iota : G_1 \rightarrow G = G_1^{\times m}$ induit un isomorphisme de groupes topologiques

$$\iota_{F_1} : G_1(F_1) \rightarrow G(F).$$

Rappelons que l'action de Γ_F sur $G(\overline{F}) = G_1(\overline{F})^{\times m}$ est donnée par :

- $\sigma(x_1, \dots, x_m) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m))$ pour $\sigma \in \Gamma_{F_1}$,
- $\phi(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m, \phi_1(x_1))$.

L'élément $\phi \in W_F$ donne par restriction un générateur du groupe de Galois $\text{Gal}(F_1/F)$, lequel définit un F -automorphisme d'ordre m du groupe $G = \text{Res}_{F_1/F}(G_1)$, disons α . Puisque θ opère transitivement sur l'ensemble des composantes connexes de Δ , il existe un entier $e \in \{1, \dots, m-1\}$ premier à m (si $m = 1$, on prend $e = 0$) et des automorphismes $\theta_1, \dots, \theta_m$ de G_1 tels que

$$\alpha^{-e}\theta(x) = (\theta_1(x_1), \dots, \theta_m(x_m)), \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in G(\overline{F}) = G_1(\overline{F})^{\times m}.$$

Puisque α et θ commutent à ϕ , on a $\theta_1 = \dots = \theta_m$ et θ_1 commute à ϕ_1 , c'est-à-dire que θ_1 est défini sur F .

On suppose que l'ensemble $\mathfrak{E}_{t-\text{nr}}(\tilde{G}, \omega)$ n'est pas vide. Alors d'après [LMW, 5.2], cela implique que (G_1, \tilde{G}_1) est isomorphe à l'espace tordu trivial $(PGL(n), PGL(n))$, défini et déployé sur F_1 . On peut donc supposer que $G_1 = PGL(n)$ et que θ_1 est l'identité. Alors θ est le F -automorphisme de $G = \text{Res}_{F_1/F}(PGL(n))$ défini par un générateur du groupe de Galois $\text{Gal}(F_1/F)$, et on est dans la situation du changement de base non ramifié (avec caractère ω) pour $PGL(n)$. Si $m = 1$, alors $\theta = 1$, et dans ce cas on peut appliquer le résultat de Kazhdan [Ka]. Il reste donc à traiter le cas $m > 1$.

4. Réduction au résultat de Kazhdan par la méthode de Kottwitz

4.1. Réduction au cas du changement de base pour $GL(n)$. — On s'est ramené en 3.6 au cas du changement de base (avec caractère ω) pour $PGL(n)$, c'est-à-dire au groupe $\text{Res}_{F_1/F}(PGL(n))$, où F_1/F est une sous-extension de F^{nr}/F de degré $m > 1$ muni du F -automorphisme θ défini par un générateur du groupe de Galois $\text{Gal}(F_1/F)$. Puisque le centre $Z(\text{Res}_{F_1/F}(PGL(n)))$ est connexe, d'après le point (ii) de la proposition de 2.12, on peut remplacer le groupe $PGL(n)$ par $GL(n)$ — cf. les remarques 1 et 2 de 2.12.

Changeons de notations. Posons $E = F_1$ et notons H le groupe $GL(n)$, défini et déployé sur F , pour un entier $n \geq 1$. Posons $H_E = H \times_F E$, $G = \text{Res}_{E/F}(H_E)$ et $\tilde{G} = G\theta$, où θ est le F -automorphisme de G défini par un générateur du groupe de Galois $\text{Gal}(E/F)$. On a l'identification (définie sur E) $G = H^{\times m}$, et l'action de θ sur $G(\overline{F}) = H(\overline{F})^{\times m}$ est donnée par

$$\theta(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m, x_1), \quad (x_1, \dots, x_m) \in G(\overline{F}).$$

Le plongement diagonal $H \rightarrow G$ est défini sur E , et il induit une identification

$$H(E) = G(F).$$

En particulier, l'action de θ sur $G(F)$ coïncide avec celle de ϕ^e sur $H(E)$ pour un entier $e \in \{1, \dots, m-1\}$ premier à m . Le groupe de Galois Γ_F est engendré par $\Gamma_E = \text{GL}(\bar{F}/E)$ et par ϕ^e , et l'action de Γ_F sur $G(\bar{F}) = H(\bar{F})^{\times m}$ est donnée par :

- $\sigma(x_1, \dots, x_m) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m))$, $\sigma \in \Gamma_E$;
- $\phi^e(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m, \phi^{em}(x_1))$.

Pour toute sous-extension finie F'/F de F^{nr}/F , posons $K_{F'} = \text{GL}(n, \mathfrak{o}_{F'})$ et notons $\omega_{F'}$ le caractère non ramifié $\omega \circ \det_{F'}$ de $H(F') = \text{GL}(n, F')$, où l'on a identifié ω à un caractère non ramifié de F'^{\times} via l'isomorphisme naturel $F^{\times}/U_F \xrightarrow{\sim} F'^{\times}/U_{F'}$. Ici $\mathfrak{o}_{F'}$ est l'anneau des entiers de F' , et $U_{F'} = \mathfrak{o}_{F'}^{\times}$ le groupe de ses éléments inversibles. La restriction de $\omega_{F'}$ à $H(F) = \text{GL}(n, F)$ coïncide avec ω , et $\omega_{F'}$ est l'unique caractère non ramifié de $H(F')$ prolongeant ω . En particulier, tout caractère non ramifié de $G(F) = H(E)$ trivial sur $Z(G)^{\theta}(F) = Z(H; F)$ est de la forme $\bar{\omega}_E$ pour un caractère non ramifié $\bar{\omega}$ de F^{\times} d'ordre divisant n . Posons

$$K = K_F \subset H(F), \quad \tilde{K}_E = K_E \theta \subset \tilde{G}(F).$$

Soit $\mathcal{E}_H = (B_H, T_H, \{E_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta_H})$ une paire de Borel épinglée de H définie sur F telle que $K = K_{\mathcal{E}_H}$. Alors $\mathcal{E} = \mathcal{E}_H \times \dots \times \mathcal{E}_H$ est une paire de Borel épinglée de $G = H^{\times m}$ qui est définie sur F et θ -stable, et l'on a $K_E = K_{\mathcal{E}}$. De plus la paire de Borel (B, T) de \mathcal{E} sous-jacente à \mathcal{E} est donnée par $B = \text{Res}_{E/F}(B_H)$ et $T = \text{Res}_{E/F}(T_H)$.

