Sur les données endoscopiques dans le cas de l'endoscopie tordue

J.-L. Waldspurger

24 février 2022

Abstract. We give a simple combinatorial description of the elliptic endoscopic data of a twisted space under a group G, assuming that G is semi-simple and simply connected. Assuming the same hypothesis and that the base field is a number field, we prove that, if two elliptic endoscopic data are equivalent almost everywhere, then they are equivalent.

Introduction

Considérons un corps de nombres k et un groupe réductif connexe G défini sur k. Notons $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k et considérons de plus un caractère continu χ de $G(\mathbb{A})$ trivial sur $G(k)$. On sait définir la notion de donnée endoscopique pour (G, χ). Pour toute place v de k, des objets précédents se déduisent des objets définis sur le complété k_v. Considérons deux données endoscopiques sur k et supposons que, pour presque toute place v, les données sur v qui s'en déduisent sont équivalentes. B. Lemaire et l'auteur ont prouvé en [5], proposition 1, que les deux données étaient alors globalement équivalentes.

On considère ici le cas de l'endoscopie tordue, c'est-à-dire que l'on se donne de plus un espace tordu $\tilde{G}$ sous G, défini sur k (cf. [6] I.1.1 pour une définition précise). Il y a encore une notion de donnée endoscopique. Le résultat de [5] ne s'étend pas à ce cas. Nous donnerons un contre-exemple dans le paragraphe 15. Nous prouverons toutefois qu'il reste valide si l'on impose les hypothèses suivantes :

- les données endoscopiques sont "s-unitaires", cf. paragraphe 5 ;

- le groupe G est semi-simple et simplement connexe (cf. paragraphe 13)ou semi-simple et absolument presque simple (cf. paragraphe 14).

Les données elliptiques sont s-unitaires. En fait, le résultat est certainement vrai sans cette hypothèse d'unitarité mais il nous a paru inutile de la lever.

L'intérêt de ce résultat est médiocre. Sa démonstration nous semble plus intéressante (accès d'optimisme ?). Considérons le cas où G est semi-simple et simplement connexe. Dans la proposition 2 de [5], où nous considérions le cas non tordu et où l'on supposait de plus G absolument presque simple, nous avons donné une description facile des classes d'équivalence des données endoscopiques elliptiques. Elle reposait sur une construction assez magique de Langlands, cf. [4] pages 708-709, et celui-ci ne considère que le cas non tordu. Nous étendons ici cette description au cas tordu. Expliquons-la. En fait, tout notre article se passe dans le groupe dual $\hat{G}$. Le corps k n'intervient que par une action continue du groupe de Galois absolu Γ_k sur $\hat{G}$ par automorphismes algébriques. On a supposé ci-dessus que k était un corps de nombres mais la description qui suit vaut aussi si k est un corps local de caractéristique nulle. Puisque G est simplement connexe, $\hat{G}$ est adjoint. De l'espace tordu $\tilde{G}$ se déduit un automorphisme θ de $\hat{G}$, qui commute à l'action galoisienne. Notons e l'ordre de θ et Θ le groupe d'automorphismes engendré par θ. Notons $I(\hat{G})$ l'ensemble des composantes simples de $\hat{G}$. Le groupe $\Theta\times\Gamma_k$ agit sur $I(\hat{G})$, notons $i(\hat{G},\theta\times\Gamma_k)$ le nombre d'orbites.

Introduisons deux corps locaux F et E de caractéristique nulle, de caractéristique résiduelle $p>e$, tels que E soit une extension galoisienne cyclique totalement ramifiée de F de degré e. Introduisons un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini et quasi-déployé sur F vérifiant les hypothèses suivantes :

$\mathbf{G}$ a mêmes données de racines que $\hat{G}$ (en oubliant les actions galoisiennes) ; cela entraîne que θ se transfère en un automorphisme algébrique encore noté θ de $\mathbf{G}$;

$\mathbf{G}$ est déployé sur E et il existe un générateur du groupe de Galois $\Gamma_{E/F}$ dont l'action $\mathbf{G}$ induise une action sur les données de racines coïncidant avec θ.

L'action de Γ_k sur $\hat{G}$ se transfère en une action de Γ_k sur $\mathbf{G}$ par automorphismes algébriques. On note $\sigma\mapsto\sigma_G$ cette action. Introduisons les immeubles de Bruhat-Tits $Imm_E(\mathbf{G})$ et $Imm_F(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$ sur E et F. Des actions de θ et Γ_k sur $\mathbf{G}$ se déduisent des actions sur l'immeuble $Imm_E(\mathbf{G})$. L'immeuble $Imm_F(\mathbf{G})$ s'identifie au sous-ensemble de points fixes $Imm_E(\mathbf{G})^\theta$. On peut fixer un appartement $App_E\subset Imm_E(\mathbf{G})$ et une alcôve $C\subset App_E$ qui soient conservés par θ et par l'action de Γ_k. L'ensemble $\mathbf{A}^{nr}=App_E^\theta$ est un appartement de $Imm_F(\mathbf{G})$ et l'ensemble $C^{nr}=C^\theta$ est une alcôve de cet appartement. On sait bien qu'il y a un ensemble fini de "racines" Δ_a^{nr} et, pour toute $\beta\in\Delta_a^{nr}$, une racine affine β^{aff} sur $\mathbf{A}^{nr}$ de sorte que

C^{nr} soit l'ensemble des $x\in\mathbf{A}^{nr}$ tels que $\beta^{aff}(x)>0$ pour toute $\beta\in\Delta_a^{nr}$;

pour tout $\beta\in\Delta_a^{nr}$, l'hyperplan annulateur de β^{aff} soit un mur de l'adhérence $\bar{C}^{nr}$ de C^{nr}.

Bruhat et Tits définissent le groupe de Weyl affine étendu W^{aff}. Il agit sur $\mathbf{A}^{nr}$. On note Ω^{nr} le sous-groupe des $v\in W^{aff}$ dont l'action conserve C^{nr}. C'est un groupe abélien fini. L'action $\sigma\mapsto\sigma_G$ de Γ_k conserve C^{nr}. Notons $\underline{Endo}$ l'ensemble des couples $(\omega_\star,x)$ tels que

$\omega_\star:\Gamma_k\to\Omega^{nr}$ est une application continue et l'application $\sigma\mapsto\sigma_\star:=\omega_\star(\sigma)\circ\sigma_G$ est un homomorphisme (à valeurs dans le groupe d'automorphismes de $\mathbf{A}^{nr}$) ;

x est un élément de $\bar{C}^{nr}$ fixé par $\sigma_\star$ pour tout $\sigma\in\Gamma_k$.

Pour $(\omega_\star,x)\in\underline{Endo}$, notons $S(x)$ l'ensemble des $\beta\in\Delta_a^{nr}$ tels que $\beta^{aff}(x)=0$. C'est un sous-ensemble propre de Δ_a^{nr}. De l'action $\sigma\mapsto\sigma_\star$, qui conserve C^{nr}, se déduit une action sur Δ_a^{nr}, notée de la même façon. Cette action conserve $S(x)$, donc aussi $\Delta_a^{nr}-S(x)$. On vérifie facilement que le nombre d'orbites de l'action de Γ_k sur $\Delta_{nr}^a-S(x)$ est minoré par $i(\hat{G},\theta\times\Gamma_k)$. Disons que $(\omega_\star,x)$ est elliptique si ce nombre d'orbites est égal à $i(\hat{G},\theta\times\Gamma_k)$.

Deux éléments $(\omega_{\star,1},x_1)$ et $(\omega_{\star,2},x_2)$ de $\underline{Endo}$ sont dits équivalents si et seulement s'il existe $\omega\in\Omega^{nr}$ tel que $\omega(x_1)=x_2$ et $\omega\sigma_{\star,1}\omega^{-1}=\sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma\in\Gamma_k$. On note $Endo$ l'ensemble des classes d'équivalences et $Endo_{ell}$ le sous-ensemble des classes elliptiques.

Notre résultat est qu'il y a une bijection "naturelle" entre l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques s-unitaires et l'ensemble $Endo$ et que cette bijection se restreint en une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques et l'ensemble $Endo_{ell}$. C'est le théorème du paragraphe 12. Cela fournit une description combinatoire simple des données endoscopiques s-unitaires ou elliptiques.

1 Notations

On note $\mathbb{N}_{>0}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note $\mu_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = 1$. On note $\mu(\mathbb{C})$ la réunion des $\mu_n(\mathbb{C})$ quand n décrit $\mathbb{N}_{>0}$. On note U^1 le groupe des nombres complexes de module 1.

Soit X un ensemble sur lequel agit un groupe G. On note X^G l'ensemble des points fixes pour cette action. Si G est engendré par un unique élément θ, on note aussi $X^\theta = X^G$. Pour $x \in X$, on note $Z_G(x)$ le fixateur de x dans G. Pour tout sous-ensemble $Y \subset X$, on note $Norm_G(Y)$ le sous-groupe des éléments de G qui conservent Y.

Pour tout groupe algébrique G défini sur un corps k de caractéristique nulle, on note G^0 sa composante neutre et $Z(G)$ son centre. Pour un tore T défini sur k, on note $X^*(T)$, resp. $X_*(T)$ le groupe des caractères, resp. cocaractères, de T définis sur une clôture algébrique de k.

Soit k un corps qui est soit un corps local de caractéristique nulle, soit un corps de nombres. On en fixe une clôture algébrique $\bar{k}$, on note Γ_k le groupe de Galois de $\bar{k}/k$ et W_k le groupe de Weil de k. Si k' est une extension galoisienne de k, que l'on suppose toujours contenue dans $\bar{k}$, on note $\Gamma_{k'/k}$ le groupe de Galois de k'/k. Si k est un corps de nombres, on note V_k son ensemble de places. Pour toute place $v \in V_k$, on note k_v le complété de k en v et on identifie Γ_{k_v} à un sous-groupe de décomposition de Γ_k. On a un homomorphisme naturel $W_{k_v} \to W_k$.

On fixe pour tout l'article un corps k qui est soit un corps local de caractéristique nulle, soit un corps de nombres.

2 Données endoscopiques

On rappelle ici la notion de donnée endoscopique dans le cas tordu, cf. [6] I.1.5 pour plus de détails. Soit G un groupe réductif connexe défini sur k et $\tilde{G}$ un espace tordu sous G, lui aussi défini sur k. On note $\hat{G}$ le dual de Langlands de G. Soit $\mathbf{a}$ un élément de $H^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est local, de $H^1(W_k, Z(\hat{G}))/ker^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est un corps de nombres, où $ker^1(W_k, Z(\hat{G}))$ est le noyau de l'homomorphisme

$$H^1(W_k, Z(\hat{G})) \to \prod_{v \in V_k} H^1(W_{k_v}, Z(\hat{G})).$$

L'espace tordu $\tilde{G}$ détermine un automorphisme θ_Z de $Z(G)$ et on suppose que celui-ci est d'ordre fini. Ces données étant fixées, on sait définir la notion de donnée endoscopique du triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Le groupe $\hat{G}$ est muni d'une action de Γ_k, que l'on note $\sigma \mapsto \sigma_G$, et il existe par définition une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\hat{G}$ qui est conservée par cette action. On fixe une telle paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$. La donnée de $\tilde{G}$ détermine un automorphisme θ de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$ et commute à l'action galoisienne. L'ensemble $\hat{G}\theta$ est un espace tordu sous $\hat{G}$. Introduisons le L-groupe ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_k$. Alors l'ensemble ${}^LG\theta$ est aussi un espace tordu sous ${}^LG$.

Considérons un élément semi-simple $\tilde{s} \in \hat{G}\theta$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. Considérons un sous-groupe $\mathcal{G}' \subset {}^LG$. On suppose $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$. On a donc une suite

$$(1) \qquad 1 \to \hat{G}' \to \mathcal{G}' \to W_k \to 1.$$

On suppose que cette suite est exacte et scindée, c'est-à-dire que la projection $\mathcal{G}' \to W_k$ admet une section qui soit un homomorphisme continu. On suppose qu'il existe un cocycle $a : W_k \to Z(\hat{G})$ dont la classe soit $\mathbf{a}$ dans $H^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est local ou dans $H^1(W_k, Z(\hat{G}))/ker^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est un corps de nombres, de sorte que, pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$, on ait l'égalité

$$\tilde{s}(g, w) = (a(w)g, w)\tilde{s}$$

dans ${}^L G\theta$. De la suite (1) se déduit une L-action de Γ_k dans $\hat{G}'$ que l'on note $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. Soit G' un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur k de sorte que $\hat{G}'$ muni de cette action galoisienne soit un groupe dual de G'. A ces conditions, le triplet $(G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ est appelé donnée endoscopique de $(G', \mathcal{G}', \mathbf{a})$. La donnée est dite elliptique si $Z(\hat{G}')^{\Gamma_k,0} = Z(\hat{G})^{\theta,\Gamma_k,0}$. Deux données endoscopiques $(G'_1, \mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(G'_2, \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont dites équivalentes s'il existe un élément $x \in \hat{G}$ tel que $x\tilde{s}_1x^{-1} \in \tilde{s}_2 Z(\hat{G})$ et $x\mathcal{G}'_1x^{-1} = \mathcal{G}'_2$.

3 Transformation de la définition

Considérons un groupe réductif connexe $\hat{G}$ défini sur $\mathbb{C}$, muni d'une action continue de Γ_k par automorphismes algébriques (continue signifiant qu'elle se quotiente par une action d'un groupe fini $\Gamma_{k'/k}$). On suppose qu'il existe une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$ qui est conservée par cette action. On fixe une telle paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$. On pose encore ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_k$. Considérons un automorphisme algébrique θ de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$, est d'ordre fini et commute à l'action galoisienne. On a de nouveau des espaces tordus $\hat{G}\theta$ sous $\hat{G}$ et ${}^L G\theta$ sous ${}^L G$. Soit $\tilde{s}$ un élément semi-simple de $\hat{G}\theta$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. Considérons un sous-groupe $\mathcal{G}' \subset {}^L G$. On suppose $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$. On a donc une suite

$$(1) \qquad 1 \to \hat{G}' \to \mathcal{G}' \to W_k \to 1.$$

On suppose que cette suite est exacte et scindée, au même sens que dans le paragraphe précédent. On suppose que

(2) pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$, il existe $z \in Z(\hat{G})$ de sorte que $\tilde{s}(g, w) = (zg, w)\tilde{s}$.

A ces conditions, appelons le couple $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique de $({}^L G, \theta)$. Les notions d'ellipticité d'une pré-donnée ou d'équivalence de deux pré-données se définissent comme dans le paragraphe précédent.

Dans la situation de ce paragraphe précédent, une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ définit une pré-donnée de $({}^L G, \theta)$. Inversement, soit $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée. A isomorphisme près, il existe un unique groupe réductif connexe G' défini et quasi-déployé sur k de sorte que $\hat{G}'$ en soit le groupe dual. Il existe alors une unique classe $\mathbf{a}$ de sorte que le triplet $(G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ soit une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Ces correspondances conservent la notion d'équivalence. Autrement dit, l'ensemble des pré-données endoscopiques de $({}^L G, \theta)$ s'identifie à la réunion sur les classes $\mathbf{a}$ des ensembles de données endoscopiques de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$.

Remarquons que la notion de pré-donnée ne concerne que des objets définis sur $\mathbb{C}$. Le corps k n'y intervient que via une action continue de Γ_k.

4 Rappels concernant les pré-données endoscopiques

On se place dans la situation du paragraphe précédent. On note $w \mapsto w_G$ l'action de W_k sur $\hat{G}$ qui étend l'action galoisienne.

On note Σ l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$. Pour $\alpha \in \Sigma$, on note α_{res} la restriction de α à $\hat{T}^{\theta,0}$. On pose $\Sigma_{res} = \{\alpha_{res}; \alpha \in \Sigma\}$. C'est un système de racines en général non réduit. On note $\Sigma_{res,ind}$ le sous-ensemble des racines indivisibles, qui est encore un système de racines. L'automorphisme θ agit sur Σ et Σ_{res} est en bijection avec l'ensemble des orbites pour cette action. Notons $\Delta_{res}=\{\alpha_{res};\alpha\in\Delta\}$. Cet ensemble est une base de $\Sigma_{res,ind}$. Pour $\alpha\in\Sigma$, on note $e(\alpha)$ le plus petit $n\in\mathbb{N}_{>0}$ tel que $\theta^n(\alpha)=\alpha$. Pour $\beta\in\Sigma_{res}$ et pour une racine $\alpha\in\Sigma$ telle que $\beta=\alpha_{res}$, l'entier $e(\alpha)$ ne dépend que de β, on le note aussi $e(\beta)$.

Notons W le groupe de Weyl de $\hat{G}$ relativement à $\hat{T}$. L'automorphisme θ agit sur W. Le groupe W^θ est le groupe de Weyl du système de racines $\Sigma_{res,ind}$. Plus précisément, W^θ s'identifie au groupe de Weyl du groupe $\hat{G}^{\theta,0}$ relativement au sous-tore maximal $\hat{T}^{\theta,0}$. Le système de racines de $\hat{G}^{\theta,0}$ est $\Sigma_{res,ind}$, cf. [3] 1.3.

Soit $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique. A équivalence près, on peut supposer $\tilde{s}=s\theta$, avec $s\in\hat{T}^{\theta,0}$. Supposons cette condition vérifiée. On a noté $\hat{G}'=Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. Le tore $\hat{T}^{\theta,0}$ en est un sous-tore maximal. Notons $W^{\hat{G}'}$ le groupe de Weyl de $\hat{G}'$ relatif à ce tore. Alors $W^{\hat{G}'}\subset W^\theta$. Notons $\Sigma(\hat{G}')$ l'ensemble de racines de $\hat{T}^{\theta,0}$ dans $\hat{G}'$. D'après [3] 1.3, $\Sigma(\hat{G}')$ est le sous-ensemble des racines $\beta\in\Sigma_{res}$ vérifiant l'égalité

$\beta(s)^{e(\beta)}=1$ si β est indivisible ;

$\beta(s)^{e(\beta)}=-1$ si β est divisible.

Le couple $(\hat{B}\cap\hat{G}',\hat{T}^{\theta,0})$ est une paire de Borel de $\hat{G}'$. Complétons-la en une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}'$. Le groupe $\mathcal{G}'$ normalise $\hat{G}'$. Pour tout $w\in W_k$, on peut donc fixer $(g(w),w)\in\mathcal{G}'$ tel que la restriction à $\hat{G}'$ de l'automorphisme $ad_{g(w)}\circ w_G$ conserve $\hat{\mathcal{E}}'$. On note $w\mapsto w_{G'}$ l'action de W_k sur $\hat{G}'$, $w\in W_k$ agissant par la restriction de l'automorphisme précédent. Puisque $ad_{g(w)}\circ w_G$ conserve $\hat{\mathcal{E}}'$ et que w_G conserve $\hat{T}^{\theta,0}$, la conjugaison par $g(w)$ conserve $\hat{T}^{\theta,0}$, donc aussi son commutant $\hat{T}$. Donc $g(w)$ appartient à $Norm_{\hat{G}}(\hat{T})$. Notons $u(w)$ son image dans W. Son action sur $\hat{T}$ conserve $\hat{T}^{\theta,0}$ et cela implique que $u(w)$ appartient à W^θ. D'après ce que l'on a dit ci-dessus, on peut fixer un élément $n(w)\in Norm_{\hat{G}^{\theta,0}}(\hat{T}^{\theta,0})$ dont l'image dans W^θ soit $u(w)$. Il existe alors $t(w)\in\hat{T}$ tel que $g(w)=t(w)n(w)$. On a l'égalité $\mathcal{G}'=\{ht(w)n(w),w);w\in W_k,h\in\hat{G}'\}$. La condition 3(2) équivaut à

(1) pour tout $w\in W_k$, il existe $z\in Z(\hat{G})$ de sorte que $w_{G'}(s)=zs\theta(t(w))t(w)^{-1}$.

L'existence d'une section continue de la projection $\mathcal{G}'\mapsto W_k$ entraîne que les applications $w\mapsto n(w),w_{G'}$ peuvent être choisies telles qu'elles se quotientent par un quotient fini de W_k, puis s'étendent en des applications définies sur Γ_k. On notera celles-ci $\sigma\mapsto n(\sigma),\sigma_{G'}$.

Introduisons quelques notations. On note $1-\theta$ l'homomorphisme $t\mapsto t\theta(t)^{-1}$ de $\hat{T}$ dans lui-même. On note $\hat{G}_{AD}$ le groupe adjoint de $\hat{G}$. Pour un élément $g\in\hat{G}$, resp. un sous-groupe $\hat{H}$ de $\hat{G}$, on note g_{ad}, resp.$\hat{H}_{ad}$, son image dans $\hat{G}_{AD}$. Signalons que les groupes $\hat{T}^\theta_{ad}$ et $\hat{G}^\theta_{AD}$ sont connexes.

5 Les pré-données endoscopiques elliptiques sont d'ordre fini

On dit qu'une pré-donnée endoscopique est s-unitaire si elle est équivalente à une donnée $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ telle que $\tilde{s}=s\theta$, où s est un élément de $\hat{T}^{\theta,0}$ tel que $\beta(s)\in U^1$ pour tout $\beta\in\Sigma_{res}$ (rappelons que U^1 est le groupe des nombres complexes de module 1). On dit qu'une pré-donnée endoscopique est d'ordre fini si elle équivalente à une donnée $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ telle que $\tilde{s}=s\theta$, où s est un élément de $\hat{T}^{\theta,0}$ dont l'image dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ est d'ordre fini. Une pré-donnée d'ordre fini est s-unitaire.

Remarque. On vérifie aisément qu'une pré-donnée endoscopique est s-unitaire, resp. d'ordre fini, si et seulement si, pour toute pré-donnée $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ qui lui est équivalente, telle que $\tilde{s}=s\theta$, avec $s\in\hat{T}^{\theta,0}$, s vérifie la condition requise ci-dessus : $\beta(s)\in U^1$ pour toute $\beta\in\Sigma_{res}$, resp. l'image de s dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ est d'ordre fini.

Lemme. *Toute pré-donnée endoscopique elliptique est d'ordre fini, a fortiori s-unitaire.*

Preuve. Nous adaptons au cas tordu la preuve de Langlands, cf. [4] p. 705. On considère une pré-donnée $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ avec $\tilde{s}=s\theta$, où $s\in\hat{T}^{\theta,0}$. Supposons que l'image de s dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ n'est pas d'ordre fini. On va prouver que la pré-donnée n'est pas elliptique. On utilise les définitions et notations du paragraphe 4. Notons Φ l'ensemble des $\beta\in\Sigma_{res,ind}$ tels que $\beta(s)\in\mu(\mathbb{C})$. D'après la description donnée au paragraphe 4 de l'ensemble $\Sigma(\hat{G}')$, tout élément de cet ensemble est multiple d'un élément de Φ. L'hypothèse que l'image de s dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ n'est pas d'ordre fini signifie que Φ n'est pas égal à $\Sigma_{res,ind}$ tout entier. Notons $\pi:\Sigma_{res,ind}\to\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$ l'application qui, à $\beta\in\Sigma_{res,ind}$ associe l'image de $\beta(s)$ dans $\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$. Notons A le groupe engendré par l'image de π. Alors A est un sous-groupe de type fini de $\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$, non réduit à l'élément neutre. Puisque $\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$ est sans torsion, A est un groupe abélien libre et on peut en fixer une base $\{a_1,...,a_n\}$. On a $n\geq 1$. Notons A^M le sous-groupe de A engendré par $\{a_1,...,a_{n-1}\}$ et A^P le sous-ensemble de A formé des éléments dont la n-ième coordonnée dans la base $\{a_1,...,a_n\}$. est positive ou nulle. Notons $\Sigma^M_{res,ind}$, resp. $\Sigma^P_{res,ind}$, l'ensemble des $\beta\in\Sigma_{res,ind}$ telles que $\pi(\beta)\in A^M$, resp. $\pi(\beta)\in A^P$. L'ensemble $\Sigma^P_{res,ind}$ est un sous-ensemble parabolique propre de $\Sigma_{res,ind}$ et $\Sigma^M_{res,ind}$ en est le sous-ensemble de Levi. L'ensemble Φ est inclus dans $\Sigma^M_{res,ind}$. Notons $Z^M_*\subset X_*(\hat{T}^{\theta,0})$ l'annulateur de $\Sigma^M_{res,ind}$, c'est-à-dire l'ensemble des $x_*\in X_*(\hat{T}^{\theta,0})$ tels que $\beta(x_*)=0$ pour tout $\beta\in\Sigma^M_{res,ind}$. Puisque tout élément de $\Sigma(\hat{G}')$ est multiple d'un élément de Φ, lequel est contenu dans $\Sigma^M_{res,ind}$, Z^M_* est contenu dans $X_*(Z(\hat{G}')^0)$.

L'action galoisienne $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ de W_k sur $\hat{T}^{\theta,0}$ conserve $\Sigma_{res,ind}$. Montrons que

(1) cette action conserve $\Sigma^M_{res,ind}$ et $\Sigma^P_{res,ind}$.

Soit $\sigma\in\Gamma_k$. Il suffit de prouver que $\pi\circ\sigma_{G'}^{-1}=\pi$. Posons $s'=\sigma_{G'}(s)$. Pour $\beta\in\Sigma_{res,ind}$, on a $\sigma_{G'}^{-1}(\beta)(s)=\beta(s')$. En vertu de la définition de π, il suffit de prouver que $\beta(s')\in\mu(\mathbb{C})\beta(s)$ pour tout $\beta\in\Sigma_{res,ind}$. La relation 4(1) entraîne que s'_{ad} appartient à $(1-\theta)(\hat{T}_{ad})s_{ad}$. Puisque s_{ad} et s'_{ad} appartiennent tous deux à $\hat{T}^\theta_{ad}$, on a même $s'_{ad}\in s_{ad}\Big((1-\theta)(\hat{T}_{ad})\cap\hat{T}^\theta_{ad}\Big)$. Mais ce groupe $(1-\theta)(\hat{T}_{ad})\cap\hat{T}^\theta_{ad}$ est fini. Il en résulte que, pour tout $\beta\in\Sigma_{res,ind}$, le quotient $\beta(s')\beta(s)^{-1}$ est une racine de l'unité. C'est la propriété voulue qui démontre (1).

A toute racine $\beta\in\Sigma_{res,ind}$ est associée une coracine $\check{\beta}\in X_*(\hat{T}^{\theta,0})$. Notons $\check{\delta}$ la somme des coracines associées aux éléments $\beta\in\Sigma^P_{res,ind}-\Sigma^M_{res,ind}$. C'est un élément de Z^M_* qui n'appartient pas à $X_*(Z(\hat{G})^0)$. La propriété (1) entraîne que $\check{\delta}$ est fixé par l'action $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$. Puisque $Z^M_*\subset X_*(Z(\hat{G}')^0)$, on obtient que $\check{\delta}$ est un élément de $X_*(Z(\hat{G}')^{\Gamma_k,0})$ qui n'appartient pas à $X_*(Z(\hat{G})^{\theta,\Gamma_k,0})$. Donc la pré-donnée $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ n'est pas elliptique. Cela achève la preuve. $\square$

6 Constructions immobilières

Pour ce paragraphe et les suivants jusqu'en 13, on suppose que $\hat{G}$ est adjoint.

Notons e l'ordre de θ. Fixons un nombre premier $p > e$ et une puissance q de p telle que $q \equiv 1 \, mod \, e\mathbb{Z}$. Fixons un corps local F non-archimédien de caractéristique nulle dont le corps résiduel est $\mathbb{F}_q$. On peut fixer une extension galoisienne totalement ramifiée E/F de sorte que $\Gamma_{E/F} \simeq \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. On fixe un générateur $\gamma \in \Gamma_{E/F}$. Il existe à isomorphisme près un unique groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini et quasi-déployé sur F de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées. Fixons une paire de Borel épinglée $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathbf{B}, \mathbf{T}, (\mathbf{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\mathbf{G}$ conservée par l'action galoisienne. Alors il existe des isomorphismes en dualité $X_*(\hat{T}) \simeq X_*(\mathbf{T})$ et $X^*(\hat{T}) \simeq X^*(\mathbf{T})$ qui font se correspondre les coracines, resp. racines, de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$, ainsi que les coracines, resp. racines, simples relativement à $\hat{B}$, resp. $\mathbf{B}$ (c'est pourquoi nous avons noté par anticipation Δ l'ensemble commun de racines simples). Par ces isomorphismes, l'action de θ sur Δ correspond à l'action de $\gamma \in \Gamma_{E/F}$. On notera encore θ l'action algébrique sur $\mathbf{T}$ déduite de l'action de γ, ou encore transportée par les isomorphismes précédents de l'action de θ sur $\hat{T}$. Le groupe $\mathbf{G}$ est adjoint et de même type que $\hat{G}$. On note encore Σ l'ensemble commun de racines de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$ ou de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$. De l'action du groupe Γ_k sur $\hat{G}$ se déduit une action sur Σ qui préserve Δ. Elle se transporte donc en une action de Γ_k sur $\mathbf{G}$ par automorphismes algébriques qui conservent $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et commutent à l'action de γ. On note $\sigma \mapsto \sigma_G$ cette action.

Introduisons les immeubles de Bruhat-Tits $Imm_E(\mathbf{G})$ et $Imm_F(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$ sur E et F. Au tore $\mathbf{T}$ est associé un appartement $App_E(\mathbf{T})$ dans $Imm_E(\mathbf{G})$. A la paire de Borel épinglée $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est associée une alcôve $C \subset App_E(\mathbf{T})$.

Supposons un instant que $\mathbf{G}$ est simple (sur E). Notons α_0 l'opposée de la racine de plus grande longueur de Σ (relativement à la base Δ) et posons $\Delta_a = \Delta \cup \{\alpha_0\}$. Notons $\bar{C}$ l'adhérence de C. Alors Δ_a s'identifie à l'ensemble des sommets du simplexe $\bar{C}$. On note $\alpha \mapsto s_\alpha$ cette bijection. L'appartement $App_E(\mathbf{T})$ s'identifie à $X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, le sommet s_{α_0} s'identifiant à 0. Revenons au cas général où $\mathbf{G}$ n'est pas supposé simple. Notons

$$\mathbf{G} = \prod_{i \in I(\mathbf{G})} \mathbf{G}_i$$

la décomposition de $\mathbf{G}$ en composantes simples. Les objets introduits ci-dessus qui ne dépendent que de la structure de $\mathbf{G}$ sur E ont des analogues pour chaque $\mathbf{G}_i$ et on affecte ces analogues d'un indice i. On a

$$App_E(\mathbf{T}) = \prod_{i \in I(\mathbf{G})} App_E(\mathbf{T}_i) \simeq \prod_{i \in I(\mathbf{G})} X_*(\mathbf{T}_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},$$

et $C = \prod_{i \in I(\mathbf{G})} C_i$. On pose $\Delta_a = \sqcup_{i \in I(\mathbf{G})} \Delta_{a,i}$.

Notons $\mathbf{T}^{nr}$ le plus grand sous-tore de $\mathbf{T}$ qui est déployé sur F. On a $X_*(\mathbf{T}^{nr}) = X_*(\mathbf{T})^{\Gamma_{E/F}} = X_*(\mathbf{T})^\theta$. Le groupe $\Gamma_{E/F}$ agit sur $Imm_E(\mathbf{G})$ et $Imm_F(\mathbf{G})$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de cette action (parce que l'extension E/F est modérément ramifiée). En particulier, l'appartement $App_F(\mathbf{T}^{nr})$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de l'action naturelle de θ dans $App_E(\mathbf{T})$, ou encore à $X_*(\mathbf{T}^{nr}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Posons

$$\mathbf{A}^{nr} = App_F(\mathbf{T}^{nr}) = X_*(\mathbf{T}^{nr}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Notons C^{nr} l'ensemble des points fixes dans C pour l'action de θ. C'est une alcôve dans $\mathbf{A}^{nr}$. Toute racine $\beta \in \Sigma_{res}$ définit une forme linéaire sur $\mathbf{A}^{nr}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $\beta[\lambda]$ la fonction affine $x \mapsto \beta(x) + \lambda$ sur $\mathbf{A}^{nr}$. Bruhat et Tits définissent l'ensemble des racines affines de cet appartement. Pour tout $\beta \in \Sigma_{res}$, il existe un sous-ensemble discret $\Lambda(\beta) \subset \mathbb{Q}$ de sorte que l'ensemble des racines affines soit égal à $\{\beta[\lambda]; \beta \in \Sigma_{res}, \lambda \in \Lambda(\beta)\}$. Rappelons la description de cet ensemble, cf. [2] 2.2.7. On a les égalités

$\Lambda(\beta) = \frac{1}{e(\beta)}\mathbb{Z}$, si β est indivisible ;

$\Lambda(\beta) = \frac{1}{e(\beta)}(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$, si β est divisible.

Notons Θ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{G}$ engendré par θ. Ce groupe Θ agit naturellement sur $I(\mathbf{G})$. On note $I(\mathbf{G})/\Theta$ l'ensemble d'orbites. Supposons un instant qu'il n'y a qu'une orbite. Pour $\beta \in \Delta_{res}$, on a $0 \in \Lambda(\beta)$ et on pose $\beta^{aff} = \beta[0]$. Il existe une unique racine $\beta_0 \in \Sigma_{res}$ et un unique élément $\lambda_0 \in \Lambda(\beta_0)$ tels qu'en posant $\beta_0^{aff} = \beta_0[\lambda_0]$ et $\Delta_a^{nr} = \Delta_{res} \cup \{\beta_0\}$, C^{nr} soit le sous-ensemble des $x \in \mathbf{A}^{nr}$ tels que $\beta^{aff}(x) > 0$ pour tout $\beta \in \Delta_a^{nr}$. De plus, il existe d'uniques coefficients réels $(d_\beta)_{\beta \in \Delta_a^{nr}}$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$(1) \qquad \sum_{\beta \in \Delta_a^{nr}} d_\beta \beta^{aff}(x) = 1$$

pour tout $x \in \mathbf{A}^{nr}$. Ces coefficients sont en fait des entiers strictement positifs. L'adhérence $\bar{C}$ est un simplexe dont les sommets sont en bijection avec Δ_a^{nr}, on note $\beta \mapsto s_\beta$ cette bijection. Revenons au cas général où l'on ne suppose plus que $I(\mathbf{G})/\Theta$ est réduit à un unique élément. Pour $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$, posons $\mathbf{G}_j = \prod_{i \in j} \mathbf{G}_i$. Ce groupe est défini sur F et les objets introduits ci-dessus conservent un sens pour lui. On les affecte d'indices j. On a $\mathbf{A}^{nr} = \prod_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \mathbf{A}_j^{nr}$, $C^{nr} = \prod_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} C_j^{nr}$ et on pose $\Delta_a^{nr} = \sqcup_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \Delta_{a,j}^{nr}$.

Les objets intervenant dans les descriptions ci-dessus sont indépendants des corps F et E.

Le groupe W agit linéairement sur $App_E(\mathbf{T})$ et W^θ agit linéairement sur $\mathbf{A}^{nr}$. Bruhat et Tits définissent un groupe de Weyl affine W^{aff} qui agit par transformations affines sur $\mathbf{A}^{nr}$ et qui est produit semi-direct de W^θ et d'un groupe de translations que nous notons R. Ce groupe de translations est un sous-groupe de $\mathbf{A}^{nr}$. Il contient le groupe $X_*(\mathbf{T}^{nr})$ comme sous- groupe d'indice fini. On note $p_{W^\theta} : W^{aff} \to W^\theta$ la projection naturelle. Remarquons que W^θ intervient à la fois comme sous-groupe et comme quotient de W^{aff}.

En fait, on peut définir différents groupes de Weyl affines et celui que nous considérons est le plus gros possible. Il contient comme sous-groupe d'indice fini un sous-groupe W_{sc}^{aff} qui est engendré par les symétries associées aux racines affines mais, en général, il ne lui est pas égal. On note Ω^{nr} le sous-groupe des éléments de W^{aff} qui conservent l'alcôve C^{nr}. C'est un groupe abélien fini. On a la décomposition en produit semi-direct $W^{aff} = W_{sc}^{aff} \rtimes \Omega^{nr}$, cf. [1] lemme 14. Introduisons les diagrammes de Dynkin $\mathcal{D}^{nr}$ et $\mathcal{D}_a^{nr}$ associés aux ensembles de racines Δ_{res} et Δ_a^{nr}. Notons $Aut(\mathcal{D}^{nr})$ et $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$ leurs groupes finis d'automorphismes. Le groupe $Aut(\mathcal{D}^{nr})$ est égal au sous-groupe des éléments de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$ qui permutent les points du diagramme associés aux racine $\beta_{0,j}$ pour $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$. Le groupe Ω^{nr} s'identifie à un sous-groupe de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$. Il s'avère que $Aut(\mathcal{D}_a^{nr}) = \Omega^{nr} \rtimes Aut(\mathcal{D}^{nr})$.

Notons $Out(\mathbf{G})$ l'ensemble des automorphismes algébriques de $\mathbf{G}$ qui conservent $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Notons $Out(\mathbf{G})^\theta$ le sous-ensemble de ceux qui commutent à θ. Le groupe $Out(\mathbf{G})$ agit sur $App_E(\mathbf{T})$ en conservant C. Il s'en déduit une action sur le diagramme de Dynkin $\mathcal{D}$ associé à l'ensemble de racines simples Δ. En fait, $Out(\mathbf{G})$ s'identifie au groupe des automorphismes de $\mathcal{D}$. Le groupe $Out(\mathbf{G})^\theta$ permute les groupes $\mathbf{G}_j$ pour $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$. Il agit sur $\mathbf{A}^{nr}$ en conservant C^{nr} et Δ^{nr}. On en déduit un homomorphisme $Out(\mathbf{G})^\theta \to Aut(\mathcal{D}^{nr})$. Cette application est bijective si $\theta = 1$. En tout cas, on obtient un homomorphisme $\Gamma_k \to Aut(\mathcal{D}^{nr}) \subset Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$, que l'on note encore $\sigma \mapsto \sigma_G$.

Soit $x\in \mathbf{A}^{nr}$. Notons $\Sigma^{aff}(x)$ l'ensemble des racines affines $\beta[\lambda]$ telles que $\beta[\lambda](x)=0$. Notons $W_{sc}(x)$ le sous-groupe de W_{sc}^{aff} engendré par les symétries associées aux éléments de $\Sigma^{aff}(x)$. L'action de $W_{sc}(x)$ sur $\mathbf{A}^{nr}$ fixe x. Supposons $x\in \bar{C}^{nr}$. Montrons que

(2) l'application $v\mapsto v(C^{nr})$ est une bijection de $W_{sc}(x)$ sur l'ensemble des alcôves $C^{nr}_{\dagger}$ de $\mathbf{A}^{nr}$ telles que $x\in \bar{C}^{nr}_{\dagger}$.

Preuve. Bruhat et Tits ont associé à x un groupe réductif connexe $\mathbf{G}_x$ défini sur $\mathbb{F}_q$. Du tore $\mathbf{T}^{nr}$ est issu un sous-tore maximal $\mathbf{T}_x$ de $\mathbf{G}_x$ qui est défini sur $\mathbb{F}_q$ et maximalement déployé. En fait, nos hypothèses impliquent que $\mathbf{G}_x$ est déployé : l'action galoisienne de $\Gamma_{E/F}$ sur $\mathbf{G}$ se fait par θ et devient triviale sur $\mathbf{T}^{nr}$. En particulier, $\mathbf{T}_x$ est déployé. Le groupe $W_{sc}(x)$ s'identifie au groupe de Weyl de $\mathbf{G}_x$ relativement à $\mathbf{T}_x$. Notons $\mathcal{B}_x$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}_x$ qui contiennent $\mathbf{T}_x$. L'ensemble des alcôves $C^{nr}_{\dagger}$ de $\mathbf{A}^{nr}$ telles que $x\in\bar{C}^{nr}_{\dagger}$ correspond bijectivement à $\mathcal{B}_x$. En particulier, C^{nr} correspond à un groupe $\mathbf{B}_x\in\mathcal{B}_x$. On sait bien que l'application $v\mapsto v(\mathbf{B}_x)$ est une bijection du groupe de Weyl de $\mathbf{G}_x$ sur $\mathcal{B}_x$. Cela prouve (2). $\square$

Supposons $x\in\bar{C}^{nr}$. Notons $S(x)$ l'ensemble des $\beta\in\Delta_a^{nr}$ telles que $\beta^{aff}(x)=0$ et $S^{aff}(x)=\{\beta^{aff};\beta\in S(x)\}$. On a

(3) $\Sigma^{aff}(x)$ est l'ensemble des racines affines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments de $S^{aff}(x)$.

Preuve. Il est clair que toute telle combinaison linéaire annule x. Inversement, on introduit le groupe $\mathbf{G}_x$ et ses sous-groupes $\mathbf{T}_x$ et $\mathbf{B}_x$ de la preuve précédente. D'après Bruhat et Tits, l'ensemble $\Sigma^{aff}(x)$ s'identifie à celui des racines de $\mathbf{T}_x$ dans $\mathbf{G}_x$ tandis que $S^{aff}(x)$ s'identifie à celui des racines simples relativement au Borel $\mathbf{B}_x$, cf. [8] 3.5.1, 3.5.2. Donc tout élément de $\Sigma^{aff}(x)$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments de $S^{aff}(x)$. $\square$

7 L'ensemble *Endo*

Considérons l'ensemble <u>*Endo*</u> des couples $(\omega_\star,x)$ tels que

$\omega_\star$ est une application continue de Γ_k dans Ω^{nr} telle que l'application $\sigma\mapsto\sigma_\star:=\omega_\star(\sigma)\sigma_G$ soit un homomorphisme (à valeurs dans le groupe d'automorphismes de $\mathbf{A}^{nr}$) ;

x est un élément de $\bar{C}^{nr}$;

on a $\sigma_\star(x)=x$ pour tout $\sigma\in\Gamma_k$.

Deux éléments $(\omega_\star,x)$ et $(\omega_{\star'},x')$ de <u>*Endo*</u> sont dits équivalents s'il existe $\omega\in\Omega^{nr}$ de sorte que $\omega(x')=x$ et $\sigma_{\star'}=\omega\sigma_\star\omega^{-1}$ pour tout $\sigma\in\Gamma_k$. On note *Endo* l'ensemble des classes d'équivalence.

Le groupe $\Theta\times\Gamma_k$ agit naturellement sur $I(\mathbf{G})$ et Γ_k agit sur $I(\mathbf{G})/\Theta$. Notons $I(\mathbf{G})/(\Theta\times\Gamma_k)$ l'ensemble commun d'orbites et $i(\mathbf{G},\theta\times\Gamma_k)$ son nombre d'éléments. Soit $(\omega_\star,x)\in$ <u>*Endo*</u>. De l'action $\sigma\mapsto\sigma_\star$ de Γ_k sur $\mathbf{A}^{nr}$ se déduit une action algébrique de Γ_k sur $\mathbf{T}^{nr}$ (on remplace $\omega_\star(\sigma)$ par $p_{W^\theta}(\omega_\star(\sigma))$). On note cette action $\sigma\mapsto\sigma_{\star,alg}$. Cette action conserve Δ_a^{nr} et $S(x)$. Montrons que

(1) le nombre d'orbites de cette action dans $\Delta_a^{nr}-S(x)$ a au moins $i(\mathbf{G},\theta\times\Gamma_k)$ éléments.

Notons $\xi:\Delta_a^{nr}\to I(\mathbf{G})/\Theta$ l'application qui, à $\beta\in\Delta_a^{nr}$, associe l'élément $j\in I(\mathbf{G})/\Theta$ tel que $\beta\in\Delta_{a,j}^{nr}$. Munissons Δ_a^{nr} de l'action $\sigma\mapsto\sigma_{\star,alg}$ de Γ_k et $I(\mathbf{G})/\Theta$ de l'action $\sigma\mapsto\sigma_G$. Alors ξ est équivariante pour ces actions. Décomposons x en $x=\prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta}x_j$ où $x_j\in\bar{C}_k^{nr}$. Pour tout j, l'ensemble $\Delta_{a,j}^{nr}-S(x_j)$ n'est pas vide. Donc la restriction de ξ à $\Delta_a^{nr}-S(x)$ est surjective. L'assertion (1) en résulte.

On dit que $(\omega_\star, x)$ est elliptique si le nombre d'orbites de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ dans $\Delta_a^{nr} - S(x)$ est égal à $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$. On note $\underline{Endo}_{ell}$ l'ensemble des couples elliptiques et $Endo_{ell}$ l'ensemble de leurs classes d'équivalence.

8 Un lemme préliminaire

Puisque $\hat{G}$ est adjoint, $\hat{T}^\theta$ est connexe et égal à $X_*(\hat{T})^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$. Notons $\hat{T}_u^\theta$ le sous-groupe des éléments unitaires de $\hat{T}^\theta$, c'est-à-dire $\hat{T}_u^\theta = X_*(\hat{T})^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} U^1$. L'homomorphisme $z \mapsto e^{2\pi i z}$ identifie $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à U^1. On en déduit des isomorphismes

$$\hat{T}_u^\theta \simeq (X_*(\hat{T})^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/X_*(\hat{T})^\theta \simeq (X_*(\mathbf{T}^{nr}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/X_*(\mathbf{T}^{nr}) = \mathbf{A}^{nr}/X_*(\mathbf{T}^{nr}).$$

L'intersection $(1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta$ est finie, contenue dans $\hat{T}_u^\theta$. On a introduit au paragraphe 6 un sous-groupe R de $\mathbf{A}^{nr}$, qui contient $X_*(\mathbf{T}^{nr})$.

Lemme. *L'isomorphisme ci-dessus* $\hat{T}_u^\theta \simeq \mathbf{A}^{nr}/X_*(\mathbf{T}^{nr})$ *envoie* $(1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta$ *sur* $R/X_*(\mathbf{T}^{nr})$.

Preuve du lemme. Notons val_F la valuation usuelle de F et prolongeons-la en une valuation de $\bar{F}$ à valeurs dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. On a $val_F(E^\times) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$. Pour $\alpha \in \Delta$, notons E_α le sous-corps de E formé des points fixes par $\gamma^{e(\alpha)}$. On a $[E_\alpha : F] = \frac{1}{e(\alpha)}$ et $val_F(E_\alpha^\times) = \frac{1}{e(\alpha)}\mathbb{Z}$.

De la valuation val_F se déduit un homomorphisme

$$val_{\mathbf{T}} : \mathbf{T}(\bar{F}) = X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F}^\times \to X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Cet homomorphisme est équivariant pour les actions de Γ_F, donc l'image de $\mathbf{T}(F) = \mathbf{T}(\bar{F})^{\Gamma_F}$ est contenue dans $\mathbf{A}^{nr}$. D'après Bruhat et Tits, R est égal à cette image, cf. [8] 1.2. Introduisons la base $(\check{\varpi}_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ de $X_*(\mathbf{T})$ duale de Δ. L'automorphisme θ agit encore sur cette base. Pour $\alpha \in \Delta$, on pose $\check{\varpi}_{\alpha_{res}} = \sum_{n=1,\ldots,e(\alpha)} \check{\varpi}_{\theta^n(\alpha)}$. Alors $(\check{\varpi}_\beta)_{\beta\in\Delta_{res}}$ est la base de $X_*(\mathbf{T}^{nr})$ duale de Δ_{res}. Puisque $\mathbf{T}$ est déployé sur E, on a $\mathbf{T}(E) = X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} E^\times$. Soit $t = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(t_\alpha) \in \mathbf{T}(E)$, avec des coefficients $t_\alpha \in E^\times$. On a $t \in \mathbf{T}(F)$ si et seulement si $\gamma(t_\alpha) = t_{\theta(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Cela entraîne $t_\alpha \in E_\alpha^\times$. Inversement, la condition peut être réalisée pour tout $t_\alpha \in E_\alpha^\times$, en supposant que $t_{\theta^n(\alpha)} = \gamma^n(t_\alpha)$ pour $n = 1, \ldots, e(\alpha) - 1$. Il s'en déduit que l'image $val_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}(F))$, c'est-à-dire R, est égale à $\oplus_{\beta\in\Delta_{res}} \frac{1}{e_\beta}\mathbb{Z}\check{\varpi}_\beta$. Soit maintenant $z = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(z_\alpha)$ un élément de $\hat{T}$, avec des $z_\alpha \in \mathbb{C}^\times$. Il appartient à $(1-\theta)(\hat{T})$ si et seulement s'il existe $z' = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(z'_\alpha)$ tel que $z = (1-\theta)(z') = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(z'_\alpha z'^{-1}_{\theta^{-1}(\alpha)})$. Cela équivaut à ce que, pour tout $\alpha \in \Delta$, on ait $\prod_{n=0,\ldots,e(\alpha)-1} z_{\theta^n(\alpha)} = 1$. D'autre part, z appartient à $\hat{T}^\theta$ si et seulement si $z_{\theta^n(\alpha)} = z_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et tout $n = 1, \ldots, e(\alpha) - 1$. Donc $z \in (1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta$ si et seulement si, outre cette dernière condition, on a de plus $z_\alpha \in \mu_{e(\alpha)}(\mathbb{C})$. Autrement dit, $t = \prod_{\beta\in\Delta_{res}} \check{\varpi}_\beta(z_\beta)$ avec des $z_\beta \in \mu_{e(\beta)}(\mathbb{C})$. En comparant avec le calcul de R, on obtient le lemme. $\square$

Il se déduit du lemme un isomorphisme

$$\iota : \hat{T}_u^\theta/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta) \to \mathbf{A}^{nr}/R.$$

Les groupes W^θ et Γ_k agissent naturellement sur ces deux groupes et ι entrelace ces actions. Notons $p_{\mathbf{A}^{nr}} : \mathbf{A}^{nr} \to \mathbf{A}^{nr}/R$ la projection naturelle. Le groupe W^{aff} agit sur $\mathbf{A}^{nr}$ et W^θ agit sur $\mathbf{A}^{nr}/R$. On a la relation $p_{\mathbf{A}^{nr}}(v(x)) = (p_{W^\theta}(v))(p_{\mathbf{A}^{nr}}(x))$ pour tous $x \in \mathbf{A}^{nr}$ et $v \in W^{aff}$. On note $p_{\hat{T}^\theta} : \hat{T}_u^\theta \to \hat{T}_u^\theta/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$ la projection naturelle.

9 Construction de pré-données endoscopiques

Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$. Fixons $s \in \hat{T}_u^\theta$ tel que $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s) = p_{\mathbf{A}^{nr}}(x)$ et posons $\tilde{s} = s\theta$. Pour $\sigma \in \Gamma_k$, posons $u(\sigma) = p_{W^\theta}(\omega_\star(\sigma))$. Relevons l'application $\sigma \mapsto u(\sigma)$ en une application continue $n : \Gamma_k \to Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. Pour $\sigma \in \Gamma_k$, l'égalité $\sigma_\star(x) = x$ et les propriétés d'entrelacement de l'isomorphisme ι et de nos différentes projections impliquent l'égalité $u(\sigma)\sigma_G(s) \in s(1-\theta)(\hat{T})$. Donc $n(\sigma)\sigma_G(s)n(\sigma)^{-1} \in s(1-\theta)(\hat{T})$. Fixons une application continue $t : \Gamma_k \to \hat{T}$ de sorte que $n(\sigma)\sigma_G(s)n(\sigma)^{-1} = st(\sigma)^{-1}\theta(t(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Posons $\tilde{s} = s\theta$ et $g(\sigma) = t(\sigma)n(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Les applications $\sigma \mapsto n(\sigma), g(\sigma)$ etc... se prolongent continûment au groupe de Weil W_k. Parce que $n(w) \in \hat{G}^\theta$, l'égalité $n(w)w_G(s)n(w)^{-1} = st(w)^{-1}\theta(t(w))$ équivaut à

(1) $\tilde{s}(g(w), w) = (g(w), w)\tilde{s}$ pour tout $w \in W_k$.

Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$ et définissons $\mathcal{G}' = \{hg(w), w); w \in W_k, h \in \hat{G}'\}$. Cet ensemble ne dépend pas des choix de $n(w)$ et $t(w)$. En effet $n(w)$ est uniquement déterminé modulo $\hat{T}^\theta \subset \hat{G}'$ et $t(w)$ l'est aussi car l'élément $(1-\theta)(t(w))$ est uniquement déterminé.

Lemme. *Le couple $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est une pré-donnée endoscopique s-unitaire.*

Preuve. On voit que les éléments $n(1)$ et $t(1)$ appartiennent à $\hat{T}^\theta$, donc à $\hat{G}'$. D'où aussi $g(1) \in \hat{G}'$. Cela entraîne $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$. D'après (1), on a la relation clé

(2) $\tilde{s}(g, w) = (g, w)\tilde{s}$ pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$.

Il reste à prouver que $\mathcal{G}'$ est un groupe et que la projection $\mathcal{G}' \to W_k$ admet une section qui soit un homomorphisme continu. Le fait que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star$ est un homomorphisme implique que, pour $\sigma, \sigma' \in \Gamma_k$, on a $n(\sigma)\sigma(n(\sigma')) \in \hat{T}^\theta n(\sigma\sigma')$. Il en résulte que, pour $w, w' \in W_k$, on a la relation $g(w)w(g(w')) \in \hat{T}g(ww')$. Ecrivons $g(w)w(g(w')) = t_2(w, w')g(ww')$, avec $t_2(w, w') \in \hat{T}$. Parce que $(g(w), w)$, $(g(w'), w')$ et $(g(ww'), ww')$ vérifient tous les trois la relation (2), on a $t_2(w, w') \in \hat{T}^\theta$. Alors $(g(w), w)(g(w'), w') = (t_2(w, w')g(ww'), ww')$ appartient à $\mathcal{G}'$. Un argument analogue prouve que $(g(w), w)^{-1}$ appartient à $\mathcal{G}'$. D'autre part, la relation (2) implique que tout élément de $\mathcal{G}'$ normalise $\hat{G}'$. De ces propriétés résulte que $\mathcal{G}'$ est un groupe. L'application $w \mapsto (g(w), w)$ est une section continue de la projection $\mathcal{G}' \to W_k$. Ce n'est pas forcément un homomorphisme. Définissons une action de Γ_k sur $\hat{T}$ par $\sigma \mapsto \sigma_{G'} = u(\sigma) \circ \sigma_G$. Elle conserve $\hat{T}^\theta$. L'application $(w, w') \mapsto t_2(w, w')$ définie ci-dessus est par construction un 2-cocycle pour cette action, qui provient d'un 2-cocycle continu défini sur Γ_k. On a vu qu'elle prenait ses valeurs dans $\hat{T}^\theta$. Parce que ce groupe est un tore, ce cocycle est trivial, cf. [4] lemme 4. On peut donc choisir une application continue $w \mapsto t'(w)$ de W_k dans $\hat{T}^\theta$ dont le cobord soit t_2. L'application $w \mapsto (t(w)'^{-1}g(w), w)$ est alors un homomorphisme continu qui scinde la projection $\mathcal{G}' \to W_k$. Cela achève la démonstration. $\square$.

La pré-donnée que l'on a construite dépend du choix de s. On montrera que sa classe d'équivalence n'en dépend pas.

10 Identification du groupe $W^{\hat{G}'}$

Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$. Construisons une donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ comme dans le paragraphe précédent, dont nous utilisons les notations. On a défini le sous-groupe $W_{sc}(x) \subset W^{aff}$ au paragraphe 6. La projection $p_{W^\theta} : W^{aff} \to W^\theta$ est injective sur $W_{sc}(x)$. En effet, si $v, v' \in W_{sc}(x)$ vérifiént $p_{W^\theta}(v) = p_{W^\theta}(v')$, il existe $r \in R$ tel que $v' = rv$. Or v et v' fixent x et la seule translation qui fixe un point de $\mathbf{A}^{nr}$ est 0. Donc $r = 0$ et $v = v'$. On a aussi défini le sous-groupe $W^{\hat{G}'} \subset W^\theta$.

Lemme. *Le groupe $W^{\hat{G}'}$ est égal à l'image de $W_{sc}(x)$ par p_{W^θ}.*

Preuve. Le groupe $W_{sc}(x)$ est engendré par les symétries associées aux racines affines appartenant à $\Sigma^{aff}(x)$, cf. paragraphe 6. Notons $p_{\Sigma_{res}}$ l'application qui, à une racine affine $\beta[\lambda]$, associe la racine $\beta \in \Sigma_{res}$. Pour la même raison que ci-dessus, la restriction à $\Sigma^{aff}(x)$ de cette application est injective . On note $\Sigma(x)$ l'image de cette application. Cet ensemble $\Sigma(x)$ est celui des $\beta \in \Sigma_{res}$ pour lesquelles $\beta(x)$ appartient à $\Lambda(\beta)$. L'image de $W_{sc}(x)$ par p_{W^θ} est le sous-groupe de W^θ engendré par les symétries associées aux éléments de $\Sigma(x)$. D'autre part, $W^{\hat{G}'}$ est le sous-groupe de W^θ engendré par les symétries associées aux éléments de $\Sigma(\hat{G}')$. Il suffit donc de prouver

(1) $\Sigma(x) = \Sigma(\hat{G}')$.

Remarquons que, pour $\beta \in \Sigma_{res}$, l'homomorphisme $\beta^{n_\beta} : \hat{T}_u^\theta \to U^1$ se descend en un homomorphisme encore noté β^{e_β} sur $\hat{T}_u^\theta/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$. En effet, soit $\alpha \in \Sigma$ tel que $\alpha_{res} = \beta$. Alors β^{e_β} coïncide sur $\hat{T}^\theta$ avec $\prod_{n=1,\dots,e(\alpha)} \theta^n(\alpha)$. Il est clair que cet homomorphisme est trivial sur $(1-\theta)(\hat{T})$. Cela prouve l'assertion. Via l'isomorphisme $\hat{T}_u^\theta \simeq \mathbf{A}^{nr}/X_*(\mathbf{T}^{nr})$, β correspond à la composée de la racine $\beta : \mathbf{A}^{nr} \to \mathbb{R}$ et de la projection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons $\beta_{mod\,\mathbb{Z}}$ cette composée. Via la remarque précédente, l'application $e_\beta \beta_{mod\,\mathbb{Z}}$ se descend en un homomorphisme $e_\beta \beta_{mod\,\mathbb{Z}} : \mathbf{A}^{nr}/R \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En vertu de la définition $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s) = p_{\mathbf{A}^{nr}}(x)$, on a alors les équivalences

$$\beta(s)^{e(\beta)} = 1 \iff e_\beta \beta(x) \in \mathbb{Z},\ \beta(s)^{e(\beta)} = -1 \iff e_\beta \beta(x) \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

Il suffit alors de comparer la description de $\Sigma(\hat{G}')$ donnée au paragraphe 4 et celle de l'ensemble $\Lambda(\beta)$ donnée au paragraphe 6 pour constater que $\beta \in \Sigma(\hat{G}')$ si et seulement si $\beta(x)$ appartient à $\Lambda(\beta)$, autrement dit $\beta \in \Sigma(x)$. Cela prouve (1) et le lemme. □

11 Equivalences

Soient $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques. Notons $Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ l'ensemble des $g \in \hat{G}$ tels que $g\tilde{s}_1 g^{-1} = \tilde{s}_2$. Notons $Isom(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1; \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ l'ensemble des $g \in Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ tels que $g\mathcal{G}'_1 g^{-1} = \mathcal{G}'_2$. Dans le cas où les deux pré-données sont égales, notons-les simplement $(\mathcal{G}', \tilde{s})$. Alors $Isom(\tilde{s}; \tilde{s}) = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})$ et on note $Aut(\mathcal{G}', \tilde{s}) = Isom(\mathcal{G}', \tilde{s}; \mathcal{G}', \tilde{s})$. On a l'inclusion $\hat{G}' \subset Aut(\mathcal{G}', \tilde{s})$. Revenons au cas général où les pré-données ne sont pas supposées égales. Si $Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, resp $Isom(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1; \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$, est non vide, c'est un torseur à gauche sous le groupe $Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_2)$, resp. $Aut(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$.

Soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de <u>Endo</u>. Notons $\Omega^{nr}(x_1; x_2)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega^{nr}$ tels que $\omega(x_1) = x_2$. Notons $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega^{nr}(x_1; x_2)$ tels que $\omega \sigma_{\star,1} \omega^{-1} = \sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Dans le cas où $(\omega_{\star,1}, x_1) = (\omega_{\star,2}, x_2)$, notons simplement $(\omega_\star, x)$ cet élément. On pose $\Omega^{nr}(x) = \Omega^{nr}(x; x)$ et $Aut(\omega_\star, x) = Isom(\omega_\star, x; \omega_\star, x)$. Revenons au cas général où les deux éléments ne sont pas supposés égaux. Si $\Omega^{nr}(x_1; x_2)$, resp. $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$, n'est pas vide, c'est un torseur à gauche sous le groupe $\Omega^{nr}(x_2)$, resp $Aut(\omega_{\star,2}, x_2)$.

Proposition. *(i) Soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de <u>Endo</u> et soient $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques. Supposons que, pour $i = 1, 2$, $(\mathcal{G}'_i, \tilde{s}_i)$ soit construite à partir de $(\omega_{\star,i}, x_i)$ comme dans le paragraphe 9. Alors il existe une bijection entre les ensembles $\hat{G}'_2 \backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ et $\Omega^{nr}(x_1; x_2)$, qui se restreint en une bijection entre les ensembles $\hat{G}'_2 \backslash Isom(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1; \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ et $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$.*

(ii) Soient $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$ et $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique construite à partir de $(\omega_\star, x)$ comme dans le paragraphe 9. Alors il existe un isomorphisme de groupes de $\hat{G}'\backslash Z_{\hat{G}}(\tilde{s})$ sur $\Omega^{nr}(x)$, qui se restreint en un isomorphisme de $\hat{G}'\backslash Aut(\mathcal{G}', \tilde{s})$ sur $Aut(\omega_\star, x)$.

Preuve. On se place dans la situation de (i). Pour simplifier la notation, on pose $\boldsymbol{\mathcal{G}}'_i = (\mathcal{G}'_i, \tilde{s}_i)$ et $\mathbf{E}_i = (\omega_{\star,i}, x_i)$ pour $i = 1, 2$. On reprend les notations du paragraphe 9 en y ajoutant des indices i. Notons $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ l'ensemble des $u \in W^\theta$ tels que $u(s_1) \in s_2((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$. Notons $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ l'ensemble des $u \in W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ tels que $uu_1(\sigma)\sigma_G(u)^{-1} \in W^{\hat{G}'_2}u_2(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Montrons que

(1) le groupe $W^{\hat{G}'_2}$ agit à gauche sur $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ en conservant $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$; cette actions est libre si $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ n'est pas vide ; il existe une bijection entre les ensembles $W^{\hat{G}'_2}\backslash W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ et $\hat{G}'_2\backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, qui se restreint en une bijection de $W^{\hat{G}'_2}\backslash W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ sur $\hat{G}'_2\backslash Isom(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$.

Posons $N = Norm_{\hat{G}}(\hat{T}^\theta)$. Puisque $\hat{T}^\theta$ est un sous-tore maximal de $\hat{G}'_i$ pour $i = 1, 2$, on a l'égalité $Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) = \hat{G}'_2(N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2))$. Il en résulte une bijection

$$\hat{G}'_2\backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) \simeq Norm_{\hat{G}'_2}(\hat{T}^\theta)\backslash(N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)).$$

Deux éléments de $N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, resp. $Norm_{\hat{G}'_2}(\hat{T}^\theta)$, ont même image dans W^θ si et seulement s'ils diffèrent par multiplication à gauche par un élément de $\hat{T}^\theta$. En notant $\underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ l'image de $N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ dans W^θ, on en déduit que $W^{\hat{G}'_2}$ agit à gauche sur $\underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, que cette action est libre si cet ensemble n'est pas vide et que l'on a une bijection

$$\hat{G}'_2\backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) \simeq W^{\hat{G}'_2}\backslash \underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2).$$

De même, notons $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ l'image dans W^θ de $N \cap Isom(\mathcal{G}'_1; \mathcal{G}'_2)$. On a une bijection

$$\hat{G}'_2\backslash Isom(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1; \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2) \simeq W^{\hat{G}'_2}\backslash \underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1, \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2).$$

Alors (1) résulte des deux assertions suivantes

(2) on a l'égalité $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) = \underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$;

(3) on a l'égalité $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2) = \underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$.

Soit $u \in W^\theta$, relevons u en un élément $n \in Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. On a alors $n\tilde{s}_1n^{-1} = u(s_1)\theta$. L'élément u appartient à $\underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ si et seulement s'il existe $t \in \hat{T}$ tel que $tn \in Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$. Cette dernière relation équivaut à $tn\tilde{s}_1n^{-1}t^{-1} = \tilde{s}_2$, ou encore à $u(s_1)t\theta(t)^{-1} = s_2$. Donc u appartient à $\underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ si et seulement si $u(s_1) \in s_2(1-\theta)(\hat{T})$. Puisque s_2 et $u(s_2)$ appartiennent à $\hat{T}^\theta$, cela équivaut à $u(s_1) \in s_2((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$, c'est-à-dire $u \in W(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$. Cela prouve (2).

Grâce à (2), les deux ensembles $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ et $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ sont en tout cas contenus dans $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$. Pour prouver (3), on peut supposer que $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ n'est pas vide. Soit $u \in W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$. Relevons u en un élément $n \in N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$. Alors u appartient à $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ si et seulement s'il existe $t \in \hat{T}$ tel que, d'une part $tn \in Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, d'autre part $tng_1(\sigma)\sigma_G(tn)^{-1} \in \hat{G}'_2g_2(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Puisque n lui-même appartient à $Isom(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$, la première condition équivaut à $t \in \hat{T}^\theta$ et la deuxième condition est insensible à la multiplication par un tel élément. Celle-ci est donc : pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, il existe $h(\sigma) \in \hat{G}'_2$ tel que $ng_1(\sigma)\sigma_G(n)^{-1} = h(\sigma)g_2(\sigma)$. Puisque tous ces éléments, excepté peut-être $h(\sigma)$, normalisent $\hat{T}^\theta$, il en est de même de $h(\sigma)$. En projetant dans W^θ, on obtient l'égalité $uu_1(\sigma)\sigma_G(u)^{-1} \in W^{\hat{G}'_2}u_2(\sigma)$. Donc $u \in W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Inversement, supposons $u \in W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Alors, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, il existe $u'(\sigma) \in Norm_{\hat{G}'_2}(\hat{T}^\theta)$ et

$t(\sigma) \in \hat{T}$ de sorte que $ng_1(\sigma)\sigma_G(n)^{-1} = t(\sigma)u'(\sigma)g_2(\sigma)$. La conjugaison par le membre de gauche envoie $\sigma_G(s_2)\theta$ sur $\tilde{s}_2$ et il en est de même de la conjugaison par $u'(\sigma)g_2(\sigma)$. Donc la conjugaison par $t(\sigma)$ fixe $\tilde{s}_2$, donc $t(\sigma) \in \hat{T}^\theta \subset \hat{G}'_2$. Alors $ng_1(\sigma)\sigma_G(n)^{-1} \in \hat{G}'_2 g_2(\sigma)$ et, comme on l'a dit, u appartient à $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Cela prouve (3), d'où (1).

Notons $W^{aff}(x_1; x_2)$ l'ensemble des $v \in W^{aff}$ tels que $v(x_1) = x_2$ et $W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$ le sous-ensemble des $v \in W^{aff}(x_1; x_2)$ tels que, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, on ait la relation $v\omega_{\star,1}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1} \in W_{sc}(x_2)\omega_{\star,2}(\sigma)$. La projection p_{W^θ} est injective sur $W^{aff}(x_1; x_2)$ car le seul élément de R qui fixe un point de $\mathbf{A}^{nr}$ est 0. On a déjà prouvé au paragraphe 10 que $p_{W^\theta}(W^{\hat{G}'_2}) = W_{sc}(x_2)$. Montrons que

(4) $p_{W^\theta}(W^{aff}(x_1; x_2)) = W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, $p_{W^\theta}(W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)) = W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$.

Puisque $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s_i) = p_{\mathbf{A}^{nr}}(x_i)$ pour $i = 1, 2$, un élément u appartient à $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ si et seulement si $u(x_1) \in x_2 + R$. Cela équivaut à ce que u soit la projection dans W^θ d'un élément de $W^{aff}(x_1; x_2)$. D'où la première égalité de (4). Soit $u \in W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, relevons u en son unique antécédant $v \in W^{aff}(x_1; x_2)$. Si $v \in W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$, on a $v\omega_{\star,1}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1} \in W_{sc}(x_2)\omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. En projetant dans W^θ, on obtient $uu_1(\sigma)\sigma_G(u)^{-1} \in W^{\hat{G}'_2}u_2(\sigma)$, donc u appartient à $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Réciproquement, supposons que $u \in W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. En relevant dans W^{aff} la relation précédente, on voit qu'il existe $r(\sigma) \in R$ et $v_x(\sigma) \in W_{sc}(x_2)$ de sorte que $v\omega_{\star,1}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1} = r(\sigma)v_x(\sigma)\omega_{\star,2}(\sigma)$. Le membre de gauche envoie $\sigma_G(x_2)$ sur x_2 et il en est de même de $v_x(\sigma)\omega_{\star,2}(\sigma)$. Donc $r(\sigma)$ fixe x_2, d'où $r(\sigma) = 0$. Alors v appartient à $W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$, ce qui démontre (4).

Le groupe $W_{sc}(x_2)$ agit à gauche sur $W^{aff}(x_1; x_2)$. Cette action préserve $W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$: l'action $\sigma_{\star,2}$ préservant x_2, elle conserve $W_{sc}(x_2)$. Prouvons que

(5) $W_{sc}(x_2)\backslash W^{aff}(x_1; x_2) \simeq \Omega^{nr}(x_1; x_2)$ et $W_{sc}(x_2)\backslash W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2) \simeq Isom(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$.

D'après 6(2), on a $\Omega^{nr} \cap W_{sc}(x_2) = \{1\}$. On voit que $\Omega^{nr}(x_1; x_2) = \Omega^{nr} \cap W^{aff}(x_1; x_2)$ et $Isom(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2) = \Omega^{nr} \cap W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$. Il suffit alors de prouver que $W^{aff}(x_1; x_2) \subset W_{sc}(x_2)\Omega^{nr}$. Soit $v \in W^{aff}(x_1; x_2)$. Alors v envoie C^{nr} sur une alcôve dont l'adhérence contient x_2. D'après 6(2), il existe donc $v_x \in W_{sc}(x_2)$ tel que $v_x v$ conserve C^{nr}, c'est-à-dire $v_x v \in \Omega^{nr}$. Cela prouve (5).

Le (i) de l'énoncé proposition résulte de (1), (4) et (5).

Le (ii) est le cas particulier de (i) où $(\omega_{\star,1}, x_1) = (\omega_{\star,2}, x_2)$ et $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1) = (\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$. On affirme en plus que les bijections sont des homomorphismes de groupes. Mais c'est clair sur leurs constructions. □

12 La classification des pré-données endoscopiques s-unitaires pour $\hat{G}$ adjoint

Notons $\mathcal{E}ndo_u$ l'ensemble des classes d'équivalence de pré-données endoscopiques s-unitaires et notons $\mathcal{E}ndo_{ell}$ l'ensemble des classes de pré-données endoscopiques elliptiques. On a $\mathcal{E}ndo_{ell} \subset \mathcal{E}ndo_u$ d'après le lemme 5. Dans le paragraphe 9, on a associé une pré-donnée endoscopique s-unitaire à tout élément de $\underline{Endo}$. Il résulte du (i) de la proposition 11 que cette construction se descend en une application injective $\delta : Endo \to \mathcal{E}ndo_u$. Par abus de notations, on notera aussi δ l'application composée $\underline{Endo} \to Endo \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}ndo_u$.

Théorème. *(i) L'application $\delta : Endo \to \mathcal{E}ndo_u$ est bijective.*

(ii) L'image de $Endo_{ell}$ par δ est égale à $\mathcal{E}ndo_{ell}$.

Preuve. Prouvons la surjectivité de δ. Considérons une pré-donnée endoscopique s-unitaire $(\mathcal{G}', \tilde{s})$. On suppose $\tilde{s} = s\theta$, avec $s \in \hat{T}^\theta$ et on utilise les constructions et notations du paragraphe 4. Fixons $y \in \mathbf{A}^{nr}$ tel que $p_{\mathbf{A}^{nr}}(y) = \iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s)$. Choisissons un élément $v \in W^{aff}$ tel que $v(y) \in \bar{C}^{nr}$. Posons $x = v(y)$. Soit $\sigma \in \Gamma_k$. La relation 4(2) entraîne que $u(\sigma)\sigma_G(y) \in y+R$. Il existe donc un unique élément $r(\sigma) \in R$ tel que $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G(y) = y$. Posons $v(\sigma) = vr(\sigma)u(\sigma)\sigma_G(v)^{-1}$. Alors $v(\sigma)\sigma_G(x) = x$. L'action de $v(\sigma)\sigma_G$ sur $\mathbf{A}^{nr}$ envoie C^{nr} sur une alcôve dont l'adhérence contient x. D'après 6(2), il existe un unique $v_x(\sigma) \in W_{sc}(x)$ tel que $v_x(\sigma)v(\sigma)\sigma_G$ conserve C^{nr}. Posons $\omega_\star(\sigma) = v_x(\sigma)v(\sigma)$. Puisque $v_x(\sigma)$ fixe x, on a encore $\omega_\star(\sigma)\sigma_G(x) = x$. Puisque $\omega_\star(\sigma)\sigma_G$ conserve C^{nr} et que σ_G conserve aussi cette alcôve, $\omega_\star(\sigma)$ la conserve aussi, donc $\omega_\star(\sigma) \in \Omega^{nr}$. Montrons que

(1) le couple $(\omega_\star, x)$ appartient à <u>Endo</u>.

Les termes v et y étant fixés, il y a un unique choix pour les autres termes. Puisque l'application $\sigma \mapsto u(\sigma)$ est continue, l'application $\sigma \mapsto \omega_\star(\sigma)$ l'est aussi. Posons $\sigma_\star = \omega_\star(\sigma)\sigma_G$. Il reste à prouver que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star$ est un homomorphisme. Soient $\sigma, \sigma' \in \Gamma_k$. Par construction, on a $u(\sigma)\sigma_G u(\sigma')\sigma'_G = u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. Il en résulte qu'il existe $r_1(\sigma,\sigma') \in R$ de sorte que $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G r(\sigma')u(\sigma')\sigma'_G = r_1(\sigma,\sigma')r(\sigma\sigma')u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. Mais $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G r(\sigma')u(\sigma')\sigma'_G$ et $r(\sigma\sigma')u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$ fixent y et le seul élément de R qui fixe un point de l'appartement est 0. Donc $r_1(\sigma,\sigma') = 0$ et $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G r(\sigma')u(\sigma')\sigma'_G = r(\sigma\sigma')u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. Il en résulte que $v(\sigma)\sigma_G v(\sigma')\sigma'_G = v(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. On en déduit que

$$(2) \qquad \sigma_\star\sigma'_\star = v_x(\sigma,\sigma')(\sigma\sigma')_\star,$$

où $v_x(\sigma,\sigma') = v_x(\sigma)\sigma_\star(v_x(\sigma'))v_x(\sigma\sigma')^{-1}$. Parce que l'action $\sigma_\star$ fixe x, elle conserve le groupe $W_{sc}(x)$ canoniquement attaché à x. Il en résulte que $v_x(\sigma,\sigma')$ appartient à $W_{sc}(x)$. D'autre part, l'égalité (2) et les propriétés de l'action $\sigma \mapsto \sigma_\star$ entraînent que $v_x(\sigma,\sigma')$ conserve C^{nr}. Or 1 est l'unique élément de $W_{sc}(x)$ qui conserve cette alcôve. Donc $v_x(\sigma,\sigma') = 1$ et la relation (2) montre que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star$ est un homomorphisme. Cela prouve (1).

Montrons que

(3) la classe d'équivalence de $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est égale à $\delta(\omega_\star, x)$.

Construisons une pré-donnée endoscopique associée à $(\omega_\star, x)$. Puisque la notation $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est déjà utilisée, on note cette pré-donnée $(\mathcal{G}'_\star, \tilde{s}_\star)$ et on affecte d'un indice $\star$ les objets utilisés dans sa construction. Reprenons les notations de la construction ci-dessus de $(\omega_\star, x)$ et posons $u = p_{W^\theta}(v)$, $u_x(\sigma) = p_{W^\theta}(v_x(\sigma))$. Par définition, $s_\star$ est un élément de $\hat{T}^\theta_u$ tel que $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s_\star) = p_{\mathbf{A}^{nr}}(x)$. On voit que l'on peut choisir $s_\star = u(s)$. Soit $\sigma \in \Gamma_k$. Par définition, $u_\star(\sigma)$ est l'image de $\omega_\star(\sigma)$ par p_{W^θ}. On voit que $u_\star(\sigma) = v_x(\sigma)uu(\sigma)\sigma_G(u)^{-1}$. Relevons $v_x(\sigma)$ et u en des éléments $m(\sigma)$ et n appartenant à $Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. Par définition, $n_\star(\sigma)$ est un élément de ce groupe qui relève $u_\star(\sigma)$. On peut choisir $n_\star(\sigma) = m(\sigma)nn(\sigma)\sigma_G(n)^{-1}$. Posons $h_\star(\sigma) = nt(\sigma)n^{-1}m(\sigma)^{-1}t_\star(\sigma)^{-1}$. Par un calcul simple, l'égalité précédente équivaut à

$$(4) \qquad h_\star(\sigma)g_\star(\sigma) = ng(\sigma)\sigma_G(n)^{-1}.$$

Remarquons que, puisque $n \in \hat{G}^\theta$, l'égalité $s_\star = u(s)$ équivaut à $n\tilde{s}_\star n^{-1} = \tilde{s}$. Les actions $ad_{g(\sigma)} \circ \sigma_G$, resp. $ad_{g_\star(\sigma)} \circ \sigma_G$, fixent $\tilde{s}$, resp. $\tilde{s}_\star$. Il résulte de (4) que $ad_{h_\star(\sigma)}$ fixe $\tilde{s}_\star$. Autrement dit, $h_\star(\sigma) \in Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_\star)$. On se rappelle que $v_x(\sigma)$ appartient à $W_{sc}(x)$. En appliquant le lemme 10, on a $u_x(\sigma) \in W^{\hat{G}'_\star}$. On peut donc relever $u_x(\sigma)$ en un élément $m_\star(\sigma) \in Norm_{\hat{G}'_\star}(\hat{T}^\theta)$. Alors $m(\sigma) \in \hat{T}m_\star(\sigma)$ et on en déduit $h_\star(\sigma) \in \hat{T}m_\star(\sigma)^{-1}$. Soit $\tau(\sigma) \in \hat{T}$ tel que $h_\star(\sigma) = \tau(\sigma)m_\star(\sigma)^{-1}$. Puisque $h_\star(\sigma)$ et $m_\star(\sigma)$ appartiennent à $Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_\star)$, il en est de même de $\tau(\sigma)$. Alors $\tau(\sigma) \in \hat{T} \cap Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_\star) = \hat{T}^\theta$. Mais alors $h_\star(\sigma)$ appartient à $\hat{G}'_\star$. L'égalité (4), vraie pour tout σ, implique que $\mathcal{G}'_\star = n\mathcal{G}'n^{-1}$. Donc n définit une équivalence entre les données $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ et $(\mathcal{G}'_\star, \tilde{s}_\star)$. Cela prouve (3).

L'assertion (3) entraîne la surjectivité de δ. Cela achève la preuve du (i) de l'énoncé.

Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$, construisons une pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ qui lui est associée. On utilise les notations du paragrephe 9. On identifie $X_*(\hat{T}^\theta)$ à $X_*(\mathbf{T}^{nr})$. On dispose de l'action linéaire $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ de Γ_k sur $X_*(\mathbf{T}^{nr})$, cf. paragraphe 6. On dispose d'autre part de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ de W_k sur $X_*(\hat{T}^\theta) = X_*(\mathbf{T}^{nr})$. Comparons-les. Il faut prendre garde au fait que les termes $g(\sigma)$, $n(\sigma)$ etc... du paragraphe 9 ne sont pas ceux ainsi notés associés à $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ au paragraphe 4. En effet, l'action de $ad_{g(\sigma)} \circ \sigma_G$ préserve $\hat{G}'$ et $\hat{T}^\theta$ mais pas forcément $\hat{B} \cap \hat{G}'$. Mais, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, on peut choisir un élément $h(\sigma) \in Norm_{\hat{G}'}(\hat{T}^\theta)$ tel que $ad_{h(\sigma)g(\sigma)} \circ \sigma_G$ préserve ce groupe de Borel. En notant $u_h(\sigma)$ la projection de $h(\sigma)$ dans $W^{\hat{G}'}$, il résulte alors des définitions que l'on a l'égalité $\sigma_{G'} = u_h(\sigma)\sigma_{\star,alg}$. Cela entraîne que les deux actions $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ et $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ coïncident sur $X_*(Z(\hat{G}')^0)$. Munissons $X_*(\mathbf{T}^{nr})$ de la deuxième action. Que $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ soit elliptique équivaut à l'égalité $X_*(Z(\hat{G}')^0)^{\Gamma_k} = 0$, ou encore à $X^*(Z(\hat{G}')^0)^{\Gamma_k} = 0$. Le groupe $X_*(Z(\hat{G}')^0)$ est l'annulateur de $\Sigma(\hat{G}')$ dans $X_*(\mathbf{T}^{nr})$. En vertu de 10(1) et de 6(3), c'est aussi l'annulateur de $S(x)$. Pour tout $\mathbb{Z}$-module Y, notons $Y_{\mathbb{Q}} = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Pour tout ensemble fini A, notons $\mathbb{Q}[A]$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de base A. Si A est un sous-ensemble linéairement indépendant de Y, on a $\mathbb{Q}[A] \subset Y_{\mathbb{Q}}$. Le groupe $X^*_{\mathbb{Q}}(Z(\hat{G}')^0)$ s'identifie à $X^*_{\mathbb{Q}}(\mathbf{T}^{nr})/\mathbb{Q}[S(x)]$. Pour tout $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$, on a une surjection naturelle

$$\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_{a,j}] \to X^*_{\mathbb{Q}}(\mathbf{T}^{nr}_j).$$

Son noyau est la droite portée par l'élément $l_j = \sum_{\beta \in \Delta^{nr}_{a,j}} d(\beta)\beta$, cf. 6(1). En sommant les applications ci-dessus, on obtient la suite exacte

$$0 \to \oplus_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \mathbb{Q}[l_j] \to \mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a] \to X^*_{\mathbb{Q}}(\mathbf{T}^{nr}) \to 0.$$

L'action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ permute les éléments de Δ^{nr}_a donc définit une action sur $\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]$. Les homomorphismes de la suite ci-dessus sont équivariants pour les actions galoisiennes. On déduit de la suite ci-dessus une suite

$$0 \to \oplus_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \mathbb{Q}[l_j] \to \mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]/\mathbb{Q}[S(x)] \to X^*_{\mathbb{Q}}(\mathbf{T}^{nr})/\mathbb{Q}[S(x)] \to 0.$$

Cette suite reste exacte. En effet, le seul point à vérifier est que le premier homomorphisme est injectif. Décomposons x en $x = \prod_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} x_j$. On a $S(x) = \sqcup_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} S(x_j)$ et il suffit de vérifier que, pour tout j, l_j n'appartient pas à $\mathbb{Q}[S(x_j)]$. C'est clair car $\Delta^{nr}_{a,j} - S(x_j)$ n'est pas vide.

Que $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ soit elliptique équivaut à l'égalité $(X^*_{\mathbb{Q}}(\mathbf{T}^{nr})/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k} = 0$. D'après la suite ci-dessus, cela équivaut à l'égalité

$$dim((\oplus_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \mathbb{Q}[l_j])^{\Gamma_k}) = dim((\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k}).$$

L'action de Γ_k permute les éléments l_j donc la première dimension vaut $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$. On a l'égalité $\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]/\mathbb{Q}[S(x)] = \mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a - S(x)]$ et l'action galoisienne permute les éléments de $\Delta^{nr}_a - S(x)$. En notant $i(x)$ le nombre d'orbites de cette action dans $\Delta^{nr}_a - S(x)$, on a donc $dim((\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k}) = i(x)$. Donc $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est elliptique si et seulement si $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k) = i(x)$, autrement dit si et seulement si $(\omega_\star, x)$ est elliptique. Cela prouve le (ii) de l'énoncé. $\square$.

13 Equivalence presque partout

On suppose que k est un corps de nombres. Une pré-donnée endoscopique $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ définie sur k se localise pour toute place $v \in V_k$ en une pré-donnée endoscopique $(\mathcal{G}'_v, \tilde{s})$ définie sur k_v. Notons plus précisément $\underline{Endo}_k$ et $\underline{Endo}_{k_v}$ les ensembles notés précédemment $\underline{Endo}$ relatifs au corps k, resp. k_v. Alors un élément $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}_k$ se localise en un élément $(\omega_{\star,v}, x)$ de $\underline{Endo}_{k_v}$.

Rappelons que l'on suppose que $\hat{G}$ est adjoint.

Théorème. *Soit $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques s-unitaires définies sur k. Supposons que, pour presque tout $v \in V_k$, les pré-données $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ soient équivalentes. Alors $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont équivalentes.*

Preuve. Grâce au (i) du théorème 12, l'énoncé équivaut à l'assertion suivante :

(1) soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de $\underline{Endo}_k$; supposons que, pour presque tout $v \in V_k$, $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ soient équivalents ; alors $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ sont équivalents.

On va d'abord procéder à trois réductions. On a introduit l'ensemble d'orbites $I(\mathbf{G})/(\Theta\times \Gamma_k)$ de l'action de Γ_k dans $I(\mathbf{G})/\Theta$. Pour $J \in I(\mathbf{G})/(\Theta \times \Gamma_k)$, posons $\mathbf{G}_J = \prod_{j\in J} \mathbf{G}_j$, c'est-à-dire que j parcourt les éléments de $I(\mathbf{G})/\Theta$ dans l'orbite J. Ce groupe est défini sur F et est stable par l'action de Γ_k. On a $\mathbf{G} = \prod_{J\in I(\mathbf{G})/(\Theta\times\Gamma_k)} \mathbf{G}_J$ et tous nos objets se décomposent conformément. Précisons nos notations en notant $\underline{Endo}_k(\mathbf{G})$ l'ensemble noté jusqu'ici $\underline{Endo}_k$. On a alors $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}) = \prod_{J\in I(\mathbf{G})/(\Theta\times\Gamma_k)} \underline{Endo}_k(\mathbf{G}_J)$ et on voit qu'il suffit de démontrer l'assertion analogue à (1) pour chaque groupe $\mathbf{G}_J$. Cela nous ramène au cas où l'action de Γ_k dans $I(\mathbf{G})/\Theta$ n'a qu'une seule orbite, ce que l'on suppose désormais.

Fixons un élément $j_0 \in I(\mathbf{G})/\Theta$ et introduisons l'extension k_0 de k telle que Γ_{k_0} soit le fixateur de j_0 dans Γ_k. L'action de Γ_{k_0} conserve $\mathbf{G}_{j_0}$ et on peut définir les ensembles $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$ et $Endo_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$. On a les égalités $\bar{C}^{nr} = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} \bar{C}^{nr}_j$ et $\Omega^{nr} = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} \Omega^{nr}_j$. Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}_k(\mathbf{G})$. Posons $x = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} x_j$ et, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, $\omega_\star(\sigma) = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} \omega_{\star,j}(\sigma)$. Notons $\omega_{\star,j_0,k_0}$ la restriction de $\omega_{\star,j_0}$ à Γ_{k_0}. Alors le couple $(\omega_{\star,j_0,k_0}, x_{j_0})$ appartient à $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$. On a ainsi défini une application $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$. Montrons que

(2) cette application se quotiente en une bijection $Endo_k(\mathbf{G}) \to Endo_{k_0}(\mathbf{G}_0)$.

Il s'agit d'un cas d'isomorphisme de Shapiro. Nous nous contenterons de donner la construction de l'application en sens opposé $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_0) \to \underline{Endo}_k(\mathbf{G})$, en laissant le lecteur prouver que les deux applications se descendent en des isomorphismes réciproques entre $Endo_k(\mathbf{G})$ et $Endo_{k_0}(\mathbf{G}_0)$. Soit $(\omega_{\star,j_0,k_0}, x_{j_0}) \in \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$. Puisque $I(\mathbf{G})/\Theta$ forme une unique orbite sous l'action de Γ_k, on peut fixer pour tout $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$ un élément $\sigma_j \in \Gamma_k$ tel que $\sigma_j(j_0) = j$. Alors $\sigma_{j,G}$ transporte $\mathbf{G}_{j_0}$ et tous les objets qui lui sont associés sur $\mathbf{G}_j$ et tous les mêmes objets qui lui sont associés. L'ensemble $\{\sigma_j; j \in I(\mathbf{G})/\Theta\}$ est un ensemble de représentants du quotient Γ_k/Γ_{k_0}. Pour tout j, posons $x_j = \sigma_{j,G}(x_{j_0})$. Posons $x = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} x_j$. Soient $\sigma \in \Gamma_k$ et $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$. Il existe d'uniques $j' \in I(\mathbf{G})/\Theta$ et $\sigma' \in \Gamma_{k_0}$ tels que $\sigma\sigma_{j'} = \sigma_j\sigma'$. Posons $\omega_{\star,j}(\sigma) = \sigma_{j,G}(\omega_{\star,j_0,k_0}(\sigma'))$. C'est un élément de Ω^{nr}_j. Posons $\omega_\star(\sigma) = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} \omega_{\star,j}(\sigma)$. On vérifie que le couple $(\omega_\star, x)$ appartient à $\underline{Endo}_k(\mathbf{G})$. Cela définit l'application cherchée $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_0) \to \underline{Endo}_k(\mathbf{G})$. Comme on l'a dit, on laisse le lecteur achever la preuve de (2).

Soit $v_0 \in V_{k_0}$ et notons v la place de k au-dessous de v_0. On a encore une application

$\underline{Endo}_{k_v}(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{j_0})$ qui s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{Endo}_k(\mathbf{G}) & \to & \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Endo}_{k_v}(\mathbf{G}) & \to & \underline{Endo}_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{j_0}) \end{array}$$

L'application $\underline{Endo}_{k_v}(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{j_0})$ ne vérifie pas forcément l'analogue de (2) car $I(\mathbf{G})/\Theta$ n'est pas forcément une unique orbite sous Γ_{k_v}. Il est toutefois clair que cette application se quotiente en une application $Endo_{k_v}(\mathbf{G}) \to Endo_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{j_0})$. Dans la situation de (1), ces considérations impliquent que les images de $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ par l'application $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$ sont encore localement équivalentes presque partout. Si nous supposons démontrée l'assertion (1) pour l'ensemble $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$, ces images sont équivalentes et l'assertion (2) nous dit que les données initiales $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ le sont aussi. On est ramené à démontrer (1) dans le cas où $I(\mathbf{G})/\Theta$ est réduit à un unique élément, ce que nous supposons désormais.

Fixons $i_0 \in I(\mathbf{G})$. Soit n le plus petit entier strictement positif tel que $\theta^n(i_0) = i_0$. C'est un diviseur de l'ordre e de θ. Posons $e_0 = \frac{e}{n}$. L'automorphisme θ^n conserve $\mathbf{G}_{i_0}$ et on note θ_{i_0} sa restriction à ce groupe. L'automorphisme θ_{i_0} est d'ordre e_0. Notons F_0 le sous-corps de E fixé par γ^n. L'action de Γ_{F_0} conserve $\mathbf{G}_{i_0}$ et γ^n agit sur $X_*(\mathbf{T}_{i_0})$ comme θ_{i_0}. L'appartement $\mathbf{A}^{nr}$ s'identifie à l'appartement similaire relatif au groupe $\mathbf{G}_{i_0}$ muni de son action de Γ_{F_0}. Puisque $I(\mathbf{G})/\Theta$ est réduit à un unique élément, on a $I(\mathbf{G}) = \{\theta^m(i_0); m = 0, ..., n-1\}$. Puisque l'action de Γ_k commute à θ, il existe un homomorphisme $a : \Gamma_k \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\sigma_G(i_0) = \theta^{a(\sigma)}(i_0)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. L'automorphisme $\sigma_G\theta^{-a(\sigma)}$ conserve $\mathbf{G}_{i_0}$. On note $\sigma_{G_{i_0}}$ sa restriction à $\mathbf{G}_{i_0}$. Alors l'application $\sigma \mapsto \sigma_{G_{i_0}}$ munit $\mathbf{G}_{i_0}$ d'une action de Γ_k qui commute à θ_{i_0}. Alors les ensembles $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}_{i_0})$ et $Endo_k(\mathbf{G}_{i_0})$ sont bien définis et il est immédiat qu'ils sont égaux à $\underline{Endo}_k(\mathbf{G})$ et $Endo_k(\mathbf{G})$. Remarquons qu'ici, contrairement à la deuxième réduction ci-dessus, ces égalités persistent quand on remplace k par un localisé k_v puisque c'est le corps F qui a changé, pas le corps k. Il nous suffit donc de démontrer l'assertion (1) pour le groupe $\mathbf{G}_{i_0}$. Cela nous ramène au cas où $\mathbf{G}$ est absolument simple, ce que l'on suppose désormais.

Dans le cas où $\theta = 1$, l'assertion (1) résulte de [5] propositions 1.6 et 2.2. Nous ne traitons ici que le cas $\theta \neq 1$. Le groupe Γ_k agit sur $\mathbf{G}$ par des automorphismes qui préservent $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et commutent à θ. Parce que $\theta \neq 1$ un tel automorphisme est une puissance de θ. En conséquence, l'action de Γ_k est triviale sur tout objet fixé par θ, en particulier l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ est triviale sur $\mathbf{A}^{nr}$. Il en résulte que l'ensemble $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$ défini en 11 est celui des $\omega \in \Omega^{nr}(x_1; x_2)$ tels que $\omega\omega_{\star,1}(\sigma)\omega^{-1} = \omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Mais Ω^{nr} est commutatif. L'équivalence de $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ équivaut donc à la réunion des conditions suivantes

(3) $\Omega^{nr}(x_1, x_2) \neq \emptyset$;

(4) $\omega_{\star,1}(\sigma) = \omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$.

De même, pour $v \in V_k$, l'équivalence de $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ équivaut à la réunion de (3) et de

(4)(v) $\omega_{\star,1,v}(\sigma) = \omega_{\star,2,v}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{k_v}$.

Puisque $\sigma \mapsto \omega_{\star,i}(\sigma)$ est un homomorphisme continu pour $i = 1, 2$, le théorème de Cebotarev implique que (4) est vérifié si et seulement si (4)(v) l'est pour presque tout v. Cela prouve (1) et le théorème. $\square$

14 Le cas presque simple

Revenons au cas général où le corps k est soit un corps de nombres, soit un corps local de caractéristique nulle. Depuis le paragraphe 6, on a supposé que $\hat{G}$ était adjoint. Modifions ces hypothèses en supposant que $\hat{G}$ est presque simple, c'est-à-dire que $\hat{G}$ est semi-simple et que $\hat{G}_{AD}$ est simple. L'automorphisme θ et l'action de Γ_k sur $\hat{G}$ se descendent en un automorphisme de $\hat{G}_{AD}$ et une action de Γ_k sur ce groupe, que l'on note encore θ et $\sigma \mapsto \sigma_G$. Soit $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique pour $(\hat{G}, \theta)$. En écrivant $\tilde{s} = s\theta$, on pose $\tilde{s}_{ad} = s_{ad}\theta$. On pose $\mathcal{G}'_{ad} = \{(g_{ad}, w); (g, w) \in \mathcal{G}'\}$. Alors $(\mathcal{G}'_{ad}, \tilde{s}_{ad})$ est une pré-donnée endoscopique pour $(\hat{G}_{AD}, \theta)$. Il est clair que deux pré-données pour $(\hat{G}, \theta)$ qui sont équivalentes se descendent ainsi en des pré-données pour $(\hat{G}_{AD}, \theta)$ qui sont équivalentes.

Remarque. Si $\theta = 1$, toute pré-donnée endoscopique pour $(\hat{G}_{AD}, \theta)$ provient par ce procédé d'une pré-donnée endoscopique pour $(\hat{G}, \theta)$. Ce n'est pas vrai si $\theta \neq 1$. On donnera un contre-exemple au paragraphe 15.

Théorème. *Supposons que k est un corps de nombres. Si $\hat{G}$ est presque simple, le théorème 13 est vérifié.*

Preuve. Puisqu'on a déjà démontré cette assertion dans [5] quand $\theta = 1$, on suppose $\theta \neq 1$. L'examen de tous les systèmes de racines possibles montre que, sous cette hypothèse $\theta \neq 1$, le groupe Ω^{nr} a au plus deux éléments.

Soient $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques s-unitaires pour $(\hat{G}, \theta)$ définies sur k. On suppose que $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ sont équivalentes pour presque toute place $v \in V_k$. Alors les pré-données $(\mathcal{G}'_{1,ad,v}, \tilde{s}_{1,ad})$ et $(\mathcal{G}'_{2,ad,v}, \tilde{s}_{2,ad})$ sont aussi équivalentes pour presque tout v. En appliquant le théorème 13, les données $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ et $(\mathcal{G}'_{2,ad}, \tilde{s}_{2,ad})$ sont équivalentes. Fixons $g \in \hat{G}$ tel que g_{ad} conjugue $(\mathcal{G}'_{2,ad}, \tilde{s}_{2,ad})$ en $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. On ne perd rien en remplaçant $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ par sa conjuguée par g. On peut donc supposer

(1) $(\mathcal{G}'_{2,ad}, \tilde{s}_{2,ad}) = (\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$.

On peut aussi supposer que $\tilde{s}_1 = s_1\theta$, avec $s_1 \in \hat{T}^{\theta,0}$. Introduisons des objets comme au paragraphe 4 pour nos deux données pré-endoscopiques, que l'on affecte d'indices 1 et 2 : $g_1(\sigma)$, etc... L'égalité (1) entraîne que $g_{2,ad}(\sigma) \in \hat{T}^{\theta}_{ad} g_{1,ad}(\sigma)$. Cela entraîne que $g_2(\sigma) \in Z(\hat{G})\hat{T}^{\theta,0} g_1(\sigma)$. Puisqu'il est loisible de multiplier $g_2(\sigma)$ à gauche par un élément de $\hat{T}^{\theta,0}$, on peut supposer qu'il existe $z(\sigma) \in Z(\hat{G})$ tel que $g_2(\sigma) = z(\sigma)g_1(\sigma)$. Ce terme $z(\sigma)$ est bien déterminé modulo $Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\theta,0}$. Posons $\mathfrak{Z} = Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\theta,0})$ et notons $\zeta(\sigma)$ l'image de $z(\sigma)$ dans $\mathfrak{Z}$. On obtient une application uniquement déterminée $\sigma \mapsto \zeta(\sigma)$ de Γ_k dans $\mathfrak{Z}$. Remarquons que $\mathfrak{Z}$ est muni d'une unique action galoisienne : les actions $\sigma \mapsto \sigma_G$ et $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1} = \sigma_{G'_2}$ y coïncident. Puisque $\mathcal{G}'_1$ et $\mathcal{G}'_2$ sont des groupes, on doit avoir $g_i(\sigma)\sigma_G(g_i(\sigma')) \in \hat{T}^{\theta,0} g_i(\sigma\sigma')$ pour $i = 1, 2$ et tous $\sigma, \sigma' \in \Gamma_k$. Donc l'application ζ est un cocycle. On note $\underline{\zeta}$ son image dans $H^1(\Gamma_k, \mathfrak{Z})$. Nous ignorons si cette classe de cocycle ne dépend que de la classe d'équivalence de $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$. On vérifie toutefois que

(2) soit $z \in Z(\hat{G})$; si on remplace $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ par $(z\mathcal{G}'_2 z^{-1}, \tilde{s}_2)$, la classe de cocycle $\underline{\zeta}$ ne change pas.

Posons $Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) = Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})/\hat{G}'_{1,ad}$. Fixons un sous-ensemble fini $\Xi \subset \hat{G}$ tel que la famille $\{\xi_{ad}; \xi \in \Xi\}$ soit un ensemble de représentants dans $Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ de ce groupe $Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. On a déterminé le groupe $Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ au paragraphe 11. Fixons un élément $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$ tel que la classe de $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ soit $\delta(\omega_\star, x)$. Alors $Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) \simeq Aut(\omega_\star, x)$. Pour la même raison que dans le paragraphe précédent, l'hypothèse $\theta \neq 1$ entraîne l'égalité $Aut(\omega_\star, x) = \Omega^{nr}(x)$. Soit $v \in V_k$. Le même calcul s'applique à la pré-donnée $(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$: on a $Out(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) \simeq \Omega^{nr}(x)$, d'où $Out(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) \simeq Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. Mais $Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_1)$ s'injecte naturellement dans $Aut(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. L'isomorphisme ci-dessus implique donc $Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) = Aut(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. En conséquence, la famille $\{\xi_{ad}; \xi \in \Xi\}$ est encore un ensemble de représentants de $Aut(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad})/\hat{G}'_{1,ad}$.

Pour $\xi \in \Xi$, posons $\mathcal{G}'_{1,\xi} = \xi \mathcal{G}'_1 \xi^{-1}$. La pré-donnée $(\mathcal{G}'_{1,\xi}, \tilde{s}_1)$ est équivalente à $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ (car $\xi \tilde{s}_1 \xi^{-1} \in Z(\hat{G})\tilde{s}_1$). Elle ne lui est pas forcément égale. Mais elle vérifie la même condition que (1), c'est-à-dire $(\mathcal{G}'_{1,\xi,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) = (\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. On peut lui appliquer les constructions précédentes, d'où une classe de cocycles $\underline{\zeta}_\xi$. On va prouver

(3) il existe $\xi \in \Xi$ tel que $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_\xi$.

Montrons d'abord que cette assertion implique le théorème. On fixe $\xi \in \Xi$ tel que $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_\xi$. Cela signifie que l'on peut fixer $z \in Z(\hat{G})$ de sorte que, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, on ait $z(\sigma) \in z\sigma(z)^{-1} z_\xi(\sigma)$, où $z_\xi(\sigma)$ est l'analogue de $z(\sigma)$ pour la pré-donnée $(\mathcal{G}'_{1,\xi}, \tilde{s}_1)$. Alors $\mathcal{G}'_2 = z\mathcal{G}'_{1,\xi} z^{-1}$ et z définit une équivalence de $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sur $(\mathcal{G}'_{1,\xi}, \tilde{s}_1)$. Puisque cette dernière pré-donnée est équivalente à $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$, on obtient bien l'énoncé.

Fixons un sous-ensemble $V'_k \subset V_k$ de complémentaire fini, tel que, pour tout $v \in V'_k$, $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ soient équivalentes. Pour prouver (3), on commence par établir l'assertion locale

(4) pour toute place $v \in V'_k$, il existe $\xi_v \in \Xi$ tel que $\underline{\zeta}_v = \underline{\zeta}_{\xi_v,v}$.

Pour $v \in V'_k$, soit $g_v \in \hat{G}$ tel que $g_v \mathcal{G}'_{1,v} g^{-1} = \mathcal{G}'_{2,v}$ et $g_v \tilde{s}_1 g_v^{-1} \in Z(\hat{G})\tilde{s}_2$. Grâce à (1), on a $g_{v,ad} \in Aut(\mathcal{G}'_{1,ad,v}, \tilde{s}_{1,ad})$. Il existe donc $\xi_v \in \Xi$ tel que $g_{v,ad} \in \xi_{v,ad}\hat{G}'_{1,ad}$, d'où $g_v \in Z(\hat{G})\xi_v \hat{G}'_1$. Il est loisible de multiplier u_v à droite par un élément de $\hat{G}'_1$. On peut donc supposer $g_v \in Z(\hat{G})\xi_v$. En appliquant (2) (qui vaut aussi bien sur le corps de base k_v), on obtient que $\underline{\zeta}_v = \underline{\zeta}_{\xi_v,v}$. Cela démontre (4).

On peut supposer que 1 appartient à Ξ. Les définitions entraînent que $\underline{\zeta}_1 = 1$, c'est-à-dire que $\underline{\zeta}_1$ est la classe du cocycle trivial. Pour la même raison que dans le paragraphe précédent, l'hypothèse $\theta \neq 1$ entraîne que l'automorphisme σ_G de $\hat{G}$ est une puissance de θ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Puisque θ est d'ordre au plus 3. Il existe donc une extension cyclique k_0 de k de degré au plus 3 de sorte que l'action de Γ_{k_0} soit triviale. Montrons que

(5) pour tout $\xi \in \Xi$, l'image de $\underline{\zeta}_\xi$ dans $H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$ est triviale.

On peut supposer $\xi \neq 1$. Parce que $Aut(\omega_\star, x) = \Omega^{nr}(x)$, la proposition 11 entraîne l'égalité $Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad}) = Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. Le quotient $\hat{G}'_{1,ad} \backslash Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad}) \simeq Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ est isomorphe à un sous-groupe de Ω^{nr}, lequel a au plus deux éléments. Il en résulte les égalités

$$Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad}) = Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) = \hat{G}'_{1,ad} \sqcup \hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}.$$

Puisque ξ_{ad} fixe $\tilde{s}_{1,ad}$, ξ normalise $Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_1)$ et aussi sa composante neutre $\hat{G}'_1$. Puisque $s_1 \in \hat{T}^\theta$, s_1 est fixé par Γ_k. Il en résulte que $g_1(\sigma)_{ad} \in Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad})$. Donc $g_1(\sigma) \in Z(\hat{G})\hat{G}'_1 \sqcup Z(\hat{G})\hat{G}'_1\xi$. Alors $\xi g_1(\sigma)\xi^{-1} \in \hat{G}' g_1(\sigma)$. Mais, pour $\sigma \in \Gamma_{k_0}$, cela équivaut à $\xi g_1(\sigma)\sigma_G(\xi)^{-1} \in \hat{G}'_1 g_1(\sigma)$. Il en résulte que les images réciproques de W_{k_0} dans $\mathcal{G}'_1$ et dans $\mathcal{G}'_{1,\xi}$ sont égales. L'assertion (5) résulte alors de la définition de $\underline{\zeta}_\xi$.

D'après (4) et (5), l'image de $\underline{\zeta}$ dans $H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$ est localement triviale en presque toute place de k_0. Puisque Γ_{k_0} agit trivialement sur $\mathfrak{Z}$, les éléments de $H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$ sont simplement des homomorphismes de Γ_{k_0} dans $\mathfrak{Z}$ et un homomorphisme localement trivial en presque toute place est trivial. Donc l'image de $\underline{\zeta}$ dans $H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$ est triviale. On a la suite exacte

$$1 \to H^1(\Gamma_{k_0/k}, \mathfrak{Z}) \to H^1(\Gamma_k, \mathfrak{Z}) \to H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$$

donc $\underline{\zeta} \in H^1(\Gamma_{k_0/k}, \mathfrak{Z})$. De même $\underline{\zeta}_\xi \in H^1(\Gamma_{k_0/k}, \mathfrak{Z})$ pour tout $\xi \in \Xi$. Puisque $\Gamma_{k_0/k}$ est cyclique, il existe $v \in V'_k$ tel que v soit inerte dans k_0 et $\Gamma_{k_{0,v}/k_v} = \Gamma_{k_0/k}$. L'égalité $\underline{\zeta}_v = \underline{\zeta}_{\xi_v,v}$ entraîne alors $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_{\xi_v}$. Cela démontre (3) et le théorème. $\square$

15 Exemples

Exemple 1.

Considérons le corps $k = \mathbb{Q}_p$ pour un nombre premier $p \geq 3$ tel que -1 ne soit pas un carré dans k. Soit $\hat{G} = SL(4, \mathbb{C})$, muni de l'action triviale de Γ_k. On définit l'automorphisme habituel θ de $\hat{G}$ par $\theta(g) = J^t g^{-1} J^{-1}$, où J est la matrice antidiagonale de coefficients alternés 1 et -1 (les coefficients $J_{m,n}$ sont nuls pour $m + n \neq 5$ et valent $(-1)^m$ pour $m + n = 5$). Soit s l'élément diagonal dont les coefficients $s_{m,m}$ valent i (la racine carrée de -1 dans $\mathbb{C}$) pour $m = 1, 2$ et $-i$ pour $m = 3, 4$. Notons u_{ad} l'image dans $\hat{G}_{AD} = PGL(4, \mathbb{C})$ de la symétrie élémentaire $\mathbf{u} \in GL(4, \mathbb{C})$ qui échange les deux vecteurs de base standard centraux : $\mathbf{u}_{m,n} = 1$ si $m = n = 1, 4$ ou $(m, n) = (2, 3)$ ou $(m, n) = (3, 2)$, les autres coefficients sont nuls. Soit k' une extension quadratique ramifiée de k. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s\theta)^0$ et notons $\mathcal{G}'_{ad}$ l'ensemble des $(g_{ad}, w) \in {}^L G_{AD}$ tels que $g_{ad} \in \hat{G}'_{ad}$ si $w \in W_{k'}$ et $g_{ad} \in \hat{G}'_{ad} u_{ad}$ si $w \in W_k - W_{k'}$. Le couple $(\mathcal{G}'_{ad}, s_{ad}\theta)$ est une donnée pré-endoscopique pour $(\hat{G}_{AD}, \theta)$. Montrons que

(1) cette pré-donnée ne se relève pas en une pré-donnée pour $(\hat{G}, \theta)$.

Le groupe $\hat{T}^\theta$ est connexe. On a $Z(\hat{G}) \simeq \mu_4(\mathbb{C})$ et $\hat{T}^\theta \cap Z(\hat{G}) \simeq \mu_2(\mathbb{C})$.Le groupe $\mathfrak{Z}$ du paragraphe 14 est $\mu_4(\mathbb{C})/\mu_2(\mathbb{C}) \simeq \{\pm 1\}$. Fixons une racine primitive 8-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$ que l'on note ρ. Notons u le produit de $\mathbf{u}$ et de la matrice diagonale de coefficients ρ. Alors u est un relèvement de u_{ad} dans $\hat{G}$. Supposons que $(\mathcal{G}'_{ad}, s_{ad}\theta)$ se relève en une pré-donnée $(\mathcal{G}', s\theta)$ de $(\hat{G}, \theta)$. Alors il existe une application continue $z : W_k \to Z(\hat{G})$ telle que

$$\mathcal{G}' = \{(z(w)h, w); w \in W_{k'}, h \in \hat{G}'\} \cup \{(z(w)hu; w \in W_k - W_{k'}, h \in \hat{G}'\}.$$

Notons ζ l'application composée $W_k \xrightarrow{z} Z(\hat{G}) \to \mathfrak{Z} = \{\pm 1\}$. L'application ζ est bien déterminée. Puisque $\mathcal{G}'$ est un groupe et que u^2 est la matrice diagonale de coefficients ρ^2, laquelle s'envoie sur $-1 \in \mathfrak{Z}$ on doit avoir

(2) $\zeta(ww') = \zeta(w'w) = \zeta(w')\zeta(w)$ pour tous $w \in W_k$ et $w' \in W_{k'}$;

(3) $\zeta(w^2) = -\zeta(w)^2 = -1$ pour tout $w \in W_k - W_{k'}$.

En particulier, la restriction de ζ à $W_{k'}$ est un caractère et la fonction ζ tout entière se factorise par le noyau de celui-ci. Donc ζ se factorise par le groupe de Weyl relatif $W_{k'/k}$. Notons $N_{k'/k} : k'^{\times} \to k^{\times}$ la norme. Fixons un élément $a \in k^{\times} - N_{k'/k}(k'^{\times})$. On sait qu'il y a une suite exacte

$$1 \to k'^{\times} \to W_{k'/k} \to \Gamma_{k'/k} \to 1$$

et que l'on peut relever l'élément non trivial de $\Gamma_{k'/k}$ en un élément $w_0 \in W_{k'/k}$ tel que $w_0^2 = a$. La relation (2) implique non seulement que la restriction de ζ à $k'^{\times}$ est un caractère, mais aussi que celui-ci est invariant par l'action galoisienne de $\Gamma_{k'/k}$. Il se factorise donc par la norme, c'est-à-dire qu'il existe un caractère quadratique χ du groupe $N_{k'/k}(k'^{\times})$ tel que $\zeta(w) = \chi \circ N_{k'/k}(w)$ pour $w \in k'^{\times}$. La relation (3) appliquée à

w_0 dit que $\zeta(a) = -1$, donc $\chi(a^2) = \chi \circ N_{k'/k}(a) = -1$. Mais nos hypothèses impliquent que $-1 \notin N_{k'/k}(k'^{\times})$. On peut donc choisir $a = -1$ et on obtient $\chi(1) = -1$, ce qui est impossible. Cela prouve (1).

Exemple 2.

Considérons maintenant le corps $k = \mathbb{Q}$. D'après [7] exemple 5.6 page 35, on peut trouver un tore T défini sur k tel que le noyau $ker^1(\Gamma_k, T)$ de l'homomorphisme

$$H^1(\Gamma_k, T) \to \prod_{v \in V_k} H^1(\Gamma_{k_v}, T)$$

ait deux éléments. Notons $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k. On a la suite exacte

$$T(\mathbb{A}) \to H^0(\mathbb{A}/k, T) \to ker^1(\Gamma_k, T) \to \{1\},$$

avec les notations de [3] appendice D.1. Donc $H^0(\mathbb{A}/k, T)/im(T(\mathbb{A}))$ a aussi deux éléments. Il en est de même du noyau de l'homomorphisme

$$Hom_{cont}(H^0(\mathbb{A}/k, T), \mathbb{C}^{\times}) \to Hom_{cont}(T(\mathbb{A}), \mathbb{C}^{\times}).$$

D'après [3] lemme D.2.A, cela entraîne que le noyau l'homomorphisme

$$H^1(W_k, \hat{T}) \to \prod_{v \in V_k} H^1(W_{k_v}, \hat{T})$$

a aussi deux éléments. Notons t_1 et t_2 des cocycles représentant les deux éléments du noyau. Munissons $\hat{T}$ de l'automorphisme θ défini par $\theta(t) = t^{-1}$. Posons $\tilde{s} = \theta$ et définissons les deux sous-groupes $\mathcal{G}'_i = \{(t_i(w), w); w \in W_k\}$ de ${}^LT$ pour $i = 1, 2$. On montre aisément que les couples $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s})$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s})$ sont deux pré-données endoscopiques elliptiques pour $(\hat{T}, \theta)$ qui sont localement équivalentes en toute place de k mais ne sont pas équivalentes.

Références

[1] T. Haines, M. Rapoport : *On parahoric subgroups*, appendice à G.Pappas, M. Rapoport *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. in Math. 219 (2008), p. 118-198

[2] T. Kaletha, G. Prasad : *Bruhat-Tits theory : a new approach*, Lavoisier, New Math. Monographs Series, à paraître

[3] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Fundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[4] R. Langlands : *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Canad. J. Math. 31 (1979), p. 700-725

[5] B. Lemaire, J.-L. Waldspurger : *Sur les données endoscopiques d'un groupe réductif connexe*, Canad. J. Math. 73 (2021), p. 1074-1094

[6] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Stabilisation de la formule des traces tordue, volume 1* , ,Progress in Math. 316, Birkhäuser 2016

[7] J.-L. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. für d. reine and ang. Math. 327 (1981), p. 12-80

[8] J. Tits : *Reductive groups over local fields*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Symp. in Pure Math. XXXIII, part 1, AMS (1979), p. 29-69

CNRS Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr