Endoscopie et changement de caractéristique

J.-L. Waldspurger
CNRS, Institut mathématique de Jussieu

Introduction

Soient F un corps local non archimédien, $\mathbf{G}$ un groupe algébrique défini sur F réductif et connexe, $(\mathbf{H},\hat{\eta},s)$ un triplet endoscopique de $\mathbf{G}$, cf. [K1] paragraphe 7.4. On suppose la caractéristique résiduelle p de F grande relativement au rang de $\mathbf{G}$. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(F)$ et $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ l'espace des fonctions de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{C}$, localement constantes et à support compact. On utilise des notations similaires pour tout autre groupe défini sur F. Si $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ et X est un élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$, on définit l'intégrale orbitale $J^G(X,f)$. Si Y est une classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{h}$, assez régulière, on définit l'intégrale orbitale endoscopique $J^{G,H}(Y,f)$, qui est une combinaison linéaire d'intégrales $J^G(X,f)$. Si $f_H\in C_c^\infty(\mathfrak{h})$, on définit de même l'intégrale orbitale stable $J^{H,st}(Y,f_H)$. On dit que f_H est un transfert de f si $J^{G,H}(Y,f)=J^{H,st}(Y,f_H)$ pour tout Y. Supposons de plus $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ non ramifiés, c'est-à-dire quasi-déployés et déployés sur l'extension non ramifiée maximale F^{nr} de F. Il existe dans $\mathfrak{g}$ des réseaux "hyperspéciaux". Notons $f_0\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ la fonction caractéristique de l'un d'eux. Définissons de même$f_{H,0}\in C_c^\infty(\mathfrak{h})$. Le "lemme fondamental pour les algèbres de Lie" affirme que $f_{H,0}$ est un transfert de cf_0, pour une constante $c>0$ dépendant des mesures choisies. Des progrès ont été faits récemment à propos de ce lemme fondamental, par Goresky, Mac-Pherson et Kottwitz d'une part, par Laumon d'autre part. Les méthodes géométriques utilisées par ces auteurs supposent (du moins, à l'instant présent) que F est de caractéristique positive. Cela pose la question (vague) suivante : en admettant le lemme fondamental (pour les algèbres de Lie) prouvé sur un corps de base de caractéristique positive, peut-on en déduire le même lemme sur un corps de base de caractéristique nulle ? Le but de cet article est de préciser cette question et d'y répondre positivement. Signalons que d'autres auteurs ont abordé ces derniers temps des questions de même nature, tels Denef, Loeser et Hales.

La question s'insère dans un cadre plus général. Commençons par le présenter. L'hypothèse sera que $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont modérément ramifiés, c'est-à-dire quasi-déployés et déployés sur l'extension modérément ramifiée maximale F^{mod} de F. On pose $G^{mod}=\mathbf{G}(F^{mod})$. A tout élément $d\in H^1(Gal(F^{mod}/F),G^{mod})$, on associe une forme intérieure $\mathbf{G}_d$ de $\mathbf{G}$ sur F. Remarquons que ce groupe $H^1(Gal(F^{mod}/F),G^{mod})$ n'est pas celui qui classifie les formes intérieures de $\mathbf{G}$: ce dernier est $H^1(Gal(F^{mod}/F),G_{ad}^{mod})$, où $\mathbf{G}_{ad}$ est le groupe adjoint. En général, la famille $(\mathbf{G}_d)_{d\in H^1(Gal(F^{mod}/F),G^{mod})}$ ne contient pas toutes les formes intérieures de $\mathbf{G}$, et inversement peut contenir plusieurs fois la même. On considère la variété non connexe :

$$\mathfrak{g}_D=\sqcup_{d\in H^1(Gal(F^{mod}/F),G^{mod})}\mathfrak{g}_d.$$

Il n'est pas difficile de définir la notion d'intégrale orbitale ou d'intégrale orbitale endoscopique d'un élément de $C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$ (on utilisera les notations J^{G_D} et $J^{G_D,H}$). Ni de définir la notion de transfert entre éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$ et éléments de l'epace analogue $C_c^\infty(\mathfrak{h}_{D_H})$. Soit $d\in H^1(Gal(F^{mod}/F),G^{mod})$. Fixons un appartement V^d dans l'immeuble de $\mathbf{G}_d$ sur F. Pour $(v,r)\in V^d\times\mathbb{R}$, Moy et Prasad ont défini deux réseaux :

$$\mathfrak{g}_{d,v,r+}\subseteq\mathfrak{g}_{d,v,r}\subseteq\mathfrak{g}_d.$$

Le quotient $\mathfrak{g}_{d,v,r}/\mathfrak{g}_{d,v,r+}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps résiduel $\mathbb{F}_q$ de F. Toute fonction sur ce quotient s'identifie à une fonction sur $\mathfrak{g}_d$: on la remonte en une fonction sur $\mathfrak{g}_{d,v,r}$ et on l'étend par 0 hors de ce réseau. On peut ensuite l'identifier à une fonction sur $\mathfrak{g}_D$, nulle sur $\mathfrak{g}_{d'}$ pour $d' \neq d$. Nous allons étudier les intégrales orbitales de telles fonctions. Nous montrerons que leur calcul ne fait intervenir le corps F que via son corps résiduel $\mathbb{F}_q$.

Pour cela, on doit transcrire toutes nos données en termes indépendants de F. On fixe désormais le corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p et on note CL_q l'ensemble des corps locaux de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ (en admettant qu'un tel ensemble existe...). On remarque d'abord que, pour $F \in CL_q$, le groupe $Gal(F^{mod}/F)$ admet une description indépendante de F. C'est bien connu pour les groupes $Gal(F^{mod}/F^{nr})$ et $Gal(F^{nr}/F)$, que l'on identifie respectivement à des groupes I et Θ indépendants de F. Modulo des choix d'uniformisantes, $Gal(F^{mod}/F)$ s'identifie à un produit semi-direct $\Gamma = \Theta \ltimes I$. Au lieu de se donner $\mathbf{G}$ sur F, on fixe la donnée de racines correspondante $\mathcal{D} = (X^*, \Sigma, \Delta, X_*, \check{\Sigma}, \check{\Delta})$ (cf. 1.4 ; Σ est un système de racines, Δ en est une base). Elle est munie d'une action de Γ. On sait bien, qu'inversement, cette donnée étant fixée, on pourra lui associer pour tout $F \in CL_q$ un unique groupe $\mathbf{G}$ quasi-déployé sur F. Grâce aux travaux de Kottwitz, on peut attacher à $\mathcal{D}$ un groupe fini D de sorte que, pour $F \in CL_q$ et $\mathbf{G}$ comme ci-dessus, il y ait une bijection canonique $D \simeq H^1(Gal(F^{mod}/F), G^{mod})$. Les réseaux de Moy-Prasad, ou plus exactement leurs quotients, admettent eux-aussi une description indépendante de F. En effet, pour $d \in D$, on définit un espace affine $V^d \subseteq X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Introduisons l'anneau $\mathbb{Z}_{(p)}$ localisé de $\mathbb{Z}$ en p, c'est-à-dire l'anneau des rationnels $\frac{n}{e}$, où $n \in \mathbb{Z}$ et e est un entier ≥ 1 et premier à p. Posons $V^d_{(p)} = V^d \cap (X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)})$. Cet ensemble est dense dans V^d. Pour $(v,r) \in V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$, on définit un espace vectoriel $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$. Ces objets vérifient les propriétés suivantes. Pour tout $F \in CL_q$, V^d s'identifie canoniquement à un appartement de l'immeuble de $\mathbf{G}_d$ sur F. Et $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$ s'identifie canoniquement au quotient $\mathfrak{g}_{d,v,r}/\mathfrak{g}_{d,v,r+}$. Notons $\mathcal{S}(\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r})$ l'espace de dimension finie des fonctions de $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$ dans $\mathbb{C}$. Posons :

$$\mathcal{S} = \oplus_{d \in D} \oplus_{(v,r) \in V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}} \mathcal{S}(\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}).$$

D'après ce qui précède, pour tout $F \in CL_q$, on peut identifier tout élément de $\mathcal{S}$ à une fonction sur $\mathfrak{g}_D$. Autrement dit, on dispose d'une application linéaire :

$$rea_F : \mathcal{S} \to C_c^\infty(\mathfrak{g}_D).$$

En fait, l'espace $\mathcal{S}$ est inutilement gros car beaucoup de réseaux $\mathfrak{g}_{d,v,r}$ sont égaux. Dans l'article, on considère un espace $\mathcal{S}$ plus petit, mais peu importe dans cette introduction.

Pour traduire la notion d'intégrale orbitale en termes indépendants de F, on doit d'abord effectuer la même traduction pour les classes de conjugaison. C'est impossible, mais on peut tout de même introduire des objets qui les remplacent. Posons $\bar{\mathfrak{t}} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_q$, où $\bar{\mathbb{F}}_q$ est la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Le groupe Γ agit sur $\bar{\mathfrak{t}}$. Pour $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on définit un Γ-module $\bar{\mathfrak{t}}(r)$, qui n'est autre que $\bar{\mathfrak{t}}$, muni d'une certaine action tordue de Γ. On note $\tilde{\mathcal{Z}}$ l'ensemble des familles $(\bar{Z}_1, ...\bar{Z}_k; r_1, ..., r_k)$ telles que :

(i) $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $r_1, ..., r_k \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $r_1 < r_2 < ... < r_k$;

(iii) pour tout $i = 1, ..., k$, $\bar{Z}_i \in \bar{\mathfrak{t}}(r_i)$ et $\bar{Z}_i \neq 0$.

Pour $i = 1, ..., k$, notons Σ_i l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(\bar{Z}_j) = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., i\}$. Notons $X_{*,i}$ l'intersection de X_* et du sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma_i$. Posons $\bar{\mathfrak{t}}_i = X_{*,i} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_q \subseteq \bar{\mathfrak{t}}$, que l'on identifie à un sous-espace $\bar{\mathfrak{t}}_i(r_i) \subseteq \bar{\mathfrak{t}}(r_i)$. On impose encore :

(iv) pour $i = 1, ..., k-1$, $\bar{Z}_{i+1} \in \bar{\mathfrak{t}}_i(r_i)$;

(v) $\bar{\mathfrak{t}} \supsetneq \bar{\mathfrak{t}}_1 \supsetneq ... \supsetneq \bar{\mathfrak{t}}_k = \{0\}$.

Le groupe Γ agit sur $\tilde{\mathcal{Z}}$ et le groupe de Weyl W de $\mathcal{D}$ aussi. On pose :

$$\mathcal{Z} = (\tilde{\mathcal{Z}}/W)^{\Gamma},$$

l'exposant Γ ayant la signification usuelle : il s'agit de l'ensemble des éléments invariants par Γ. Cet ensemble $\mathcal{Z}$ va remplacer celui des classes de conjugaison stable. Précisément, soit $F \in CL_q$, posons $\mathfrak{t}^{mod} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} F^{mod}$, notons $\mathfrak{t}^{mod}_{reg}$ le sous-ensemble des éléments réguliers et $\mathcal{Z}_F = (\mathfrak{t}^{mod}_{reg}/W)^{\Gamma}$. On peut identifier $\mathcal{Z}_F$ à l'ensemble des classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples réguliers dans $\mathfrak{g}_D$. Il y a alors une application :

$$\zeta : \mathcal{Z}_F \to \mathcal{Z}.$$

Elle se déduit d'une application $\tilde{\zeta} : \mathfrak{t}^{mod}_{reg} \to \tilde{\mathcal{Z}}$, que nous allons définir. Notons val la valuation usuelle de F que l'on prolonge à F^{mod}. Pour identifier $Gal(F^{mod}/F)$ à Γ, on a dû fixer une famille d'éléments $(\varpi_{\frac{1}{e}})$ de F^{mod}, indexée par les entiers $e \geq 1$ premiers à p, telle que $val(\varpi_{\frac{1}{e}}) = \frac{1}{e}$ pour tout e . Soit $X \in \mathfrak{t}^{mod}_{reg}$. Posons $r_1 = inf\{val(x^*(X)); x^* \in X^*\}$. Ecrivons $r_1 = \frac{n}{e}$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $e \geq 1$ premier à p, puis $X = (\varpi_{\frac{1}{e}})^n Y$. Alors Y se réduit naturellement en un élément $\bar{X}_1$ de $\bar{\mathfrak{t}}$, que l'on identifie à un élément de $\bar{\mathfrak{t}}(r_1)$ pour que l'application que l'on construit soit équivariante pour les actions de Γ. Associons comme ci-dessus à $\bar{X}_1$ un sous-ensemble Σ_1 de Σ. De même que l'on a construit $\bar{\mathfrak{t}}_1 \subseteq \bar{\mathfrak{t}}$, on construit $\mathfrak{t}^{mod}_1 \subseteq \mathfrak{t}^{mod}$. Ce sous-espace admet un supplémentaire naturel, l'annulateur de Σ_1. On peut donc projeter X sur un élément X_1 de $\mathfrak{t}^{mod}_1$. On recommence le processus en remplaçant X par X_1 : on pose $r_2 = inf\{val(x^*(X_1)); x^* \in X^*\}$, on définit un élément $\bar{X}_2 \in \bar{\mathfrak{t}}_2(r_2)$, puis $X_2 \in \mathfrak{t}^{mod}_2$ et ainsi de suite. Le procédé s'arrête et on a obtenu :

$$\tilde{\zeta}(X) = (\bar{X}_1, ..., \bar{X}_k; r_1, ..., r_k).$$

Une classe de conjugaison ordinaire peut se décrire comme une classe de conjugaison stable plus une donnée cohomologique. On associera à tout élément $z \in \mathcal{Z}$ un groupe fini D_z vérifiant la condition suivante. Soient $F \in CL_q$, $z_F \in \zeta^{-1}(z)$, notons $C(z_F)$ la classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_D$ paramétrée par z_F. Il y a alors une application surjective $\delta : C(z_F) \to D_z$ dont les fibres sont les classes de conjugaison ordinaire contenues dans $C(z_F)$.

On peut maintenant énoncer le théorème principal, cf.7.2.

Théorème : *Soient $z \in \mathcal{Z}$ et $\boldsymbol{\delta} \in D_z$. Il existe une forme linéaire $J^{\mathcal{D}}(z, \boldsymbol{\delta}, .)$ sur $\mathcal{S}$ vérifiant la condition suivante. Soient $F \in CL_q$, $z_F \in \mathcal{Z}_F$, $X \in C(z_F)$ et $\varphi \in \mathcal{S}$. Supposons $\zeta(z_F) = z$ et $\delta(X) = \boldsymbol{\delta}$. Alors on a l'égalité :*

$$J^{G_D}(X, rea_F(\varphi)) = J^{\mathcal{D}}(z, \boldsymbol{\delta}, \varphi).$$

Passons aux intégrales orbitales endoscopiques. La notion de triplet endoscopique est remplacée par celle de donnée endoscopique $(\mathcal{D}_H, \eta, s)$. Fixons une telle donnée. Le terme $\mathcal{D}_H$ est une donnée de racines similaire à $\mathcal{D}$. On peut lui associer divers objets comme on en a associés à $\mathcal{D}$. On les affecte d'un indice H. On dispose en particulier de l'ensemble $\mathcal{Z}_H$. Soit $F \in CL_q$. De notre donnée endoscopique se déduit un triplet endoscopique $(\mathbf{H}, \hat{\eta}, s)$ de $\mathbf{G}$. On construit l'ensemble $\mathcal{Z}_{H,F}$ paramétrant les classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples réguliers dans $\mathfrak{h}_{D_H}$. On définit de façon usuelle le sous-ensemble $\mathcal{Z}_{H,G-reg,F}$ paramétrant les classes G-régulières. On dispose d'une application :

$$\mathcal{Z}_{H,G-reg,F} \stackrel{\eta_{\mathcal{Z},F}}{\to} \mathcal{Z}_F,$$

la correspondance usuelle entre classes de conjugaison stable. Il n'y a pas d'application de $\mathcal{Z}_H$ dans $\mathcal{Z}$ qui traduise l'application précédente. On doit introduire un autre ensemble $\mathcal{Y}$ que nous ne décrirons pas dans cette introduction, et deux applications :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Y} \arrow[dl, "\epsilon"'] \arrow[dr, "\eta_{\mathcal{Y}}"] & \\ \mathcal{Z}_H & & \mathcal{Z} \end{tikzcd}$$

Pour $F \in CL_q$, ces applications se complètent en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_{H,G-reg,F} \arrow[rr, "\eta_{\mathcal{Z},F}"] \arrow[dr, "\tau"] \arrow[dd, "\zeta_H"'] & & \mathcal{Z}_F \arrow[dd, "\zeta"] \\ & \mathcal{Y} \arrow[dl, "\epsilon"'] \arrow[dr, "\eta_{\mathcal{Y}}"] & \\ \mathcal{Z}_H & & \mathcal{Z} \end{tikzcd}$$

La proposition suivante résulte aisément du théorème, cf. 9.1.

Proposition : *Soit $y \in \mathcal{Y}$. Il existe une forme linéaire $J^{\mathcal{D},\mathcal{D}_H}(y,.)$ sur $\mathcal{S}$ vérifiant la condition suivante. Soient $F \in CL_q$, $z_{H,F} \in \mathcal{Z}_{H,G-reg,F}$ et $\varphi \in \mathcal{S}$. Supposons $\tau(z_{H,F}) = y$. Alors on a l'égalité :*

$$J^{G_D,H}(z_{H,F}, rea_F(\varphi)) = J^{\mathcal{D},\mathcal{D}_H}(y,\varphi).$$

(le membre de gauche de cette égalité est l'intégrale orbitale endoscopique associée à la classe de conjugaison stable paramétrée par $z_{H,F}$). On en déduit (cf. 9.2) :

Corollaire : *Soient $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi_H \in \mathcal{S}_H$, F et F' deux éléments de CL_q. Supposons que $rea_{H,F}(\varphi_H)$ soit un transfert de $rea_F(\varphi)$. Alors $rea_{H,F'}(\varphi_H)$ est un transfert de $rea_{F'}(\varphi)$.*

En effet, dire que $rea_{H,F}(\varphi_H)$ est un transfert de $rea_F(\varphi)$ signifie que l'on a des égalités entre intégrales orbitales stables de $rea_{H,F}(\varphi_H)$ et intégrales orbitales endoscopiques de $rea_F(\varphi)$. Or la proposition (que l'on peut aussi appliquer au cas $\mathcal{D} = \mathcal{D}_H$) dit que tous ces termes se calculent par des formules indépendantes de F. Le résultat s'ensuit.

Dans le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_H$ sont non ramifiés, c'est-à-dire que le groupe d'inertie I y agit trivialement, on construit aisément des éléments $\varphi_0 \in \mathcal{S}$ et $\varphi_{H,0} \in \mathcal{S}_H$ tels que, pour tout $F \in CL_q$, le lemme fondamental relatif à $\mathbf{G}$ et $(\mathbf{H}, \hat{\eta}, s)$ soit l'assertion : $rea_{H,F}(\varphi_{H,0})$ est un transfert de $rea_F(\varphi_0)$. Le corollaire précédent a pour cas particulier le résultat que l'on avait en vue, à savoir que pour deux éléments F et F' de CL_q, le lemme fondamental sur le corps de base F est équivalent au même lemme sur le corps de base F'.

Le théorème a aussi une conséquence ne concernant pas l'endoscopie, qui précise les propriétés de constance locale des intégrales orbitales de fonctions $rea_F(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}$ (cf.7.3).

Corollaire : *Soient $F \in CL_q$ et X, X' deux éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}_D$. Notons z_F, resp. z'_F, l'élément de $\mathcal{Z}_F$ paramétrant la classe de conjugaison stable de X,* *resp.* X'. *Supposons* $\zeta(z_F) = \zeta(z'_F)$, *notons* z *cet élément de* $\mathcal{Z}$. *Supposons aussi que les éléments* $\delta(X)$ *et* $\delta(X')$ *de* D_z *sont égaux. Alors, pour tout* $\varphi \in \mathcal{S}$, *on a l'égalité :*

$$J^{G_D}(X, rea_F(\varphi)) = J^{G_D}(X', rea_F(\varphi)).$$

Indiquons très brièvement les grandes lignes de la preuve du théorème. Sous ses hypothèses, on veut montrer que l'intégrale orbitale $J^{G_D}(X, rea_F(\varphi))$ ne dépend que de z, $\boldsymbol{\delta}$ et φ. On peut fixer $d \in D$ et $(v, r) \in V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$ et supposer $\varphi \in \mathcal{S}(\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r})$. On peut supposer $X \in \mathfrak{g}_d$, ce qui se traduit par une relation simple reliant $\boldsymbol{\delta}$ et d. A z est associé un élément $r(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}$. C'est le terme tel que tout relèvement $\tilde{z}$ de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}$ soit de la forme :

$$\tilde{z} = (\bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_k; r(z), r_2, ..., r_k).$$

Concrètement, notons $\mathbf{T}_X$ le centralisateur de X dans $\mathbf{G}_d$ et $X^*(\mathbf{T}_X)$ le groupe des caractères de $\mathbf{T}_X$. Alors :

$$r(z) = inf\{val(x^*(X)); x^* \in X^*(\mathbf{T}_X)\}.$$

Si $r(z) < r$, on voit qu'aucun conjugué de X n'appartient au support de $rea_F(\varphi)$. Donc $J^{G_D}(X, rea_F(\varphi)) = 0$ et on n'a pas besoin de souligner que 0 est indépendant de la température.

On peut donc supposer $r(z) \geq r$. Ces termes appartiennent à $\mathbb{Z}_{(p)}$ mais en fait à un ensemble beaucoup plus petit, de la forme $\frac{1}{e}\mathbb{Z}$. Il est légitime de raisonner par récurrence sur $r(z) - r$.

Si $r(z) > r$, on utilise des résultats de DeBacker. On peut remplacer φ par φ' appartenant à une somme finie d'espaces $\mathcal{S}(\bar{\mathfrak{g}}_{d,v',r'})$, où $r' > r$, de sorte que $J^{G_D}(X, rea_F(\varphi)) = J^{G_D}(X, rea_F(\varphi'))$. La construction de l'application $\varphi \mapsto \varphi'$ ne dépend pas des données X, F, etc... Puisqu'on fait ainsi monter le terme r, on fait baisser $r(z) - r$ et on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence.

Le cas crucial est $r(z) = r$. Notons $\Sigma_X \subseteq X^*(\mathbf{T}_X)$ l'ensemble des racines de $\mathbf{T}_X$ dans $\mathfrak{g}_d$. On peut introduire le "r-centralisateur" de X. C'est le sous-groupe connexe $\mathbf{G}' \subseteq \mathbf{G}_d$ engendré par $\mathbf{T}_X$ et les sous-groupes radiciels associés aux racines $\alpha \in \Sigma_X$ telles que $val(\alpha(X)) > r$. Les résultats de Kim et Murnaghan permettent de construire une fonction f' sur $\mathfrak{g}'$ telle que $J^{G_d}(X, rea_F(\varphi)) = J^{G'}(X, f')$. Cette construction se traduit de façon abstraite, c'est-à-dire indépendante de F . Plus précisément, on peut construire une donnée $\mathcal{D}'$ (traduisant $\mathbf{G}'$), des éléments $z' \in \mathcal{Z}'$ et $\boldsymbol{\delta}' \in D_{z'}$ (on affecte évidemment d'un ' les objets relatifs à $\mathcal{D}'$), une fonction $\varphi' \in \mathcal{S}'$ et, le corps F et la classe z_F étant donnés, une classe $z'_F \in \mathcal{Z}'$ telle que $\zeta'(z'_F) = z'$, de sorte que, pour $X' \in C(z'_F)$ tel que $\delta'(X') = \boldsymbol{\delta}'$, on ait l'égalité :

$$J^{G_D}(X, rea_F(\varphi)) = J^{G'_{D'}}(X', rea'_F(\varphi')).$$

En première approximation, on est ainsi ramené à une donnée $\mathcal{D}'$ dont le rang semi-simple est plus petit que celui de $\mathcal{D}$ et on conclut en raisonnant par récurrence sur ce rang semi-simple. En fait, les éléments centraux jouent ici un rôle perturbateur et on doit raisonner d'une façon un peu plus subtile que l'on ne détaillera pas ici.

Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à la construction des avatars "abstraits" des groupes, appartements d'immeubles, réseaux de Moy-Prasad etc... Le chapitre 3 démontre l'analogue du résultat de DeBacker évoqué ci-dessus. Le chapitre 4 construit et étudie les données $\mathcal{D}'$ traduisant les r-centralisateurs. Le chapitre 5 démontre l'analogue du résultat de Kim-Murnaghan dont on a besoin. Au chapitre 6, on construit les objets abstraits traduisant les classes de conjugaison et de conjugaison stable. Le théorème est démontré au chapitre 7. Le chapitre 8 adapte à notre cadre la théorie de l'endoscopie. Les résultats concernant le transfert sont démontrés au chapitre 9.

1 Groupes et données de racines

1.1

Nous fixerons dans le paragraphe suivant un nombre premier p. Nous imposerons à partir de 1.5 qu'il est "grand". Commençons tout de suite par préciser ce que l'on entend par là.

Considérons un système de racines Σ dans un espace vectoriel réel V qu'il engendre. Introduisons l'ensemble de coracines $\check{\Sigma}$ dans l'espace dual de V, notons $\check{X}$ le réseau qu'elles engendrent. Pour un nombre premier p, on définit les deux conditions :

(P'_Σ) pour tout sous-ensemble linéairement indépendant $A \subseteq \Sigma$, l'indice du réseau $\mathbb{Z}[A]$ dans $\mathbb{Q}[A] \cap Hom_{\mathbb{Z}}(\check{X}, \mathbb{Z})$ est premier à p ;

(P''_Σ) pour tout sous-ensemble linéairement indépendant $A \subseteq \Sigma$ et toute famille $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ de nombres rationnels telle que $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \alpha \in \Sigma$, le rationnel $1 - \sum_{\alpha\in A} c_\alpha$ est nul ou de valuation p-adique nulle.

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour A et $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$, ces conditions seront vérifiées pour p assez grand.

On sait définir le nombre de Coxeter $h(\Sigma)$ d'un système de racines Σ réduit et irréductible. Si Σ est seulement réduit, on note $h(\Sigma)$ le plus grand des $h(\Sigma')$ quand Σ' parcourt les composantes irréductibles de Σ. On définit la condition :

(P_Σ) $p > 3(h(\Sigma) - 1)$.

Soit maintenant $N \in \mathbb{N}$. Il n'y a qu'un nombre fini de systèmes de racines de rang $\leq N$, le rang étant la dimension de V avec les notations ci-dessus. On dira que (P_N) est vérifiée si :

(i) $p \geq N + 2$;

(ii) pour tout système de racines Σ de rang $\leq N$, (P'_Σ) et (P''_Σ) sont vérifiées ;

(iii) pour tout système de racines Σ réduit, de rang $\leq N$, (P_Σ) est vérifiée.

1.2

On fixe un nombre premier p et une puissance q de p. On note P l'ensemble des entiers $e \geq 1$ et premiers à p. On note $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments, on en fixe une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$. On pose $\Theta = \hat{\mathbb{Z}}$, on note θ_1 le générateur topologique canonique de Θ ($\theta_1 = 1$). Le groupe Θ s'identifie au groupe de Galois $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, θ_1 s'identifiant au Frobenius. Pour tout corps k et tout entier $n \geq 1$, on note $\zeta_n(k)$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans k. On pose :

$$I = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ e\in P}} \zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q),$$

les applications de transition étant :

$$\begin{array}{ccc} \zeta_{ee'}(\bar{\mathbb{F}}_q) & \to & \zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q) \\ z & \mapsto & z^{e'}. \end{array}$$

On munit I de l'action de Θ telle que l'action de θ_1 soit $\sigma \mapsto \sigma^q$. On pose $\Gamma = \Theta \ltimes I$. Pour tout $e \in P$, on note $I(e)$ l'unique sous-groupe de I d'indice e.

On note $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé en p de l'anneau $\mathbb{Z}$. On définit une forme bilinéaire :

$$\begin{array}{ccc} I \times \mathbb{Z}_{(p)} & \to & \bar{\mathbb{F}}_q^\times \\ (\sigma, r) & \mapsto & r(\sigma) \end{array}$$

de la façon suivante. Pour $(\sigma, r) \in I \times \mathbb{Z}_{(p)}$, écrivons $r = \frac{n}{e}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, $e \in P$, notons σ_e l'image de σ dans $\zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Alors $r(\sigma) = (\sigma_e)^{-n}$. On pose $\mathbb{G}_{m,red} = \mathbb{Z}_{(p)} \times \bar{\mathbb{F}}_q^\times$, que l'on munit de l'action de Γ ainsi définie : pour $(r, z) \in \mathbb{Z}_{(p)} \times \bar{\mathbb{F}}_q^\times$, $\theta \in \Theta$, $\sigma \in I$, on pose $\theta(r, z) = (r, \theta(z))$, $\sigma(r, z) = (r, zr(\sigma)^{-1})$.

1.3

Soit F un corps local non archimédien dont le corps résiduel a q éléments. Fixons une clôture séparable F^{sep} de F, notons F^{nr}, resp. F^{mod}, la plus grande sous-extension de F^{sep} non ramifiée, resp. modérément ramifiée, sur F. Notons f^{nr} le corps résiduel de F^{nr}, fixons un isomorphisme $i : f^{nr} \to \bar{\mathbb{F}}_q$. Pour tout entier $e \in P$, la composée de i et de la réduction identifie $\zeta_e(F^{nr})$ à $\zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q)$. et on identifie ainsi ces deux groupes. On fixe une uniformisante ϖ_1 de F puis, pour tout $e \in P$, on fixe $\varpi_{\frac{1}{e}} \in F^{mod}$ de sorte que l'égalité $(\varpi_{\frac{1}{ee'}})^{e'} = \varpi_{\frac{1}{e}}$ soit vérifiée. On a l'égalité :

$$F^{mod} = \bigcup_{e \in P} F^{nr}(\varpi_{\frac{1}{e}}).$$

On identifie Γ au groupe de Galois de F^{mod}/F de la façon suivante :

- le groupe Θ agit de façon usuelle sur F^{nr} et fixe $\varpi_{\frac{1}{e}}$ pour tout $e \in P$;

- soit $\sigma \in I$; alors σ fixe tout élément de F^{nr} et, pour $e \in P$, $\sigma(\varpi_{\frac{1}{e}}) = \sigma_e \varpi_{\frac{1}{e}}$, où σ_e est l'image de σ dans $\zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q)$.

On note val la valuation de F, telle que $val(\varpi_1) = 1$. On la prolonge en une valuation de F^{mod} à valeurs dans $\mathbb{Z}_{(p)} \cup \{\infty\}$. On définit un homomorphisme :

$$red : F^{mod,\times} \to \mathbb{G}_{m,red}$$

de la façon suivante :

- pour tout $e \in P$, $red(\varpi_{\frac{1}{e}}) = (\frac{1}{e}, 1)$;

-pour tout $x \in F^{mod,\times}$ tel que $val(x) = 0$, notons $\bar{x}$ son image dans f^{nr} ; alors $red(x) = (0, i(\bar{x}))$.

L'homomorphisme red est équivariant pour les actions de Γ. On définit une section de cet homomorphisme au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$: à l'élément $\frac{n}{e} \in \mathbb{Z}_{(p)}$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $e \in P$, on associe $(\varpi_{\frac{1}{e}})^n$.

On a adjoint à F des données F^{sep}, i, $(\varpi_{\frac{1}{e}})_{e \in P}$, obtenant ainsi un quadruplet $\underline{F} = (F, F^{sep}, i, (\varpi_{\frac{1}{e}})_{e \in P})$. On fixe un ensemble CL_q formé de tels quadruplets de sorte que, pour tout tel quadruplet $\underline{F}$, il existe un unique $\underline{F}' \in CL_q$ tel que $\underline{F}$ soit isomorphe à $\underline{F}'$ en un sens évident. Pour alléger les notations, on considérera tout élément de CL_q comme un corps local, que l'on notera simplement F, mais on se rappellera qu'il est muni de données supplémentaires occultes.

1.4

On considérera des données de racines munies d'une action de Γ. Un tel objet est un sextuplet :

$$\mathcal{D} = (X^*, \Sigma, \Delta, X_*, \check{\Sigma}, \check{\Delta})$$

qui est une donnée de racines au sens usuel. C'est-à-dire que X^* et X_* sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini, en dualité, Σ est un système de racines réduit dans X^*, Δ est une base de racines simples, $\check{\Sigma}$, resp. $\check{\Delta}$, est l'ensemble de coracines dans X_* associé à Σ, resp. Δ. On suppose de plus que Γ agit sur X^* et X_* par des actions duales l'une de l'autre, qui conservent Σ, Δ, $\check{\Sigma}$, $\check{\Delta}$.

La base Δ détermine un sous-ensemble de racines positives dans Σ. On note W le groupe de Weyl du système de racines Σ. On appelle rang de $\mathcal{D}$ le rang commun des $\mathbb{Z}$-modules X^* et X_*.

Notons $X_{*,sc} \subseteq X_*$ le réseau engendré par $\check{\Delta}$ et $X^*_{sc} \subseteq X^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ celui engendré par les poids fondamentaux. Posons aussi $X_{*,der} = X_* \cap (X_{*,sc} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$, $X^*_{der} = X^*_{sc} \cap Hom_{\mathbb{Z}}(X_{*,der}, \mathbb{Z})$. De $\mathcal{D}$ se déduisent les deux autres données de racines munies d'une action de Γ :

$$\mathcal{D}_{sc} = (X^*_{sc}, \Sigma, \Delta, X_{*,sc}, \check{\Sigma}, \check{\Delta}),\ \mathcal{D}_{der} = (X^*_{der}, \Sigma, \Delta, X_{*,der}, \check{\Sigma}, \check{\Delta}).$$

On fixe pour presque tout l'article une donnée de racines $\mathcal{D}$ munie d'une action de Γ. On suppose :

p vérifie la condition $(P_{rang(\mathcal{D})})$.

1.5

Soit k un corps commutatif de caractéristique 0 ou p. Fixons-en une clôture séparable k^{sep} et supposons donné un homomorphisme du groupe de Galois $Gal(k^{sep}/k)$ dans Γ. Ce groupe de Galois agit donc sur $\mathcal{D}$. Il existe un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$, muni d'un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ et d'un sous-tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{B}$, tous trois définis sur k et vérifiant la condition suivante. Notons $X^*(\mathbf{T})$, resp. $X_*(\mathbf{T})$, le groupe des caractères, resp. sous-groupes à un paramètre, de $\mathbf{T}$ et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. Alors il existe un couple d'isomorphismes en dualité $X^* \to X^*(\mathbf{T})$, $X_* \to X_*(\mathbf{T})$, notons-les tous les deux j, qui identifient Σ à l'ensemble des racines de $\mathbf{T}$ dans $\mathfrak{g}$, $\check{\Sigma}$ à l'ensemble de coracines associé, Δ au sous-ensemble de racines simples déterminé par $\mathbf{B}$, et qui sont équivariants pour les actions de $Gal(k^{sep}/k)$. Le quadruplet $(\mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{T}, j)$ est unique à isomorphisme près.

Pour simplifier, on note encore $\mathbf{G}$ le groupe des points définis sur k^{sep}, c'est-à-dire "$\mathbf{G} = \mathbf{G}(k^{sep})$". On pose $G = \mathbf{G}(k)$. On utilise des notations analogues pour les autres groupes et algèbres de Lie. On note par une lettre gothique minuscule l'algèbre de Lie d'un groupe noté par la lettre latine majuscule correspondante.

Pour tout $\alpha \in \Sigma$, notons $\mathfrak{u}_\alpha$ le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ associé à α. On fixe un épinglage $(E_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ de $\mathfrak{g}$, défini sur k. C'est-à-dire que pour tout $\alpha \in \Delta$, E_α est un élément non nul de $\mathfrak{u}_\alpha$ et, pour tout $\gamma \in Gal(k^{sep}/k)$, on a l'égalité $\gamma(E_\alpha) = E_{\gamma(\alpha)}$. Rappelons que le quintuplet $(\mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{T}, j, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ est unique à unique isomorphisme près. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ s'identifie à $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} k^{sep}$, $\check{\Sigma}$ s'identifie donc à un sous-ensemble de $\mathfrak{t}$. Pour $\alpha \in \Delta$, on note $E_{-\alpha}$ l'unique élément de $\mathfrak{u}_{-\alpha}$ tel que $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \check{\alpha}$. Notons $\mathbf{N}$ le normalisateur de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$. Le quotient $\mathbf{N}/\mathbf{T}$ s'identifie à W. On définit une section ensembliste $n : W \to \mathbf{N}$ caractérisée par les propriétés (cf. [Sp] 11.2.9)

- pour $\alpha \in \Delta$, $n(s_\alpha) = exp(E_\alpha)exp(-E_{-\alpha})exp(E_\alpha)$, où s_α est la symétrie associée à α (l'hypothèse (P_Σ) nous permet de définir l'exponentielle d'un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$) ;

- pour w_1, $w_2 \in W$ tels que la longueur de w_1w_2 soit la somme de celles de w_1 et w_2, $n(w_1w_2) = n(w_1)n(w_2)$.

Plus généralement, pour tous $w_1, w_2 \in W$, on a l'égalité :

$$(1) \qquad n(w_1)n(w_2) = \nu(w_1, w_2)n(w_1w_2),$$

où :

$$\nu(w_1, w_2) = \prod_{\alpha>0, w_1^{-1}(\alpha)<0, w_2^{-1}w_1^{-1}(\alpha)>0} \check{\alpha}(-1),$$

cf. [LS] lemme 2.1.A.

On sait que l'on peut prolonger la famille $(E_\alpha)_{\alpha\in\pm\Delta}$ en une famille $(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout $\alpha \in \Sigma$, E_α est un élément non nul de $\mathfrak{u}_\alpha$;

- pour tous $\alpha \in \Sigma$, $\gamma \in Gal(k^{sep}/k)$, il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\gamma(E_\alpha) = \epsilon E_{\gamma(\alpha)}$;

- pour tous $\alpha \in \Sigma$, $w \in W$, il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $Ad(n(w))(E_\alpha) = \epsilon E_{w(\alpha)}$.

Cf [Sp] théorème 11.3.6. La famille est unique aux signes près, c'est-à-dire que l'on peut remplacer une partie des E_α par leurs opposés.

On note $\mathbf{G}_{sc}$ le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $\mathbf{G}$. C'est le groupe associé à la donnée de racines $\mathcal{D}_{sc}$. On note $\iota : \mathbf{G}_{sc} \to \mathbf{G}$ l'homomorphisme naturel ou, plus généralement, tout homomorphisme qui s'en déduit fonctoriellement, par exemple $\iota : \mathfrak{g}_{sc} \to \mathfrak{g}$. Ce dernier identifie $\mathfrak{g}_{sc}$ à l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$.

Suivant le mauvais usage, on note $\mathbf{B}_{sc}$, $\mathbf{T}_{sc}$ etc... les images réciproques de $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$ etc... dans $\mathbf{G}_{sc}$. On définit comme précédemment une section $n_{sc} : W \to \mathbf{N}_{sc}$. On a l'égalité $n = \iota \circ n_{sc}$.

1.6

Appliquons la construction du paragraphe précédent à $k = \mathbb{F}_q$ et à l'homomorphisme $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \Theta \hookrightarrow \Gamma$. On obtient un groupe sur $\mathbb{F}_q$ que l'on note $\bar{\mathbf{G}}$. On affecte d'une $\bar{\ }$ tous les objets associés : $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{T}}$ etc... On fixe un épinglage sur $\mathbb{F}_q$, que l'on prolonge en une famille $(\bar{E}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. Jusque-là, nous n'avons utilisé que l'action de Θ sur $\mathcal{D}$. Puisque I agit lui-aussi, on en déduit une action de I sur $\bar{\mathbf{G}}$. Précisément, soit $\sigma \in I$. Cet élément agit sur X_*, donc sur $\mathbf{T} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_q^\times$. L'action se prolonge à $\bar{\mathbf{G}}$ de sorte que, pour tout $\alpha \in \Delta$, $\sigma(\bar{E}_\alpha) = \bar{E}_{\sigma(\alpha)}$. Plus généralement, pour $\alpha \in \Sigma$, il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\sigma(\bar{E}_\alpha) = \epsilon\bar{E}_{\sigma(\alpha)}$. Parce que I ne commute pas à Θ, l'action de I sur $\bar{\mathbf{G}}$ n'est pas en général définie sur $\mathbb{F}_q$, mais les deux actions de I et Θ se combinent en une action de Γ sur $\bar{\mathbf{G}}$.

Posons $T_\varpi = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$, $T_{red} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m,red}$. Le groupe $\bar{\mathbf{N}}$ agit dans X_* via sa projection sur W, donc aussi dans T_ϖ. On pose :

$$N_{red} = T_\varpi \rtimes \bar{\mathbf{N}}$$

et on note $\pi_N : N_{red} \to \bar{\mathbf{N}}$ la projection de noyau T_ϖ. On a les égalités utiles :

$$T_{red} = T_\varpi \bar{\mathbf{T}},\ N_{red} = T_\varpi \bar{\mathbf{N}} = T_{red}\bar{\mathbf{N}} = T_{red}n(W).$$

Des actions de Γ sur X_* et sur $\mathbb{G}_{m,red}$ se déduit une action sur T_{red}. L'action de Γ sur $\bar{\mathbf{G}}$ se restreint en une action sur $\bar{\mathbf{N}}$. Les deux actions coïncident sur $\bar{\mathbf{T}} = T_{red} \cap \bar{\mathbf{N}}$.

On en déduit une action de Γ sur N_{red}. Remarquons que T_ϖ n'est pas stable par cette action et que π_N n'est pas équivariant.

Posons $V = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $V_{(p)} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} \subseteq V$. Remarquons que l'on a déjà introduit ce dernier ensemble sous le nom de T_ϖ. De fait cet ensemble intervient de deux façons différentes. L'égalité $T_\varpi = V_{(p)}$ permet toutefois de poser la définition ci-dessous d'une action de N_{red} dans V. On la note $(n, v) \mapsto n_{\mathbb{R}}(v)$ et elle est caractérisée ainsi :

- pour $t \in T_\varpi$ et $v \in V$, $t_{\mathbb{R}}(v) = v - t$;

- le groupe $\bar{\mathbf{N}}$ agit via l'action de son quotient W sur X_*.

De l'action de Γ sur X_* se déduit une action sur V qui conserve $V_{(p)}$. L'action de N_{red} dans V est compatible aux actions de Γ.

On peut effectuer les mêmes constructions pour le groupe $\bar{\mathbf{G}}_{sc}$ et définir $N_{red,sc}$ et V_{sc}. On a une décomposition :

$$V = V_{cent} \oplus V_{sc},$$

où $V_{cent} = \{v \in V; \forall \alpha \in \Sigma; \alpha(v) = 0\}$. On identifie tout automorphisme affine de V_{sc} à l'automorphisme de V somme de cet automorphisme de V_{sc} et de l'identité de V_{cent}. Ainsi, pour $n \in N_{red,sc}$, l'automorphisme affine $n_{\mathbb{R}}$ de V_{sc} s'identifie à l'automorphisme affine $\iota(n)_{\mathbb{R}}$ de V.

Soit $e \in P$. On a défini en 1.2 le groupe $I(e)$. On note Σ^e l'ensemble des orbites de $I(e)$ dans Σ et $V^{I(e)}$, $N_{red}^{I(e)}$ etc... les sous-ensembles de points fixes par $I(e)$ dans V, N_{red} etc... L'action de $N_{red}^{I(e)}$ conserve $V^{I(e)}$. On note $\tilde{W}^e$ le groupe d'automorphisme affines de $V^{I(e)}$ image de cette action. On définit $\tilde{W}^e_{sc}$ de façon similaire. Comme ci-dessus, un élément de ce groupe est a priori un automorphisme de $V_{sc}^{I(e)}$, mais s'étend en un automorphisme de $V^{I(e)}$. Pour toute fonction affine sur $V^{I(e)}$ de la forme $\alpha + r$ où $\alpha \in \Sigma^e$ et $r \in \mathbb{R}$, posons :

$$H_{\alpha+r} = \{v \in V^{I(e)}; \alpha(v) + r = 0\}.$$

On note Σ^e_{aff} le sous-ensemble de ces fonctions $\alpha + r$ telles qu'il existe un élément de $\tilde{W}^e_{sc}$ dont l'ensemble des points fixes soit $H_{\alpha+r}$. Les hyperplans $H_{\alpha+r}$, pour $\alpha + r \in \Sigma^e_{aff}$, définissent une décomposition de $V^{I(e)}$ en facettes. On note C^e la chambre qui contient $\epsilon\check{\rho}$ pour $\epsilon > 0$ assez petit, où $\check{\rho}$ est la demi-somme des coracines > 0. Cette chambre est conservée par Γ. L'action de $\tilde{W}^e$ sur $V^{I(e)}$ conserve Σ^e_{aff} et la décomposition en facettes. On note $\tilde{\mathcal{N}}^e$ le sous-groupe de $\tilde{W}^e$ qui conserve C^e et $\mathcal{N}^e_{red}$ son image réciproque dans $N_{red}^{I(e)}$.

Dans le cas $e = 1$, on remplace les exposants e par nr : $\tilde{W}^{nr}$, C^{nr} etc...

1.7

Soit $F \in CL_q$. Appliquons la construction de 1.5 à $k = F$ et à l'homomorphisme $Gal(F^{sep}/F) \to Gal(F^{mod}/F) \to \Gamma$ défini en 1.3. On construit un groupe $\mathbf{G}$ défini sur F, muni de sous-groupes $\mathbf{B}$ et $\mathbf{T}$. On fixe un épinglage défini sur F, que l'on prolonge en une famille $(E_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$.

Pour le groupe $\mathbf{G}$, ainsi que pour les autres groupes définis sur F, on utilise les notations suivantes. On a déjà dit que l'on identifiait $\mathbf{G}$ à $\mathbf{G}(F^{sep})$. On pose $G^{mod} = \mathbf{G}(F^{mod})$, $G^{nr} = \mathbf{G}(F^{nr})$, $G = \mathbf{G}(F)$.

Pour toute extension K, avec $F \subseteq K \subseteq F^{mod}$, posons :

$$\mathbf{T}(K)_1 = \{t \in \mathbf{T}(K); \forall x^* \in X^*, val(x^*(t) - 1) > 0\}.$$

Lemme 1.7 : *Soit Γ' un sous-groupe fermé de Γ. Pour tout entier $i > 0$, on a l'égalité $H^i(\Gamma', T_1^{mod}) = \{0\}$.*

Ce lemme est facile. On va le démontrer en détail car on utilisera beaucoup de lemmes similaires sans en donner de démonstration.

Preuve. Soit $i > 0$. Le groupe $H^i(\Gamma', T_1^{mod})$ est défini comme limite inductive des $H^i(\Gamma'/\Gamma'', T_1^{mod,\Gamma''})$, où Γ'' parcourt les sous-groupes distingués ouverts de Γ'. L'ensemble des intersections $\Gamma_0 \cap \Gamma'$, où Γ_0 est un sous-groupe distingué ouvert de Γ, est un sous-ensemble cofinal de l'ensemble des Γ'' précédents. On peut fixer un tel sous-groupe Γ_0, assez petit pour agir trivialement sur $\mathcal{D}$. On doit montrer que $H^i(\Gamma'/(\Gamma_0\cap\Gamma'), T_1^{mod,\Gamma_0\cap\Gamma'}) = \{0\}$. Notons F_0, resp. F_0', le sous-corps des points fixes de Γ_0, resp. $\Gamma_0\cap\Gamma'$, dans F^{mod}. Le groupe $T_1^{mod,\Gamma_0\cap\Gamma'}$ est limite inductive des $\mathbf{T}(K)_1$ quand K parcourt les extensions finies de F, stables par Γ' et telles que $F_0 \subseteq K \subseteq F_0'$. On peut fixer une telle extension K et remplacer $T_1^{mod,\Gamma_0\cap\Gamma'}$ par $\mathbf{T}(K)_1$. Notons L le sous-corps des points fixes de Γ' dans K. Alors K est une extension galoisienne finie de L et $\Gamma'/(\Gamma_0 \cap \Gamma')$ s'identifie au groupe de Galois de cette extension. Cela nous ramène à prouver que $H^i(Gal(K/L); \mathbf{T}(K)_1) = \{0\}$. Notons e l'indice de ramification de K/F. Le groupe $\mathbf{T}(K)_1$ est filtré par les sous-groupes :

$$\mathbf{T}(K)_n = \{t \in \mathbf{T}(K); \forall x^* \in X^*, val(x^*(t) - 1) \geq \frac{n}{e}\}$$

pour n entier ≥ 1. Il est complet pour cette filtration. Il suffit de fixer n et de prouver que $H^i(Gal(K/L); A_n) = \{0\}$, où $A_n = \mathbf{T}(K)_n/\mathbf{T}(K)_{n+1}$. Notons J le sous-groupe d'inertie de $Gal(K/L)$, $\Xi = Gal(K/L)/J$ et k le corps résiduel de K. D'après [Se] proposition 5 p.126, il suffit de prouver que $H^i(J, A_n) = H^i(\Xi, A_n^J) = \{0\}$. Or A_n est un espace vectoriel sur k, donc d'ordre une puissance de p. L'ordre de J est premier à p, donc $H^i(J, A_n) = \{0\}$. Le groupe A_n^J est encore un espace vectoriel sur k. L'action de Ξ est telle que pour $a \in A_n^J$, $z \in k$ et $\xi \in \Xi$, on ait $\xi(za) = \xi(z)\xi(a)$. Un tel espace est nécessairement de la forme $(A_n^J)^{\Xi} \otimes_{\ell} k$, où $\ell = k^{\Xi}$. La nullité de $H^i(\Xi, A^J)$ résulte alors de celle de $H^i(\Xi, k)$, qui est bien connue. $\square$

De l'homomorphisme $red : F^{mod,\times} \to \mathbb{G}_{m,red}$ se déduit un homomorphisme :

$$T^{mod} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} F^{mod,\times} \to T_{red} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m,red}.$$

La formule (1) de 1.5 permet de le prolonger en un homomorphisme $N^{mod} \to N_{red}$ qui, pour tout $w \in W$, envoie $n(w)$ sur $\bar{n}(w)$. On note encore red ces différents homomorphismes. Ils sont équivariants pour les actions de Γ. Leur noyau commun est T_1^{mod}. Le lemme entraîne que, pour tout sous-groupe fermé Γ' de Γ, l'homomorphisme $N^{mod,\Gamma'} \to N_{red}^{\Gamma'}$ est surjectif.

Remarquons que de la section de red au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$ définie en 1.3 se déduit une section $T_{\varpi} \to T^{mod}$.

Soit $e \in P$. On note F^e le sous-corps des points fixes par $I(e)$ dans F^{mod}. On sait construire l'immeuble de $\mathbf{G}$ vu comme groupe défini sur F^e. On le note $Imm(\mathbf{G}, F^e)$. Le groupe $\mathbf{G}(F^e)$ agit sur cet immeuble. Notons $\mathcal{O}^e$ l'anneau des entiers de F^e. Pour tout $v \in Imm(\mathbf{G}, F^e)$, il existe un unique schéma en groupes $\mathbf{G}_v^e$ sur $\mathcal{O}^e$, lisse, de fibre générique $\mathbf{G}$, tel que $\mathbf{G}_v^e(\mathcal{O}^e)$ soit le sous-groupe des éléments de $\mathbf{G}(F^e)$ qui fixent v. Pour simplifier les notations, on identifie $\mathbf{G}_v^e$ à son groupe de points $\mathbf{G}_v^e(\mathcal{O}^e)$. Notons $\mathbf{T}^e$ le plus grand sous-tore de $\mathbf{T}$ déployé sur F^e. On a $X_*(\mathbf{T}^e) = X_*^{I(e)}$. C'est un sous-tore déployé maximal de $\mathbf{G}$ vu comme groupe sur F^e. Son centralisateur dans $\mathbf{G}$ est

$\mathbf{T}$, son normalisateur est $\mathbf{N}$. Il lui est associé un appartement dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$, sur lequel $\mathbf{N}(F^e)$ agit. En comparant les définitions, on voit que l'on peut identifier cet appartement à $V^{I(e)}$ de sorte que l'action de $n \in \mathbf{N}(F^e)$ soit $red(n)_{\mathbb{R}}$. On peut alors décrire $Imm(\mathbf{G}, F^e)$ comme le quotient de $\mathbf{G}(F^e) \times V^{I(e)}$ par la relation d'équivalence suivante : (g, v) est équivalent à (g', v') si et seulement s'il existe $n \in \mathbf{N}(F^e)$ et $k \in \mathbf{G}_v^e$ tels que $v' = red(n)_{\mathbb{R}}(v)$ et $g' = gkn^{-1}$. Au tore $\mathbf{T}^e$ sont associés un ensemble de racines affines et un groupe de Weyl affine étendu. Ils ne sont autres que Σ_{aff}^e et $\tilde{W}^e$. Dans le cas où $\mathbf{G}$ est semi-simple et simplement connexe, on sait que le groupe de Weyl affine étendu n'est autre que le groupe associé au système de racines affines et qu'il agit de façon simplement transitive sur l'ensemble des chambres. Autrement dit, $\tilde{W}_{sc}^e$ est le groupe de Weyl associé à Σ_{aff}^e et $\tilde{W}^e$ est le produit semi-direct $\tilde{W}_{sc}^e \rtimes \tilde{\mathcal{N}}^e$.

Soient $e, e' \in P$, e divisant e'. Alors $Imm(\mathbf{G}, F^{e'})$ est muni d'une action de $I(e)$, en fait de $I(e)/I(e')$, qui se déduit de l'action de ce groupe sur $\mathbf{G}(F^{e'}) \times V^{I(e')}$. Parce que $F^{e'}/F^e$ est modérément ramifiée, l'ensemble $Imm(\mathbf{G}, F^e)$ s'identifie à celui des points fixes $Imm(\mathbf{G}, F^{e'})^{I(e)}$. De même, pour $v \in Imm(\mathbf{G}, F^e)$, $\mathbf{G}_v^e$ n'est autre que $\mathbf{G}_v^{e', I(e)}$.

1.8

Conservons la situation précédente et rappelons quelques résultats connus, dus pour la plupart à Kottwitz.

Soit $e \in P$. Appliquant la construction ci-dessus au cas $\mathbf{G} = \mathbf{T}$, on dispose, pour tout $v \in V^{I(e)}$, d'un schéma en groupes $\mathbf{T}_v^e$ sur $\mathcal{O}^e$. Il est en fait indépendant de v. On note $\mathbf{T}_c^e$ sa composante neutre. Supposons que $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$. Alors $\mathbf{G}$ est déployé sur F^e. On a l'égalité :

$$\mathbf{T}_c^e = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}^{e,\times} \subseteq X_* \otimes_{\mathbb{Z}} F^{e,\times} = \mathbf{T}(F^e).$$

De la valuation $val : F^{e,\times} \to \frac{1}{e}\mathbb{Z}$ se déduit un homomorphisme $w_T^e : \mathbf{T}(F^e) \to \frac{1}{e}X_*$. La suite suivante est exacte :

$$1 \to \mathbf{T}_c^e \to \mathbf{T}(F^e) \stackrel{w_T^e}{\to} \frac{1}{e}X_* \to 0.$$

Considérons le cas $e = 1$, auquel cas on remplace les exposants e par nr. Pour e comme ci-dessus, la norme $\mathbf{T}(F^e) \to T^{nr}$ est surjective. L'image de $\mathbf{T}_c^e$ est $\mathbf{T}_c^{nr}$. Notons $X_{*,I}$ le groupe des coinvariants de X_* pour l'action de I. La suite exacte ci-dessus se complète en un diagramme à carrés commutatifs et dont les deux suites horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathbf{T}_c^e & \to & \mathbf{T}(F^e) & \stackrel{w_T^e}{\to} & \frac{1}{e}X_* & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & \mathbf{T}_c^{nr} & \to & T^{nr} & \stackrel{w_T}{\to} & X_{*,I} & \to & 0 \end{array}$$

Les deux premières applications verticales sont les normes. La dernière est la composée de la multiplication par e et de la surjection naturelle $X_* \to X_{*,I}$.

On a évidemment $\mathbf{T}(F^e)_1 \subseteq \mathbf{T}_c^e$, $T_1^{nr} \subseteq \mathbf{T}_c^{nr}$ et la norme se restreint en une surjection $\mathbf{T}(F^e)_1 \to T_1^{nr}$. Par l'homomorphisme red, les résultats se transposent de la façon suivante. Notons $\bar{\mathbf{T}}_c$ la composante neutre de $\bar{\mathbf{T}}^I$. Le diagramme ci-dessous jouit des mêmes propriétés que le précédent :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \bar{\mathbf{T}} & \to & T_{red}^{I(e)} & \stackrel{w_T^e}{\to} & \frac{1}{e}X_* & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & \bar{\mathbf{T}}_c & \to & T_{red}^I & \stackrel{w_T}{\to} & X_{*,I} & \to & 0 \end{array}$$

Tout élément de N^I_{red} s'écrit de façon unique $t\bar{n}(w)$, avec $t \in T^I_{red}$, $w \in W^I$. En envoyant un tel élément sur $(w_T(t), w)$, on définit un homomorphisme $N^I_{red} \to X_{*,I} \rtimes W^I$ et de la suite exacte ci-dessus se déduit la suivante :

$$(1) \qquad 1 \to \bar{\mathbf{T}}_c \to N^I_{red} \to X_{*,I} \rtimes W^I \to 1.$$

Considérons la surjection $X_{*,I} \to (X_*/X_{*,sc})_I$. Elle est équivariante pour les actions naturelles de W^I. Mais W agit trivialement sur $X_*/X_{*,sc}$: pour tous $w \in W$, $x_* \in X_*$, on a $w(x_*) - x_* \in X_{*,sc}$. La surjection se prolonge en un homomorphisme surjectif $X_{*,I} \rtimes W^I \to (X_*/X_{*,sc})_I$, dont on déduit un homomorphisme surjectif :

$$(2) \qquad N^I_{red} \to (X_*/X_{*,sc})_I.$$

On a défini le sous-groupe $\mathcal{N}^{nr}_{red} \subseteq N^I_{red}$. Il contient $\bar{\mathbf{T}}^I$ donc aussi $\bar{\mathbf{T}}_c$.

Lemme 1.8.1 : *La suite :*

$$1 \to \bar{\mathbf{T}}_c \to \mathcal{N}^{nr}_{red} \to (X_*/X_{*,sc})_I \to 0$$

est exacte.

Preuve. La suite exacte (1) se complète en un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \uparrow & & \\
 & & & & & & (X_*/X_{*,sc})_I & & \\
 & & & & & & \uparrow & & \\
1 & \to & \bar{\mathbf{T}}_c & \to & N^I_{red} & \to & X_{*,I} \rtimes W^I & \to & 1 \\
 & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & & \uparrow & & \\
1 & \to & \bar{\mathbf{T}}_{c,sc} & \to & N^I_{red,sc} & \to & X_{*,sc,I} \rtimes W^I & \to & 1
\end{array}$$

Ses carrés sont commutatifs. Les trois suites sont exactes. Considérons l'homomorphisme (2). On dispose de trois informations :

- il est surjectif ;
- $\iota(N^I_{red,sc})$ est inclus dans son noyau (cela résulte du diagramme ci-dessus) ;
- on a l'égalité $N^I_{red} = \mathcal{N}^{nr}_{red}\iota(N^I_{red,sc})$ (cela résulte de l'égalité $\tilde{W}^{nr} = \tilde{\mathcal{N}}^{nr}\tilde{W}^{nr}_{sc}$).

Alors (2) restreint à $\mathcal{N}^{nr}_{red}$ reste surjectif.

Le diagramme montre que le noyau de (2) est $\bar{\mathbf{T}}_c\iota(N^I_{red,sc})$. Le noyau de la restriction de (2) à $\mathcal{N}^{nr}_{red}$ est donc $\bar{\mathbf{T}}_c(\iota(N^I_{red,sc}) \cap \mathcal{N}^{nr}_{red})$. Il résulte des définitions que $\iota(N^I_{red,sc}) \cap \mathcal{N}^{nr}_{red} = \iota(\mathcal{N}^{nr}_{red,sc})$. Pour achever la preuve du lemme, il suffit de démontrer :

$$(3) \qquad \mathcal{N}^{nr}_{red,sc} = \bar{\mathbf{T}}_{c,sc}.$$

Soit $n \in \mathcal{N}^{nr}_{red,sc}$. L'action $n_{\mathbb{R}}$ appartient à $\tilde{W}^{nr}_{sc}$ et fixe C^{nr}, c'est donc l'action triviale. Notons (x, w) l'image de n dans $X_{*,sc,I} \rtimes W^I$, et y l'image de x par l'homomorphisme naturel :

$$(4) \qquad X_{*,sc,I} \to X^I_{*,sc} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} \subseteq V^I_{(p)}.$$

On vérifie que, pour tout $v \in V^I_{(p)}$, on a l'égalité $n_{\mathbb{R}}(v) = w(v) - y$. Puisque $n_{\mathbb{R}} = 1$, cela entraîne $w = 1$ et $y = 0$. Mais l'homomorphisme (4) est injectif : I permute les éléments de la base $\check{\Delta}$ de $X_{*,sc}$, donc $X_{*,sc}$ est somme de I-modules induits et $X_{*,sc,I}$ est sans torsion. Alors $x = 0$ et l'image de n dans $X_{*,sc,I} \rtimes W^I$ est nulle. Donc $n \in \bar{\mathbf{T}}_{c,sc}$, ce qui démontre (3). $\square$

On a l'égalité :

$$H^1(\Theta, (X_*/X_{*,sc})_I) = (X_*/X_{*,sc})_{\Gamma,tors},$$

où l'on note ainsi le sous-groupe de torsion de $(X_*/X_{*,sc})_\Gamma$. A un cocycle δ, on associe l'image de $\delta(\theta_1)$ dans $(X_*/X_{*,sc})_\Gamma$. De l'application (2) restreinte à $\mathcal{N}^{nr}_{red}$ se déduit une application :

$$H^1(\Theta, \mathcal{N}^{nr}_{red}) \to (X_*/X_{*,sc})_{\Gamma,tors}.$$

Lemme 1.8.2 : *Cette application est bijective.*

Preuve. Soit $\delta \in (X_*/X_{*,sc})_{\Gamma,tors}$, que l'on remonte en un cocycle de Θ à valeurs dans $(X_*/X_{*,sc})_I$, puis en une application de Θ dans $\mathcal{N}^{nr}_{red}$. Définissons une action tordue de Θ sur $\bar{\mathbf{T}}_c$ par $(\theta, t) \mapsto Ad(\delta(\theta))\theta(t)$. Grâce au lemme précédent, le calcul habituel montre que l'obstruction à relever δ en un élément de $H^1(\Theta, \mathcal{N}^{nr}_{red})$ vit dans le groupe $H^2(\Theta, \bar{\mathbf{T}}_c)$, où Θ agit par cette action tordue. Mais ce groupe de cohomologie est nul car $\bar{\mathbf{T}}_c$ est de torsion ([Se] proposition 2, p.197). L'application de l'énoncé est donc surjective. De même, son injectivité résulte de la nullité d'un groupe $H^1(\Theta, \bar{\mathbf{T}}_c)$. Celle-ci résulte du théorème de Lang : $\bar{\mathbf{T}}_c$ est connexe. $\square$

On fixe un ensemble D de cocycles de Θ à valeurs dans $\mathcal{N}^{nr}_{red}$ tel que l'application naturelle $D \to H^1(\Theta, \mathcal{N}^{nr}_{red})$ soit bijective. On les considérera aussi comme des cocycles définis sur Γ, triviaux sur I.

Revenons à la situation sur F. On note $\mathcal{N}^{nr}$ l'image réciproque de $\mathcal{N}^{nr}_{red}$ par l'homomorphisme *red*. Celui-ci définit une application $H^1(\Theta, \mathcal{N}^{nr}) \to H^1(\Theta, \mathcal{N}^{nr}_{red})$, qui est bijective : cela résulte de la nullité de groupes $H^i(\Theta, T_1^{nr})$; ces nullités se prouvent comme en 1.7. Plus précisément, tout cocycle de Θ dans $\mathcal{N}^{nr}_{red}$ se relève en un cocycle à valeurs dans $\mathcal{N}^{nr}$. Pour tout $d \in D$, on fixe un tel relèvement que l'on note d_F.

1.9

Considérons la situation de 1.7. Kottwitz a défini un homomorphisme surjectif :

$$G^{nr} \stackrel{w_G}{\to} (X_*/X_{*,sc})_I$$

qui possède les propriétés suivantes :

- w_G coïncide sur T^{nr} avec la composée de w_T et de l'homomorphisme naturel $X_{*,I} \to (X_*/X_{*,sc})_I$;

- $\iota(G^{nr}_{sc})$ est inclus dans le noyau de w_G.

Cf. [K3] paragraphe 7. Il en résulte que la restriction de w_G à N^{nr} est la composée de *red* et de l'homomorphisme 1.8(2). D'autre part, on a les égalités :

$$H^1(Gal(F^{sep}/F), \mathbf{G}) = H^1(\Gamma, G^{mod}) = H^1(\Theta, G^{nr}),$$

et w_G définit un isomorphisme :

$$H^1(\Theta, G^{nr}) \stackrel{\sim}{\to} H^1(\Theta, (X_*/X_{*,sc})_I) = (X_*/X_{*,sc})_{\Gamma,tors}.$$

Grâce au lemme 1.8.2, de l'inclusion $\mathcal{N}^{nr} \subseteq G^{nr}$ se déduit une bijection :

$$H^1(\Theta, \mathcal{N}^{nr}) \xrightarrow{\sim} H^1(\Theta, G^{nr}).$$

Alors D s'identifie à un ensemble de cocycles représentant l'ensemble $H^1(\Theta, G^{nr})$.

Tout élément $d \in D$ définit une nouvelle structure de $\mathbf{G}$ sur F. Précisément, on définit $\mathbf{G}_d$ sur F muni d'un isomorphisme $\xi_d : \mathbf{G}_d \to \mathbf{G}$ défini sur F^{nr} et vérifiant $\xi_d \circ \theta = Ad(d_F(\theta)) \circ \theta \circ \xi_d$ pour tout $\theta \in \Theta$. On peut aussi dire que $\xi_d \circ \gamma = Ad(d_F(\gamma)) \circ \gamma \circ \xi_d$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On note $\mathbf{T}_d$ l'image réciproque de $\mathbf{T}$ par ξ_d. Il est stable par l'action de Γ. Notons $\mathbf{T}_{d,F}$ le plus grand sous-tore déployé sur F de $\mathbf{T}_d$.

Lemme 1.9 : *Le tore $\mathbf{T}_{d,F}$ est un sous-tore déployé maximal de $\mathbf{G}_d$.*

Preuve. On sait qu'il existe deux sous-tores $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}_2$ de $\mathbf{G}_d$, définis sur F, tels que $\mathbf{T}_1$ soit déployé sur F, maximal et $\mathbf{T}_2$ soit déployé sur F^{nr}, maximal. Fixons-les. Soit $\mathbf{T}_3$ le plus grand sous-tore de $\mathbf{T}$ déployé sur F^{nr}. Les tores $\xi_d(\mathbf{T}_2)$ et $\mathbf{T}_3$ sont tous deux des sous-tores de $\mathbf{G}$ déployés sur F^{nr}, maximaux. Il existe donc $g \in G^{nr}$ tel que $Ad(g) \circ \xi_d(\mathbf{T}_2) = \mathbf{T}_3$. Fixons un tel g. Pour $\theta \in \Theta$, posons $d'_F(\theta) = g d_F(\theta) \theta(g)^{-1}$. Posons $\xi_{d'} = Ad(g) \circ \xi_d$. On a $\xi_{d'} \circ \theta = Ad(d'_F(\theta)) \circ \theta \circ \xi_{d'}$. Puisque $\mathbf{T}_2$ et $\mathbf{T}_3$ sont définis sur F, cette relation entraîne que $d'_F(\theta)$ normalise $\mathbf{T}_3$. Le centralisateur de $\mathbf{T}_3$ est $\mathbf{T}$. Donc $d'_F(\theta)$ normalise $\mathbf{T}$, i.e. $d'_F(\theta) \in N^{nr}$. Notons $X_*^{d'}$ le $\mathbb{Z}$-module des $x_* \in X_*^I$ tels que $d'_F(\theta)\theta(x_*) = x_*$ pour tout $\theta \in \Theta$. Dans cette relation, $d'_F(\theta)$ agit par l'action naturelle de $\mathbf{N}$ dans X_*. On a $X_*^{d'} = \xi_{d'}(X_*(\mathbf{T}_1))$. Pour $n \in N^{nr}$, posons pour simplifier $n_{\mathbb{R}} = red(n)_{\mathbb{R}}$. Notons $V^{d'}$ le sous-ensemble des $v \in V^I$ tels que $d'_F(\theta)_{\mathbb{R}}\theta(v) = v$ pour tout $\theta \in \Theta$, ou encore des $v \in V$ tels que $d'_F(\gamma)_{\mathbb{R}}\gamma(v) = v$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. C'est un sous-espace affine de V de partie vectorielle $X_*^{d'} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Donc $dim_{\mathbb{R}}(V^{d'}) = dim_F(\mathbf{T}_1)$. On définit de même V^d et on a $dim_{\mathbb{R}}(V^d) = dim_F(\mathbf{T}_{d,F})$. On a défini une décomposition de V^I en facettes. Parmi les facettes qui coupent $V^{d'}$, choisissons-en une de dimension maximale. Notons-la ϕ. On peut choisir $n' \in N^{nr}$ tel que $n'_{\mathbb{R}}(\phi)$ soit incluse dans l'adhérence $\bar{C}^{nr}$ de la chambre C^{nr}. Quitte à remplacer d'_F par $\theta \mapsto n' d'_F(\theta)\theta(n')^{-1}$ et $\xi_{d'}$ par $Ad(n') \circ \xi_{d'}$, on est ramené au cas où $\phi \subseteq \bar{C}^{nr}$. Puisque $\phi \cap V^{d'} \neq \emptyset$, $d'_F(\theta_1)_{\mathbb{R}}\theta_1$ conserve la facette ϕ. Les chambres C^{nr} et $d'_F(\theta_1)_{\mathbb{R}}\theta_1(C^{nr})$ possèdent toutes deux ϕ dans leur adhérence. Il est connu que cela entraîne l'existence de $n \in N_{sc}^{nr}$ tel que $n_{\mathbb{R}}(\phi) = \phi$ et $n_{\mathbb{R}} d'(\theta_1)_{\mathbb{R}}\theta_1(C^{nr}) = C^{nr}$. Puisque C^{nr} est stable par θ_1, elle l'est aussi par $n_{\mathbb{R}} d'_F(\theta_1)_{\mathbb{R}}$. Alors $\iota(n) d'_F(\theta_1) \in \mathcal{N}^{nr}$. Rappelons que l'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}^{nr} \arrow[rr] \arrow[dr] & & (X_*/X_{*,sc})_I \arrow[r] & (X_*/X_{*,sc})_\Gamma \\ & G^{nr} \arrow[ur, "w_G"'] & & \end{tikzcd}$$

Puisque $\iota(G_{sc}^{nr})$ est contenu dans le noyau de w_G, l'image de $\iota(n)d'_F(\theta_1)$ dans $(X_*/X_{*,sc})_\Gamma$ est la même que celle de $d'_F(\theta_1)$. C'est aussi celle de $d_F(\theta_1)$ puisque d_F et d'_F définissent le même élément de $H^1(\Theta, G^{nr})$. Il existe donc $m \in \mathcal{N}^{nr}$ tel que les deux éléments $\iota(n)d'_F(\theta_1)$ et $m^{-1}d_F(\theta_1)\theta_1(m)$ aient même image dans $(X_*/X_{*,sc})_I$. Grâce au lemme 1.8.1, on a alors :

$$(1) \qquad n_{\mathbb{R}} d'_F(\theta_1)_{\mathbb{R}} = m_{\mathbb{R}}^{-1} d_F(\theta_1)_{\mathbb{R}} \theta_1 m_{\mathbb{R}}.$$

Rappelons que $n_{\mathbb{R}}(\phi) = \phi$. Puisque $n \in N_{sc}^{nr}$, cela entraîne que $n_{\mathbb{R}}$ fixe ϕ point par point. Parce que ϕ est de dimension maximale parmi les facettes qui coupent $V^{d'}$, l'intersection $\phi \cap V^{d'}$ est ouverte dans $V^{d'}$ ([La], lemme 10.14). Alors $n_{\mathbb{R}}$ fixe point par point un ouvert non vide de $V^{d'}$, donc fixe tout point de $V^{d'}$. Donc $V^{d'}$ est fixé point par point par $n_{\mathbb{R}}d'_F(\theta_1)_{\mathbb{R}}\theta_1$. De l'égalité (1) résulte que $m_{\mathbb{R}}(V^{d'})$ est fixé point par point par $d_F(\theta_1)_{\mathbb{R}}\theta_1$. Puisque θ_1 engendre topologiquement Θ, cela entraîne l'inclusion $m_{\mathbb{R}}(V^{d'}) \subseteq V^d$. Alors $dim_{\mathbb{R}}(V^d) \geq dim_{\mathbb{R}}(V^{d'})$, ou encore $dim_F(\mathbf{T}_{d,F}) \geq dim_F(\mathbf{T}_1)$. Puisque $\mathbf{T}_1$ a été choisi déployé maximal, $\mathbf{T}_{d,F}$ l'est aussi. $\square$

Notons $V(d)$ l'espace V muni de l'action de Γ : $(\gamma, v) \mapsto d(\gamma)_{\mathbb{R}}\gamma(v)$. Soit $e \in P$ tel que $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$. De même que l'on a construit l'immeuble $Imm(\mathbf{G}, F^e)$ comme quotient de $\mathbf{G}(F^e) \times V$, on construit l'immeuble $Imm(\mathbf{G}_d, F^e)$ comme quotient de $\mathbf{G}_d(F^e) \times V(d)$ (ces deux immeubles sont d'ailleurs isomorphes). L'action naturelle de Γ sur ce produit passe au quotient en une action sur l'immeuble. Grâce au lemme précédent, on peut identifier l'immeuble $Imm(\mathbf{G}_d, F)$ de $\mathbf{G}_d$ sur F au sous-ensemble des points fixes de cette action de Γ dans $Imm(\mathbf{G}_d, F^e)$. L'appartement associé à $\mathbf{T}_{d,F}$ est l'ensemble V^d des points fixes de Γ dans $V(d)$.

Soit $v \in V^d$. Il existe un schéma en groupes $\mathbf{G}_{d,v}$ sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de F, de fibre générique $\mathbf{G}_d$, et un isomorphisme $\mathbf{G}_{d,v}(\mathcal{O}^{nr}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_v^{nr}$, défini sur $\mathcal{O}^{nr}$, qui prolonge l'isomorphisme ξ_d des fibres génériques. On note encore ξ_d cet isomorphisme.

1.10

Soit $F \in CL_q$. Revenons sur la définition de l'homomorphisme :

$$G^{nr} \xrightarrow{w_G} (X_*/X_{*,sc})_I.$$

Kottwitz a introduit la notion de z-extension de $\mathbf{G}$, cf. [K2]. Il s'agit d'une suite exacte :

$$1 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{a} \tilde{\mathbf{G}} \xrightarrow{b} \mathbf{G} \to 1$$

où :

$\tilde{\mathbf{G}}$ est un groupe réductif défini sur F ;

$\mathbf{Z}$ est un tore défini sur F ;

a et b sont des homomorphismes de groupes définis sur F ;

(1) le groupe dérivé de $\tilde{\mathbf{G}}$ est simplement connexe ;

$a(\mathbf{Z})$ est central dans $\tilde{\mathbf{G}}$;

(2) $X_*(\mathbf{Z})$ est un $Gal(F^{sep}/F)$-module induit, c'est-à-dire de la forme $Ind_{\Gamma'}^{Gal(F^{sep}/F)}(Y)$, où Γ' est un sous-groupe ouvert de $Gal(F^{sep}/F)$ et Y est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini muni de l'action triviale de Γ'.

De telles z-extensions existent. Dans notre situation où $\mathbf{G}$ est quasi-déployé et où $Gal(F^{sep}/F^{mod})$ agit trivialement sur $\mathcal{D}$, le groupe $\tilde{\mathbf{G}}$ est lui-aussi quasi-déployé et on peut imposer que $Gal(F^{sep}/F^{mod})$ agit trivialement sur la donnée de racines associée à $\tilde{\mathbf{G}}$, ainsi que sur $X_*(\mathbf{Z})$.

Fixons une z-extension vérifiant ces conditions. Les groupes $b^{-1}(\mathbf{B})$ et $\tilde{\mathbf{T}} = b^{-1}(\mathbf{T})$ sont respectivement un sous-groupe de Borel et un sous-tore maximal de $\tilde{\mathbf{G}}$. Notons $\tilde{\mathcal{D}} = (\tilde{X}^*, \tilde{\Sigma}, \tilde{\Delta}, \tilde{X}_*, \tilde{\check{\Sigma}}, \tilde{\check{\Delta}})$ la donnée de racines de $\tilde{\mathbf{G}}$ associée à ces sous-groupes. Alors b définit un homomorphisme encore noté $b : \tilde{X}_* \to X_*$ qui se restreint en des bijections de $\tilde{\check{\Sigma}}$ sur $\check{\Sigma}$ et de $\tilde{\check{\Delta}}$ sur $\check{\Delta}$.

Remarquons qu'au niveau des revêtements simplement connexes des groupes dérivés, il n'y a pas de différence entre $\tilde{\mathbf{G}}$ et $\mathbf{G}$. Autrement dit, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\tilde{\mathbf{G}} & \stackrel{b}{\to} & \mathbf{G} \\ \nwarrow \tilde{\iota} & & \nearrow \iota \\ & \mathbf{G}_{sc} & \end{array}$$

Grâce à (2), $H^1(I,\mathbf{Z}) = \{0\}$, d'où :

(3) l'homomorphisme $\tilde{G}^{nr} \stackrel{b}{\to} G^{nr}$ est surjectif.

Notons $\tilde{\mathbf{G}}_{ab}$ le tore de groupe de cocaractères $\tilde{X}_*/\tilde{X}_{*,sc}$. De l'homomorphisme $\tilde{X}_* \to \tilde{X}_*/\tilde{X}_{*,sc}$ se déduit un homomorphisme $\tilde{\mathbf{T}} \to \tilde{\mathbf{G}}_{ab}$. Grâce à (1), il se prolonge en un homomorphisme $c : \tilde{\mathbf{G}} \to \tilde{\mathbf{G}}_{ab}$. On dispose enfin de l'homomorphisme $\tilde{G}^{nr}_{ab} \stackrel{w_{\tilde{G}_{ab}}}{\to} (\tilde{X}_*/\tilde{X}_{*,sc})_I$. Alors :

(4) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}\tilde{G}^{nr} & \stackrel{c}{\to} & \tilde{G}^{nr}_{ab} & \stackrel{w_{\tilde{G}_{ab}}}{\to} & (\tilde{X}_*/\tilde{X}_{*,sc})_I \\ \downarrow b & & & & \downarrow b \\ G^{nr} & & \stackrel{w_G}{\to} & & (X_*/X_{*,sc})_I.\end{array}$$

Cf. [K3] paragraphe 7.

2 Groupes parahoriques, filtrations de Moy-Prasad

2.1

Soit $e \in P$ tel que $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$. Soit $F \in CL_q$. On a associé au point $v = 0 \in V^{I(e)}$ un schéma en groupes $\mathbf{G}^e_0$ sur $\mathcal{O}^e$. Notons $\tilde{\mathbf{G}}^e_0$ sa fibre spéciale, $\pi : \mathbf{G}^e_0 \to \tilde{\mathbf{G}}^e_0$ la réduction naturelle et notons de même la dérivée $\mathfrak{g}^e_0 \to \tilde{\mathfrak{g}}^e_0$. On sait que $\tilde{\mathbf{G}}^e_0$ est réductif connexe sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ parce que le point 0 est hyperspécial, et les images par π de $\mathbf{G}^e_0 \cap \mathbf{B}(F^e)$, resp. $\mathbf{G}^e_0 \cap \mathbf{T}(F^e)$, sont les groupes de points sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ d'un sous-groupe de Borel, resp. d'un sous-tore maximal $\tilde{\mathbf{T}}$, de $\tilde{\mathbf{G}}^e_0$. Soit $x_* \in X_*$. Cet élément définit un homomorphisme de $F^{e\times}$ dans $\mathbf{T}(F^e)$. Par restriction, on obtient un homomorphisme de $\mathcal{O}^{e,\times}$ dans $\mathbf{G}^e_0 \cap \mathbf{T}(F^e)$, qui se réduit en un homomorphisme $\tilde{x}_*$ de $\bar{\mathbb{F}}_q^\times$ dans $\tilde{\mathbf{T}}$. L'application $x_* \mapsto \tilde{x}_*$ identifie X_* à $X_*(\tilde{\mathbf{T}})$. On sait que, par cet isomorphisme, Σ s'identifie au système de racines de $\tilde{\mathbf{T}}$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}^e_0$. Introduisons le $\mathcal{O}^e$-module $\mathfrak{t}(\mathcal{O}^e) = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}^e \subseteq X_* \otimes_{\mathbb{Z}} F^e = \mathfrak{t}(F^e)$. Alors $\mathfrak{g}^e_0$ est somme directe de $\mathfrak{t}(\mathcal{O}^e)$ et des $\mathcal{O}^e$-modules engendrés par les E_α, pour $\alpha \in \Sigma$. La famille $(\pi(E_\alpha))_{\alpha\in\Delta}$ est un épinglage de $\tilde{\mathfrak{g}}^e_0$. On peut alors identifier le groupe $\tilde{\mathbf{G}}^e_0$ au groupe $\bar{\mathbf{G}}$ de 1.6 de sorte que :

- $\tilde{\mathbf{T}}$ s'identifie à $\bar{\mathbf{T}}$, l'identification étant compatible aux isomorphismes déjà introduits $X_*(\tilde{\mathbf{T}}) \simeq X_* \simeq X_*(\bar{\mathbf{T}})$;

- pour tout $\alpha \in \Delta$, $\pi(E_\alpha)$ s'identifie à $\bar{E}_\alpha$.

On identifie désormais les deux groupes. Alors π devient un homomorphisme de $\mathbf{G}^e_0$ dans $\bar{\mathbf{G}}$. Il résulte des constructions que :

(1) $\mathbf{N}(F^e) \cap \mathbf{G}^e_0$ est l'image réciproque de $\bar{\mathbf{N}}$ par l'application red et π coïncide avec red sur cette intersection.

La famille $(\pi(E_\alpha))_{\alpha\in\Sigma}$ prolonge l'épinglage $(\bar{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$. On voit qu'elle vérifie les conditions imposées en 1.5. Comme on l'a dit, ces conditions déterminent la famille à des signes près. Pour tout $\alpha \in \Sigma$, il existe donc $\epsilon_\alpha \in \{\pm 1\}$ tel que $\pi(E_\alpha) = \epsilon_\alpha \bar{E}_\alpha$. On a nécessairement $\epsilon_\alpha = 1$ pour $\alpha \in \pm\Delta$. Quitte à modifier notre famille de départ $(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ en la multipliant par les mêmes signes, on suppose désormais que $\pi(E_\alpha) = \bar{E}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma$.

2.2

On a défini en 1.2 une forme bilinéaire $I \times \mathbb{Z}_{(p)} \to \bar{\mathbb{F}}_q^\times$ et en 1.6 l'ensemble $V_{(p)}$. Puisque $V_{(p)}^I = X_*^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\bar{\mathbf{T}}_c = X_*^I \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_q^\times$, de la forme bilinéaire ci-dessus s'en déduit une autre :

$$\begin{array}{ccc} I \times V_{(p)}^I & \to & \bar{\mathbf{T}}_c \\ (\sigma, v) & \mapsto & v(\sigma). \end{array}$$

On peut aussi la définir de la façon suivante. Pour $v \in V_{(p)}$, il existe un unique élément $t_v \in T_\varpi$ tel que $t_{v,\mathbb{R}}(0) = v$ (quand on identifie $T_\varpi = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} = V_{(p)}$, on a $t_v = -v$). On a défini une action de Γ sur $T_{red} = T_\varpi \bar{\mathbf{T}}$. Pour $(\sigma, v) \in I \times V_{(p)}^I$, on a l'égalité $v(\sigma) = \sigma(t_v)t_v^{-1}$.

Soit $v \in V_{(p)}^I$. Le groupe I agit sur $\bar{\mathbf{G}}$. Pour $\sigma \in I$, on note $\rho_v(\sigma)$ l'automorphisme $Ad(v(\sigma)) \circ \sigma$ de $\bar{\mathbf{G}}$. L'application $\sigma \mapsto \rho_v(\sigma)$ est un homomorphisme. On note $\bar{\mathbf{G}}_v$ le sous-groupe des éléments de $\bar{\mathbf{G}}$ fixes par $\rho_v(\sigma)$ pour tout $\sigma \in I$. C'est un groupe réductif sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, en général non connexe.

Soient $(v, r) \in V_{(p)}^I \times \mathbb{Z}_{(p)}$. On pose :

$$\bar{\mathfrak{g}}_{v,r} = \{X \in \bar{\mathfrak{g}}; \forall \sigma \in I,\, \rho_v(\sigma)(X) = r(\sigma)X\}.$$

Cet espace est stable par l'action de $\bar{\mathbf{G}}_v$. Dans le cas où $r = 0$, c'est l'algèbre de Lie du groupe $\bar{\mathbf{G}}_v$.

Considérons deux couples (v, r), $(v', r') \in V_{(p)}^I \times \mathbb{Z}_{(p)}$. Choisissons un entier $e \in P$ tel que ev, $ev' \in X_*$ et er, $er' \in \mathbb{Z}$. Posons $x_* = ev' - ev$. Il définit un homomorphisme de $\bar{\mathbb{F}}_q^\times$ dans $\bar{\mathbf{T}}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, posons :

$$\bar{\mathfrak{g}}[i] = \{X \in \bar{\mathfrak{g}}; \forall z \in \bar{\mathbb{F}}_q^\times,\, Ad(x_*(z))(X) = z^i X\},$$

$$\bar{\mathfrak{g}}[\geq i] = \oplus_{j \geq i} \bar{\mathfrak{g}}[j].$$

On vérifie que les espaces $\bar{\mathfrak{g}}[er' - er]$, $\bar{\mathfrak{g}}[\geq er' - er]$ et $\bar{\mathfrak{g}}[\geq er' - er + 1]$ ne dépendent pas du choix de e. De plus, $\bar{\mathfrak{g}}_{v,r}$ est somme directe de ses intersections avec chacun des $\bar{\mathfrak{g}}[i]$. On pose :

$$\bar{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'} = \bar{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \bar{\mathfrak{g}}[er' - er],$$

$$\bar{\mathfrak{u}}_{v,r;v',r'} = \bar{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \bar{\mathfrak{g}}[\geq er' - er + 1],$$

$$\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'} = \bar{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \bar{\mathfrak{g}}[\geq er' - er].$$

Dans le cas où $r = r' = 0$, $\bar{\mathfrak{p}}_{v,0;v',0}$ est une sous-algèbre parabolique de $\bar{\mathfrak{g}}_{v,0}$, $\bar{\mathfrak{m}}_{v,0;v',0}$ en est une sous-algèbre de Lévi et $\bar{\mathfrak{u}}_{v,0;v',0}$ est son radical nilpotent.

2.3

Soient $F \in CL_q$ et $v \in V_{(p)}^I$. Choisissons un entier $e \in P$ tel que $ev \in X_*$ et $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$. On dispose des schémas en groupes $\mathbf{G}_v^{nr}$ sur $\mathcal{O}^{nr}$ et $\mathbf{G}_v^e$ sur $\mathcal{O}^e$. Notons $\tilde{\mathbf{G}}_v^{nr}$ et $\tilde{\mathbf{G}}_v^e$ les plus grands quotients réductifs de leurs fibres spéciales. On a déjà dit que $\mathbf{G}_v^{nr} = \mathbf{G}_v^{e,I}$. L'action de I sur $\mathbf{G}_v^e$ se descend en une action sur $\tilde{\mathbf{G}}_v^e$ et l'égalité précédente se complète en un diagramme commutatif :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{G}_v^{nr} & = & \mathbf{G}_V^{e,I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathbf{G}}_v^{nr} & = & \tilde{\mathbf{G}}_v^{e,I} \end{array} .$$

cf. [Le] paragraphe 3.5.

On a noté t_v l'élément de T_ϖ tel que $t_{v,\mathbb{R}}(0) = v$. On a défini en 1.7 une section $T_\varpi \to T^{mod}$. On note $t_{F,v}$ l'image de t_v par cette section. Sa définition et l'hypothèse sur e montrent que $t_{F,v}$ appartient à $\mathbf{T}(F^e)$. On a $\mathbf{G}_v^e = Ad(t_{F,v})(\mathbf{G}_0^e)$. On définit un homomorphisme :

$$\pi_v : \mathbf{G}_v^{nr} \to \bar{\mathbf{G}}$$

composé de $\pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})$ et de l'inclusion $\mathbf{G}_v^{nr} \subseteq \mathbf{G}_v^e$.

Lemme 2.3.1 : *L'homomorphisme π_v a pour image $\bar{\mathbf{G}}_v$ et se quotiente en un isomorphisme de $\tilde{\mathbf{G}}_v^{nr}$ sur $\bar{\mathbf{G}}$.*

Preuve. D'après le diagramme (1) et les propriétés de π, π_v se quotiente en un isomorphisme de $\tilde{\mathbf{G}}_v^{nr}$ sur le sous-groupe des points fixes dans $\bar{\mathbf{G}}$ pour une certaine action $\sigma \mapsto \rho(\sigma)$ de I. Cette action est obtenue par réduction via $\pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})$ de l'action naturelle dans $\mathbf{G}_v^e$. Autrement dit, pour $\sigma \in I$, on a :

$$\rho(\sigma) \circ \pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1}) = \pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1}) \circ \sigma.$$

On calcule :

$$\rho(\sigma) \circ \pi = \pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1}) \circ \sigma \circ Ad(t_{F,v}) = \pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1}\sigma(t_{F,v})) \circ \sigma = Ad(v(\sigma)) \circ \pi \circ \sigma = \rho_v(\sigma) \circ \pi.$$

D'où l'égalité $\rho(\sigma) = \rho_v(\sigma)$ puis le lemme.□

Remarquons la propriété suivante :

(2) pour tout $n \in N^{mod} \cap \mathbf{G}_v^e$, on a les égalités $\pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})(n) = t_v^{-1} red(n) t_v = \pi_N \circ red(n)$.

La première égalité résulte de 2.1(1). En vertu de cette égalité, $t_v^{-1} red(n) t_v$ appartient à $\bar{\mathbf{N}}$, donc est égal à sa projection par π_N. Cette projection est égale à $\pi_N \circ red(n)$ puisque $\pi_N(t_v) = 1$.

Soient $e \in P$ et $(v, r) \in V^{I(e)} \times \mathbb{R}$. Moy et Prasad ont défini un $\mathcal{O}^e$-réseau $\mathfrak{g}_{v,r}^e$ de $\mathfrak{g}(F^e)$. Rappelons sa définition. On a noté Σ^e l'ensemble des orbites de l'action de $I(e)$ dans Σ. Pour $\alpha \in \Sigma^e$, on pose $\mathfrak{u}_\alpha = \oplus_{\beta \in \alpha} \mathfrak{u}_\beta$. Le réseau $\mathfrak{g}_{v,r}^e$ est somme de ses intersections avec $\mathfrak{t}(F^e)$ et avec les $\mathfrak{u}_\alpha(F^e)$ pour $\alpha \in \Sigma^e$. On a :

$$\mathfrak{g}_{v,r}^e \cap \mathfrak{t}(F^e) = \{X \in \mathfrak{t}(F^e); \forall x^* \in X^*,\, val(x^*(X)) \geq r\},$$

et, pour $\alpha \in \Sigma^e$,

$$\mathfrak{g}_{v,r}^e \cap \mathfrak{u}_\alpha(F^e) = \{X = \sum_{\beta \in \alpha} x_\beta E_\beta \in \mathfrak{u}_\alpha(F^e); \forall \beta \in \alpha,\, val(x_\beta) \geq r - \alpha(v)\}.$$

L'application $r \mapsto \mathfrak{g}_{v,r}^e$ est décroissante. On pose :

$$\mathfrak{g}_{v,r+}^e = \bigcup_{s > r} \mathfrak{g}_{v,s}^e.$$

Pour $(v, r) \in V^I \times \mathbb{R}$, on a les égalités $\mathfrak{g}_{v,r}^{nr} = \mathfrak{g}_{v,r}^{e,I}$, $\mathfrak{g}_{v,r+}^{nr} = \mathfrak{g}_{v,r+}^{e,I}$.

Supposons que $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$. Pour $(v, r) = (0, 0)$, $\mathfrak{g}_{0,0}^e$ est égal à l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}_0^e$ déjà introduite en 2.1. Pour $v = 0$ et $r = \frac{n}{e}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathfrak{g}_{0,r}^e = \varpi_{\frac{1}{e}}^n \mathfrak{g}_{0,0}^e$.

Soit maintenant $(v,r) \in V_{(p)}^I \times \mathbb{Z}_{(p)}$. Choisissons $e \in P$ tel que $ev \in X_*$, $er \in \mathbb{Z}$ et $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$. On a l'égalité $\mathfrak{g}_{v,r}^e = Ad(t_{F,v})(\varpi_{\frac{1}{e}}^{er}\mathfrak{g}_{0,0}^e)$. Notons encore $\pi : \mathfrak{g}_{0,0}^e \to \bar{\mathfrak{g}}$ la dérivée de l'homomorphisme de 2.1. On définit une application linéaire :

$$\pi_{v,r} : \mathfrak{g}_{v,r}^{nr} \to \bar{\mathfrak{g}}$$

comme la composée de la suite d'applications :

$$\mathfrak{g}_{v,r}^{nr} = \mathfrak{g}_{v,r}^{e,I} \subseteq \mathfrak{g}_{v,r}^{e} \stackrel{Ad(t_{F,v}^{-1})}{\to} \varpi_{\frac{1}{e}}^{er}\mathfrak{g}_{0,0}^e \stackrel{\times\varpi_{\frac{1}{e}}^{-er}}{\to} \mathfrak{g}_{0,0}^e \stackrel{\pi}{\to} \bar{\mathfrak{g}}.$$

Lemme 2.3.2 : *L'application $\pi_{v,r}$ a pour image $\bar{\mathfrak{g}}_{v,r}$ et se quotiente en un isomorphisme de $\mathfrak{g}_{v,r}^{nr}/\mathfrak{g}_{v,r+}^{nr}$ sur $\bar{\mathfrak{g}}_{v,r}$.*

Preuve. Oubliant l'inclusion de $\mathfrak{g}_{v,r}^{nr}$ dans $\mathfrak{g}_{v,r}^e$, la suite d'applications précédente définit une application linéaire encore notée $\pi_{v,r} : \mathfrak{g}_{v,r}^e \to \bar{\mathfrak{g}}$. Elle se quotiente en un isomorphisme $\mathfrak{g}_{v,r}^e/\mathfrak{g}_{v,r+}^e \stackrel{\sim}{\to} \bar{\mathfrak{g}}$. Cet isomorphisme entrelace l'action naturelle de I sur $\mathfrak{g}_{v,r}^e/\mathfrak{g}_{v,r+}^e$ avec une certaine action $\sigma \mapsto \rho(\sigma)$ de I dans $\bar{\mathfrak{g}}$. On calcule cette action comme dans le lemme précédent. Pour $X \in \bar{\mathfrak{g}}$ et $\sigma \in I$, on a $\rho(\sigma)(X) = r(\sigma)^{-1}\rho_v(\sigma)(X)$. Alors $\pi_{v,r}$ se restreint en un isomorphisme de $(\mathfrak{g}_{v,r}^e/\mathfrak{g}_{v,r+}^e)^I$ sur $\bar{\mathfrak{g}}_{v,r}$. Un lemme analogue au lemme 1.7 montre que $\mathfrak{g}_{v,r+}^e$ est cohomologiquement trivial. On en déduit les égalités :

$$(\mathfrak{g}_{v,r}^e/\mathfrak{g}_{v,r+}^e)^I = \mathfrak{g}_{v,r}^{e,I}/\mathfrak{g}_{v,r+}^{e,I} = \mathfrak{g}_{v,r}^{nr}/\mathfrak{g}_{v,r+}^{nr}. \square$$

2.4

Pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$, on pose $\bar{\mathfrak{u}}_\alpha = \oplus_{\beta\in\alpha}\bar{\mathfrak{u}}_\beta$. On étend Σ^{nr} en $\tilde{\Sigma}^{nr} = \Sigma^{nr} \cup \{0\}$ et on pose $\bar{\mathfrak{u}}_0 = \bar{\mathfrak{t}}$. Pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}$, on note R_α l'ensemble des $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ tels qu'il existe un élément non nul $X \in \bar{\mathfrak{u}}_\alpha$ vérifiant $\sigma(X) = r(\sigma)X$ pour tout $\sigma \in I$. L'ensemble R_α est stable par translations par $\mathbb{Z}$ et son image dans $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ est finie. Dans l'espace $V^I \times \mathbb{R}$, considérons la collection des hyperplans $\{(v,r) \in V^I \times \mathbb{R}; r - \alpha(v) = r_\alpha\}$, pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}$ et $r_\alpha \in R_\alpha$. Cette collection définit une décomposition de $V^I \times \mathbb{R}$ en facettes. On note Φ l'ensemble de ces facettes. Chaque facette est stable par translations par V_{cent}^I. Pour tout $\phi \in \Phi$, le sous-ensemble ϕ/V_{cent}^I de $(V^I/V_{cent}^I)\times\mathbb{R}$ est relativement compact. Sa projection sur $\mathbb{R}$ est un intervalle borné dont on note $r(\phi)$ la borne supérieure. Remarquons que l'intervalle peut être ouvert ou fermé en chacune de ses extrémités et $r(\phi)$ ne lui appartient pas toujours.

Lemme 2.4.1 : *Soit $\phi \in \Phi$. Alors l'intersection $\phi \cap (V_{(p)}^I \times \mathbb{Z}_{(p)})$ est dense dans ϕ. De plus $r(\phi) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.*

Preuve. Par définition de la décomposition en facettes, il existe :
- une décomposition en union disjointe $\tilde{\Sigma}^{nr} = \tilde{\Sigma}_=^{nr} \sqcup \tilde{\Sigma}_{\neq}^{nr}$;
- pour tout $\alpha \in \tilde{\Sigma}_=^{nr}$, un élément $r_\alpha \in R_\alpha$;
- pour tout $\alpha \in \tilde{\Sigma}_{\neq}^{nr}$, deux éléments consécutifs $r_\alpha^- < r_\alpha^+$ de R_α ;

de sorte que ϕ soit l'ensemble des $(v,r) \in V^I \times \mathbb{R}$ vérifiant les conditions :
(1) pour tout $\alpha \in \tilde{\Sigma}_=^{nr}$, $r - \alpha(v) = r_\alpha$;

(2) pour tout $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}$, $r^-_\alpha < r - \alpha(v) < r^+_\alpha$.

Fixons un sous-ensemble $A \subseteq \tilde{\Sigma}^{nr}_{=} \cap \Sigma^{nr}$, linéairement indépendant et maximal. L'hypothèse $(P'_{\Sigma^{nr}})$ nous permet de fixer un sous-ensemble $B \subseteq Hom_{\mathbb{Z}}(X^I_*, \mathbb{Z})$, disjoint de A, tel que $A \cup B$ soit linéairement indépendant et tel que :

(3) $\mathbb{Z}_{(p)}[A \cup B] = Hom_{\mathbb{Z}}(X^I_*, \mathbb{Z}_{(p)})$.

Pour tout $\beta \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}$, écrivons $\beta = \sum_{\alpha \in A} c_{\beta,\alpha}\alpha$ avec des $c_{\beta,\alpha} \in \mathbb{Q}$ (si $\beta = 0$, $c_{\beta,\alpha} = 0$ pour tout α). L'égalité précédente impose que $c_{\beta,\alpha} \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Je dis que la condition (1) est équivalente à la réunion des deux conditions :

(4) pour tout $\alpha \in A$, $r - \alpha(v) = r_\alpha$;

(5) pour tout $\beta \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}$, on a l'égalité $r(1 - \sum_{\alpha \in A} c_{\beta,\alpha}) = r_\beta - \sum_{\alpha \in A} c_{\beta,\alpha} r_\alpha$.

En effet, soient (v, r) vérifiant (4) et $\beta \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}$. On a :

$$r - \beta(v) = r - \sum_{\alpha \in A} c_{\beta,\alpha}\alpha(v) = r - \sum_{\alpha \in A} c_{\beta,\alpha}(r - r_\alpha).$$

Que ce terme soit égal à r_β est équivalent à l'égalité (5).

Considérons la condition :

(6) il existe $\beta \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}$ tel que $\sum_{\alpha \in A} c_{\beta,\alpha} \neq 1$

(elle est vérifiée si $0 \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}$). Supposons-la vérifiée. Alors la projection de ϕ dans $\mathbb{R}$ est réduite à un seul point, qui appartient à $\mathbb{Z}_{(p)}$. En effet, soient $(v, r) \in \phi$ et β vérifiant (6). La condition (5) pour ce β détermine r, qui appartient bien à $\mathbb{Z}_{(p)}$ grâce à $(P''_{\Sigma^{nr}})$. Le réel $r(\phi)$ est nécessairement égal à cet unique point et appartient donc à $\mathbb{Z}_{(p)}$. Soit de nouveau $(v, r) \in \phi$. Choisissons $v' \in V^I$ tel que $\alpha(v) = \alpha(v')$ pour $\alpha \in A$, $b(v') \in \mathbb{Z}_{(p)}$ pour $b \in B$ et $b(v') - b(v)$ soit assez petit. La condition (2), étant ouverte, est encore vérifiée pour (v', r). Les conditions (4) et (5) sont aussi vérifiées pour (v', r) puisqu'elles le sont pour (v, r). Donc $(v', r) \in \phi$. On a imposé que $b(v') \in \mathbb{Z}_{(p)}$ pour $b \in B$. On a aussi $\alpha(v') \in \mathbb{Z}_{(p)}$ pour $\alpha \in A$ puisque $\alpha(v') = r - r_\alpha$. Grâce à (3), on en déduit que $v' \in V^I_{(p)}$. Cela démontre que $\phi \cap (V^I_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$ est dense dans ϕ.

On suppose maintenant que (6) n'est pas vérifiée. La condition (5) devient indépendante de (v, r). Puisque ϕ n'est pas vide, elle est toujours vérifiée et on peut l'oublier. Soit $(v, r) \in \phi$. Choisissons $r' \in \mathbb{Z}_{(p)}$ tel que $r' - r$ soit assez petit et $v' \in V^I$ tel que $\alpha(v') = r' - r_\alpha$ pour $\alpha \in A$, $b(v') \in \mathbb{Z}_{(p)}$ pour $b \in B$ et $b(v') - b(v)$ soit assez petit. On montre comme ci-dessus que $(v', r') \in \phi \cap (V^I_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$. On en déduit que cette intersection est dense dans ϕ.

Remarquons que l'on peut ci-dessus prendre $r' > r$ ou $r' < r$. Cela montre que la projection de ϕ dans $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $r(\phi)$ n'appartient pas à cet intervalle.

Par définition de $r(\phi)$, il existe $v' \in V^I$ tel que $(v', r(\phi))$ appartienne à l'adhérence de ϕ. Fixons un tel v', soit ϕ' la facette à laquelle appartient $(v', r(\phi))$. En appliquant à ϕ' les résultats ci-dessus, il y a deux possibilités : ou bien la projection de ϕ' dans $\mathbb{R}$ est réduite à un seul point, à savoir $r(\phi)$, qui appartient à $\mathbb{Z}_{(p)}$, ou bien cette projection est un intervalle ouvert. Pour prouver que $r(\phi)$ appartient à $\mathbb{Z}_{(p)}$, on va exclure cette deuxième possibilité. Notons plus précisément $\tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi)$, $r_\alpha(\phi)$ etc... les termes notés ci-dessus $\tilde{\Sigma}^{nr}_{=}$, r_α etc... et introduisons les termes analogues $\tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi')$, $r_\alpha(\phi')$ etc... relatifs à ϕ'. Puisque ϕ' est contenue dans l'adhérence de ϕ, on a les relations :

$\tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi) \subseteq \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi')$ et $r_\alpha(\phi) = r_\alpha(\phi')$ pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi)$;

$\tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}(\phi') \subseteq \tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}(\phi)$ et, pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}(\phi')$, $r^+_\alpha(\phi) = r^+_\alpha(\phi')$, $r^-_\alpha(\phi) = r^-_\alpha(\phi')$;

pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi') \cap \tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}(\phi)$, $r_\alpha(\phi') = r^+_\alpha(\phi)$ ou $r_\alpha(\phi') = r^-_\alpha(\phi)$.

Supposons que la projection de ϕ' dans $\mathbb{R}$ soit un intervalle ouvert. On peut choisir $(v_1', r) \in \phi'$ avec $r < r(\phi)$. Par définition, si $r(\phi) - r$ est assez petit, on peut aussi choisir $v_1 \in V^I$ tel que $(v_1, r) \in \phi$. Montrons que :

(7) pour $\epsilon > 0$ assez petit, $(v' + \epsilon(v_1 - v_1'), r(\phi)) \in \phi$.

Soit $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi)$. On a $r - \alpha(v_1') = r_\alpha(\phi') = r_\alpha(\phi) = r - \alpha(v_1)$, donc $\alpha(v_1') = \alpha(v_1)$. Alors $r(\phi) - \alpha(v' + \epsilon(v_1 - v_1')) = r(\phi) - \alpha(v') = r_\alpha(\phi') = r_\alpha(\phi)$.

Soit $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}(\phi')$. Alors $r^-_\alpha(\phi) = r^-_\alpha(\phi') < r(\phi) - \alpha(v') < r^+_\alpha(\phi') = r^+_\alpha(\phi)$. Pour ϵ assez petit, on a encore $r^-_\alpha(\phi) < r(\phi) - \alpha(v' + \epsilon(v_1 - v_1')) < r^+_\alpha(\phi)$.

Soit $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi') \cap \tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}(\phi)$ tel que $r_\alpha(\phi') = r^+_\alpha(\phi)$. On a $r - \alpha(v_1') = r_\alpha(\phi') = r^+_\alpha(\phi) > r - \alpha(v_1)$. Donc $\alpha(v_1 - v_1') > 0$. On a $r(\phi) - \alpha(v') = r_\alpha(\phi') = r^+_\alpha(\phi)$. Pour $\epsilon > 0$, on a alors $r(\phi) - \alpha(v' + \epsilon(v_1 - v_1')) < r^+_\alpha(\phi)$. Si ϵ est assez petit, on a aussi $r^-_\alpha(\phi) < r(\phi) - \alpha(v' + \epsilon(v_1 - v_1'))$.

Un raisonnement similaire vaut pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi') \cap \tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}(\phi)$ tel que $r_\alpha(\phi') = r^-_\alpha(\phi)$. Cela vérifie (7).

Mais (7) entraîne que $r(\phi)$ appartient à la projection de ϕ dans $\mathbb{R}$. On a vu que ce n'était pas le cas. Cette contradiction achève la preuve. □

Notons le corollaire de la preuve ci-dessus :

Lemme 2.4.2 : *Il existe $e \in P$ tel que $er(\phi) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\phi \in \Phi$.*

Preuve. On a vu que pour tout $\phi \in \Phi$, il existait $\phi' \in \Phi$ tel que $r(\phi) = r(\phi')$ et ϕ' vérifiait la condition (6). On peut donc se limiter aux ϕ qui vérifient cette condition. Pour une telle ϕ, $r(\phi)$ est déterminé par une égalité (5) pour laquelle $1 - \sum_{\alpha \in A} c_{\beta,\alpha} \neq 0$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de choix possibles pour la racine β et l'ensemble A, on peut fixer $e' \in P$ tel que, pour toute telle égalité (5), les termes

$$e'(1 - \sum_{\alpha' \in A} c_{\beta,\alpha'})^{-1} c_{\beta,\alpha}$$

appartiennent à $\mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in A$. Les termes r_α appartiennent à R_α et on peut fixer $e'' \in P$ tels que $e'' r_\alpha \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}$. Mais alors $e'e''r(\phi) \in \mathbb{Z}$. □

Pour $\phi \in \Phi$, on note ω_ϕ l'ensemble des $\phi' \in \Phi$ dont l'adhérence contient ϕ. Pour $(v, r) \in \phi$, on pose $\omega_{v,r} = \bigcup_{\phi' \in \omega_\phi} \phi'$. C'est un voisinage de (v, r) dans $V^I \times \mathbb{R}$.

2.5

Soit $F \in CL_q$.

Lemme 2.5.1 : *Soient (v, r), $(v', r') \in V^I \times \mathbb{R}$. Ces deux éléments appartiennent à la même facette si et seulement si les deux égalités $\mathfrak{g}^{nr}_{v,r} = \mathfrak{g}^{nr}_{v',r'}$ et $\mathfrak{g}^{nr}_{v,r+} = \mathfrak{g}^{nr}_{v',r'+}$ sont vérifiées.*

Preuve. Notons R_0' le sous-ensemble des $r \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $X \in t^{nr}$ vérifiant $inf\{val(x^*(X)); x^* \in X^*\} = r$. Pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$, notons R_α' le sous-ensemble des $r \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $X = \sum_{\beta \in \alpha} x_\beta E_\beta \in \mathfrak{u}^{nr}_\alpha$ vérifiant $inf\{val(x_\beta); \beta \in \alpha\} = r$. On définit une décomposition en facettes de $V^I \times \mathbb{R}$ comme en 2.4, en y remplaçant les ensembles R_α par les R_α'. La description des réseaux $\mathfrak{g}^{nr}_{v,r}$, cf. 2.3, montre que les deux égalités de l'énoncé sont vérifiées si et seulement si (v, r) et (v', r') appartiennent à la même facette de cette nouvelle décomposition. Le lemme sera prouvé si nous montrons qu'en fait, les deux décompositions coïncident, autrement dit que l'on a les égalités $R'_0 = R_0$ et $R'_\alpha = R_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma^{nr}$. On va prouver que $R'_0 = R_0$, les autres égalités se prouvant de la même façon. Pour $X \in \mathfrak{t}^{nr}$, on a certainement $inf\{val(x^*(X)); x^* \in X^*\} \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Donc $R'_0 \subseteq \mathbb{Z}_{(p)}$. Soit $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, écrivons $r = \frac{n}{e}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $e \in P$, en choisissant e assez grand pour que $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$. En écrivant $X = \varpi_{\frac{1}{e}}^{n} Y$, on voit que $r \in R'_0$ si et seulement s'il existe $Y \in \mathfrak{t}(F^e)$ tel que :

- pour tout $\sigma \in I$, $\sigma(\varpi_{\frac{1}{e}}^{n} Y) = \varpi_{\frac{1}{e}}^{n} Y$;

- $inf\{val(x^*(Y)); x^* \in X^*\} = 0$.

La première condition est équivalente à $\sigma(Y) = r(\sigma)Y$ pour tout $\sigma \in I$. La seconde est équivalente à $Y \in \mathfrak{t}(\mathcal{O}^e)$ et $\pi(Y) \neq 0$. Parce que e est premier à p, l'application suivante est surjective :

$$\{Y \in \mathfrak{t}(\mathcal{O}^e); \forall \sigma \in I, \sigma(Y) = r(\sigma)Y\} \xrightarrow{\pi} \{Y \in \bar{\mathfrak{t}}; \forall \sigma \in I, \sigma(Y) = r(\sigma)Y\}.$$

Alors $r \in R'_0$ si et seulement si ce dernier espace n'est pas nul. Mais cela équivaut à $r \in R_0$, par définition de R_0. $\square$

Le lemme signifie que notre décomposition en facettes est la même que celle définie par DeBacker ([D] définition 3.2.2). Cela a plusieurs conséquences :

- de Φ, on déduit une décomposition en facettes de V^I en coupant les éléments de Φ par V^I identifié à $V^I \times \{0\} \subset V^I \times \mathbb{R}$; la décomposition obtenue est la même que celle définie en 1.6 ;

- pour $(v, r) \in V^I \times \mathbb{R}$ et $(v', r') \in \omega_{v,r}$, on a les inclusions :

$$\mathfrak{g}^{nr}_{v,r+} \subseteq \mathfrak{g}^{nr}_{v',r'+} \subseteq \mathfrak{g}^{nr}_{v',r'} \subseteq \mathfrak{g}^{nr}_{v,r}.$$

Soient (v, r), $(v', r') \in V^I_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$, supposons $(v', r') \in \omega_{v,r}$. On a deux façons d'envoyer $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'}$ dans $\bar{\mathfrak{g}}$: la première est $\pi_{v',r'}$; la seconde est la composée de l'inclusion $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'} \subseteq \mathfrak{g}^{nr}_{v,r}$ et de $\pi_{v,r}$. Comparons-les.

Lemme 2.5.2 : *Soient (v, r), $(v', r') \in V^I_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$, supposons $(v', r') \in \omega_{v,r}$. L'image de $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'}$, resp. $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'+}$, par $\pi_{v,r}$ est le sous-espace $\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$, resp. $\bar{\mathfrak{u}}_{v,r;v',r'}$, de $\bar{\mathfrak{g}}_{v,r}$. Les espaces $\bar{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}$ et $\bar{\mathfrak{g}}_{v',r'}$ sont égaux et l'application $\pi_{v',r'}$ est égale à la composée de l'application $\pi_{v,r}$ qui envoie $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'}$ dans $\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$ avec la projection naturelle de cet espace sur $\bar{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}$.*

Preuve. Notons Φ, resp. Φ', la facette contenant (v, r), resp. (v', r'), introduisons les objets $\tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi)$, $r_\alpha(\phi)$ etc... de la preuve du lemme 2.4.1. De la description de $\mathfrak{g}^{nr}_{v,r}$ donnée en 2.3 et de la définition de $\pi_{v,r}$ résulte que :

- pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi)$, $\pi_{v,r}(\mathfrak{g}^{nr}_{v,r} \cap \mathfrak{u}^{nr}_\alpha) = \bar{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \bar{\mathfrak{u}}_\alpha$;

(1) pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}(\phi)$, $\pi_{v,r}(\mathfrak{g}^{nr}_{v,r} \cap \mathfrak{u}^{nr}_\alpha) = \{0\}$;

(on a posé $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{t}$). Pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi)$, on a aussi :

- si $r' - \alpha(v') \leq r - \alpha(v)$, $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'} \cap \mathfrak{u}^{nr}_\alpha = \mathfrak{g}^{nr}_{v,r} \cap \mathfrak{u}^{nr}_\alpha$;

- si $r' - \alpha(v') > r - \alpha(v)$, $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'} \cap \mathfrak{u}^{nr}_\alpha = \mathfrak{g}^{nr}_{v,r+} \cap \mathfrak{u}^{nr}_\alpha$.

Alors $\pi_{v,r}(\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'})$ est la somme des $\bar{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \bar{\mathfrak{u}}_\alpha$ sur les $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}$ tels que $r' - \alpha(v') \leq r - \alpha(v)$. Fixons $e \in P$ tel que ev, $ev' \in X^*$ et er, $er' \in \mathbb{Z}$. Introduisons la graduation de 2.2. Pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}$, on a l'inclusion $\bar{\mathfrak{u}}_\alpha \subseteq \bar{\mathfrak{g}}[e\alpha(v' - v)]$. La condition $r' - \alpha(v') \leq r - \alpha(v)$ est équivalente à $\bar{\mathfrak{u}}_\alpha \subseteq \bar{\mathfrak{g}}[\geq er' - er]$. D'après la définition de $\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$, on en déduit l'égalité $\pi_{v,r}(\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'}) = \bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$. On démontre de même que $\pi_{v,r}(\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'+}) = \bar{\mathfrak{u}}_{v,r;v',r'}$.

On voit qu'envoyer $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'}$ dans $\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$ puis projeter sur $\bar{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}$ revient à projeter d'abord $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'}$ sur la somme des $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'}\cap\mathfrak{u}^{nr}_{\alpha}$, sur les $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi)$ tels que $r'-\alpha(v') = r-\alpha(v)$, puis à appliquer $\pi_{v,r}$. Remarquons que cet ensemble de α n'est autre que $\tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi')$ d'après les descriptions données dans la preuve du lemme 2.4. (les rôles de ϕ et ϕ' y étaient inversés ; ici ϕ est dans l'adhérence de ϕ'). On doit montrer que l'opération ci-dessus revient à appliquer $\pi_{v',r'}$. On peut fixer $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}$ et comparer leurs effets sur $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'} \cap \mathfrak{u}^{nr}_{\alpha}$.

Si $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{\neq}(\phi')$, les deux applications sont nulles : pour la première, la projection de $\mathfrak{u}^{nr}_{\alpha}$ est nulle ; pour $\pi_{v',r'}$, c'est (1) appliqué à (v',r') et ϕ'.

Supposons $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{nr}_{=}(\phi')$. Les deux applications sont $\pi_{v,r}$ et $\pi_{v',r'}$. Introduisons e comme ci-dessus, supposons de plus que $I(e)$ agit trivialement sur $\mathcal{D}$. Rappelons que $\pi_{v,r}$ est la composée de $Ad(t^{-1}_{F,v})$, de la multiplication par $\varpi^{-er}_{\frac{1}{e}}$ et de la projection π. Sur $\mathfrak{u}_{\alpha}(F^e)$, la composée de $Ad(t^{-1}_{F,v})$ et de la multiplication par $\varpi^{-er}_{\frac{1}{e}}$ est égale à la multiplication par $\varpi^{e(\alpha(v)-r)}_{\frac{1}{e}}$. Une description analogue vaut pour $\pi_{v',r'}$. Mais on a l'égalité $\alpha(v) - r = \alpha(v') - r'$ qui permet de conclure. $\square$

D'après les deux lemmes précédents, l'espace $\bar{\mathfrak{g}}_{v',r'}$ et la projection $\pi_{v',r'}$ ne dépendent que de la facette contenant (v',r'). On applique cela à (v,r) puis on applique de nouveau les lemmes. Alors les espaces $\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$ etc... et la restriction de $\pi_{v,r}$ à $\mathfrak{g}^{nr}_{v',r'}$ ne dépendent que des facettes contenant (v,r) et (v',r').

2.6

Soit $d \in D$. Tout élément de T_{ϖ} est fixe par Θ. Il en résulte que l'application $\pi_N \circ d :$ $\Theta \to \bar{\mathbf{N}}$ est un cocycle. On peut définir un groupe $\bar{\mathbf{G}}_d$ sur $\mathbb{F}_q$, muni d'un isomorphisme $\bar{\xi}_d : \bar{\mathbf{G}}_d \to \bar{\mathbf{G}}$, défini sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ et tel que $\bar{\xi}_d \circ \theta = (Ad \circ \pi_N \circ d)(\theta) \circ \theta \circ \bar{\xi}_d$ pour tout $\theta \in \Theta$.

Soit $v \in V^d_{(p)}$. Pour $\theta \in \Theta$ et $\sigma \in I$, les automorphismes $(Ad \circ \pi_N \circ d)(\theta) \circ \theta$ et $\rho_v(\sigma)$ de $\bar{\mathbf{G}}$ ne commutent pas. Mais on a l'égalité :

$$(Ad \circ \pi_N \circ d)(\theta) \circ \theta \circ \rho_v(\sigma) \circ \theta^{-1} \circ (Ad \circ \pi_N \circ d)(\theta)^{-1} = \rho_v(\theta\sigma\theta^{-1}).$$

Alors $(Ad \circ \pi_N \circ d)(\theta) \circ \theta$ conserve le sous-groupe $\bar{\mathbf{G}}_v$. Le sous-groupe $\bar{\mathbf{G}}_{d,v} = \bar{\xi}_d^{-1}(\bar{\mathbf{G}}_v)$ de $\bar{\mathbf{G}}_d$ est défini sur $\mathbb{F}_q$. On peut dire les choses d'une autre façon. Parce que $v \in V^d$, on a $t_v^{-1}d(\gamma)\gamma(t_v) \in \bar{\mathbf{N}}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'application $\gamma \mapsto t_v^{-1}d(\gamma)\gamma(t_v)$ est un cocycle. On munit $\bar{\mathbf{G}}$ d'une action $\gamma \mapsto \rho_{d,v}(\gamma)$ de Γ en posant $\rho_{d,v}(\gamma) = Ad(t_v^{-1}d(\gamma)\gamma(t_v)) \circ \gamma$. On munit $\bar{\mathbf{G}}_d$ d'une action de Γ de sorte que $\bar{\xi}_d \circ \gamma = \rho_{d,v}(\gamma) \circ \bar{\xi}_d$. Cette action coïncide sur Θ avec l'action déjà définie. Alors $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ est le sous-groupe des points fixes par I dans $\bar{\mathbf{G}}_d$.

Soit de plus $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Notons $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$ le sous-espace des $X \in \bar{\mathfrak{g}}_d$ tels que $\sigma(X) = r(\sigma)X$ pour tout $\sigma \in I$. Ce sous-espace est défini sur $\mathbb{F}_q$, c'est-à-dire qu'il est stable par l'action de Θ. Il est aussi stable par l'action adjointe de $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$. On a l'égalité $\bar{\xi}_d(\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}) = \bar{\mathfrak{g}}_{v,r}$.

2.7

Soient $d \in D$, $F \in CL_q$ et $v \in V^d_{(p)}$. On a défini en 1.9 le schéma en groupes $\mathbf{G}_{d,v}$ sur $\mathcal{O}$.

Lemme 2.7.1 : *Le plus grand quotient réductif de la fibre spéciale de $\mathbf{G}_{d,v}$ s'identifie à*

$\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$, *de sorte que le diagramme évident ci-dessous soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_{d,v}(\mathcal{O}^{nr}) & \overset{\xi_d}{\rightarrow} & \mathbf{G}_v^{nr} \\ \pi_{d,v} \downarrow & & \downarrow \pi_v \\ \bar{\mathbf{G}}_{d,v} & \overset{\bar{\xi}_d}{\rightarrow} & \bar{\mathbf{G}}_v \end{array}.$$

Preuve. On définit l'homomorphisme $\mathbf{G}_{d,v}(\mathcal{O}^{nr}) \to \bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ de sorte que le diagramme soit commutatif. On doit montrer qu'il commute aux actions de Θ. Cela revient à dire que, pour $\theta \in \Theta$, on a l'égalité $\pi_v \circ Ad(d_F(\theta)) \circ \theta = \rho_{d,v}(\theta) \circ \pi_v$. On laisse la vérification au lecteur. $\square$

Notons X_*^d le sous-groupe des $x_* \in X_*^I$ tels que $d(\theta)\theta(x_*) = x_*$ pour tout $\theta \in \Theta$.

Lemme 2.7.2 : *Il existe un sous-tore $\bar{\mathbf{T}}_{d,v}$ de $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$, défini sur $\mathbb{F}_q$ et déployé maximal, tel que $\bar{\xi}_d(\bar{\mathbf{T}}_{d,v}) \subseteq \bar{\mathbf{T}}$ et $X_*(\bar{\xi}_d(\bar{\mathbf{T}}_{d,v})) = X_*^d$.*

Preuve. En 1.9, on a défini le tore $\mathbf{T}_{d,F}$ et montré qu'il était un sous-tore déployé maximal de $\mathbf{G}_d$. Le point v appartient à l'appartement de $Imm(\mathbf{G}_d, F)$ associé à ce tore. La théorie de Bruhat-Tits nous dit alors que l'image de $T_{d,F}^{nr} \cap \mathbf{G}_{d,v}(\mathcal{O}^{nr})$ dans $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ est le groupe des points sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ d'un sous-tore $\bar{\mathbf{T}}_{d,v}$ défini sur $\mathbb{F}_q$ et déployé maximal de ce groupe. Il résulte des constructions que $\bar{\mathbf{T}}_{d,v}$ possède les propriétés requises. $\square$

Soit $(v,r) \in V^d \times \mathbb{R}$. Notons $\mathfrak{g}_{d,v,r}$ le $\mathcal{O}^{nr}$-réseau de $\mathfrak{g}_d^{nr}$ tel que $\xi_d(\mathfrak{g}_{d,v,r}) = \mathfrak{g}_{v,r}$. Il est muni d'une structure sur $\mathcal{O}$, c'est-à-dire qu'il est stable par l'action de Θ.

Lemme 2.7.3 : *Soit $(v,r) \in V_{(p)}^d \times \mathbb{Z}_{(p)}$. Il existe une projection Θ-équivariante $\pi_{d,v,r}$: $\mathfrak{g}_{d,v,r} \to \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$ qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{d,v,r} & \overset{\xi_d}{\rightarrow} & \mathfrak{g}_{v,r} \\ \downarrow \pi_{d,v,r} & & \downarrow \pi_{v,r} \\ \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r} & \overset{\bar{\xi}_d}{\rightarrow} & \bar{\mathfrak{g}}_{v,r}. \end{array}$$

2.8

Soit $d \in D$. Notons Ker_d le sous-groupe des $\theta \in \Theta$ tels que $d(\theta)_{\mathbb{R}}\theta$ soit l'action triviale de V. On a :

(1) l'indice de Ker_d dans Θ est premier à p.

Soit $\theta \in \Theta$. On doit montrer que l'automorphisme affine $d(\theta)_{\mathbb{R}}\theta$ de V est d'ordre premier à p. Par construction, c'est le produit d'une translation et d'un automorphisme linéaire issu d'un automorphisme de X_* que l'on note $u(\theta)$. Posons $N = rang(\mathcal{D}) = rang(X_*)$. Identifions X_* à $\mathbb{Z}^N$. Alors $u(\theta)$ devient un élément de $GL_N(\mathbb{Z})$. Puisque $d(\theta)_{\mathbb{R}}\theta$ est d'ordre fini, $u(\theta)$ l'est aussi. Ses valeurs propres forment un ensemble de racines de l'unité stable par l'action du groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. Notons $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les racines p-ièmes de l'unité. Si l'une des valeurs propres de $u(\theta)$ était d'ordre divisible par p, on aurait $N \geq [\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1$, ce qui contredit (P_N). Donc l'ordre de $u(\theta)$ est premier à p. Notons e cet ordre. Alors $(d(\theta)_{\mathbb{R}}\theta)^e$ est une translation. On sait qu'elle est d'ordre fini. Elle est donc triviale et cela démontre (1).

On a défini l'ensemble de facettes Φ. L'action $\theta \mapsto d(\theta)_{\mathbb{R}}\theta$ de Θ sur V^I agit par permutations sur Φ. On note Φ^d le sous-ensemble des facettes fixées par cette action. Il est clair par convexité que tout élément de Φ^d coupe $V^d \times \mathbb{R}$. On a :

(2) pour tout $\phi \in \Phi^d$, $\phi \cap (V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$ est dense dans $\phi \cap (V^d \times \mathbb{R})$.

En effet, grâce à (1), la projection de $V^I \times \mathbb{R}$ sur $V^d \times \mathbb{R}$:

$$(v,r) \mapsto ([\Theta : Ker_d]^{-1} \sum_{\theta \in \Theta/Ker_d} d(\theta)_{\mathbb{R}}\theta(v), r)$$

envoie $V^I_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$ sur $V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$. Alors l'assertion résulte du lemme 2.4.1.

De même :

(3) pour tout $\phi \in \Phi^d$, l'adhérence $\bar{\phi}$ de ϕ coupe $V^d_{(p)} \times \{r(\phi)\}$.

2.9

Soient $d \in D$ et $v \in V^d_{(p)}$. On considère l'algèbre $\bar{\mathfrak{g}}_d$. Dans ce paragraphe et les suivants, "nilpotent" signifie nilpotent en tant qu'élément de cette algèbre. Pour tout $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on a défini le sous-espace $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$ de $\bar{\mathfrak{g}}_d$. L'application qui à $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ associe le caractère $\sigma \mapsto r(\sigma)$ de I se descend en un isomorphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ sur le groupe des caractères continus d'ordre fini de I. On en déduit que $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$ ne dépend que de l'image de r dans $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ et que l'on a la décomposition :

$$(1) \qquad \bar{\mathfrak{g}}_d = \oplus_{r \in \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$$

(ces sous-espaces étant presque tous nuls). Remarquons que :

(2) pour r, $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, $X \in \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$, $Y \in \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}$, on a $[X,Y] \in \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r+s}$.

DeBacker a remarqué que la théorie usuelle des $\mathfrak{sl}_2$-triplets s'adaptait à cette situation, cf. [D] appendice 2.

Lemme 2.9.1 : *Soient $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $X \in \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$. Supposons X nilpotent. Alors il existe un élément nilpotent $Y \in \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,-r}$ et un élément semi-simple $H \in \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,0}$ tels que (X,H,Y) soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.*

Preuve. Grâce à (P_Σ), on peut appliquer la théorie usuelle à l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_d$ sur $\mathbb{F}_q$. Il existe H_1, $Y_1 \in \bar{\mathfrak{g}}_d$ tels que (X,H_1,Y_1) soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. Notons H, resp. Y_2, la projection de H_1 sur $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,0}$, resp. de Y_1 sur $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,-r}$, conformément à la décomposition (1). Grâce à (2) et à l'hypothèse $X \in \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$, les relations $[H_1,X] = 2X$ et $[X,Y_1] = H_1$ entraînent $[H,X] = 2X$ et $[X,Y_2] = H$. Le raisonnement de [C] page 141 montre que l'on peut remplacer Y_2 par $Y_3 \in \bar{\mathfrak{g}}_d$ de sorte que l'on ait encore $[X,Y_3] = H$ et de plus $[H,Y_3] = -2Y_3$. En remplaçant encore Y_3 par sa projection Y sur $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,-r}$, on obtient le lemme. $\square$

Soient $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et (X,H,Y) un $\mathfrak{sl}_2$-triplet vérifiant les conditions du lemme. On gradue l'espace $\bar{\mathfrak{g}}_d$ de la façon habituelle. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\bar{\mathfrak{g}}_d(i) = \{Z \in \bar{\mathfrak{g}}_d ; [H,Z] = iZ\}.$$

Cette graduation est définie sur $\mathbb{F}_q$ et induit des graduations analogues sur tout sous-espace $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}$. On pose $\bar{\mathfrak{g}}_d(\geq i) = \oplus_{j \geq i} \bar{\mathfrak{g}}_d(j)$.

Lemme 2.9.2 : *Soit $Z \in \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}(\geq 3)$. Alors il existe $x \in \bar{G}_{d,v}$ tel que $Ad(x)(X) = X + Z$.*

Preuve. Le raisonnement habituel montre que, pour tout entier $i \geq 1$, l'application $ad(X)$ se restreint en une surjection de $\bar{\mathfrak{g}}_d(i)$ sur $\bar{\mathfrak{g}}_d(i+2)$. En projetant cette égalité grâce à la décomposition (1), on obtient que $ad(X)$ définit une surjection de $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,0}(i)$ sur $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}(i+2)$. Le raisonnement habituel permet d'en déduire l'énoncé. On a besoin pour cela d'utiliser des exponentielles d'éléments nilpotents, ce que l'hypothèse (P_Σ) nous autorise. $\square$

2.10

Soient $d \in D$ et $\phi \in \Phi^d$. Pour $(v,r) \in (V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}) \cap \phi$, on a défini l'espace $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$. Il ne dépend pas de (v,r), cf. 2.5. On le note $\bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$. On note $\mathcal{S}(\phi)$ l'espace des fonctions sur $\bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$, à valeurs complexes (c'est un espace de dimension finie puisque $\bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$ est un espace de dimension finie sur $\mathbb{F}_q$).

On a défini en 2.4 l'ensemble de facettes $\omega_\phi \subseteq \Phi$. On pose $\omega^d_\phi = \omega_\phi \cap \Phi^d$. Soit $\phi' \in \omega^d_\phi$. Choisissons $(v,r) \in (V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}) \cap \phi$, $(v',r') \in (V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}) \cap \phi'$. On a défini les sous-espaces $\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$, $\bar{\mathfrak{u}}_{v,r;v',r'}$, $\bar{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}$ de $\bar{\mathfrak{g}}_{v,r}$. Leurs images réciproques $\bar{\xi}_d^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'})$ etc... dans $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$ sont définies sur $\mathbb{F}_q$. Elles ne dépendent pas des choix de (v,r) et (v',r'), cf. 2.5. On les note $\bar{\mathfrak{p}}_{d,\phi,\phi'}$, $\bar{\mathfrak{u}}_{d,\phi,\phi'}$, $\bar{\mathfrak{m}}_{d,\phi,\phi'}$. On a $\bar{\mathfrak{m}}_{d,\phi,\phi'} = \bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi'}$ grâce au lemme 2.5.2. Cela permet de définir une application linéaire injective :

$$\mathcal{S}(\phi') \to \mathcal{S}(\phi).$$

A une fonction φ' sur $\bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi'}$, on associe la fonction φ sur $\bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$, à support dans $\bar{\mathfrak{p}}_{d,\phi,\phi'}$, telle que, pour $X \in \bar{\mathfrak{m}}_{d,\phi,\phi'}$ et $Y \in \bar{\mathfrak{u}}_{d,\phi,\phi'}$, $\varphi(X+Y) = \varphi'(X)$.

Pour $r \in \mathbb{R}$, notons $\omega^d_\phi(> r)$ l'ensemble des $\phi' \in \omega^d_\phi$ telles que $r(\phi') > r$.
Comme en 2.8(2), on peut aussi bien remplacer les conditions r, $r' \in \mathbb{R}$ par r, $r' \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et V^d par $V^d_{(p)}$.

Lemme 2.10.1 : *Soient $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\phi' \in \omega^d_\phi(> r)$. Supposons que ϕ coupe $V^d_{(p)} \times \{r\}$. Alors, toute fonction dans l'image de l'injection $\mathcal{S}(\phi') \to \mathcal{S}(\phi)$ est à support nilpotent.*

Preuve. Il s'agit de montrer que $\bar{\mathfrak{p}}_{d,\phi,\phi'}$ est formé d'éléments nilpotents. Fixons $(v,r) \in (V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}) \cap \phi$ et $(v',r') \in (V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}) \cap \phi'$ avec $r' > r$. On choisit $e \in P$ tel que ev, $ev' \in X_*$ et er, $er' \in \mathbb{Z}$. On pose $x_* = ev' - ev$ et on gradue l'espace $\bar{\mathfrak{g}}$ comme en 2.2 en posant, pour $i \in \mathbb{Z}$:

$$\bar{\mathfrak{g}}[i] = \{X \in \bar{\mathfrak{g}}; \forall z \in \bar{\mathbb{F}}_q^\times, Ad(x_*(z))(X) = z^i X\}.$$

L'espace $\bar{\mathfrak{g}}[\geq 1]$ est le radical nilpotent d'une sous-algèbre parabolique de $\bar{\mathfrak{g}}$. Il est donc formé d'éléments nilpotents. Par définition :

$$\bar{\mathfrak{p}}_{d,\phi,\phi'} = \bar{\xi}_d^{-1}(\bar{\mathfrak{g}}[er' - er]).$$

Puisque $r' > r$, cet espace est inclus dans $\bar{\xi}_d^{-1}(\bar{\mathfrak{g}}[\geq 1])$ et est donc formé d'éléments nilpotents. $\square$

Remarquons que, quand la projection de ϕ dans $\mathbb{R}$ est ouverte, on a $\phi \in \omega^d_\phi(r)$ pour tout r tel que ϕ coupe $V^d_{(p)} \times \{r\}$. Alors tout élément de $\bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$ est nilpotent.

Des applications précédentes se déduit une application linéaire :

$$s_\phi : \oplus_{\phi' \in \omega_\phi^d} \mathcal{S}(\phi') \to \mathcal{S}(\phi).$$

Lemme 2.10.2 : *Soit $(v,r) \in (V_{(p)}^d \times \mathbb{Z}_{(p)}) \cap \phi$. Il existe une application linéaire :*

$$\ell : \mathcal{S}(\phi) \to \oplus_{\phi' \in \omega_\phi^d(>r)} \mathcal{S}(\phi')$$

vérifiant la condition suivante. Soit J une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\phi)$ invariante par adjonction par $\bar{G}_{d,v}$ et à support nilpotent et soit $\varphi \in \mathcal{S}(\phi)$. Alors $J \circ s_\phi \circ \ell(\varphi) = J(\varphi)$.

Preuve. Pour $X \in \bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$, notons φ_X la fonction caractéristique de X. Ces fonctions forment une base de $\mathcal{S}(\phi)$, il suffit de montrer que, pour tout X, il existe $\varphi' \in \oplus_{\phi' \in \omega_\phi^d(>r)} \mathcal{S}(\phi')$ telle que $J \circ s_\phi(\varphi') = J(\varphi_X)$ pour tout J vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Si X n'est pas nilpotent, $\varphi' = 0$ convient. Supposons X nilpotent. Complétons X en un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (X,H,Y) vérifiant les conditions du lemme 2.9.1. Ce $\mathfrak{sl}_2$-triplet se relève en un homomorphisme de $\mathbf{SL_2}$ dans $\bar{\mathbf{G}}_d$, où $\mathbf{SL}_2$ est le groupe algébrique évident sur $\mathbb{F}_q$. Notons $\mathbf{A}$ le tore diagonal de $\mathbf{SL_2}$ et $\bar{\mathbf{A}}$ son image dans $\bar{\mathbf{G}}_d$. Cette image est un tore déployé, d'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{a}}$ engendrée par H. Puisque $H \in \bar{\mathfrak{g}}_{v,0}$, $\bar{\mathbf{A}}$ est inclus dans $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$. On a introduit au lemme 2.7.2 un sous-tore déployé maximal $\bar{\mathbf{T}}_{d,v}$ de $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$. Tout sous-tore déployé de $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ est conjugué à un sous-tore de $\bar{\mathbf{T}}_{d,v}$ par un élément de $\bar{G}_{d,v}$. Quitte à effectuer une telle conjugaison, à laquelle notre problème est insensible, on peut supposer $\bar{\mathbf{A}} \subseteq \bar{\mathbf{T}}_{d,v}$. Les carrés du diagramme suivant sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} X_*(\mathbf{A}) & \stackrel{\sim}{\to} & X_*(\bar{\mathbf{A}}) & \to & X_*(\bar{\mathbf{T}}_{d,v}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_*(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_q = \mathfrak{a} & \stackrel{\sim}{\to} & X_*(\bar{\mathbf{A}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_q = \bar{\mathfrak{a}} & \to & X_*(\bar{\mathbf{T}}_{d,v}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_q = \bar{\mathfrak{t}}_{d,v}. \end{array}$$

L'élément H est l'image dans $\bar{\mathfrak{t}}_{d,v}$ de l'unique coracine simple dans $X_*(\mathbf{A})$ par le chemin sud-ouest de ce diagramme. Il l'est aussi par le chemin nord-est et provient d'un élément de $X_*(\bar{\mathbf{T}}_{d,v})$ auquel on l'identifie. Posons $x_* = \bar{\xi}_d(H)$. Ce terme appartient à X_*^d et $v+sx_*$ appartient à V^d pour tout réel s. Choisissons $e \in P$ tel que $ev \in X_*$, $er \in \mathbb{Z}$, posons $v' = v + \frac{x_*}{e}$, $r' = r + \frac{2}{e}$. Supposons e assez grand pour que ce couple (v',r') appartienne à $\omega_{v,r}$. Notons ϕ' la facette à laquelle appartient (v',r'). Elle appartient à $\omega_\phi^d(>r)$. En 2.9, on a associé au $\mathfrak{sl}_2$-triplet (X,H,Y) une graduation $(\bar{\mathfrak{g}}_d(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\bar{\mathfrak{g}}_d$. En 2.2, les espaces $\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$ etc... ont été définis à l'aide d'une graduation $(\bar{\mathfrak{g}}[i])_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\bar{\mathfrak{g}}$. Il s'avère que $\bar{\mathfrak{g}}_d(i) = \bar{\xi}_d^{-1}(\bar{\mathfrak{g}}[i])$ pour tout i. Puisque $er' - er = 2$, on a :

$$\bar{\mathfrak{p}}_{d,\phi,\phi'} = \bar{\xi}_d^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}) = \bar{\xi}_d^{-1}(\bar{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \bar{\mathfrak{g}}[\geq 2]) = \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}(\geq 2);$$

$$\bar{\mathfrak{u}}_{d,\phi,\phi'} = \bar{\xi}_d^{-1}(\bar{\mathfrak{u}}_{v,r;v',r'}) = \bar{\xi}_d^{-1}(\bar{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \bar{\mathfrak{g}}[\geq 3]) = \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}(\geq 3).$$

Notons φ la fonction caractéristique de $X + \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}(\geq 3)$, multipliée par $|\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}(\geq 3)|^{-1}$. D'après le lemme 2.9.2, cette fonction est équivalente à φ_X, au sens où $J(\varphi) = J(\varphi_X)$ pour tout J comme dans l'énoncé. Les formules ci-dessus montrent que φ appartient à l'image de l'injection $\mathcal{S}(\phi') \to \mathcal{S}(\phi)$. L'existence de la fonction φ' cherchée s'en déduit. $\square$

3 Analyse harmonique ; une première réduction

3.1

On fixe pour tout le chapitre 3 un élément $d \in D$. Dans les trois premiers paragraphes, on fixe aussi un corps $F \in CL_q$.

Lemme 3.1.1 : *Il existe une unique mesure de Haar sur G_d telle que, pour tout $v \in V^d_{(p)}$, la mesure de $G_{d,v}$ soit égale à $|\bar{G}_{d,v}|q^{-dim(\bar{\mathbf{G}}_{d,v})/2}$.*

(Conformément à la convention adoptée en 1.5, on note $G_{d,v} = \mathbf{G}_{d,v}(\mathcal{O})$).

Preuve. Pour $v \in V^d_{(p)}$, notons $\mathbf{K}_{d,v}$ le noyau de la projection $\mathbf{G}_{d,v} \to \bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ du lemme 2.7.1. Comme en 1.7, on montre qu'il est cohomologiquement trivial. Du lemme 2.7.1 se déduit l'égalité $|\bar{G}_{d,v}| = |G_{d,v}/K_{d,v}|$. La condition imposée dans l'énoncé équivaut donc à :

$$(1) \qquad mes(K_{d,v}) = q^{-dim(\bar{\mathbf{G}}_{d,v})/2}.$$

La chambre C^{nr} appartient à Φ^d : pour $\theta \in \Theta$, $d(\theta)_{\mathbb{R}}\theta$ conserve C^{nr} parce que $d(\theta) \in \mathcal{N}^{nr}$. Choisissons un élément $v \in V^d_{(p)} \cap C^{nr}$, considérons la mesure de Haar qui vérifie (1) pour ce point v. Pour montrer qu'elle convient, on doit montrer que, pour tout $v' \in V^d_{(p)}$, on a l'égalité :

$$(2) \qquad mes(K_{d,v})mes(K_{d,v'})^{-1} = q^{[dim(\bar{\mathbf{G}}_{d,v'})-dim(\bar{\mathbf{G}}_{d,v})]/2}.$$

Ce problème est invariant par conjugaison par G_d, on peut supposer que v' appartient à l'adhérence de C^{nr}. On sait bien qu'alors $\mathbf{K}_{d,v'} \subseteq \mathbf{K}_{d,v}$ et le quotient s'identifie au radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de $\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v'}$ (la composante neutre de $\bar{\mathbf{G}}_{d,v'}$) dont le sous-groupe de Lévi est isomorphe à $\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}$. La relation (2) s'ensuit. $\square$

Le groupe $\mathbf{G}$ lui-même est muni d'une action de Θ, donc d'une structure sur F et un lemme analogue munit G d'une mesure de Haar. L'isomorphisme ξ_d est un torseur intérieur de $\mathbf{G}_d$ vers sa forme quasi-déployée $\mathbf{G}$. On sait qu'un tel torseur établit une correspondance entre mesures de Haar sur G et G_d.

Lemme 3.1.2 : *Les deux mesures de Haar définies sur G et G_d se correspondent.*

Preuve. Choisissons un point $v \in V^d_{(p)}$ comme dans la preuve précédente. Kottwitz définit dans [K4] paragraphe 1 une mesure de Haar ν_{G_d} sur G_d telle que la mesure de $K_{d,v}$ soit $q^{-dim(\mathbf{G}_d)}$. Or $dim(\mathbf{G}_d) = dim(\mathbf{G})$ et, pour le point v que l'on a choisi, $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ est un tore de dimension $rang(\mathcal{D})$. Notre mesure est donc égale à $q^{dim(\mathbf{G})-rang(\mathcal{D})/2}\nu_{G_d}$. Or Kottwitz montre que ν_{G_d} correspond à la mesure ν_G sur G. Le lemme s'ensuit. $\square$

Remarque. Kottwitz suppose dans son article que la caractéristique de F est nulle, mais c'est inutile pour ce point.

3.2

Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathfrak{g}_{d,r} = \bigcup_{g \in G_d} \bigcup_{v \in V^d} Ad(g)(\mathfrak{g}_{d,v,r}).$$

Pour toute extension K de F contenue dans F^{mod}, on pose :

$$\mathfrak{t}(K)_r = \{X \in \mathfrak{t}(K); \forall x^* \in X^*, val(x^*(X)) \geq r\}.$$

On définit :

$$\mathfrak{g}_{d,r+} = \bigcup_{s>r} \mathfrak{g}_{d,s}, \quad \mathfrak{t}(K)_{r+} = \bigcup_{s>r} \mathfrak{t}(K)_s.$$

Pour tout élément semi-simple $X \in \mathfrak{g}_d$, on note $r(X)$ le *sup* des $r \in \mathbb{R}$ tels que $X \in \mathfrak{g}_{d,r}$ (en particulier $r(0) = \infty$).

Lemme 3.2 : *(i) Il existe une extension galoisienne finie K de F contenue dans F^{mod} telle que, pour tout élément semi-simple $X \in \mathfrak{g}_d$, il existe $g \in \mathbf{G}(K)$ tel que $Ad(g) \circ \xi_d(X) \in \mathfrak{t}(K)$.*

(ii) Soit X un élément semi-simple de $\mathfrak{g}_d$, choisissons $g \in \mathbf{G}(K)$ comme en (i), posons $X' = Ad(g) \circ \xi_d(X)$. Alors, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}_{d,r}$ si et seulement si $X' \in \mathfrak{t}(K)_r$.

(iii) Il existe $e \in P$ tel que, pour tout élément semi-simple non nul $X \in \mathfrak{g}_d$, on ait $er(X) \in \mathbb{Z}$.

Preuve. Choisissons une extension galoisienne finie K_1 de F contenue dans F^{mod} telle que le sous-groupe $Gal(F^{mod}/K_1) \subseteq \Gamma$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$ et d soit trivial sur ce sous-groupe. Il n'y a qu'un nombre fini d'extensions K_2 de K_1 dans F^{sep} de degré $[K_2 : K_1]$ divisant $|W|$. Grâce à l'hypothèse $(P_{rang(\mathcal{D})})$, $|W|$ est premier à p et toute telle extension K_2 est contenue dans F^{mod}. Soit K la composée de ces extensions. Alors K répond à la question. En effet, soit X un élément semi-simple de $\mathfrak{g}_d$. Choisissons un tore maximal $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{G}_d$, défini sur F, tel que $X \in \mathfrak{t}_1$. Posons $\mathbf{T}_2 = \xi_d(\mathbf{T}_1)$. Puisque d est trivial sur $Gal(F^{mod}/K_1)$, ξ_d est défini sur K_1 et $\mathbf{T}_2$ est un sous-tore maximal de $\mathbf{G}$ défini sur K_1. Il existe un élément $g_2 \in \mathbf{G}$ tel que $Ad(g_2)(\mathbf{T}_2) = \mathbf{T}$. Le choix d'un tel élément nous permet d'identifier $\mathbf{T}_2$ à $\mathbf{T}$, l'action de $Gal(F^{sep}/K_1)$ sur $\mathbf{T}_2$ étant celle sur $\mathbf{T}$ tordue par un cocycle à valeurs dans W. Etant donné le choix de K_1, l'action de $Gal(F^{sep}/K_1)$ sur $\mathbf{T}_2$ est donc simplement donnée par un homomorphisme de ce groupe dans W. Par définition de K, cette action est forcément triviale sur $Gal(F^{sep}/K)$. Donc $\mathbf{T}_2$ est, comme $\mathbf{T}$, déployé sur K. Deux tels tores sont conjugués par un élément de $\mathbf{G}(K)$, d'où (i).

Le (ii) résulte du lemme 2.2.1 de [KM] et de la compatibilité de la définition de $\mathfrak{g}_{d,r}$ avec une extension modérément ramifiée du corps de base ([KM] 2.1).

Choisissons K comme ci-dessus, notons e son indice e ramification sur F. Il est clair que, pour $X \in \mathfrak{t}(K)$, le *sup* de l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}; X \in \mathfrak{t}(K)_r\}$ appartient à $\frac{1}{e}\mathbb{Z}$. Alors (iii) résulte de (ii). $\square$

3.3

On pose :

$$\mathcal{S}^d = \oplus_{\phi \in \Phi^d} \mathcal{S}(\phi).$$

On note $C_c^\infty(\mathfrak{g}_d)$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}_d$, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact.

Soit $\phi \in \Phi^d$. Choisissons un point $(v, r) \in \phi \cap (V_{(p)}^d \times \mathbb{Z}_{(p)})$. On dispose de l'application $\pi_{d,v,r} : \mathfrak{g}_{d,v,r} \to \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r} = \bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\phi)$, on définit la fonction $rea_F(\varphi)$ sur $\mathfrak{g}_d$: elle est nulle hors de $\mathfrak{g}_{d,v,r}$; pour $X \in \mathfrak{g}_{d,v,r}$, $rea_F(\varphi)(X) = \varphi \circ \pi_{d,v,r}(X)$. Grâce à 2.5, cette construction ne dépend pas du point (v,r) choisi. On a $rea_F(\varphi) \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_d)$. Par linéarité, cette construction définit une application linéaire :

$$rea_F : \mathcal{S}^d \to C_c^\infty(\mathfrak{g}_d).$$

Soient $\phi \in \Phi^d$ et $\phi' \in \omega_\phi^d$. On a défini en 2.10 une injection $\mathcal{S}(\phi') \to \mathcal{S}(\phi)$. Grâce au lemme 2.5.2, on a :

(1) le triangle

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}(\phi') & & \to & & \mathcal{S}(\phi) \\ & \searrow rea_F & & \swarrow rea_F & \\ & & C_c^\infty(\mathfrak{g}_d) & & \end{array}$$

est commutatif.

Pour $r \in \mathbb{R}$, on note :

$$\mathcal{S}_r^d = \oplus_{\phi \in \Phi^d, r(\phi) \geq r} \mathcal{S}(\phi), \quad \mathcal{S}_{r+}^d = \oplus_{\phi \in \Phi^d, r(\phi) > r} \mathcal{S}(\phi).$$

Les fonctions dans l'image de $\mathcal{S}_r^d$ par rea_F sont, par construction, à support dans $\mathfrak{g}_{d,r}$.

Rappelons le lemme bien connu :

Lemme 3.3 : *Soit $(v,r) \in V_{(p)}^d \times \mathbb{Z}_{(p)}$. Tout élément de $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r}$ appartenant à l'image par $\pi_{d,v,r}$ de $\mathfrak{g}_{d,r+} \cap \mathfrak{g}_{d,v,r}$ est nilpotent.*

Preuve. Soit $X \in \mathfrak{g}_{d,r+} \cap \mathfrak{g}_{d,v,r}$. Choisissons $(v',r') \in V^d \times \mathbb{R}$ et $g \in G_d$ tels que $r' > r$ et $Ad(g)(X) \in \mathfrak{g}_{d,v',r'}$. Grâce à la décomposition de Bruhat-Tits, on peut écrire $g = hk$, où $k \in G_{d,v}$ et l'action de h^{-1} sur $Imm(G_d, F)$ envoie v' sur un élément de V^d. Quitte à changer v', on peut donc supposer $g \in G_{d,v}$. Puisque $\pi_{d,v,r}(X)$ est nilpotent si et seulement si $\pi_{d,v,r} \circ Ad(g)(X)$ l'est, on peut aussi bien supposer $g = 1$ et $X \in \mathfrak{g}_{d,v',r'}$. Pour tout élément (v'',r'') du segment joignant (v,r) et (v',r'), on a $X \in \mathfrak{g}_{d,v'',r''}$. On choisit (v'',r'') assez proche de (v,r) pour que la facette ϕ'' contenant (v'',r'') appartienne à ω_ϕ^d, où ϕ est la facette contenant (v,r). La facette ϕ'' appartient même à $\omega_\phi^d(> r)$. Alors le lemme 2.10.1 entraîne que $\pi_{d,v,r}(X)$ est nilpotent. $\square$

On note $\mathfrak{g}_{d,reg}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}_d$. Pour $X \in \mathfrak{g}_{d,reg}$, notons $\mathbf{T}_X$ son centralisateur dans $\mathbf{G}_d$. La preuve du lemme 3.2 montre que $\mathbf{T}_X$ se déploie sur F^{mod}. On peut considérer $\mathbf{T}_X$ comme le groupe associé à un certain diagramme $\mathcal{D}_X$. On a muni G_d d'une mesure. Par la même construction, T_X se retrouve muni d'une mesure. On pose :

$$\Delta(X) = |det(ad(X)|\mathfrak{g}_d/\mathfrak{t}_X)|^{1/2},$$

où il s'agit de la valeur absolue usuelle de F. Pour $f \in C_c^\infty(G_d)$, on définit l'intégrale orbitale :

$$J^{G_d}(X,f) = \Delta(X) \int_{G_d/T_X} f(Ad(g)(X))\, dg.$$

3.4

Jusque-là, on a fixé le corps F. Supprimons-le des données.

Proposition 3.4 : *Soit $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Il existe une application linéaire $\ell_r : \mathcal{S}_r^d \to \mathcal{S}_{r+}^d$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_r^d$, tout $F \in CL_q$ et tout $X \in \mathfrak{g}_{d,r+} \cap \mathfrak{g}_{d,reg}$, on ait l'égalité :*

$$J^{G_d}(X, rea_F(\varphi)) = J^{G_d}(X, rea_F \circ \ell_r(\varphi)).$$

Preuve. On peut fixer $\phi' \in \Phi^d$ tel que $r(\phi') \geq r$ et définir $\ell_r(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\phi')$. Si $r(\phi') > r$, on a $\mathcal{S}(\phi') \subseteq \mathcal{S}^d_{r+}$, il suffit de poser $\ell_r(\varphi) = \varphi$. Supposons $r(\phi') = r$. D'après 2.8(3), on peut fixer $v \in V^d_{(p)}$ tel que (v,r) appartienne à l'adhérence de ϕ'. Notons ϕ la facette contenant (v,r). On a $\phi' \in \omega^d_\phi$ et on dispose de l'injection $\mathcal{S}(\phi') \to \mathcal{S}(\phi)$. Supposons défini ℓ_r sur $\mathcal{S}(\phi)$. On définit ℓ_r sur $\mathcal{S}(\phi')$ comme la composée de cette application ℓ_r sur $\mathcal{S}(\phi)$ et de l'injection précédente. Grâce à 3.3(1), cette application convient. On est ainsi ramené au cas de $\mathcal{S}(\phi)$. On a défini au lemme 2.10.2 une application $\ell : \mathcal{S}(\phi) \to \oplus_{\phi' \in \omega^d_\phi(>r)} \mathcal{S}(\phi')$. Ce dernier espace est inclus dans $\mathcal{S}^d_{r+}$ et on définit ℓ_r sur $\mathcal{S}(\phi)$ comme étant cette application ℓ.

Soient $F \in CL_q$, $X \in \mathfrak{g}_{d,r+} \cap \mathfrak{g}_{d,reg}$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\phi)$. Posons $f = rea_F(\varphi)$, $f' = rea_F \circ \ell_r(\varphi)$. Notons Ω l'ensemble des $g \in G_d/T_X$ tels que $Ad(g)(X) \in \mathfrak{g}_{d,v,r}$. Il est stable par multiplication à gauche par $G_{d,v}$. Pour $g \in G_d \setminus \Omega$, on a $f(Ad(g)(X)) = 0$. On obtient :

$$(1) \qquad J^{G_d}(X,f) = \Delta(X) \int_\Omega mes(G_{d,v})^{-1} \int_{G_{d,v}} f(Ad(kg)(X))\, dk\, dg.$$

Pour $g \in \Omega$, définissons une forme linéaire j_g sur $\mathcal{S}(\phi)$ par :

$$j_g(\varphi_0) = |\bar{G}_{d,v}|^{-1} \sum_{k \in \bar{G}_{d,v}} \varphi_0 \circ Ad(k)(\pi_{d,v,r}(Ad(g)(X)))$$

pour tout $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\phi)$. Par définition de rea_F, le terme intérieur du membre de droite de (1) n'est autre que $j_g(\varphi)$. On obtient :

$$J^{G_d}(X,f) = \Delta(X) \int_\Omega j_g(\varphi)\, dg.$$

Rappelons que l'on dispose de l'application linéaire :

$$s_\phi : \oplus_{\phi' \in \omega^d_\phi} \mathcal{S}(\phi') \to \mathcal{S}(\phi).$$

Posons $\varphi'' = s_\phi \circ \ell_r(\varphi)$ et $f'' = rea_F(\varphi'')$. Le même calcul conduit à l'égalité :

$$J^{G_d}(X,f'') = \Delta(X) \int_\Omega j_g(\varphi'')\, dg.$$

Mais, pour $g \in \Omega$, j_g est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\phi)$ invariante par adjonction par $\bar{G}_{d,v}$ et, d'après le lemme 3.3, elle est à support nilpotent. Le lemme 2.10.2 entraîne que $j_g(\varphi) = j_g(\varphi'')$. D'où l'égalité $J^{G_d}(X,f) = J^{G_d}(X,f'')$. Grâce à 3.3(1), $f'' = f'$ et on obtient l'égalité cherchée. $\square$

4 Centralisateurs d'éléments semi-simples.

4.1

Soit $\delta : \Gamma \to N_{red}$ un cocycle. On note $V(\delta)$ l'espace V muni de l'action de Γ : $(\gamma, v) \mapsto \delta(\gamma)_{\mathbb{R}} \gamma(v)$. On note V^δ le sous-espace affine des points fixes par Γ dans $V(\delta)$. On définit $V_{(p)}(\delta)$ et $V^\delta_{(p)}$ en remplaçant V par $V_{(p)}$ dans ces définitions.

Pour $v \in V_{(p)}$, l'appartenance de v à $V^\delta_{(p)}$ équvaut à la relation :

$$t_v^{-1}\delta(\gamma)\gamma(t_v) \in \bar{\mathbf{N}}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$. Si $v \in V^\delta_{(p)}$, l'application $\gamma \mapsto t_v^{-1}\delta(\gamma)\gamma(t_v)$ est un cocycle de Γ dans $\bar{\mathbf{N}}$. On note alors $\rho_{\delta,v}(\gamma)$ l'automorphisme $Ad(t_v^{-1}\delta(\gamma)\gamma(t_v)) \circ \gamma$ de $\bar{\mathbf{G}}$.

4.2

Soit A un sous-espace affine de V tel que $A \cap V_{(p)}$ soit dense dans A. Notons $\Sigma(A)$ l'ensemble des racines $\alpha \in \Sigma$ qui prennent une valeur constante sur A. On note $\alpha(A)$ cette valeur. Puisque $A \cap V_{(p)}$ est dense dans A, $\alpha(A)$ appartient à $\mathbb{Z}_{(p)}$. L'ensemble $\Sigma(A)$ est aussi celui des racines $\alpha \in \Sigma$ qui annulent l'espace vectoriel sous-jacent à A. Un tel ensemble est un sous-ensemble de Lévi de Σ. Il lui correspond un sous-groupe connexe $\bar{\mathbf{H}}(A) \subseteq \bar{\mathbf{G}}$ dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\bar{\mathfrak{t}}$ et les $\bar{E}_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma(A)$.

Lemme 4.2.1 : *Soit $n \in N_{red}$.*
(i) On a l'égalité $\bar{\mathbf{H}}(n_{\mathbb{R}}(A)) = Ad(\pi_N(n))(\bar{\mathbf{H}}(A))$.
(ii) Supposons que $\pi_N(n) \in \bar{\mathbf{H}}(A)$ et qu'il existe $v_0 \in A \cap V_{(p)}$ tel que $n_{\mathbb{R}}(v_0) = v_0$. Alors $n_{\mathbb{R}}(v) = v$ pour tout $v \in A$.

Preuve. Notons w l'image de n dans W. Pour tout $\alpha \in \Sigma$, il existe $c_\alpha \in \mathbb{Z}_{(p)}$ tel que $\alpha(n_{\mathbb{R}}(v)) = w^{-1}(\alpha)(v) + c_\alpha$ pour tout $v \in V$. On en déduit que $\Sigma(n_{\mathbb{R}}(A)) = w(\Sigma(A))$. Donc $\bar{\mathbf{H}}(n_{\mathbb{R}}(A))$ est le sous-groupe connexe de $\bar{\mathbf{G}}$ dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\bar{\mathfrak{t}}$ et les $\bar{E}_{w(\alpha)}$ pour $\alpha \in \Sigma(A)$. Ce groupe est évidemment égal à $Ad(\pi_N(n))(\bar{\mathbf{H}}(A))$, d'où (i).

Démontrons (ii). Puisque $A \cap V_{(p)}$ est dense dans A, il suffit de prouver que $n_{\mathbb{R}}$ fixe tout élément de $A \cap V_{(p)}$. Soit $v \in A \cap V_{(p)}$. L'égalité $n_{\mathbb{R}}(v) = v$ équivaut à $t_v^{-1} n t_v \in \bar{\mathbf{N}}$. Puisque $n_{\mathbb{R}}(v_0) = v_0$, on a $t_{v_0}^{-1} n t_{v_0} \in \bar{\mathbf{N}}$. Posons $\tau = t_v t_{v_0}^{-1}$. Pour montrer que $n_{\mathbb{R}}(v) = v$, il suffit de prouver que $\tau^{-1} n \tau = n$, ou encore $\tau = n\tau n^{-1}$. Ecrivons $\tau = x_* \otimes r$, avec $x_* \in X_*$ et $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, $r \neq 0$. On a $n\tau n^{-1} = w(x_*) \otimes r$. Parce que $v - v_0$ appartient à la partie vectorielle de A, on a $< \alpha, x_* >= 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma(A)$. Puisque $\pi_N(n) \in \bar{\mathbf{H}}(A)$, w appartient au groupe engendré par les symétries relatives à ces racines $\alpha \in \Sigma(A)$. L'égalité précédente entraîne que w fixe x_*. D'où $\tau = n\tau n^{-1}$. $\square$

Soit $\delta : \Gamma \to N_{red}$ un cocycle.

Lemme 4.2.2 : *Supposons $A \subseteq V^\delta$. Alors, pour tous $v \in A \cap V_{(p)}$ et $\gamma \in \Gamma$, l'automorphisme $\rho_{\delta,v}(\gamma)$ de $\bar{\mathbf{G}}$ conserve $\bar{\mathbf{H}}(A)$ et sa restriction à ce groupe est indépendante de v.*

Preuve. Soit $\gamma \in \Gamma$. Notons w l'image de $\delta(\gamma)$ dans W. Puisque $A \subseteq V^\delta$, on a $\delta(\gamma)_{\mathbb{R}}\gamma(A) = A$. Comme dans la preuve précédente, cela entraîne l'égalité $w \circ \gamma(\Sigma(A)) = \Sigma(A)$. Pour $v \in A \cap V_{(p)}$, on remarque que l'image dans W de $t_v^{-1}\delta(\gamma)\gamma(t_v)$ est w. Alors $\rho_{\delta,v}(\gamma)(\bar{\mathbf{H}}(A))$ est le sous-groupe connexe de $\bar{\mathbf{G}}$ associé à l'ensemble de racines $w \circ \gamma(\Sigma(A))$. Il est donc égal à $\bar{\mathbf{H}}(A)$, ce qui prouve la première assertion de l'énoncé.

Soient v, $v_0 \in A \cap V_{(p)}$, posons $\tau = t_v t_{v_0}^{-1}$ et :

$$\tau' = t_{v_0}^{-1}\delta(\gamma)\gamma(t_{v_0})\gamma(\tau)\gamma(t_{v_0})^{-1}\delta(\gamma)^{-1}t_{v_0}.$$

On a $\tau' \in T_{red}$ et les égalités :

$$t_v^{-1}\delta(\gamma)\gamma(t_v) = \tau^{-1}\tau' t_{v_0}^{-1}\delta(\gamma)\gamma(t_{v_0}), \quad \rho_{\delta,v}(\gamma) = Ad(\tau^{-1}\tau')\rho_{\delta,v_0}(\gamma).$$

La première entraîne que $\tau^{-1}\tau' \in \bar{\mathbf{N}}$, donc $\tau^{-1}\tau' \in \bar{\mathbf{T}}$. En vertu de la seconde, pour prouver que $\rho_{\delta,v}(\gamma)$ et $\rho_{\delta,v_0}(\gamma)$ ont même restriction à $\bar{\mathbf{H}}(A)$, il suffit de prouver que

$\alpha(\tau^{-1}\tau') = 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma(A)$. Ecrivons $\tau = x_* \otimes r$, avec $x_* \in X_*$ et $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, $r \neq 0$. On a l'égalité $\tau' = w \circ \gamma(x_*) \otimes \gamma(r)$, où $\gamma(r)$ est calculé dans $\mathbb{G}_{m,red}$. Alors :

$$\alpha(\tau^{-1}\tau') = r^{-<\alpha,x_*>}\gamma(r)^{<\alpha,w\circ\gamma(x_*)>}.$$

Comme dans la preuve précédente, on a $<\alpha, x_*>= 0$ pour $\alpha \in \Sigma(A)$. On a aussi $<\alpha, w \circ \gamma(x_*)>= 0$ puisque $w \circ \gamma$ conserve $\Sigma(A)$. Donc $\alpha(\tau^{-1}\tau') = 1$, ce qui achève la preuve. $\square$

4.3

Soient $F \in CL_q$ et $e \in P$. Pour $v \in V_{(p)}^{I(e)}$, on dispose du schéma en groupes $\mathbf{G}_v^e$ sur $\mathcal{O}^e$. On définit un homomorphisme $\pi_v : \mathbf{G}_v^e \to \bar{\mathbf{G}}$ en généralisant la construction de 2.3. On fixe un multiple e' de e dans P tel que $e'v \in X_*$ et $I(e')$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$. Alors π_v est le composé de $\pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})$ et de l'inclusion $\mathbf{G}_v^e \subseteq \mathbf{G}_v^{e'}$. Comme au lemme 2.3.1, l'image $\pi_v(\mathbf{G}_v^e)$ est le sous-groupe des points fixes dans $\bar{\mathbf{G}}$ des opérateurs $\rho_v(\sigma) = Ad(\sigma(t_v)t_v^{-1}) \circ \sigma$ pour $\sigma \in I(e)$. On montre aussi :

(1) π_v se restreint en une surjection de $\mathbf{N}(F^e) \cap \mathbf{G}_v^e$ sur $\bar{\mathbf{N}} \cap \pi_v(\mathbf{G}_v^e)$ et cette restriction coïncide avec $\pi_N \circ red$.

En effet, soit e' comme ci-dessus. Grâce à 2.1(1), $\pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})$ se restreint en une surjection de $\mathbf{N}(F^{e'}) \cap \mathbf{G}_v^{e'}$ sur $\bar{\mathbf{N}}$. Comme en 1.7, le noyau de cette surjection est cohomologiquement trivial. En passant aux points fixes par $I(e)$, on obtient la première assertion. La seconde se démontre comme 2.3(2).

Soit $\delta_F : \Gamma \to N^{mod}$ un cocycle, que l'on suppose trivial sur $I(e)$. Posons $\delta = red \circ \delta_F$. Soit $v \in V_{(p)}^{I(e)} \cap V^\delta$. Pour $\gamma \in \Gamma$, l'opérateur $Ad(\delta_F(\gamma)) \circ \gamma$ de $\mathbf{G}$ conserve $\mathbf{G}(F^e)$. Parce que $v \in V^\delta$, il conserve $\mathbf{G}_v^e$. On vérifie que, pour tout $g \in \mathbf{G}_v^e$, on a l'égalité $\pi_v \circ Ad(\delta_F(\gamma)) \circ \gamma(g) = \rho_{\delta,v}(\gamma) \circ \pi_v(g)$. A fortiori, $\rho_{\delta,v}(\gamma)$ conserve l'image $\pi_v(\mathbf{G}_v^e)$.

4.4

Soient $F \in CL_q$ et A un sous-espace affine de V tel que $V_{(p)} \cap A$ soit dense dans A. Choisissons $e \in P$ tel que $e\alpha(A) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Sigma(A)$ et $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$.

Introduisons la décomposition en facettes de V relative à l'entier e, cf. 1.6. Parmi les facettes qui coupent A, fixons-en une de dimension maximale, que l'on note ϕ.

Lemme 4.4.1 : *Soit $v \in A \cap V_{(p)} \cap \phi$.*

(i) La composante neutre de $\pi_v(\mathbf{G}_v^e)$ est égale à $\bar{\mathbf{H}}(A)$.

(ii) Pour tout $h \in \mathbf{G}_v^e$, il existe $n \in \mathbf{N}(F^e) \cap \mathbf{G}_v^e$ et $k \in \mathbf{G}_v^e$ tels que $h = nk$ et $\pi_v(k) \in \bar{\mathbf{H}}(A)$.

Preuve. On montre d'abord :

(1) $\Sigma(A)$ est l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $e\alpha(v) \in \mathbb{Z}$.

Soit $\alpha \in \Sigma$. Alors $e\alpha(v) \in \mathbb{Z}$ si et seulement s'il existe $r \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$ tel que v appartienne à l'hyperplan $H_{\alpha+r}$, cf.1.6. Parce que $I(e)$ agit trivialement sur $\mathcal{D}$, la décomposition en facettes est précisément définie par la collection d'hyperplans $H_{\beta+r}$ pour $\beta \in \Sigma$ et $r \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$. Puisque $v \in \phi$, cela entraîne que $e\alpha(v) \in \mathbb{Z}$ si et seulement s'il existe $r \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$ tel que $\phi \subseteq H_{\alpha+r}$. Si cette dernière condition est vérifiée, $A \cap \phi \subseteq H_{\alpha+r}$. Mais, d'après le choix de ϕ, $A \cap \phi$ est ouvert dans A ([La], lemme 10.14). Donc $A \subseteq H_{\alpha+r}$ et α est constante sur A, i.e. $\alpha \in \Sigma(A)$. Inversement, si $\alpha \in \Sigma(A)$, on a $A \subseteq H_{\alpha-\alpha(A)}$, a fortiori $A \cap \phi \subseteq H_{\alpha-\alpha(A)}$. D'après l'hypothèse sur e, $\alpha(A) \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$. Donc l'hyperplan $H_{\alpha-\alpha(A)}$ appartient à la collection d'hyperplans définissant la décomposition en facettes. Puisqu'il coupe ϕ, on a $\phi \subseteq H_{\alpha-\alpha(A)}$. Cela prouve (1).

D'après 4.3, l'algèbre de Lie de $\pi_v(\mathbf{G}_v^e)$ est l'ensemble des points fixes dans $\bar{\mathfrak{g}}$ des opérateurs $\rho_v(\sigma)$ pour $\sigma \in I(e)$. Pour prouver (i), il suffit de prouver que $\alpha \in \Sigma(A)$ si et seulement si $\rho_v(\sigma)$ fixe $\bar{E}_\alpha$ pour tout $\sigma \in I(e)$.

Fixons $n \in P$ tel que $ent_v \in X_*$. Posons $x_* = ent_v$. Pour $\sigma \in I(e)$, on a $\sigma(t_v)t_v^{-1} = x_*(\sigma_{en})$, où σ_{en} est l'image de σ dans $\zeta_{en}(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Soit $\alpha \in \Sigma$. On a l'égalité $\rho_v(\sigma)(\bar{E}_\alpha) = \alpha(\sigma(t_v)t_v^{-1})\bar{E}_\alpha = \sigma_{en}^{<\alpha,x_*>}\bar{E}_\alpha$. Mais on a $\alpha(v) = -\frac{1}{en} < \alpha, x_* >$. Alors $\bar{E}_\alpha$ est fixe par les opérateurs $\rho_v(\sigma)$ pour tout $\sigma \in I(e)$ si et seulement si $z^{-en\alpha(v)} = 1$ pour tout $z \in \zeta_{en}(\bar{\mathbb{F}}_q)$ tel que $z^n = 1$. Cela équivaut à $e\alpha(v) \in \mathbb{Z}$. En utilisant (1), cela démontre (i).

Tout élément de $\pi_v(\mathbf{G}_v^e)$ s'écrit sous la forme nk, où $n \in \bar{\mathbf{N}} \cap \pi_v(\mathbf{G}_v^e)$ et k appartient à la composante neutre de $\pi_v(\mathbf{G}_v^e)$, autrement dit à $\bar{\mathbf{H}}(A)$. On remonte cette décomposition à $\mathbf{G}_v^e$ en utilisant 4.3(1). $\square$

De même que l'on a construit $\bar{\mathbf{H}}(A) \subseteq \bar{\mathbf{G}}$, on construit $\mathbf{H}(A) \subseteq \mathbf{G}$ associé à l'ensemble de racines $\Sigma(A)$.

Lemme 4.4.2 : *Pour $v \in A \cap V_{(p)}$, le groupe $\mathbf{H}(A; F^e) \cap \mathbf{G}_v^e$ est indépendant de v. Son image par π_v est $\bar{\mathbf{H}}(A)$.*

Preuve. Soient v, $v' \in A \cap V_{(p)}$. Choisissons un multiple e' de e dans P tel que $e'v \in X_*$ et $e'v' \in X_*$. Les groupes $\mathbf{H}(A; F^e) \cap \mathbf{G}_v^e$, resp. $\mathbf{H}(A; F^e) \cap \mathbf{G}_{v'}^e$, sont les groupes d'invariants par $I(e)$ dans $\mathbf{H}(A; F^{e'}) \cap \mathbf{G}_v^{e'}$, resp. $\mathbf{H}(A; F^{e'}) \cap \mathbf{G}_{v'}^{e'}$. Pour démontrer la première assertion de l'énoncé, il suffit de prouver que ces groupes sont égaux. Quitte à remplacer e par e', on peut donc supposer $ev \in X_*$, $ev' \in X_*$. Les éléments $t_{F,v}$ et $t_{F,v'}$ appartiennent à $\mathbf{T}(F^e)$ et on a l'égalité $\mathbf{G}_v^e = Ad(t_{F,v}t_{F,v'}^{-1})(\mathbf{G}_{v'}^e)$. Comme dans la preuve du lemme 4.2.1, $t_{F,v}t_{F,v'}^{-1}$ commute à $\mathbf{H}(A; F^e)$. De l'égalité précédente se déduit l'égalité cherchée. Cela démontre la première assertion de l'énoncé.

Soit $v \in A \cap V_{(p)}$, choisissons un multiple e' de e dans P tel que $e'v \in X_*$. Il est clair que l'application $\pi : \mathbf{H}(A; F^{e'}) \cap \mathbf{G}_0^{e'} \to \bar{\mathbf{G}}$ a pour image $\bar{\mathbf{H}}(A)$. Puisque $Ad(t_{F,v}^{-1})$ normalise $\mathbf{H}(A; F^{e'})$, l'image de $\mathbf{H}(A; F^{e'}) \cap \mathbf{G}_v^{e'}$ par $\pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})$ est aussi $\bar{\mathbf{H}}(A)$. Le noyau de cette application étant cohomologiquement trivial, on peut passer aux sous-groupes des invariants par $I(e)$: l'image de $\mathbf{H}(A; F^e) \cap \mathbf{G}_v^e$ par π_v est le sous-groupe des éléments de $\bar{\mathbf{H}}(A)$ fixes par les opérateurs $\rho_v(\sigma)$ pour $\sigma \in I(e)$. Mais ce groupe est $\bar{\mathbf{H}}(A)$ tout entier. Cela se prouve comme dans le lemme précédent. On n'a plus la relation (1) mais toutefois l'inclusion : $\Sigma(A)$ est inclus dans l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $e\alpha(v) \in \mathbb{Z}$. Cette inclusion suffit pour conclure. $\square$

4.5

Considérons les données suivantes :

(i) $\mathcal{D}' = (X'^*, \Sigma', \Delta', X'_*, \check{\Sigma}', \check{\Delta}')$ est une donnée de racines munie d'une action de Γ, cf. 1.4. On introduit les objets relatifs à $\mathcal{D}'$ que l'on a introduits dans les paragraphes précédents pour la donnée $\mathcal{D}$. On les affecte d'un ', par exemple W', $\bar{\mathbf{T}}'$ etc...

(ii) ψ est un couple d'isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules $X'^* \xrightarrow{\sim} X^*$, $X'_* \xrightarrow{\sim} X_*$, en dualité. Pour simplifier, on note encore ψ chacun de ces isomorphismes, ainsi que tout isomorphisme qui s'en déduit par fonctorialité, par exemple entre les groupes d'automorphismes de X'^* et X^*. On suppose que $\psi(\Delta') \subseteq \Delta$ et $\psi(\check{\Delta}') \subseteq \check{\Delta}$ et que $\psi(\Sigma')$, resp. $\psi(\check{\Sigma}')$, est le sous-système de racines de Σ, resp. $\check{\Sigma}$, engendré par $\psi(\Delta')$, resp. $\psi(\check{\Delta}')$. Autrement dit, via ψ, $\mathcal{D}'$ s'identifie à un sous-système de Lévi standard de $\mathcal{D}$. On suppose aussi que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe $w \in W$ tel que $\psi \circ \gamma = w \circ \gamma \circ \psi$. Cet élément est unique, on le note $w_\psi(\gamma)$;

(iii)$r \in \mathbb{Z}_{(p)}$;

on note $\bar{\mathfrak{t}}(r)$ le $\bar{\mathbb{F}}_q$-espace vectoriel $\bar{\mathfrak{t}} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_q$ muni de l'action de Γ définie de la façon suivante : Θ agit par le produit de ses actions sur X_* et $\bar{\mathbb{F}}_q$; pour $\sigma \in I$, $x_* \in X_*$ et $z \in \bar{\mathbb{F}}_q$, $\sigma(x_* \otimes z) = \sigma(x_*) \otimes r(\sigma) z$, cf. 1.2. On définit de façon similaire $\bar{\mathfrak{t}}'(r)$. Remarquons que de ψ se déduit un isomorphisme, encore noté ψ, de $\bar{\mathfrak{t}}'(r)$ sur $\bar{\mathfrak{t}}(r)$, qui n'est pas en général équivariant pour les actions de Γ. On pose :

$$\bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(r) = \{Z \in \bar{\mathfrak{t}}'(r); \forall \alpha' \in \Sigma', \alpha'(Z) = 0\};$$

(iv) $\bar{Z}' \in \bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(r)^\Gamma$. On suppose :

(1) pour tout $\alpha \in \Sigma \setminus \psi(\Sigma')$, $\alpha \circ \psi(\bar{Z}') \neq 0$.

Ces données forment un quadruplet $(\mathcal{D}', \psi, r, \bar{Z}')$. On note $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ l'ensemble des quadruplets vérifiant ces conditions.

Soient $(\mathcal{D}'_1, \psi_1, r_1, \bar{Z}'_1)$ et $(\mathcal{D}'_2, \psi_2, r_2, \bar{Z}'_2)$ deux éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$. Par définition, un isomorphisme entre ces quadruplets n'existe que si $r_1 = r_2$. Dans ce cas, un isomorphisme est un couple (f, w) formé d'un isomorphisme $f : \mathcal{D}'_1 \to \mathcal{D}'_2$, dans un sens évident, équivariant pour les actions de Γ, et d'un élément $w \in W$ tels que :

$$\psi_2 \circ f = w \circ \psi_1 \text{ et } f(\bar{Z}'_1) = \bar{Z}'_2.$$

Remarquons que :

(2) le groupe d'automorphismes d'un quadruplet $(\mathcal{D}', \psi, r, Z') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ est trivial.

En effet, soit (f, w) un tel automorphisme. On a $w \circ \psi(\bar{Z}') = \psi(\bar{Z}')$. L'hypothèse (P_Σ) permet de travailler comme en caractéristique nulle. Le centralisateur dans W d'un élément de $\bar{\mathfrak{t}}(r)$ est le groupe de Lévi de W associé aux racines $\alpha \in \Sigma$ qui annulent cet élément. Dans le cas de $\psi(\bar{Z}')$, grâce à (1), cela entraîne $w \in \psi(W')$. Soit $w' \in W'$ tel que $w = \psi(w')$. Alors f est l'action de w'. Puisque cette action doit conserver les bases Δ' et $\check{\Delta}'$, on a $w' = 1$.

4.6

On fixe jusqu'à la fin du chapitre 4 un quadruplet $(\mathcal{D}', \psi, r, \bar{Z}') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$. On introduit le groupe $\bar{\mathbf{G}}'$ associé à $\mathcal{D}'$ et on définit un plongement :

$$\bar{i}_\psi : \bar{\mathbf{G}}' \to \bar{\mathbf{G}}$$

caractérisé par les propriétés suivantes :

- $\bar{i}_\psi$ se restreint en l'isomorphisme de $\bar{\mathbf{T}}'$ sur $\bar{\mathbf{T}}$ déduit de $\psi : X'_* \to X_*$;
- en notant encore $\bar{i}_\psi$ la dérivée du plongement, $\bar{i}_\psi(\bar{E}'_{\alpha'}) = \bar{E}_{\psi(\alpha')}$ pour tout $\alpha' \in \Delta'$.

Ce plongement $\bar{i}_\psi$ se restreint en un plongement $\bar{\mathbf{N}}' \to \bar{\mathbf{N}}$. Il est compatible aux sections $\bar{n}' : W' \to \bar{\mathbf{N}}'$, $\bar{n} : W \to \bar{\mathbf{N}}$ définies en 1.5, c'est-à-dire que $\bar{i}_\psi \circ \bar{n}'(w') = \bar{n} \circ \psi(w')$ pour tout $w' \in W'$. D'autre part, de ψ se déduit un isomorphisme $T'_\varpi \xrightarrow{\sim} T_\varpi$. Cet isomorphisme et le plongement précédent se regroupent en un plongement :

$$i_{red,\psi} : N'_{red} \to N_{red}.$$

On note $Z_{red,\psi}$ le sous-groupe des $t\in T_{red}$ tels que $\alpha(t)=1$ pour tout $\alpha\in\psi(\Sigma')$. Ses éléments commutent à $i_{red,\psi}(N'_{red})$. On pose $\bar{\mathbf{Z}}_\psi=Z_{red,\psi}\cap\bar{\mathbf{T}}$. C'est le centre de $\bar{i}_\psi(\bar{\mathbf{G}}')$.

Remarquons la propriété :

(1) soient $\alpha\in\Sigma$ et $\gamma\in\Gamma$. Supposons que α et $w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)$ soient de signes opposés. Alors $\alpha\not\in\psi(\Sigma')$.

En effet, soit $\alpha'\in\Sigma'$. Les couples suivants sont formés de racines de même signe :

$\psi(\alpha')$ et α' car $\psi(\Delta')\subseteq\Delta$;

α' et $\gamma^{-1}(\alpha')$ car $\gamma(\Delta')=\Delta'$;

$\gamma^{-1}(\alpha')$ et $\psi\circ\gamma^{-1}(\alpha')$ car $\psi(\Delta')\subseteq\Delta$;

$\psi\circ\gamma^{-1}(\alpha')$ et $\gamma^{-1}\circ w_\psi(\gamma)^{-1}\circ\psi(\alpha')$ car ces deux termes sont égaux ;

$\gamma^{-1}\circ w_\psi(\gamma)^{-1}\circ\psi(\alpha')$ et $w_\psi(\gamma)^{-1}\circ\psi(\alpha')$ car $\gamma(\Delta)=\Delta$.

Donc $\psi(\alpha')$ et $w_\psi(\gamma)^{-1}\circ\psi(\alpha')$ sont de même signe, ce qui entraîne (1).

Posons $\bar{Z}=\psi(\bar{Z}')$. Pour $\gamma\in\Gamma$, on définit les éléments $z_{\varpi,\psi}(\gamma)\in T_\varpi$, $\bar{z}_\psi(\gamma)\in\bar{\mathbf{T}}$, $z_\psi(\gamma)\in T_{red}$, $n_\psi(\gamma)\in N_{red}$, $\bar{n}_\psi(\gamma)\in\bar{\mathbf{N}}$ par :

$$z_{\varpi,\psi}(\gamma)=\left(\sum_{\alpha\in\Sigma,\alpha>0,w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)<0}\check{\alpha}\right)\otimes r;$$

$$(2)\qquad \bar{z}_\psi(\gamma)=\prod_{\alpha\in\Sigma,\alpha>0,w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)<0}\check{\alpha}\circ\alpha(\bar{Z});$$

$$z_\psi(\gamma)=z_{\varpi,\psi}(\gamma)\bar{z}_\psi(\gamma);$$

$$n_\psi(\gamma)=z_\psi(\gamma)\bar{n}(w_\psi(\gamma));$$

$$\bar{n}_\psi(\gamma)=\pi_N(n_\psi(\gamma))=\bar{z}_\psi(\gamma)\bar{n}(w_\psi(\gamma)).$$

Remarquons que la définition (2) est loisible : si $\alpha\in\Sigma$ est tel que $\alpha>0$ et $w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)<0$, on a $\alpha\not\in\psi(\Sigma')$ d'après (1), donc $\alpha(\bar{Z})\neq0$ d'après 4.5(1).

Lemme 4.6 : *(i) L'application $\gamma\mapsto n_\psi(\gamma)$ est un cocycle de Γ dans N_{red}.*

(ii) Pour tout $\gamma\in\Gamma$, $z_{\varpi,\psi}(\gamma)$ et $z_\psi(\gamma)$ appartiennent à $Z_{red,\psi}$ et $\bar{z}_\psi(\gamma)$ appartient à $\bar{\mathbf{Z}}_\psi$.

(iii) Pour tout $g'\in\bar{\mathbf{G}}'$, on a l'égalité $\bar{i}_\psi\circ\gamma(g')=Ad(\bar{n}_\psi(\gamma))\circ\gamma\circ\bar{i}_\psi(g')$.

(iv) Pour tout $n'\in N'_{red}$, on a l'égalité $i_{red,\psi}\circ\gamma(n')=n_\psi(\gamma)\gamma\circ i_{red,\psi}(n')n_\psi(\gamma)^{-1}$.

Preuve. Le (i) résulte de la preuve du lemme 2.2A de [LS].

Introduisons les objets relatifs à la donnée $\mathcal{D}_{sc}$. Soit $\gamma\in\Gamma$. De même que l'on a construit $z_{\varpi,\psi}(\gamma)\in T_\varpi$, $n_\psi(\gamma)\in N_{red}$ etc..., on construit $z_{\varpi,\psi,sc}(\gamma)\in T_{\varpi,sc}$, $n_{\psi,sc}(\gamma)\in N_{red,sc}$ etc... On a les égalités $z_{\varpi,\psi}(\gamma)=\iota\circ z_{\varpi,\psi,sc}(\gamma)$, $n_\psi(\gamma)=\iota\circ n_{\psi,sc}(\gamma)$ etc... Pour démontrer (ii), il suffit de démontrer les assertions analogues pour les objets $z_{\varpi,\psi,sc}(\gamma)$ etc... On peut aussi bien abandonner les indices sc et supposer que $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{sc}$. On va démontrer que $\bar{z}_\psi(\gamma)\in\bar{\mathbf{Z}}_\psi$, les autres assertions se traitant de la même façon. Parce qu'on suppose $\bar{\mathbf{G}}$ simplement connexe, un élément de $\bar{\mathbf{T}}$ appartient à $\bar{\mathbf{Z}}_\psi$ si et seulement s'il est fixe par l'action de $\psi(W')$. Montrons que $\bar{z}_\psi(\gamma)$ vérifie cette condition. Soit $w'\in W'$, posons $w=\psi(w')$. On a :

(3) l'application $\alpha\mapsto w(\alpha)$ conserve l'ensemble des $\alpha\in\Sigma$ tels que $\alpha>0$ et $w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)<0$.

Soit α dans cet ensemble. D'après (1), $\alpha\in\Sigma\setminus\psi(\Sigma')$. Par définition de $w_\psi(\gamma)$, l'automorphisme $\gamma^{-1}\circ w_\psi(\gamma)^{-1}$ de X^* conserve $\psi(\Sigma')$, donc aussi $\Sigma\setminus\psi(\Sigma')$ et $\psi(W')$.

Donc, d'une part, $\gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha) \in \Sigma \setminus \psi(\Sigma')$; d'autre part il existe $w_1' \in W'$ tel qu'en posant $w_1 = \psi(w_1')$, on ait $\gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1} \circ w = w_1 \circ \gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}$. L'ensemble $\psi(\Sigma')$ est un sous-ensemble de Lévi standard de Σ et w appartient au groupe de Weyl associé à ce sous-ensemble. Les seules racines inversées par un tel élément appartiennent à $\psi(\Sigma')$. Puisque $\alpha \notin \psi(\Sigma')$, $w(\alpha)$ est de même signe que α, i.e. $w(\alpha) > 0$. De même $w_1 \circ \gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)$ est de même signe que $\gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)$. Alors les couples suivants sont de même signe :

$w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)$ et $\gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)$ car $\gamma(\Delta) = \Delta$;

$\gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)$ et $w_1 \circ \gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)$, comme on vient de le voir ;

$w_1 \circ \gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)$ et $\gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1} \circ w(\alpha)$ car ces deux termes sont égaux ;

$\gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1} \circ w(\alpha)$ et $w_\psi(\gamma)^{-1} \circ w(\alpha)$ car $\gamma(\Delta) = \Delta$.

Donc $w_\psi(\gamma)^{-1} \circ w(\alpha)$ est de même signe que $w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)$, i.e. $w_\psi(\gamma)^{-1} \circ w(\alpha) < 0$. Cela prouve (3).

On a :

$$w(\bar{z}_\psi(\gamma)) = \prod_{\alpha \in \Sigma, \alpha > 0, w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha) < 0} w(\check{\alpha}) \circ \alpha(\bar{Z}).$$

On remplace $w(\check{\alpha})$ par $\check{\alpha}$. Grâce à (3), on obtient :

$$w(\bar{z}_\psi(\gamma)) = \prod_{\alpha \in \Sigma, \alpha > 0, w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha) < 0} \check{\alpha} \circ w^{-1}(\alpha)(\bar{Z}).$$

Pour tout α, $w^{-1}(\alpha)(\bar{Z}) = \alpha \circ w(\bar{Z}) = \alpha \circ \psi \circ w'(\bar{Z}')$. Mais $w'(\bar{Z}') = \bar{Z}'$ parce que $\bar{Z}' \in \bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(r)$. Donc $w^{-1}(\alpha)(\bar{Z}) = \alpha(\bar{Z})$. Cela entraîne $w(\bar{z}_\psi(\gamma)) = \bar{z}_\psi(\gamma)$ et le (ii) de l'énoncé.

On a bien l'égalité $\bar{i}_\psi \circ \gamma = Ad(\bar{n}_\psi(\gamma)) \circ \gamma \circ \bar{i}_\psi$ sur $\bar{\mathbf{T}}'$: cela résulte de la définition de $w_\psi(\gamma)$. Pour prouver (iii), il suffit de prouver que $\bar{i}_\psi \circ \gamma(\bar{E}'_{\alpha'}) = Ad(\bar{n}_\psi(\gamma)) \circ \gamma \circ \bar{i}_\psi(\bar{E}'_{\alpha'})$ pour tout $\alpha' \in \Delta'$. Fixons un tel α', posons $\beta' = \gamma(\alpha')$, $\alpha = \psi(\alpha')$, $\beta = \psi(\beta')$. On a $\beta' \in \Delta'$, α, $\beta \in \Delta$ et $w_\psi(\gamma) \circ \gamma(\alpha) = \beta$. On doit montrer que $Ad(\bar{n}_\psi(\gamma)) \circ \gamma(\bar{E}_\alpha) = E_\beta$. De nouveau, on peut supposer que $\bar{\mathbf{G}}$ est simplement connexe. Des propriétés de la section $\bar{n}$ résulte que :

$$(4) \qquad Ad(\bar{n}(w_\psi(\gamma))) \circ \gamma(\bar{E}_\alpha) = \epsilon \bar{E}_\beta,$$

avec $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Cela entraîne l'égalité dans $\bar{\mathbf{N}}$:

$$(5) \qquad \bar{n}(w_\psi(\gamma))\bar{n}(s_{\gamma(\alpha)}) = \check{\beta}(\epsilon)\bar{n}(s_\beta)\bar{n}(w_\psi(\gamma)).$$

D'après 1.5(1), le membre de gauche vaut :

$$\nu(w_\psi(\gamma), s_{\gamma(\alpha)})\bar{n}(w_\psi(\gamma)s_{\gamma(\alpha)}).$$

Les seules racines inversées par $s_{\gamma(\alpha)}$ sont $\pm\gamma(\alpha)$. Elles ne sont pas inversées par $w_\psi(\gamma)$ car $w_\psi(\gamma) \circ \gamma(\alpha) = \beta$. Donc $\nu(w_\psi(\gamma), s_{\gamma(\alpha)}) = 1$ et le membre de gauche de (5) est égal à $\bar{n}(w_\psi(\gamma)s_{\gamma(\alpha)})$. Pour une raison similaire, le membre de droite vaut $\check{\beta}(\epsilon)\bar{n}(w_\psi(\gamma)s_{\gamma(\alpha)})$. Cela entraîne $\check{\beta}(\epsilon) = 1$. Puisqu'on a supposé $\bar{\mathbf{G}}$ simplement connexe, il en résulte que $\epsilon = 1$. On a déjà montré que $\bar{z}_\psi(\gamma)$ appartenait à $\bar{\mathbf{Z}}_\psi$. Ce terme centralise E_β. De (4), où $\epsilon = 1$, résulte l'égalité $Ad(\bar{z}_\psi(\gamma)\bar{n}(w_\psi(\gamma))) \circ \gamma(\bar{E}_\alpha) = E_\beta$, ce qui est l'égalité cherchée.

Pour démontrer (iv), il suffit de prouver l'égalité en question pour $n' \in T'_\varpi$ et $n' \in \bar{\mathbf{N}}'$. Sur T'_ϖ, la conjugaison par $n_\psi(\gamma)$ n'est autre que l'action naturelle de $w_\psi(\gamma)$. L'égalité cherchée pour $n' \in T'_\varpi$ résulte alors de la définition de $w_\psi(\gamma)$. Pour $n' \in \bar{\mathbf{N}}'$, on a $i_{red,\psi}(n') = \bar{i}_\psi(n')$ et on sait grâce à (iii) que :

$$i_{red,\psi} \circ \gamma(n') = \bar{n}_\psi(\gamma)\gamma \circ i_{red,\psi}(n')\bar{n}_\psi(\gamma)^{-1}.$$

Mais, grâce à (ii), $z_{\varpi,\psi}(\gamma)$ commute à $i_{red,\psi} \circ \gamma(n')$. On peut donc remplacer dans cette égalité $\bar{n}_\psi(\gamma)$ par $z_{\varpi,\psi}(\gamma)\bar{n}_\psi(\gamma) = n_\psi(\gamma)$ et cela achève la preuve. $\square$

4.7

Soit $F \in CL_q$. On construit les groupes $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{G}$ sur F associés aux données $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$. Comme en 4.6, on construit un plongement $i_\psi : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$, qui est défini sur F^{mod}.

Pour tout réel s et toute extension K de F contenue dans F^{mod}, on a défini en 3.2 les réseaux $\mathfrak{t}(K)_s$ et $\mathfrak{t}(K)_{s+}$ Si $s \notin \mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathfrak{t}_{s+}^{mod} = \mathfrak{t}_s^{mod}$. Supposons $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$. On définit un isomorphisme de Γ-modules :

$$\mathfrak{t}_s^{mod}/\mathfrak{t}_{s+}^{mod} \to \bar{\mathfrak{t}}(s).$$

Ecrivons $s = \frac{n}{e}$ avec $e \in P$ et $n \in \mathbb{Z}$, soit $x_* \otimes y \in \mathfrak{t}_s^{mod}$, avec $x_* \in X_*$ et $y \in F^{mod}$, $val(y) \geq s$. L'isomorphisme envoie $x_* \otimes y$ sur $x_* \otimes z$, où z est la réduction naturelle dans $\bar{\mathbb{F}}_q$ de l'entier $\varpi_{\frac{1}{e}}^{-n}y$.

On définit de même $\mathfrak{t}_s'^{mod}$. On pose :

$$\mathfrak{t}_{cent,s}'^{mod} = \{X \in \mathfrak{t}_s'^{mod}; \forall \alpha' \in \Sigma', \alpha'(X) = 0\}.$$

On définit de même $\mathfrak{t}_{cent,s+}'^{mod}$ et, pour $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on a encore un isomorphisme :

$$\mathfrak{t}_{cent,s}'^{mod}/\mathfrak{t}_{cent,s+}'^{mod} \to \bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(s).$$

Comme en 1.7, les Γ-modules $\mathfrak{t}_{cent,s}'^{mod}$ et $\mathfrak{t}_{cent,s+}'^{mod}$ sont cohomologiquement triviaux. Cela entraîne que l'application :

$$\mathfrak{t}'_{cent,s} \to \bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(s)^\Gamma$$

est surjective. Appliquons cela à $s = r$. On peut alors fixer $Z'_F \in \mathfrak{t}'_{cent,r}$ dont l'image dans $\bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(r)^\Gamma$ soit $\bar{Z}'$.

A l'aide de Z'_F, on construit comme en 4.6 un cocycle $n_{\psi,F}$ de Γ dans N^{mod}. On a l'égalité $n_\psi = red \circ n_{\psi,F}$. On montre comme au lemme 4.6 l'égalité :

$$(1) \quad i_\psi \circ \gamma = Ad(n_{\psi,F}(\gamma)) \circ \gamma \circ i_\psi$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

4.8

On construit le groupe $D' = (X'_*/X'_{*,sc})_{\Gamma,tors}$. De ψ se déduit une surjection $X'_*/X'_{*,sc} \to X_*/X_{*,sc}$. Elle est équivariante pour les actions de Γ car l'action de W sur l'ensemble d'arrivée est triviale. Il s'en déduit une surjection $(X'_*/X'_{*,sc})_\Gamma \to (X_*/X_{*,sc})_\Gamma$ puis, en passant aux sous-groupes de torsion, un homomorphisme $D' \to D$, qui n'a plus de raison d'être surjectif. On le note $\psi_{D'}$.

Soit $d' \in D'$. Pour $\gamma \in \Gamma$, posons $d_0(\gamma) = i_{red,\psi} \circ d'(\gamma)n_\psi(\gamma)$. Grâce au lemme 4.6(iv), d_0 est un cocycle de Γ dans N_{red}.

Soit $F \in CL_q$. On définit de même un cocycle $d_{0,F}$ de Γ dans N^{mod} en posant $d_{0,F}(\gamma) = i_\psi \circ d'_F(\gamma) n_{\psi,F}(\gamma)$.

Lemme 4.8 : *Posons $d = \psi_{D'}(d')$. Les deux cocycles $d_{0,F}$ et d_F définissent le même élément de $H^1(\Gamma, G^{mod})$.*

Preuve. Introduisons une z-extension :

$$(1) \qquad 1 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{a} \tilde{\mathbf{G}} \xrightarrow{b} \mathbf{G} \to 1$$

vérifiant les conditions de 1.10. Le cocycle $n_{\psi,F}$ se relève en un cocycle $n_{\psi,sc,F}$ de Γ dans G_{sc}^{mod} tel que $n_{\psi,F} = \iota \circ n_{\psi,sc,F}$. On définit un groupe réductif $\tilde{\mathbf{G}}'$ sur F, muni d'un isomorphisme :

$$\tilde{i}_\psi : \tilde{\mathbf{G}}' \to b^{-1}(i_\psi(\mathbf{G}'))$$

tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\tilde{i}_\psi \circ \gamma = Ad(\tilde{\iota} \circ n_{\psi,sc,F}(\gamma)) \circ \gamma \circ \tilde{i}_\psi$. La suite (1) se complète en un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \mathbf{Z} & \xrightarrow{a} & \tilde{\mathbf{G}} & \xrightarrow{b} & \mathbf{G} & \to & 1 \\
 & & \uparrow id & & \uparrow \tilde{i}_\psi & & \uparrow i_\psi & & \\
1 & \to & \mathbf{Z} & \xrightarrow{a'} & \tilde{\mathbf{G}}' & \xrightarrow{b'} & \mathbf{G}' & \to & 1
\end{array}$$

La suite exacte inférieure est une z-extension de $\mathbf{G}'$.

Puisque $\mathbf{G}_{sc}$ est simplement connexe, $H^1(\Gamma, G_{sc}^{mod}) = \{0\}$. On peut fixer $g \in G_{sc}^{mod}$ tel que :

$$(2) \qquad g^{-1} n_{\psi,sc,F}(\gamma)\gamma(g) = 1$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$. Définissons un cocycle $d_{1,F}$ de Γ dans G^{mod} par $d_{1,F}(\gamma) = \iota(g)^{-1} d_{0,F}(\gamma) \iota \circ \gamma(g)$. Il suffit de prouver que $d_{1,F}$ et d_F sont cohomologues. Mais $d_{1,F}$ est trivial sur I, comme $d_{0,F}$. Il suffit donc de prouver que $d_{1,F}(\theta_1)$ et $d_F(\theta_1)$ ont même image par l'application :

$$(3) \qquad G^{nr} \xrightarrow{w_G} (X_*/X_{*,sc})_I \to (X_*/X_{*,sc})_\Gamma.$$

En appliquant 1.10(3) à $\mathbf{G}'$, choisissons $\tilde{x}' \in \tilde{G}'^{nr}$ tel que $b'(\tilde{x}') = d'_F(\theta_1)$. Posons $\tilde{x} = \tilde{\iota}(g)^{-1} \tilde{i}_\psi(\tilde{x}') \tilde{\iota} \circ n_{\psi,sc,F}(\theta_1) \tilde{\iota} \circ \theta_1(g)$. On a :

$$(4) \qquad \tilde{x} \in \tilde{G}^{nr} \text{ et } b(\tilde{x}) = d_{1,F}(\theta_1).$$

La deuxième assertion est immédiate. Soit $\sigma \in I$. On doit montrer que $\sigma(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Remarquons que, grâce à (2), on a l'égalité $\tilde{x} = Ad(\tilde{\iota}(g)^{-1})(\tilde{i}_\psi(\tilde{x}'))$. Alors :

$$\sigma(\tilde{x}) = Ad(\tilde{\iota} \circ \sigma(g)^{-1})(\sigma \circ \tilde{\iota}_\psi(\tilde{x}')).$$

On a :

$$\sigma \circ \tilde{\iota}_\psi(\tilde{x}') = Ad(\tilde{\iota} \circ n_{\psi,sc,F}(\sigma)^{-1})(\tilde{i}_\psi \circ \sigma(\tilde{x}')).$$

Mais $\sigma(\tilde{x}') = \tilde{x}'$ et on obtient :

$$\sigma(\tilde{x}) = Ad(\tilde{\iota}(n_{\psi,sc,F}(\sigma)\sigma(g))^{-1}(\tilde{i}_\psi(\tilde{x}')).$$

Toujours grâce à (2), cette expression est égale à $Ad(\tilde{\iota}(g)^{-1})(\tilde{i}_\psi(\tilde{x}'))$, ou encore $\tilde{x}$, ce qui démontre (4).

En appliquant 1.10(4), l'image de $d_{1,F}(\theta_1)$ par (3) est égale à celle de $\tilde{x}$ par la suite d'applications :

$$\tilde{G}^{nr} \xrightarrow{c} \tilde{G}^{nr}_{ab} \xrightarrow{w_{\tilde{G}_{ab}}} (\tilde{X}_*/\tilde{X}_{*,sc})_I \xrightarrow{b} (X_*/X_{*,sc})_I \to (X_*/X_{*,sc})_\Gamma.$$

Remarquons que cette suite se complète en un diagramme à carrés commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tilde{G}^{nr} & \xrightarrow{c} & \tilde{G}^{nr}_{ab} & \xrightarrow{w_{\tilde{G}_{ab}}} & (\tilde{X}_*/\tilde{X}_{*,sc})_I & \xrightarrow{b} & (X_*/X_{*,sc})_I & \to & (X_*/X_{*,sc})_\Gamma \\
 & & \uparrow \tilde{i}_{\psi,ab} & & \uparrow \tilde{\psi} & & \uparrow \psi & & \uparrow \psi \\
\tilde{G}'^{nr} & \xrightarrow{c'} & \tilde{G}'^{nr}_{ab} & \xrightarrow{w_{\tilde{G}'_{ab}}} & (\tilde{X}'_*/\tilde{X}'_{*,sc})_I & \xrightarrow{b'} & (X'_*/X'_{*,sc})_I & \to & (X'_*/X'_{*,sc})_\Gamma
\end{array}$$

où on a utilisé des notations transparentes. L'homomorphisme c est la restriction à $\tilde{G}^{nr}$ d'un homomorphisme $c : \tilde{\mathbf{G}} \to \tilde{\mathbf{G}}_{ab}$. Celui-ci annule $\tilde{\iota}(\mathbf{G}_{sc})$. Donc $c(\tilde{x}) = c \circ \tilde{i}_\psi(\tilde{x}') = \tilde{i}_{\psi,ab} \circ c'(\tilde{x}')$. Le diagramme ci-dessus montre que l'image de $\tilde{x}$ par la suite d'applications du haut est l'image de $\tilde{x}'$ par le parcours sud-est. En appliquant de nouveau 1.10(4), l'image de $\tilde{x}'$ dans $(X'_*/X'_{*,sc})_\Gamma$ par la suite d'applications du bas est égale à l'image de $d'_F(\theta_1)$ par l'analogue de l'application (3). Par définition de d, elle a même image que $d_F(\theta_1)$ dans $(X_*/X_{*,sc})_\Gamma$. Cela achève la preuve. $\square$

4.9

Fixons un sous-groupe ouvert Γ_0 de Γ qui agisse trivialement sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On montre comme en 2.8(1) que l'on peut supposer l'indice de Γ_0 dans Γ premier à p. On peut remplacer dans toutes nos constructions Γ par Γ/Γ_0. En particulier, la fonction $z_{\varpi,\psi}$ est invariante par Γ_0. On définit $z_0 \in T_\varpi$ par :

$$z_0 = [\Gamma : \Gamma_0]^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} z_{\varpi,\psi}(\gamma).$$

Soit $d' \in D'$. On construit comme dans le paragraphe précédent le cocycle d_0. On note $\psi_{V'} : V' \to V$ l'isomorphisme déduit naturellement de ψ. On peut aussi le considérer comme un homomorphisme de $V'(d')$ dans $V(d_0)$, cf. 4.1.

Lemme 4.9 : *L'application :*

$$\begin{array}{ccc} V'(d') & \to & V(d_0) \\ v' & \mapsto & z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}(v') \end{array}$$

est équivariant pour les actions de Γ.

Preuve. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, posons :

$$z_1(\gamma) = n_\psi(\gamma)\gamma(z_0)n_\psi(\gamma)^{-1}, \; z_2(\gamma) = z_0 z_{\varpi,\psi}(\gamma)^{-1}.$$

Ce sont des éléments de T_{red}. Montrons que :

(1) $z_1(\gamma)$ et $z_2(\gamma)$ appartiennent à $Z_{red,\psi}$ et $z_1(\gamma)z_2(\gamma)^{-1} \in \bar{\mathbf{T}}$.

Que $z_2(\gamma)$ appartienne à $Z_{red,\psi}$ résulte du lemme 4.6. Soit $\alpha \in \psi(\Sigma')$. On a l'égalité :

$$\alpha(z_1(\gamma)) = (\gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha))(z_0).$$

L'automorphisme $\gamma^{-1} \circ w_\psi(\gamma)^{-1}$ conserve $\psi(\Sigma')$. De plus $z_0 \in Z_{red,\psi}$ d'après le lemme 4.6. L'expression ci-dessus vaut donc 1 et $z_1(\gamma)$ appartient à $Z_{red,\psi}$. Parce que n_ψ est un cocycle, on a l'égalité $n_\psi(\gamma)\gamma(n_\psi(\gamma')) = n_\psi(\gamma\gamma')$ pour tout $\gamma' \in \Gamma$. Ce que l'on écrit plus explicitement :

$$n_\psi(\gamma)\gamma(z_{\varpi,\psi}(\gamma'))n_\psi(\gamma)^{-1}z_{\varpi,\psi}(\gamma)\bar{n}_\psi(\gamma)\gamma(\bar{n}_\psi(\gamma')) = z_{\varpi,\psi}(\gamma\gamma')\bar{n}_\psi(\gamma\gamma').$$

On en déduit que :

$$z_{\varpi,\psi}(\gamma)z_{\varpi,\psi}(\gamma\gamma')^{-1}n_\psi(\gamma)\gamma(z_{\varpi,\psi}(\gamma'))n_\psi(\gamma)^{-1}$$

appartient à la fois à T_{red} et à $\bar{\mathbf{N}}$, donc à $\bar{\mathbf{T}}$. En multipliant ces termes pour $\gamma' \in \Gamma/\Gamma_0$, on obtient que :

$$(z_2(\gamma)^{-1}z_1(\gamma))^{[\Gamma/\Gamma_0]} \in \bar{\mathbf{T}},$$

ce qui entraîne la deuxième assertion de (1).

Pour démontrer le lemme, on doit prouver que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a l'égalité :

$$z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'} \circ d'(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma = d_0(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma \circ z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}.$$

Or, par construction,

$$\psi_{V'} \circ d'(\gamma)_\mathbb{R} = (i_{red,\psi} \circ d'(\gamma))_\mathbb{R} \circ \psi_{V'},$$

$$\psi_{V'} \circ \gamma = w_\psi(\gamma) \circ \gamma \circ \psi_{V'} = \bar{n}_\psi(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma \circ \psi_{V'}.$$

Cela nous ramène à prouver l'égalité :

$$(z_0 i_{red,\psi} \circ d'(\gamma)\bar{n}_\psi(\gamma))_\mathbb{R} = (d_0(\gamma)\gamma(z_0))_\mathbb{R},$$

ou encore :

$$(z_0 i_{red,\psi} \circ d'(\gamma)\bar{n}_\psi(\gamma))_\mathbb{R} = (i_{red,\psi} \circ d'(\gamma)n_\psi(\gamma)\gamma(z_0))_\mathbb{R}.$$

Grâce au lemme 4.6, z_0 commute à l'image de $i_{red,\psi}$, donc à $i_{red,\psi} \circ d'(\gamma)$, ce qui nous ramène à démontrer l'égalité :

$$(z_0\bar{n}_\psi(\gamma))_\mathbb{R} = (n_\psi(\gamma)\gamma(z_0))_\mathbb{R},$$

elle-même équivalente à $z_2(\gamma)_\mathbb{R} = z_1(\gamma)_\mathbb{R}$. Cette égalité résulte de la dernière assertion de (1). □

4.10

Soit $d' \in D'$. On définit d_0 comme dans les paragraphes précédents et on pose $d = \psi_{D'}(d')$.

Proposition 4.10 : *Il existe $n \in N_{red}$ et $k \in \bar{\mathbf{G}}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $n_\mathbb{R}(V^{d_0}) \subseteq V^d$;

(ii) posons $A = n_\mathbb{R}(V^{d_0})$; alors k appartient à $\bar{\mathbf{H}}(A)$;

(iii) soient $\gamma \in \Gamma$ et $v \in A \cap V_{(p)}$; posons $m(\gamma) = nd_0(\gamma)\gamma(n)^{-1}d(\gamma)^{-1}$; alors $\pi_N(m(\gamma)) = k\rho_{d,v}(\gamma)(k^{-1})$.

Remarque. On a utilisé les notations de 4.1 et 4.2. Il est clair que $A\cap V_{(p)}$ est dense dans A, ainsi qu'on l'a imposé en 4.2. Cela se prouve comme en 2.8. De même, les sous-espaces affines que l'on introduira dans la preuve vérifient cette condition.

Preuve. On pose $A_0 = V^{d_0}$. Fixons $F \in CL_q$. On définit le cocycle $d_{0,F}$ de Γ dans G^{mod} comme en 4.8. D'après le lemme 4.8, on peut fixer $x \in G^{mod}$ tel que $xd_{0,F}(\gamma)\gamma(x)^{-1} = d_F(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Choisissons $e \in P$ tel que $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, $e\alpha(A_0) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Sigma(A_0)$ et $x \in \mathbf{G}(F^e)$. Le groupe $i_\psi(\mathbf{G}')$ est un Lévi de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$. On sait qu'alors l'application :

$$i_\psi \times \psi_{V'} : \mathbf{G}'(F^e) \times V' \to \mathbf{G}(F^e) \times V$$

se quotiente en un plongement de $Imm(\mathbf{G}', F^e)$ dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$. Puisque $z_{0,\mathbb{R}}$ commute à l'action de $i_\psi(\mathbf{N}'(F^e)$, on peut composer $\psi_{V'}$ avec $z_{0,\mathbb{R}}$. On peut aussi composer i_ψ avec la multiplication à gauche par x. Définissons donc :

$$\begin{array}{cccc}\tilde{j}_\psi : & \mathbf{G}'(F^e) \times V' & \to & \mathbf{G}(F^e) \times V \\ & (g', v') & \mapsto & (xi_\psi(g'), z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}(v'))\end{array}$$

puis :

$$\tilde{j}_{\psi,d'} : \mathbf{G}'_{d'}(F^e) \times V'(d') \to \mathbf{G}_d(F^e) \times V(d)$$

de sorte que le diagramme évident soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{G}'_{d'}(F^e) \times V'(d') & \stackrel{\tilde{j}_{\psi,d'}}{\to} & \mathbf{G}_d(F^e) \times V(d) \\ \downarrow \xi_{d'} \times id_{V'} & & \downarrow \xi_d \times id_V \\ \mathbf{G}'(F^e) \times V' & \stackrel{\tilde{j}_\psi}{\to} & \mathbf{G}(F^e) \times V\end{array}$$

Alors $\tilde{j}_{\psi,d'}$ se quotiente en un plongement $j_{\psi,d'} : Imm(\mathbf{G}'_{d'}, F^e) \to Imm(\mathbf{G}_d, F^e)$. On a :

(1) $j_{\psi,d'}$ est équivariant pour les actions de Γ.

Soient $\gamma \in \Gamma$, $g' \in \mathbf{G}'_{d'}(F^e)$ et $v' \in V'(d')$. On veut montrer que $\tilde{j}_{\psi,d'}(\gamma(g'), d'(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma(v'))$ a même image que $(\gamma \times d(\gamma)_\mathbb{R}) \circ \tilde{j}_{\psi,d'}(g', v')$ dans $Imm(\mathbf{G}_d, F^e)$. En composant avec $\xi_d \times id_V$, il suffit que $y_1 = \tilde{j}_\psi \circ (\xi_{d'} \times id_{V'})(\gamma(g'), d'(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma(v'))$ et $y_2 = (\xi_d \times id_V) \circ (\gamma \times d(\gamma)_\mathbb{R}) \circ \tilde{j}_{\psi,d'}(g', v')$ aient même image dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$. Posons $v = \psi_{V'}(v')$. On a :

$$\begin{aligned} y_1 &= \tilde{j}_\psi(Ad(d'_F(\gamma)) \circ \gamma \circ \xi_{d'}(g'), d'(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma(v')) \\ &= (xAd(i_\psi \circ d'_F(\gamma))(i_\psi \circ \gamma \circ \xi_{d'}(g')), z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'} \circ d'(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma(v')) \\ &= (xAd(i_\psi \circ d'_F(\gamma) n_{\psi,F}(\gamma))(\gamma \circ \xi_{d'}(g')), d_0(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma \circ z_{0,\mathbb{R}}(v)) \\ &= (xd_{0,F}(\gamma)\gamma \circ \xi_{d'}(g') d_{0,F}(\gamma)^{-1}, d_0(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma \circ z_{0,\mathbb{R}}(v)) \end{aligned}$$

(la troisième égalité résulte du lemme 4.9). Ce terme a même image dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$ que :

$$y'_1 = (xd_{0,F}(\gamma)\gamma \circ \xi_{d'}(g'), \gamma \circ z_{0,\mathbb{R}}(v)).$$

On a :

$$\begin{aligned} y_2 &= ((Ad(d_F(\gamma)) \circ \gamma \circ \xi_d) \times (d(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma)) \circ \tilde{j}_{\psi,d'}(g', v') \\ &= ((Ad(d_F(\gamma)) \circ \gamma) \times (d(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma)) \circ \tilde{j}_\psi \circ (\xi_{d'} \times id_{V'})(g', v') \\ &= (Ad(d_F(\gamma)) \circ \gamma(x\xi_{d'}(g')), d(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma \circ z_{0,\mathbb{R}}(v)) \\ &= (d_F(\gamma)\gamma(x)\gamma \circ \xi_{d'}(g') d_F(\gamma)^{-1}, d(\gamma)_\mathbb{R} \circ \gamma \circ z_{0,\mathbb{R}}(v)). \end{aligned}$$

Ce terme a même image dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$ que :

$$y_2' = (d_F(\gamma)\gamma(x)\gamma \circ \xi_{d'}(g'), \gamma \circ z_{0,\mathbb{R}}(v)).$$

Mais $xd_{0,F}(\gamma) = d_F(\gamma)\gamma(x)$, donc $y_1' = y_2'$, ce qui prouve (1).

Introduisons la décomposition en facettes de V relative à l'entier e. Parmi les facettes qui coupent A_0, fixons-en une de dimension maximale. Notons-la ϕ_0. Fixons $v_0 \in A_0 \cap \phi_0 \cap V_{(p)}$, soit $v_0' \in V'$ tel que $z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}(v_0') = v_0$. D'après le lemme 4.9, v_0' appartient à $V'^{d'}$. D'après (1), l'image de $\tilde{j}_{\psi,d'}(1, v_0')$ dans $Imm(\mathbf{G}_d, F^e)$ est fixe par Γ, autrement dit appartient à l'immeuble $Imm(\mathbf{G}_d, F)$. On peut donc fixer $(y, v) \in G_d \times V^d$ qui ait même image que $\tilde{j}_{\psi,d'}(1, v_0')$ dans $Imm(\mathbf{G}_d, F^e)$. Alors $(\xi_d(y), v)$ a même image que $(\xi_d \times id_V) \circ \tilde{j}_{\psi,d'}(1, v_0') = (x, v_0)$ dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$. Cela entraîne l'existence de $\nu_0 \in \mathbf{N}(F^e)$ et $\kappa_0 \in \mathbf{G}_v^e$ tels que $v = red(\nu_0)_{\mathbb{R}}(v_0)$ et $x = \xi_d(y)\kappa_0^{-1}\nu_0$. Posons $A_1 = red(\nu_0)_{\mathbb{R}}(A_0)$, $\phi_1 = red(\nu_0)_{\mathbb{R}}(\phi_0)$. La facette ϕ_1 est de dimension maximale parmi celles qui coupent A_1. On a $v \in A_1 \cap \phi_1 \cap V_{(p)}$. Appliquons le lemme 4.4.1(ii) : on peut écrire $\kappa_0 = \nu_1^{-1}\kappa$, avec $\nu_1 \in \mathbf{N}(F^e) \cap \mathbf{G}_v^e$, $\kappa \in \mathbf{G}_v^e$ et $\pi_v(\kappa) \in \bar{\mathbf{H}}(A_1)$. Posons $\nu = \nu_1\nu_0$, $n = red(\nu) \in N_{red}$ et $k = \pi_v(\kappa) \in \bar{\mathbf{G}}$. Montrons que ces termes n et k vérifient la conclusion de l'énoncé.

Posons $A = n_{\mathbb{R}}(A_0)$. On a $A = n_{1,\mathbb{R}}(A_1)$, où $n_1 = red(\nu_1)$. Donc :

$$\bar{\mathbf{H}}(A) = Ad(\pi_N(n_1))(\bar{\mathbf{H}}(A_1))$$

(lemme 4.2.1(i)). Mais $\pi_N(n_1) = \pi_v(\nu_1)$. Puisque $\nu_1 \in \mathbf{G}_v^e$, $\pi_v(\nu_1)$ appartient à $\pi_v(\mathbf{G}_v^e)$, donc normalise la composante neutre de ce groupe, qui est égale à $\bar{\mathbf{H}}(A_1)$ (lemme 4.4.1(i)). Cela démontre que $\bar{\mathbf{H}}(A) = \bar{\mathbf{H}}(A_1)$. En particulier, $k \in \bar{\mathbf{H}}(A)$.

Soit $\gamma \in \Gamma$. On a les trois égalités :

$$x = \xi_d(y)\kappa^{-1}\nu,\ \ xd_{0,F}(\gamma)\gamma(x)^{-1} = d_F(\gamma),\ \ d_F(\gamma)\gamma(\xi_d(y))d_F(\gamma)^{-1} = \xi_d(y)$$

celle-ci parce que $y \in G_d$. On en déduit :

$$(2) \qquad \nu d_{0,F}(\gamma)\gamma(\nu)^{-1}d_F(\gamma)^{-1} = \kappa Ad(d_F(\gamma)) \circ \gamma(\kappa^{-1}).$$

Posons $m(\gamma) = nd_0(\gamma)\gamma(n^{-1})d(\gamma)^{-1}$. Puisque $v \in V^d$, l'opérateur $Ad(d_F(\gamma)) \circ \gamma$ conserve $\mathbf{G}_v^e$. Le membre de droite de l'égalité ci-dessus appartient à $\mathbf{G}_v^e$. Projetons l'égalité par π_v. On obtient :

$$(3) \qquad \pi_N(m(\gamma)) = k\rho_{d,v}(\gamma)(k^{-1}).$$

L'automorphisme $\rho_{d,v}(\gamma)$ conserve $\pi_v(\mathbf{G}_v^e)$, cf. 4.3, donc aussi sa composante neutre $\bar{\mathbf{H}}(A)$. Le membre de droite de (3) appartient donc à $\bar{\mathbf{H}}(A)$. Les deux membres de (2) appartiennent à $\mathbf{G}_v^e$, donc fixent v par leur action naturelle sur $Imm(\mathbf{G}, F^e)$. Puisque le membre de gauche appartient à $\mathbf{N}(F^e)$, son action sur V n'est autre que $m(\gamma)_{\mathbb{R}}$, donc $m(\gamma)_{\mathbb{R}}(v) = v$. De même, $n_{1,\mathbb{R}}(v) = v$. Puisque $v \in A_1$, cela entraîne $v \in A$. On peut alors appliquer à $m(\gamma)$ le lemme 4.2.1(ii) : $m(\gamma)_{\mathbb{R}}$ fixe tout point de A. Soit $v' \in A$. On a $d(\gamma)_{\mathbb{R}}\gamma(v') = m(\gamma)_{\mathbb{R}}^{-1}n_{\mathbb{R}}d_0(\gamma)_{\mathbb{R}}\gamma(n_{\mathbb{R}}^{-1}(v'))$. Or $n_{\mathbb{R}}^{-1}(v') \in A_0$ donc $d_0(\gamma)_{\mathbb{R}}\gamma(n_{\mathbb{R}}^{-1}(v')) = n_{\mathbb{R}}^{-1}(v')$. D'où $d(\gamma)_{\mathbb{R}}\gamma(v') = m(\gamma)_{\mathbb{R}}^{-1}(v') = v'$. Cela démontre l'inclusion $A \subseteq V^d$.

Maintenant, l'égalité (3), prouvée pour le point particulier v que l'on a fixé, reste vraie si on remplace v par un point quelconque de $A \cap V_{(p)}$, grâce au lemme 4.2.2. Cela achève la preuve. $\square$

4.11

Soit $d' \in D'$, posons $d = \psi_{D'}(d')$, fixons n et k vérifiant les conditions de la proposition 4.10. Posons $\bar{n} = \pi_N(n)$. On définit une application affine :

$$\begin{array}{rccc} \psi_{V',d'} : & V'^{d'} & \to & V^d \\ & v' & \mapsto & n_{\mathbb{R}} \circ z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}(v') \end{array}$$

Elle envoie $V'^{d'}_{(p)}$ dans $V^d_{(p)}$.

Lemme 4.11 : *(i) Soit $v' \in V'^{d'}_{(p)}$, posons $v = \psi_{V',d'}(v')$. L'homomorphisme $Ad(k^{-1}\bar{n}) \circ \bar{i}_\psi$ envoie $\bar{\mathbf{G}}'_{v'}$ dans $\bar{\mathbf{G}}_v$ et il existe un homomorphisme $\bar{i}_{\psi,d',v'} : \bar{\mathbf{G}}'_{d',v'} \to \bar{\mathbf{G}}_{d,v}$, défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{G}}'_{d',v'} & \stackrel{\bar{i}_{\psi,d',v'}}{\longrightarrow} & \bar{\mathbf{G}}_{d,v} \\ \downarrow \bar{\xi}_{d'} & & \downarrow \bar{\xi}_d \\ \bar{\mathbf{G}}'_{v'} & \stackrel{Ad(k^{-1}\bar{n})\circ\bar{i}_\psi}{\longrightarrow} & \bar{\mathbf{G}}_v. \end{array}$$

(ii) Soit de plus $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$. L'homomorphisme $Ad(k^{-1}\bar{n}) \circ \bar{i}_\psi$ envoie $\bar{\mathfrak{g}}'_{v',s}$ dans $\bar{\mathfrak{g}}_{v,s}$ et il existe un unique homomorphisme $\bar{i}_{\psi,d',v',s} : \bar{\mathfrak{g}}'_{d',v',s} \to \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}$, défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathfrak{g}}'_{d',v',s} & \stackrel{\bar{i}_{\psi,d',v',s}}{\longrightarrow} & \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s} \\ \downarrow \bar{\xi}_{d'} & & \downarrow \bar{\xi}_d \\ \bar{\mathfrak{g}}'_{v',s} & \stackrel{Ad(k^{-1}\bar{n})\circ\bar{i}_\psi}{\longrightarrow} & \bar{\mathfrak{g}}_{v,s}. \end{array}$$

Preuve. Il s'agit de prouver que, pour $\gamma \in \Gamma$, on a l'égalité :

$$\rho_{d,v}(\gamma) \circ Ad(k^{-1}\bar{n}) \circ \bar{i}_\psi = Ad(k^{-1}\bar{n}) \circ \bar{i}_\psi \circ \rho_{d',v'}(\gamma).$$

Poosns $v_1 = \psi_{V'}(v')$, $v_2 = z_{0,\mathbb{R}}(v_1)$. Soit $\gamma \in \Gamma$. On a :

$$\bar{i}_\psi \circ \rho_{d',v'}(\gamma) = \bar{i}_\psi \circ Ad(t_{v'}^{-1} d'(\gamma)\gamma(t_{v'})) \circ \gamma = (Ad \circ \bar{i}_\psi(t_{v'}^{-1} d'(\gamma)\gamma(t_{v'}))) \circ \bar{i}_\psi \circ \gamma.$$

On a $\bar{i}_\psi(t_{v'}) = t_{v_1}$. En utilisant le lemme 4.6(iii) et (iv), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{i}_\psi \circ \rho_{d',v'}(\gamma) &= Ad(t_{v_1}^{-1}\bar{i}_\psi \circ d'(\gamma) n_\psi(\gamma)\gamma(t_{v_1}) n_\psi(\gamma)^{-1}) \circ Ad(\bar{n}_\psi(\gamma)) \circ \gamma \circ \bar{i}_\psi \\ &= Ad(t_{v_1}^{-1}\bar{i}_\psi \circ d'(\gamma) n_\psi(\gamma)\gamma(t_{v_1}) n_\psi(\gamma)^{-1}\bar{n}_\psi(\gamma)) \circ \gamma \circ \bar{i}_\psi. \end{aligned}$$

Grâce à 4.9(1), l'élément $z_1(\gamma)z_2(\gamma)^{-1}$ de $\bar{\mathbf{T}}$ commute à l'image de $\bar{i}_\psi$. On peut multiplier à gauche l'égalité ci-dessus par $Ad(z_1(\gamma)z_2(\gamma)^{-1})$, cela ne change pas le membre de gauche et on obtient :

$$(1) \qquad \bar{i}_\psi \circ \rho_{d',v'}(\gamma) = Ad(x) \circ \gamma \circ \bar{i}_\psi,$$

où :

$$x = z_1(\gamma)z_2(\gamma)^{-1} t_{v_1}^{-1} \bar{i}_\psi \circ d'(\gamma) n_\psi(\gamma)\gamma(t_{v_1}) n_\psi(\gamma)^{-1}\bar{n}_\psi(\gamma).$$

Le terme $z_1(\gamma)$ et les deux composantes z_0^{-1} et $z_{\varpi,\psi}(\gamma)$ de $z_2(\gamma)^{-1}$ appartiennent à $Z_{red,\psi}$ donc commutent à $\bar{i}_\psi \circ d'(\gamma)$. Elles commutent aussi à T_{red} donc à t_{v_1} et à $n_\psi(\gamma)\gamma(t_{v_1})n_\psi(\gamma)^{-1}$. On peut donc les répartir ainsi :

$$x = t_{v_1}^{-1} z_0^{-1} \bar{i}_\psi \circ d'(\gamma) z_1(\gamma) n_\psi(\gamma)\gamma(t_{v_1}) n_\psi(\gamma)^{-1} z_{\varpi,\psi}(\gamma)\bar{n}_\psi(\gamma).$$

On a d'autre part l'égalité $t_{v_2} = z_0 t_{v_1}$ et l'expression ci-dessus devient :

$$x = t_{v_2}^{-1} \bar{i}_\psi \circ d'(\gamma) n_\psi(\gamma)\gamma(t_{v_2}) = t_{v_2}^{-1} d_0(\gamma)\gamma(t_{v_2}).$$

Puisque $v = n_{\mathbb{R}}(v_2)$, on a $t_v^{-1} n t_{v_2} \in \bar{\mathbf{N}}$ donc $\bar{n} = t_v^{-1} n t_{v_2}$. Alors x s'écrit :

$$x = \bar{n}^{-1} t_v^{-1} n d_0(\gamma)\gamma(n)^{-1}\gamma(t_v)\gamma(\bar{n}) = \bar{n}^{-1}[t_v^{-1} n d_0(\gamma)\gamma(n)^{-1} d(\gamma)^{-1} t_v] t_v^{-1} d(\gamma)\gamma(t_v)\gamma(\bar{n}).$$

Le terme entre crochets est égal à $t_v^{-1} m(\gamma) t_v$, avec les notations de la proposition 4.10. L'égalité précédente montre qu'il appartient à $\bar{\mathbf{N}}$. Il est donc égal à $\pi_N(m(\gamma))$. Or on a :

$$\pi_N(m(\gamma)) = k\rho_{d,v}(\gamma)(k^{-1}) = k t_v^{-1} d(\gamma)\gamma(t_v)\gamma(k^{-1})\gamma(t_v)^{-1} d(\gamma)^{-1} t_v.$$

Alors :

$$x = \bar{n}^{-1} k t_v^{-1} d(\gamma)\gamma(t_v)\gamma(k^{-1}\bar{n}).$$

L'égalité (1) devient :

$$\bar{i}_\psi \circ \rho_{d',v'}(\gamma) = Ad(\bar{n}^{-1}k) \circ Ad(t_v^{-1} d(\gamma)\gamma(t_v)) \circ Ad(\gamma(k^{-1}\bar{n})) \circ \gamma \circ \bar{i}_\psi$$

$$= Ad(\bar{n}^{-1}k) \circ \rho_{d,v}(\gamma) \circ Ad(k^{-1}\bar{n}) \circ \bar{i}_\psi.$$

En la multipliant à gauche par $Ad(k^{-1}\bar{n})$, on obtient l'égalité cherchée. □

4.12

On conserve les mêmes hypothèses, soit de plus $F \in CL_q$. On effectue les constructions de 4.7. On fixe $n_F \in N^{mod}$ tel que $red(n_F) = n$. On pose $A = \psi_{V',d'}(V'^{d'})$, on fixe $v_0 \in A \cap V_{(p)}$ et on choisit $e \in P$ tel que $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, $n_F \in \mathbf{N}(F^e)$ et $e\alpha(A) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Sigma(A)$. Le lemme 4.4.2 nous dit que l'application :

$$(1) \quad \pi_{v_0} : \mathbf{H}(A, F^e) \cap \mathbf{G}_{v_0}^e \to \bar{\mathbf{H}}(A)$$

est surjective. On peut choisir $k_1 \in \mathbf{H}(A; F^e) \cap \mathbf{G}_{v_0}^e$ tel que $\pi_{v_0}(k_1) = k$. Considérons les deux termes :

$$n_F i_\psi \circ d'_F(\gamma) n_{\psi,F}(\gamma)\gamma(n_F)^{-1} d_F(\gamma)^{-1} \text{ et } k_1 d_F(\gamma)\gamma(k_1)^{-1} d_F(\gamma)^{-1}.$$

Ils appartiennent tous deux à $\mathbf{G}_{v_0}^e$. Le second appartient à $\mathbf{H}(A; F^e)$: cela se montre comme au lemme 4.2.2. La proposition 4.10 nous dit qu'ils ont même image par π_{v_0} et cette image appartient à $\bar{\mathbf{H}}(A)$. Puisque le premier terme appartient à $\mathbf{N}(F^e)$, cela entraîne qu'il appartient à $\mathbf{H}(A; F^e)$. Nos deux termes appartiennent donc tous deux à $\mathbf{H}(A; F^e) \cap \mathbf{G}_{v_0}^e$ et ont même image par π_{v_0}. Comme en 1.7, le noyau de (1) est cohomologiquement trivial, pour toute action tordue de Γ. On en déduit qu'en multipliant k_1 par un élément convenable de ce noyau, on obtient un élément $k_F \in \mathbf{H}(A; F^e) \cap \mathbf{G}_{v_0}^e$ tel que l'on ait l'égalité :

$$n_F i_\psi \circ d'_F(\gamma) n_{\psi,F}(\gamma)\gamma(n_F)^{-1} d_F(\gamma)^{-1} = k_F d_F(\gamma)\gamma(k_F)^{-1} d_F(\gamma)^{-1},$$

ou encore :

$$(2) \quad d_F(\gamma) = k_F^{-1} n_F i_\psi \circ d'_F(\gamma) n_{\psi,F}(\gamma)\gamma(n_F^{-1} k_F).$$

On définit un isomorphisme $i_{\psi,d'} : \mathbf{G}'_{d'} \to \mathbf{G}_d$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}'_{d'} & \overset{i_{\psi,d'}}{\to} & \mathbf{G}_d \\ \downarrow \xi_{d'} & & \downarrow \xi_d \\ \mathbf{G}' & \overset{Ad(k_F^{-1}n_F)\circ i_\psi}{\to} & \mathbf{G}. \end{array}$$

La relation (2) montre que $i_{\psi,d'}$ est défini sur F.

Lemme 4.12.1 : *Il existe un unique plongement* $j_{\psi,d'} : Imm(\mathbf{G}'_{d'}, F) \to Imm(\mathbf{G}_d, F)$ *qui coïncide avec* $\psi_{V',d'}$ *sur* $V'^{d'}$ *et tel que, pour tout* $x' \in Imm(\mathbf{G}'_{d'}, F)$ *et tout* $g' \in G'_{d'}$, *on ait l'égalité :*

$$j_{\psi,d'}(g'(x')) = i_{\psi,d'}(g')(j_{\psi,d'}(x')).$$

Preuve. L'unicité est claire : puisque $V'^{d'}$ est un appartement de l'immeuble $Imm(\mathbf{G}_{d'}, F)$ (cf. lemme 1.9), cet immeuble est engendré par $V'^{d'}$ sous l'action de $G'_{d'}$.

On choisit e comme dans la construction précédant l'énoncé. On définit un plongement $j_{\psi,d'} : Imm(\mathbf{G}'_{d'}, F^e) \to Imm(\mathbf{G}_d, F^e)$ comme dans la preuve de la proposition 4.10, en remplaçant x par $k_F^{-1}n_F$, ce qui est loisible d'après (2). Ce plongement est équivariant par les actions de Γ et se restreint en un plongement de $Imm(\mathbf{G}'_{d'}, F)$ dans $Imm(\mathbf{G}_d, F)$. La première propriété de l'énoncé résulte d'un calcul simple. Il reste à prouver que $j_{\psi,d'}$ envoie $V'^{d'}$ dans V^d et coïncide avec $\psi_{V',d'}$ sur $V'^{d'}$. Soit $v' \in V'^{d'}$. Il suffit de prouver que les deux éléments :

$$(\xi_d \times id_V) \circ \tilde{j}_{\psi,d'}(1, v') \text{ et } (\xi_d \times id_V)(1, \psi_{V',d'}(v'))$$

de $\mathbf{G}(F^e) \times V$ ont même image dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$. Ces éléments sont respectivement égaux à :

$$(k_F^{-1}n_F, z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}(v')) \text{ et } (1, \psi_{V',d'}(v')).$$

Le premier a même image dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$ que $(k_F^{-1}, n_{\mathbb{R}} \circ z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}(v'))$, i.e. $(k_F^{-1}, \psi_{V',d'}(v'))$. Posons $v = \psi_{V',d'}(v')$. On a $v \in A$. Par définition, on a $k_F \in \mathbf{H}(A; F^e) \cap \mathbf{G}^e_{v_0}$. Grâce au lemme 4.4.2, on a aussi $k_F \in \mathbf{G}^e_v$. Mais alors, (k_F^{-1}, v) a même image dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$ que $(1, v)$. Cela achève la preuve. □

Lemme 4.12.2 : *(i) Soit* $v' \in V'^{d'}_{(p)}$, *posons* $v = \psi_{V',d'}(v')$. *Alors* $i_{\psi,d'}$ *se restreint en un plongement de* $\mathbf{G}'_{d',v'}$ *dans* $\mathbf{G}_{d,v}$ *défini sur* $\mathcal{O}$ *et le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}'_{d',v'}(\mathcal{O}^{nr}) & \overset{i_{\psi,d'}}{\to} & \mathbf{G}_{d,v}(\mathcal{O}^{nr}) \\ \downarrow \pi_{d',v'} & & \downarrow \pi_{d,v} \\ \bar{\mathbf{G}}'_{d',v'} & \overset{\bar{i}_{\psi,d',v'}}{\to} & \bar{\mathbf{G}}_{d,v}. \end{array}$$

(ii) Soit de plus $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$. *Alors* $i_{\psi,d'}$ *se restreint en un plongement de* $\mathfrak{g}'_{d',v',s}$ *dans* $\mathfrak{g}_{d,v,s}$ *défini sur* $\mathcal{O}$ *et le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}'_{d',v',s}(\mathcal{O}^{nr}) & \overset{i_{\psi,d'}}{\to} & \mathfrak{g}_{d,v,s}(\mathcal{O}^{nr}) \\ \downarrow \pi_{d',v',s} & & \downarrow \pi_{d,v,s} \\ \bar{\mathfrak{g}}'_{d',v',s} & \overset{\bar{i}_{\psi,d',v',s}}{\to} & \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}. \end{array}$$

C'est immédiat. □

5 Une deuxième réduction

5.1

Soit $d \in D$. Pour $v \in V_{(p)}^d$, considérons l'ensemble $\mathcal{M}_{d,v}$ des couples $\mu = (m,h) \in N_{red} \times \bar{\mathbf{G}}$ tels que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait :

$$t_v^{-1} m^{-1} d(\gamma)\gamma(m) d(\gamma)^{-1} t_v \in \bar{\mathbf{N}}$$

et :

$$t_v^{-1} m^{-1} d(\gamma)\gamma(m) d(\gamma)^{-1} t_v = h\rho_{d,v}(\gamma)(h^{-1}).$$

Pour un tel couple μ, on pose $\mu(v) = m_{\mathbb{R}}(v)$. Les propriétés suivantes sont faciles à établir :

(1) soit $e \in P$ tel que $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$ et $ev \in X_*$; alors pour tout $\mu = (m,h) \in \mathcal{M}_{d,v}$, on a $m \in N_{red}^{I(e)}$ et $e\mu(v) \in X_*$;

(2) pour tout $\mu \in \mathcal{M}_{d,v}$, $\mu(v) \in V_{(p)}^d$;

(3) pour tout $\mu = (m,h) \in \mathcal{M}_{d,v}$, l'application $Ad(\pi_N(m)h)$ envoie $\bar{\mathbf{G}}_v$ dans $\bar{\mathbf{G}}_{\mu(v)}$ et il existe un unique isomorphisme $\bar{\mu}$, défini sur $\mathbb{F}_q$, rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{G}}_{d,v} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{\mathbf{G}}_{d,\mu(v)} \\ \downarrow \bar{\xi}_d & & \downarrow \bar{\xi}_d \\ \bar{\mathbf{G}}_v & \xrightarrow{Ad(\pi_N(m)h)} & \bar{\mathbf{G}}_{\mu(v)}; \end{array}$$

de même, pour tout $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, l'application $Ad(\pi_N(m)h)$ envoie $\bar{\mathfrak{g}}_{v,r}$ dans $\bar{\mathfrak{g}}_{\mu(v),r}$ et il existe un unique isomorphisme $\bar{\mu}_r$, défini sur $\mathbb{F}_q$, rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r} & \xrightarrow{\bar{\mu}_r} & \bar{\mathfrak{g}}_{d,\mu(v),r} \\ \downarrow \bar{\xi}_d & & \downarrow \bar{\xi}_d \\ \bar{\mathfrak{g}}_{v,r} & \xrightarrow{Ad(\pi_N(m)h)} & \bar{\mathfrak{g}}_{\mu(v),r}. \end{array}$$

Définissons une relation $\sim_{\mathcal{M}_d}$ dans $V_{(p)}^d$ par : $v \sim_{\mathcal{M}_d} v_1$ si et seulement s'il existe $\mu \in \mathcal{M}_{d,v}$ tel que $v_1 = \mu(v)$. Alors :

(4) $\sim_{\mathcal{M}_d}$ est une relation d'équivalence.

On a défini en 2.7 le $\mathbb{Z}$-module X_*^d des $x_* \in X_*$ tels que $d(\gamma)\gamma(x_*) = x_*$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On l'identifie à un sous-groupe de $T_\varpi = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$, que l'on note $T_{d,\varpi}$. Alors :

(5) $T_{d,\varpi} \times \{1\} \subseteq \mathcal{M}_{d,v}$ pour tout $v \in V_{(p)}^d$.

Lemme 5.1 : *Soient $F \in CL_q$, v, $v_1 \in V_{(p)}^d$. Alors $v \sim_{\mathcal{M}_d} v_1$ si et seulement s'il existe $g \in G_d$ tel que l'on ait l'égalité $g(v) = v_1$ dans $Imm(\mathbf{G}_d, F)$. Plus précisément, soit $\mu \in \mathcal{M}_{d,v}$ et supposons $v_1 = \mu(v)$. Alors il existe $g \in G_d$ tel que :*

(i) $g(v) = v_1$;

(ii) le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G_{d,v} & \xrightarrow{Ad(g)} & G_{d,v_1} \\ \downarrow \pi_{d,v} & & \downarrow \pi_{d,v_1} \\ \bar{G}_{d,v} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{G}_{d,v_1}; \end{array}$$

(iii) pour tout $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{d,v,r} & \stackrel{Ad(g)}{\rightarrow} & \mathfrak{g}_{d,v_1,r} \\ \downarrow \pi_{d,v,r} & & \downarrow \pi_{d,v_1,r} \\ \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,r} & \stackrel{\bar{\mu}_r}{\rightarrow} & \bar{\mathfrak{g}}_{d,v_1,r}. \end{array}$$

Preuve. Supposons qu'il existe $g \in G_d$ tel que $g(v) = v_1$, fixons un tel g. Choisissons $e \in P$ tel que $I(e)$ agisse trivialement sur $\mathcal{D}$ et $ev \in X_*$. On a l'égalité $\xi_d(g)(v) = v_1$ dans $Imm(\mathbf{G}, F^e)$. Par définition de cet immeuble, il existe donc $m_F \in \mathbf{N}(F^e)$ et $h_F \in \mathbf{G}_v(\mathcal{O}^e)$ tels que $\xi_d(g) = m_F h_F$. Notons m l'image de m_F dans $N_{red}^{I(e)}$ et h l'image de h_F dans $\bar{\mathbf{G}}$ par $\pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})$. On a $m_{\mathbb{R}}(v) = v_1$. Puisque $g \in G_d$, on a $\xi_d(g) = d_F(\gamma)\gamma \circ \xi_d(g) d_F(\gamma)^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et cela entraîne :

$$m_F^{-1} d_F(\gamma)\gamma(m_F) d_F(\gamma)^{-1} = h_F d_F(\gamma)\gamma(h_F^{-1}) d_F(\gamma)^{-1}.$$

Puisque $v \in V_{(p)}^d$, le membre de droite appartient à $\mathbf{G}_v(\mathcal{O}^e)$ donc le membre de gauche aussi. Alors $t_v^{-1} m^{-1} d(\gamma)\gamma(m) d(\gamma)^{-1} t_v \in \bar{\mathbf{N}}$. De plus :

$$t_v^{-1} m^{-1} d(\gamma)\gamma(m) d(\gamma)^{-1} t_v = \pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})(h_F d_F(\gamma)\gamma(h_F^{-1}) d_F(\gamma)^{-1}) = h \rho_{d,v}(\gamma)(h^{-1}).$$

Alors $(m, h) \in \mathcal{M}_{d,v}$ et $v_1 \sim_{\mathcal{M}_d} v$.

Inversement, supposons $v_1 \sim_{\mathcal{M}_d} v$ et fixons $\mu = (m, h) \in \mathcal{M}_{d,v}$ tel que $\mu(v) = v_1$. On relève m en $m_F \in \mathbf{N}(F^e)$ et h en $h_1 \in \mathbf{G}_v(\mathcal{O}^e)$ tel que $\pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})(h_1) = h$. Posons $g_1 = m_F h_1$. En remontant le calcul ci-dessus, on voit que le cocycle $\gamma \mapsto g_1 d_F(\gamma)\gamma(g_1) d_F(\gamma)^{-1}$ est à valeurs dans le noyau dans $\mathbf{G}_v(\mathcal{O}^e)$ de l'application $\pi \circ Ad(t_{F,v}^{-1})$. Comme en 1.7, ce noyau est cohomologiquement trivial pour toute action tordue de Γ. En multipliant h_1 par un élément convenable de ce noyau, on le remplace par un élément $h_F \in \mathbf{G}_v(\mathcal{O}^e)$ tel qu'en posant $g_2 = m_F h_F$, on ait cette fois $g_2^{-1} d_F(\gamma)\gamma(g_2) d_F(\gamma)^{-1} = 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On pose $g = \xi_d^{-1}(g_2)$. Alors g appartient à G_d et vérifie les conditions de l'énoncé. □

5.2

Soient $(\mathcal{D}', \psi, r, \bar{Z}') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ et $d' \in D'$. Posons $d = \psi_{D'}(d')$. On définit les relations d'équivalence $\sim_{\mathcal{M}_d}$ dans $V_{(p)}^d$ et $\sim_{\mathcal{M}_{d'}}$ dans $V_{(p)}^{\prime d'}$. Soit $v \in V_{(p)}^d$. Notons $\tilde{\mathcal{V}}'_v$ l'ensemble des $v' \in V_{(p)}^{\prime d'}$ tels que $\psi_{V',d'}(v') \sim_{\mathcal{M}_d} v$. On vérifie que cet ensemble est clos pour la relation $\sim_{\mathcal{M}_{d'}}$. Plus précisément :

(1) $\tilde{\mathcal{V}}'_v$ est réunion finie de classes d'équivalence pour la relation $\sim_{\mathcal{M}_{d'}}$.

En effet, grâce à 5.1(1), on peut fixer $e_1 \in P$ tel que la classe d'équivalence de v dans $V_{(p)}^d$ soit incluse dans $e_1^{-1} X_*^d$. On peut ensuite fixer $e \in P$ tel que l'image réciproque de $e_1^{-1} X_*^d$ par $\psi_{V',d'}$ soit incluse dans $e^{-1} X_*^{\prime d'}$. Alors $\tilde{\mathcal{V}}'_v \subseteq e^{-1} X_*^{\prime d'}$. D'après 5.1(5), toute orbite pour l'action de $T'_{d',\varpi}$ dans $V_{(p)}^{\prime d'}$ est incluse dans une classe d'équivalence. Or cette action n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $e^{-1} X_*^{\prime d'}$. L'assertion (1) s'en déduit.

On fixe un ensemble $\mathcal{V}'_v \subseteq \tilde{\mathcal{V}}'_v$ de représentants des classes d'équivalence. Pour tout $v' \in \mathcal{V}'_v$, on fixe $\mu_{v',v} \in \mathcal{M}_{d,v}$ tel que $\mu_{v',v}(v) = \psi_{V',d'}(v')$. On note $\bar{j}_{v,v'} : \bar{\mathbf{G}}'_{d',v'} \to \bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ le plongement $\bar{j}_{v,v'} = \bar{\mu}_{v',v}^{-1} \circ \bar{\iota}_{\psi,d',v'}$. De même, pour $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on note $\bar{j}_{v,v',s} : \bar{\mathfrak{g}}_{d',v',s} \to \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}$ le plongement $\bar{\mu}_{v',v,s}^{-1} \circ \bar{\iota}_{\psi,d',v',s}$.

Soit $F \in CL_q$. Pour tout $v' \in \mathcal{V}'_v$, on fixe $g_{v',v} \in G_d$ vérifiant les conditions du lemme 5.1 relatives à l'élément $\mu_{v',v} \in \mathcal{M}_{d,v}$. On a alors des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} G'_{d',v'} & \stackrel{Ad(g_{v',v})^{-1}\circ i_{\psi,d'}}{\longrightarrow} & G_{d,v} \\ \downarrow \pi_{d',v'} & & \downarrow \pi_{d,v} \\ \bar{G}'_{d',v'} & \stackrel{\bar{j}_{v,v'}}{\longrightarrow} & \bar{G}_{d,v}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}'_{d',v',s} & \stackrel{Ad(g_{v',v})^{-1}\circ i_{\psi,d'}}{\longrightarrow} & \mathfrak{g}_{d,v,s} \\ \downarrow \pi_{d',v',s} & & \downarrow \pi_{d,v,s} \\ \bar{\mathfrak{g}}'_{d',v',s} & \stackrel{\bar{j}_{v,v',s}}{\longrightarrow} & \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}. \end{array}$$

Le lemme 5.1 fournit l'interprétation suivante de l'ensemble $\mathcal{V}'_v$. Soit $v' \in V'^{d'}_{(p)}$ tel qu'il existe $g \in G_d$ de sorte que $g(v) = \psi_{V',d'}(v')$. Il existe alors un unique $v'' \in \mathcal{V}'_v$ et un élément $g' \in G'_{d'}$ tels que $v' = g'(v'')$.

5.3

Soient $(\mathcal{D}', \psi, r, \bar{Z}') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ et $d' \in D'$. Posons $d = \psi_{D'}(d')$.

Proposition 5.3 : *Supposons $\bar{Z}' \neq 0$. Il existe une application linéaire $\ell_{\mathcal{D}',r} : \mathcal{S}^d_r \to \mathcal{S}'^{d'}_r$ vérifiant la condition suivante. Soient $\varphi \in \mathcal{S}^d_r$, $F \in CL_q$, $Z' \in \mathfrak{g}'_{d'}$, $X' \in \mathfrak{g}'_{d',reg}$. Supposons que :*

(a) $\xi_{d'}(Z') \in \mathfrak{t}'_{cent,r}$ et son image dans $\bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(r)$ est égale à $\bar{Z}'$;

(b) $X' \in \mathfrak{g}'_{d',r+}$.

Posons $X = i_{\psi,d'}(Z' + X')$. Alors on a l'égalité :

$$J^{G_d}(X, rea_F(\varphi)) = J^{G'_{d'}}(X', rea'_F \circ \ell_{\mathcal{D}',r}(\varphi)).$$

Remarque. L'élément X est semi-simple et régulier. En effet, choisissons $g' \in G'^{mod}$ tel que $Ad(g') \circ \xi_{d'}(X') \in \mathfrak{t}'^{mod}$. Notons X'_1 cet élément et posons $Z'_1 = Ad(g') \circ \xi_{d'}(Z') = \xi_{d'}(Z')$ (puisque $\xi_{d'}(Z')$ est central dans $\mathfrak{g}'$). Il existe $g \in G^{mod}$ tel que $Ad(g) \circ \xi_d(X) = i_\psi(Z'_1 + X'_1)$. Notons X_1 ce dernier élément. Il suffit de prouver qu'il est régulier. Soit $\alpha \in \Sigma$, posons $\alpha' = \psi^{-1}(\alpha) \in X'^{,*}$. On a $\alpha(X_1) = \alpha'(Z'_1 + X'_1)$. Si $\alpha' \in \Sigma'$, on a $\alpha'(Z'_1) = 0$ et $\alpha'(X'_1) \neq 0$ puisque X' est régulier. Donc $\alpha(X_1) \neq 0$. Si $\alpha' \notin \Sigma'$, on a $val(\alpha'(X'_1)) > r$ puisque $X' \in \mathfrak{g}'_{d',r+}$. On a $val(\alpha'(Z'_1)) \geq r$. Plus précisément, posons $r = \frac{n}{e}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $e \in P$. La réduction dans $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\varpi_{\frac{1}{e}}^{-n}\alpha'(Z'_1)$ est $\alpha'(\bar{Z}')$. Par l'hypothèse 4.5(1), ce terme est non nul. Donc $val(\alpha'(Z'_1)) = r$, puis $val(\alpha'(Z'_1 + X'_1)) = r$ et $val(\alpha(X_1)) = r$. A fortiori $\alpha(X_1) \neq 0$.

Preuve. On peut fixer $\phi \in \Phi^d$ tel que $r(\phi) \geq r$ et définir $\ell_{\mathcal{D}',r}$ sur $\mathcal{S}(\phi)$.

Si $r(\phi) > r$, on pose $\ell_{\mathcal{D}',r}(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\phi)$. On doit montrer que sous les hypothèses de l'énoncé, on a $J^{G_d}(X, rea_F(\varphi)) = 0$. Reprenons le raisonnement de la remarque ci-dessus. Parce qu'on suppose $\bar{Z}' \neq 0$, on voit qu'il existe $x^* \in X^*$ tel que $val(x^*(X_1)) = r$. D'après le lemme 3.2.1, cela entraîne $X \notin \mathfrak{g}_{d,r+}$. Or $rea_F(\varphi)$ est à support dans $\mathfrak{g}_{d,r+}$. La classe de conjugaison de X ne coupe pas ce support, donc $J^{G_d}(X, rea_F(\varphi)) = 0$.

On suppose maintenant $r(\phi) = r$. Le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 3.4 nous permet de remplacer ϕ par une facette qui coupe $V^d_{(p)} \times \{r\}$. Fixons $v \in V^d_{(p)}$ tel que $(v, r) \in \phi$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\phi)$ et soient F, Z', X', X comme dans l'énoncé. Posons $f = rea_F(\varphi)$. On a :

$$J^{G_d}(X, f) = \Delta(X) \int_{G_d/T_X} f(Ad(g)(X))\, dg.$$

En reprenant les calculs de la remarque, on a :

$$\Delta(X) = |\prod_{\alpha\in\Sigma} \alpha(X_1)|^{1/2} = |\prod_{\alpha\in\Sigma\setminus\Sigma'} \alpha(X_1)|^{1/2}| \prod_{\alpha'\in\Sigma'} \alpha'(X'_1)|^{1/2}.$$

Le second produit vaut $\Delta'(X')$. Les termes qui interviennent dans le premier sont de valuation r. On obtient :

$$(1) \qquad \Delta(X) = q^{\frac{r}{2}(|\Sigma'|-|\Sigma|)}\Delta'(X').$$

Soit $g \in G_d$. Pour que $f(Ad(g)(X))$ soit non nul, on doit avoir $Ad(g)(X) \in \mathfrak{g}_{d,v,r}$. Nous n'avons défini que les réseaux de Moy-Prasad associés aux points de V^d mais on sait bien qu'on peut en associer à tout point de $Imm(\mathbf{G}_d, F)$. Avec une notation évidente, la condition précédente est équivalente à $X \in \mathfrak{g}_{d,g^{-1}(v),r}$. Or :

(2) l'ensemble des $v_1 \in Imm(\mathbf{G}_d, F)$ tels que $X \in \mathfrak{g}_{d,v_1,r}$ est inclus dans l'image du plongement $j_{\psi,d'}$.

Cela résulte du lemme 2.2.6 de [KM]. Les hypothèses de ce lemme sont vérifiées : $i_{\psi,d'}(Z'_0)$ est un "bon élément" au sens de [KM] et $i_{\psi,d'}(G'_{d'})$ en est le centralisateur dans G_d.

On peut donc se limiter aux g tels que $g^{-1}(v)$ appartienne à l'image de $j_{\psi,d'}$. Puisque tout élément de $Imm(\mathbf{G}'_{d'}, F)$ s'écrit $g'(v')$ avec $g' \in G'_{d'}$ et $v' \in V'^{d'}$, les considérations de 5.2 nous permettent d'écrire l'ensemble précédent comme l'union disjointe :

$$\sqcup_{v'\in\mathcal{V}'_v} G_{d,v}g^{-1}_{v',v} i_{\psi,d'}(G'_{d'}).$$

Pour $v' \in \mathcal{V}'_v$, posons :

$$J_{v'} = \int_{G_{d,v}g^{-1}_{v',v} i_{\psi,d'}(G'_{d'})/T_X} f(Ad(g)(X))\, dg.$$

Alors :

$$(3) \qquad J^{G_d}(X, f) = \Delta(X) \sum_{v'\in\mathcal{V}'_v} J_{v'}.$$

Fixons $v' \in \mathcal{V}'_v$. On a $i_{\psi,d'}(G'_{d'}) \cap g_{v',v}G_{d,v}g^{-1}_{v',v} = i_{\psi,d'}(G'_{d',v'})$. En effet, pour $g' \in G'_{d'}$, $i_{\psi,d'}(g')$ appartient à $g_{v',v}G_{d,v}g^{-1}_{v',v}$ si et seulement s'il fixe le point $\psi_{V',d'}(v')$ de l'immeuble $Imm(\mathbf{G}_d, F)$. Puisque $j_{\psi,d'}$ est injectif, cela équivaut à ce que g' fixe v', i.e. $g' \in G'_{d',v'}$. D'autre part $T_X = i_{\psi,d'}(T'_{X'})$. Alors :

$$\begin{aligned} J_{v'} &= \sum_{g'\in G'_{d',v'}\setminus G'_{d'}/T'_{X'}} \int_{G_{d,v}g^{-1}_{v',v} i_{\psi,d'}(g')T_X/T_X} f(Ad(g)(X))\, dg \\ &= \sum_{g'\in G'_{d',v'}\setminus G'_{d'}/T'_{X'}} m_{g'} \int_{G_{d,v}} f(Ad(k)(X_{g'}))\, dk, \end{aligned}$$

où on a posé :

$$m_{g'} = mes(G_{d,v} g_{v',v}^{-1} i_{\psi,d'}(g') T_X/T_X) mes(G_{d,v})^{-1},$$
$$X_{g'} = Ad(g_{v',v}^{-1} i_{\psi,d'}(g'))(X).$$

Notons $\phi'_{v'} \in \Phi'^{d'}$ la facette qui contient (v', r). Définissons les fonctions suivantes :

$\varphi_1 \in \mathcal{S}(\phi)$ par $\varphi_1(Y) = q^{-dim(\bar{\mathbf{G}}_{d,v})/2} \sum_{x \in \bar{G}_{d,v}} \varphi(Ad(x)(Y))$;

$\varphi_{1,v'} \in \mathcal{S}(\phi'_{v'})$ par $\varphi_{1,v'} = |\bar{G}_{d',v'}|^{-1} q^{dim(\bar{\mathbf{G}}'_{d',v'})/2} \varphi_1 \circ \bar{j}_{v,v',r}$;

$\varphi_{v'} \in \mathcal{S}(\phi'_{v'})$ par $\varphi_{v'}(Y') = \varphi_{1,v'}(\bar{\xi}_{d'}^{-1}(\bar{Z}') + Y')$.

Cette dernière définition est loisible. En effet, pour tout $v'' \in V'^{I}$, l'intersection de $\bar{\mathfrak{t}}'_{cent}$ avec $\bar{\mathfrak{g}}'_{v'',r}$ est égale à $\bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(r)^I$. De plus, la restriction de $\bar{\xi}_{d'}^{-1}$ à $\bar{\mathfrak{t}}'_{cent}$ est équivariante pour les actions de Γ : la torsion par l'action du groupe de Weyl ne se voit pas sur le centre. Il en résulte que $\bar{\xi}_{d'}^{-1}(\bar{Z}')$ appartient à $\mathfrak{g}'_{d',v'',r}$ pour tout $v'' \in V'^{d'}$.

Posons $f_{v'} = rea'_F(\varphi_{v'})$. Pour tout $g' \in G'_{d'}$, on a l'égalité :

$$(4) \qquad \int_{G_{d,v}} f(Ad(k)(X_{g'}))\, dk = \int_{G'_{d',v'}} f_{v'}(Ad(k'g')(X'))\, dk'.$$

En effet, on a :

$$X_{g'} = Ad(g_{v',v}^{-1}) \circ i_{\psi,d'}[Z' + Ad(g')(X')].$$

Les conditions $X_{g'} \in \mathfrak{g}_{d,v,r}$ et $Ad(g')(X') \in \mathfrak{g}'_{d',v',r}$ sont équivalentes. Si elles ne sont pas vérifiées, les deux membres de (4) sont nuls. Supposons-les vérifiées. Alors :

$$\pi_{d,v,r}(X_{g'}) = \bar{j}_{v,v',r} \circ \pi_{d',v',r}(Z' + Ad(g')(X')) = \bar{j}_{v,v',r}(\bar{\xi}_{d'}^{-1}(\bar{Z}') + \pi_{d',v',r}(Ad(g')(X'))).$$

En se rappelant les définitions de nos mesures, on a :

$$\int_{G_{d,v}} f(Ad(k)(X_{g'}))\, dk = \varphi_1 \circ \pi_{d,v,r}(X_{g'}) = q^{-dim(\bar{\mathbf{G}}'_{d',v'})/2} |\bar{G}'_{d',v'}| \varphi_{1,v'}(\bar{\xi}_{d'}^{-1}(\bar{Z}') + \pi_{d',v',r}(Ad(g')(X')))$$
$$= q^{-dim(\bar{\mathbf{G}}'_{d',v'})/2} |\bar{G}'_{d',v'}| \varphi_{v'} \circ \pi_{d',v',r}(Ad(g')(X')) = q^{-dim(\bar{\mathbf{G}}'_{d',v'})/2} |\bar{G}'_{d',v'}| f_{v'}(Ad(g')(X'))$$
$$= \int_{G'_{d',v'}} f_{v'}(Ad(k'g')(X'))\, dk'.$$

Cela prouve (4).

D'autre part :

$$m_{g'} = mes([i_{\psi,d'}(g')^{-1} g_{v',v} G_{d,v} g_{v',v}^{-1} i_{\psi,d'}(g')] \cap T_X)^{-1}$$
$$= mes(g'^{-1} G'_{d',v'} g' \cap T'_{X'})^{-1} = mes(G'_{d',v'} g' T'_{X'}/T'_{X'}) mes(G'_{d',v'})^{-1}.$$

On en déduit :

$$J_{v'} = \sum_{g' \in G'_{d',v'} \backslash G'_{d'}/T'_{X'}} mes(G'_{d',v'} g' T'_{X'}/T'_{X'}) mes(G'_{d',v'})^{-1} \int_{G'_{d',v'}} f_{v'}(Ad(k'g')(X'))\, dk'$$
$$= \int_{G'_{d'}/T'_{X'}} f_{v'}(Ad(g')(X'))\, dg'.$$

Posons :

$$\varphi' = \oplus_{v' \in \mathcal{V}'_v} q^{\frac{r}{2}(|\Sigma'|-|\Sigma|)} \varphi_{v'} \in \oplus_{v' \in \mathcal{V}'_v} \mathcal{S}(\phi'_{v'}) \subseteq \mathcal{S}'^{d'}_r.$$

L'égalité ci-dessus et les relations (1) et (3) démontrent l'égalité :

$$J^{G_d}(X, f) = J^{G'_{d'}}(X', rea'_F(\varphi')).$$

Il suffit de définir $\ell_{\mathcal{D}',r}(\varphi) = \varphi'$ pour satisfaire aux conditions de l'énoncé. □

6 Classes de conjugaison stable

6.1

Notons $\tilde{\mathcal{B}}$ l'ensemble des couples $(\bar{Z}, r)$ tels que $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\bar{Z} \in \bar{\mathfrak{t}}(r)$, $\bar{Z} \neq 0$. Le groupe $W \rtimes \Gamma$ agit sur $\tilde{\mathcal{B}}$ via son action sur les espaces $\bar{\mathfrak{t}}(r)$. On pose :

$$\mathcal{B} = (\tilde{\mathcal{B}}/W)^{\Gamma}.$$

Remarque : *Il existe $e \in P$ tel que, pour tout $(\bar{Z}, r) \in \tilde{\mathcal{B}}$ dont l'image dans $\tilde{\mathcal{B}}/W$ soit fixe par Γ, on ait $er \in \mathbb{Z}$.*

En effet, la condition $\bar{Z} \neq 0$ impose que $(\bar{\mathfrak{t}}(r)/W)^{\Gamma}$ soit non nul et une variante du lemme 3.2.1 entraîne le résultat.

Soit $b \in \mathcal{B}$. On va lui associer un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$. Pour cela, choisissons un relèvement $(\bar{Z}, r)$ de b dans $\tilde{\mathcal{B}}$. Notons Σ_1 l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(\bar{Z}) = 0$. En caractéristique nulle, il est bien connu que le commutant d'un élément semi-simple d'une algèbre de Lie est une sous-algèbre de Lévi. La même propriété est vraie en caractéristique positive sous l'hypothèse (P_{Σ}). Donc Σ_1 est un sous-ensemble de Lévi de Σ. Il existe $w \in W$ tel que $w(\Sigma_1)$ soit standard, c'est-à-dire engendrée par $\pm(w(\Sigma_1) \cap \Delta)$. Quitte à remplacer $(\bar{Z}, r)$ par $(w(\bar{Z}), r)$, on peut supposer Σ_1 standard. Notons W_1 le sous-groupe de Lévi de W associé à Σ_1. Toujours grâce à (P_{Σ}), c'est le fixateur de $\bar{Z}$. Puisque $b \in \mathcal{B}$, il existe pour tout $\gamma \in \Gamma$ un élément $w(\gamma) \in W$ tel que $w(\gamma)\gamma(\bar{Z}) = \bar{Z}$. Ce $w(\gamma)$ n'est pas unique mais sa classe $W_1 w(\gamma)$ l'est. On a en tout cas $w(\gamma)\gamma(\Sigma_1) = \Sigma_1$. Quitte à multiplier à gauche $w(\gamma)$ par un élément de W_1, on peut imposer que $w(\gamma)\gamma$ conserve $\Sigma_1 \cap \Delta$. cela détermine uniquement $w(\gamma)$. On pose $X'^* = X^*$, $\psi : X'^* \to X^*$ est l'identité et on munit X'^* de l'action de Γ telle que $\psi \circ \gamma = w(\gamma) \circ \gamma \circ \psi$. on définit par dualité X'_* et $\psi : X'_* \to X_*$, on pose $\Sigma' = \psi^{-1}(\Sigma_1)$, $\Delta' = \psi^{-1}(\Sigma_1 \cap \Delta_1)$, $\check{\Sigma}' = \psi^{-1}(\check{\Sigma}_1)$, $\check{\Delta}' = \psi^{-1}(\check{\Sigma}_1 \cap \check{\Delta}_1)$, $\bar{Z}' = \psi^{-1}(\bar{Z})$, où $\check{\Sigma}_1$ est l'ensemble des $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma_1$. Posons $\mathcal{D}' = (X'^*, \Sigma', \Delta', X'_*, \check{\Sigma}', \check{\Delta}')$. Alors $(\mathcal{D}', \psi, r, \bar{Z}')$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{D})$. C'est l'élément cherché.

Cet élément n'est pas défini de façon unique car il n'y a pas unicité du choix de $(\bar{Z}, r)$ tel que l'ensemble Σ_1 soit standard. Mais les différents éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ que l'on peut construire sont équivalents. Inversement, si on en fixe un, que l'on note $(\mathcal{D}', \psi, r, \bar{Z}')$, le terme $(\psi(\bar{Z}'), r)$ est un relèvement de b dans $\tilde{\mathcal{B}}$.

6.2

Notons $\tilde{\mathcal{Z}}_{\bullet}$ l'ensemble des familles :

$$(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, ..., \bar{Z}_k; r_1, ..., r_k)$$

telles que :

(i) k est un entier ≥ 1 ;

(ii) $r_1, ..., r_k \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $r_1 < r_2 < ... < r_k$;

(iii) pour tout $i = 1, ..., k$, $\bar{Z}_i \in \bar{\mathfrak{t}}(r_i)$ et $\bar{Z}_i \neq 0$.

Pour tout $i = 1, ..., k$, notons Σ_i l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(\bar{Z}_j) = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., i\}$. Notons $X_{*,i}$ l'intersection de X_* et de l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma_i$. Posons $\bar{\mathfrak{t}}_i = X_{*,i} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_q \subseteq \bar{\mathfrak{t}}$. Rappelons que $\bar{\mathfrak{t}}(r_i)$ n'est que $\bar{\mathfrak{t}}$ muni d'une action tordue de Γ. L'espace $\bar{\mathfrak{t}}_i$ s'identifie à un sous-espace de $\bar{\mathfrak{t}}(r_i)$ que l'on note $\bar{\mathfrak{t}}_i(r_i)$, qui n'est en général pas stable par Γ. On impose :

(iv) pour $i = 1, ..., k-1$, $\bar{Z}_{i+1} \in \bar{\mathfrak{t}}_i(r_i)$;

(v) $\bar{\mathfrak{t}} \supsetneq \bar{\mathfrak{t}}_1 \supsetneq ... \supsetneq \bar{\mathfrak{t}}_k = \{0\}$.

Il y a une certaine dissymétrie dans cette définition. On impose que $\bar{Z}_2, ..., \bar{Z}_k$ sont en quelque sorte dans une certaine algèbre semi-simple, on ne l'impose pas pour $\bar{Z}_1$. De fait, le centre joue ici un rôle perturbateur.

Le groupe $W \rtimes \Gamma$ agit naturellement sur $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$: pour $\omega \in W \rtimes \Gamma$,

$$\omega(\bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_k; r_1, ..., r_k) = (\omega(\bar{Z}_1), ..., \omega(\bar{Z}_k); r_1, ..., r_k).$$

Tout élément de $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$ est régulier, c'est-à-dire que son fixateur dans W est trivial. En effet, soit $\tilde{z} = (\bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_k; r_1, ..., r_k) \in \tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$, introduisons les ensembles Σ_i. Comme on l'a rappelé en 6.1, ce sont des sous-ensembles de Lévi de Σ. Notons W_i les sous-groupes de W associés. Le fixateur de $\bar{Z}_1$ dans W est W_1. Celui de $\bar{Z}_2$ dans W_1 est W_2 etc... Finalement le fixateur de $\tilde{z}$ est W_k. Mais $W_k = \{1\}$ car $\bar{\mathfrak{t}}_k = \{0\}$.

On pose $\mathcal{Z}_\bullet = (\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet / W)^\Gamma$. A tout élément $z \in \mathcal{Z}_\bullet$, on va associer un groupe D_z. Soit $\tilde{z}$ un relèvement de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un unique $w_{\tilde{z}}(\gamma) \in W$ tel que $w_{\tilde{z}}(\gamma)\gamma(\tilde{z}) = \tilde{z}$. L'application $\gamma \mapsto w_{\tilde{z}}(\gamma)$ est un cocycle de Γ dans W. Notons $X_{*,\tilde{z}} = X_*$, $\psi_{\tilde{z}} : X_{*,\tilde{z}} \to X_*$ l'identité et munissons $X_{*,\tilde{z}}$ de l'action de Γ telle que $\psi_{\tilde{z}} \circ \gamma = w_{\tilde{z}}(\gamma) \circ \gamma \circ \psi_{\tilde{z}}$. On pose $D_{\tilde{z}} = (X_{*,\tilde{z}})_{\Gamma,tors}$. Ce groupe dépend de $\tilde{z}$. Mais soit $\tilde{z}'$ un autre relèvement de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$. Il y a un unique $w \in W$ tel que $w(\tilde{z}) = \tilde{z}'$. Il y a alors un unique isomorphisme $\mathbf{w} : X_{*,\tilde{z}} \to X_{*,\tilde{z}'}$ tel que $\psi_{\tilde{z}'} \circ \mathbf{w} = w \circ \psi_{\tilde{z}}$. Cet isomorphisme est équivariant pour les actions de Γ et définit un isomorphisme de $D_{\tilde{z}}$ sur $D_{\tilde{z}'}$. On note D_z la limite inductive des $D_{\tilde{z}}$, les applications de transition étant ces isomorphismes canoniques.

Avec les mêmes notations, de l'homomorphisme $\psi_{\tilde{z}}$ se déduit un homomorphisme $X_{*,\tilde{z}} \to X_*/X_{*,sc}$. Ce dernier est équivariant pour les actions de Γ. Il s'en déduit un homomorphisme de $D_{\tilde{z}}$ dans D. Il est compatible avec les applications de transition. On obtient un homomorphisme que l'on note $\psi_{D_z} = D_z \to D$.

Si $\Sigma \neq \emptyset$, on pose $\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_\bullet$. Si $\Sigma = \emptyset$, c'est-à-dire si $\mathcal{D}$ est la donnée de racines d'un tore, on adjoint à $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$ la famille vide en posant $\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{\mathcal{Z}}_\bullet \cup \{\emptyset\}$. On considère que cette famille vide est fixe par Γ. On pose $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_\bullet \cup \{\emptyset\}$. On pose $D_\emptyset = X_{*,\Gamma,tors}$.

6.3

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{Z}}_\bullet & \to & \tilde{\mathcal{B}} \\ (\bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_k; r_1, ..., r_k) & \mapsto & (\bar{Z}_1, r_1) \end{array}$$

est surjective et équivariante pour les actions de $W \rtimes \Gamma$. On en déduit une surjection $\mathcal{Z}_\bullet \to \mathcal{B}$. Soit $b \in \mathcal{B}$. On note $\mathcal{Z}_b$ la fibre de cette surjection au-dessus de b. Comme en 6.1, associons à b un élément $(\mathcal{D}', \psi, r, \bar{Z}')$ de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$.

Soit $z \in \mathcal{Z}_b$. On peut choisir un relèvement de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$ de la forme :

$$(\psi(\bar{Z}'), \bar{Z}_2, ..., \bar{Z}_k; r, r_2, ..., r_k).$$

Considérons la collection :

$$(\bar{Z}', \psi^{-1}(\bar{Z}_2), ..., \psi^{-1}(\bar{Z}_k); r, r_2, ..., r_k).$$

On vérifie qu'elle appartient à $\tilde{\mathcal{Z}}'_\bullet$ (l'analogue pour $\mathcal{D}'$ de $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$) et que son image dans $\tilde{\mathcal{Z}}'_\bullet/W'$ est fixe par Γ. Notons $\beta^\sharp(z)$ cette image, qui appartient donc à $\mathcal{Z}'_\bullet$. On vérifie qu'elle ne dépnd pas du relèvement choisi de z.

On peut en dire autant de la collection :

$$(\psi^{-1}(\bar{Z}_2), ..., \psi^{-1}(\bar{Z}_k); r_2, ..., r_k),$$

à ceci près que les ensembles $\tilde{\mathcal{Z}}'_\bullet$ et $\mathcal{Z}'_\bullet$ doivent être complétés en $\tilde{\mathcal{Z}}'$ et $\mathcal{Z}'$. On note $\beta(z)$ l'image de cette collection dans $\mathcal{Z}'$.

On a ainsi défini deux applications :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{Z}'_\bullet \\ & \beta^\sharp \nearrow & \\ \mathcal{Z}_b & & \\ & \beta \searrow & \\ & & \mathcal{Z}' \end{array}$$

Elles sont injectives. L'image de $\beta^\sharp$ est $\mathcal{Z}'_{b'}$, où b' est l'image de $(\bar{Z}', r)$ dans $\mathcal{B}'$. Pour décrire l'image de β, introduisons quelques notations. Pour $z \in \mathcal{Z}$, on définit $r(z)$ ainsi : si z est l'image de $(\bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_k; r_1, ..., r_k)$, $r(z) = r_1$; dans le cas particulier où z est vide, on pose $r(z) = \infty$. On a défini en 1.5 la donnée $\mathcal{D}'_{der}$. Notons $\mathcal{Z}'_{der}$ l'ensemble qui lui est associé. Il y a une injection naturelle $\mathcal{Z}'_{der} \to \mathcal{Z}'$. L'image de β est l'image par cette injection de l'ensemble des $z' \in \mathcal{Z}'_{der}$ tels que $r(z') > r$.

Pour $z \in \mathcal{Z}_b$, on définit les groupes D_z, $D_{\beta^\sharp(z)}$, $D_{\beta(z)}$. Il résulte de leur construction que $D_{\beta^\sharp(z)} = D_{\beta(z)}$ et que de ψ se déduit un isomorphisme $D_{\beta(z)} \stackrel{\sim}{\to} D_z$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D_{\beta(z)} & \stackrel{\sim}{\to} & D_z \\ \downarrow \psi_{D_{\beta(z)}} & & \downarrow \psi_{D_z} \\ D' & \stackrel{\psi_{D'}}{\to} & D \end{array}$$

6.4

On fixe jusqu'à la fin du chapitre 6 un corps $F \in CL_q$. Pour $X \in \mathfrak{t}^{mod}$, posons :

$$r(X) = inf\{val(x^*(X)); x^* \in X^*\}.$$

Cette notation est cohérente avec celle de 3.2. On a $r(0) = \infty$. Si $X \neq 0$, la borne inférieure est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $x^* \in X^*$ tel que $val(x^*(X)) = r(X)$. Cette borne $r(X)$ appartient à $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Pour un sous-système de racines $\Sigma' \subseteq \Sigma$, on note $X_{*,\Sigma'-cent}$ l'annulateur de Σ' dans X_* et $X_{*,\Sigma'-der}$ l'intersection de X_* avec l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les coracines $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma'$. On pose :

$$\mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma'-cent} = X_{*,\Sigma'-cent} \otimes_{\mathbb{Z}} F^{mod}, \quad \mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma'-der} = X_{*,\Sigma'-der} \otimes_{\mathbb{Z}} F^{mod}.$$

L'hypothèse $(P_{\Sigma'})$ entraîne que $X_{*,\Sigma'-cent} \oplus X_{*,\Sigma'-der}$ est d'indice premier à p dans X_*. On en déduit la décomposition :

$$(1) \qquad \mathfrak{t}^{mod} = \mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma'-cent} \oplus \mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma'-der}.$$

Notons $\mathfrak{t}_{reg}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{t}$ tels que $\alpha(X) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Nous allons définir une application :

$$\tilde{\zeta} : \mathfrak{t}_{reg}^{mod} \to \tilde{\mathcal{Z}}.$$

Soit $X \in \mathfrak{t}_{reg}^{mod}$. Supposons $X = 0$. Les deux hypothèses "$X = 0$" et "X est régulier" entraînent $\Sigma = \emptyset$. On pose $\tilde{\zeta}(X) = \emptyset$. Supposons maintenant $X \neq 0$. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{(p)}$:

$$\{r(X)\} \cup \{val(\alpha(X)); \alpha \in \Sigma\}.$$

Notons ses éléments dans l'ordre croissant $r_1 < r_2 < ... < r_k$. On a $r_1 = r(X)$. Pour $i = 1, ..., k$, posons :

$$\Sigma_i = \{\alpha \in \Sigma; val(\alpha(X)) > r_i\}.$$

On a :

$$\Sigma \supseteq \Sigma_1 \supsetneq \Sigma_2 \supsetneq ... \supsetneq \Sigma_k = \emptyset.$$

Les ensembles Σ_i sont des sous-systèmes de racines de Σ. La décomposition (1) se généralise sous-la forme :

$$\mathfrak{t}^{mod} = \mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma_1-cent} \oplus (\mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma_1-der} \cap \mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma_2-cent}) \oplus (\mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma_2-der} \cap \mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma_3-cent}) \oplus ... \oplus (\mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma_{k-1}-der} \cap \mathfrak{t}^{mod}_{\Sigma_k-cent}).$$

On décompose X en $X = X_1 + X_2 + ... + X_k$ conformément à cette décomposition. Il résulte des définitions que, pour $i = 1, ..., k$, $X_i \in \mathfrak{t}^{mod}_{r_i} \setminus \mathfrak{t}^{mod}_{r_i+}$. Notons $\bar{X}_i$ l'image de X_i par la projection $\mathfrak{t}^{mod}_{r_i} \to \bar{\mathfrak{t}}(r_i)$. On vérifie que la famille :

$$(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_k; r_1, ..., r_k)$$

appartient à l'ensemble $\tilde{\mathcal{Z}}$ (les ensembles Σ_i introduits en 6.2 relativement à cette famille sont ceux définis ci-dessus). On note $\tilde{\zeta}(X)$ cette famille, ce qui définit l'application $\tilde{\zeta}$.

L'application $\tilde{\zeta}$ est équivariante pour les actions de W et Γ. Posons $\mathcal{Z}_F = (\mathfrak{t}^{mod}_{reg}/W)^\Gamma$. On déduit de $\tilde{\zeta}$ une application :

$$\zeta : \mathcal{Z}_F \to \mathcal{Z}.$$

6.5

On définit la variété sur F, non connexe :

$$\mathfrak{g}_D = \bigsqcup_{d \in D} \mathfrak{g}_d.$$

On définit de façon évidente les ensembles de points $\mathfrak{g}_D^{mod}$, $\mathfrak{g}_D$ etc... et le sous-ensemble $\mathfrak{g}_{D,reg}$.

Soient $X \in \mathfrak{g}_{d,reg}$, $X' \in \mathfrak{g}_{d',reg}$. On dit que X et X' sont conjugués si $d = d'$ et il existe $g \in G_d$ tel que $Ad(g)(X') = X$. On dit que X et X' sont stablement conjugués s'il existe $g \in \mathbf{G}$ tel que $Ad(g) \circ \xi_{d'}(X') = \xi_d(X)$. Grâce au lemme 3.2.1, on peut remplacer dans cette définition la condition $g \in \mathbf{G}$ par $g \in G^{mod}$.

Il est bien connu que l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{D,reg}$ est en bijection avec $(\mathfrak{t}_{reg}/W)^{Gal(F^{sep}/F)}$. Grâce au lemme 3.2.1, cet ensemble est égal à $(\mathfrak{t}^{mod}_{reg}/W)^\Gamma$, i.e. à $\mathcal{Z}_F$. La bijection se construit ainsi. Soit $X \in \mathfrak{g}_{d,reg}$. On choisit $X' \in \mathfrak{t}^{mod}_{reg}$ et $g \in G^{mod}$ tels que $Ad(g) \circ \xi_d(X) = X'$. L'image de X' dans $\mathfrak{t}^{mod}_{reg}/W$ est fixe par Γ. On associe à X cette image.

Pour $z_F \in \mathcal{Z}_F$, on note $C(z_F)$ la classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{D,reg}$ associée à z_F et $cl(z_F)$ l'ensemble des classes de conjugaison (ordinaire) contenues dans $C(z_F)$.

Soit $z_F \in \mathcal{Z}_F$, posons $z = \zeta(z_F) \in \mathcal{Z}$. On va définir une application :

$$\delta : C(z_F) \to D_z.$$

Fixons $\tilde{z} \in \tilde{\mathcal{Z}}$ relevant z. Par construction de ζ, il existe $Z \in \mathfrak{t}^{mod}_{reg}$ relevant z_F tel que $\tilde{\zeta}(Z) = \tilde{z}$. Les éléments de $\mathfrak{t}^{mod}_{reg}$ relevant z_F étant tous conjugués par W et $\tilde{z}$ étant régulier, l'élément Z est uniquement déterminé. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a défini en 6.2 l'élément $w_{\tilde{z}}(\gamma)$ de W. D'après l'équivariance de $\tilde{\zeta}$, c'est l'unique élément de W tel que $w_{\tilde{z}}(\gamma)\gamma(Z) = Z$. Notons $\mathbf{T}_{\tilde{z}}$ le tore sur F dont le groupe des cocaractères est $X_{*,\tilde{z}}$. On a un isomorphisme $\psi_{\tilde{z}} : \mathbf{T}_{\tilde{z}} \to \mathbf{T}$, défini sur F^{mod}, tel que $\psi_{\tilde{z}} \circ \gamma = w_{\tilde{z}}(\gamma) \circ \gamma \circ \psi_{\tilde{z}}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. En appliquant à ce tore les résultats rappelés en 1.9, on a l'isomorphisme $H^1(\Gamma, T^{mod}_{\tilde{z}}) \simeq (X_{*,\tilde{z}})_{\Gamma,tors} = D_{\tilde{z}}$.

Pour $\gamma \in \Gamma$, définissons $a_Z(\gamma) \in T^{mod}$ et $n_Z(\gamma) \in N^{mod}$ par :

$$a_Z(\gamma) = \prod_{\alpha \in \Sigma, \alpha > 0, w_{\tilde{z}}(\gamma)^{-1}(\alpha) < 0} \check{\alpha}(\alpha(Z)),$$

$$n_Z(\gamma) = n(w_{\tilde{z}}(\gamma)),$$

où $n : W \to \mathbf{N}$ est la section définie en 1.4. Soit $X \in \mathfrak{g}_{d,reg} \cap C(z_F)$. Fixons $g \in G^{mod}$ tel que $Ad(g) \circ \xi_d(X) = Z$. Pour $\gamma \in \Gamma$, on vérifie que $gd_F(\gamma)\gamma(g)^{-1}$ est un élément de N^{mod} dont l'image dans W est $w_{\tilde{z}}(\gamma)$. Alors $gd_F(\gamma)\gamma(g)^{-1}n_Z(\gamma)^{-1}a_Z(\gamma)^{-1} \in T^{mod}$. On définit :

$$\delta_{\tilde{z}}(X) : \Gamma \to T^{mod}_{\tilde{z}}$$

par $\delta_{\tilde{z}}(X;\gamma) = \psi_{\tilde{z}}^{-1}(gd_F(\gamma)\gamma(g)^{-1}n_Z(\gamma)^{-1}a_Z(\gamma)^{-1})$. Grâce au lemme 2.2A de [LS], on vérifie que $\delta_{\tilde{z}}(X)$ est un cocycle. On note encore $\delta_{\tilde{z}}(X)$ sa classe dans $H^1(\Gamma, T^{mod}_{\tilde{z}}) = D_{\tilde{z}}$. Cela définit une application $\delta_{\tilde{z}} : C(z_F) \to D_{\tilde{z}}$.

Soit $\tilde{z}'$ un autre relèvement de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}$. Grâce au lemme 2.3A de [LS], on voit que $\delta_{\tilde{z}}$ et $\delta_{\tilde{z}'}$ se correspondent par l'isomorphisme canonique $D_{\tilde{z}} \simeq D_{\tilde{z}'}$. La famille des applications $\delta_{\tilde{z}}$ définit donc l'application cherchée $\delta : C(z_F) \to D_z$.

Evidemment $\delta(X)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de X. L'application δ définit par passage au quotient une application $\delta_{cl} : cl(z_F) \to D_z$.

Lemme 6.5 : *(i) Soit $d \in D$. Pour $X \in C(z_F) \cap \mathfrak{g}_d$, on a $\psi_{D_z} \circ \delta(X) = d$.*

(ii) L'application δ_{cl} est bijective.

Preuve. On reprend les notations de la construction de δ_{cl}. On fixe $\tilde{z}$ et Z comme dans cette construction. Puisque $\mathbf{G}$ est quasi-déployé, un théorème de Steinberg ([St] théorème 9.8) affirme qu'il existe $X_0 \in \mathfrak{g}$ et $g_0 \in G^{mod}$ tel que $Ad(g_0)(X_0) = Z$. Fixons de tels éléments. Alors $Ad(g_0)^{-1} \circ \psi_{\tilde{z}}$ est un isomorphisme de $\mathbf{T}_{\tilde{z}}$ sur $\mathbf{T}_{X_0}$. On peut remplacer $\delta_{\tilde{z}}$ par l'application $\delta_0 : C(z_F) \to H^1(\Gamma, T^{mod}_{X_0})$ définie par $\delta_0(X;\gamma) = Ad(g_0)^{-1} \circ \psi_{\tilde{z}}(\delta_{\tilde{z}}(X;\gamma))$. Plus correctement, $\delta_0(X)$ est la classe de ce cocycle. Définissons une application $a_0 : \Gamma \to T^{mod}_{X_0}$ par :

$$a_0(\gamma) = g_0^{-1}a_Z(\gamma)n_Z(\gamma)\gamma(g_0).$$

Pour $X \in \mathfrak{g}_{d,reg} \cap C(z_F)$, choisissons $h \in G^{mod}$ tel que $Ad(h) \circ \xi_d(X) = X_0$ et définissons $a(X) : \Gamma \to T^{mod}_{X_0}$ par $a(X;\gamma) = hd_F(\gamma)\gamma(h)^{-1}$. Les applications a_0 et $a(X)$ sont des cocycles. Remarquons que l'élément g utilisé dans la construction de $\delta_{\tilde{z}}(X)$ peut être choisi égal à $g_0 h$. On a alors l'égalité :

$$(1) \quad \delta_0(X) = a(X)a_0^{-1}.$$

L'inclusion $T_{X_0}^{mod} \subseteq G^{mod}$ définit un homomorphisme $H^1(\Gamma, T_{X_0}^{mod}) \to H^1(\Gamma, G^{mod})$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\Gamma, T_{X_0}^{mod}) & \to & H^1(\Gamma, T_{\tilde{z}}^{mod}) & = & D_{\tilde{z}} \\ \downarrow & & & & \downarrow \psi_{D_{\tilde{z}}} \\ H^1(\Gamma, G^{mod}) & & = & & D \end{array}$$

Le cocycle a_0 est cohomologue au cocycle $\gamma \mapsto a_Z(\gamma)n_Z(\gamma)$. Mais la construction de ces termes $a_Z(\gamma)$ et $n_Z(\gamma)$ se relève à $\mathbf{G}_{sc}$ et le cocycle précédent est l'image par ι d'un cocycle à valeurs dans G_{sc}^{mod}. Puisque $H^1(\Gamma, G_{sc}^{mod}) = \{0\}$, cela entraîne que l'image de a_0 dans $H^1(\Gamma, G^{mod})$ est nulle. L'image de $a(X)$ est celle de d_F, son image dans D est d. Grâce à (1), on obtient la première assertion de l'énoncé.

Toujours grâce à (1) et puisque $H^1(\Gamma, T_{X_0}^{mod})$ est un groupe, l'application δ_{cl} est bijective si et seulement si l'application $X \mapsto a(X)$ se factorise en une application bijective de $cl(z_F)$ sur $H^1(\Gamma, T_{X_0}^{mod})$. On peut fixer d, noter $H^1(\Gamma, T_{X_0}^{mod})_d$ la fibre au-dessus de d de l'un ou l'autre des chemins du diagramme ci-dessus, $cl(z_F)_d$ l'image dans $cl(z_F)$ de $C(z_F) \cap \mathfrak{g}_d$ et montrer que l'application précédente, restreinte à $C(z_F) \cap \mathfrak{g}_d$, se factorise en une bijection de $cl(z_F)_d$ sur $H^1(\Gamma, T_{X_0}^{mod})_d$. La démonstration est standard. $\square$

6.6

Soit $z \in \mathcal{Z}_\bullet$, notons b son image dans $\mathcal{B}$. Comme en 6.1, associons à b un élément $(\mathcal{D}', \psi, r, \bar{Z}')$ de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$. Posons $z^\sharp = \beta^\sharp(z) \in \mathcal{Z}'_\bullet$, cf.6.3. Considérons les deux ensembles $\zeta^{-1}(z) \subseteq \mathcal{Z}_F$ et $\zeta'^{-1}(z^\sharp) \subseteq \mathcal{Z}'_F$.

Rappelons que l'on dispose de l'isomorphisme $i_\psi : \mathfrak{t}'^{mod} \to \mathfrak{t}^{mod}$. Il n'est pas équivariant pour les actions de Γ mais l'application que l'on en déduit de $\mathfrak{t}'^{mod}/W'$ dans $\mathfrak{t}^{mod}/W$ l'est. Soit $z_F^\sharp \in \zeta'^{-1}(z^\sharp)$, choisissons un relèvement $X^\sharp \in \mathfrak{t}'^{mod}_{reg}$ de $z_F^\sharp$. Le terme $i_\psi(X^\sharp)$ est régulier : si $\alpha = \psi(\alpha')$ avec $\alpha' \in \Sigma'$, on a $\alpha(i_\psi(X^\sharp)) = \alpha'(X^\sharp) \neq 0$; si $\alpha \in \Sigma \setminus \psi(\Sigma')$, on vérifie que $val(\alpha(i_\psi(X^\sharp))) = r$. L'image de $i_\psi(X^\sharp)$ dans $\mathfrak{t}^{mod}_{reg}/W$ est fixe par Γ, i.e. appartient à $\mathcal{Z}_F$. Notons z_F cette image. Alors $z_F \in \zeta^{-1}(z)$.

Inversement, soit $z_F \in \zeta^{-1}(z)$. Choisissons un relèvement $\tilde{z}$ de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}$ de la forme $(\psi(\bar{Z}'), \bar{Z}_2, ..., \bar{Z}_k; r, r_2, ..., r_k)$. Il existe un unique relèvement X de z_F dans $\mathfrak{t}^{mod}_{reg}$ tel que $\tilde{\zeta}(X) = \tilde{z}$. On a $i_\psi^{-1}(X) \in \mathfrak{t}'^{mod}_{reg}$. Pour $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma \circ i_\psi^{-1}(X) = i_\psi^{-1} \circ w_\psi(\gamma) \circ \gamma(X)$. Puisque X relève z_F, il existe $u_\gamma \in W$ tel que $w_\psi(\gamma) \circ \gamma(X) = u_\gamma(X)$. Puisque $\tilde{\zeta}$ est équivariante pour les actions de W et Γ, on a aussi $w_\psi(\gamma) \circ \gamma(\tilde{z}) = u_\gamma(\tilde{z})$. Cela entraîne $w_\psi(\gamma) \circ \gamma \circ \psi(\bar{Z}') = u_\gamma \circ \psi(\bar{Z}')$. Mais $w_\psi(\gamma) \circ \gamma \circ \psi(\bar{Z}') = \psi \circ \gamma(\bar{Z}') = \psi(\bar{Z}')$. Alors u_γ appartient à $\psi(W')$. Il existe donc $u'_\gamma \in W'$ tel que $\gamma \circ i_\psi^{-1}(X) = u'_\gamma \circ i_\psi^{-1}(X)$. L'image de $i_\psi^{-1}(X)$ dans $\mathfrak{t}'^{mod}_{reg}/W'$ est fixe par Γ, i.e. appartient à $\mathcal{Z}'_F$. Notons $z_F^\sharp$ cette image. On vérifie que $z_F^\sharp$ appartient à $\zeta'^{-1}(z^\sharp)$.

Les deux applications $z_F \leftrightarrow z_F^\sharp$ que l'on vient de construire sont inverses l'une de l'autre. On a ainsi établi une bijection :

$$(1) \quad \zeta^{-1}(z) \leftrightarrow \zeta'^{-1}(z^\sharp).$$

Posons $z' = \beta(z) \in \mathcal{Z}'$, cf.6.3. A la donnée $\mathcal{D}'_{der}$ sont associés des ensembles $\mathcal{Z}'_{der}$ et $\mathcal{Z}'_{der,F}$ et une application $\zeta'_{der} : \mathcal{Z}'_{der,F} \to \mathcal{Z}'_{der}$. En fait, $\mathcal{Z}'_{der}$, resp. $\mathcal{Z}'_{der,F}$, se plonge naturellement dans $\mathcal{Z}'$, resp. $\mathcal{Z}'_F$, et on l'identifie à son image. Notons aussi $\mathfrak{t}'_{cent|\bar{Z}'}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{t}'_{cent} \cap \mathfrak{t}'^{mod}_r$ dont l'image dans $\bar{\mathfrak{t}}'(r)$ est $\bar{Z}'$. Soit $z^\sharp_F \in \zeta'^{-1}(z^\sharp)$, choisissons un relèvement $X^\sharp$ de $z^\sharp_F$ dans $\mathfrak{t}'^{mod}_{reg}$. Conformément à la décomposition :

$$\mathfrak{t}'^{mod} = \mathfrak{t}'^{mod}_{cent} \oplus \mathfrak{t}'^{mod}_{der},$$

écrivons $X^\sharp = Z' + X'$. On vérifie que $Z' \in \mathfrak{t}'_{cent|\bar{Z}'}$ et que l'image de X' dans $\mathfrak{t}'^{mod}_{der}/W'$ est invariante par Γ. Notons z'_F cette image. Elle appartient à $\mathcal{Z}'_{der,F}$ et on vérifie que $\zeta'_{der}(z'_F) = z'$. On a ainsi défini une application :

$$(2) \quad \zeta'^{-1}(z^\sharp) \to \mathfrak{t}'_{cent|\bar{Z}'} \times \zeta'^{-1}_{der}(z'),$$

qui est évidemment bijective.

Lemme 6.6.1 : *L'application ζ est surjective.*

Preuve. Le temps de cette preuve, on s'autorise à faire varier $\mathcal{D}$. On raisonne par récurrence sur le rang de $\mathcal{D}$. Le cas de rang nul est trivial. On revient à notre $\mathcal{D}$ et on suppose le lemme prouvé pour les données de rang strictement inférieur. Soit $z \in \mathcal{Z}$. On veut montrer que $\zeta^{-1}(z)$ n'est pas vide. Dans le cas où $\Sigma = \emptyset$ et $z = \emptyset$, on a simplement $\mathcal{Z}_F = \mathfrak{t}$ et l'élément $0 \in \mathfrak{t}$ vérifie $\zeta(0) = \emptyset$. Supposons $z \in \mathcal{Z}_\bullet$. On effectue les constructions précédentes. Puisque $\bar{Z}' \neq 0$, on a $rang(\mathcal{D}'_{der}) < rang(\mathcal{D}') = rang(\mathcal{D})$. Par l'hypothèse de récurrence, $\zeta'^{-1}_{der}(z')$ n'est pas vide. On a la suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{t}'^{mod}_{cent} \cap \mathfrak{t}'^{mod}_{r+} \to \mathfrak{t}'^{mod}_{cent} \cap \mathfrak{t}'^{mod}_r \to \bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(r) \to 0$$

Le Γ-module $\mathfrak{t}'^{mod}_{cent} \cap \mathfrak{t}'^{mod}_{r+}$ est cohomologiquement trivial, on en déduit que l'application :

$$\mathfrak{t}'_{cent} \cap \mathfrak{t}'^{mod}_r \to \bar{\mathfrak{t}}'_{cent}(r)^\Gamma$$

est surjective. Alors $\mathfrak{t}'_{cent|\bar{Z}'}$ n'est pas vide. D'après (1) et (2), $\zeta^{-1}(z)$ n'est pas vide non plus. $\square$

Reprenons les données du début du paragraphe. Soit $z_F \in \zeta^{-1}(z)$, notons $z^\sharp_F$ son image par (1) et (Z', z'_F) l'image de $z^\sharp_F$ par (2). On dispose des classes de conjugaison stable $C(z_F)$, $C(z^\sharp_F)$, $C(z'_F)$ et des ensembles de classes de conjugaison $cl(z_F)$, $cl(z^\sharp_F)$ et $cl(z'_F)$.

Remarque. On considère ici z'_F comme un élément de $\mathcal{Z}'_F$ et non de $\mathcal{Z}'_{der,F}$. Les éléments des classes dans $cl(z'_F)$ appartiennent à des algèbres $\mathfrak{g}'_{der,d'}$ mais on considère leur conjugaison par $G'_{d'}$. Les groupes dérivés n'interviennent pas.

On a défini une application $\psi_{D'} : D' \to D$ et, pour tout $d' \in D'$, un plongement $i_{\psi,d'} : \mathbf{G}'_{d'} \to \mathbf{G}_{\psi_{D'}(d')}$, d'où aussi un plongement $i_{\psi,d'} : \mathfrak{g}'_{d'} \to \mathfrak{g}_{\psi_{D'}(d')}$. Ces applications se regroupent en une application linéaire :

$$i_{\psi,D'} : \mathfrak{g}'_{D'} \to \mathfrak{g}_D.$$

Cette application est compatible à la conjugaison et à la conjugaison stable. Si $X^\sharp \in C(z^\sharp_F)$, on vérifie que $i_{\psi,D'}(X^\sharp) \in C(z_F)$. De $i_{\psi,D'}$ se déduit une application encore notée :

$$i_{\psi,D'} : cl(z^\sharp_F) \to cl(z_F).$$

L'élément Z' est central pour la donnée $\mathcal{D}'$ et agit de façon simple sur les classes de conjugaison. De façon précise, soit $d' \in D'$. Alors $\xi_{d'}^{-1}$ se restreint à $\mathfrak{t}'^{mod}_{cent}$ en une application invariante par Γ. En particulier, $\xi_{d'}^{-1}(Z')$ appartient à $\mathfrak{g}'_{d'}$. L'application $X' \mapsto X' + \xi_{d'}^{-1}(Z')$ définit une bijection de $C(z'_F) \cap \mathfrak{g}'_{d'}$ sur $C(z^\sharp_F) \cap \mathfrak{g}'_{d'}$. De ces applications se déduit une bijection :

$$cl(z'_F) \xrightarrow{\sim} cl(z^\sharp_F).$$

On a dit en 6.3 que l'on pouvait identifier D_z, $D_{z^\sharp}$ et $D_{z'}$.

Lemme 6.6.2 : *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
cl(z'_F) & \xrightarrow{\sim} & cl(z^\sharp_F) & \xrightarrow{i_{\psi,D'}} & cl(z_F) \\
\downarrow \delta'_{cl} & & \downarrow \delta'_{cl} & & \downarrow \delta_{cl} \\
D_{z'} & \xrightarrow{\sim} & D_{z^\sharp} & \xrightarrow{\sim} & D_z
\end{array}$$

Remarque. Grâce au lemme 6.5, cela entraîne que l'application $i_{\psi,D'}$ de l'énoncé est bijective.

Preuve. La commutativité du carré de gauche est immédiate : la construction de δ'_{cl} est insensible à l'addition d'éléments centraux.

Choisissons un relèvement $\tilde{z}$ de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$ de la forme :

$$(\psi(\bar{Z}'), \bar{Z}_2, ..., \bar{Z}_k; r, r_2, ..., r_k).$$

Posons $\tilde{z}^\sharp = (\bar{Z}', \psi^{-1}(\bar{Z}_2), ..., \psi^{-1}(\bar{Z}_k); r, r_2, ..., r_k)$. C'est un relèvement de $z^\sharp$ dans $\tilde{\mathcal{Z}}'_\bullet$. Pour $\gamma \in \Gamma$, on a défini $w_\psi(\gamma)$, $w_{\tilde{z}}(\gamma) \in W$ et $w_{\tilde{z}^\sharp}(\gamma) \in W'$. On a les égalités $w_{\tilde{z}}(\gamma)\gamma(\tilde{z}) = \tilde{z}$, $w_{\tilde{z}^\sharp}(\gamma)\gamma(\tilde{z}^\sharp) = \tilde{z}^\sharp$ et $i_\psi \circ \gamma = w_\psi(\gamma) \circ \gamma \circ i_\psi$. On en déduit :

$$(3) \quad w_{\tilde{z}}(\gamma) = \psi(w_{\tilde{z}^\sharp}(\gamma)) w_\psi(\gamma).$$

D'après 4.6(1), les longueurs s'ajoutent dans cette égalité, c'est-à-dire que la longueur de $w_{\tilde{z}}(\gamma)$ est la somme des longueurs de $w_{\tilde{z}^\sharp}(\gamma)$ et de $w_\psi(\gamma)$.

De (3) résulte que l'application $\psi_{\tilde{z}}^{-1} \circ i_\psi \circ \psi_{\tilde{z}^\sharp} : \mathbf{T}_{\tilde{z}^\sharp} \to \mathbf{T}_{\tilde{z}}$ est définie sur F. On en déduit un isomorphisme $H^1(\Gamma, T^{mod}_{\tilde{z}^\sharp}) \simeq H^1(\Gamma, T^{mod}_{\tilde{z}})$, qui s'identifie à l'isomorphisme $D_{z^\sharp} \simeq D_z$.

Comme en 6.5, on définit $Z \in \mathfrak{t}^{mod}_{reg}$ relatif à z_F et $\tilde{z}$ et, de façon analogue, $Z^\sharp \in \mathfrak{t}'^{mod}_{reg}$ relatif à $z^\sharp_F$ et $\tilde{z}^\sharp$. On a $Z = i_\psi(Z^\sharp)$. Soit $d' \in D'$ et $X^\sharp \in \mathfrak{g}'_{d'} \cap C(z^\sharp_F)$. Posons $d = \psi_{D'}(d')$ et $X = i_{\psi,d'}(X^\sharp)$. Fixons $g' \in G'^{mod}$ tel que $Ad(g') \circ \xi_{d'}(X^\sharp) = Z^\sharp$. D'après les définitions et ce qui précède, l'image par l'application $cl(z^\sharp_F) \xrightarrow{\delta'_{cl}} D_{z^\sharp} \to D_z$ de la classe de conjugaison de $X^\sharp$ est la classe du cocycle, à valeurs dans $T^{mod}_{\tilde{z}}$:

$$(4) \quad \gamma \mapsto \psi_{\tilde{z}}^{-1} \circ i_\psi \left(g' d'_F(\gamma) \gamma(g')^{-1} n_{Z^\sharp}(\gamma)^{-1} a_{Z^\sharp}(\gamma)^{-1} \right).$$

D'après la construction de 4.12, il existe $h \in G^{mod}$ tel que :

$$\xi_d \circ i_{\psi,d'} = Ad(h) \circ i_\psi \circ \xi_{d'}$$

et, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$(5) \quad d_F(\gamma) = h i_\psi \circ d'_F(\gamma) n_{\psi,F}(\gamma) \gamma(h)^{-1}.$$

Posons $g = i_\psi(g')h^{-1}$. on vérifie que $Ad(g) \circ \xi_d(X) = Z$. D'après les définitions, l'image par δ_{cl} de la classe de conjugaison de X est la classe du cocycle :

$$(6) \quad \gamma \mapsto \psi_{\tilde{z}}^{-1}\left(gd_F(\gamma)\gamma(g)^{-1}n_Z(\gamma)^{-1}a_Z(\gamma)^{-1}\right).$$

Pour démontrer le lemme, on doit prouver que les cocycles (4) et (6) sont cohomologues. Posons $T^{mod}_{\tilde{z},1} = \psi_{\tilde{z}}^{-1}(T_1^{mod})$, cf. 1.7. Comme au lemme 1.7, on a $H^1(\Gamma, T^{mod}_{\tilde{z},1}) = \{0\}$. Il suffit de prouver que les images dans $T^{mod}_{\tilde{z}}/T^{mod}_{\tilde{z},1}$ des termes (4) et (6) sont égales. En utilisant (5) ci-dessus et 4.7(1), on vérifie l'égalité :

$$gd_F(\gamma)\gamma(g)^{-1} = i_\psi(g'd'_F(\gamma)\gamma(g')^{-1})n_{\psi,F}(\gamma).$$

Il suffit alors de prouver que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, les termes :

$$i_\psi(a_{Z^\sharp}(\gamma)n_{Z^\sharp}(\gamma)) \text{ et } a_Z(\gamma)n_Z(\gamma)n_{\psi,F}(\gamma)^{-1}$$

diffèrent par un élément de T_1^{mod}. Ces deux termes appartiennent à N^{mod}. Il s'agit de prouver que leurs images dans N_{red} par l'application red sont égales. Notons par un indice red les images des différents termes par cette application : $a_{Z,red}(\gamma) = red(a_Z(\gamma))$ etc... On a $n_{Z,red}(\gamma) = \bar{n}(w_{\tilde{z}}(\gamma))$, $n_{Z^\sharp,red}(\gamma) = \bar{n}'(w_{\tilde{z}^\sharp}(\gamma))$, $i_{\psi,red}(n_{Z^\sharp,red}(\gamma)) = \bar{n} \circ \psi(w_{\tilde{z}^\sharp}(\gamma))$. Rappelons que $n_\psi(\gamma) = z_\psi(\gamma)\bar{n}(w_\psi(\gamma))$. Grâce à (3) où, comme on l'a remarqué, les longueurs s'ajoutent, on a l'égalité :

$$\bar{n}(w_{\tilde{z}}(\gamma) = \bar{n} \circ \psi(w_{\tilde{z}^\sharp}(\gamma))\bar{n}(w_\psi(\gamma)).$$

Alors :

$$a_{Z,red}(\gamma)n_{Z,red}(\gamma)n_\psi(\gamma)^{-1} = a_{Z,red}(\gamma)i_{\psi,red}(n_{Z^\sharp,red}(\gamma))z_\psi(\gamma)^{-1}.$$

Grâce au lemme 4.6(ii), ce terme est aussi égal à :

$$a_{Z,red}(\gamma)z_\psi(\gamma)^{-1}i_{\psi,red}(n_{Z^\sharp,red}(\gamma)).$$

Il nous reste seulement à démontrer l'égalité :

$$(7) \quad a_{Z,red}(\gamma)z_\psi(\gamma)^{-1} = i_{\psi,red}(a_{Z^\sharp,red}(\gamma)).$$

Fixons γ, posons $w_0 = w_\psi(\gamma)$, $w = w_{\tilde{z}}(\gamma)$, $w' = \psi(w_{\tilde{z}^\sharp}(\gamma))$. Par construction, les trois termes intervenant dans (7) sont des produits de termes $\check{\alpha}(a_\alpha)$, où $\alpha \in \Sigma$, $\alpha > 0$, les a_α étant des éléments de $\mathbb{G}_{m,red}$. Plus précisément :

- dans $a_{Z,red}(\gamma)$, les α vérifient $w^{-1}(\alpha) < 0$ et $a_\alpha = red \circ \alpha(Z)$, où red est cette fois l'homomorphisme de $F^{mod,\times}$ dans $\mathbb{G}_{m,red}$;

- dans $i_{\psi,red}(a_{Z^\sharp,red}(\gamma))$, les α vérifient $w'^{-1}(\alpha) < 0$ et $a_\alpha = red \circ \alpha \circ i_\psi(Z^\sharp) = red \circ \alpha(Z)$;

- dans $z_\psi(\gamma)$, les α vérifient $w_0^{-1}(\alpha) < 0$ et $a_\alpha = (r, \alpha(\bar{Z}))$, où $\bar{Z} = \psi(\bar{Z}')$ est identifié à un élément de $\bar{\mathfrak{t}}$.

En utilisant encore (3), où les longueurs s'ajoutent, on voit que l'ensemble des $\alpha > 0$ tels que $w^{-1}(\alpha) < 0$ est réunion disjointe de l'ensemble des $\alpha > 0$ tels que $w'^{-1}(\alpha) < 0$ et de l'image par w' de l'ensemble des $\alpha > 0$ tels que $w_0^{-1}(\alpha) < 0$. On obtient :

$$a_{Z,red}(\gamma) = i_{\psi,red}(a_{Z^\sharp,red}(\gamma)) \prod_{\alpha>0, w_0^{-1}(\alpha)<0} w'(\check{\alpha})(red \circ w'(\alpha)(Z)).$$

Puisque $\tilde{\zeta}(Z) = \tilde{z}$, on a $red \circ \beta(Z) = (r, \beta(\bar{Z}))$ pour tout $\beta \in \Sigma \setminus \psi(\Sigma')$. Soit $\alpha > 0$ tel que $w_0^{-1}(\alpha) < 0$. D'après 4.6(1), on a $\alpha \notin \psi(\Sigma')$ donc aussi $w'(\alpha) \notin \psi(\Sigma')$. Alors $red \circ w'(\alpha)(Z) = (r, w'(\alpha)(\bar{Z}))$. Puisque $\bar{Z}$ est invariant par $i_\psi(W')$, ce terme est aussi égal à $(r, \alpha(\bar{Z}))$. On obtient l'égalité :

$$a_{Z,red}(\gamma) = i_{\psi,red}(a_{Z^\sharp,red}(\gamma))w'(z_\psi(\gamma)).$$

Grâce au lemme 4.6(ii), $z_\psi(\gamma)$ est invariant par w' et on en déduit (7). Cela achève la démonstration. □

7 Le théorème principal

7.1

Soit $F \in CL_q$. Pour $d \in D$, on a défini en 3.3 les espaces $\mathcal{S}^d$ et $C_c^\infty(\mathfrak{g}_d)$ et l'application linéaire :

$$rea_F : \mathcal{S}^d \to C_c^\infty(\mathfrak{g}_d).$$

On pose :

$$\mathcal{S} = \oplus_{d\in D}\mathcal{S}^d,\ C_c^\infty(\mathfrak{g}_D) = \oplus_{d\in D}C_c^\infty(\mathfrak{g}_d).$$

La somme des applications rea_F définit une application linéaire :

$$rea_F : \mathcal{S} \to C_c^\infty(\mathfrak{g}_D).$$

On peut considérer les éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$ comme des fonctions sur l'ensemble $\mathfrak{g}_D$. Pour $X \in \mathfrak{g}_{D,reg}$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$, on pose :

$$J^{G_D}(X, f) = J^{G_d}(X, f_d),$$

où d est l'unique élément de D tel que $X \in \mathfrak{g}_d$ et f_d est la composante de f dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}_d)$.

7.2

Théorème : *Soient $z \in \mathcal{Z}$ et $\boldsymbol{\delta} \in D_z$. Il existe une forme linéaire $J^{\mathcal{D}}(z, \boldsymbol{\delta}, .)$ sur $\mathcal{S}$ vérifiant la condition suivante. Soient $F \in CL_q$, $z_F \in \mathcal{Z}_F$, $X \in C(z_F)$ et $\varphi \in \mathcal{S}$. Supposons $\zeta(z_F) = z$ et $\delta(X) = \boldsymbol{\delta}$. Alors on a l'égalité :*

$$J^{G_D}(X, rea_F(\varphi)) = J^{\mathcal{D}}(z, \boldsymbol{\delta}, \varphi).$$

Preuve. A z est associé un entier k tel que tout relèvement de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}$ soit de la forme $(\bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_k; r_1, ..., r_k)$. On note cet entier $k(z)$. Si $k(z) \geq 1$ (i.e. $z \in \mathcal{Z}_\bullet$), il est de même associé à z la suite $r_1, ..., r_{k(z)}$ ci-dessus. On pose $r(z) = r_1$.

Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier $k(z)$. Précisément, pour k fixé, on suppose le théorème vrai pour toutes les données $\mathcal{D}'$, z', $\boldsymbol{\delta}'$ telles que $rang(\mathcal{D}') \leq rang(\mathcal{D})$ et $k(z') < k$. On suppose désormais $k(z) = k$.

Traitons le cas $k = 0$. Alors z est vide. Un tel élément n'existe que si $\mathcal{D}$ est la donnée d'un tore. On a $D_z = D$. Soit $F \in CL_q$. On a $\mathcal{Z}_F = \mathfrak{t} = \mathfrak{g}$ et l'unique élément $z_F \in \mathcal{Z}_F$ tel que $\zeta(z_F) = z$ est $z_F = 0$. L'unique élément $X \in C(z_F)$ tel que $\delta(X) = \boldsymbol{\delta}$ est l'élément 0 de $\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\delta}}$. Soit $\varphi=\sum_{d\in D}\varphi_d\in\mathcal{S}$, avec $\varphi_d\in\mathcal{S}_d$ pour tout d. Posons $f_d=rea_F(\varphi_d)\in C_c^\infty(\mathfrak{g}_d)$. On a alors l'égalité :

$$J^{G_D}(X,rea_F(\varphi))=f_{\boldsymbol{\delta}}(0).$$

Définissons sur chaque $\mathcal{S}^d$ l'application linéaire $\varphi'\to\varphi'(0)$: si $\phi\in\Phi^d$ et $\varphi'\in\mathcal{S}(\phi)$, $\varphi'(0)$ est la valeur de φ' en $0\in\bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$. On a alors l'égalité $f_d(0)=\varphi_d(0)$. Il suffit de poser :

$$J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},\varphi)=\varphi_{\boldsymbol{\delta}}(0)$$

pour satisfaire aux conditions de l'énoncé.

On suppose désormais $k\geq 1$. On peut fixer $d\in D$, $\phi\in\Phi^d$ et se contenter de définir $J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},.)$ sur $\mathcal{S}(\phi)\subseteq\mathcal{S}^d\subseteq\mathcal{S}$. On a :

(1) si $d\neq\psi_{D_z}(\boldsymbol{\delta})$, la forme linéaire $J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},.)=0$ sur $\mathcal{S}(\phi)$ satisfait la condition de l'énoncé.

En effet, d'après le lemme 6.5(i), pour tous F, z_F, X comme dans l'énoncé, on a $X\in G_{\psi_{D_z}(\boldsymbol{\delta})}$, donc $J^{G_D}(X,rea_F(\varphi))=0$ pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\phi)$ si $d\neq\psi_{D_z}(\boldsymbol{\delta})$.

On suppose désormais $d=\psi_{D_z}(\boldsymbol{\delta})$. On a défini $r(\phi)\in\mathbb{Z}_{(p)}$. On a :

(2) Si $r(z)<r(\phi)$, la forme linéaire $J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},.)=0$ sur $\mathcal{S}(\phi)$ satisfait la condition de l'énoncé.

En effet, soient F, z_F, X comme dans l'énoncé et $\varphi\in\mathcal{S}(\phi)$. Pour tout élément $X'\in\mathfrak{g}_d$ conjugué à X, on a $r(X')=r(z)$ donc $X'\in\mathfrak{g}_{d,r(z)}$ mais $X'\notin\mathfrak{g}_{d,r(z)+}$. Or, par construction, $rea_F(\varphi)$ est à support dans $\mathfrak{g}_{d,r(\phi)}\subseteq\mathfrak{g}_{d,r(z)+}$. Donc $rea_F(\varphi)$ s'annule sur la classe de conjugaison de X et $J^{G_D}(X,rea_F(\varphi))=0$.

On suppose désormais $r(z)\geq r(\phi)$. D'après le lemme 2.4.2 et la remarque de 6.1, on peut fixer $e\in P$, indépendant de nos données, tel que $r(z)$ et $r(\phi)$ appartiennent tous deux à $\frac{1}{e}\mathbb{Z}$. Il est légitime de raisonner par récurrence sur $r(z)-r(\phi)$. Précisément, on va supposer qu'une forme linéaire $J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},.)$ vérifiant les conditions de l'énoncé est définie sur $\mathcal{S}(\phi')$ pour tout $\phi'\in\Phi^d$ tel que $r(\phi')>r(\phi)$.

Supposons d'abord $r(z)=r(\phi)$. Notons b l'image de z dans $\mathcal{B}$. Associons à b un élément $(\mathcal{D}',\psi,r,\bar{Z}')$ de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$. On a $r=r(z)$. Posons $z'=\beta(z)\in\mathcal{Z}'$, identifions $\boldsymbol{\delta}$ à un élément de $D_{z'}$, posons $d'=\psi_{D_{z'}}(\boldsymbol{\delta})\in D'$. On a $\psi_{D'}(d')=d$. Introduisons l'application linéaire $\ell_{\mathcal{D}',r}:\mathcal{S}_r^d\to\mathcal{S}_r'^{d'}$ de la proposition 5.3. Remarquons que $\mathcal{S}(\phi)\subseteq\mathcal{S}_r^d$. D'autre part, $k(z')=k-1$ et l'hypothèse de récurrence nous fournit une forme linéaire $J^{\mathcal{D}'}(z',\boldsymbol{\delta},.)$ sur $\mathcal{S}'$. Pour $\varphi\in\mathcal{S}(\phi)$, posons $J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},\varphi)=J^{\mathcal{D}'}(z',\boldsymbol{\delta},\ell_{\mathcal{D}',r}(\varphi))$. Montrons que cette définition satisfait aux conditions de l'énoncé. Soient F, z_F et X comme dans l'énoncé. Soit $(Z',z_F')\in\mathfrak{t}'_{cent|\bar{Z}'}\times\zeta_{der}'^{-1}(z')$ l'image de z_F par la composée des bijections (1) et (2) de 6.6. Soit $X'\in C(z_F')$ tel que $\delta'(X')=\boldsymbol{\delta}$. Comme ci-dessus, on a $X'\in\mathfrak{g}'_{d'}$. D'après le lemme 6.6.2, X appartient à la même classe de conjugaison que $i_{\psi,d'}(\xi_{d'}^{-1}(Z')+X')$. On peut supposer ces deux termes égaux. On peut appliquer au couple $(\xi_{d'}^{-1}(Z'),X')$ la proposition 5.3, qui entraîne l'égalité :

$$J^{G_d}(X,rea_F(\varphi))=J^{G_{d'}}(X',rea'_F\circ\ell_{\mathcal{D}',r}(\varphi)).$$

Par l'hypothèse de récurrence, le membre de droite est égal à $J^{\mathcal{D}'}(z',\boldsymbol{\delta},\ell_{\mathcal{D}',r}(\varphi))$, c'est-à-dire, d'après notre définition, à $J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},\varphi)$. D'où l'égalité cherchée.

Supposons maintenant $r(z)>r(\phi)$. Introduisons l'application linéaire $\ell_{r(\phi)}:\mathcal{S}_{r(\phi)}^d\to\mathcal{S}_{r(\phi)+}^d$ de la proposition 3.4. Son image est contenue dans une somme finie d'espaces $\mathcal{S}(\phi')$ pour $\phi'\in\Phi^d$ tel que $r(\phi')>r(\phi)$. L'hypothèse de récurrence portant sur $r(z)-r(\phi)$ nous fournit une forme linéaire $J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},.)$ définie sur l'image de $\ell_{r(\phi)}$. Pour $\varphi\in\mathcal{S}(\phi)$, posons $J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},\varphi)=J^{\mathcal{D}}(z,\boldsymbol{\delta},\ell_r(\varphi))$. On vérifie grâce à la proposition 3.4 que cette définition convient. $\square$

7.3

Le théorème permet de comparer des intégrales orbitales relatives à des groupes définis sur des corps de base différents. Mais il conserve une signification même sur un corps de base fixé. Il affirme alors une propriété de constance locale des intégrales orbitales des fonctions appartenant à l'image de l'application rea_F. Exprimons-la comme un corollaire, bien qu'elle ne soit qu'un cas particulier du théorème.

Corollaire 7.3 : *Soient $F \in CL_q$ et X, $X' \in \mathfrak{g}_{D,reg}$. Notons z_F, resp. z'_F, l'élément de $\mathcal{Z}_F$ qui paramètre la classe de conjugaison stable de X, resp. X'. Supposons $\zeta(z_F) = \zeta(z'_F)$ et, en notant z cet élément, supposons que, dans D_z, on a l'égalité $\delta(X) = \delta(X')$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on a l'égalité :*

$$J^{G_D}(X, rea_F(\varphi)) = J^{G_D}(X', rea_F(\varphi)).$$

8 Endoscopie

8.1

Considérons les données suivantes :

(i) $\mathcal{D}_H = (X^*_H, \Sigma_H, \Delta_H, X_{*H}, \check{\Sigma}_H, \check{\Delta}_H)$ est une donnée de racines munie d'une actioon de Γ ;

(ii) η est un couple d'isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules $X^*_H \to X^*$, $X_{*H} \to X_*$, en dualité. On note aussi η chacun de ces isomorphismes. On impose $\eta(\Sigma_H) \subseteq \Sigma$, $\eta(\check{\Sigma}_H) \subseteq \check{\Sigma}$. On impose aussi que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un élément de W, nécessairement unique, que l'on note $w_\eta(\gamma)$, tel que $\eta \circ \gamma = w_\eta(\gamma) \circ \gamma \circ \eta$.

Posons $\hat{T}_H = X^*_H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$, $\hat{Z}_H = \{t \in \hat{T}_H; \forall \alpha \in \Sigma_H, \check{\alpha}(t) = 1\}$. De l'action de Γ sur X^*_H se déduisent des actions sur $\hat{T}_H$ et $\hat{Z}_H$.

(iii) $s \in \hat{Z}_H^\Gamma$. On impose que, pour $\alpha \in \Sigma \setminus \eta(\Sigma_H)$, on a $\eta^{-1}(\check{\alpha})(s) \neq 1$.

Le triplet $(\mathcal{D}_H, \eta, s)$ est appelé donnée endoscopique de $\mathcal{D}$.

Soient $(\mathcal{D}_H, \eta, s)$ et $(\mathcal{D}'_H, \eta', s')$ deux données endoscopiques de $\mathcal{D}$. Un isomorphisme entre ces données est un couple (f, w), où $f : \mathcal{D}_H \to \mathcal{D}'_H$ est un isomorphisme équivariant pour les actions de Γ et w est un élément de W, ce couple vérifiant les relations :

$$(1) \qquad \eta' \circ f = w \circ \eta, \quad \hat{f}(s) \in s' \hat{Z}'^{\Gamma,0}_H.$$

On a noté ici $\hat{f} : \hat{T}_H \to \hat{T}'_H$ l'isomorphisme déduit fonctoriellement de f et $\hat{Z}'^{\Gamma,0}_H$ la composante neutre de $\hat{Z}'^{\Gamma}_H$.

Soit $(\mathcal{D}_H, \eta, s)$ une donnée endoscopique de $\mathcal{D}$. Notons $\hat{\mathcal{D}}$ la donnée $(X_*, \check{\Sigma}, \check{\Delta}, X^*, \Sigma, \Delta)$. De cette donnée se déduit un groupe complexe $\hat{G}$ muni d'une action de Γ préservant un épinglage. Définissons de même $\hat{\mathcal{D}}_H$, dont se déduit un groupe $\hat{H}$. De η se déduit un plongement $\hat{\eta} : \hat{H} \to \hat{G}$ et s s'interprète comme un élément du centre de $\hat{H}$, fixé par Γ. Soit $F \in CL_q$, introduisons les groupes $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sur F associés à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_H$. Le triplet $(\mathbf{H}, \hat{\eta}, s)$ est un triplet endoscopique de $\mathbf{G}$ au sens habituel. Plus généralement, c'est un triplet endoscopique de $\mathbf{G}_d$ pour tout $d \in D$. Par contre, la notion d'isomorphisme introduite ci-dessus est plus fine que la notion usuelle. D'habitude, on remplace la seconde condition de (1) par $\hat{f}(s) \in s' \hat{Z}'^{\Gamma,0}_H \hat{\eta}^{-1}(\hat{Z}_G^\Gamma)$. Notre notion est adaptée à la considération simultanée de tous les groupes $\mathbf{G}_d$.

8.2

On fixe pour tout le chapitre 8 une donnée endoscopique $(\mathcal{D}_H, \eta, s)$ de $\mathcal{D}$. On note encore η les isomorphismes qui se déduisent fonctoriellement de la donnée η. On construit les différents objets attachés à la donnée $\mathcal{D}_H$ et on les affecte d'un indice H.

Pour tout $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, il y a un isomorphisme $\eta : \bar{\mathfrak{t}}_H(r) \to \bar{\mathfrak{t}}(r)$, qui n'est pas équivariant, en général, pour les actions de Γ. Notons $\tilde{\mathcal{Y}}$ l'ensemble des familles :

$$(\bar{Y}_1, ..., \bar{Y}_k; r_1, ..., r_k)$$

telles que :

- pour tout $i = 1, ..., k$, on ait $r_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\bar{Y}_i \in \bar{\mathfrak{t}}_H(r_i)$;
- la famille $(\eta(\bar{Y}_1), ..., \eta(\bar{Y}_k); r_1, ..., r_k)$ appartienne à $\tilde{\mathcal{Z}}$.

On note :

$$\begin{array}{cccc} \eta_{\tilde{\mathcal{Y}}} : & \tilde{\mathcal{Y}} & \to & \tilde{\mathcal{Z}} \\ & (\bar{Y}_1, ..., \bar{Y}_k; r_1, ..., r_k) & \mapsto & (\eta(\bar{Y}_1), ..., \eta(\bar{Y}_k); r_1, ..., r_k) \end{array}$$

C'est une bijection, qui n'est pas, en général, équivariante pour les actions de Γ. Par contre, l'application de $\tilde{\mathcal{Y}}/W_H$ dans $\tilde{\mathcal{Z}}/W$ qui s'en déduit l'est. On pose $\mathcal{Y} = (\tilde{\mathcal{Y}}/W_H)^\Gamma$ et on déduit de $\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ une application $\eta_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ qui n'est en général ni injective, ni surjective.

Nous allons définir une application $\tilde{\epsilon} : \tilde{\mathcal{Y}} \to \tilde{\mathcal{Z}}_H$. Soit $\tilde{y} = (\bar{Y}_1, ..., \bar{Y}_k; r_1, ..., r_k) \in \tilde{\mathcal{Y}}$. Si $y = \emptyset$, i.e. $k = 0$, on pose $\tilde{\epsilon}(y) = \emptyset$. Supposons $k \geq 1$. Pour $i = 1, ..., k$, notons $\Sigma_H(i)$ l'ensemble des $\alpha \in \Sigma_H$ tels que $\alpha(\bar{Y}_j) = 0$ pour tout $j = 1, ..., i$. C'est un sous-système de racines de Σ_H. On a les inclusions :

$$\Sigma_H \supseteq \Sigma_H(1) \supseteq \Sigma_H(2) \supseteq ... \supseteq \Sigma_H(k) = \emptyset.$$

Considérons l'ensemble d'entiers :

$$\{1\} \cup \{i \in \{2, ..., k\}; \Sigma_H(i-1) \supsetneq \Sigma_H(i)\}.$$

Notons ses éléments dans l'ordre croissant $i_1 < i_2 < ... i_h$. On a $i_1 = 1$. Pour $j = 1, ..., h$, posons $\Sigma_{H,j} = \Sigma_H(i_j)$. De façon analogue aux décompositions introduites en 6.4, on a pour tout $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ une décomposition :

$$\bar{\mathfrak{t}}_H(r) = \bar{\mathfrak{t}}_{H,\Sigma_{H,j}-cent}(r) \oplus \bar{\mathfrak{t}}_{H,\Sigma_{H,j}-der}(r).$$

On pose $\bar{Z}_1 = \bar{Y}_1$. Pour $j = 2, ..., h$, notons $\bar{Z}_j$ la projection de $\bar{Y}_{i_j}$ sur $\bar{\mathfrak{t}}_{H,\Sigma_{H,j-1}-der}(r_{i_j})$ relative à la décomposition ci-dessus. Montrons que la famille :

$$(1) \quad (\bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_h; r_{i_1}, ..., r_{i_h})$$

appartient à $\tilde{\mathcal{Z}}_H$. Les conditions (i) et (ii) de 6.2 sont évidentes ainsi que la première partie de (iii). Montrons que les ensembles $\Sigma_{H,j}$ que l'on vient de définir sont ceux de 6.2, c'est-à-dire :

$$(2) \quad \Sigma_{H,j} = \{\alpha \in \Sigma_H; \forall m = 1, ..., j, \alpha(\bar{Z}_m) = 0\}.$$

On le démontre par récurrence sur j. C'est immédiat pour $j = 1$. Supposons $j \geq 2$ et l'assertion démontrée pour $j-1$. Par définition :

$$\Sigma_{H,j} = \{\alpha \in \Sigma_{H,j-1}; \forall m = i_{j-1}+1, ..., i_j, \alpha(\bar{Y}_m) = 0\}.$$

Puisque $\Sigma_H(i_{j-1}) = \Sigma_H(i_{j-1}+1) = ... = \Sigma_H(i_j-1)$, on a $\alpha(\bar{Y}_m) = 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{H,j-1}$ et tout $m = i_{j-1}+1, ..., i_j - 1$. On a donc simplement :

$$\Sigma_{H,j} = \{\alpha \in \Sigma_{H,j-1}; \alpha(\bar{Y}_{i_j}) = 0\}.$$

Par définition, $\bar{Y}_{i_j} - \bar{Z}_j$ appartient à $\bar{\mathfrak{t}}_{H,\Sigma_{H,j-1}-cent}(r_{i_j})$. Ce terme est donc annulé par tout $\alpha \in \Sigma_{H,j-1}$ et on peut remplacer la condition $\alpha(\bar{Y}_{i_j}) = 0$ ci-dessus par $\alpha(\bar{Z}_j) = 0$. D'où :

$$\Sigma_{H,j} = \{\alpha \in \Sigma_{H,j-1}; \alpha(\bar{Z}_j) = 0\}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient (2).

L'égalité (2) et la stricte décroissance de la suite :

$$\Sigma_{H,1} \supsetneq \Sigma_{H,2} \supsetneq ... \supsetneq \Sigma_{H,h} = \emptyset$$

entraîne la deuxième partie de (iii) ainsi que (iv) et (v) de 6.2.

Notons $\tilde{\epsilon}(\tilde{y})$ la famille (1). Cela définit l'application $\tilde{\epsilon}$.

Cette application est équivariante pour l'action de $W_H \rtimes \Gamma$. Elle se descend en une application :

$$\epsilon : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}_H.$$

On a construit deux applications :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{Y} & & \\ & \epsilon \swarrow & & \searrow \eta_{\mathcal{Y}} & \\ \mathcal{Z}_H & & & & \mathcal{Z} \end{array}$$

Soit $y \in \mathcal{Y}$, posons $z = \eta_{\mathcal{Y}}(y)$, $z_H = \epsilon(y)$. On a un isomorphisme naturel :

$$(3) \quad D_{z_H} \simeq D_z.$$

En effet, fixons un relèvement $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Y}}$, posons $\tilde{z} = \eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}(\tilde{y})$, $\tilde{z}_H = \tilde{\epsilon}(\tilde{y})$. Pour $\gamma \in \Gamma$, soit $w_{\tilde{y}}(\gamma)$ un élément de W_H tel que $w_{\tilde{y}}(\gamma)\gamma(\tilde{y}) = \tilde{y}$. Puisque $\tilde{\epsilon}$ est équivariante pour les actions de $W_H \rtimes \Gamma$, on a $w_{\tilde{y}}(\gamma) = w_{\tilde{z}_H}(\gamma)$. On a l'égalité $\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}} \circ \gamma = w_\eta(\gamma) \circ \gamma \circ \eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}$. On en déduit $w_{\tilde{z}}(\gamma) = \eta(w_{\tilde{y}}(\gamma))w_\eta(\gamma)$. Mais alors, l'application $\psi_{\tilde{z}}^{-1} \circ \eta \circ \psi_{\tilde{z}_H} : X_{*H,\tilde{z}_H} \to X_{*,\tilde{z}}$ est équivariante pour les actions de Γ. On en déduit un isomorphisme $D_{\tilde{z}_H} \to D_{\tilde{z}}$, puis l'isomorphisme (3). On vérifie que ce dernier ne dépend pas du choix de $\tilde{y}$.

Soit $z_H \in \mathcal{Z}_H$. Alors s définit un élément s_{z_H} de $Hom(D_{z_H}, \mathbb{C}^\times)$. En effet, choisissons un relèvement $\tilde{z}_H$ de z_H dans $\tilde{\mathcal{Z}}_H$. Notons $X^*_{H,\tilde{z}_H}$ le Γ-module dual de $X_{*H,\tilde{z}_H}$. De $\psi_{\tilde{z}_H}$ se déduit un isomorphisme :

$$\hat{\psi}_{\tilde{z}_H} : \hat{T}_H = X^*_H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times \to X^*_{H,\tilde{z}_H} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times.$$

La restriction de $\hat{\psi}_{\tilde{z}_H}$ à $\hat{Z}_H$ est équivariante pour les actions de Γ. Alors $\hat{\psi}_{\tilde{z}_H}(s) \in (X^*_{H,\tilde{z}_H} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times)^\Gamma$. Ce groupe s'envoie naturellement dans $Hom(D_{\tilde{z}_H}, \mathbb{C}^\times)$, parce que $D_{\tilde{z}_H} = (X_{*H,\tilde{z}_H})_{\Gamma,tors}$. Enfin, $Hom(D_{\tilde{z}_H}, \mathbb{C}^\times)$ s'identifie à $Hom(D_{z_H}, \mathbb{C}^\times)$. On note s_{z_H} l'image de $\hat{\psi}_{\tilde{z}_H}(s)$ par cette suite d'applications. On vérifie, toujours parce que s est central, que cette image ne dépend pas du choix de $\tilde{z}_H$.

Revenons à la situation précédente où $y \in \mathcal{Y}$, $z = \eta_{\mathcal{Y}}(y)$, $z_H = \epsilon(y)$. Grâce à (3), l'élément s_{z_H} que l'on vient de construire s'identifie à un élément de $Hom(D_z, \mathbb{C}^\times)$ que l'on note s_y.

8.3

On fixe jusqu'à la fin du chapitre 8 un corps $F \in CL_q$. De η se déduit un homomorphisme $\mathfrak{t}_H^{mod} \to \mathfrak{t}^{mod}$. On note $\mathfrak{t}_{H,G-reg}^{mod}$ l'image réciproque de $\mathfrak{t}_{reg}^{mod}$ et :

$$\mathcal{Z}_{H,G-reg,F} = (\mathfrak{t}_{H,G-reg}^{mod}/W_H)^\Gamma.$$

Cet ensemble est inclus dans $\mathcal{Z}_{H,F}$. L'homomorphisme $\mathfrak{t}_H^{mod} \to \mathfrak{t}^{mod}$ n'est pas équivariant pour les actions de Γ mais l'application déduite $\mathfrak{t}_{H,G-reg}^{mod}/W_H \to \mathfrak{t}_{reg}^{mod}/W$ l'est. On en déduit une application :

$$\mathcal{Z}_{H,G-reg,F} \stackrel{\eta_{\mathcal{Z},F}}{\to} \mathcal{Z}_F.$$

Définissons $\tilde{\tau} : \mathfrak{t}_{H,G-reg}^{mod} \to \tilde{\mathcal{Y}}$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{t}_{H,G-reg}^{mod} & \to & \mathfrak{t}_{reg}^{mod} \\ \downarrow \tilde{\tau} & & \downarrow \tilde{\zeta} \\ \tilde{\mathcal{Y}} & \stackrel{\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}}{\to} & \tilde{\mathcal{Z}} \end{array}$$

C'est possible puisque $\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ est bijectif. On vérifie que $\tilde{\tau}$ est équivariant pour les actions de $W_H \rtimes \Gamma$. On en déduit une application :

$$\tau : \mathcal{Z}_{H,G-reg,F} \to \mathcal{Y}.$$

Lemme 8.3.1 : *Les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{H,G-reg,F} & \stackrel{\tau}{\to} & \mathcal{Y} \\ \downarrow \eta_{\mathcal{Z},F} & & \downarrow \eta_{\mathcal{Y}} \\ \mathcal{Z}_F & \stackrel{\zeta}{\to} & \mathcal{Z} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{H,G-reg,F} & \stackrel{\tau}{\to} & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ \mathcal{Z}_{H,F} & \stackrel{\zeta_H}{\to} & \mathcal{Z}_H \end{array}$$

Preuve. La commutativité du premier est immédiate. Soit $Y \in \mathfrak{t}_{H,G-reg}^{mod}$, posons $X = \eta(Y) \in \mathfrak{t}_{reg}^{mod}$. Reprenons la construction de l'élément $\tilde{\zeta}(X) = (\bar{X}_1, ..., \bar{X}_k; r_1, ..., r_k)$, cf.6.4. On y a introduit des ensembles $\Sigma_i \subsetneq \Sigma$ pour $i = 1, ..., k$ et une décomposition $X = X_1 + ... + X_k$. Pour $i = 1, ..., k$, posons $\bar{Y}_i = \eta^{-1}(\bar{X}_i)$. Posons $\tilde{y} = (\bar{Y}_1, ..., \bar{Y}_k; r_1, ..., r_k) \in \tilde{\mathcal{Y}}$. On a $\tilde{y} = \tilde{\tau}(Y)$. Construisons $\tilde{\epsilon}(\tilde{y})$ comme en 8.2. On a construit dans ce paragraphe une suite $i_1 < ... < i_h$ et des ensembles $\Sigma_H(i)$ pour $i = 1, ...k$ et $\Sigma_{H,j}$ pour $j = 1, ..., h$. On a :

(2) $r(X) = r_{i_1} < r_{i_2} < ... < r_{i_h}$;

(3) $\Sigma_H \supseteq \Sigma_{H,1} \supsetneq \Sigma_{H,2} \supsetneq ... \supsetneq \Sigma_{H,h} = \emptyset$.

Par définition, $\Sigma_H(i) = \Sigma_H \cap \eta^{-1}(\Sigma_i)$ pour tout $i = 1, ..., k$. Soit $j \in \{1, ..., h-1\}$. Pour $\alpha \in \Sigma_{H,j} \setminus \Sigma_{H,j+1}$, on a $\alpha \in \Sigma_H(i_{j+1} - 1) \setminus \Sigma_H(i_{j+1})$ donc $\eta(\alpha) \in \Sigma_{i_{j+1}-1} \setminus \Sigma_{i_{j+1}}$. Cela entraîne $val(\eta(\alpha)(X)) = r_{i_{j+1}}$ ou encore $val(\alpha(Y)) = r_{i_{j+1}}$. On a obtenu :

(4) pour $j = 1, ..., h-1$ et $\alpha \in \Sigma_{H,j} \setminus \Sigma_{H,j+1}$, $val(\alpha(Y)) = r_{i_{j+1}}$.

De la même façon :

(5) pour $\alpha \in \Sigma_H \setminus \Sigma_{H,1}$, $val(\alpha(Y)) = r(X)$.

Remarquons que $r(X) = r(Y)$. Alors les propriétés (2) à (5) caractérisent les suites d'éléments de $\mathbb{Z}_{(p)}$ et de sous-systèmes de racines de Σ_H que l'on utilise pour construire comme en 6.4 l'élément $\tilde{\zeta}_H(Y)$. Cela montre déjà que $\tilde{\zeta}_H(Y)$ et $\tilde{\epsilon} \circ \tilde{\tau}(Y)$ sont tous deux de la forme :

$$\tilde{\zeta}_H(Y) = (\bar{U}_1, ..., \bar{U}_h; r_{i_1}, ..., r_{i_h}),$$

$$\tilde{\epsilon}\circ\tilde{\tau}(Y)=(\bar{Z}_1,...,\bar{Z}_h;r_{i_1},...,r_{i_h}).$$

Introduisons la décomposition :

$$\mathfrak{t}_H^{mod}=\mathfrak{t}_{H,\Sigma_{H,1}-cent}^{mod}\oplus(\mathfrak{t}_{H,\Sigma_{H,1}-der}^{mod}\cap\mathfrak{t}_{H,\Sigma_{H,2}-cent}^{mod})\oplus...\oplus(\mathfrak{t}_{H,\Sigma_{H,h-1}-der}^{mod}\cap\mathfrak{t}_{H,\Sigma_{H,h}-cent}^{mod}).$$

Conformément à cette décomposition, écrivons :

$$Y=Y_1+...+Y_h$$

et, pour $i=1,...,k$,

$$\eta^{-1}(X_i)=Y_{i,1}+...+Y_{i,h}.$$

Par définition des ensembles $\Sigma_{H,j}$, on a $\eta^{-1}(X_i)\in\mathfrak{t}_{H,\Sigma_{H,j-1}-cent}^{mod}$ pour tout $j=2,...,h$ et tout $i<i_j$. Donc $Y_{i,m}=0$ pour $i<i_j$ et $m\geq j$. Puisque $Y=\sum_{i=1,...,k}\eta^{-1}(X_i)$, on en déduit :

(6) $Y_j=\sum_{i=i_j,...,k}Y_{i,j}$ pour tout $j=1,...,h$;

on en déduit également :

(7) $Y_{1,1}=\eta^{-1}(X_1)$;

(8) pour $j=2,...,h$, $Y_{i_j,j}$ est la projection de $\eta^{-1}(X_{i_j})$ sur $\mathfrak{t}_{H,\Sigma_{H,j-1}-der}^{mod}$.

Soit $j\in\{2,...,h\}$. Par définition, la j-ième composante $\bar{U}_j$ de $\tilde{\zeta}_H(Y)$ est la projection de $Y_j\in\mathfrak{t}_{H,r_{i_j}}^{mod}$ dans $\bar{\mathfrak{t}}_H(r_{i_j})$. Pour $i>i_j$, on a $Y_{i,j}\in\mathfrak{t}_{H,r_i}^{mod}\subseteq\mathfrak{t}_{H,r_{i_j}+}^{mod}$. Sa projection dans $\bar{\mathfrak{t}}_H(r_{i_j})$ est nulle. Grâce à (6), $\bar{U}_j$ est donc égal à la projection de $Y_{i_j,j}$ dans $\bar{\mathfrak{t}}_H(r_{i_j})$. Grâce à (8), c'est l'image de $\eta^{-1}(X_{i_j})$ par le chemin nord-est du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{t}_{H,r_{i_j}}^{mod}&\rightarrow&\mathfrak{t}_{H,\Sigma_{H,j-1}-der}^{mod}\cap\mathfrak{t}_{H,r_{i_j}}^{mod}\\ \downarrow&&\downarrow\\ \bar{\mathfrak{t}}_H(r_{i_j})&\rightarrow&\bar{\mathfrak{t}}_{H,\Sigma_{H,j-1}-der}(r_{i_j})\end{array}$$

Ce diagramme est commutatif. Par le parcours sud-ouest, $\eta^{-1}(X_{i_j})$ s'envoie successivement sur $\bar{Y}_{i_j}$ puis sur la composante $\bar{Z}_j$ de $\tilde{\epsilon}\circ\tilde{\tau}(Y)$. D'où l'égalité $\bar{U}_j=\bar{Z}_j$. On a supposé $j\geq 2$ mais, de façon analogue et en utilisant (7), on montre que $\bar{U}_1=\bar{Z}_1$. Cela prouve que $\tilde{\zeta}_H(Y)=\tilde{\epsilon}\circ\tilde{\tau}(Y)$ et le lemme. □

Lemme 8.3.2 : *L'application τ est surjective.*

Preuve. Soit $y\in\mathcal{Y}$. Posons $z=\eta_{\mathcal{Y}}(y)$. L'application ζ est surjective (lemme 6.6.1). Choisissons $z_F\in\mathcal{Z}_F$ tel que $\zeta(z_F)=z$. Choisissons des relèvements $\tilde{y}$ de y dans $\tilde{\mathcal{Y}}$, $\tilde{z}$ de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}$ et X de z_F dans $\mathfrak{t}_{reg}^{mod}$ de sorte que $\tilde{z}=\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}(\tilde{y})$ et $\tilde{\zeta}(X)=\tilde{z}$. Posons $Y=\eta^{-1}(X)\in\mathfrak{t}_H^{mod}$. Cet élément appartient évidemment à $\mathfrak{t}_{H,G-reg}^{mod}$ et son image par $\tilde{\tau}$ est $\tilde{y}$. Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que l'image de Y dans $\mathfrak{t}_{H,G-reg}^{mod}/W_H$ est fixe par Γ. Soit $\gamma\in\Gamma$. Parce que $\tilde{y}$ relève un élément de $\mathcal{Y}$, il existe $w\in W_H$ tel que $\gamma(\tilde{y})=w(\tilde{y})$. Ce w est d'ailleurs unique. Parce que $\tilde{\tau}$ est équivariant pour les actions de $W_H\rtimes\Gamma$, $\gamma(Y)$ et $w(Y)$ ont même image par $\tilde{\tau}$. De la commutativité du diagramme (1) résulte que $\eta(\gamma(Y))$ et $\eta(w(Y))$ ont même image par $\tilde{\zeta}$. Parce que X relève un élément de $\mathcal{Z}_F$, ces deux termes appartiennent à l'orbite de X pour l'action de W. Or la restriction de $\tilde{\zeta}$ à une telle orbite est injective (parce que les éléments de $\tilde{\mathcal{Z}}$ sont réguliers). Donc les deux termes ci-dessus sont égaux. D'où $\gamma(Y)=w(Y)$, ce qui achève la preuve. □

8.4

Soit $z_{H,F} \in \mathcal{Z}_{H,G-reg,F}$, posons $z_F = \eta_{\mathcal{Z},F}(z_{H,F})$. A z_F est associée une classe de conjugaison stable $C(z_F) \subseteq \mathfrak{g}_D$. Revenant à un point de vue plus habituel, à $z_{H,F}$ est associée une classe de conjugaison stable $C(z_{H,F}) \subseteq \mathfrak{h}$. Soient $Y \in C(z_{H,F})$ et $d \in D$. Langlands et Shelstad ont défini le facteur de transfert $\Delta_{G_d,H}(Y,.)$, qui est une fonction sur $\mathfrak{g}_d$, à support dans $C(z_F) \cap \mathfrak{g}_d$.

Remarques (1) Langlands et Shelstad ont défini ce facteur de transfert sur les groupes. Il se descend aux algèbres de Lie. Il y est d'ailleurs beaucoup plus simple.

(2) Nous supprimons de la définition le facteur Δ_{IV} que nous avons incorporé à la définition des intégrales orbitales.

(3) Le facteur de transfert n'est défini qu'à une constante près. Toutefois, il est canoniquement défini dans le cas d'un groupe quasi-déployé, moyennant le choix d'épinglages. Cette définition canonique s'étend à notre cas où on dispose d'un élément de $H^1(Gal(F^{sep}/F), \mathbf{G}_d)$ définissant le torseur intérieur ξ_d.

On note simplement $\Delta(z_{H,F},.)$ la fonction sur $C(z_F)$ dont, pour tout $d \in D$, la restriction à $C(z_F) \cap \mathfrak{g}_d$ est égale à $\Delta_{G_d,H}(Y,.)$. Ce facteur de transfert se calcule de la façon suivante. Posons $y = \tau(z_{H,F})$, $z = \zeta(z_F) = \eta_{\mathcal{Y}}(y)$. On a associé à y un élément $s_y \in Hom(D_z, \mathbb{C}^\times)$. Soit $X \in C(z_F)$. On a associé à X un élément $\delta(X) \in D_z$. On a l'égalité :

$$(1) \qquad \Delta(z_{H,F}, X) = s_y(\delta(X)^{-1}).$$

C'est étudié pour.

9 Transfert endoscopique

9.1

On fixe pour ce chapitre une donnée endoscopique $(\mathcal{D}_H, \eta, s)$ de $\mathcal{D}$. Pour $F \in CL_q$, $z_{H,F} \in \mathcal{Z}_{H,G-reg,F}$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$, on définit l'intégrale orbitale endoscopique :

$$J^{G_D,H}(z_{H,F}, f) = \sum_X \Delta(z_{H,F}, X) J^{G_D}(X, f),$$

où X parcourt un ensemble de représentants de $cl(\eta_{\mathcal{Z},F}(z_{H,F}))$ dans $\mathfrak{g}_D$.

Proposition 9.1 : *Soit $y \in \mathcal{Y}$. Il existe une forme linéaire $J^{\mathcal{D},\mathcal{D}_H}(y,.)$ sur $\mathcal{S}$ vérifiant la condition suivante. Soient $F \in CL_q$, $z_{H,F} \in \mathcal{Z}_{H,G-reg,F}$ et $\varphi \in \mathcal{S}$. Supposons $\tau(z_{H,F}) = y$. Alors on a l'égalité :*

$$J^{G_D,H}(z_{H,F}, rea_F(\varphi)) = J^{\mathcal{D},\mathcal{D}_H}(y, \varphi).$$

Preuve. Posons $z = \eta_{\mathcal{Y}}(y)$ et :

$$J^{\mathcal{D},\mathcal{D}_H}(y,.) = \sum_{\boldsymbol{\delta} \in D_z} s_y(\boldsymbol{\delta}^{-1}) J^{\mathcal{D}}(z, \boldsymbol{\delta},.).$$

Il résulte du théorème 7.2, de la relation 8.4(1) et des définitions que cette forme linéaire vérifie les conditions de l'énoncé. □

9.2

Le triplet $(\mathcal{D}_H, id, s)$ est une donnée endoscopique de $\mathcal{D}_H$. On peut lui appliquer les définitions et résultats précédents. En particulier, pour $F \in CL_q$, on définit :

$$\mathfrak{h}_{D_H} = \bigsqcup_{d \in D_H} \mathfrak{h}_d$$

et, pour $z_{H,F} \in \mathcal{Z}_{H,F}$, la forme linéaire $J^{H_{D_H},H}(z_{H,F}, .)$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{h}_{D_H})$.

Remarque. La notation manque de précision car elle ignore l'élément s dont dépend pourtant cette forme linéaire. En fait, remplacer s par 1 revient ici à multiplier cette forme linéaire par un scalaire sur chaque facteur $C_c^\infty(\mathfrak{h}_d)$.

Soient $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$ et $f_H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_{D_H})$. On dit que f_H est un transfert de f si et seulement si, pour tout $z_{H,F} \in \mathcal{Z}_{H,G-reg,F}$, on a l'égalité :

$$J^{H_{D_H},H}(z_{H,F}, f_H) = J^{G_D,H}(z_{H,F}, f).$$

Corollaire 9.2 : *Soient $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi_H \in \mathcal{S}_H$, F et F' deux éléments de CL_q. Supposons que $rea_{H,F}(\varphi_H)$ soit un transfert de $rea_F(\varphi)$. Alors $rea_{H,F'}(\varphi_H)$ est un transfert de $rea_{F'}(\varphi)$.*

Preuve. Pour $y \in \mathcal{Y}$, on dispose de la forme linéaire $J^{\mathcal{D},\mathcal{D}_H}(y, .)$ sur $\mathcal{S}$ de la proposition 9.1. Appliquons cette proposition en remplaçant $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}_H$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{Y}$ est égal à $\mathcal{Z}_H$ et l'application τ est égale à ζ_H. Pour $z_H \in \mathcal{Z}_H$, on dispose donc de la forme linéaire $J^{\mathcal{D}_H,\mathcal{D}_H}(z_H, .)$ sur $\mathcal{S}_H$. Montrons que :

(1) $rea_{H,F}(\varphi_H)$ est un transfert de $rea_F(\varphi)$ si et seulement si pour tout $y \in \mathcal{Y}$, on a l'égalité $J^{\mathcal{D},\mathcal{D}_H}(y, \varphi) = J^{\mathcal{D}_H,\mathcal{D}_H}(\epsilon(y), \varphi_H)$.

Soit $z_{H,F} \in \mathcal{Z}_{H,G-reg,F}$, posons $y = \tau(z_{H,F})$. On a les égalités :

$$J^{G_D,H}(z_{H,F}, rea_F(\varphi)) = J^{\mathcal{D},\mathcal{D}_H}(y, \varphi),$$

$$J^{H_{D_H},H}(z_{H,F}, rea_{H,F}(\varphi_H)) = J^{\mathcal{D}_H,\mathcal{D}_H}(\zeta_H(z_{H,F}), \varphi_H) = J^{\mathcal{D}_H,\mathcal{D}_H}(\epsilon(y), \varphi_H),$$

cette dernière égalité résultant du lemme 8.3.1. Les deux premiers membres de ces égalités sont égaux pour tout $z_{H,F}$ si et seulement si les deux derniers membres sont égaux pour tout y appartenant à l'image de τ. Mais τ est surjective (lemme 8.3.2). D'où (1).

La relation (1) traduit la condition "$rea_{H,F}(\varphi_H)$ est un transfert de $rea_F(\varphi)$" en termes indépendants de F, ce qui entraîne l'énoncé. $\square$

9.3

Considérons le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_H$ sont non ramifiés, c'est-à-dire que I agit trivialement sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_H$. Le groupe $D = (X_*/X_{*,sc})_{\Gamma,tors}$ contient l'élément $d_0 = 0$. Le point $v_0 = 0$ appartient à V^{d_0}. Il est hyperspécial. Notons $\phi_0 \in \Phi^{d_0}$ la facette qui le contient et $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\phi_0)$ la fonction constante égale à $|\bar{G}_{d_0,v_0}|^{-1} q^{dim(\bar{\mathbf{G}}_{d_0,v_0})}$ sur $\bar{\mathfrak{g}}_{d_0,\phi_0}$. Pour $F \in CL_q$, posons $f_0 = rea_F(\varphi_0)$. C'est la fonction caractéristique du résau hyperspécial $\mathfrak{g}_{d_0,v_0,0}$, multipliée par une constante dont la présence est justifiée par la définition de nos mesures de Haar. On la considère comme un élément de $C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$ dont les composantes sont nulles sur $\mathfrak{g}_d$ pour $d \neq d_0$. On définit de façon similaire $\varphi_{H,0} \in \mathcal{S}(\bar{\mathfrak{h}}_{d_{H,0},\phi_{H,0}})$ et, pour $F \in CL_q$, $f_{H,0} \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_{D_H})$.

Pour $F \in CL_q$, le "lemme fondamental pour les algèbres de Lie" est l'assertion : $f_{H,0}$ est un transfert de f_0". Notons que les composantes $\mathfrak{g}_d$ pour $d \neq d_0$ et $\mathfrak{h}_d$ pour $d \neq d_{H,0}$ ne jouent plus de rôle ici.

Corollaire 9.3 : *Supposons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_H$ non ramifiés, soient F, $F' \in CL_q$. Alors le lemme fondamental pour les algèbres de Lie est vérifié sur le corps de base F si et seulement s'il l'est sur le corps de base F'.*

Preuve. On applique le corollaire précédent au couple φ_0, $\varphi_{H,0}$. $\square$

Bibliographie

[C] R. Carter : *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience Publ. 1993

[D] S. DeBacker : *Parametrizing nilpotent orbits via Bruhat-Tits theory*, Annals of Math. 156 (2002), 295-332

[KM] J.-L. Kim, F. Murnaghan : *Character expansions and unrefined minimal K-types*, prépublication

[K1] R. Kottwitz : *Stable trace formula : cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. 51 (1984), 611-650

[K2] ——— : *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. 49 (1982), 785-806

[K3] ——— : *Isocrystals with additional structure II*, Compositio Math. 109 (1997), 255-339

[K4] ——— : *Tamagawa numbers*, Annals of Math. 127 (1988), 629-646

[La] E. Landvogt : *A compactification of the Bruhat-Tits building*, LN 1619, Springer 1996

[Le] B. Lemaire : *Sous-groupes parahoriques d'un groupe réductif p-adique et descente galoisienne ramifiée*, prépublication

[LS] R.P.Langlands, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278 (1987), 219-271

[Se] J.-P.Serre : *Corps locaux*, Publ. Univ. Nancago, Hermann 1968

[Sp] T. Springer : *Linear algebraic groups*, Progress in Math 9, Birkhäuser 1981

[St] R. Steinberg : *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Publ. Math. IHES 25 (1965), 49-80

Paris, le 2 mai 2004

Institut de mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
75013 Paris