On fixe aussi un caractère non ramifié ω de F^{\times} d'ordre n , que l'on identifie au caractère $\omega \circ \det_F$ de $H(F) = \text{GL}(n, F)$. On veut montrer le lemme fondamental (théorème de 2.2) pour une donnée $\mathbf{T}' \in \mathfrak{E}_{t\text{-nr}}(\tilde{G}, \omega_E)$ et la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{K}_E}$.

4.2. Une variante de la méthode de Kottwitz. — Soit L le complété de F^{nr} . Posons

$$K_L = \text{GL}(n, \mathfrak{o}_L)$$

et notons ω_L l'unique caractère de $H(L) = \text{GL}(n, L)$ prolongeant ω . Le groupe K_L vérifie les conditions (a), (b), (c) de [Ko, 1] :

- (a) $\phi(K_L) = K_L$;
- (b) l'application $k \mapsto k^{-1}\phi(k)$ de K_L dans K_L est surjective ;
- (c) l'application $k \mapsto k^{-1}\phi^m(k)$ de K_L dans K_L est surjective.

Choisissons deux entiers non nuls a et b tels que $bm - ae = 1$. Pour $h \in H(F)$ et $\gamma = g\theta \in \tilde{G}(F)$, on écrit $h \leftrightarrow \gamma$ s'il existe un élément $c \in H(L)$ tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- (A) $h^a = c^{-1}\phi^m(c)$;
- (B) $h^b = c^{-1}g\phi^e(c)$.

Notons $N : G(F) \rightarrow G(F)$ l'application définie par

$$N(y) = y\theta(y) \cdots \theta^{m-1}(y).$$

D'après [Ko, 1, theorem], la correspondance $h \leftrightarrow \gamma$ induit une bijection entre l'ensemble des classes de $H(F)$ -conjugaison $\mathcal{O}_{H(F)}(h)$ d'éléments semisimples réguliers $h \in H(F)$ tels que $\mathcal{O}_{H(F)}(h) \cap K \neq \emptyset$ et l'ensemble des classes de $G(F)$ -conjugaison $\mathcal{O}_{G(F)}(\gamma)$ d'éléments semisimples réguliers $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tels que $\mathcal{O}_{G(F)}(\gamma) \cap \tilde{K}_E \neq \emptyset$. De plus si $h \leftrightarrow \gamma$, alors pour $c \in H(L)$ vérifiant les conditions (A) et (B) ci-dessus, on a

$$N(g) = chc^{-1},$$

et l'application $x \mapsto cxc^{-1}$ induit un isomorphisme de $H_h(F)$ sur $G_\gamma(F)$. D'ailleurs (loc. cit.), les conditions (A) et (B) sont équivalentes aux deux conditions suivantes :

- (C) $N(g) = chc^{-1}$;
- (D) $(g\phi^e)^{-a}\phi^{ea} = c\phi(c^{-1})$.

REMARQUE. — En pratique, pour $h \in H(F)$ tel que $\mathcal{O}_{H(F)}(h) \cap K \neq \emptyset$, on choisit un élément $x \in H(F)$ tel que $h' = x^{-1}hx \in K$ et un élément $c' \in K_L$ tel que $h'^a = c'^{-1}\phi^m(c')$ — c'est possible grâce à la condition (c). Alors posant $c = c'x^{-1}$, on a $h^a = c^{-1}\phi^m(c)$, et on définit $\gamma = g\theta$ grâce à la condition (B), c'est-à-dire en posant $g = ch^b\phi^e(c^{-1})$. L'élément g appartient à $H(E)$, et on a bien $h \leftrightarrow \gamma$. Dans l'autre sens, pour $\gamma = g\theta$ tel que $\mathcal{O}_{G(F)}(\gamma) \cap \tilde{K}_E \neq \emptyset$, on choisit un élément $y \in H(E)$ tel que $\gamma' = y^{-1}\gamma y \in \tilde{K}_E$, et posant $\gamma' = g'\theta$, on voit que l'élément $(g'\phi^e)^{-a}\phi^{ea}$ appartient à K_E . On choisit un élément $c' \in K_L$ tel que $(g'\phi^e)^{-a}\phi^{ea} = c'\phi(c'^{-1})$ — c'est possible grâce à la condition (b). Alors posant $c = yc'$, on a $(g\phi^e)^{-a}\phi^{ea} = c\phi(c^{-1})$, et on définit h grâce à la condition (C), c'est-à-dire en posant $h = c^{-1}N(g)c$. L'élément h appartient à $H(F)$, et on a $h \leftrightarrow \gamma$. ■

En particulier, pour tout élément $h \in K$ semisimple régulier (dans H), il existe un élément $\gamma = g\theta \in \tilde{K}_E$ semisimple régulier (dans \tilde{G}) tel que $h \leftrightarrow \gamma$, et on peut choisir l'élément c vérifiant les conditions (A) et (B) dans le sous-groupe borné maximal K_L de $G(L)$. Fixons de tels éléments h , γ et c . Pour $f \in C_c^\infty(H(F))$, on définit comme suit l'intégrale orbitale $I^H(h, \omega, f)$: si $\omega|_{H_h(F)} \neq 1$, on pose $I^H(h, \omega, f) = 0$; sinon, on pose

$$I^H(h, \omega, f) = D^H(h)^{1/2} \int_{H_h(F) \backslash H(F)} \omega(x) f(x^{-1}hx) \frac{dx}{dx_h},$$

où les mesures de Haar dx sur $H(F)$ et dx_h sur $H_h(F)$ sont celles qui donnent le volume 1 à K et au sous-groupe compact maximal de $H_h(F)$. De même, pour $f_E \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on définit comme suit l'intégrale orbitale $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega_E, f_E)$: si $\omega_E|_{G_\gamma(F)} \neq 1$, on pose $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega_E, f_E) = 0$; sinon, on pose

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega_E, f_E) = d(\theta^*)^{-1} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \int_{G_\gamma(F) \backslash G(F)} \omega_E(y) f_E(y^{-1}\gamma y) \frac{dy}{dy_\gamma},$$

où les mesures de Haar dy sur $G(F)$ et dy_γ sur $G_\gamma(F)$ sont celles qui donnent le volume 1 à K_E et au sous-groupe compact maximal de $G_\gamma(F)$. Le facteur $d(\theta^*)$, défini de la manière habituelle (2.2), vient de la normalisation des mesures pour le transfert tordu : la mesure de Haar sur $G_\gamma(F)$ correspondant à dx_h pour le transfert tordu n'est pas dy_γ , mais $d(\theta^*)dy_\gamma$. En effet, le commutant F' de h dans $M(n, F)$ est une extension non ramifiée de degré n de F , et l'on a $H_h(F) = F'^\times$. On a aussi $\gamma^m = chc^{-1}$ et $G_\gamma(F) = cF'^\times c^{-1}$. D'autre part on a $T'(F) \simeq F'^\times$, mais pour définir le transfert de $\tilde{T}'(F)$ à $\tilde{G}(F)$, la mesure de Haar sur $G_\gamma(F)$ n'est pas celle donnée par l'isomorphisme $\text{Int}_c : F'^\times \xrightarrow{\simeq} G_\gamma(F)$, mais celle donnée par le morphisme naturel

$$G_\gamma(F) = T_0^{\theta, \circ} \rightarrow (T_0/(1-\theta)(T_0))(F) \simeq T'(F),$$

où T_0 est le centralisateur de G_γ dans G (notons que $T_0^{\theta, \circ} = G_\gamma$). D'où la constante $d(\theta^*) = |m|_F^n$, qui n'est autre que le Jacobien de l'homomorphisme $F'^\times \rightarrow F'^\times$, $x \mapsto x^m$.

Le caractère ω est trivial sur $H_h(F)$ si et seulement si le caractère ω_E est trivial sur $G_\gamma(F) = cH_h(F)c^{-1}$, et si tel est le cas, alors on a

$$(1) \quad I^H(h, \omega, \mathbf{1}_K) = D^H(h)^{1/2} \sum_x \omega(x) \text{vol}(H_h(F) \backslash H_h(F)xK),$$

où x parcourt un ensemble de représentants des doubles classes $H_h(F)\backslash H(F)/K$ telles que $x^{-1}hx \in K$; et on a aussi

$$(2) \quad I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega_E, \mathbf{1}_{\tilde{K}_E}) = d(\theta^*)^{-1} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \sum_y \omega_E(y) \text{vol}(G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(F)yK_E),$$

où y parcourt un ensemble de représentants des doubles classes $G_\gamma(F)\backslash H(E)/K_E$ telles que $y^{-1}\gamma y \in \tilde{K}_E$. Posons

$$X = H(F)/K, \quad X_E = H(E)/K_E, \quad X_L = H(L)/K_L.$$

Les inclusions $H(F) \subset H(E) \subset H(L)$ induisent des inclusions

$$X \subset X_E \subset X_L.$$

Les groupes $H(F)$, $H(E)$, $H(L)$ opèrent naturellement sur X , X_E , X_L . On a aussi une action de ϕ sur X_L , et une action de θ sur X_E . Pour $\bar{x} = xK \in X$, on a $x^{-1}hx \in K$ si et seulement si $h\bar{x} = \bar{x}$, et si tel est le cas, alors on a

$$\text{vol}(H_h(F)\backslash H_h(F)xK) = \text{vol}(\text{Stab}_{H_h(F)}(\bar{x}))^{-1},$$

où $\text{Stab}_{H_h(F)}(\bar{x})$ est le stabilisateur de \bar{x} dans $H_h(F)$. On obtient

$$(3) \quad I^H(h, \omega, \mathbf{1}_K) = D^H(h)^{1/2} \sum_{\bar{x}} \omega(\bar{x}) \text{vol}(\text{Stab}_{H_h(F)}(\bar{x}))^{-1},$$

où \bar{x} parcourt un ensemble de représentants des orbites de $H_h(F)$ dans

$$X^h = \{\bar{x} : h\bar{x} = \bar{x}\}.$$

Par abus d'écriture, on a posé $\omega(\bar{x}) = \omega(x)$, ce qui a un sens puisque le caractère ω est trivial sur K . De la même manière on obtient

$$(4) \quad I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega_E, \mathbf{1}_{\tilde{K}_E}) = d(\theta^*)^{-1} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \sum_{\bar{y}} \omega_E(\bar{y}) \text{vol}(\text{Stab}_{G_\gamma(F)}(\bar{y}))^{-1},$$

où \bar{y} parcourt un ensemble de représentants des orbites de $G_\gamma(F)$ dans

$$X_E^\gamma = \{\bar{y} \in X_E : \gamma\bar{y} = \bar{y}\}.$$

Rappelons que $h \leftrightarrow \gamma$ avec $h \in K$ et $\gamma \in \tilde{K}_E$, et qu'on a fixé $c \in K_L$ vérifiant les conditions (A) et (B). D'après [Ko, p. 241], l'application $X_L \rightarrow X_L$, $\bar{x} \mapsto c\bar{x}$ induit une bijection de X^h sur X_E^γ , et l'application $H(L) \rightarrow H(L)$, $x \mapsto cxc^{-1}$ induit un isomorphisme de $H_h(F)$ sur $G_\gamma(F)$. Pour $\bar{x} \in X^h$, on a donc

$$\text{vol}(\text{Stab}_{G_\gamma(F)}(c\bar{x})) = \text{vol}(\text{Stab}_{H_h(F)}(\bar{x}))$$

et

$$\omega_E(c\bar{x}) = \omega_L(c)\omega_E(\bar{x}) = \omega_E(\bar{x}).$$

LEMME. — On a

$$D^{\tilde{G}}(\gamma) = d(\theta^*)D^H(h).$$

Démonstration. — Quitte à conjuguer γ par un élément de $G(F)$ et h par un élément de $H(F)$, on peut supposer que $\gamma = (1, \dots, 1, h)\theta$. Notons \mathfrak{g} , \mathfrak{h} , \mathfrak{g}_γ , \mathfrak{h}_h les algèbres de Lie de G , H , G_γ et H_h . Notons aussi \mathfrak{g}_h l'algèbre de Lie de G_h , où $h \in H(F)$ est identifié à l'élément (h, \dots, h) de $G(F)$. L'algèbre \mathfrak{g}_γ s'identifie à \mathfrak{h}_h et à la sous-algèbre diagonale de $\mathfrak{g}_h = \mathfrak{h}_h \times \dots \times \mathfrak{h}_h$. Ces identifications sont définies sur F . On a donc

$$D^{\tilde{G}}(\gamma) = |\det(1 - \text{ad}_\gamma); \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_h(F)|_F |\det(1 - \theta; \mathfrak{g}_h(F)/\mathfrak{h}_h(F))|_F.$$

Le lemme 2 de 3.4 donne

$$|\det(1 - \text{ad}_\gamma); \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_h(F)||_F = D^H(h).$$

D'autre part on a

$$\det(1 - \theta; \mathfrak{g}_h(F)/\mathfrak{h}_h(F)) = m^{\dim(\mathfrak{h}_h)}, \quad \dim(\mathfrak{h}_h) = n.$$

Rappelons que la constante $d(\theta^*)$ est donnée par $d(\theta^*) = |\det(1 - \theta; \mathfrak{t}(F)/\mathfrak{t}_H(F))|_F$ où \mathfrak{t} et \mathfrak{t}_H sont les algèbres de Lie de T et $T_H (= T_\theta)$. On a donc aussi

$$(5) \quad d(\theta^*) = |m|_F^n.$$

D'où le lemme. \square

En définitive, on obtient l'égalité

$$(6) \quad I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega_E, \mathbf{1}_{\tilde{K}_E}) = d(\theta^*)^{-1/2} I^H(h, \omega, \mathbf{1}_K).$$

4.3. Conclusion. — Le groupe $H = GL(n)$ est défini et déployé sur F , donc ${}^L H = \hat{H} \times W_F$ avec $\hat{H} = GL(n, \mathbb{C})$. Comme en 3.5, on munit le groupe dual $\hat{G} = \hat{H}^{\times m}$ de l'action de $\hat{\theta}$ donnée par $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m, x_1)$. Puisque l'action de θ sur $G(F)$ coïncide avec celle de ϕ^e sur $H(E)$, et que $bm - ae = 1$, l'action ϕ_G de ϕ sur \hat{G} vérifie

$$\phi_G^e = \hat{\theta}, \quad \hat{\theta}^{-a} = \phi_G.$$

Soit $\hat{\mathcal{E}}_H = (\hat{B}_H, \hat{T}_H, \{\hat{E}_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_H})$ une paire de Borel épinglée de \hat{H} . La paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}_H \times \dots \times \hat{\mathcal{E}}_H$ de \hat{G} est stable sous l'action de $\hat{\theta}$, donc aussi sous celle de ϕ_G . Soit $\mathbf{T}'_H = (T'_H, \mathcal{J}'_H, s_H)$ une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour (H, ω) telle que T'_H est un tore. On suppose que $s_H \in \hat{T}_H$. Choisissons un élément $(h_H, \phi) \in \mathcal{J}'_H$. Il définit un isomorphisme $\mathcal{J}'_H \xrightarrow{\simeq} {}^L T'_H$ comme en 2.1.(1). Puisque ϕ opère trivialement sur \hat{H} , on a l'égalité dans $\hat{H}W_F$

$$s_H h_H = a(\phi) h_H s_H,$$

où $a(\phi)$ est l'élément de $Z(\hat{H}) \simeq \mathbb{C}^\times$ définissant la classe de cohomologie non ramifiée $\mathbf{a} \in H^1(W_F, Z(\hat{H})) = \text{Hom}(W_F, Z(\hat{H}))$ correspondant au caractère ω de $H(F)$. À cette donnée \mathbf{T}'_H pour (H, ω) est associée comme suit une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s})$ pour (\tilde{G}, ω_E) telle que T' est un tore. Posons $s = (1, \dots, 1, s_H) \in \hat{T}$ et $\tilde{s} = s\hat{\theta}$. Alors le plongement diagonal $\eta : \hat{H} \rightarrow \hat{G}$ induit un isomorphisme de $\hat{H}_{s_H} = \hat{T}'_H$ sur $\hat{G}_{\tilde{s}}$. Posons

$$h = (\underbrace{h_H, \dots, h_H}_a, \underbrace{h_H s_H, \dots, h_H s_H}_{m-a}) \in \hat{G},$$

où l'entier a est pris modulo m . L'élément

$$\mathbf{a}_E(\phi) = (1, \dots, 1, a(\phi)) \in Z(\hat{G})$$

définit une classe de cohomologie non ramifiée $\mathbf{a}_E \in H^1(W_F, Z(\hat{G}))$ correspondant au caractère ω_E de $H(E) = G(F)$. Posons $\mathbf{h} = h\phi$. On a l'égalité dans $\hat{G}W_F \hat{\theta} = \hat{G} \hat{\theta} W_F$

$$\tilde{s} \mathbf{h} = \mathbf{a}_E(\phi) \mathbf{h} \tilde{s}.$$

Notons \mathcal{J}' le sous-groupe de ${}^L G$ engendré par $\hat{G}_{\tilde{s}}$, par I_F et par (h, ϕ) . Pour $x \in \hat{H}_{s_H}$, on a

$$(h, \phi) \eta(x) (h, \phi)^{-1} = h \eta(x) h^{-1} = \eta(h_H x h_H^{-1}) = \eta((h_H, \phi) x (h_H, \phi)^{-1}).$$

Puisque \mathcal{J}'_H est une extension scindée de W_F par \hat{H}_{s_H} , le groupe \mathcal{J}' est une extension scindée de W_F par $\hat{G}_{\tilde{s}}$. De plus, \mathcal{J}' ne dépend pas du choix du Frobenius ϕ , ni du choix de l'élément

$(h_H, \phi) \in \mathcal{J}'_H$. Posons $T' = T'_H$. Par construction, le triplet $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s})$ est une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour (\tilde{G}, ω_E) , et l'élément $(h, \phi) \in \mathcal{J}'$ définit un isomorphisme $\mathcal{J}' \xrightarrow{\cong} {}^L T'$ comme en 2.1.(1).

LEMME. — *La classe d'isomorphisme de la donnée \mathbf{T}' ne dépend que de celle de la donnée \mathbf{T}'_H , et l'application*

$$\mathfrak{E}_{t\text{-nr}}(H, \omega) \rightarrow \mathfrak{E}_{t\text{-nr}}(\tilde{G}, \omega_E)$$

ainsi définie est bijective.

Démonstration. — Soient $\mathbf{T}'_{1,H} = (T'_{1,H}, \mathcal{J}'_{1,H}, s_{1,H})$ et $\mathbf{T}'_{2,H} = (T'_{2,H}, \mathcal{J}'_{2,H}, s_{2,H})$ des données endoscopiques elliptiques et non ramifiées pour (H, ω) telles que $T'_{1,H}$ et $T'_{2,H}$ sont des tores. On suppose que $s_{1,H}$ et $s_{2,H}$ appartiennent à \hat{T}_H . Soient $\mathbf{T}'_1 = (T'_1, \mathcal{J}'_1, \tilde{s}_1)$ et $\mathbf{T}'_2 = (T'_2, \mathcal{J}'_2, \tilde{s}_2)$ les données endoscopiques elliptiques et non ramifiées pour (\tilde{G}, ω_E) associées à $\mathbf{T}'_{1,H}$ et $\mathbf{T}'_{2,H}$ par la construction ci-dessus.

Supposons tout d'abord que les données $\mathbf{T}'_{1,H}$ et $\mathbf{T}'_{2,H}$ sont isomorphes : il existe des éléments $x_H \in \hat{H}$ et $z_H \in Z(\hat{H})$ tels que

$$x_H \mathcal{J}'_{1,H} x_H^{-1} = \mathcal{J}'_{2,H}, \quad x_H s_{1,H} x_H^{-1} = z_H s_{2,H}.$$

Puisque $\hat{H}_{s_{i,H}} = \hat{T}_H$ ($i = 1, 2$), l'élément x_H appartient au normalisateur $N_{\hat{H}}(\hat{T}_H)$ de \hat{T}_H dans \hat{H} . Rappelons que pour construire \mathbf{T}'_1 et \mathbf{T}'_2 , on a choisi des éléments $(h_{1,H}, \phi) \in \mathcal{J}'_{1,H}$ et $(h_{2,H}, \phi) \in \mathcal{J}'_{2,H}$ et on a posé

$$h_i = \underbrace{(h_{i,H}, \dots, h_{i,H})}_a \underbrace{(h_{i,H} s_{i,H}, \dots, h_{i,H} s_{i,H})}_{m-a} \in \hat{G}, \quad i = 1, 2.$$

On a $\phi_H(x_H) = x_H$, et l'élément $h'_{2,H} = x_H h_{1,H} x_H^{-1}$ appartient à $\hat{H}_{s_{2,H}} h_{2,H} = \hat{T}_H h_{2,H}$. Posons $t_H = h'_{2,H} h_{2,H}^{-1} \in \hat{T}_H$. On cherche un élément $x \in \hat{G}$ tel que $x h_1 \phi_G(x)^{-1} \in \hat{G}_{\tilde{s}_2} h_2$. Plus précisément, on cherche x de la forme $x = \zeta \eta(x_H)$ avec $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in Z(\hat{G})$ tel que $x h_1 \phi_G(x)^{-1} = \eta(\zeta t_H) h_2$ pour un élément $\zeta_H \in Z(\hat{H})$. On a $\phi_G(x)^{-1} = \eta(x_H^{-1}) \phi_G(\zeta^{-1})$ d'où

$$\begin{aligned} x h_1 \phi_G(x)^{-1} &= \zeta \phi_G(\zeta^{-1}) \underbrace{(h'_{2,H}, \dots, h'_{2,H})}_a \underbrace{(z_H h'_{2,H} s_{2,H}, \dots, z_H h'_{2,H} s_{2,H})}_{m-a} \\ &= \zeta \phi_G(\zeta^{-1}) \underbrace{(\zeta_H^{-1}, \dots, \zeta_H^{-1})}_a \underbrace{(\zeta_H^{-1} z_H, \dots, \zeta_H^{-1} z_H)}_{m-a} \eta(\zeta_H t_H) h_2. \end{aligned}$$

On est donc ramené à résoudre l'équation

$$\zeta \phi_G(\zeta^{-1}) \underbrace{(\zeta_H^{-1}, \dots, \zeta_H^{-1})}_a \underbrace{(\zeta_H^{-1} z_H, \dots, \zeta_H^{-1} z_H)}_{m-a} = 1.$$

On a

$$\zeta \phi_G(\zeta^{-1}) = (\zeta_1 \zeta_{m-a+1}^{-1}, \dots, \zeta_a \zeta_m^{-1}, \zeta_{a+1} \zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_m \zeta_{m-a}^{-1}).$$

Il s'agit de résoudre le système de m équations à m inconnues :

- $\zeta_{m-a+i} = \zeta_H \zeta_i$ pour $i = 1, \dots, a$;
- $\zeta_{a+j} = \zeta_H^{-1} z_H \zeta_j$ pour $j = 1, \dots, m-a$.

La matrice $m \times m$ associée à ce système d'équations est la matrice de Sylvester des polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ donnés par $P(X) = \zeta_H X^{m-a} - 1$ et $Q(X) = \zeta_H^{-1} z_H X^a - 1$, avec l'identification naturelle $Z(\hat{H}) = \mathbb{C}^\times$. Le déterminant de cette matrice est le résultant $R(P, Q)$ de P et Q ,

qui se calcule comme suit. On choisit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times$ tels que $\alpha^{m-a} = \zeta_H^{-1}$ et $\beta^a = \zeta_H z_H^{-1}$. Pour $k \geq 1$, on note $\mu_k \subset \mathbb{C}^\times$ le sous-groupe des racines k -ièmes de l'unité. Alors on a

$$R(P, Q) = \zeta_H^a (\zeta_H^{-1} z_H)^{m-a} \prod_{\xi \in \mu_{m-a}} \prod_{\xi' \in \mu_a} (\xi \alpha - \xi' \beta).$$

On voit que pour que $R(P, Q) = 0$, il faut et il suffit que $\zeta_H^m = z_H^{m-a}$. On choisit ζ_H de sorte que cette égalité soit vérifiée. Alors on peut prendre $\alpha = \beta$. Notons que puisque a et m sont premiers entre eux, a et $m-a$ le sont aussi, et la matrice de Sylvester est de rang $m-1$. Les solutions du système de m équations à m inconnues à résoudre forment un espace vectoriel de dimension 1, et tout élément non nul ζ dans cet espace appartient à $Z(\hat{G}) = (\mathbb{C}^\times)^{\times m}$. Pour un tel ζ , on a donc $x \mathcal{J}'_1 x^{-1} = \mathcal{J}'_2$ (rappelons que $x = \zeta \eta(x_H)$). Comme $\eta(x_H) s_1 \eta(x_H)^{-1} = (1, \dots, 1, z_H s_{2,H})$, on a aussi

$$x \tilde{s}_1 x^{-1} = \zeta \hat{\theta}(\zeta)^{-1} \eta(x_H) s_1 \eta(x_H)^{-1} \hat{\theta} \in Z(\hat{G}) \tilde{s}_2.$$

Les données \mathbf{T}'_1 et \mathbf{T}'_2 sont donc isomorphes.

Supposons maintenant que les données \mathbf{T}'_1 et \mathbf{T}'_2 sont isomorphes : il existe des éléments $x \in \hat{G}$ et $z \in Z(\hat{G})$ tels que

$$x \mathcal{J}'_1 x^{-1} = \mathcal{J}'_2, \quad x \tilde{s}_1 x^{-1} = z \tilde{s}_2.$$

Posons $x = (x_1, \dots, x_m)$ et $z = (z_1, \dots, z_m)$. Comme $\tilde{s}_i = (1, \dots, 1, s_{i,H}) \hat{\theta}$ pour $i = 1, 2$, on obtient :

- $x_i x_{i+1}^{-1} = z_i, i = 1, \dots, m-1,$
- $x_m s_{1,H} x_1^{-1} = z_m s_{2,H}.$

En posant $\bar{z} = z_1 \cdots z_m$ et $x_H = x_1$, on a donc

$$x_H s_{1,H} x_H^{-1} = \bar{z} s_{2,H}.$$

En posant $\zeta = (1, z_1^{-1}, \dots, z_{m-1}^{-1}) \in Z(\hat{G})$, on a aussi $x = \zeta \eta(x_H)$ et

$$x h_1 \phi_G(x)^{-1} = \zeta \phi_G(\zeta)^{-1} \eta(x_H) h_1 \eta(x_H)^{-1} \in \eta(\hat{T}_H) h_2.$$

En regardant la première composante de l'expression ci-dessus, on obtient

$$z_{m-a} x_H h_{1,H} x_H^{-1} \in \hat{T}_H h_{2,H},$$

d'où l'égalité

$$x_H \mathcal{J}'_{1,H} x_H^{-1} = \mathcal{J}'_{2,H}.$$

Les données $\mathbf{T}'_{1,H}$ et $\mathbf{T}'_{2,H}$ sont donc isomorphes. Cela prouve que l'application du lemme est injective.

Prouvons qu'elle est surjective. Soit $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{J}', \tilde{s}) \in \mathfrak{E}_{t-\text{nr}}(\tilde{G}, \omega_E)$. On peut supposer que $\tilde{s} = s \hat{\theta}$ pour un élément $s \in \hat{T} = \hat{T}_H^{\times r}$ de la forme $s = (1, \dots, 1, s_H)$. Choisissons un élément $(h, \phi) \in \mathcal{J}'$, et écrivons $h = (h_1, \dots, h_m)$. Posons $\mathbf{h} = h \phi$. Puisque $\tilde{s} \mathbf{h} = a_E(\phi) \mathbf{h} \tilde{s}$, on a :

- $h_{i+1} = h_i, i \notin \{a, m\},$
- $h_{a+1} = h_a s_H,$
- $s_H h_1 = a(\phi) h_m$

En posant $h_H = h_1$, on a donc $h = (h_H, \dots, h_H, h_H s_H, \dots, h_H s_H)$ et $s_H h_H = a(\phi) h_H s_H$. Notons \mathcal{J}'_H le sous-groupe de ${}^L H$ engendré par $\hat{T}_H = \hat{H}_{s_H}$, par I_F et par (h_H, ϕ) . C'est une extension scindée de W_F par \hat{H}_{s_H} , et le triplet $(T', \mathcal{J}'_H, s_H)$ est une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée pour (H, ω) . Cette donnée s'envoie sur la classe d'isomorphisme de \mathbf{T}' par l'application du lemme, qui est donc surjective. \square

REMARQUE 1. — Pour prouver que l'application du lemme est bien définie, c'est-à-dire que si l'on part de deux données endoscopiques (elliptiques, non ramifiées, ayant pour groupe sous-jacent un tore) pour (H, ω) qui sont isomorphes, alors les données endoscopiques pour (\tilde{G}, ω_E) que l'on en déduit sont elles aussi isomorphes, on a utilisé le fait que le centre $Z(\hat{H})$ est un tore complexe, et plus précisément que c'est un groupe divisible. Le lemme serait faux si l'on travaillait avec $H = PGL(n)$ au lieu de $H = GL(n)$. ■

Revenons à la situation d'avant le lemme. Du plongement $\hat{\xi}_H : \hat{T}'_H = \hat{H}_{s_H} \rightarrow \hat{T}_H$ se déduit par dualité un morphisme

$$\xi_H : T_H \rightarrow T'_H,$$

qui vérifie

$$\sigma(\xi_H) = \xi_H \circ \text{Int}_{\alpha_{T'_H}(\sigma)}, \quad \sigma \in \Gamma_F,$$

où $\sigma \mapsto \alpha_{T'_H}(\sigma)$ est un cocycle de Γ_F à valeurs dans $W_H = W^H(T_H)$. De même, du plongement $\hat{\xi} : \hat{T}' = \hat{G}_s \rightarrow \hat{T}$ se déduit par dualité un morphisme

$$\xi : T \rightarrow T' \simeq T/(1-\theta)(T),$$

qui vérifie

$$\sigma(\xi) = \xi \circ \text{Int}_{\alpha_{T'}(\sigma)}, \quad \sigma \in \Gamma_F,$$

où $\sigma \mapsto \alpha_{T'}(\sigma) = (\alpha_{T'_H}(\sigma), \dots, \alpha_{T'_H}(\sigma))$ est un cocycle de Γ_F à valeurs dans $W^{\hat{\theta}} = W^{\theta}$, $W = W^G(T)$. Pour $t \in T(\bar{F})$, l'élément $t\theta(t) \dots \theta^{m-1}(t) \in T(\bar{F})$ est de la forme (t_H, \dots, t_H) pour un élément $t_H \in T_H(\bar{F})$. L'application $T \rightarrow T_H$, $t \mapsto t_H$ est un F -morphisme, que l'on note ν . Bien sûr $\nu_F : T(F) = T_H(E) \rightarrow T_H(F)$ n'est autre que la restriction de l'application $N : G(F) \rightarrow G(F)$ à $T(F)$. Le diagramme suivant

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\xi} & T' \\ \nu \downarrow & & \parallel \\ T_H & \xrightarrow{\xi_H} & T'_H \end{array}$$

est commutatif.

La restriction $\xi_Z : Z(G) \rightarrow T'$ de ξ à $Z(G)$ est un morphisme défini sur F , et on pose

$$\tilde{T}' = T' \times_{Z(G)} Z(\tilde{G}, \mathcal{E}).$$

On identifie \tilde{T}' à $T'\theta'$ où θ' est l'image de $\theta \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ dans \tilde{T}' . On pose

$$K' = T'(\mathfrak{o}), \quad \tilde{K}' = K'\theta'.$$

Les données T'_H et T' sont relevantes, et les choix effectués plus haut permettent de définir des facteurs de transfert normalisés

$$\Delta_H : \mathcal{D}(T'_H) \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \Delta : \mathcal{D}(T') \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

D'après [AC, chap. 1, lemma 1.1], pour $\gamma = g\theta \in \tilde{G}(F)$, l'élément $\gamma^m = N(g)$ est conjugué dans $G(F) = H(E)$ à un élément de $H(F)$. La classe de $H(F)$ -conjugaison de cet élément est bien définie, et on la note $\mathcal{N}(\gamma)$. Elle ne dépend que de la classe de $G(F)$ -conjugaison de γ , et pour $\gamma, \bar{\gamma} \in \tilde{G}(F)$, on a $\mathcal{N}(\gamma) = \mathcal{N}(\bar{\gamma})$ si et seulement si $\bar{\gamma} = x^{-1}\gamma x$ pour un $x \in G(F)$. On note $(\tilde{T}'(F) \times \tilde{G}(F))/G(F)$ l'ensemble des orbites dans $\tilde{T}'(F) \times \tilde{G}(F)$ pour l'action de $G(F)$ par conjugaison sur le second facteur, et on définit $(T'_H(F) \times H(F))/H(F)$ de la même manière. Soit

$$\mathcal{N} : (\tilde{T}'(F) \times \tilde{G}(F))/G(F) \rightarrow (T'_H(F) \times H(F))/H(F)$$

l'application définie par $\mathcal{N}(t'\theta', \gamma) = (t', \mathcal{N}(\gamma))$.

Un élément $\gamma \in \tilde{G}(F)$ est semisimple régulier (dans \tilde{G}) si et seulement la classe de $H(F)$ -conjugaison $\mathcal{N}(\gamma)$ est semisimple régulière (dans H), et d'après la commutativité du diagramme (1), l'application \mathcal{N} se restreint en une application injective

$$\mathcal{N}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}(\mathbf{T}')/G(F) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{T}'_H)/H(F).$$

REMARQUE 2. — Pour $(t', h) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}'_H)$, le centralisateur $H_h = H^h$ est un tore maximal de H , elliptique et non ramifié. Par suite $H_h(F) \simeq F'^{\times}$, où F'/F est la sous-extension de degré n de F^{nr}/F , et $\det(h) \in N_{F'/F}(F'^{\times})$. D'après [AC, chap. 1, lemma 1.4], il existe un élément semisimple régulier $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tel que $\mathcal{N}(\gamma) = h$ si et seulement si $\det(h) \in N_{E/F}(E^{\times})$, auquel cas le couple $(t'\theta', \gamma)$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{T}')$. On en déduit que l'application $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ est surjective si et seulement si m divise n . ■

Pour comparer les facteurs de transferts Δ_H et Δ , on ne peut pas utiliser brutalement l'application $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}$, car ceux-ci ne sont pas invariants par conjugaison en leur deuxième variable : ils se transforment selon les caractères ω et ω_E . Il convient donc de reprendre la construction de 2.3. Rappelons que l'on a posé $K_E = K_{\mathcal{E}}$. On pose aussi $\mathcal{K}_E = \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$; on a donc $K_E = \mathcal{K}_E(\mathfrak{o})$. Alors il existe un $k \in \mathcal{K}_E(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$, invariant par θ , de sorte que le tore $T_0 = k^{-1}Tk$ soit défini sur F (et déployé sur F^{nr}) et le morphisme composé

$$\xi_0 : T_0 \xrightarrow{\text{Int}_k} T \xrightarrow{\xi} T'$$

soit équivariant pour les actions galoisiennes. Cela entraîne que pour $t_0 \in T_0(F)$ régulier (dans G), les éléments $\gamma_0 = t_0\theta \in \tilde{G}(F)$ et $\delta_0\xi_0(t_0)\theta' \in \tilde{T}'(F)$ se correspondent. De plus on a l'égalité

$$\xi_0(T_0(\mathfrak{o})) = T'(\mathfrak{o}).$$

D'autre part, on a l'inclusion $T_0(\mathfrak{o}) \subset K_E$. Enfin, pour $t_0 \in T_0(F)$ régulier, d'après le lemme de 2.5, on a l'égalité

$$\Delta(\xi_0(t_0)\theta', t_0\theta) = \Delta_{\text{II}}(\xi_0(t_0)\theta', t_0\theta).$$

On peut faire la même construction pour $H = GL(n)$. On pose $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{E}_H}$. Alors il existe $k_H \in \mathcal{K}_H(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$ tel que le tore $T_{0,H} = k_H^{-1}T_H k_H$ et le morphisme $\xi_{0,H} : T_{0,H} \rightarrow T'_H = T'$ soient définis sur F . Ce tore $T_{0,H}$ n'est pas mystérieux. On a $T'_H(F) = F'^{\times}$ où F'/F est la sous-extension de F^{nr}/F de degré n . On fixe une base de \mathfrak{o}' (l'anneau des entiers de F') sur \mathfrak{o} . À l'aide cette base, on identifie $H(F) = GL(n, F)$ à $\text{Aut}_F(F')$ et K_H au sous-groupe de $\text{Aut}_F(F')$ qui conserve le réseau \mathfrak{o}' . Le groupe F'^{\times} agit par multiplication sur F' , donc s'identifie à un sous-groupe de $\text{Aut}_F(F')$, et l'on peut prendre pour $T_{0,H}(F)$ ce sous-groupe. Puisque $\mathcal{E} = \mathcal{E}_H \times \cdots \times \mathcal{E}_H$, on a $\mathcal{K}_E = \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}$ et l'on peut prendre $k = (k_H, \dots, k_H)$. Alors on a $T_0 = T_{0,H}^{\times m}$. Ces choix étant faits, on veut prouver l'égalité

$$(2) \quad \mathbf{1}_{\tilde{K}'_E}(\delta) = d(\theta^*)^{1/2} \Delta(\delta, \gamma) I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega_E, \mathbf{1}_{\tilde{K}_E})$$

pour tout couple $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}')$. D'après le lemme de 2.3, si $\delta \notin \tilde{K}'$, alors l'égalité (2) est trivialement vraie. Il nous suffit donc de considérer le cas où $\delta = t'\theta'$ avec $t' \in T'(\mathfrak{o})$. On choisit un élément $t_0 \in T_0(\mathfrak{o})$ tel que $\xi_0(t_0) = t'$. Puisque, dans notre espace $\tilde{G}(F)$, les classes de conjugaison stable coïncident avec les classes de conjugaison ordinaire, on peut supposer dans (2) que $\gamma = t_0\theta$. Alors d'après le lemme de 2.5, le facteur de transfert Δ dans (2) se réduit à Δ_{II} . On applique la construction de Kottwitz rappelée en 4.2. Le point est que le groupe $T_0(\mathfrak{o}_L)$ vérifie les mêmes conditions (a), (b), (c) que le groupe K_L (ces conditions

résultent du théorème de Lang, qui s'applique à tout groupe connexe). L'élément c que l'on introduit peut être choisi dans $T_0(\mathfrak{o}_L)$. Il commute donc à t_0 et à $N(t_0)$ et obtient simplement

$$h = N(t_0) \leftrightarrow t_0 \theta.$$

Cet élément h appartient à $T_{0,H}(F)$ et relève notre élément de départ t' , c'est-à-dire que l'on a $\xi_{0,H}(h) = t'$. Puisque $(t', h) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}'_H)$, d'après [Ka], on a

$$(3) \quad 1 = \mathbf{1}_{K'}(t') = \Delta_H(t', h) I^H(h, \omega, \mathbf{1}_K).$$

Parce que h appartient à $T_{0,H}(\mathfrak{o})$, d'après le lemme de 2.5, le facteur de transfert Δ_H dans (3) se réduit à $\Delta_{\Pi,H}$. Pour prouver (2), il suffit donc de prouver l'égalité

$$d(\theta^*)^{1/2} \Delta_{\Pi}(t'\theta', t_0\theta) I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega_E, \mathbf{1}_{\tilde{K}_E}) = \Delta_{\Pi,H}(t', h) I^H(h, \omega, \mathbf{1}_K).$$

D'après l'égalité (6) de 4.2, il reste seulement à prouver l'égalité

$$\Delta_{\Pi}(\delta, \gamma) = \Delta_{\Pi,H}(t', h).$$

Celle-ci est encore une fois presque tautologique.

Cela achève la preuve du théorème de 2.2.

REMARQUE 3. — On indique brièvement une autre méthode, qui permet de faire l'économie du numéro 4.2. Notons F'/F la sous-extension de degré n de F^{nr}/F . On a donc $T'_H(F) \simeq F'^{\times}$. On introduit le groupe algébrique H_0 défini sur F tel que le groupe $H_0(F)$ de ses points F -rationnels est égal au sous-groupe de $F'^{\times} \times GL(n, F)$ formé des (x, h) tels que $N_{F'/F}(x) = \det(h)$. On considère le couple (G_0, \tilde{G}_0) obtenu à partir de $H_0 \times_F E$ par restriction des scalaires de E à F . En particulier, on a $G_0(F) = H_0(E)$. On peut montrer que le lemme fondamental — toujours pour les unités — pour (\tilde{G}, ω) et la donnée endoscopique \mathbf{T}' est équivalent au lemme fondamental pour \tilde{G}_0 (sans caractère) et une donnée endoscopique \mathbf{T}'_0 construite à partir de \mathbf{T}' . Il suffirait alors d'appliquer la proposition 1 de [Ko, p. 245], plus un calcul de facteurs de transfert. Notons que puisque le centre $Z(G_0)$ est connexe, on peut aussi, grâce à la proposition de 2.12, déduire directement le lemme fondamental pour $(\tilde{G}_{\text{AD}}, \omega)$ qui nous intéresse du lemme fondamental pour \tilde{G}_0 (sans caractère). ■

Références

- [AC] ARTHUR J., CLOZEL L., *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies **120**, Princeton University Press, Princeton, 1986.
- [H] HALES T., *On the fundamental lemma for standard endoscopy : reduction to unit elements*, Canad. J. Math. **47** (1995), 974–994.
- [Ka] KAZHDAN D., *On lifting*, in *Lie group representations II*, R. Herb, S. Kudla, R. Lipsman, J. Rosenberg ed., Springer Lecture Notes 1041 (1984), 209–249
- [Ko] KOTTWITZ R., *Base change for unit elements of Hecke algebras*, Compositio Math. **60** (1986), 237–250.
- [KS] KOTTWITZ R., SHELSTAD D., *Foundation of twisted endoscopy*, Astérisque **255** (1999).
- [L] LANGLANDS, R., *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Canad. J. Math. **31** (1979), 700–725.
- [LMW] LEMAIRE B, MÈGLIN C., WALDSPURGER J.-L., *Le lemme fondamental pour l'endoscopie tordue : réduction aux éléments unités*, prépublication arXiv :1506.03383.

[MW] MœGLIN C., WALDSPURGER J.-L., *Stabilisation de la formule des traces tordue*, prépublication.

BERTRAND LEMAIRE, Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 39 rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille, France • *E-mail* : Bertrand.Lemaire@univ-amu.fr

JEAN-LOUP WALDSPURGER, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, 2 place Jussieu 75005 Paris • *E-mail* : jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr