Espaces $FC(\mathfrak{g}(F))$ et endoscopie

J.-L. Waldspurger

26 octobre 2020

Abstract Let F be a p-adic field and let G be a connected reductive group defined over F. We assume p is large. Denote $\mathfrak{g}$ the Lie algebra of G. We normalize suitably a Fourier-transform $f \mapsto \hat{f}$ on $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. In a preceeding paper, we have defined the space $FC(\mathfrak{g}(F))$ of functions $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ such that the orbital integrals of f and of $\hat{f}$ are 0 for each element of $\mathfrak{g}(F)$ which is not topologically nilpotent. These spaces are compatible with endoscopic transfer. We assume here that G is absolutely quasi-simple and simply connected. We define a decomposition of the space $FC(\mathfrak{g}(F))$ in a direct sum of subspaces such that the endoscopic transfer becomes (more or less) clear on each subspace. In particular, if G is quasi-split, we describe the subspace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ of "stable" elements in $FC(\mathfrak{g}(F))$.

Introduction

Soient F une extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_p$ et G un groupe réductif connexe défini sur F. On impose que p est grand relativement à G. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Introduisons l'espace $I(\mathfrak{g}(F))$ qui est le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions f dont les intégrales orbitales $I^G(X,f)$ sont nulles pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$. Dans l'article [**?**], on a introduit un sous-espace de dimension finie $FC(\mathfrak{g}(F)) \subset I(\mathfrak{g}(F))$. En définissant une transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ convenablement normalisée, on peut le caractériser de la façon suivante. C'est l'image dans $I(\mathfrak{g}(F))$ du sous-espace des fonctions $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telles que $I^G(X,f) = I^G(X,\hat{f}) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ qui n'est pas topologiquement nilpotent. On peut aussi le décrire à l'aide de l'immeuble de Bruhat-Tits et la théorie des faisceaux-caractères de Lusztig. Introduisons l'immeuble du groupe adjoint G_{AD}. Il est décomposé en facettes et on note $S(G)$ l'ensemble des sommets. A $s \in S(G)$, on associe un sous-groupe parahorique $K_s^0 \subset G(F)$ et son plus grand sous-groupe distingué pro-p-unipotent K_s^+. D'après Bruhat et Tits, il existe un groupe réductif connexe G_s défini sur le corps résiduel $\mathbb{F}_q$ tel que $K_s^0/K_s^+ = G_s(\mathbb{F}_q)$. Dans $\mathfrak{g}(F)$, on a de façon similaire une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre $\mathfrak{k}_s$ (où $\mathfrak{o}_F$ est l'anneau des entiers de F) et une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre $\mathfrak{k}_s^+$, de sorte que $\mathfrak{k}_s/\mathfrak{k}_s^+ = \mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ (où $\mathfrak{g}_s$ est l'algèbre de Lie de G_s). Toute fonction définie sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ se relève en une fonction sur $\mathfrak{k}_s$ et s'étend par 0 hors de $\mathfrak{k}_s$ en une fonction définie sur $\mathfrak{g}(F)$. Notons $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ l'espace engendré par les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères définis sur $\mathfrak{g}_s$ qui sont cuspidaux, à support nilpotent et invariants par l'action de Frobenius. Par le procédé ci-dessus, on considère $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ comme un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Alors $FC(\mathfrak{g}(F))$ est l'image dans $I(\mathfrak{g}(F))$ de la somme de ces sous-espaces $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ sur tous les sommets $s \in S(G)$. L'intérêt de l'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ est qu'il nous semble jouer un rôle crucial dans deux problèmes concernant la théorie de l'endoscopie de langlands : d'une part, les propriétés endoscopiques de l'espace des distributions invariantes à support nilpotent, cf.

[?] et [?] ; d'autre part, la détermination des paquets stables de représentations tempérées de niveau 0, cf. [?].

Dans cet article, nous supposons que G est absolument quasi-simple et simplement connexe. Nous nous proposons d'éclaicir partiellement les propriétés de l'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ relatives à l'endoscopie.

Il est facile de décrire une base de l'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ (ou plus exactement d'un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ qui s'envoie bijectivement sur $FC(\mathfrak{g}(F))$). On fixe un sous-ensemble $\underline{S}(G) \subset S(G)$ de représentants des orbites pour l'action de $G(F)$ dans $S(G)$. Pour tout $s \in \underline{S}(G)$, on décrit les faisceaux-caractères définis sur $\mathfrak{g}_s$ qui sont cuspidaux, à support nilpotent et invariants par l'action de Frobenius. Alors, quand s décrit $FC(\mathfrak{g}(F))$, les fonctions caractéristiques de ces faisceaux (identifiées comme ci-dessus à des éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$) forment une base de $FC(\mathfrak{g}(F))$. Remarquons que l'on tombe tout de suite sur une difficulté calculatoire : il n'y a pas de normalisation canonique des fonctions caractéristiques en question, notre base n'est bien définie qu'à des scalaires près. En fait, il est plus opportun de modifier la base ainsi décrite en tenant compte de l'action de $G_{AD}(F)$ sur l'immeuble, c'est-à-dire en regroupant les sommets qui sont reliés par cette action. On décrira une telle base sur laquelle l'action de $G_{AD}(F)$ se lit bien. Précisément, pour chaque groupe G, on définira un ensemble fini $\mathcal{X}$ de nature combinatoire. Pour chaque $x \in \mathcal{X}$, on définira un sous-espace $FC_x \subset FC(\mathfrak{g}(F))$ qui possède une base formée de combinaisons linéaires simples des éléments de base décrits ci-dessus. On prouvera que

$$(1) \qquad FC(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{x\in\mathcal{X}} FC_x.$$

Dans de nombreux cas, FC_x sera une droite mais il y a aussi des cas où cet espace sera de dimension strictement supérieure à 1.

Supposons un instant que G soit quasi-déployé. On définit l'espace $SI(\mathfrak{g}(F))$ comme le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions f dont les orbitales intégrales stables $S^G(X,f)$ sont nulles pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ semi-simple régulier. Levons l'hypothèse de quasi-déploiement. Introduisons un ensemble $Endo_{ell}(G)$ de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G. A une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ est associée un groupe endoscopique G' qui est quasi-déployé sur F (soulignons qu'une donnée endoscopique est plus riche que la simple donnée de ce groupe G', deux données non équivalentes pouvant avoir le même groupe associé). Soit $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$. Modulo le choix d'un facteur de transfert, on définit l'application de transfert $transfert^{\mathbf{G}'}$: $I(\mathfrak{g}(F)) \to SI(\mathfrak{g}'(F))$. On note $FC(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}')$ le sous-espace des $f \in FC(\mathfrak{g}(F))$ telles que $transfert^{\mathbf{G}''}(f) = 0$ pour tout $\mathbf{G}'' \in Endo_{ell}(G)$, $\mathbf{G}'' \neq \mathbf{G}'$. Il y a toujours une unique donnée endoscopique elliptique dont le groupe associé est une forme intérieure quasi-déployée de G, on la note $\mathbf{G}$. Dans le cas où G est quasi-déployé, on pose $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G})$. Posons

$$(2) \qquad FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G)} FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}.$$

Le groupe $Out(\mathbf{G}')$ est le groupe fini des automorphismes "extérieurs" de la donnée $\mathbf{G}'$, il agit naturellement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est le sous-espace des invariants.

On a prouvé dans [?] que

$$FC(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G)} FC(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}'),$$

et que l'application $transfert = \oplus_{\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G)} transfert^{\mathbf{G}'}$ établissait un isomorphisme

$$(3) \qquad FC(\mathfrak{g}(F)) \to FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F)).$$

On définira un ensemble fini $\mathcal{Y}$ de nature combinatoire. Pour chaque $y \in \mathcal{Y}$, on définira un sous-espace $FC_y^{\mathcal{E}} \subset FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$. On définira une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et notre résultat principal sera que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a l'égalité

$$(4) \qquad transfert(FC_x) = FC_{\varphi(x)}^{\mathcal{E}}.$$

On est conscient que la présentation ci-dessus est très incomplète : pour obtenir ces résultats, il suffirait de poser $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{1\}$, $FC_1 = FC(\mathfrak{g}(F))$ et $FC_1^{\mathcal{E}} = FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$. Mais le lecteur constatera que nos décompositions des espaces $FC(\mathfrak{g}(F))$ et $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ sont tout à fait non triviales. Dans presque tous les cas, chaque sous-espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ de $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ est une somme de sous-espaces $FC_y^{\mathcal{E}}$ (il y a une exception dans le cas où G est quasi–déployé et non déployé de type D_n avec n pair, cf. **??** ; dans ce cas il y a des paires de données endoscopiques que nous n'avons pas réussi à distinguer). En particulier, quand G est quasi-déployé, nos résultats décrivent dans tous les cas le sous-espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ comme la somme des FC_x pour x parcourant un sous-ensemble $\mathcal{X}^{st}$ de $\mathcal{X}$. On résumera au chapitre 9 la description de cet espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ dans chaque cas. A titre d'exemple, donnons une conséquence dans le cas où G est de type E_8. Dans ce cas, on a l'égalité $FC(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ et

$$dim(FC(\mathfrak{g}(F))) = 3 + 4\delta_3(q-1) + 2\delta_4(q-1) + 4\delta_5(q-1),$$

où, pour tout entier $n \geq 1$, on a noté δ_n la fonction caractéristique de $n\mathbb{Z}$. Remarquons que, si $q-1$ est divisible par 60, la dimension ci-dessus est le nombre de représentations unipotentes cuspidales du groupe sur $\mathbb{F}_q$ de type E_8.

Indiquons les grandes lignes de la démonstration en nous restreignant au cas quasi-déployé. On décrit facilement l'ensemble $Endo_{ell}(G)$, cf. **??**. En raisonnant par récurrence sur la dimension de G, on peut décrire les espaces $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ pour toute donnée $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$. L'action du groupe $Out(\mathbf{G}')$ se lit bien dans nos descriptions et on en déduit l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$. Puisque l'on a déjà décrit l'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ et que l'on connaît donc sa dimension, l'isomorphisme (3) est alors suffisant pour déterminer la dimension du sous-espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, qui est le seul sous-espace de $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ que la récurrence ne permet pas de connaître. Pour déterminer la bijection φ et pour prouver l'égalité principale (4), on utilise les trois arguments ci-dessous.

D'abord l'action du groupe adjoint $G_{AD}(F)$. Toute donnée endoscopique $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$ détermine un caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ de ce groupe, trivial sur l'image naturelle de $G(F)$, et les éléments de $FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ se transforment par $G_{AD}(F)$ selon ce caractère. Dans beaucoup de cas, on pourra aussi associer à tout $x \in \mathcal{X}$ un tel caractère ξ_x de sorte que les éléments de FC_x se transforment par $G_{AD}(F)$ selon ce caractère. Dans ce cas, on aura forcément $FC_x \subset_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G), \xi_{\mathbf{G}'} = \xi_x} FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$. Remarquons que cet argument est suffisant dans le cas d'un groupe déployé de type A_{n-1}, les caractères de $G_{AD}(F)$ permettant alors de distinguer les différentes droites FC_x et les différentes données $\mathbf{G}'$.

Moy et Prasad ont défini des $\mathfrak{o}_F$-réseaux $\mathfrak{k}_{x,r} \subset \mathfrak{g}(F)$ où x est un point de l'immeuble de G_{AD} et r est un nombre réel. Ils sont décroissants en r. Pour un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$, on appelle la profondeur de X la borne supérieure (éventuellement infinie) de l'ensemble des réels r tels qu'il existe un point x de sorte que $X \in \mathfrak{k}_{x,r}$. Si X est semi-simple régulier, cette borne est finie et est atteinte. On note $r(X)$ cette profondeur. Soit $y \in \mathcal{Y}$. Supposons pour simplifier que $FC_y^{\mathcal{E}}$ soit une droite égale à $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ pour une donnée $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$ (c'est souvent le cas). Fixons un élément non nul $f'_y \in FC_y^{\mathcal{E}}$. Supposons que l'on connaisse un élément $Y_y \in \mathfrak{g}'(F)$ tel que $S^{G'}(Y_y, f'_y) \neq 0$ et que l'on connaisse la profondeur $r(Y_y)$. Soit $x \in \mathcal{X}$. Supposons que l'on connaisse un réel r_x tel que le support de tout élément de FC_x soit formé d'éléments $X \in \mathfrak{g}(F)$ tels que $r(X) \geq r_x$. Si $r_x > r_{Y_y}$, alors $transfert^{\mathbf{G}'}(f) = 0$ pour tout $f \in FC_x$. En effet, écrivons $transfert^{\mathbf{G}'}(f) = cf'_y$ avec $c \in \mathbb{C}$. On a alors $S^{G'}(Y_y, transfert^{\mathbf{G}'}(f)) = cS^{G'}(Y_y, f'_y)$. Par définition du transfert endoscopique, le membre de gauche est combinaison linéaire d'intégrales orbitales $I^G(X, f)$ pour des éléments $X \in \mathfrak{g}(F)$ correspondant à Y_y. Un tel élément a la même profondeur que Y_y, c'est-à-dire $r(Y_y)$. Puisque $r_x > r(Y_y)$, la classe de conjugaison de X ne coupe pas le support de f donc $I^G(X, f) = 0$. Donc $0 = S^{G'}(Y_y, transfert^{\mathbf{G}'}(f)) = cS^{G'}(Y_y, f'_y)$, d'où $c = 0$.

Le troisième argument est que l'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ est contenu dans celui des fonctions cuspidales $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \subset I(\mathfrak{g}(F))$ et est muni du produit elliptique, qui est un produit hermitien défini positif. La décomposition (1) est orthogonale pour ce produit. Via l'isomorphisme (3), l'espace $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ est aussi muni d'un tel produit et la décomposition (2) est orthogonale. Cela a de multiples conséquences. Par exemple, si on réussit à déterminer l'image de $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ pour tout $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$, alors l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est lui-aussi déterminé : c'est l'orthogonal de la somme des espaces précédents pour $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$. Ou encore si le deuxième argument est valide pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, celui-ci nous dit plus ou moins que l'isomorphisme (3) est triangulaire pour des ordres convenables sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Puisqu'il est hermitien, il est forcément diagonal. On renvoie à **??** pour une élaboration plus précise de cet argument.

Le premier paragraphe est consacré à divers préliminaires sur les immeubles et les données endoscopiques. On y démontre aussi quelques lemmes galoisiens élémentaires. Le deuxième paragraphe rappelle la description due à Lusztig des faisceaux-caractères cuspidaux à support unipotent pour les groupes finis. Au troisième paragraphe, on présente la façon dont nous décrirons ensuite nos résultats dans les différents cas. Les paragraphes 4 et 5 sont consacrés aux groupes de type A_{n-1} (on a préféré A_{n-1} à A_n car on utilise beaucoup d'algèbre linéaire et on préfère travailler avec $GL(n)$ plutôt qu'avec $GL(n+1)$). En particulier, on traite en détail le cas des groupes unitaires associés à une extension quadratique E/F ramifiée. Pour les groupes classiques, c'est le résultat le plus nouveau de notre étude, les autres cas étant largement contenus dans [**?**]. Les groupes de type B_n, C_n ou D_n sont considérés dans les chapitres 6 et 7. Pour la raison que l'on vient de donner, on s'est plusieurs fois contenté d'indiquer brièvement les constructions nécessaires, en laissant les détails au lecteur. Les groupes exceptionnels (y compris celui de D_4 trialitaire qui est de fait exceptionnel) sont traités au chapitre 8. Ils ne sont d'ailleurs pas les plus difficiles. Comme on l'a dit, le chapitre 9 est un résumé de la description que l'on a obtenue de l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Nos résultats sont complets quant à la détermination des espaces $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ pour les groupes G quasi-déployés. Les résultats de transfert sont beaucoup plus imprécis. Pour obtenir une description exacte, il faudrait améliorer trois points. D'abord, comme on l'a dit ci-dessus, définir précisément les normalisations des fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères. Cette question nous paraît liée à la conjecture de Lusztig reliant ces fonctions aux caractères de représentations de groupes finis. D'autre part, calculer plus précisément diverses intégrales orbitales dont nous nous contentons de prouver la non-nullité. Enfin calculer explicitement divers facteurs de transfert. Pour les groupes classiques, c'est une simple question de patience mais l'auteur avoue se sentir un peu démuni dans le cas des groupes exceptionnels.

1 Préliminaires

1.1 Notations

Soit F un corps local non-archimédien de caractéristique nulle. On note $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de F, q étant son nombre d'éléments, p la caractéristique de $\mathbb{F}_q$, $\mathfrak{o}_F$ l'anneau d'entiers de F, $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal. On fixe une uniformisante ϖ_F de $\mathfrak{p}_F$.

Pour $k = F$ ou $k = \mathbb{F}_q$, on fixe une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Toutes les extensions de k que l'on considérera seront supposées incluses dans $\bar{k}$. On note Γ_k le groupe de Galois de $\bar{k}/k$. Pour toute extension galoisienne k' de k, on note $\Gamma_{k'/k}$ le groupe de Galois de k'/k. On note F^{nr} l'extension non ramifiée maximale de F dont le corps résiduel s'identifie à $\bar{\mathbb{F}}_q$. On note I_F le sous-groupe d'inertie de Γ_F, c'est-à-dire le groupe $\Gamma_{F^{nr}}$. On pose simplement $\Gamma_F^{nr} = \Gamma_{F^{nr}/F} \simeq \Gamma_{\mathbb{F}_q}$. On note Fr l'élément de Frobenius de l'un ou l'autre de ces deux groupes. On note W_F le groupe de Weil de F, c'est-à-dire le sous-groupe des éléments de Γ_F dont l'image dans Γ_F^{nr} est une puissance entière du Frobenius.

On note val_F la valuation usuelle de F et on la prolonge à $\bar{F}$ en une valuation à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

Pour tout groupe abélien A, on note $A^\vee = Hom(A, \mathbb{C}^\times)$ son groupe des caractères. Considérons un groupe G agissant sur un ensemble U. Pour $u \in U$, on note $Z_G(u)$ le fixateur de u dans G. Pour un sous-ensemble $V \subset U$, on note $Norm_G(V)$ le stabilisateur de V dans G.

Soit encore $k = F$ ou $k = \mathbb{F}_q$. Pour tout groupe algébrique H défini sur k, on note H^0 sa composante neutre et $Z(H)$ son centre. Pour tout tore T défini sur k, on note $X_*(T)$, resp. $X^*(T)$, son groupe de cocaractères algébriques, resp. caractères algébriques, définis sur $\bar{k}$.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur k. On note G_{AD} le groupe adjoint et G_{SC} le revêtement simplement connexe de G_{AD}. On note $\pi : G \to G_{AD}$ la projection naturelle. Pour un sous-groupe algébrique H de G, on note $H_{ad} = \pi(H)$ son image dans G_{AD}. On identifie G à $G(\bar{k})$. Ce groupe et beaucoup d'objets qui lui sont reliés sont alors munis d'une action de Γ_k que l'on note $\sigma \mapsto \sigma_G$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et on appelle conjugaison par G l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{g}_{reg}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{g}_{ell}(F)$ le sous-ensemble des éléments elliptiques de $\mathfrak{g}_{reg}(F)$. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on note G_X la composante neutre de $Z_G(X)$. On note $h(G)$ le plus grand des nombres de Coxeter des composantes irréductibles sur $\bar{k}$ du groupe G_{AD} et on note $rg(G)$ le rang de G sur $\bar{k}$.

Dans chaque section de l'article, on considérera un tel groupe G défini sur F ou $\mathbb{F}_q$. On supposera toujours que

$p \geq sup(2h(G) + 1, rg(G) + 2, 5)$.

On note $\mathbb{N}_{>0} = \mathbb{N} - \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note δ_n la fonction caractéristique du sous-groupe $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$. Pour tout corps commutatif k et tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note $\boldsymbol{\zeta}_n(k)$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $k^\times$ et $\boldsymbol{\zeta}_{n,prim}(k)$ le sous-ensemble des racines primitives d'ordre n.

1.2 Groupes sur $\mathbb{F}_q$

Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$. On note $\mathcal{C}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$, à valeurs complexes. Il est muni du produit hermitien non dégénéré

$$(f',f) = |G(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{X\in\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)} \bar{f}'(X)f(X).$$

On note $C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace des fonctions qui sont invariantes par conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$. On note $C_{cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace des fonctions cuspidales, c'est-à-dire des fonctions $f \in C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ qui vérifient la condition suivante. Soient P un sous-groupe parabolique propre de G et M une composante de Levi de P, tous deux définis sur $\mathbb{F}_q$; on note U_P le radical unipotent de P. Alors, pour tout $X \in \mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité

$$\sum_{Y\in\mathfrak{u}_P(\mathbb{F}_q)} f(X+Y) = 0.$$

Fixons une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< .,. >$ sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ invariante par conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$. Fixons aussi un caractère non trivial $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$. On définit la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $\mathcal{C}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ par

$$\hat{f}(X) = q^{-dim(\mathfrak{g})/2} \sum_{Y\in\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)} f(Y)\psi(< X, Y >)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$.

On note $C_{nil}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace de $C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ formé des fonctions à support nilpotent. On pose $C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = C_{nil}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) \cap C_{cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. On note $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace des fonctions $f \in C_{nil}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ telles que $\hat{f}$ appartient elle-aussi à $C_{nil}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. On a vu en [?] 2(2) que

(1) si $Z(G)^0 \neq \{1\}$, $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = 0$.

Supposons donc $Z(G)^0 = \{1\}$, c'est-à-dire G semi-simple. Lusztig a prouvé en [?] paragraphe 11 que $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ avait pour base les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères cuspidaux qui sont invariants par $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$, considérées à homothétie près. Notons $fc(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ cet ensemble de fonctions. Ce résultat implique que $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) \subset C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

Rappelons quelques propriétés d'une telle fonction caractéristique $f \in fc(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. Considérons un élément $N \in \mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ et appelons orbite géométrique de N l'ensemble des $N' \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ tels qu'il existe $g \in G$ de sorte que $N' = g^{-1}Ng$. Le groupe $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit sur $Z_G(N)/Z_G(N)^0$. Soit ϵ une représentation irréductible de $Z_G(N)/Z_G(N)^0$ dont la classe est fixe par l'action galoisienne. On fixe un automorphisme Fr_ϵ de l'espace de cette représentation de sorte que $\epsilon(Fr(g)) = Fr_\epsilon\epsilon(g)Fr_\epsilon^{-1}$ pour tout $g \in Z_G(N)/Z_G(N)^0$. On définit une fonction $f_{N,\epsilon,Fr_\epsilon}$ à support dans l'orbite géométrique de N par la formule $f_{N,\epsilon,Fr_\epsilon}(N') = trace(\epsilon(gFr(g)^{-1})Fr_\epsilon)$ pour tous N' et g comme ci-dessus. Alors, pour toute fonction $f \in fc(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$, il existe N, ϵ et Fr_ϵ de sorte que $f = f_{N,\epsilon,Fr_\epsilon}$. Le choix de l'automorphisme Fr_ϵ ne change la fonction que par multiplication par un scalaire. On supposera que Fr_ϵ est d'ordre fini et que c'est l'identité quand ϵ est de degré 1, ce qui est le cas le plus fréquent. On oubliera le Fr_ϵ de la notation. Considérons une fonction caractéristique $f_{N,\epsilon}$ comme ci-dessus. L'orbite de N est distinguée. Fixons un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (N^-, H, N). On a donc $[H,N] = 2N$, $[H,N^-] = -2N^-$ et $[N,N^-] = H$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, posons $\mathfrak{g}_i = \{X \in \mathfrak{g}; [H,X] = iX\}$ et $\mathfrak{g}_{\geq i} = \oplus_{j\geq i}\mathfrak{g}_j$. Alors $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour i impair et on a $dim_{\bar{\mathbb{F}}_q}(\mathfrak{g}_0) = dim_{\bar{\mathbb{F}}_q}(\mathfrak{g}_2)$. Notons P le sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\geq 0}$

et M sa composante de Levi d'algèbre $\mathfrak{g}_0$. On a $N \in \mathfrak{g}_2(\mathbb{F}_q)$ et l'orbite de N sous l'action de M est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}_2$ que l'on note $\tilde{\mathfrak{g}}_2$. Pour $N' \in \tilde{\mathfrak{g}}_2(\mathbb{F}_q)$, on a

$$\{u^{-1}N'u; u \in U_P(\mathbb{F}_q)\} = N' + \mathfrak{g}_{\geq 3}(\mathbb{F}_q)$$

et

$$\{g \in G; g^{-1}N'g \in \mathfrak{u}_P\} = P.$$

Notons $\tilde{f}_{N,\epsilon}$ la fonction sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$, à support dans $\tilde{\mathfrak{g}}_2(\mathbb{F}_q) + \mathfrak{g}_{\geq 3}(\mathbb{F}_q)$, telle que, pour $N' \in \tilde{\mathfrak{g}}_2(\mathbb{F}_q)$ et $X \in \mathfrak{g}_{\geq 3}(\mathbb{F}_q)$, $\tilde{f}_{N,\epsilon}(N' + X) = f_{N,\epsilon}(N')$. A l'aide des propriétés précédentes, on vérifie que

$$f_{N,\epsilon}(X) = |P(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{g \in G(\mathbb{F}_q)} \tilde{f}_{N,\epsilon}(g^{-1}Xg)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$.

1.3 Groupes p-adiques

Pour la suite de la section, G est un groupe réductif connexe défini sur F. On note A_G le plus grand sous-tore de $Z(G)$ qui est déployé sur F.

On note $\hat{G}$ le dual de Langlands de G, qui est un groupe complexe. Il est muni d'une action de Γ_F que l'on note simplement $\sigma \mapsto \sigma_G$. Le L-groupe est le produit semi-direct $\hat{G} \rtimes W_F$. On note $\hat{G}_{AD}$ le groupe adjoint de $\hat{G}$ et $\hat{G}_{SC}$ son revêtement simplement connexe (ce sont les groupes duaux de G_{SC}, resp. G_{AD}).

On note $Imm(G_{AD})$ l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe adjoint G_{AD} sur F. Le groupe $G(F)$, et plus généralement le groupe $G_{AD}(F)$, agissent sur cet immeuble. D'autre part, celui-ci est décomposé en facettes. On note $Fac(G)$ l'ensemble des facettes et $S(G) \subset Fac(G)$ l'ensemble des sommets. On considérera aussi l'immeuble de G_{AD} sur des extensions K de F contenues dans $\bar{F}$. On ajoutera alors la lettre K dans la notation : $Imm_K(G_{AD})$, $S_K(G)$ etc... Si K/F est galoisienne, le groupe $\Gamma_{K/F}$ agit sur $Imm_K(G_{AD})$ et, si K/F est modérément ramifiée, $Imm(G_{AD})$ s'identifie à l'ensemble des points fixes par $\Gamma_{K/F}$ dans $Imm_K(G_{AD})$.

Pour tout $\mathcal{F} \in Fac(G)$, on note $K^\dagger_\mathcal{F}$ le stabilisateur de $\mathcal{F}$ dans $G(F)$, $K^0_\mathcal{F} \subset K^\dagger_\mathcal{F}$ le sous-groupe parahorique, $K^+_\mathcal{F}$ son plus grand sous-groupe distigué pro-p-unipotent et $G_\mathcal{F}$ le groupe réductif connexe sur $\mathbb{F}_q$ défini par Bruhat et Tits tel que $K^0_\mathcal{F}/K^+_\mathcal{F} \simeq G_\mathcal{F}(\mathbb{F}_q)$. Il y a des objets correspondants dans l'algèbre de Lie : $\mathfrak{k}^+_\mathcal{F} \subset \mathfrak{k}_\mathcal{F} \subset \mathfrak{g}(F)$, avec $\mathfrak{k}_\mathcal{F}/\mathfrak{k}^+_\mathcal{F} \simeq \mathfrak{g}_\mathcal{F}(\mathbb{F}_q)$. On ajoute des indices AD pour les mêmes objets relatifs au groupe G_{AD} : $K^\dagger_{\mathcal{F},AD}$ etc...

1.4 L'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$

Fixons un caractère ψ de F de conducteur $\mathfrak{o}_F$ et une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée $< .,. >$ sur $\mathfrak{g}(F)$, invariante par l'action par conjugaison de $G(F)$. On définit la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C^\infty_c(\mathfrak{g}(F))$ par la formule usuelle

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\psi(< X, Y >)\, dY,$$

où dY est la mesure autoduale. On sait que l'on peut choisir la forme $< .,. >$ de sorte que, pour tout $\mathcal{F} \in Fac(G)$, on ait l'égalité $\hat{\mathbf{1}}_{\mathfrak{k}_\mathcal{F}} = |\mathfrak{g}_\mathcal{F}(\mathbb{F}_q)|^{1/2}\mathbf{1}_{\mathfrak{k}^+_\mathcal{F}}$, où l'on a noté $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_\mathcal{F}}$ et $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}^+_\mathcal{F}}$ les fonctions caractéristiques de $\mathfrak{k}_\mathcal{F}$ et $\mathfrak{k}^+_\mathcal{F}$. On suppose la forme ainsi choisie. La mesure sur $\mathfrak{g}(F)$ vérifie alors l'égalité $mes(\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+) = |\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)|^{-1/2}$ pour tout $\mathcal{F} \in Fac(G)$. On peut relever cette mesure en une mesure de Haar sur $G(F)$ telle que $mes(K_{\mathcal{F}}^+) = mes(\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+)$ pour tout $\mathcal{F}$. Des mesures analogues seront choisies sur tout autre groupe réductif connexe.

Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on définit l'intégrale orbitale

$$I^G(X,f) = D_G(X)^{1/2} \int_{G_X(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}Xg)\, dg,$$

où D_G est le discriminant de Weyl. On note $I(\mathfrak{g}(F))$ le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions f telles que $I^G(X,f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Les intégrales orbitales se descendent en des formes linéaires sur $I(\mathfrak{g}(F))$. On note $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace de $I(\mathfrak{g}(F))$ formé des $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ telles que $I^G(X,f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ tel que $X \notin \mathfrak{g}_{ell}(F)$.

Notons $\mathcal{T}_{ell}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble des sous-tores maximaux elliptiques de G. Pour un tel tore T, posons $W^G(T) = Norm_{G(F)}(T)/T(F)$. L'espace $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ est muni du produit scalaire elliptique

$$(f,f')_{ell} = \sum_{T \in \mathcal{T}_{ell}} |W^G(T)|^{-1} mes(A_G(F)\backslash T(F)) \int_{A_G(F)\backslash T(F)} I^G(X,\bar{f}) I^G(X,f')\, dX.$$

C'est un produit hermitien défini positif.

Le groupe $G_{AD}(F)$ agit naturellement par conjugaison sur $I(\mathfrak{g}(F))$ et $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Cette action se factorise en une action du groupe $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. Ce dernier est abélien fini. On pose $\Xi = (G_{AD}(F)/\pi(G(F)))^\vee$. On notera $\mathbf{1}$ l'élément neutre de Ξ. Pour $\xi \in \Xi$, on note $I_{cusp,\xi}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des $f \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ telles que $I^G(g^{-1}Xg, f) = \xi(g) I^G(X,f)$ pour tous $g \in G_{AD}(F)$ et $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. On a la décomposition

$$(1) \qquad I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\xi \in \Xi} I_{cusp,\xi}(\mathfrak{g}(F)).$$

Elle est orthogonale pour le produit scalaire elliptique.

Remarque. L'homomorphisme de Langlands fournit un isomorphisme $H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC})) \simeq \Xi$.

Pour une facette $\mathcal{F} \in Fac(G)$, l'espace $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q))$ s'identifie à un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$: une fonction sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q) \simeq \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ se relève en une fonction sur $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ puis s'étend à $\mathfrak{g}(F)$ par 0 hors de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. On note $FC(\mathfrak{g}(F))$ l'image dans $I(\mathfrak{g}(F))$ de l'espace

$$\sum_{s \in S(G)} FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)).$$

On sait qu'en fait, cette image est contenue dans le sous-espace $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$.

1.5 Orbites dans l'ensemble des facettes

Pour ce paragraphe et jusqu'en **??**, on suppose G simplement connexe et absolument quasi-simple.

Supposons d'abord G quasi-déployé. On fixe un sous-groupe de Borel B de G et un sous-tore maximal T de B tous deux définis sur F. On note T^{nr} le plus grand sous-tore de T déployé sur F^{nr}. On note Σ l'ensemble des racines de T dans G et Δ celui des racines simples déterminé par B. L'ensemble Δ plus les relations de produit scalaire entre les racines forme le diagramme de Dynkin $\mathcal{D}$ de G. On utilise pour les systèmes de racines les notations usuelles : pour une racine $\alpha \in \Sigma$, $\check{\alpha}$ est sa coracine ; si $\alpha \in \Delta$, ϖ_α est le poids associé et $\check{\varpi}_\alpha$ le copoids. Pour $\alpha \in \Sigma$, on note $\mathfrak{u}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ la droite radicielle associée.

On fixe un épinglage $(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ conservé par l'action galoisienne et on prolonge cet épinglage en une famille de Chevalley $(E_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. On entend par là que

E_α est un élément non nul de $\mathfrak{u}_\alpha$;

pour $\alpha, \beta \in \Sigma$ tels que $\alpha+\beta \in \Sigma$, $[E_\alpha, E_\beta] = c(\alpha,\beta)E_{\alpha+\beta}$, où $c(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}^\times$ est une unité p-adique ;

$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \check{\alpha}$, la coracine $\check{\alpha}$ étant considérée de façon naturelle à un élément de $\mathfrak{t}$.

Cette famille détermine un unique point $s^{nr} \in Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ de sorte que $\mathfrak{k}_{s^{nr},F^{nr}}$ soit l'ensemble des points fixes par I_F dans le $\mathfrak{o}_{\bar{F}}$-réseau engendré par les éléments de la base et par $X_*(T) \subset \mathfrak{t}$. On note C^{nr} la chambre de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ qui vérifie les conditions suivantes : elle appartient à l'appartement associé à T^{nr}, s^{nr} appartient à la clôture de C^{nr} et $\mathfrak{k}_{C^{nr},F^{nr}} \cap B(F^{nr}) = \mathfrak{k}_{s^{nr},F^{nr}} \cap B(F^{nr})$. Le point s^{nr} est fixé par l'action galoisienne de Γ_F^{nr} et la chambre C^{nr} est conservée par cette action. A la chambre C^{nr} est associé un ensemble de racines affines (dont les annulateurs sont les murs de la chambre et qui sont positives sur celle-ci). Notons Δ_a^{nr} l'ensemble de racines sous-jacent à cet ensemble de racines affines. Ce sont des formes linéaires sur $X_*(T)^{I_F} = X_*(T^{nr})$. Ces formes linéaires séparent les éléments de $X_*(T)^{I_F}$ et l'espace des relations linéaires entre éléments de Δ_a^{nr} est une droite (il y a une unique relation linéaire, à un scalaire près). Cet ensemble de racines Δ_a^{nr} plus les relations de produit scalaire entre elles forment un diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$. Dans chaque cas, ce diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$ est décrit dans les tables de Tits sous le nom de "local index", cf. [?]

Posons $N = K^\dagger_{C^{nr},AD,F^{nr}}/K^0_{C^{nr},AD,F^{nr}}$. D'après [?] lemme 14, on a $N \simeq (Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})^\vee$, en particulier, c'est un groupe abélien. On sait que $H^1(\Gamma_F, G_{AD}) \simeq H^1(\Gamma_F^{nr}, N)$ et ce dernier groupe n'est autre que le quotient $N_{\Gamma_F^{nr}}$ de N par le sous-groupe des $Fr(n)n^{-1}$ pour $n \in N$. Remarquons que $N_{\Gamma_F^{nr}}$ est aussi égal à $(Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F})^\vee$ et on retrouve l'isomorphisme de Kottwitz $H^1(\Gamma_F, G_{AD}) \simeq (Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F})^\vee$, cf. [?] théorème 1.2.

Supprimons l'hypothèse que G est quasi-déployé. On peut fixer une forme quasi-déployée G^* de G et un torseur intérieur $\varphi : G \to G^*$. On effectue les constructions précédentes pour ce groupe G^* (on ajoute si besoin est des exposants $*$). Au torseur intérieur est associé un élément de $H^1(\Gamma_F, G^*_{AD})$ que l'on note u_G puis un élément de $N^*_{\Gamma_F^{nr}}$. Relevons ce dernier en un élément de N^*. On peut ensuite relever celui-ci en un élément $n_G \in K^\dagger_{C^{nr},AD,F^{nr}}$ qui se prolonge en un cocycle de Γ_F^{nr} dans $G^*_{AD}(F^{nr})$, c'est-à-dire un cocycle $\underline{n}_G$ tel que $\underline{n}_G(Fr) = n_G$. On note encore $\underline{n}_G$ le cocycle de Γ_F dans $G^*(F^{nr})$ obtenu par inflation. On peut alors supposer que $G(F^{nr}) = G^*(F^{nr})$, que φ est l'identité et que l'on a les égalités d'actions galoisiennes $\sigma_G(g) = \underline{n}_G(\sigma)\sigma_{G^*}(g)\underline{n}_G(\sigma)^{-1}$ pour tous $g \in G(F^{nr})$ et $\sigma \in \Gamma_F$. Le groupe Γ_F^{nr} agit sur $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ par $(\sigma, x) \mapsto \underline{n}_G(\sigma) \circ \sigma(x)$ et $Imm(G_{AD})$ est le sous-ensemble des points fixes.

Notons $\underline{S}(G)$ l'intersection de $S(G)$ et de la clôture de C^{nr}. C'est un ensemble de représentants des orbites de l'action de $G(F)$ dans $S(G)$ (parce que l'on a supposé G simplement connexe). Le groupe Γ_F agit sur l'ensemble Δ_a^{nr} par $(\sigma, \alpha) \mapsto \underline{n}_G(\sigma) \circ \sigma_{G^*}(\alpha)$ pour $\sigma \in \Gamma_F$ et $\alpha \in \Delta_a^{nr}$. Les éléments de $\underline{S}(G)$ sont en bijection avec les orbites de l'action de Γ_F^{nr}. Pour un sommet s correspondant à une orbite $\mathcal{O}_s$, le diagramme de Dynkin associé au groupe G_s, muni de son action de Γ_F^{nr}, s'obtient en supprimant les éléments de $\mathcal{O}_s$ du diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$. En particulier, un sous-tore maximal de G_s a pour groupe de cocaractères $X_*(T^{*,nr})$. On a vu en [?] 9.2 que l'espace

$$(1) \qquad \sum_{s\in \underline{S}(G)} FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$$

s'envoyait bijectivement sur $FC(\mathfrak{g}(F))$. Nous identifierons ces deux espaces.

Lemme. *Soit $s \in \underline{S}(G)$ et $\mathcal{O}_s \subset \Delta_a^{nr}$ l'orbite galoisienne associée. Si $\mathcal{O}_s$ a au moins 2 éléments, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$.*

Preuve. Puisqu'il n'y a, à un scalaire près, qu'une seule relation linéaire entre les éléments de Δ_a^{nr}, on voit que le nombre de racines simples de G_s est égal à la dimension de $X_*(T^{*,nr})$ plus 1 moins le nombre d'éléments de $\mathcal{O}_s$. Si $\mathcal{O}_s$ a au moins 2 éléments, le nombre de racines simples de G_s est strictement inférieur à la dimension d'un sous-tore maximal, donc $Z(G_s)^0 \neq \{1\}$. La conclusion résulte de **??** (1). $\square$

1.6 Description d'une alcôve

On se propose de décrire l'ensemble Δ_a^{nr} et l'alcôve C^{nr}. Puisque le corps de base est ici F^{nr}, on ne perd rien à supposer G quasi-déployé.

Le premier cas est celui où G est déployé sur F^{nr}. La description de C^{nr} est alors bien connue. On pose $\mathcal{A}^{nr} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. L'appartement associé à T est isomorphe à $\mathcal{A}^{nr}$, le point s^{nr} d'identifiant à $0 \in \mathcal{A}$. On pose $\Sigma^{nr} = \Sigma$. Pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$ et $b \in \mathbb{Z}$, notons $\alpha[b]$ la forme affine sur $\mathcal{A}^{nr}$ définie par $\alpha[b](H) = \alpha(H) + b$. Dans le cas particulier $b = 0$, on continue à noter simplement $\alpha = \alpha[0]$. On note Σ^{aff} l'ensemble des racines affines, c'est-à-dire des applications $\alpha[b]$ pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Notons α_0 l'opposée de la plus grande racine dans Σ^{nr}. On a $\Delta_a^{nr} = \Delta \cup \{\alpha_0\}$. En écrivant $-\alpha_0$ dans la base Δ, on obtient une relation

$$(1) \qquad \sum_{\alpha\in\Delta_a^{nr}} d(\alpha)\alpha = 0$$

où $d(\alpha_0) = 1$ et, pour $\alpha \in \Delta$, $d(\alpha)$ appartient à $\mathbb{N}_{>0}$. Les murs de C^{nr} sont les annulateurs de $\alpha_0[1]$ et des $\alpha \in \Delta$. Plus précisément, C^{nr} est l'ensemble des $H \in \mathcal{A}^{nr}$ tels que $\alpha_0[1](H) > 0$ et $\alpha(H) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Il est commode de poser $\alpha^{aff} = \alpha$ pour $\alpha \in \Delta$ et $\alpha_0^{aff} = \alpha_0[1]$. La relation (1) devient la relation affine

$$(2) \qquad \sum_{\alpha\in\Delta_a^{nr}} d(\alpha)\alpha^{aff} = 1.$$

Supposons maintenant que G n'est pas déployé sur F^{nr}. Notre hypothèse sur p implique que G est déployé sur une extension modérément ramifiée. Puisque tout quotient fini du groupe de ramification modérée est cyclique, l'action algébrique de I_F sur G se factorise par un homomorphisme surjectif $I_F \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. Un élément de I_F d'image 1 dans ce dernier groupe agit par un automorphisme θ de G d'ordre e qui préserve B, T et l'épinglage. Notre hypothèse que G n'est pas déployé sur F^{nr} signifie que $e \geq 2$. En inspectant tous les systèmes de racines, on voit que $e = 2$ ou $e = 3$. De plus, l'existence d'un tel θ implique que toutes les racines de G ont même longueur. Posons $\bar{\mathcal{A}} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. C'est l'appartement associé à T dans l'immeuble de G_{AD} sur une extension de F qui déploie G. On fixe sur cet espace un produit scalaire invariant par l'action du groupe de Weyl W de G de sorte que $(\check{\beta}, \check{\beta}) = 2$ pour tout $\beta \in \Sigma$. Posons $\mathcal{A}^{nr} = X_*(T)^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, que l'on munit de la restriction du produit scalaire précédent. C'est l'appartement associé à T^{nr} dans $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. Pour $\beta\in\Sigma$, notons β^{res} la restriction de β à $\mathcal{A}^{nr}$. On note Σ^{nr} l'ensemble des β^{res} pour $\beta\in\Sigma$. C'est un système de racines irréductible, pas toujours réduit. Nous dirons qu'une racine $\alpha\in\Sigma^{nr}$ est de type I, resp. II, resp. III, si 2α et $\alpha/2$ n'appartiennent pas à Σ^{nr}, resp. si $2\alpha\in\Sigma^{nr}$, resp. $\alpha/2\in\Sigma^{nr}$. On note Σ^{nr}_{ind} l'ensemble des racines indivisibles, c'est-à-dire de type I ou II. C'est encore un système de racines irréductible. En fait, on a $\Sigma^{nr}=\Sigma^{nr}_{ind}$ et toutes les racines sont de type I sauf dans le cas où G est de type A_{n-1} avec $n\geq 3$ impair, et G n'est pas déployé sur F^{nr} mais l'est sur son extension quadratique. On a alors $e=2$. Nous noterons ce cas particulier $(A_{n-1},ram)_{imp}$.

Pour $\alpha\in\Sigma^{nr}$, choisissons $\beta\in\Sigma$ telle que $\alpha=\beta^{res}$. Notons $e(\alpha)$ le plus petit entier $m\geq 1$ tel que $\theta^m(\beta)=\beta$. Il ne dépend pas du choix de β. On a forcément $e(\alpha)=1$ ou e. On peut si l'on veut identifier α à $\frac{1}{e(\alpha)}\sum_{m=1,...,e(\alpha)-1}\theta^m(\beta)$, cette forme linéaire ayant même restriction que β à $\mathcal{A}^{nr}$. Si α est de type I, les racines β, $\theta(\beta)$,...,$\theta^{e(\alpha)-1}(\beta)$ sont orthogonales. Si α est de type II, on a $e(\alpha)=2$, les racines β et $\theta(\beta)$ ne sont pas orthogonales, $\beta+\theta(\beta)$ appartient à Σ et sa restriction à $\mathcal{A}^{nr}$ est 2α. Si α est de type III, on a $e(\alpha)=1$. Si $e(\alpha)=1$, c'est-à-dire $\theta(\beta)=\beta$, on pose $\check{\alpha}=\check{\beta}$. Si $e(\alpha)=e$ et α est de type I, on pose $\check{\alpha}=\check{\beta}+\theta(\check{\beta})+...+\theta^{e-1}(\check{\beta})$. Si α est de type II, on pose $\check{\alpha}=2(\check{\beta}+\theta(\check{\beta}))$. En tout cas, $\check{\alpha}$ est un élément de $\mathcal{A}^{nr}$. L'ensemble $\check{\Sigma}^{nr}=\{\check{\alpha};\alpha\in\Sigma^{nr}\}$ est le système de coracines associé à Σ^{nr}. Le sous-ensemble $\check{\Sigma}^{nr}_{nm}$ des coracines non multipliables (les $\check{\alpha}$ telles que $2\check{\alpha}\not\in\check{\Sigma}^{nr}$) est le système de coracines associé à Σ^{nr}_{ind}.

Pour $\alpha\in\Sigma^{nr}_{ind}$, posons $e'(\alpha)=e(\alpha)$ si α est de type I et $e'(\alpha)=2e(\alpha)=4$ si α est de type II. On vérifie que $(\check{\alpha},\check{\alpha})=2e'(\alpha)$. Le produit scalaire permet donc si l'on veut d'identifier $\check{\alpha}$ à $e'(\alpha)\alpha$. On note Δ^{nr} l'ensemble des β^{res} pour $\beta\in\Delta$. C'est une base de Σ^{nr}_{ind}. On pose $\check{\Delta}^{nr}=\{\check{\alpha};\alpha\in\Delta^{nr}\}$. Cet ensemble est une base de $\check{\Sigma}^{nr}_{nm}$. On note α_{00} l'élément de Σ^{nr} tel que $\check{\alpha}_{00}$ est l'opposée de la plus grande racine de $\check{\Sigma}^{nr}_{nm}$. Si l'on n'est pas dans le cas $(A_{n-1},ram)_{imp}$, α_{00} est de type I comme le sont tous les éléments de Σ^{nr} et on pose $\alpha_0=\alpha_{00}$. On vérifie cas par cas que $e'(\alpha_0)=e$. Dans le cas $(A_{n-1},ram)_{imp}$, α_{00} est de type II et on pose $\alpha_0=2\alpha_{00}$ et $e'(\alpha_0)=e=2$. En tout cas, le produit scalaire identifie $\check{\alpha}_{00}$ à $e'(\alpha_0)\alpha_0$. On prendra garde à la notation : α_0 n'est pas l'opposée de la plus grande racine de Σ^{nr}. Posons $\Delta^{nr}_a=\{\alpha_0\}\cup\Delta^{nr}$. En écrivant $-\check{\alpha}_{00}$ dans la base $\check{\Delta}^{nr}$, on obtient une relation

$$\check{\alpha}_{00}+\sum_{\alpha\in\Delta^{nr}}d(\check{\alpha})\check{\alpha}=0,$$

avec $d(\check{\alpha})\in\mathbb{N}_{>0}$ pour tout $\alpha\in\Delta^{nr}$. Puisque le produit scalaire permet d'identifier $\check{\alpha}$ à $e'(\alpha)\alpha$ pour $\alpha\in\Delta^{nr}$ et $\check{\alpha}_{00}$ à $e'(\alpha_0)\alpha_0=e\alpha_0$, on en déduit la relation

$$(3)\qquad \sum_{\alpha\in\Delta^{nr}_a}d(\alpha)\alpha=0,$$

où $d(\alpha)=d(\check{\alpha})e'(\alpha)$ pour $\alpha\in\Delta^{nr}$ et $d(\alpha_0)=e$.

A $\beta\in\Sigma$ est associée une symétrie w_β de l'espace $\bar{\mathcal{A}}$ qui appartient au groupe de Weyl W. A $\alpha\in\Sigma^{nr}$ est associée une symétrie w_α de l'espace $\mathcal{A}^{nr}$. Supposons $\alpha=\beta^{res}$. Si $e(\alpha)=1$, w_α est la restriction de w_β à $\mathcal{A}^{nr}$. Si $e(\alpha)=e$ et que α est de type I, w_α est la restriction à $\mathcal{A}^{nr}$ de $w_\beta w_{\theta(\beta)}...w_{\theta^{e-1}(\beta)}$. Si α est de type II, w_α est la restriction à $\mathcal{A}^{nr}$ de $w_{\beta+\theta(\beta)}$. Introduisons l'homomorphisme $v:T(\bar{F})\to\bar{\mathcal{A}}$ tel que $v(x_*\otimes t)=x_*\otimes val_F(t)$ pour tout $x_*\in X_*(T)$ et $t\in\bar{F}^\times$. Le groupe de Weyl affine W^{nr}_a est l'ensemble de transformations de $\mathcal{A}^{nr}$ engendré par les symétries w_α pour $\alpha\in\Sigma^{nr}$ et l'ensemble de translations par des éléments de $v(T(F^{nr}))$. Pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$ et $b \in \mathbb{R}$, notons $\alpha[b]$ la forme affine sur $\mathcal{A}^{nr}$ définie par $\alpha[b](H) = \alpha(H) + b$. Les racines affines sont les formes affines $\alpha[b]$ telles qu'il existe un élément $n \in W_a^{nr}$ de sorte que l'on ait l'égalité $\{H \in \mathcal{A}^{nr}; n(H) = H\} = \{H \in \mathcal{A}^{nr}; \alpha[b](H) = 0\}$. On note Σ^{aff} l'ensemble des racines affines. Pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$, posons $\Gamma_\alpha = \frac{1}{e(\alpha)}\mathbb{Z}$ si α est de type I ou II et $\Gamma_\alpha = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ si α est de type III. On vérifie que Σ^{aff} est l'ensemble des $\alpha[b]$ pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$ et $b \in \Gamma_\alpha$. On pose $\alpha^{aff} = \alpha$ pour $\alpha \in \Delta^{nr}$ et $\alpha_0^{aff} = \alpha_0[1/e]$. Ce sont des racines affines et la relation (2) est encore vérifiée.

Pour que les définitions ci-dessus coïncident avec celle de **??**, on doit vérifier que les annulateurs des racines affines α^{aff} pour $\alpha \in \Delta_a^{nr}$ sont bien les murs de C^{nr}, autrement dit que

(4) C^{nr} est l'ensemble des $H \in \mathcal{A}^{nr}$ tels que $\alpha^{aff}(H) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_a^{nr}$.

Par définition de cette chambre, C^{nr} contient les points $H \in \mathcal{A}^{nr}$ tels que, pour tout $\alpha \in \Delta^{nr}$, $\alpha(H)$ est strictement positif et assez voisin de 0. Donc C^{nr} coupe l'ensemble décrit ci-dessus et est donc inclus dans celui-ci. Il suffit de prouver que les annulateurs des racines affines ne coupent pas cet ensemble. On remarque que les racines affines n'interviennent ici que par leurs annulateurs ou les demi-espaces que ces annulateurs séparent. On peut aussi bien multiplier des racines affines par des réels strictement positifs. Pour α de type II, il y a les racines affines $\alpha[b]$ pour $b \in \frac{1}{e(\alpha)}\mathbb{Z} = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et les racines affines $(2\alpha)[b]$ pour $b \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. En divisant ces dernières par 2 et en réunissant le tout, on obtient les formes affines $\alpha[b]$ pour $b \in \frac{1}{4}\mathbb{Z} = \frac{1}{e'(\alpha)}\mathbb{Z}$. Donc on peut remplacer notre ensemble Σ^{aff} par celui des $\alpha[b]$ pour $\alpha \in \Sigma_{ind}^{nr}$ et $b \in \frac{1}{e'(\alpha)}\mathbb{Z}$. On peut encore multiplier chacune ce ces racines par $e'(\alpha)$. En identifiant $e'(\alpha)\alpha$ à $\check{\alpha}$, on obtient l'ensemble des $\check{\alpha}[b]$ pour $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}_{nm}^{nr}$ et $b \in \mathbb{Z}$. L'ensemble décrit en (4) est celui des $H \in \mathcal{A}^{nr}$ tels que $\check{\alpha}(H) > 0$ pour $\alpha \in \Delta^{nr}$ et $\check{\alpha}_{00}(H) + 1 > 0$. Soit H un élément de cet ensemble et soit $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}_{nm}^{nr}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Supposons $\check{\alpha}[b](H) = 0$. Quitte à remplacer $\check{\alpha}$ par son opposée, on peut supposer $\check{\alpha} > 0$ pour l'ordre défini par $\check{\Delta}^{nr}$. Ecrivons $\check{\alpha}$ dans la base $\check{\Delta}^{nr}$:

$$\check{\alpha} = \sum_{\check{\alpha}' \in \check{\Delta}^{nr}} m(\check{\alpha}')\check{\alpha}',$$

avec des $m(\check{\alpha}') \in \mathbb{N}$. On a $\check{\alpha}'(H) > 0$ pour tout $\check{\alpha}'$ et au moins un des coefficients $m(\check{\alpha}')$ est strictement positif. Donc $\check{\alpha}(H) > 0$. D'autre part, par définition de la plus grande racine $-\check{\alpha}_{00}$, on a $m(\check{\alpha}') \leq d(\check{\alpha}')$ pour tout $\check{\alpha}' \in \check{\Delta}^{nr}$, donc

$$\check{\alpha}(H) \leq \sum_{\check{\alpha}' \in \check{\Delta}^{nr}} d(\check{\alpha}')\check{\alpha}'(H) = -\check{\alpha}_{00}(H).$$

Puisque $\check{\alpha}_{00}(H) + 1 > 0$, on obtient $\check{\alpha}(H) < 1$, d'où

$$0 < \check{\alpha}(H) < 1.$$

Mais l'égalité $\check{\alpha}[b](H) = 0$ signifie que $\check{\alpha}(H) = -b \in \mathbb{Z}$. C'est impossible. Cette contradiction prouve (4).

1.7 Action de $G_{AD}(F)$ sur $FC(\mathfrak{g}(F))$

Introduisons l'homomorphisme de Kottwitz $w_{G_{AD}} : G_{AD}(F) \to (Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})^{\vee,\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. On note $G_{AD}(F)_0$ son noyau. Introduisons le groupe $G(F^{nr})^\sharp = \{g \in G(F^{nr}); gFr(g)^{-1} \in$

$Z(G)^{I_F}\}$. C'est l'image réciproque de $G_{AD}(F)$ par l'application $\pi^{nr} : G(F^{nr}) \to G_{AD}(F^{nr})$. Montrons que

(1) l'homomorphisme π^{nr} envoie surjectivement $G(F^{nr})^\sharp$ sur $G_{AD}(F)_0$.

Posons $W_{\mathbb{F}_q} = W_F/I_F$. C'est le sous-groupe de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ formé des puissances entières du Frobenius. On a la suite exacte

$$(2) \qquad 1 \to H^1(W_{\mathbb{F}_q}, Z(\hat{G}_{SC})^{I_F}) \xrightarrow{\iota} H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC})) \to H^1(I_F, Z(\hat{G}_{SC}))$$

Remarquons que $H^1(W_{\mathbb{F}_q}, Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})$ n'est autre que l'espace des coinvariants $(Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})_{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$ dont le dual est $(Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})^{\vee,\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Dualement au premier homomorphisme de la suite ci-dessus, on a donc un homomorphisme

$$H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))^\vee \xrightarrow{\iota^\vee} (Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})^{\vee,\Gamma_{\mathbb{F}_q}}.$$

L'homomorphisme $w_{G_{AD}}$ est le composé de l'homomorphisme de Langlands $a_{G_{AD}} : G_{AD}(F) \to H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))^\vee$ et de l'homomorphisme précédent.

Soit $m \geq 1$ un entier, notons F_m l'extension non ramifiée de F de degré m. On dispose de l'homomorphisme de corestriction $H^1(W_{F_m}, Z(\hat{G}_{SC})) \xrightarrow{Cores_m} H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))$ et la suite (2) s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \to & H^1(W_{\mathbb{F}_{q^m}}, Z(\hat{G}_{SC})^{I_F}) & \to & H^1(W_{F_m}, Z(\hat{G}_{SC})) & \to & H^1(I_F, Z(\hat{G}_{SC})) \\
 & & \downarrow cores_m & & \downarrow Cores_m & & \downarrow C_m \\
1 & \to & H^1(W_{\mathbb{F}_q}, Z(\hat{G}_{SC})^{I_F}) & \xrightarrow{\iota} & H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC})) & \to & H^1(I_F, Z(\hat{G}_{SC}))
\end{array}$$

L'homomorphisme C_m se décrit de la façon suivante : pour un cocycle $u : I_F \to Z(\hat{G}_{SC})$, $C_m(u)$ est le cocycle $\sigma \mapsto \prod_{j=0,\ldots,m-1} Fr^{-j}(u(Fr^j \sigma Fr^{-j}))$. On voit sur cette formule que $C_m = 0$ si m est assez divisible (on entend par là qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que la propriété soit vérifiée pour m divisible par N). D'autre part, l'homomorphisme $cores_m$ est surjectif : il s'identifie à l'homomorphisme naturel $(Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})_{\Gamma_{\mathbb{F}_{q^m}}} \to (Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})_{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. De ces deux propriétés résulte l'assertion suivante, où on note $Cores_m^\vee$ et $\iota^\vee$ les homomorphismes duaux de $Cores_m$ et ι :

(3) $Ker(Cores_m^\vee) = Ker(\iota^\vee)$ si m est assez divisible.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
G(F) & \xrightarrow{\pi} & G_{AD}(F) & \xrightarrow{a_{G_{AD}}} & H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))^\vee & \xrightarrow{\iota^\vee} & H^1(W_{\mathbb{F}_q}, Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})^\vee \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow Cores_m^\vee & & \downarrow cores_m^\vee \\
G(F_m) & \xrightarrow{\pi_m} & G_{AD}(F_m) & \xrightarrow{a_{G_{AD},m}} & H^1(W_{F_m}, Z(\hat{G}_{SC}))^\vee & \xrightarrow{\iota_m^\vee} & H^1(W_{\mathbb{F}_{q^m}}, Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})^\vee
\end{array}$$

Notons H_m l'image dans $G_{AD}(F)$ de $G(F_m) \cap G(F^{nr})^\sharp$, autrement dit le sous-groupe des $g \in G_{AD}(F)$ dont l'image dans $G_{AD}(F_m)$ appartient à l'image de $\pi_m : G(F_m) \to G_{AD}(F_m)$. On sait que l'image de π^m est le noyau de $a_{G_{AD},m}$. Donc H_m est le noyau de $Cores_m^\vee \circ a_{G_{AD}}$. Si m est assez divisible, en utilisant (3), c'est le noyau de $\iota^\vee \circ a_{G_{AD}}$, c'est-à-dire de $w_{G_{AD}}$. Cela prouve que $H_m = G_{AD}(F)_0$ si m est assez divisible. Puisque $\pi^{nr}(G(F^{nr})^\sharp)$ est la réunion des H_m, cela démontre (1).

L'assertion (1) permet de définir un homomorphisme $\delta : G_{AD}(F)_0 \to (Z(G)^{I_F})_{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$: pour $g \in G_{AD}(F)_0$, on choisit $g' \in G(F^{nr})^\sharp$ tel que $\pi^{nr}(g') = g$ et $\delta(g)$ est l'image de $g'Fr(g')^{-1}$ dans $(Z(G)^{I_F})_{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Il est immédiat que le noyau de δ est $\pi(G(F))$. Soit $s \in S(G)$. D'après [**?**] proposition 3, le groupe $K^0_{AD,s}$ est égal à $K^\dagger_{AD,s} \cap G_{AD}(F)_0$, a fortiori $K^0_{AD,s}$ est contenu dans $G_{AD}(F)_0$. Montrons que

(4) la restriction de δ à $K^0_{AD,s}$ est surjective, a fortiori δ est surjective.

Rappelons que, puisque G est simplement connexe, $K_s^0 = K_s^\dagger$. Introduisons le groupe $K^0_{s,F^{nr}}$, analogue de K_s^0 sur le corps de base F^{nr}. Soit $z \in (Z(G)^{I_F})$. On a $(Z(G)^{I_F}) \subset K^0_{s,F^{nr}}$. On voit, essentiellement grâce au théorème de Lang, qu'il existe $g \in K^0_{s,F^{nr}}$ tel que $gFr(g)^{-1} = z$. On a alors $g \in K^0_{s,F^{nr}} \cap G(F^{nr})^\sharp$. L'image $\pi^{nr}(g)$ appartient à $K^0_{AD,s}$ et son image par δ est l'image de z dans $(Z(G)^{I_F})_{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Cela prouve (4).

Soit $s \in S(G)$. L'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est somme des droites portées par les éléments de $fc(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$, c'est-à-dire les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères cuspidaux à support nilpotent et invariants par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Le groupe $K^\dagger_{AD,s}$ agit naturellement sur $C(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. La définition géométrique des faisceaux-caractères entraîne que cette action conserve l'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ en permutant les droites précédentes. Fixons une telle droite, portée par une fonction caractéristique f. Fixons un élément $N \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$ dans le support de f et une représentation irréductible ϵ de $Z_{G_s}(N)/Z_{G_s}(N)^0$ déterminant cette fonction à une constante près, cf. **??**. Le groupe $Z(G)^{I_F}$ se plonge naturellement dans $Z(G_s) \subset Z_{G_s}(N)$. Notons ϵ_G le caractère de $Z(G)^{I_F}$ par lequel ce groupe agit sur ϵ, via ce plongement. Parce que la classe de ϵ est conservée par l'action galoisienne, ϵ_G se quotiente en un caractère de $(Z(G)^{I_F})_{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Notons $K^\dagger_{AD,s}(f)$ le sous-groupe de $K^\dagger_{AD,s}$ formé des éléments qui conservent la droite $\mathbb{C}f$. Ce groupe agit sur cette droite par un caractère ξ_f. Montrons que

(5) $K^0_{AD,s} \subset K^\dagger_{AD,s}(f)$ et la restriction de ξ_f à $K^0_{AD,s}$ coïncide avec $\epsilon_G \circ \delta$.

Soit $g \in K^0_{AD,s}$. Grâce à (1), on peut relever g en un élément $g' \in K_s^{nr} \cap G(F^{nr})^\sharp$. L'action de g sur $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est la même que celle de g'. Il résulte immédiatement des définitions que cette dernière conserve notre faisceau-caractère et agit sur sa fonction-caractéristique par multiplication par $\epsilon_G(g'Fr(g')^{-1})$, c'est-à-dire par $\epsilon_G \circ \delta(g)$. D'où (5).

Le groupe $G_{AD}(F)$ agit naturellement dans $I(\mathfrak{g}(F))$ en conservant le sous-espace $FC(\mathfrak{g}(F))$. Quand on identifie ce dernier espace à l'espace (1) du paragraphe **??**, l'action se décrit de la façon suivante. Soient $g \in G_{AD}(F)$ et $s \in \underline{S}(G)$. On choisit $h \in G(F)$ de sorte que $hgs \in \underline{S}(G)$. Posons $g \star s = hgs$. Pour $f \in FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$, la fonction $f \circ ad(hg)^{-1}$ appartient à $FC(\mathfrak{g}_{g\star s}(\mathbb{F}_q))$, on la note $g \star f$. Ces constructions ne dépendent pas du choix de h. On obtient une action $(g,s) \mapsto g \star s$ de $G_{AD}(F)$ sur $\underline{S}(G)$ et une action $f \mapsto g \star f$ de $G_{AD}(F)$ sur $FC(\mathfrak{g}(F))$, qui est l'action cherchée. Les restrictions de ces actions à $\pi(G(F))$ sont bien sûr triviales.

Les considérations qui précèdent conduisent à la description suivante de l'action de $G_{AD}(F)$ sur $FC(\mathfrak{g}(F))$. Fixons un sous-ensemble $\underline{S}(G_{AD}) \subset \underline{S}(G)$ de représentants des orbites de l'action $(g,s) \mapsto g \star s$ de $G_{AD}(F)$ dans $\underline{S}(G)$. Pour tout $s \in \underline{S}(G_{AD})$, fixons un ensemble $\mathcal{B}_s \subset fc(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ de sorte que les droites $\mathbb{C}f$ pour $f \in \mathcal{B}_s$ forment un ensemble de représentants des orbites de l'action de $K^\dagger_{AD,s}$ dans l'ensemble des droites portées par des éléments de $fc(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. Pour $f \in \mathcal{B}_s$, notons Ξ_f l'ensemble des caractères de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ dont la restriction à $K^\dagger_{AD,s}(f)$ coïncide avec ξ_f. Pour tout $\xi \in \Xi_f$, on définit la fonction

$$f_\xi = \sum_{g \in \pi(G(F))K^\dagger_{AD,s}(f)\backslash G_{AD}(F)} \xi^{-1}(g) g \star f.$$

Alors $FC(\mathfrak{g}(F))$ a pour base les f_ξ quand s décrit $\underline{S}(G_{AD})$, f décrit $\mathcal{B}_s$ et ξ décrit Ξ_f. Cette base est orthogonale pour le produit scalaire elliptique.

Remarquons que la fonction f_ξ appartient à $I_{cusp,\xi}(\mathfrak{g}(F))$. En utilisant les notations de (5) pour la fonction f et en utilisant (4) et (5), on voit aussi que l'élément $\xi = \mathbf{1}$ ne peut appartenir à Ξ_f que si ϵ vaut 1 sur l'image de $Z(G)^{I_F}$ dans $Z_{G_s}(N)$.

1.8 Données endoscopiques

Pour ce paragraphe, on lève les hypothèses sur G en supposant seulement que c'est un groupe réductif connexe défini sur F. On fixe un sous-groupe de Borel $\hat{B}$ de $\hat{G}$ et un sous-tore maximal $\hat{T}$ de $\hat{B}$, tous deux conservés par l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$. On note $Endo_{ell}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G (on renvoie à [?] I.1.5 pour les définitions). Soit $\mathbf{G}' = (G', s, \mathcal{G}')$ une telle donnée. Le groupe $\hat{G}'$ s'identifie à $Z_{\hat{G}}(s)^0$. Il est muni d'une action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. A équivalence près, on peut supposer et on suppose que $s \in \hat{T}$ et qu'il existe un sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ de $\hat{G}'$ contenant $\hat{T}$ et un épinglage $\hat{\mathcal{E}}'$ de la paire $(\hat{B}', \hat{T})$ de sorte que $\hat{B}'$, $\hat{T}$ et $\hat{\mathcal{E}}'$ soient conservées par cette action galoisienne. On suppose fixé un facteur de transfert $\Delta^{\mathbf{G}'}$ unitaire sur $\mathfrak{g}'(F) \times \mathfrak{g}(F)$.

Remarque. Plus précisément, ce facteur est défini sur le sous-ensemble des couples (X', X) d'éléments semi-simples tels que X' soit G-régulier et X soit régulier (rappelons que X' est dit G-régulier si et seulement si la classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}(F)$ correspondant à celle de X' est formée d'éléments réguliers). Pour ce que nous allons faire, on peut considérer que $\Delta^{\mathbf{G}'}$ est nul hors de ce sous-ensemble.

Pour $f' \in C_c^\infty(\mathfrak{g}'(F))$ et $X' \in \mathfrak{g}'_{reg}(F)$, on définit l'intégrale orbitale stable $S^{G'}(X', f') = \sum_{Y'} I^{G'}(Y', f')$ où Y' parcourt les éléments stablement conjugués de X' à conjugaison près par $G'(F)$. On note $SI(\mathfrak{g}'(F))$ le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}'(F))$ par le sous-espace des f' telles que $S^{G'}(X', f') = 0$ pour tout $X' \in \mathfrak{g}'_{reg}(F)$. On note $SI_{cusp}(\mathfrak{g}'(F))$ l'image de $I_{cusp}(\mathfrak{g}'(F))$ dans $SI(\mathfrak{g}'(F))$.

On note $Aut(\mathbf{G}')$ le groupe des $x \in \hat{G}$ tels que $xsx^{-1} \in Z(\hat{G})s$ et $x\mathcal{G}'x^{-1} = \mathcal{G}'$ (un tel x est appelé un automorphisme de $\mathbf{G}'$). Sa composante neutre est égale à $\hat{G}'$ et on pose $Out(\mathbf{G}') = Aut(\mathbf{G}')/\hat{G}'$ (ce groupe est appelé celui des automorphismes extérieurs de $\mathbf{G}'$). Soit $x \in Aut(\mathbf{G}')$. Quitte à multiplier x par un élément de $\hat{G}'$, on peut supposer que $Ad(x)$ conserve $\hat{\mathcal{E}}'$. Alors $Ad(x)$ commute à l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}'$ de G' conservée par l'action galoisienne sur G'. C'est possible puisque G' est quasi-déployé. Il correspond alors à $Ad(x)$ un automorphisme α_x de G' défini sur F et conservant $\mathcal{E}'$. Fixons un élément $s_{sc} \in \hat{G}_{SC}$ qui a même image dans $\hat{G}_{AD}$ que s. Puisque $xsx^{-1} \in Z(\hat{G})s$, il existe $z_x \in Z(\hat{G}_{SC})$ tel que $xs_{sc}x^{-1} = z_x s_{sc}$. On vérifie que z_x est fixe par l'action galoisienne (toutes les actions galoisiennes coïncident sur le groupe $Z(\hat{G}_{SC})$). Rappelons que les deux groupes $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}$ et $H^1(\Gamma_F, G^*_{AD})$ sont en dualité, on note $(.,.)$ l'accouplement en question. Soient $X' \in \mathfrak{g}'(F)$ et $X \in \mathfrak{g}(F)$ deux éléments semi-simples qui se correspondent, avec $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Alors $\alpha_x(X')$ et X se correspondent aussi. Rappelons (cf. **??**) qu'à G est associé un élément $u_G \in H^1(\Gamma_F; G^*_{AD})$.

Lemme. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$\Delta^{\mathbf{G}'}(\alpha_x(X'), X) = (z_x, u_G)^{-1}\Delta^{\mathbf{G}'}(X', X).$$

C'est un exercice sur les facteurs de transfert.

On définit une action de $Aut(\mathbf{G}')$ sur $SI(\mathfrak{g}'(F))$ par la formule $x(f)(X') = (z_x, u_G)^{-1}f(\alpha_x^{-1}(X'))$. Elle se quotiente en une action de $Out(\mathbf{G}')$.

Le transfert est l'homomorphisme $transfert^{\mathbf{G}'} : I(\mathfrak{g}(F)) \to SI(\mathfrak{g}'(F))$ défini par les égalités

$$S^{G'}(X', transfert^{\mathbf{G}'}(f)) = \sum_X \Delta^{\mathbf{G}'}(X', X) I^G(X, f)$$

pour tout élément G-régulier X' de $\mathfrak{g}'(F)$, où X parcourt $\mathfrak{g}(F)$ modulo conjugaison par $G(F)$. Notons $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}')$ le sous-espace des $f\in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ telles que $transfert^{\mathbf{G}''}(f)=0$ pour tout $\mathbf{G}''\in Endo_{ell}(G)$, $\mathbf{G}''\neq\mathbf{G}'$. Alors le transfert se restreint en un isomorphisme

$$(1)\qquad transfert^{\mathbf{G}'}:I_{cusp}(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}')\simeq SI_{cusp}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')},$$

où l'exposant $Out(\mathbf{G}')$ signifie, comme c'est l'usage, que l'on prend les invariants par l'action de ce groupe. Cet isomorphisme est une similitude pour les produits scalaires elliptiques. Précisément, on a l'égalité

$$(f,f')_{ell}=c(G,\mathbf{G}')(transfert^{\mathbf{G}'}(f),transfert^{\mathbf{G}'}(f'))_{ell}$$

pour tous $f,f'\in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}')$, où $c(G,\mathbf{G}')$ est la constante définie en [?] I.4.17.

On sait que la donnée $\mathbf{G}'$ détermine un caractère $\xi_{\mathbf{G}'}\in\Xi$ tel que, pour deux éléments semi-simples $X'\in\mathfrak{g}'(F)$ et $X\in\mathfrak{g}(F)$ qui se correspondent, avec $X\in\mathfrak{g}_{reg}(F)$, on ait l'égalité $\Delta^{\mathbf{G}'}(X',g^{-1}Xg)=\xi_{\mathbf{G}'}(g)^{-1}\Delta^{\mathbf{G}'}(X',X)$ pour tout $g\in G_{AD}(F)$. On a rappelé le calcul de ce caractère en [?] I.2.7 (on a $\xi_{\mathbf{G}'}=\omega_{\sharp}^{-1}$ avec les notations de cette référence). On fixe $s_{sc}\in\hat{G}_{SC}$ d'image s dans $\hat{G}=\hat{G}_{AD}$. Pour $\sigma\in\Gamma_F$, l'automorphisme $\sigma_{G'}$ de $\hat{T}$ se relève en un automorphisme encore noté $\sigma_{G'}$ de l'image réciproque de $\hat{T}$ dans $\hat{G}_{SC}$. L'application $\sigma\mapsto s_{sc}^{-1}\sigma_{G'}(s_{sc})$ prend ses valeurs dans $Z(\hat{G}_{SC})$ et définit un élément de $H^1(\Gamma_F,Z(\hat{G}_{SC}))$ que l'on restreint en un élément de $H^1(W_F,Z(\hat{G}_{SC}))$. Ce dernier groupe s'identifie à Ξ par l'homomorphisme de Langlands. Le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ est l'élément de Ξ auquel s'identifie le cocycle précédent. Remarquons que l'on a l'inclusion $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}')\subset I_{cusp,\xi_{\mathbf{G}'}}(\mathfrak{g}(F))$.

On a l'égalité

$$(2)\qquad I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))=\oplus_{\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G)}I_{cusp}(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}').$$

Cette décomposition est orthogonale pour le produit scalaire elliptique. Le lien entre cette décomposition et l'égalité (1) du paragraphe **??** est l'égalité

(3) $I_{cusp,\xi}(\mathfrak{g}(F))=\oplus_{\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G);\xi_{\mathbf{G}'}=\xi}I_{cusp}(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}')$,
pour tout $\xi\in\Xi$.

Pour $\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G)$, on pose $FC(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}')=FC(\mathfrak{g}(F))\cap I_{cusp}(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}')$. L'ensemble $Endo_{ell}(G)$ contient une donnée "principale" $\mathbf{G}=(G^*,1,{}^LG)$. Dans le cas où G est quasi-déployé, on pose simplement $I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}(F))=I_{cusp}(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G})$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))=FC(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G})$. L'espace $I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ s'identifie à $SI_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. On a démontré dans [?] les analogues de (1) et (2) pour nos espaces $FC(\mathfrak{g}(F))$, à savoir

- pour tout $\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G)$, le transfert se restreint en un isomorphisme

$$transfert^{\mathbf{G}'}:FC(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}')\simeq FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')},$$

- on a l'égalité

$$FC(\mathfrak{g}(F))=\oplus_{\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G)}FC(\mathfrak{g}(F),\mathbf{G}').$$

Il est commode de poser

$$FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))=\oplus_{\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G)}FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}.$$

On munit cet espace d'un produit scalaire elliptique en posant

$$(\oplus_{\mathbf{G}'}f_{\mathbf{G}'},\oplus_{\mathbf{G}'}f'_{\mathbf{G}'})_{ell}=\sum_{\mathbf{G}'}c(G,\mathbf{G}')(f_{\mathbf{G}'},f'_{\mathbf{G}'})_{ell},$$

pour tous $\oplus_{\mathbf{G}'}f_{\mathbf{G}'},\oplus_{\mathbf{G}'}f'_{\mathbf{G}'}\in FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$. On note $transfert:FC(\mathfrak{g}(F))\to FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ la somme sur $\mathbf{G}'$ des applications $transfert^{\mathbf{G}'}$. Alors

(4) l'application $transfert$ est une isométrie de $FC(\mathfrak{g}(F))$ sur $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$.

1.9 Description des données endoscopiques elliptiques

On impose de nouveau dans ce paragraphe et le suivant que G est simplement connexe et absolument quasi-simple. On note $\hat{\Sigma}$ l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et $\hat{\Sigma}^+$, resp. $\hat{\Delta}$, le sous-ensemble de racines positives, resp. simples, déterminé par $\hat{B}$. Notons $\hat{\mathcal{D}}$ le diagramme de Dynkin dont l'ensemble de sommets est $\hat{\Delta}$. Les hypothèses sur G impliquent que $\hat{G}$ est adjoint et que $\hat{\mathcal{D}}$ est connexe. Notons $\hat{\alpha}_0$ l'opposée de la plus grande racine dans $\hat{\Sigma}^+$ et $\hat{\Delta}_a = \{\hat{\alpha}_0\} \cup \hat{\Delta}$. En écrivant $-\hat{\alpha}_0$ dans la base $\hat{\Delta}$, on obtient une relation

$$(1) \qquad \sum_{\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}_a} d(\hat{\alpha})\hat{\alpha} = 0$$

où $d(\hat{\alpha}_0) = 1$ et $d(\hat{\alpha}) \in \mathbb{N}_{>0}$ pour $\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}$. On sait que l'espace des relations entre les éléments de $\hat{\Delta}_a$ est la droite portée par la relation (1). Cela implique que la relation (1) est la seule relation linéaire entre les éléments de $\hat{\Delta}_a$ dont les coefficients sont entiers relatifs et dont au moins un coefficient vaut 1.

Notons $\hat{\mathcal{D}}_a$ le diagramme de Dynkin complété dont l'ensemble de sommets est $\hat{\Delta}_a$. Notons $Aut(\hat{\mathcal{D}}) \subset Aut(\hat{\mathcal{D}}_a)$ les groupes d'automorphismes de $\hat{\mathcal{D}}$ et $\hat{\mathcal{D}}_a$. Remarquons que, puisque $\hat{G}$ est semi-simple (en fait adjoint), le groupe $Aut(\hat{\mathcal{D}}_a)$ se plonge naturellement dans le groupe d'automorphismes de $\hat{T}$. Puisque $(\hat{B}, \hat{T})$ est conservée par l'action galoisienne, l'action galoisienne se restreint en une action sur $\hat{\Delta}$ et $\hat{\Delta}_a$ et peut être considérée comme un homomorphisme $\Gamma_F \to Aut(\hat{\mathcal{D}})$. Comme on le sait, la donnée de l'action galoisienne sur $\hat{G}$ est d'ailleurs équivalente à celle de cet homomorphisme. On note E_G l'extension galoisienne finie de F telle que Γ_{E_G} soit le noyau de cet homomorphisme. Notons $\hat{W}$ le groupe de Weyl de $\hat{G}$ relatif à $\hat{T}$ et $\hat{\Omega}$ le sous-groupe des éléments de $\hat{W}$ qui conservent $\hat{\Delta}_a$. L'application qui à un élément de $\hat{\Omega}$ associe son action sur $\hat{\mathcal{D}}_a$ identifie $\hat{\Omega}$ à un sous-groupe de $Aut(\hat{\mathcal{D}}_a)$. On sait que c'est un sous-groupe abélien distingué de $Aut(\hat{\mathcal{D}}_a)$ et que $Aut(\hat{\mathcal{D}}_a)$ est le produit semi-direct de $\hat{\Omega}$ par $Aut(\hat{\mathcal{D}})$, cf. [?] VI.4.3. Signalons que, pour $\tau \in Aut(\hat{\mathcal{D}}_a)$, on a $d(\tau(\hat{\alpha})) = d(\hat{\alpha})$ pour tout $\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}_a$: en appliquant τ^{-1} à (1), on obtient $\sum_{\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}_a} d(\tau(\hat{\alpha}))\hat{\alpha} = 0$; c'est une relation entre les éléments de $\hat{\Delta}_a$ à coefficients entiers dont au moins l'un d'eux vaut 1 donc c'est la relation (1).

Notons $\mathcal{E}_{ell}(G)$ l'ensemble des couples $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O})$ où

$\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ est un homomorphisme de Γ_F dans $Aut(\hat{\mathcal{D}}_a)$ tel qu'il existe une application $\omega_{G'} : \Gamma_F \to \hat{\Omega}$ de sorte que $\sigma_{G'} = \omega_{G'}(\sigma)\sigma_G$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$;

$\mathcal{O}$ est un sous-ensemble non vide de $\hat{\Delta}_a$ qui est conservé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ et qui forme une unique orbite pour cette action.

Disons que deux tels couples $(\sigma \mapsto \sigma_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$ et $(\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$ sont équivalents si et seulement s'il existe $\omega \in \hat{\Omega}$ tel que $\mathcal{O}_2 = \omega(\mathcal{O}_1)$ et $\sigma_{G'_2} = \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Notons $E_{ell}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathcal{E}_{ell}(G)$.

Nous allons associer à tout élément de $\mathcal{E}_{ell}(G)$ une donnée endoscopique de G. La construction dépend du choix de racines de l'unité dans $\mathbb{C}^\times$. Précisément, pour tout entier $d \geq 1$, on fixe un élément $\zeta_d \in \mathbb{C}^\times$ qui est une racine de l'unité d'ordre d.

Considérons un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. Posons $d = \sum_{\hat{\alpha} \in \mathcal{O}} d(\hat{\alpha})$. Soit s l'unique élément de $\hat{T}$ tel que $\hat{\alpha}(s) = 1$ pour $\hat{\alpha} \in \hat{\Delta} - (\mathcal{O} \cap \hat{\Delta})$ et $\hat{\alpha}(s) = \zeta_d$ pour $\hat{\alpha} \in \mathcal{O} \cap \hat{\Delta}$. La relation (1) implique que ces égalités s'étendent à $\hat{\Delta}_a$, c'est-à-dire $\hat{\alpha}(s) = 1$ pour $\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}_a - \mathcal{O}$ et $\hat{\alpha}(s) = \zeta_d$ pour $\hat{\alpha} \in \mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}$ est stable par l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$, le point s est fixe par cette action. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^0$. Ce groupe contient $\hat{T}$. Notons $\mathcal{G}'$ le sous-ensemble de ${}^LG$ formé des éléments $(g\dot{\omega}_{G'}(\sigma), \sigma)$ pour $g \in \hat{G}'$ et $\sigma \in \Gamma_F$, où $\dot{\omega}_{G'}(\sigma)$ est un représentant quelconque de $\omega_{G'}(\sigma)$ dans $Norm_{\hat{G}}(\hat{T})$. L'ensemble $\mathcal{G}'$ un groupe qui normalise $\hat{G}'$. On en déduit de la façon habituelle une L-action de Γ_F sur $\hat{G}'$ et on introduit le groupe réductif connexe G' défini sur F et quasi-déployé dont $\hat{G}'$, muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. On vérifie que le triplet $\mathbf{G}' = (G', s, \mathcal{G}')$ est une donnée endoscopique elliptique de G. Il existe un sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ de $\hat{G}'$ contenant $\hat{T}$ de sorte que $\hat{\Delta}_a - \mathcal{O}$ soit l'ensemble de racines simples de $\hat{T}$ dans $\hat{G}'$ associé à $\hat{B}'$.

Le groupe d'automorphismes extérieurs $Out(\mathbf{G}')$ est égal à celui des $\omega \in \hat{\Omega}$ tels que $\mathcal{O} = \omega(\mathcal{O})$ et $\sigma_{G'} = \omega\sigma_{G'}\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

Notons $E_{G'}$ l'extension galoisienne de F telle que $\Gamma_{E_{G'}}$ soit le noyau de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. On a prouvé en [?] 1.4(4) que

(2) $E_G \subset E_{G'}$ et la restriction de $\omega_{G'}$ à Γ_{E_G} se quotiente en un homomorphisme injectif de $\Gamma_{E_{G'}/E_G}$ dans $\hat{\Omega}$.

On a prouvé en [?] 2.3 que l'application qui, à $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$, associe $\mathbf{G}'$, se quotiente en une bijection de $E_{ell}(G)$ sur $Endo_{ell}(G)$.

1.10 A propos du centre de G'

Considérons un élément $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O})$ de $\mathcal{E}_{ell}(G)$, notons $\mathbf{G}'$ la donnée endoscopique elliptique qui lui correspond. Fixons $\hat{\alpha} \in \mathcal{O}$ et notons $E_{\mathcal{O}}$ l'extension de F telle que $\Gamma_{E_{\mathcal{O}}}$ soit l'ensemble des $\sigma \in \Gamma_F$ tels que $\sigma_{G'}(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$. Puisque $\mathcal{O}$ forme une unique orbite pour l'action galoisienne, la classe de conjugaison de $E_{\mathcal{O}}$ par Γ_F ne dépend pas du choix de $\hat{\alpha}$.

Lemme. *Si $E_{\mathcal{O}}/F$ n'est pas totalement ramifiée, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$. Si $E_{\mathcal{O}}/F$ est totalement ramifiée, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \simeq FC^{st}(\mathfrak{g}'_{SC}(F))$.*

Preuve. Notons $A_{G'}^{nr}$ le plus grand sous-tore central de G' déployé sur F^{nr}. D'après [?], remarque du paragraphe 11, il suffit de prouver que $A_{G'}^{nr} = \{1\}$ si et seulement si $E_{\mathcal{O}}/F$ est totalement ramifiée. Pour tout ensemble V, notons $\mathbb{Q}[V]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de base V. Posons $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}} = X^*(\hat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On a un homomorphisme naturel $P : \mathbb{Q}[\hat{\Delta}_a] \to X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$ dont le noyau est la droite engendrée par la relation **??** (1). On a l'égalité $P(\mathbb{Q}[\hat{\Delta}_a]^{I_F}) = X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{I_F}$. Puisque $\hat{\Delta}_a - \mathcal{O}$ est une base de l'ensemble de racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}'$, la condition $A_{G'}^{nr} = \{1\}$ équivaut à ce que $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{I_F}$ soit contenu dans $P(\mathbb{Q}[\hat{\Delta}_a - \mathcal{O}]^{I_F})$. Cela équivaut à ce que $\mathbb{Q}[\hat{\Delta}_a - \mathcal{O}]^{I_F}$ soit de codimension 1 dans $\mathbb{Q}[\hat{\Delta}_a]^{I_F}$. Ou encore à ce que $\mathbb{Q}[\mathcal{O}]^{I_F}$ soit de dimension 1. Or la représentation de Γ_F dans $\mathbb{Q}[\mathcal{O}]$ est l'induite de $\Gamma_{E_{\mathcal{O}}}$ à Γ_F de la représentation triviale de $\Gamma_{E_{\mathcal{O}}}$. La dimension de $\mathbb{Q}[\mathcal{O}]^{I_F}$ est le nombre d'éléments de l'ensemble de doubles classes $\Gamma_{E_{\mathcal{O}}}\backslash\Gamma_F/I_F$. Ce nombre vaut 1 si et seulement si $E_{\mathcal{O}}/F$ est totalement ramifiée. $\square$

1.11 Extensions diédrales

Soit K/F une extension galoisienne de degré n premier à p. Rappelons que, si K/F est non ramifiée ou totalement ramifiée, $\Gamma_{K/F}$ est cyclique. Il existe une telle extension totalement ramifiée si et seulement si F contient les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire $\delta_n(q-1) = 1$. Dans ce cas, il y a n telles extensions $K = F(\alpha)$ où $\alpha^n = \varpi_F u$, u parcourt $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,n}$. On note E_0 l'extension quadratique non ramifiée de F et Q l'extension biquadratique de F.

Fixons une extension quadratique E/F. On considère une extension galoisienne K/F contenant E et telle que K/E soit cyclique de degré $n > 1$. Fixons un générateur ρ de

$\Gamma_{K/E}$ et un élément $\delta \in \Gamma_{K/F} - \Gamma_{K/E}$. On impose que ces éléments vérifient les égalités $\delta^2 = 1$ et $\delta\rho = \rho^{-1}\delta$. Remarquons que

(1) L'extension K/F n'est pas cyclique :

En effet, si elle est cyclique, elle est commutative. L'égalité $\delta\rho = \rho^{-1}\delta$ implique $\rho = \rho^{-1}$ et $n = 2$. Il y a deux éléments distincts d'ordre 2, ρ et δ. C'est impossible dans le cas cyclique.

On a aussi

(2) la plus grande extension non ramifiée de F contenue dans K est au plus d'ordre 2.

Preuve. Soit H cette extension et $p : \Gamma_{K/F} \to \Gamma_{H/F}$ la projection. Puisque ce dernier groupe est commutatif, l'égalité $p(\delta\rho) = p(\rho^{-1}\delta)$ entraîne $p(\rho)^2 = 1$. On a aussi $p(\delta)^2 = 1$. Puisque $\Gamma_{H/F}$ est cyclique et est engendré par $p(\rho)$ et $p(\delta)$, il est au plus d'ordre 2.

Supposons $E = E_0$. Prouvons que

(3) une extension K/F comme ci-dessus existe si et seulement si $\delta_n(q+1) = 1$; dans ce cas K est unique et K/E_0 est totalement ramifiée ; on a K=$E_0(\alpha)$ où $\alpha^n = \varpi_F$

Preuve. D'après (2), K/E_0 est totalement ramifiée. Donc $K = E_0(\alpha)$ avec $\alpha^n = u\varpi_F$ pour un $u \in \mathfrak{o}_E^\times$ et E_0 contient les racines n-ièmes de l'unité. On a $\rho(\alpha) = \zeta\alpha$ pour une racine primitive ζ de 1 d'ordre n. On a aussi $\delta(\alpha) = v\alpha$ pour un $v \in \mathfrak{o}_K^\times$. On a $\delta(\alpha)^n = \delta(u)\varpi_F$, donc $v^n = \delta(u)u^{-1}$. Cette équation définissant une extension non ramifiée de E_0, puisqu'elle a des solutions dans K, ces solutions sont dans E_0 donc $v \in \mathfrak{o}_{E_0}^\times$. On a $\delta\rho(\alpha) = \zeta^q v\alpha$, $\rho^{-1}\delta(\alpha) = \zeta^{-1}v\alpha$ donc $\zeta^{q+1} = 1$, ce qui implique que n divise $q+1$. L'égalité $\delta^2 = 1$ entraîne $v\delta(v) = 1$ donc (Hilbert 90) il existe $x \in \mathfrak{o}_{E_0}^\times$ tel que $v = \delta(x)x^{-1}$. On a alors $\delta(ux^{-n}) = ux^{-n}$, c'est-à-dire $ux^{-n} \in \mathfrak{o}_F^\times$. On peut remplacer u par ux^{-n} et supposer $u \in \mathfrak{o}_F^\times$. On a aussi $\mathfrak{o}_F^\times \subset \mathfrak{o}_{E_0}^{\times,n}$ car il en est ainsi en réduction : la norme est surjective sur $\mathbb{F}_q^\times$ et, puisque n divise $q+1$, toute norme est une puissance n-ième. On peut donc remplacer u par 1 et alors $\alpha^n = \varpi_F$. Inversement, si $\delta_n(q+1) = 1$, on voit facilement que l'extension K indiquée vérifie les conditions requises.

Supposons maintenant que E/F est ramifiée. Alors

(4) on a $n = 2$ et $K = Q$.

Preuve. Notons H la plus grande sous-extension non ramifiée de K et $p : \Gamma_{K/F} \to \Gamma_{H/F}$ la projection naturelle. Si $H = F$, K/F est totalement ramifiée donc cyclique. Puisque $[K : F] = 2n$, $\Gamma_{K/F}$ contient un élément d'ordre $2n$. Or un tel élément ne peut pas être dans $\Gamma_{K/E}$ et tout élément de $\Gamma_{K/F} - \Gamma_{K/E}$ est d'ordre 2. Donc $n = 1$ ce qui est contraire à notre hypothèse. Alors (2) entraîne que H/F est de degré 2, c'est-à-dire $H = E_0$. On a $E_0 \neq E$ puisque E/F est ramifiée donc $p(\rho) \neq 1$, c'est-à-dire que $p(\rho)$ est l'unique élément non trivial de $\Gamma_{E_0/F}$. Donc l'un des éléments δ ou $\delta\rho^{-1}$ appartient à Γ_{K/E_0}. Notons δ' cet élément. L'élément $\rho' = \rho^2$ appartient aussi à Γ_{K/E_0}. Ce dernier groupe est cyclique puisque K/E_0 est totalement ramifiée. On a $\delta'\rho' = \rho'^{-1}\delta'$ donc $\rho' = \rho'^{-1}$ et $\rho'^2 = 1$. On a aussi $\delta'^2 = 1$ et $\delta' \neq 1$ (car δ' agit non trivialement sur E). La cyclicité entraîne que ρ' est égal à δ' ou à 1. Il n'est pas égal à δ' car ρ' agit trivialement sur E. Donc $\rho' = 1$, i.e. $\rho^2 = 1$. Donc $n = 2$. Puisque $\rho^2 = 1$, le groupe $\Gamma_{K/F}$ est commutatif, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Inversement, bien sûr, l'extension biquadratique Q vérifie nos hypothèses.

1.12 Extensions biquadratiques

On conserve les notations du paragraphe précédent. Notons Q_0 l'extension biquadratique de E_0. On a

(1) l'extension Q_0/F est galoisienne et $\Gamma_{Q_0/F} \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

En effet, Q_0 est la composée de l'extension non ramifiée de degré 4 de F, dont le groupe de Galois est cyclique, et de l'extension $F(\sqrt{\varpi_F})/F$.

Soit E/F une extension quadratique ramifiée. Notons Q_E l'extension biquadratique de E. L'extension Q_E/F est galoisienne. Elle contient l'extension quadratique E_0 non ramifiée. Posons $\Gamma_{Q_E/E} = \{1, \rho', \rho_0, \rho''\}$ où ρ_0 est l'élément tel que $\Gamma_{Q_E/E_0E} = \{1, \rho_0\}$. Remarquons que, puisque E_0E/F est galoisienne, ρ_0 est central dans $\Gamma_{Q_E/F}$. Notons K', resp. K'', la sous-extension de Q_E telle que $\Gamma_{Q_E/K'} = \{1, \rho'\}$, resp. $\Gamma_{Q_E/K''} = \{1, \rho''\}$. Les extensions K'/F et K''/F sont totalement ramifiées. Montrons que

(2) si $\delta_4(q-1) = 1$, K' et K'' sont les deux extensions galoisiennes cycliques d'ordre 4 de F contenues dans Q_E ; l'homomorphisme naturel

$$\Gamma_{Q_E/F} \to \Gamma_{K'/F} \times \Gamma_{E_0/F} \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

est un isomorphisme ;

(3) si $\delta_4(q-1) = 0$, on peut choisir un élément $\tau \in \Gamma_{Q_E/F} - \Gamma_{Q_E/E}$ vérifiant les conditions suivantes : $\tau^2 = 1$; la conjugaison par τ fixe ρ_0 et échange ρ' et ρ'' ; le sous-corps E' de Q_E tel que $\Gamma_{Q_E/E'} = \{1, \tau, \rho_0, \tau\rho_0\}$ est l'unique extension quadratique ramifiée de F différente de E ; de plus, il n'y a pas d'extensions galoisiennes cycliques d'ordre 4 de F contenant E.

Supposons $\delta_4(q-1) = 1$. Ecrivons $E = F(\beta)$ avec $\beta^2 = \varpi_F u$, où $u \in \mathfrak{o}_F^\times$. Il y a deux extensions galoisiennes cycliques d'ordre 4 de F qui sont totalement ramifiées et qui contiennent E, à savoir $F(\alpha)$ où $\alpha^4 = \varpi_F u$ ou $\alpha^4 = \varpi_F uv$, où $v \in \mathfrak{o}_F^{\times,2} - \mathfrak{o}_F^{\times,4}$. Elles sont forcément contenues dans Q_E donc ce sont K' et K''. Puisque K'/F est totalement ramifiée et E_0/E est non ramifiée, on a $Q_E = K'E_0$ et la dernière assertion de (2) s'ensuit. La structure de $\Gamma_{Q_E/F}$ entraîne que ce groupe n'admet que deux quotients isomorphes à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que Q_E/F ne contient que deux sous-extensions galoisiennes cycliques d'ordre 4 qui sont K' et K''.

Supposons maintenant $\delta_4(q-1) = 0$. Si K/F est une extension galoisienne cyclique d'ordre 4 et contenant E, elle ne peut pas contenir E_0, sinon l'homomorphisme naturel $\Gamma_{K/F} \to \Gamma_{E/F} \times \Gamma_{E_0/F}$ serait un isomorphisme et $\Gamma_{K/F}$ ne serait pas cyclique. Donc K/F est totalement ramifiée, ce qui est impossible puisque $\delta_4(q-1) = 0$. Cela prouve la dernière assertion de (3). Si K'/F est galoisienne, elle est cyclique puisqu'elle est totalement ramifiée. On vient de voir que c'est impossible donc K'/F n'est pas galoisienne. Il y a donc un élément $\tau \in \Gamma_{Q_E/F} - \Gamma_{Q_E/E}$ tel que $\tau\rho'\tau^{-1} \neq \rho'$. On a forcément $\tau\rho'\tau^{-1} = \rho''$ ou ρ_0 et le cas ρ_0 est exclu car ρ_0 est central. Puisque $\Gamma_{Q_E/E}$ est commutatif, l'égalité $\tau\rho'\tau^{-1} = \rho''$ est en fait vérifiée pour tout $\tau \in \Gamma_{Q_E/F} - \Gamma_{Q_E/E}$. Considérons un tel τ. L'extension EE_0/F est l'extension biquadratique Q de F et son groupe de Galois est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. L'image de τ^2 dans ce groupe est triviale donc $\tau^2 \in \Gamma_{Q_E/EE_0} = \{1, \rho_0\}$. Si $\tau^2 = \rho_0 = \rho'\rho''$, il suffit de remplacer τ par $\rho'\tau$. On a alors $\tau^2 = 1$. Le sous-corps E' de Q_E tel que $\Gamma_{Q_E/E'} = \{1, \tau, \rho_0, \tau\rho_0\}$ est une extension quadratique de F telle que Q_E soit l'extension biquadratique de E'. Ce n'est pas E_0, sinon $\Gamma_{Q_E/F}$ serait abélienne d'après (1). Ce n'est pas E puisque $\tau \notin \Gamma_E$. C'est donc l'autre extension quadratique ramifiée de F.

1.13 Sur certaines extensions de degré 12

Montrons que

(1) il n'existe pas d'extensions galoisiennes K/F non abéliennes contenant une sous-extension galoisienne E/F de sorte que $\Gamma_{K/E} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, $\Gamma_{E/F} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Preuve. Pour une telle extension, K/E est l'extension biquadratique de E. Notons L l'extension quadratique non ramifiée de E. Puisque E/F est galoisienne, L/F l'est aussi et $\Gamma_{K/L}$ est un sous-groupe distingué d'ordre 2 de $\Gamma_{K/F}$. Un tel sous-groupe est central. Donc l'action par conjugaison de $\Gamma_{E/F}$ sur $\Gamma_{K/E}$ fixe l'élément non trivial de $\Gamma_{K/L}$. Ou bien elle fixe aussi les deux autres éléments non triviaux de $\Gamma_{K/E}$, ou bien elle les permute. L'ordre de cette dernière action ne divise pas 3 donc l'action de $\Gamma_{E/F}$ sur $\Gamma_{K/E}$ est triviale. Mais alors le groupe $\Gamma_{K/F}$ est abélien, contrairement à l'hypothèse. $\square$

2 Description des espaces $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$

2.1 Généralités

On suppose dans cette section que G est un groupe semi-simple défini sur $\mathbb{F}_q$ et absolument quasi-simple. Nous allons rappeler un certain nombre de faits bien connus concernant ces groupes. Une partie d'entre eux vaut pour les groupes de même type définis sur le corps F et nous les utiliserons ultérieurement dans ce contexte.

On suppose fixés un sous-groupe de Borel B de G et un sous-tore maximal $T \subset B$ tous deux conservés par l'action galoisienne. On note Δ l'ensemble associé de racines simples, $\mathcal{D}$ le diagramme de Dynkin et $Aut(\mathcal{D})$ son groupe d'automorphismes. On note α_0 l'opposée de la plus grande racine, $\Delta_a = \{\alpha_0\} \cup \Delta$ et $\mathcal{D}_a$ le diagramme de Dynkin complété. On utilise pour ces objets les notations de [?].

Nous rappellerons la description d'une base de $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ formée d'éléments de $fc(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$, c'est-à-dire de fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères cuspidaux à supports nilpotents et conservés par l'action galoisienne. Cette description est due à Lusztig. On utilisera pour ces fonctions les notations introduites en **??**.

On introduit les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{N}_{>0}$:

la fonction d'Euler ϕ telle que, pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $\phi(n)$ est le nombre d'éléments de $\boldsymbol{\zeta}_{n,prim}(\mathbb{C})$;

la fonction caractéristique $\delta_\square$ de l'ensemble des carrés dans $\mathbb{N}_{>0}$;

la fonction caractéristique $\delta_\triangle$ de l'ensemble des entiers de la forme $i(i+1)/2$ pour $i \in \mathbb{N}_{>0}$;

la fonction caractéristique $\delta_{2\triangle}$ de l'ensemble des entiers de la forme $i(i+1)$ pour $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

On note sgn l'unique caractère d'ordre 2 de $\mathbb{F}_q^\times$.

2.2 Type A_{n-1} déployé

On suppose G déployé de type A_{n-1} avec $n \geq 2$, c'est-à-dire $G_{SC} = SL(n)$. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{n-1} & & & \alpha_0 & & & \alpha_1 \\ \circ & & — & \circ & — & & \circ \\ | & & & & & & | \\ \circ & & \dots & \dots & \dots & & \circ \\ \alpha_{n-2} & & & & & & \alpha_2 \end{array}$$

Supposons d'abord $G = G_{SC}$. Pour $z \in \boldsymbol{\zeta}_n(\bar{\mathbb{F}}_q)$, on pose $\underline{\zeta}(z) = \prod_{i=1,...,n-1} \check{\alpha}_i(z^i)$. Alors $\underline{\zeta}$ est un isomorphisme de $\boldsymbol{\zeta}_n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ sur $Z(G)$.

Si $\delta_n(q-1) = 0$, $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$.

Supposons $\delta_n(q-1) = 1$. Soit N un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}(F)$. On a $Z_G(N)/Z_G(N)^0 \simeq Z(G)$. Alors $FC(\mathfrak{g}(F))$ a pour base la famille des fonctions $f_{N,\epsilon}$ quand ϵ décrit les caractères d'ordre n de $Z(G)$. En particulier, $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \phi(n)\delta_n(q-1)$.

Considérons maintenant un quotient $G = G_{SC}/\mathcal{Z}$, où $\mathcal{Z}$ est un sous-groupe de $Z(G_{SC})$ non trivial. Alors $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ car aucun des caractères ϵ ne se factorise par $\mathcal{Z}$.

2.3 Type A_{n-1} unitaire

On suppose G de type A_{n-1} avec $n \geq 3$ et que le Frobenius Fr agit sur $\mathcal{D}$ par l'unique automorphisme non trivial θ de ce diagramme. La seule différence avec le cas précédent est que la condition d'invariance par l'action galoisienne est maintenant $\delta_n(q+1) = 1$.

Supposons $G = G_{SC}$. Si $\delta_n(q+1) = 0$, $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Si $\delta_n(q+1) = 1$, $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ a pour base les $f_{N,\epsilon}$ pour un élément nilpotent régulier N fixé, ϵ décrivant les caractères d'ordre n de $Z(G)$. D'où $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \phi(n)\delta_n(q+1)$.

Si $G \neq G_{SC}$, $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$.

2.4 Type B_n

On suppose G de type B_n (donc déployé) avec $n \geq 2$, c'est-à-dire $G_{SC} = Spin(2n+1)$. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & & \alpha_{n-2} & & \alpha_{n-1} & & \alpha_n \\
\circ & - & \circ & - & \circ & ... & ... & \circ & - & \circ & \Rightarrow & \circ \\
 & & | & & & & & & & & & \\
 & & \alpha_0 & & & & & & & & &
\end{array}$$

sauf dans le cas $n = 2$ ou il est

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_0 \\
\circ & \Rightarrow & \circ & \Leftarrow & \circ
\end{array}$$

Supposons d'abord $G = G_{SC}$. On a $Z(G) = \{1, \check{\alpha}_n(-1)\}$. On a l'égalité $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\square(2n+1) + \delta_\triangle(2n+1)$.

Supposons $\delta_\square(2n+1) = 1$, c'est-à-dire $2n+1 = h^2$ pour un $h \in \mathbb{N}$. Les classes de conjugaison par $G(\bar{\mathbb{F}}_q)$ dans $\mathfrak{g}_{nil}(\bar{\mathbb{F}}_q)$ sont paramétrées par les partitions orthogonales de $2n+1$. Considérons un élément $N_\square \in \mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ dont la partition associée est $(2h-1, 2h-3, ..., 3, 1)$. Le groupe $Z_{G_{AD}}(N_\square)/Z_{G_{AD}}(N_\square)^0$ est isomorphe au sous-groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^h_0$ des éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^h$ de somme nulle. Plus précisément, à l'ensemble des entiers impairs $2l-1$ intervenant dans la partition est naturellement associée une base $(e_{2l-1})_{l=1,...,h}$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^h$. On définit un caractère $\epsilon_\square$ de ce groupe par $\epsilon_\square(\sum_{l=1,...,h} x_{2l-1}e_{2l-1}) = \prod_{l=1,...,h}(-1)^{lx_{2l-1}}$, les x_{2l-1} étant des éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On restreint $\epsilon_\square$ au sous-groupe $Z_{G_{AD}}(N_\square)/Z_{G_{AD}}(N_\square)^0$ puis on le relève en un caractère de $Z_G(N_\square)/Z_G(N_\square)^0$. Alors la fonction $f_{N_\square,\epsilon_\square}$ appartient à $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

Supposons $\delta_\triangle(2n+1) = 1$, c'est-à-dire $2n+1 = j(j+1)/2$ pour un entier $j \in \mathbb{N}$. On pose $m = [(j+1)/2]$. On vérifie que m est impair. Considérons un élément $N_\triangle \in \mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ dont la partition associée est $(2j+3, 2j-1, 2j-5, ...)$. Cette partition a m termes et son dernier terme est 1 si j est impair et 3 si j est pair. Le groupe $Z_G(N_\triangle)/Z_G(N_\triangle)^0$ est un groupe non commutatif qui s'inscrit dans une suite exacte

$$1 \to Z(G) \to Z_G(N_\triangle)/Z_G(N_\triangle)^0 \to Z_{G_{AD}}(N_\triangle)/Z_{G_{AD}}(N_\triangle)^0 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^m \to 0$$

Il a une unique représentation irréductible $\epsilon_\triangle$ sur laquelle $Z(G)$ agit par le caractère non trivial de ce groupe. Alors $f_{N_\triangle,\epsilon_\triangle} \in FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. On peut préciser le support de cette fonction. Réalisons le groupe G_{AD} comme le groupe spécial orthogonal d'un espace V sur $\mathbb{F}_q$ muni d'une forme quadratique Q. Alors les classes de conjugaison par $G_{AD}(\mathbb{F}_q)$ dans l'orbite géométrique de $N_\triangle$ sont naturellement paramétrées par des familles de formes quadratiques de rang 1, qui s'identifient à des familles $\underline{\eta} = (\eta_l)_{l=1,...,m}$ d'éléments de $\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2}$. Plus précisément, par les familles $\underline{\eta} = (\eta_l)_{l=1,...,m}$ qui vérifient la condition

(1) $(-1)^{(m-1)/2}\prod_{l=1,...,m}\eta_l = (-1)^n det(Q)$

dans $\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2}$. Soit $N_{\underline{\eta}}$ un élément dans la classe paramétrée par $\underline{\eta}$. La classe de conjugaison par $G_{AD}(\mathbb{F}_q)$ de $N_{\underline{\eta}}$ peut être une seule classe de conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$ ou se couper en deux telles classes. Ce dernier cas se produit si et seulement si le fixateur de $N_{\underline{\eta}}$ dans $G_{AD}(\mathbb{F}_q)$ est contenu dans l'image naturelle de $G(\mathbb{F}_q)$ dans ce groupe. Ce fixateur étant facile à décrire, on voit que la condition est que tous les η_l doivent être égaux. Compte tenu de l'égalité (1) et de l'imparité de m, la famille $\underline{\eta}$ est uniquement déterminée. Supposons que $N_\triangle$ appartient à la classe paramétrée par cette famille et notons $N'_\triangle$ un élément conjugué à $N_\triangle$ par $G_{AD}(\mathbb{F}_q)$ mais pas par $G(\mathbb{F}_q)$. Puisque ϵ se restreint en le caractère non trivial de $Z(G)$, la fonction $f_{N_\triangle,\epsilon_\triangle}$ se transforme par l'action de $G_{AD}(\mathbb{F}_q)$ selon le caractère non trivial de ce groupe. Elle est forcément nulle sur toute classe de conjugaison par $G_{AD}(\mathbb{F}_q)$ qui reste une unique classe de conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$. Par contre, ses valeurs aux points $N_\triangle$ et $N'_\triangle$ sont opposées. La dimension de $\epsilon_\triangle$ étant 2^{m-1}, on peut normaliser $f_{N_\triangle,\epsilon_\triangle}$ par $f_{N_\triangle,\epsilon_\triangle}(N_\triangle) = 2^{(m-1)/2}$, $f_{N_\triangle,\epsilon_\triangle}(N'_\triangle) = -2^{(m-1)/2}$ et $f_{N_\triangle,\epsilon_\triangle}(N) = 0$ pour tout $N \in \mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ qui n'est pas conjugué à $N_\triangle$ ou $N'_\triangle$ par un élément de $G(\mathbb{F}_q)$.

Supposons maintenant $G = G_{AD}$. Alors (quand elle existe) la fonction $f_{N_\triangle,\epsilon_\triangle}$ disparaît puisqu'elle n'est pas invariante par $G_{AD}(\mathbb{F}_q)$ et il reste (quand elle existe) la fonction $f_{N_\square,\epsilon_\square}$. D'où $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\square(2n+1)$.

2.5 Type C_n

On suppose G de type C_n (donc déployé) avec $n \geq 2$, c'est-à-dire $G_{SC} = Sp(2n)$. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha_0 & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_{n-2} & & \alpha_{n-1} & & \alpha_n \\ \circ & \Rightarrow & \circ & - & \circ & \dots\ \dots & \circ & - & \circ & \Leftarrow & \circ \end{array}$$

Supposons d'abord $G = G_{SC}$. On a $Z(G) = \{1, z\}$, où $z = \prod_{i=1,...,n}\check{\alpha}_i((-1)^i)$. On a l'égalité $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\triangle(n)$.

Supposons $\delta_\triangle(n) = 1$, c'est-à-dire $2n = k(k+1)$ pour un $k \in \mathbb{N}$. Les classes de conjugaison par $G(\bar{\mathbb{F}}_q)$ dans $\mathfrak{g}_{nil}(\bar{\mathbb{F}}_q)$ sont paramétrées par les partitions symplectiques de $2n$. Considérons un élément $N_\triangle \in \mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ dont la partition associée est $(2k, 2k-2, ..., 4, 2)$. Le groupe $Z_G(N_\triangle)/Z_G(N_\triangle)^0$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$. Plus précisément, à l'ensemble des entiers pairs $2l$ intervenant dans la partition est naturellement associée une base $(e_{2l})_{l=1,...,k}$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$. On définit un caractère $\epsilon_\triangle$ de ce groupe par $\epsilon_\triangle(\sum_{l=1,...,k} x_{2l}e_{2l}) =$

$\prod_{l=1,...,k}(-1)^{lx_{2l}}$, les x_{2l} étant des éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors la fonction $f_{N_\triangle,\epsilon_\triangle}$ appartient à $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

Supposons maintenant $G = G_{AD}$. Alors (quand elle existe) la fonction $f_{N_\triangle,\epsilon_\triangle}$ survit si et seulement si le caractère $\epsilon_\triangle$ est trivial sur $Z(G_{SC})$, ce qui équivaut à $k \equiv 0, 3 \ mod \ 4\mathbb{Z}$ ou encore à n pair. D'où $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\triangle(n)\delta_2(n)$.

2.6 Type D_n déployé, n pair

On suppose G de type D_n déployé, avec n pair et $n \geq 4$. On a $G_{SC} = Spin_{dep}(2n)$, l'indice dep signifiant déployé. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & & \alpha_{n-3} & & \alpha_{n-2} & & \alpha_{n-1} \\
\circ & - & \circ & - & \circ & ... & ... & \circ & - & \circ & - & \circ \\
 & & | & & & & & & & | & & \\
 & & \alpha_0 & & & & & & & \alpha_n & &
\end{array}$$

Supposons d'abord $G = G_{SC}$. On pose $z = \check{\alpha}_{n-1}(-1)\check{\alpha}_n(-1)$, $z' = \prod_{i=1,...,n}\check{\alpha}_i((-1)^i)$, $z'' = zz'$. On a $Z(G) = \{1, z, z', z''\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $G/\{1, z\} = SO_{dep}(2n)$. On note θ l'automorphisme d'ordre 2 de $\mathcal{D}$ qui échange α_{n-1} et α_n et on note de même l'automorphisme de G qui s'en déduit. On a $\theta(z) = z$, $\theta(z') = z''$. On a l'égalité $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\square(2n) + 2\delta_\triangle(2n)$.

Supposons $\delta_\square(2n) = 1$, c'est-à-dire $2n = h^2$ avec $h \in \mathbb{N}$. On construit une fonction $f_{N_\square,\epsilon_\square}$ comme en **??**. Cette fonction appartient à $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

Supposons $\delta_\triangle(2n) = 1$, c'est-à-dire $2n = j(j+1)/2$ pour un entier $j \in \mathbb{N}$. On pose $m = [(j+1)/2]$. On vérifie que m est divisible par 4. Notons μ' et μ'' les deux caractères de $Z(G)$ définis par $\mu'(z) = \mu''(z) = \mu'(z') = \mu''(z'') = -1$, $\mu'(z'') = \mu''(z') = 1$. Considérons un élément $N_\triangle \in \mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ dont la partition associée est $(2j+3, 2j-1, 2j-5, ...)$. Cette partition a m termes et son dernier terme est 1 si j est impair et 3 si j est pair. Le groupe $Z_G(N_\triangle)/Z_G(N_\triangle)^0$ est un groupe non commutatif qui s'inscrit dans une suite exacte

$$1 \to \{1, z\} \to Z_G(N_\triangle)/Z_G(N_\triangle)^0 \to Z_{SO_{dep}(2n)}(N_\triangle)/Z_{SO_{dep}(2n)}(N_\triangle)^0 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^m \to 0$$

Il a une unique représentation irréductible $\epsilon'_\triangle$, resp. $\epsilon''_\triangle$, sur laquelle $Z(G)$ agit par le caractère μ', resp. μ''. Alors $f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}$ et $f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}$ appartiennent à $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. On peut préciser le support de ces fonctions. Réalisons le groupe $SO_{dep}(2n)$ comme le groupe spécial orthogonal d'un espace V sur $\mathbb{F}_q$ muni d'une forme quadratique Q. Alors les classes de conjugaison par $SO_{dep}(2n)(\mathbb{F}_q)$ dans l'orbite géométrique de $N_\triangle$ sont naturellement paramétrées par des familles de formes quadratiques de rang 1, qui s'identifient à des familles $\underline{\eta} = (\eta_l)_{l=1,...,m}$ d'éléments de $\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2}$. Plus précisément, par les familles $\underline{\eta} = (\eta_l)_{l=1,...,m}$ qui vérifient la condition

(1) $\prod_{l=1,...,m}\eta_l = 1$

dans $\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2}$. Soit $N_{\underline{\eta}}$ un élément dans la classe paramétrée par $\underline{\eta}$. Comme en **??**, la classe de conjugaison par $SO_{dep}(2n;\mathbb{F}_q)$ de $N_{\underline{\eta}}$ se coupe en deux classes de conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$ si et seulement si tous les η_l sont égaux. Compte tenu de (1), il y a deux classes de conjugaison par $SO_{dep}(2n, \mathbb{F}_q)$, d'où 4 classes de conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$. Supposons que $N_\triangle$ appartient à l'une d'elles et notons $N_\triangle^-$, $N'_\triangle$, $N''_\triangle$ des représentants des trois autres, avec $N_\triangle^-$ conjugué à $N_\triangle$ par un élément de $SO_{dep}(2n)(\mathbb{F}_q)$. Alors, quitte à permuter $N'_\triangle$ et $N''_\triangle$, les fonctions $f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}$ et $f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}$ vérifient les égalités

$$f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}(N_\triangle) = f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}(N_\triangle) = f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}(N'_\triangle) = f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}(N''_\triangle) = 2^{m/2-1}$$

$$f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}(N^-_\triangle) = f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}(N^-_\triangle) = f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}(N''_\triangle) = f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}(N'_\triangle) = -2^{m/2-1},$$

et $f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}(N) = f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}(N) = 0$ pour tout $N \in \mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ qui n'est pas conjugué à $N_\triangle$, $N^-_\triangle$, $N'_\triangle$ ou $N''_\triangle$ par un élément de $G(\mathbb{F}_q)$. L'automorphisme θ conserve la classe de conjugaison de $N_\triangle$ par $SO_{dep}(2n)(\mathbb{F}_q)$ mais peut conserver ou non sa classe de conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$. Le premier cas se produit si i est impair ou si j est pair et $sgn(-1) = 1$. Dans ce cas, $\theta(f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}) = f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}$. Si j est pair et $sgn(-1) = -1$, $\theta(f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}) = -f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}$.

Considérons maintenant le cas d'un quotient $G = G_{SC}/\mathcal{Z}$ où $\mathcal{Z}$ est un sous-groupe de $Z(G_{SC})$. Les fonctions $f_{N,\epsilon}$ ci-dessus, quand elles existent, survivent si et seulement si ϵ est trivial sur $\mathcal{Z}$. Remarquons que $\epsilon_\Box(z') = \epsilon_\Box(z'')$ vaut $(-1)^{h/2}$ et que $h/2$ est pair si et seulement si n est divisible par 4. On obtient

pour $\mathcal{Z} = \{1, z\}$, $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\Box(2n)$;

pour $\mathcal{Z} = \{1, z'\}$ ou $\mathcal{Z} = \{1, z''\}$, $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\Box(2n)\delta_4(n) + \delta_\triangle(2n)$;

pour $\mathcal{Z} = Z(G_{SC})$, $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\Box(2n)\delta_4(n)$.

2.7 Type D_n non déployé, n pair

On suppose que G de type D_n, avec n pair et $n \geq 4$, et que Fr agit sur $\mathcal{D}$ par θ. On a $G_{SC} = Spin_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2n)$, l'indice $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$ indiquant que le groupe de Galois de cette extension agit non trivialement. Les faisceaux-caractères sont les mêmes que dans le cas précédent mais il ne sont plus tous conservés par l'action galoisienne, celle-ci échangeant les caractères μ' et μ''.

Pour $G = G_{SC}$, on a $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\Box(2n)$ et l'espace $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ est engendré par une fonction $f_{N_\Box,\epsilon_\Box}$ similaire à celle du cas déployé.

Pour un quotient $G = G_{SC}/\mathcal{Z}$, le sous-groupe $\mathcal{Z}$ doit être conservé par θ. On obtient

pour $\mathcal{Z} = \{1, z\}$, $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\Box(2n)$;

pour $\mathcal{Z} = Z(G_{SC})$, $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = \delta_\Box(2n)\delta_4(n)$.

2.8 Type D_n déployé, n impair

On suppose G de type D_n déployé, avec n impair et $n \geq 5$. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est le même que dans le cas n pair et on conserve la plupart des notations de ce cas.

Supposons $G = G_{SC}$. La structure de $Z(G)$ n'est plus la même. Posons

$$z' = \check{\alpha}_{n-1}(i)\check{\alpha}_n(-i) \prod_{j=1,\dots,n-2} \check{\alpha}_j((-1)^j),$$

où i est ici une racine d'ordre 4 de 1 dans $\bar{\mathbb{F}}_q^\times$. Alors $Z(G)$ est le groupe cyclique d'ordre 4 engendré par z'. On a $z'^2 = z$ où z est comme en **??**, $\theta(z') = z'^{-1}$ et $Fr(z') = z'^{sgn(-1)}$. On a l'égalité $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = 2\delta_\triangle(2n)\delta_4(q-1)$.

Supposons $\delta_\triangle(2n) = 1$, c'est-à-dire $2n = j(j+1)/2$ pour un entier $j \in \mathbb{N}$. On pose $m = [(j+1)/2]$. On vérifie que m est pair et que $m/2$ est impair. Notons μ' le caractère de $Z(G)$ tel que $\mu'(z') = i$ où cette fois i est une racine d'ordre 4 de 1 dans $\mathbb{C}^\times$. Notons μ'' son inverse. Soit $N_\triangle \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ dont la classe de conjugaison par $SO_{dep}(2n)(\mathbb{F}_q)$ est paramétrée par la même partition qu'en **??**. De nouveau, le groupe $Z_G(N_\triangle)/Z_G(N_\triangle)^0$ a une unique représentation irréductible $\epsilon'_\triangle$, resp. $\epsilon''_\triangle$, sur laquelle $Z(G)$ agit par le caractère μ', resp. μ''. Les classes de ces représentations sont conservées par l'action galoisienne si et seulement si $sgn(-1) = 1$, c'est-à-dire 4 divise $q-1$. Supposons que 4 divise $q-1$. On construit alors les fonctions $f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}$ et $f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}$ qui appartiennent à $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. On précise le support de ces fonctions comme en **??**. La relation (1) de ce paragraphe devient

(1) $\prod_{l=1,...,m}\eta_l=-1$.

Les fonctions sont supportées par les classes de conjugaison par $SO_{dep}(2n)(\mathbb{F}_q)$ paramétrées par les familles $\underline{\eta}=(\eta_l)_{l=1,...,m}$ pour lesquelles η_l est constant. Il y en a deux d'après (1), la parité de m et l'hypothèse $sgn(-1)=1$. On choisit $N_\triangle$, $N_\triangle^-$, $N'_\triangle$, $N''_\triangle$ comme en **??**. Quitte à permuter $N'_\triangle$ et $N''_\triangle$, on a les égalités

$$f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}(N_\triangle)=f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}(N_\triangle)=2^{m/2-1},$$

$$f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}(N_\triangle^-)=f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}(N_\triangle^-)=-2^{m/2-1},$$

$$f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}(N'_\triangle)=f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}(N''_\triangle)=i2^{m/2-1},$$

$$f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}(N''_\triangle)=f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}(N'_\triangle)=-i2^{m/2-1}.$$

On a $\theta(f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle})=f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}$.

Pour un quotient $G=G_{SC}/\mathcal{Z}$, où $\mathcal{Z}$ est un sous-groupe non trivial de $Z(G_{SC})$, on a $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))=\{0\}$.

2.9 Type D_n non déployé, n impair

On suppose que G est de type D_n, avec n impair et $n\geq 5$, et que Fr agit sur $\mathcal{D}$ par θ.

Supposons $G=G_{SC}$. La différence avec le cas précédent est que l'on a maintenant $Fr(z')=z'^{-sgn(-1)}$. On a l'égalité $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)))=2\delta_\triangle(2n)\delta_4(q+1)$.

Supposons $2n=j(j+1)/2$ et 4 divise $q+1$, c'est-à-dire $sgn(-1)=-1$. La relation (1) de **??** est remplacée par

(1) $\prod_{l=1,...,m}\eta_l=-\nu$,

où ν est l'élément non trivial de $\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2}$. Les fonctions $f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle}$ et $f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}$ sont comme dans le cas précédent. On a $\theta(f_{N_\triangle,\epsilon'_\triangle})=(-1)^{j+1}f_{N_\triangle,\epsilon''_\triangle}$.

Pour un quotient $G=G_{SC}/\mathcal{Z}$, où $\mathcal{Z}$ est un sous-groupe non trivial de $Z(G_{SC})$, on a $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))=\{0\}$.

2.10 Remarque sur le type D_n, $n<4$

Dans les quatre paragraphes précédents, on a considéré un groupe de type D_n avec $n\geq 4$. Pour des raisons d'uniformité, il convient d'ajouter les cas où $n<4$. On a $D_3=A_3$, on considère que $D_2=A_1\times A_1$ (un groupe de ce type n'est plus absolument quasi-simple) et qu'un groupe de type D_1 est le tore $GL(1)$. On vérifie que les résultats des paragraphes **??** à **??** s'étendent à ces cas.

2.11 Type D_4 trialitaire

On suppose G de type D_4. Le diagramme de Dynkin a des automorphismes supplémentaires. On a déjà introduit l'automorphisme θ d'ordre 2 et on note θ_3 l'automorphisme d'ordre 3 qui fixe α_2 et envoie α_1, α_3 et α_4 respectivement sur $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_1$. On note de même l'automorphisme de G_{SC} qui s'en déduit. Il envoie z',z,z'' respectivement sur z,z'',z'. Le groupe $Aut(\mathcal{D})$ est engendré par θ et θ_3 et est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. On suppose que Fr

agit sur $\mathcal{D}$ par θ_3 (on pourrait remplacer θ_3 par θ_3^{-1}, cela remplacerait G par un groupe isomorphe). Cela impose que $G = G_{SC}$ ou $G = G_{AD}$. On a $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$.

2.12 Type E_6 déployé

On suppose G déployé de type E_6. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_1 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \alpha_5 & & \alpha_6 \\
\circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ \\
 & & & & | & & & & \\
 & & & \alpha_2 & \circ & & & & \\
 & & & & | & & & & \\
 & & & \alpha_0 & \circ & & & &
\end{array}$$

Supposons d'abord $G = G_{SC}$. Pour $z \in \boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$, posons $\underline{\zeta}(z) = \check{\alpha}_1(z)\check{\alpha}_3(z^2)\check{\alpha}_5(z)\check{\alpha}_6(z^2)$. Alors $\underline{\zeta}$ est un isomorphisme de $\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$ sur $Z(G_{SC})$. On note θ l'unique automorphisme non trivial de $\mathcal{D}$. Il fixe α_2 et α_4 et échange α_1 et α_6 ainsi que α_3 et α_5. On a $\theta(\underline{\zeta}(z)) = \underline{\zeta}(z^2)$. On a $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = 2\delta_3(q-1)$.

Introduisons l'élément H de $\mathfrak{t}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\alpha_i(H) = 2$ pour $i = 1, 4, 6$ et $\alpha_i(H) = 0$ pour $i = 2, 3, 5$. A l'aide de cet élément, on définit comme en **??** des sous-espaces $\mathfrak{g}_j$ et $\mathfrak{g}_{\geq j}$ de $\mathfrak{g}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, un Levi M de G d'algèbre de Levi $\mathfrak{g}_0$ et l'orbite ouverte $\tilde{\mathfrak{g}}_2$ de l'action de M dans $\mathfrak{g}_2$. On fixe $N \in \tilde{\mathfrak{g}}_2(\mathbb{F}_q)$. On a $Z_G(N)/Z_G(N)^0 \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et l'image naturelle de $Z(G)$ dans ce groupe est $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Notons ϵ' et ϵ'' les deux caractères de $Z_G(N)/Z_G(N)^0$ d'ordre 6. Ils donnent naissance à des faisceaux-caractères cuspidaux. Ces faisceaux sont conservés par l'action galoisienne si et seulement s'il en est de même des caractères ϵ' et ϵ'', c'est-à-dire si cette action galoisienne fixe tout élément de $Z(G)$. La condition pour qu'il en soit ainsi est que 3 divise $q-1$. Supposons cette condition vérifiée. Alors les faisceaux-caractères donnent naissance aux fonctions $f_{N,\epsilon'}$ et $f_{N,\epsilon''}$ qui engendrent $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

Supposons maintenant $G = G_{AD}$. Les restrictions des caractères ϵ' et ϵ'' à $Z(G_{SC})$ étant non triviales, on a $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$.

2.13 Type E_6 non déployé

On suppose que G est de type E_6 et que Fr agit sur $\mathcal{D}$ par l'automorphisme θ. Les faisceaux-caractères sont les mêmes que dans le cas précédent. La différence est que l'action galoisienne sur le centre a changé. Cette action fixe tout élément central si et seulement si 3 divise $q+1$. D'où $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = 2\delta_3(q+1)$ si $G = G_{SC}$, $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ si $G = G_{AD}$.

2.14 Type E_7

On suppose que G est de type E_7, donc déployé. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\alpha_0 & & \alpha_1 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \alpha_5 & & \alpha_6 & & \alpha_7 \\
\circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ \\
 & & & & & & | & & & & & & \\
 & & & & & & \circ & & & & & & \\
 & & & & & & \alpha_2 & & & & & &
\end{array}$$

Supposons d'abord $G = G_{SC}$. Posons $z = \check{\alpha}_2(-1)\check{\alpha}_5(-1)\check{\alpha}_7(-1)$. Alors $Z(G) = \{1, z\}$. On a $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = 1$.

Introduisons l'élément H de $\mathfrak{t}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\alpha_i(H) = 2$ pour $i = 4, 7$ et $\alpha_i(H) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 5, 6$. A l'aide de cet élément, on définit comme en **??** le Levi M et l'orbite ouverte $\tilde{\mathfrak{g}}_2$. Fixons un élément $N \in \tilde{\mathfrak{g}}_2(\mathbb{F}_q)$. Il existe une unique représentation irréductible ϵ de $Z_G(N)/Z_G(N)^0$ auquel est associé un faisceau-caractère cuspidal (ϵ est en fait un caractère). Le groupe $Z(G)$ agit sur cette représentation par le caractère non trivial de ce groupe. D'où une fonction $f_{N,\epsilon} \in FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

Supposons maintenant $G = G_{AD}$. Le groupe $Z(G_{SC})$ agit sur la représentation ϵ par le caractère non trivial de ce groupe. D'où $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$.

2.15 Type E_8

On suppose que G est de type E_8, donc déployé. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\alpha_1 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \alpha_5 & & \alpha_6 & & \alpha_7 & & \alpha_8 & & \alpha_0 \\
\circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\
 & & & & | & & & & & & & & & & \\
 & & & & \circ & & & & & & & & & & \\
 & & & & \alpha_2 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

On a forcément $G = G_{SC} = G_{AD}$. On a $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = 1$.

Introduisons l'élément H de $\mathfrak{t}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\alpha_i(H) = 2$ pour $i = 5$ et $\alpha_i(H) = 0$ pour $i \neq 5$. A l'aide de cet élément, on définit comme en **??** le Levi M et l'orbite ouverte $\tilde{\mathfrak{g}}_2$. Fixons un élément $N \in \tilde{\mathfrak{g}}_2(\mathbb{F}_q)$. On a $Z_G(N)/Z_G(N)^0 \simeq \mathfrak{S}_5$. Soit ϵ le caractère signe usuel de ce groupe. Il lui est associé un faisceau-caractère cuspidal dont la fonction caractéristique $f_{N,\epsilon}$ appartient à $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

2.16 Type F_4

On suppose que G est de type F_4, donc déployé. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_0 & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 \\
\circ & - & \circ & - & \circ & \Rightarrow & \circ & - & \circ
\end{array}$$

On a forcément $G = G_{SC} = G_{AD}$. On a $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = 1$.

Introduisons l'élément H de $\mathfrak{t}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\alpha_i(H) = 2$ pour $i = 2$ et $\alpha_i(H) = 0$ pour $i = 1, 3, 4$. A l'aide de cet élément, on définit comme en **??** le Levi M et l'orbite ouverte $\tilde{\mathfrak{g}}_2$. Fixons un élément $N \in \tilde{\mathfrak{g}}_2(\mathbb{F}_q)$. On a $Z_G(N)/Z_G(N)^0 \simeq \mathfrak{S}_4$. Soit ϵ le caractère signe usuel de ce groupe. Il lui est associé un faisceau-caractère cuspidal dont la fonction caractéristique $f_{N,\epsilon}$ appartient à $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

2.17 Type G_2

On suppose que G est de type F_4, donc déployé. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ est

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_0 \\
\circ & \Lleftarrow & \circ & - & \circ
\end{array}$$

On a forcément $G = G_{SC} = G_{AD}$. On a $dim(FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))) = 1$.

Introduisons l'élément H de $\mathfrak{t}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\alpha_i(H) = 2$ pour $i = 2$ et $\alpha_i(H) = 0$ pour $i = 1$. A l'aide de cet élément, on définit comme en **??** le Levi M et l'orbite ouverte $\tilde{\mathfrak{g}}_2$. Fixons un élément $N \in \tilde{\mathfrak{g}}_2(\mathbb{F}_q)$. On a $Z_G(N)/Z_G(N)^0 \simeq \mathfrak{S}_3$. Soit ϵ le caractère signe usuel de ce groupe. Il lui est associé un faisceau-caractère cuspidal dont la fonction caractéristique $f_{N,\epsilon}$ appartient à $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

3 Présentation des résultats

3.1 Les résultats

Pour toute la suite de l'article, G est un groupe réductif connexe défini sur F, simplement connexe et absolument quasi-simple. On présente G à l'aide d'une forme quasi-déployée G^* et d'un cocycle $\underline{n}_G$ comme en **??**.

On va étudier successivement tous les groupes G possibles. Dans chaque cas, nous définirons les objets suivants :

(A) un ensemble fini $\mathcal{X}$ de nature combinatoire ; pour chaque $x \in \mathcal{X}$, un sous-espace $FC_x \subset FC(\mathfrak{g}(F))$; en fait, ce sous-espace est muni d'une base dont l'inconvénient est que ses éléments ne sont canoniques qu'à un scalaire près ; pour chaque $x \in \mathcal{X}$, on indiquera l'entier $d_x = dim(FC_x)$;

(B) un ensemble fini $\mathcal{Y}$ de nature combinatoire ; pour chaque $y \in \mathcal{Y}$, un sous-espace

$$FC_y^{\mathcal{E}} \subset FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)} FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')};$$

de nouveau $FC_y^{\mathcal{E}}$ est muni d'une base qui a le même inconvénient que ci-dessus ;

(C) une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Dans le cas où G est quasi-déployé, nous définirons de plus

(D) un sous-ensemble $\mathcal{X}^{st} \subset \mathcal{X}$.

Les propriétés que nous démontrerons sont

(1) on a l'égalité $FC(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{x \in \mathcal{X}} FC_x$ et cette décomposition est orthogonale pour le produit scalaire elliptique ;

(2) on a l'égalité $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{y \in \mathcal{Y}} FC_y^{\mathcal{E}}$ et cette décomposition est orthogonale pour le produit scalaire elliptique défini en **??** ;

(3) l'isomorphisme de transfert $transfert : FC(\mathfrak{g}(F)) \to FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ envoie FC_x sur $FC^{\mathcal{E}}_{\varphi(x)}$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Dans le cas où G est quasi-déployé, nous prouverons de plus

(4) on a l'égalité $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{x \in \mathcal{X}^{st}} FC_x$.

3.2 Quelques ingrédients des preuves

La démonstration se fait par récurrence sur le rang de G. Précisément, le groupe G étant fixé, on suppose les résultats connus pour tous les groupes G' (simplement connexes et absolument quasi-simples) définis sur une extension finie F' de F tels que la dimension de G' sur $\bar{F}$ soit strictement inférieure à celle de G. De plus, si G n'est pas déployé, on suppose les résultats connus pour sa forme quasi-déployée G^*.

Décrivons l'un des principaux arguments que nous utiliserons. Avec les notations du paragraphe précédent, on suppose donnés les objets (A), (B), (C) vérifiant les conditions (1) et (2). On suppose donnés deux sous-ensembles $\mathcal{X}^\star \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}^\star \subset \mathcal{Y}$ tels que $\varphi(\mathcal{X}^\star) = \mathcal{Y}^\star$. On suppose démontré que

(1) $transfert(\oplus_{x\in\mathcal{X}^\star}FC_x)=\oplus_{y\in\mathcal{Y}^\star}FC^{\mathcal{E}}_y$.

On suppose donnée une relation de préordre $\leq$ sur $\mathcal{X}^\star$, d'où une relation d'équivalence $x\equiv x'$ si et seulement si $x\leq x'$ et $x'\leq x$. On note (x) la classe d'équivalence de x et $\underline{\mathcal{X}}^\star$ l'ensemble des classes d'équivalence. Le préordre induit un ordre sur $\underline{\mathcal{X}}^\star$. Par la bijection φ, on transporte le préordre et la relation d'équivalence sur $\mathcal{X}^\star$ en des relations sur $\mathcal{Y}^\star$ et on adopte de mêmes notations pour ces objets. Evidemment, φ se quotiente en une bijection encore notée φ de $\underline{\mathcal{X}}^\star$ sur $\underline{\mathcal{Y}}^\star$. Pour $(x)\in\underline{\mathcal{X}}^\star$, on pose $FC_{(x)}=\oplus_{x'\in(x)}FC_{x'}$. De même, pour $(y)\in\underline{\mathcal{Y}}^\star$, on pose $FC^{\mathcal{E}}_{(y)}=\oplus_{y'\in(y)}FC^{\mathcal{E}}_{y'}$. On suppose

(2) $dim(FC_{(x)})=dim(FC^{\mathcal{E}}_{\varphi((x))})$ pour tout $(x)\in\underline{\mathcal{X}}^\star$.

On considère un sous-ensemble $\underline{\mathcal{Y}}^\sharp\subset\underline{\mathcal{Y}}^\star$ qui est soit $\underline{\mathcal{Y}}^\star$ tout entier, soit $\underline{\mathcal{Y}}^\star-\{(y_{min})\}$ où (y_{min}) est le plus petit élément de $\underline{\mathcal{Y}}^\star$ (l'existence de ce plus petit élément est supposée dans ce cas).

Pour $\mathbf{G}'\in Endo_{ell}(G)$ et $Y\in\mathfrak{g}'_{reg}(F)$, la forme linéaire $f'\mapsto S^{G'}(Y,f')$ est bien définie sur $SI(\mathfrak{g}'(F))$, a fortiori sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$. On l'étend en une forme linéaire sur $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ par 0 sur $FC^{st}(\mathfrak{g}''(F))^{Out(\mathbf{G}'')}$ pour tout $\mathbf{G}''\in Endo_{ell}(G)$, $\mathbf{G}''\neq\mathbf{G}'$.

Pour tout $(y)\in\underline{\mathcal{Y}}^\sharp$, posons $d_{(y)}=dim(FC^{\mathcal{E}}_{(y)})$ et supposons donnée des familles $(\mathbf{G}'_i)_{i=1,...,d_{(y)}}$ et $(Y_i)_{i=1,...,d_{(y)}}$ telles que : pour tout i, $\mathbf{G}'_i\in Endo_{ell}(G)$, $Y_i\in\mathfrak{g}'_{i,ell}(F)$ et Y_i est semi-simple et G-régulier. Remarquons que l'on ne suppose pas que les données $\mathbf{G}'_i$ sont distinctes. On suppose que, pour tout $(y)\in\underline{\mathcal{Y}}^\sharp$, les conditions suivantes sont satisfaites.

(3) Pour tout $i=1,...,d_{(y)}$ et tout $(y')\in\underline{\mathcal{Y}}^\star$ avec $(y')\neq(y)$, la forme linéaire $f'\mapsto S^{G'_i}(Y_i,f')$ est nulle sur $FC^{\mathcal{E}}_{(y')}$.

(4) Les restrictions à $FC^{\mathcal{E}}_{(y)}$ des formes linéaires $f'\mapsto S^{G'_i}(Y_i,f')$, pour $i=1,...,d_{(y)}$, forment une base de l'espace dual $(FC^{\mathcal{E}}_{(y)})^*$.

(5) Soient $(x)\in\underline{\mathcal{X}}$, $f\in FC_{(x)}$, $i\in\{1,...,d_{(y)}\}$ et X un élément de $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison stable correspond à celle de Y_i. Supposons $I^G(X,f)\neq 0$. Alors $(x)\geq\varphi^{-1}((y))$.

Lemme. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité* $transfert(FC_{(x)})=FC^{\mathcal{E}}_{\varphi((x))}$ *pour tout* $(x)\in\underline{\mathcal{X}}^\star$.

Preuve. On suppose que $\underline{\mathcal{Y}}^\sharp=\underline{\mathcal{Y}}^\star-\{(y_{min})\}$ (quand $\underline{\mathcal{Y}}^\sharp=\underline{\mathcal{Y}}^\star$, il suffit de supprimer dans ce qui suit toute mention de l'élément (y_{min})). On raisonne par récurrence en supposant l'égalité de l'énoncé démontrée pour tout $(x')<(x)$. Soit $f\in FC_{(x)}$. Grâce à (1), écrivons

$$transfert(f)=\sum_{(y)\in\underline{\mathcal{Y}}^\star}f'_{(y)},$$

avec $f'_y\in FC^{\mathcal{E}}_{(y)}$ pour tout (y). On va d'abord prouver

(6) soit $(y)\in\underline{\mathcal{Y}}^\star$, supposons $f'_{(y)}\neq 0$, alors $(x)\geq\varphi^{-1}((y))$.

C'est tautologique si $(y)=(y_{min})$. Supposons $(y)\neq(y_{min})$. D'après (3) et (4), on peut fixer $i\in\{1,...,d_{(y)}\}$ tel que $S^{G'_i}(Y_i,transfert(f))\neq 0$, c'est-à-dire, d'après les définitions, $S^{G'_i}(Y_i,transfert^{\mathbf{G}'_i}(f))\neq 0$. Cette intégrale est par définition combinaison linéaire d'intégrales $I^G(X,f)$ pour des éléments $X\in\mathfrak{g}_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison stable correspond à celle de Y_i. L'une de ces intégrales doit être non nulle. Alors (5) entraîne que $(x)\geq\varphi^{-1}((y))$. Cela prouve (6).

Soit $(y)\in\underline{\mathcal{Y}}^\star$, supposons $f'_{(y)}\neq 0$. Posons $(z)=\varphi^{-1}((y))$. On a $(x)\geq(z)$ d'après (6). Supposons $(x)>(z)$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $f_{(z)}\in FC_{(z)}$ de sorte que

$transfert(f_{(z)}) = f'_{(y)}$. Puisque l'application $transfert$ est une isométrie, on a

$$(f, f_{(z)})_{ell} = (transfert(f), transfert(f_{(z)}))_{ell} = (f'_{(y)}, f'_{(y)})_{ell}.$$

Mais $(f, f_{(z)})_{ell} = 0$ puisque $(x) \neq (z)$. Alors $f'_{(y)} = 0$ contrairement à l'hypothèse. Cela démontre que $(y) = \varphi((x))$, donc $transfert(FC_{(x)}) \subset FC^{\mathcal{E}}_{\varphi((x))}$. Puisque $transfert$ est bijective, (2) entraîne que cette inclusion est une égalité. $\square$

A chaque fois que nous utiliserons ce lemme, il faudra construire les éléments Y_i et démontrer leurs propriétés. Nous le ferons complètement dans le cas des groupes exceptionnels. Dans le cas des groupes (plus ou moins) classiques, notre construction utilise les descriptions des immeubles par l'algèbre linéaire. On a déjà donné en [**?**] de telles descriptions dans les cas spéciaux orthogonaux ou symplectiques. Pour éviter d'allonger démesurément l'article, on ne donnera ici de description complète que dans le cas le plus nouveau qui est celui des groupes spéciaux unitaires relatifs à une extension quadratique ramifiée. Dans les autres cas, on se contentera de donner les définitions en laissant les démonstrations au lecteur.

En fait, on construira souvent des éléments $Y_i \in \mathfrak{g}'_{i,ell}(F)$ vérifiant (3) et (4) et pour lesquels on saurait démontrer (5) si ces éléments étaient G-réguliers. Mais ils ne seront pas toujours G-réguliers. On utilisera alors l'argument suivant. On sait que les éléments G-réguliers sont denses dans $\mathfrak{g}'_{i,ell}(F)$. On sait aussi que les intégrales orbitales sont localement constantes sur cet ensemble. On peut alors remplacer les Y_i d'origine par des éléments très voisins de sorte qu'ils deviennent G-réguliers et conservent les propriétés (3) et (4). On saura alors démontrer (5) pour ces éléments.

4 Type A_{n-1}

4.1 Type A_{n-1} déployé

On suppose que G est déployé de type A_{n-1} avec $n \geq 2$. On a $G = SL(n)$, $Z(G) \simeq \boldsymbol{\zeta}_n(F)$, $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \simeq F^{\times}/F^{\times,n}$, $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F)) \simeq \mathfrak{o}_F^{\times}/\mathfrak{o}_F^{\times,n}$.

Si n ne divise pas $q-1$, on pose $\mathcal{X} = \emptyset$. Si n divise $q-1$, notons Ξ_n^{ram} l'ensemble des éléments de Ξ, c'est-à-dire des caractères de $F^{\times}/F^{\times,n}$, dont la restriction à $\mathfrak{o}_F^{\times}/\mathfrak{o}_F^{\times,n}$ est d'ordre n. Le nombre d'éléments de Ξ_n^{ram} est $n\phi(n)$. On pose $\mathcal{X} = \Xi_n^{ram}$ et $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ compte n sommets et forme une seule orbite pour l'action du groupe $G_{AD}(F)$. Fixons un sommet s. Le groupe G_s est le groupe $SL(n)$ défini sur $\mathbb{F}_q$. Si n ne divise pas $q-1$, $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après **??**, donc $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$. Alors **??** (1) est vérifié avec $\mathcal{X} = \emptyset$.

Supposons que n divise $q-1$. Alors $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = \phi(n)$ d'après **??**. L'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ a pour base les fonctions $f_{N,\epsilon}$, où N est un nilpotent régulier et ϵ parcourt les caractères d'ordre n de $Z(G_s)$. On a $Z(G_s) \simeq \boldsymbol{\zeta}_n(\mathbb{F}_q) \simeq \boldsymbol{\zeta}_n(F)$. On a $K^{\dagger}_{AD,s} = K^0_{AD,s}$ et $K^0_{AD,s}/\pi(K^0_s) \simeq \mathfrak{o}_F^{\times}/\mathfrak{o}_F^{\times,n}$. Un caractère ϵ de $Z(G)$ s'identifie à un caractère de ce groupe, précisément au caractère $x \mapsto \epsilon(Fr(y)y^{-1})$ pour $x \in \mathfrak{o}_F^{\times}$, où y est une racine n-ième de x dans $F^{nr,\times}$. D'après **??**, on a $\xi_{f_{N,\epsilon}} = \epsilon$ et de $f_{N,\epsilon}$ se déduit une fonction $f_\xi \in FC(\mathfrak{g}(F))$ pour tout $\xi \in \Xi$ qui coïncide avec ϵ sur $\mathfrak{o}_F^{\times}/\mathfrak{o}_F^{\times,n}$. Un élément $\xi \in \Xi$ coïncide avec un tel caractère ϵ de $\mathfrak{o}_F^{\times}/\mathfrak{o}_F^{\times,n}$ si et seulement si $\xi \in \Xi_n^{ram}$. Ainsi, pour tout $\xi \in \mathcal{X} = \Xi_n^{ram}$, on a défini une fonction $f_\xi \in FC(\mathfrak{g}(F))$ et on note FC_ξ la droite $\mathbb{C}f_\xi$. D'après **??**, la propriété (1) de **??** est vérifiée.

On pose $\mathcal{X}^{st} = \emptyset$. La propriété **??** (4) est immédiate si n ne divise pas $q-1$. Si n divise $q-1$, une fonction f_ξ appartient à $I_{cusp,\xi}(\mathfrak{g}(F))$ par définition. Puisque Ξ_n^{ram} ne contient pas le caractère trivial $\mathbf{1} \in \Xi$, l'espace $FC(\mathfrak{g}(F)) \cap I_{cusp,\mathbf{1}}(\mathfrak{g}(F))$ est nul, a fortiori l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est nul et **??** (4) est vérifiée. Explicitons-la :

(1) $FC^{st}\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$.

Si n ne divise pas $q-1$, on pose $\mathcal{Y} = \emptyset$. Puisqu'on a vu que $FC(\mathfrak{g}(F))$ est nul, l'espace $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ l'est aussi et **??** (2) et (3) sont vérifiés.

Supposons que n divise $q-1$. Soit $\xi \in \Xi_n^{ram}$. Via l'isomorphisme du corps de classes, ξ s'identifie à un caractère de Γ_F. Notons K_ξ l'extension galoisienne abélienne de degré n de F telle que Γ_{K_ξ} soit le noyau de ξ. C'est une extension totalement ramifiée. La classification des données endoscopiques de $G = SL(n)$ est bien connue. On peut la retrouver grâce à **??** et le calcul du caractère associé à une donnée résulte de **??**. On voit qu'il y a une unique donnée $\mathbf{G}'_\xi \in Endo_{ell}(G)$ telle que $\xi_{\mathbf{G}'} = \xi$. Considérons le groupe $Res_{K_\xi/F}GL(1)$. Il y a un homomorphisme norme naturel de ce groupe vers $GL(1)$ et G'_ξ est son noyau. En particulier, on a l'isomorphisme $G'_\xi(F) = \{x \in K_\xi^\times; norme_{K_\xi/F}(x) = 1\}$. Le groupe G'_ξ est un tore, l'immeuble de son groupe adjoint est réduit à un point, notons-le e'. Le groupe $G'_{\xi,e'}$ est un tore et on a $X_*(G'_{\xi,e'}) \simeq X_*(G'_\xi)^{I_F}$. Puisque K_ξ/F est totalement ramifié, cette description entraîne que $G'_{\xi,e'} = \{1\}$. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}'_\xi(F))$ est la droite portée par la fonction caractéristique de $\mathfrak{k}'_{e'} = \{x \in \mathfrak{o}_{K_\xi}; trace_{K_\xi/F}(x) = 0\}$. On note cette fonction f'_ξ. Le groupe d'automorphismes extérieurs de $\mathbf{G}'_\xi$ est isomorphe à $\Gamma_{K_\xi/F}$. Il agit sur $G'_\xi(F)$ par l'action naturelle de ce groupe. Cette action fixe f'_ξ donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'_\xi(F))^{Out(\mathbf{G}'_\xi)}$ est la droite portée par f'_ξ. On note $FC_\xi^{\mathcal{E}} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_\xi(F))^{Out(\mathbf{G}'_\xi)}$. Cette construction fournit un sous-espace

$\oplus_{\xi \in \Xi_n^{ram}} FC_\xi^{\mathcal{E}} \subset FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$.

Mais on sait que ce dernier espace a même dimension que $FC(\mathfrak{g}(F))$ et on a vu que cette dimension était $|\Xi_n^{ram}|$. L'inclusion ci-dessus est donc une égalité, ce qui démontre **??** (2).

On note $\varphi : \mathcal{X} = \Xi_n^{ram} \to \mathcal{Y} = \Xi_n^{ram}$ l'identité. En utilisant **??** (3), on voit que l'on a $transfert(FC_\xi) \subset FC_\xi^{\mathcal{E}}$ pour tout $\xi \in \Xi_n^{ram}$ et cette inclusion est forcément une égalité puisque le transfert est un isomorphisme. Cela démontre **??** (3).

4.2 Forme intérieure du type A_{n-1} déployé

On suppose que G n'est pas déployé mais que G^* est déployé de type A_{n-1}.

Il y a une décomposition $n = md$ avec $m, d \in \mathbb{N}_{>0}$ et $d \geq 2$ de sorte que G soit de type ${}^dA_{n-1}$, cf. [?] p.62. Alors, pour tout sommet $s \in \underline{S}(G)$, G_s est le groupe tel que $G_s(\mathbb{F}_q) = \{x \in GL(m, \mathbb{F}_{q^d}); norme_{\mathbb{F}_q^d/\mathbb{F}_q}(x) = 1\}$. Parce que $d \geq 2$, $Z(G_s)^0 \neq \{1\}$, donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Cela entraîne $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$. Alors les assertions de **??** sont vérifiées en posant $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \emptyset$.

4.3 Type A_{n-1} quasi-déployé, E/F non ramifiée

Soit E une extension quadratique de F. Notons τ l'élément non trivial de $\Gamma_{E/F}$. On suppose que G est quasi-déployé de type A_{n-1}, avec $n \geq 3$, que Γ_E agit trivialement sur $\mathcal{D}$ tandis que τ y agit par l'automorphisme non trivial θ du diagramme. Avec une notation évidente, G est la forme quasi-déployée de $SU_{E/F}(n)$. Introduisons le groupe $U_{E/F}(1)$: on a $U_{E/F}(1, \bar{F}) = \bar{F}^\times$ et il est muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{E/F}$ telle que, pour $x \in \bar{F}^\times$ et $\sigma \in \Gamma_F$, on a $\sigma_{E/F}(x) = \sigma(x)$ si $\sigma \in \Gamma_E$ et $\sigma_{E/F}(x) = \sigma(x)^{-1}$ si

$\sigma \notin \Gamma_E$. On a la suite exacte

$$1 \to Z(G) \to U_{E/F}(1) \stackrel{x \mapsto x^n}{\to} U_{E/F}(1) \to 1$$

Il s'en déduit une suite exacte de cohomologie. On calcule $H^1(\Gamma_F, U_{E/F}(1)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Compte tenu de l'isomorphisme $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \simeq H^1(\Gamma_F, Z(G))$, on en déduit une suite exacte

$$1 \to E^1/(E^1)^n \to G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \to Ker(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \stackrel{x \mapsto nx}{\to} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0$$

où E^1 est le noyau de l'homomorphisme $norme_{E/F}$ et $(E^1)^n$ le sous-groupe des puissances n-ièmes. Le groupe $E^1/(E^1)^n$ est l'image naturelle dans $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ du groupe unitaire $U_{E/F}(n, F)$. Donc ce groupe s'envoie surjectivement sur $G_{AD}(F)$ si n est impair et son image est d'indice 2 si n est pair.

Supposons dans ce paragraphe que E/F est non ramifiée. Si n ne divise pas $q+1$, posons $\mathcal{X} = \emptyset$. Supposons que n divise $q+1$. Notons Ξ_n^{ram} le sous-ensemble des éléments de Ξ dont la restriction à $E^1/(E^1)^n$ est d'ordre n. Le nombre d'éléments de Ξ_n^{ram} est $(1+\delta_2(n))\phi(n)$. On pose $\mathcal{X} = \Xi_n^{ram}$ et $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

En se référant aux tables de Tits (le groupe est de type ${}^2A'_{n-1}$) ou en décrivant l'immeuble par l'algèbre linéaire, on voit que $\underline{S}(G)$ est en bijection avec l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que b est pair et $a+b = n$. Pour un sommet s paramétré par (a,b), le groupe G_s est celui pour lequel $G_s(\mathbb{F}_q) = \{(x,y) \in U_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(a, \mathbb{F}_q) \times U_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(b, \mathbb{F}_q); det(x)det(y) = 1\}$, avec des notations évidentes. Si n est impair, l'action de $G_{AD}(F)$ définie en **??** conserve chaque sommet. Si n est pair, cette action échange les sommets paramétrés par $(n,0)$ et $(0,n)$ et conserve les autres. Puisque a est forcément non nul quand n est impair, on voit l'ensemble des orbites $\underline{S}(G_{AD})$ est en tout cas en bijection avec le sous-ensemble des couples (a,b) tels que $a \neq 0$.

Considérons un sommet s paramétré par (a,b), avec $a \neq 0$. Si $b \neq 0$, on voit que $Z(G_s)^0 \neq \{1\}$, donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Supposons $b = 0$. Si n ne divise pas $q+1$, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après **??**. Cela entraîne $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$ et l'assertion (1) de **??** est vérifiée avec notre définition $\mathcal{X} = \emptyset$. Supposons que n divise $q+1$. Alors une base de $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est formée des fonctions $f_{N,\epsilon}$ où N est un nilpotent régulier et ϵ est un caractère d'ordre n de $Z(G_s) \simeq Z(G)$. Un tel caractère s'identifie à un caractère du groupe $E^1/(E^1)^n$ et on a $\xi_{f_{N,\epsilon}} = \epsilon$. D'après **??**, pour tout $\xi \in \Xi$ de restriction ϵ à $E^1/(E^1)^n$, la fonction $f_{N,\epsilon}$ donne naissance à un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$. On note FC_ξ la droite portée par cet élément. Les éléments de Ξ dont la restriction à $E^1/(E^1)^n$ est d'ordre n sont précisément les éléments de Ξ_n^{ram}. On a ainsi associé à tout élément $\xi \in \mathcal{X} = \Xi_n^{ram}$ une droite $FC_\xi \subset FC(\mathfrak{g}(F))$. D'après **??**, l'assertion **??**(1) est vérifiée.

On pose $\mathcal{X}^{st} = \emptyset$. L'assertion **??** (4) est triviale si n ne divise pas $q+1$. Dans le cas où n divise $q+1$, elle résulte comme en **??** du fait que Ξ_n^{ram} ne contient pas l'élément neutre de Ξ. Explicitons-la :

(1) $FC^{st}\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$.

Si n ne divise pas $q+1$, on pose $\mathcal{Y} = \emptyset$. Puisqu'on a déjà vu que $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$, les assertions **??** (2) et (3) sont triviales.

Supposons que n divise $q+1$. On pose $\mathcal{Y} = \Xi_n^{ram}$. On identifie $\hat{\Delta}_a$ à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la racine $\hat{\alpha}_0$ s'identifiant à 0 et l'automorphisme non trivial θ du diagramme $\hat{\mathcal{D}}$ à $j \mapsto -j$. Le groupe $\hat{\Omega}$ est celui des translations par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$ attachée à G est $\sigma_G = 1$ si $\sigma \in \Gamma_E$, $\sigma_G = \theta$ si $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_E$. Introduisons l'extension K/E de degré n de l'assertion **??**(3). Fixons un générateur ρ de $\Gamma_{K/E}$ et un élément $\delta \in \Gamma_{K/F} - \Gamma_{K/E}$.

On a $\delta^2 = 1$ et $\delta\rho = \rho^{-1}\delta$. Fixons un entier $u \in \{1, ..., n-1\}$ premier à n. Si n est impair, posons $v = 0$. Si n est pair, soit $v \in \{0, 1\}$. Définissons une action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ de Γ_F sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, triviale sur Γ_K, par $\rho_{G'}(j) = j + u$, $\delta_{G'}(j) = -j + u(1 - v)$. Posons $\mathcal{O} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O})$ appartient à $\mathcal{E}_{ell}(G)$ et il lui est associée une donnée endoscopique $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$. Remarquons que $(\rho^v\delta)_{G'}(0) = u$ et $(\rho^v\delta)_{G'}(u) = 0$. Notons L le sous-corps des points fixes de $\rho^v\delta$ dans K. L'extension K/L est quadratique et L ne contient pas E puisque $\rho^v\delta$ n'appartient pas à $\Gamma_{K/E}$. Donc K est la composée des deux extensions L et E de F. On vérifie que le groupe G' est un tore et que $G'(F) = \{x \in U_{K/L}(1, L); norme_{K/E}(x) = 1\}$. L'immeuble $Imm(G'_{AD})$ est réduit à un unique sommet e'. Le sous-espace des invariants par l'action de $\rho_{G'}$ dans $X^*(G')$ est nul. Puisque K/E est totalement ramifiée, on a donc $X^*(G)^{I_F} = \{0\}$, doù $G'_{e'} = \{1\}$. L'espace $FC(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite portée par la fonction caractéristique de $\mathfrak{k}'_{e'}$. Elle est évidemment stable et invariante par automorphisme. Donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est la droite portée par la fonction précédente. On calcule le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ en explicitant la construction de **??**. On voit que $\rho_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1}$ est égal à $\zeta_\star^u$, où $\zeta_\star$ est un générateur de $Z(\hat{G}_{SC})$ indépendant de u et v. Il en résulte qu'il existe un caractère $\xi_\star$ d'ordre n de $E^1/(E^1)^n$, indépendant de u et v, de sorte que la restriction de $\xi_{\mathbf{G}'}$ à ce groupe soit $\xi_\star^u$. Donc $\xi_{\mathbf{G}'}$ appartient à Ξ_n^{ram}. Faisons maintenant varier u et v : considérons des données $\mathbf{G}'_0$ et $\mathbf{G}'_1$ associées à des couples distincts (u_0, v_0) et (u_1, v_1). Si $u_0 \neq u_1$, on a $\xi_\star^{u_0} \neq \xi_\star^{u_1}$, a fortiori $\xi_{\mathbf{G}'_0} \neq \xi_{\mathbf{G}'_1}$. Si $u_0 = u_1$, on a $v_0 \neq v_1$ donc n pair et on peut supposer que $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. On a alors $\delta_{G'_0} = \rho_{G'_1}\delta_{G'_1}$ d'où $\delta_{G'_0}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \rho_{G'_1}(\delta_{G'_1}(s_{sc})s_{sc}^{-1})\rho_{G'_1}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \delta_{G'_1}(s_{sc})s_{sc}^{-1}\zeta_\star^{u_1}$. Puisque n est pair et que u_1 est premier à n, $\zeta_\star^{u_1}$ n'est pas un carré dans $Z(\hat{G}_{SC})$. Puisque δ agit sur $Z(\hat{G}_{SC})$ par inversion, les deux cocycles associés à $\mathbf{G}'_0$ et $\mathbf{G}'_1$ ne peuvent être cohomologues que si $\delta_{G'_0}(s_{sc})s_{sc}^{-1}$ et $\delta_{G'_1}(s_{sc})s_{sc}^{-1}$ diffèrent par un carré de $Z(\hat{G}_{SC})$. Ce n'est pas le cas donc les cocycles ne sont pas cohomologues et $\xi_{\mathbf{G}'_0} \neq \xi_{\mathbf{G}'_1}$. En résumé, l'application $\mathbf{G}' \mapsto \xi_{\mathbf{G}'}$ est une bijection de l'ensemble des données $\mathbf{G}'$ associées à nos couples (u, v) sur l'ensemble Ξ_n^{ram}. Pour $\xi \in \mathcal{Y} = \Xi_n^{ram}$, on note $\mathbf{G}'_\xi$ celle de nos données pour laquelle $\xi_{\mathbf{G}'} = \xi$ et on pose $FC_\xi^{\mathcal{E}} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_\xi(F))^{Out(\mathbf{G}')}$. Les mêmes arguments qu'en **??** montrent que l'assertion (2) de **??** est vérifiée.

On note $\varphi : \mathcal{X} = \Xi_n^{ram} \to \mathcal{Y} = \Xi_n^{ram}$ l'identité. De nouveau, les mêmes arguments qu'en **??** montrent que l'assertion (3) de **??** est vérifiée.

4.4 Forme intérieure du type A_{n-1} quasi-déployé, E/F non ramifiée

On suppose que G^* est du type précédent mais que G n'est pas quasi-déployé. On a $H^1(\Gamma_F, G^*_{AD}) \simeq Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}$ et ce groupe est trivial si n est impair, isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si n est pair. Notre hypothèse sur G implique donc que n est pair et G est l'unique forme non quasi-déployée de $SU_{E/F}(n)$.

On pose $\mathcal{X} = \emptyset$. La situation est très voisine du précédent mais, cette fois, les éléments de $\underline{S}(G)$ sont en bijection avec les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + b = n$ et a, b impairs (cela résulte de la description de l'immeuble par l'algèbre linéaire ou des tables de Tits, le groupe étant du type ${}^2A''_{n-1}$). Le même calcul que dans le paragraphe précédent montre que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ pour tout sommet s. D'où $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$ et l'assertion **??** (1).

On pose $\mathcal{Y} = \emptyset$. La nullité de $FC(\mathfrak{g}(F))$ entraîne trivialement les assertions (2) et (3) de **??**.

4.5 Type A_{n-1} quasi-déployé, E/F ramifiée

Soit E/F une extension quadratique ramifiée. On considère un groupe G quasi-déployé de type A_{n-1}, avec $n \geq 3$, tel que l'action galoisienne sur le diagramme de Dynkin $\mathcal{D}$ soit triviale sur Γ_E mais que tout élément de $\Gamma_F - \Gamma_E$ agisse par l'automorphisme θ de $\mathcal{D}$. Le groupe E^1 est une extension d'un pro-p-groupe par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc $E^1/(E^1)^n = \{1\}$ si n est impair et $E^1/(E^1)^n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si n est pair. D'après le calcul fait en **??**, $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ est trivial si n est impair et a 4 éléments si n est pair. Supposons que n est pair. Le groupe $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ est isomorphe à $(Z(G)^{I_F})_{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Or I_F agit sur $Z(G)$ par $\sigma(z) = z$ pour $\sigma \in I_E$ et $\sigma(z) = z^{-1}$ pour $\sigma \in I_F - I_E$. Le groupe précédent a donc 2 éléments (remarquons que les deux sous-groupes $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ et $E^1/(E^1)^n$ de $G_{AD}(F)/\pi(G(F)$ ont tous deux 2 éléments mais ne sont pas égaux). On note Ξ_n le sous-ensemble des éléments de Ξ, c'est-à-dire des caractères de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ dont la restriction à $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ est triviale si n est divisible par 4, non triviale sinon. On revient maintenant au cas général où n n'est pas supposé pair.

Notons $\mathbb{X}$ l'ensemble des couples $(k,h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $h^2 + k(k+1) = n$. Si $\delta_{2\triangle}(n) = 0$, on pose $\mathcal{X} = \mathbb{X}$. Si $\delta_{2\triangle}(n) = 1$ (ce qui implique que n est pair), l'ensemble $\mathbb{X}$ possède un élément (k,h) tel que $h = 0$, on le note $(k_0, 0)$. On note $\mathcal{X}$ la réunion de $\mathbb{X} - \{(k_0,0)\}$ et de $\{(k_0, 0, \xi); \xi \in \Xi_n\}$. Quel que soit $\delta_{2\triangle}(n)$, on pose $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

On détermine l'ensemble $\underline{S}(G)$ par l'algèbre linéaire ou les tables de Tits (le groupe est de type $C - BC_{(n-1)/2}$ si n est impair, $B - C_{n/2}$ si n est pair). Si n est impair, $\underline{S}(G)$ est en bijection avec l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + b = n$, $a \neq 2$ et b est pair. Si n est pair, il y a une surjection de $\underline{S}(G)$ sur cet ensemble dont les fibres ont un seul élément, sauf la fibre au-dessus de $(0,n)$ qui en a deux. L'action de $G_{AD}(F)$ est triviale si n est impair. Si n est pair, ses orbites sont exactement les fibres de l'application précédente. Pour un sommet s paramétré par (a,b), on a $G_s = SO_{dep}(a) \times Sp(b)$. On a vu en **??** que $FC(\mathfrak{so}_{dep}(a, \mathbb{F}_q))$ n'est non nul que si a est de la forme $a = h^2$. On a vu en **??** que $FC(\mathfrak{sp}(b, \mathbb{F}_q))$ n'est non nul que si b est de la forme $b = k(k+1)$. Supposons ces conditions vérifiées. Alors ces espaces sont des droites, donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est lui-aussi une droite. Si $a \neq 0$, de cette droite se déduit d'après **??** une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note $FC_{k,h}$. Supposons $a = 0$ et $b = k(k+1)$. Ces conditions se produisent si et seulement si $\delta_{2\triangle}(n) = 1$ et alors $k = k_0$. L'espace $FC(\mathfrak{sp}(k_0(k_0+1)), \mathbb{F}_q))$ est la droite portée par une fonction $f_{N,\epsilon}$. Le caractère ϵ en question est trivial sur $Z(Sp(k_0(k_0+1))$ si $k_0(k_0+1)/2$ est pair et non trivial sinon. Ces conditions sont équivalentes à n divisible ou non par 4. La fonction se transforme donc selon le caractère trivial de $G_{AD}(F)_0$ si 4 divise n et selon le caractère non trivial de ce groupe si 4 ne divise pas n. D'après **??**, pour tout caractère $\xi \in \Xi_n$, la fonction $f_{N,\epsilon}$ donne donc naissance à un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ se transformant selon le caractère ξ de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. On note $FC_{0,k_0,\xi}$ la droite portée par cette fonction. On a ainsi associé une droite FC_x à tout $x \in \mathcal{X}$ de sorte que **??**(1) soit vérifiée.

Notons $\mathbb{Y}$ l'ensemble des couples (i,j) tels que $i,j \in \mathbb{N}$, $i \leq j$, $i(i+1)/2 + j(j+1)/2 = n$. Si $\delta_{2\triangle}(n) = 0$, on pose $\mathcal{Y} = \mathbb{Y}$. Supposons $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. Le couple (k_0, k_0) appartient à $\mathbb{Y}$. On note $\mathcal{Y}$ la réunion de $\mathbb{Y} - \{(k_0,k_0)\}$ et de $\{(k_0, k_0, \xi); \xi \in \Xi_n\}$.

Déterminons les données endoscopiques elliptiques $\mathbf{G}$ de G telles que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')} \neq \{0\}$. On identifie $\hat{\Delta}_a$ à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme en **??**, l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ et le groupe $\hat{\Omega}$ sont comme dans ce paragraphe, l'extension E/F étant maintenant ramifiée. On considère une donnée $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. A équivalence près, c'est-à-dire modulo conjugaison par l'action de $\hat{\Omega}$, on peut supposer et on suppose que $0 \in \mathcal{O}$. Rappelons que l'on a noté $E_{G'}/F$

l'extension telle que $\Gamma_{E_{G'}}$ soit le noyau de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. On sait que $E \subset E_{G'}$ et que $\Gamma_{E_{G'}}/\Gamma_E$ s'envoie injectivement dans $\hat{\Omega}$. Les propriétés suivantes en résultent : $E_{G'}/E$ est une extension cyclique de degré divisant n ; pour $\rho \in \Gamma_{E_{G'}/E}$ et $\delta \in \Gamma_{E_{G'}/F} - \Gamma_{E_{G'}/E}$, on a les égalités $\delta^2 = 1$ et $\delta\rho = \rho^{-1}\delta$. D'après **??**(4), cela entraîne $E_{G'} = E$ ou $E_{G'} = Q$ (l'extension biquadratique de F) et, dans ce dernier cas, n est pair.

Supposons d'abord $E_{G'} = E$. L'orbite $\mathcal{O}$ est réduite au point 0 ou à deux points $0, c$, avec $0 < c < n$. Le premier cas donne la donnée endoscopique principale $\mathbf{G}$ dont on ne connaît pas encore l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ associé. Laissons-la provisoirement en suspens. Dans le second cas, on remarque d'abord que l'on peut supposer $0 < c \leq n/2$. En effet, si $c > n/2$, on conjugue nos données par l'action de l'application $j \mapsto j - c$ qui appartient à $\hat{\Omega}$. Cela remplace c par $-c = n - c < n/2$. On a $G'(F) = \{(u, v) \in U_{E/F}(c, F) \times U_{E/F}(n - c, F); det(u)det(v) = 1\}$. D'après le lemme **??**, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est le même espace que celui associé au groupe G'_{SC}. On peut utiliser pour ce groupe l'assertion (5) ci-dessous par récurrence puisque $c, n - c < n$. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ n'est non nul que si c et $n - c$ sont de la forme $i(i + 1)/2$ et $j(j + 1)/2$. Supposons ces conditions vérifiées. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est alors une droite. La donnée $\mathbf{G}'$ n'a pas d'automorphisme non trivial sauf si n est pair et $c = n/2$ ou encore $i = j$. Dans ce cas, il y a un automorphisme non trivial qui échange les deux facteurs $U_{E/F}(n/2)$. Mais cet automorphisme agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est une droite. Si $i \neq j$, on note $\mathbf{G}'_{i,j}$ notre donnée endoscopique et on pose $FC^{\mathcal{E}}_{i,j} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j})}$. Supposons $i = j$. Alors $\delta_{2\triangle}(n) = 1$ et $i = k_0$. On pose alors $\xi = \xi_{\mathbf{G}'}$, on note $\mathbf{G}'_{k_0,k_0,\xi}$ notre donnée endoscopique et on pose $FC^{\mathcal{E}}_{k_0,k_0,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{k_0,k_0,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{k_0,k_0,\xi})}$. Remarquons qu'à ce point, on ne sait pas encore que $\xi \in \Xi_n$.

Supposons maintenant que $E_{G'} = Q$, donc n est pair. On note $\Gamma_{Q/E} = \{1, \rho\}$ et δ l'élément non trivial de $\Gamma_{Q/F}$ qui fixe tout élément de l'extension quadratique non ramifiée E_0 de F. On a forcément $\rho_{G'}(j) = j + n/2$ pour tout $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et il existe $u \in \{0, ..., n - 1\}$ tel que $\delta_{G'}(j) = -j + u$. L'orbite $\mathcal{O}$, qui est celle de 0 d'après notre hypothèse $0 \in \mathcal{O}$, peut avoir 2 ou 4 éléments. Si elle en a 4, le fixateur d'une racine dans $\mathcal{O}$ est Γ_Q. Puisque Q/F n'est pas totalement ramifiée, la donnée endoscopique correspondante vérifie $FC(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$ d'après le lemme **??**. On peut exclure ce cas. Supposons donc que $\mathcal{O}$ n'a que deux éléments. Alors forcément $\mathcal{O} = \{0, n/2\}$ donc $u = 0$ ou $u = n/2$. Posons $e = 0$ si $u = 0$, $e = 1$ si $u = n/2$. Alors $(\rho^e\delta)_{G'}(j) = -j$ pour tout j. Le fixateur dans $\Gamma_{Q/F}$ de la racine $\hat{\alpha}_0 \in \mathcal{O}$ est $\{1, \rho^e\delta\}$. D'après le lemme **??**, on peut supposer que le sous-corps des points fixes de ce groupe est une extension ramifiée de F. D'après la définition de δ, cela impose $e = 1$ et $u = n/2$. On voit que $G'(F) = \{x \in U_{Q/E_0}(n/2, E_0); norme_{Q/E}(det(x)) = 1\}$. L'extension Q/E_0 est ramifiée. On peut comme dans le cas $E_{G'} = E$ utiliser (5) ci-dessous par récurrence, en remplaçant le corps de base F par E_0 : l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ n'est non nul que si $n/2$ est de la forme $i(i+1)/2$. On a alors nécessairement $i = k_0$. Supposons qu'il en soit ainsi. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite qui possède un générateur naturel. La donnée $\mathbf{G}'$ a un unique automorphisme non trivial, qui est l'action de l'élément $j \mapsto j + n/2$ de $\hat{\Omega}$, ou encore celle de ρ. C'est-à-dire que cet automorphisme agit sur $G'(F) \subset U_{Q/E_0}(n/2, E_0)$ par l'action naturelle de ρ sur ce dernier groupe. On doit prouver que l'action déduite sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est triviale. On peut remplacer G' par G'_{SC}. Posons $h = [(k_0+1)/2]$, $k = [k_0/2]$. On a $n/2 = h^2 + k(k+1)$. On utilise les résultats du présent paragraphe par récurrence, précisément la description ci-dessous de $\mathcal{X}^{st}$. Le générateur de $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est la fonction issue d'un sommet s' de l'immeuble de G'_{AD} pour lequel $G'_{SC,s'}(\mathbb{F}_q) = SO_{dep}(h^2, \mathbb{F}_{q^2}) \times Sp(k(k+1), \mathbb{F}_{q^2})$. Ce groupe est muni d'un automorphisme naturel déduit du Frobenius Fr. On voit que l'action de ρ conserve le sommet s' de l'immeuble de G'_{AD} et agit sur $G'_{SC,s'}$ comme ce Frobenius. En se reportant à la description des générateurs $f_{N,\epsilon}$ pour les deux composantes de l'espace $\mathfrak{g}'_{SC,s'}(\mathbb{F}_q)$, on voit que les supports de ces fonctions contiennent des points fixes par l'action de Frobenius donc elles ne peuvent qu'être fixées par cette action. On obtient l'assertion souhaitée : $Out(\mathbf{G}')$ agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est une droite. Posons $\xi = \xi_{\mathbf{G}'}$. On note $\mathbf{G}'_{k_0,k_0,\xi}$ notre donnée endoscopique et on pose $FC^{\mathcal{E}}_{k_0,k_0,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{k_0,k_0,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{k_0,k_0,\xi})}$. Comme plus haut, on ne sait pas encore que $\xi \in \Xi_n$.

A ce point, on a obtenu une description de $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ qui ressemble à celle de **??** (2). Il y a trois différences. On n'a pas traité la donnée principale $\mathbf{G}$. Dans le cas où il existe un élément $y = (i,j) \in \mathbb{Y}$ tel que $i = 0$ (cet élément est alors unique), on n'a pas défini d'espace $FC^{\mathcal{E}}_y$ (dans la construction du cas $E_{G'} = E$, on a supposé $0 < c$ ce qui impose $i > 0$). Dans le cas où $\delta_{2\triangle}(n) = 1$, on a bien construit deux droites $FC^{\mathcal{E}}_{k_0,k_0,\xi}$ mais on n'a prouvé ni que les caractères ξ intervenant étaient distincts, ni qu'ils appartenaient à Ξ_n.

Traitons ce dernier point. On suppose donc n pair et $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. On utilise les générateurs ρ et δ de $\Gamma_{Q/F}$ introduits ci-dessus. Notons $\mathbf{G}'_1$ et $\mathbf{G}'_2$ les deux données endoscopiques notées $\mathbf{G}'_{k_0,k_0,\xi}$ ci-dessus. Elles sont associées à la même orbite $\mathcal{O} = \{0, n/2\}$. La différence est dans les actions galoisiennes. On a $\delta_{G'_1}(j) = \delta_{G'_2}(j) = -j + n/2$ mais $\rho_{G'_1}(j) = j$ et $\rho_{G'_2}(j) = j + n/2$ pour tout $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On calcule les éléments de $H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))$ associés à ces deux actions. En identifiant $Z(\hat{G}_{SC})$ à $\boldsymbol{\zeta}_n(\mathbb{C})$, ce sont les deux cocycles triviaux sur W_Q et tels que $\delta \mapsto (-1)^{n/2}$, $\rho \mapsto 1$ pour $\mathbf{G}'_1$, $\rho \mapsto -1$ pour $\mathbf{G}'_2$. En se rappelant la définition de δ, on obtient les deux cocycles dont la restriction à I_F est triviale si $n/2$ est pair, non triviale si $n/2$ est impair. En utilisant les suites exactes que l'on a écrites dans **??**, on voit que cet ensemble de cocycles s'identifie à Ξ_n, comme on le voulait.

On définit une application

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{X} & \to & \mathbb{Y} \\ & (k,h) & \mapsto & \varphi(k,h) = (i,j) \end{array}$$

par les formules suivantes :

si $k \geq h$, $i = k - h$, $j = k + h$;

si $k < h$, $i = h - k - 1$, $j = h + k$.

On vérifie que ϕ est une bijection. Si $\delta_{2\triangle}(n) = 0$, on pose $\varphi = \phi$. Supposons $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. On voit que $\phi(k_0, 0) = (k_0, k_0)$. Alors ϕ se relève en une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ qui envoie $(k_0, 0, \xi)$ sur (k_0, k_0, ξ) pour $\xi \in \Xi_n$. On note $\mathcal{X}^{st}$ le sous-ensemble des $(k,h) \in \mathbb{X}$ tels que $h = k$ ou $h = k + 1$. On voit que $\mathcal{X}^{st}$ a au plus un élément. Il correspond par φ au sous-ensemble $\mathcal{Y}^{st}$ des $(i,j) \in \mathbb{Y}$ tels que $i = 0$, qui a lui aussi au plus un élément (c'est l'élément que l'on n'a pas obtenu dans la description ci-dessus de $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$). Si $\mathcal{X}^{st}$ est non vide, on note son unique élément (k^{st}, h^{st}) (remarquons qu'il est forcément différent de l'éventuel élément $(k_0, 0)$) et on note $(0, j^{st})$ celui de $\mathcal{Y}^{st}$. Utilisons l'égalité

$$dim(FC(\mathfrak{g}(F))) = dim(FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F)))$$

$$= dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))) + \sum_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G), \mathbf{G}' \neq \mathbf{G}} dim(FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}).$$

Puisque tous les sous-espaces FC_x et $FC^{\mathcal{E}}_y$ que nous avons construits sont des droites, les résultats déjà obtenus entraînent que $dim(FC(\mathfrak{g}(F))) = |\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}|$ tandis que la dernière somme de l'expression ci-dessus vaut $|\mathcal{Y}| - |\mathcal{Y}^{st}|$. Par différence, on obtient $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))) = |\mathcal{Y}^{st}|$. Si $\mathcal{Y}^{st} = \emptyset$, nos constructions précédentes ont donc décrit tout $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$. Si $\mathcal{Y}^{st}$ a un élément $(0, j^{st})$, il suffit de poser $FC^{\mathcal{E}}_{0,j^{st}} = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ pour compléter ces constructions et obtenir **??** (2).

Munissons $\mathbb{X}$ de la relation $(k,h) \leq (k',h')$ si et seulement si $h+k \leq h'+k'$. Montrons que

(1) c'est une relation d'ordre total.

Soit $x = (k,h) \in \mathbb{X}$. Posons $a(x) = 2h + 2k + 1$, $b(x) = 2k + 1 - 2h$. On vérifie que $a(x)^2 + b(x)^2 = 8h^2 + 8k(k+1) + 2 = 8n + 2$. Soit $x' = (k',h') \in \mathbb{X}$, supposons $x \leq x'$ et $x' \leq x$. Alors $a(x) = a(x')$. L'égalité précédente entraîne $b(x) = \pm b(x')$. Si $b(x) = -b(x')$, on a $4k + 2 = a(x) + b(x) = a(x') - b(x') = 4h'$, ce qui est impossible, les deux termes extrêmes n'étant pas congrus modulo 4. Donc $b(x) = b(x')$ puis $x' = x$. Cela prouve (1).

Par la surjection naturelle $\mathcal{X} \to \mathbb{X}$, on relève notre relation d'ordre sur $\mathbb{X}$ en une relation de préordre sur $\mathcal{X}$ que l'on note encore $\leq$. Dans les constructions ci-dessus, on a associé à tout $y \in \mathcal{Y}$ une donnée endoscopique $\mathbf{G}'_y$ et l'application $y \mapsto \mathbf{G}'_y$ est injective. Soit $y \in \mathcal{Y}$. On introduira dans le paragraphe **??** un élément G-régulier $Y_y \in \mathfrak{g}'_{y,ell}(F)$ qui a les propriétés suivantes :

(2) pour tout élément non nul $f' \in FC^{\mathcal{E}}_y = FC^{st}(\mathfrak{g}'_y(F))^{Out(\mathbf{G}'_y)}$, on a $S^{G'_y}(Y_y, f') \neq 0$;

(3) soient $x \in \mathcal{X}$ et $f \in FC_x$; soit X un élément de $\mathfrak{g}_{ell}(F)$ correspondant à Y_y ; supposons $I^G(X,f) \neq 0$; alors $\varphi^{-1}(y) \leq x$.

Alors les hypothèses (1) à (5) de **??** sont satisfaites pour $\underline{\mathcal{Y}}^\sharp = \underline{\mathcal{Y}}$ avec les notations de ce paragraphe. Cela entraîne

$$(4) \qquad transfert(FC_{(x)}) = FC^{\mathcal{E}}_{\varphi((x))}$$

pour tout $(x) \in \underline{\mathcal{X}}$. Nos classes déquivalence (x) sont presque toutes réduites à un élément x. Dans ce cas, la relation ci-dessus équivaut à $transfert(FC_x) = FC^{\mathcal{E}}_{\varphi(x)}$. Si $\delta_{2\triangle}(n) = 1$, il y a la classe$\{(k_0, 0, \xi); \xi \in \Xi_n\}$ qui a deux éléments. Mais les deux droites $FC_{k_0,0,\xi}$ pour $\xi \in \Xi_n$ se distinguent par l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ qui agit par ξ sur $FC_{0,k_0,\xi}$. Du côté endoscopique, les deux droites $FC^{\mathcal{E}}_{k_0,k_0,\xi}$ de l'espace correspondant se distinguent aussi par le caractère ξ associé à la donnée $\mathbf{G}'_{k_0,k_0,\xi}$. Puisque le transfert est compatible avec l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$, l'égalité (4) se raffine en les égalités

$$transfert(FC_{k_0,0,\xi}) = FC^{\mathcal{E}}_{k_0,k_0,\xi}$$

pour $\xi \in \Xi_n$. Cela démontre **??**(3).

La relation **??** (4) résulte de **??** (3) et des constructions : $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est l'image réciproque par l'application $transfert$ du sous-espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \subset FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$. Ce dernier espace est par définition $FC^{\mathcal{E}}_{0,j^{st}}$, donc $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC_{\varphi^{-1}(0,j^{st})} = FC_{k^{st},h^{st}}$. Remarquons que $\mathcal{Y}^{st} \neq \emptyset$ si et seulement si $\delta_\triangle(n) = 1$. L'assertion suivante est alors conséquence de **??** (4) :

(5) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))) = \delta_\triangle(n)$.

4.6 Forme intérieure du type A_{n-1} quasi-déployé, E/F ramifiée

On suppose que G^* est du type précédent mais que G n'est pas quasi-déployé. Comme en **??**, cela impose que n est pair et que G est l'unique forme non quasi-déployée du groupe $SU_{E/F}(n)$.

On conserve les objets $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ et ϕ du cas précédent. On note $\mathcal{X}$ le sous-ensemble des $(k,h) \in \mathbb{X}$ tels que $h \neq 0$ et on pose $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ est maintenant paramétré par les couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a+b=n$, b est pair et $a \neq 0$. Pour un sommet s paramétré par (a,b), on a $G_s = SO_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(a) \times Sp(b)$, où $SO_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(a)$ est la forme non déployée du groupe spécial orthogonal. La construction de la droite FC_x pour $x \in \mathcal{X}$ est alors identique à celle du paragraphe précédent. Les petites difficultés causées par les sommets qui étaient conjugués par le groupe $G_{AD}(F)$ mais pas par $G(F)$ disparaissent car ces sommets disparaissent.

On note $\mathcal{Y}$ le sous-ensemble des $(i,j) \in \mathbb{Y}$ tels que $i<j$. La construction de la droite $FC_y^{\mathcal{E}}$ pour $y \in \mathcal{Y}$ est la même que dans le paragraphe précédent. Les données endoscopiques un peu exceptionnelles paramétrées par l'éventuel couple (k_0,k_0) ne contribuent pas : ces données sont les seules pour lesquelles le groupe d'automorphismes extérieurs $Out(\mathbf{G}')$ est non trivial. Maintenant, ce groupe agit par son unique caractère non trivial sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}'} = \{0\}$.

On voit que $\phi(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ et on note φ l'application ϕ restreinte à $\mathcal{X}$. On prouve l'assertion (3) de **??** comme dans le paragraphe précédent.

5 Calcul d'intégrales orbitales, type A_{n-1} quasi-déployé, E/F ramifiée

5.1 Description explicite des éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$

Soit E/F une extension quadratique ramifiée. On fixe une uniformisante $\varpi_E \in E^\times$ telle que $\varpi_E^2 \in F^\times$. Soit V un espace vectoriel sur E de dimension $n \geq 2$, muni d'une forme hermitienne q (relativement à E/F). On note $\mathbf{G}$ le groupe unitaire de (V,q) et G le sous-groupe spécial unitaire. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ leurs algèbres de Lie. On a $\mathbf{G}(E) = GL_E(V)$ et $\mathfrak{g}(E) = End_E(V)$. Pour $X \in \mathfrak{g}(E)$, on note $X^\star$ l'élément de $\mathfrak{g}(E)$ tel que $q(Xv,v') = q(v,X^\star v')$ pour tous $v,v' \in V$. Alors $\mathfrak{g}(F)$ est l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}(E)$ tels que $X = -X^\star$ et $\mathfrak{g}(F)$ est le sous-ensemble des $X \in \mathfrak{g}(F)$ tels que $trace(X) = 0$. Si V' et V'' sont deux sous-E-espaces de V en dualité pour la forme q et si R est un sous-$\mathfrak{o}_E$-réseau de V', on note $R^* = \{v'' \in V''; \forall v' \in R, q(v'',v') \in \mathfrak{o}_E\}$.

L'ensemble $\mathfrak{g}(E)$ est non seulement une algèbre de Lie mais une algèbre tout court pour le produit matriciel habituel. Quand on parlera de sous-algèbre de $\mathfrak{g}(E)$, il s'agira d'une sous-algèbre pour ce produit matriciel. Nous définirons divers sous-$\mathfrak{o}_E$-modules de $\mathfrak{g}(E)$ invariants par l'application $X \mapsto X^\star$ et nous utiliserons leurs intersections avec $\mathfrak{g}(F)$ et $\mathfrak{g}(F)$. Dans ce cas, pour simplifier les notations, nous noterons le sous-module de $\mathfrak{g}(E)$ par une lettre gothique grasse affectée d'un exposant E, son intersection avec $\mathfrak{g}(F)$ par la même lettre grasse sans exposant et son intersection avec $\mathfrak{g}(F)$ par la lettre gothique fine sans exposant. Par exemple, $\mathfrak{h}^E \subset \mathfrak{g}(E)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^E \cap \mathfrak{g}(F)$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(F)$.

On note sgn l'unique caractère d'ordre 2 de $\mathbb{F}_q^\times$, ou son relèvement en un caractère de $\mathfrak{o}_F^\times$. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on note χ le caractère de $(\mathbb{F}_q^\times)^m$ défini par $\chi(\underline{\gamma}) = \prod_{i=1,\dots,m} sgn(\gamma_i)^i$ pour tout $\underline{\gamma} = (\gamma_i)_{i=1,\dots,m} \in (\mathbb{F}_q^\times)^m$. On note encore χ le caractère similaire de $(\mathfrak{o}_F^\times)^m$.

Soient deux entiers $h^o, h^s \in \mathbb{N}$, supposons $n = h^{o2} + h^s(h^s+1)$. Les exposants o et s évoquent "orthogonal" et "symplectique" pour une raison qui va apparaître et seront traités comme des symboles mathématiques. Supposons d'abord $h^o \neq 0$. On peut choisir une décomposition en sous-espaces

$$V = \oplus_{i=-2h^s,\dots 2h^o-2} V_i$$

et, pour tout indice $i \in \{-2h^s, ..., 2h^o - 2\}$, un $\mathfrak{o}_E$-sous-réseau $R_i \subset V_i$ de sorte que

pour $i, j \in \{-2h^s, ..., 2h^o - 2\}$, V_i et V_j sont orthogonaux sauf si $i, j \geq 0$ et $i + j = 2h^o - 2$ ou si $i, j \leq -1$ et $i + j = -1 - 2h^s$, auquel cas ils sont en dualité ; en particulier, si $h^o \geq 1$, l'espace V_{h^o-1} est non dégénéré ;

pour $i = 0, ..., h^o - 1$, $dim_E(V_i) = i + 1$ et, pour $i = -h^s, ..., -1$, $dim_E(V_i) = |i|$;

pour $i \geq 0$, $R_i = R^*_{2h^o-2-i}$ pour la dualité entre V_i et V_{2h^o-2-i} ;

pour $i \leq -1$, $R_i = \mathfrak{p}_E^{-1} R^*_{-2h^s-1-i}$ pour la dualité entre V_i et V_{-2h^s-1-i} .

Posons $d = 2h^o + 2h^s - 1$. On a défini les $\mathfrak{o}_E$-modules R_i pour $i \in \{-2h^s, ..., 2h^o - 2\}$. On prolonge cette définition en posant $R_i = \mathfrak{p}_E^m R_j$ pour $i = j + md \in \mathbb{Z}$ avec $j \in \{-2h^s, ..., 2h^o - 2\}$ et $m \in \mathbb{Z}$. On pose $R_{\geq i} = \sum_{j \geq i} R_j$. On a $R_{\geq i} \supset R_{\geq i+1}$, $R_{\geq -2h^s} = R^*_{\geq 0} \supset R_{\geq 0} \supset R_{\geq 2h^0-1} = \mathfrak{p}_E R^*_{\geq 0}$. La forme q se réduit en une forme orthogonale non dégénérée q^o sur le $\mathbb{F}_q$-espace $V^o = R_{\geq 0}/\mathfrak{p}_E R^*_{\geq 0}$ et la forme $\varpi_E q$ se réduit en une forme symplectique q^s sur le $\mathbb{F}_q$-espace $V^s = R^*_{\geq 0}/R_{\geq 0}$. On note G^o, resp. G^s, le groupe spécial orthogonal de (V^o, q^o), resp. le groupe symplectique de (V^s, q^s) (ces groupes sont définis sur $\mathbb{F}_q$). Notons $\mathfrak{k}^E$ la sous-$\mathfrak{o}_E$-algèbre de $\mathfrak{g}(E)$ formée des éléments qui conservent les réseaux $R_{\geq 0}$ et $R^*_{\geq 0}$. Notons $(\mathfrak{k}^E)^\perp$ l'idéal de $\mathfrak{k}^E$ formé des éléments X tels que $X(R^*_{\geq 0}) \subset R_{\geq 0}$ et $X(R_{\geq 0}) \subset \mathfrak{p}_E R^*_{\geq 0}$. On a les isomorphismes $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^\perp = \mathfrak{k}/\mathfrak{k}^\perp \simeq \mathfrak{g}^o(\mathbb{F}_q) \oplus \mathfrak{g}^s(\mathbb{F}_q)$.

Pour $i \in \mathbb{Z}$, on note $\mathfrak{q}^E_{i/d}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}(E)$ formé des éléments X tels que $X(R_j) \subset R_{i+j}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On pose $\mathfrak{p}^E_{i/d} = \sum_{j \geq i} \mathfrak{q}^E_{j/d}$. Pour $i, j \in \mathbb{Z}$ le produit matriciel envoie $\mathfrak{p}^E_{i/d} \times \mathfrak{p}^E_{j/d}$ dans $\mathfrak{p}^E_{(i+j)/d}$. En particulier $\mathfrak{p}^E_0$ est une algèbre et $\mathfrak{p}^E_{i/d}$ en est un idéal pour tout $i \geq 0$. De plus, $\mathfrak{p}^E_0 \subset \mathfrak{k}^E$. Remarquons que $\mathfrak{q}^E_{i/d}$ et $\mathfrak{p}^E_{i/d}$ sont invariants par l'application $X \mapsto X^\star$. La "périodicité" des applications $i \mapsto \mathfrak{p}^E_{i/d}$ et $i \mapsto \mathfrak{p}_{i/d}$ n'est pas tout-à-fait la même : on a $\mathfrak{p}^E_{1+i/d} = \mathfrak{p}_E \mathfrak{p}^E_{i/d}$ et $\mathfrak{p}_{2+i/d} = \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{i/d}$.

Pour $i \geq 0$, notons $\mathfrak{g}^o_{2i}$ et $\mathfrak{g}^o_{\geq 2i}$, resp. $\mathfrak{g}^s_{2i}$ et $\mathfrak{g}^s_{\geq 2i}$, les projections dans $\mathfrak{g}^o(\mathbb{F}_q)$, resp. $\mathfrak{g}^s(\mathbb{F}_q)$, de $(\mathfrak{q}_{i/d} + \mathfrak{k}^\perp)/\mathfrak{k}^\perp$ et $(\mathfrak{p}_{i/d} + \mathfrak{k}^\perp)/\mathfrak{k}^\perp$. Pour $a \in \{o, s\}$, l'ensemble $\mathfrak{g}^a_{\geq 0}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}^a(\mathbb{F}_q)$ et $\mathfrak{g}^a_{\geq 2}$ en est son radical nilpotent. L'espace $\mathfrak{g}^a_0$ en est une sous-algèbre de Levi et on note G^a_0 le sous-groupe associé de G^a. L'action de $G^a_0(\mathbb{F}_q)$ dans l'espace $\mathfrak{g}^a_2$ possède un nombre fini d'orbites ouvertes. Pour $a = s$, chaque orbite est formée d'éléments nilpotents de $\mathfrak{g}^s(\mathbb{F}_q)$ paramétrés par la partition $(2h^s, ..., 4, 2)$ et par toutes les familles $(q_{2h^s}, ..., q_4, q_2)$ de classes d'isomorphie de formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$, non dégénérées de rang 1. L'ensemble de ces familles s'identifie évidemment à $(\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2})^{h^s}$. Pour $a = o$, chaque orbite est formée d'éléments nilpotents de $\mathfrak{g}^o(\mathbb{F}_q)$ paramétrés par la partition $(2h^o - 1, ..., 3, 1)$ et par les familles $(q_{2h^o-1}, ..., q_3, q_1)$ de classes d'isomorphie de formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$, non dégénérées de rang 1, telles que q^o soit isomorphe à la somme $\oplus_{i=1,...,h^o} q_{2i-1}$ à laquelle on ajoute un certain nombre de plans isotropes. Il existe un élément $\gamma(V) \in \mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2}$ tel que l'ensemble de ces familles soit naturellement isomorphe à l'ensemble des $\underline{\gamma} = (\gamma_i)_{i=1,...,h^o} \in (\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2})^{h^o}$ tels que $(-1)^{[h^o/2]} \prod_i \gamma_i = \gamma(V)$. On note cet ensemble $(\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2})^{h^o}(V)$. Pour $a = o, s$, notons $\tilde{\mathfrak{g}}^a_2$ la réunion de ces orbites ouvertes. On définit une fonction $\tilde{f}^a$ sur $\mathfrak{g}^a(\mathbb{F}_q)$ de la façon suivante. Elle est à support dans $\tilde{\mathfrak{g}}^a_2 + \mathfrak{g}^a_{\geq 4}$ et est invariante par translations par $\mathfrak{g}^a_{\geq 4}$. Pour un élément $X \in \tilde{\mathfrak{g}}^a_2$ paramétré par un élément $\underline{\gamma} = (\gamma_i)_{i=1,...,h^a}$ de $(\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2})^{h^o}(V)$ si $a = o$, de $(\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2})^{h^s}$ si $a = s$, $\tilde{f}^a(X) = \chi(\underline{\gamma})$ (pour préciser les indexations, le terme γ_i de $\underline{\gamma}$ est associé à la forme quadratique q_{2i-1} si $a = o$, q_{2i} si $a = s$). Notons P^a le sous-groupe parabolique de G^a d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^a_{\geq 0}$. La fonction $\tilde{f}^a$ est invariante par conjugaison par $P^a(\mathbb{F}_q)$. On définit la fonction f^a sur $\mathfrak{g}^a(\mathbb{F}_q)$ par

$$f^a(X) = \sum_{g \in G^a(\mathbb{F}_q)/P^a(\mathbb{F}_q)} \tilde{f}(g^{-1}Xg)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}^a(\mathbb{F}_q)$. En fait, on sait que, pour tout X, il existe au plus un $g \in G^a(\mathbb{F}_q)/P^a(\mathbb{F}_q)$ tel que $\tilde{f}(g^{-1}Xg) \neq 0$, la somme est donc réduite à au plus un élément. On pose $\tilde{f} = \tilde{f}^o \oplus \tilde{f}^s$ et $f = f^o \oplus f^s$. On note f_G la fonction sur $\mathfrak{g}(F)$, à support dans $\mathfrak{k}$ et invariante par $\mathfrak{k}^\perp$, telle que $f_G(X) = f(\bar{X})$ pour tout $X \in \mathfrak{k}$, où $\bar{X}$ est la réduction de X dans $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^\perp = \mathfrak{g}^a(\mathbb{F}_q) \oplus \mathfrak{g}^s(\mathbb{F}_q)$. On définit de même la fonction $\tilde{f}_G$.

Remarque. Les espaces $\mathfrak{g}^a_{2i}$ sont les mêmes qu'en **??**.

Il existe un sommet s de l'immeuble $Imm(G_{AD})$ (avec un autre emploi du symbole s) tel que $\mathfrak{k}$ s'identifie à $\mathfrak{k}_s$. La fonction f engendre la droite $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. La fonction f_G est celle notée f_x en **??**, où $x = (h^s, h^o)$. On voit que les suites de réseaux $(R_{\geq i})_{i \in \mathbb{Z}}$ que l'on a introduites sont uniquement associées à (h^s, h^o), à conjugaison près par $G(F)$.

Considérons maintenant le cas $h^o = 0$. On suppose alors que G est quasi-déployé. On peut alors choisir une décomposition en sous-espaces

$$V = \oplus_{i=-2h^s,\ldots-1} V_i$$

et, pour tout indice $i \in \{-2h^s, ..., -1\}$, un $\mathfrak{o}_E$-sous-réseau $R_i \subset V_i$ de sorte que les propriétés précédentes soient vérifiées. Tout ce que l'on a dit ci-dessus reste vrai, aux changements suivants près :

la périodicité $d = 2h^o + 2h^s - 1$ de nos suites est remplacée par $d = 2h^s$;

l'espace V^o est nul et disparaît (on peut dire que notre hypothèse que G est quasi-déployé équivaut à l'égalité $\gamma(V) = 1$) ;

les suites de réseaux $(R_{\geq i})_{i \in \mathbb{Z}}$ sont uniques à conjugaison près par $\mathbf{G}(F)$ mais il y a deux suites possibles à conjugaison près par $G(F)$: à partir de la suite que l'on a fixée, on peut remplacer les modules R_{-1} et R_{-2h^s} respectivement par $\mathfrak{p}_E R_{-2h^s}$ et $\mathfrak{p}_E^{-1} R_{-1}$.

On obtient deux fonctions f_G. Pour $x = (h^s, 0, \xi)$ comme en **??**, la fonction f_x de ce paragraphe est combinaison linéaire de ces deux fonctions.

Toujours dans le cas $h^o = 0$, on introduit la variante suivante de nos suites de réseaux. Pour $i \in \{-2h^s+1, ..., -1\}$, on pose $R_i^\natural = R_i$ si $i \neq -1$, $R_{-1}^\natural = R_{-1} \oplus \mathfrak{p}_E R_{-2h^s}$. Cette suite se prolonge comme précédemment en une suite $(R_i^\natural)_{i \in \mathbb{Z}}$ dont la périodicité est $d^\natural = 2h^s - 1$. On définit ensuite les modules $\mathbf{\mathfrak{p}}^E_{i/d^\natural}$ etc.. en utilisant les nouvelles suites de réseaux.

On revient au cas général où h^o est quelconque.

Lemme. *Soit X un élément du support de f_G. Soit $\alpha \in \bar{F}^\times$ une valeur propre de X, où X est considéré comme un élément de $End_E(V)$. Alors on a $val_E(\alpha) \geq \frac{1}{2h^o + 2h^s - 1}$.*

Preuve. A conjugaison près par $G(F)$, on peut supposer que X appartient au support de $\tilde{f}_G$. Alors X appartient à $\mathfrak{p}_{1/d} \subset \mathbf{\mathfrak{p}}^E_{1/d}$. Donc $X^{dm} \in \mathbf{\mathfrak{p}}^E_m = \mathfrak{p}_E^m \mathbf{\mathfrak{p}}^E_0$ pour tout entier $m \geq 1$. Cela entraîne que $val_E(\alpha) \geq \frac{1}{d}$. Si $h^o \neq 0$, on a $d = 2h^o + 2h^s - 1$, d'où la conclusion de l'énoncé.

Supposons maintenant $h^o = 0$. Montrons que $\mathfrak{p}_{1/d} = \mathfrak{p}^\natural_{1/d^\natural}$. L'inclusion $\mathfrak{p}^\natural_{1/d^\natural} \subset \mathfrak{p}_{1/d}$ est évidente. Soit $Y \in \mathfrak{p}_{1/d}$. On veut prouver que $Y \in \mathfrak{p}^\natural_{1/d^\natural}$, c'est-à-dire que $Y(R^\natural_{\geq i}) \subset R^\natural_{\geq (i+1)}$ pour tout $i = -2h^s + 1, ..., -1$. Pour tout tel i, on a $R^\natural_{\geq i} = R_{\geq i}$ et, si $i \neq -1$, $R^\natural_{\geq (i+1)} = R_{\geq (i+1)}$. Si $i \neq -1$, l'inclusion à démontrer résulte donc de l'hypothèse $Y \in$

$\mathfrak{p}_{1/d}$. Pour $i=-1$, on a $R^{\natural}_{\geq(i+1)}=R_{\geq 1}$. On doit prouver l'inclusion $Y(R_{\geq -1})\subset R_{\geq 1}$ alors que l'hypothèse $Y\in\mathfrak{p}_{1/d}$ nous dit seulement que $Y(R_{\geq -1})\subset R_{\geq 0}$ et $Y(R_{\geq 0})\subset R_{\geq 1}$. Or l'espace $R_{\geq -1}/R_{\geq 1}$ de dimension 2 sur $\mathbb{F}_q$ est naturellement muni d'une forme quadratique déployée. L'élément Y se réduit en un élément $\bar{Y}$ de l'algèbre de Lie de son groupe spécial orthogonal. De plus, les relations imposées à Y entraînent que $\bar{Y}$ est nilpotent. Or le groupe spécial orthogonal est un tore, le seul nilpotent dans son algèbre de Lie est nul. Donc $\bar{Y}=0$, c'est-à-dire $Y(R_{\geq -1})\subset R_{\geq 1}$, ce qui démontre l'assertion.

En particulier $X\in\mathfrak{p}^{\natural}_{1/d^{\natural}}$. Le même raisonnement que dans le cas $h^o\neq 0$ montre que $val_E(\alpha)\geq\frac{1}{d^{\natural}}$. Or $d^{\natural}=2h^o+2h^s-1$, d'où encore la conclusion de l'énoncé. $\square$

5.2 Le cas stable

On conserve les hypothèses du cas précédent et on suppose maintenant que G est quasi-déployé et que $h^s=h^o$ ou $h^s=h^o-1$. On pose simplement $h=h^o$ et $\eta=h-h^s$. Notre hypothèse $n\geq 2$ entraîne $h\geq h^s\geq 1$. On fixe des suites de réseaux $(R_i)_{i=-2h+2\eta,...2h-2}$ comme dans le paragraphe précédent et tous les objets qui s'en déduisent. On identifie $\mathfrak{o}_F^{\times}/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$ à un ensemble de représentants $\mathcal{C}\subset\mathfrak{o}_F^{\times}$.

Soit $m\in\{1,...,h\}$. On pose $d_m=4m-1-2\eta$. On fixe un élément $\alpha_m\in\bar{F}^{\times}$ tel que $\alpha_m^{d_m}=\varpi_E$. On vérifie que l'extension $E(\alpha_m)/F(\alpha_m^2)$ est quadratique, plus précisément $E(\alpha_m)$ est la composée des deux extensions E et $F(\alpha_m^2)$ de F. On considère $E(\alpha_m)$ comme un espace sur E et, pour $\gamma\in\mathcal{C}$, on le munit de la forme hermitienne $q_{m,\gamma}$ (relative à l'extension E/F) définie par $q_{m,\gamma}(v,v')=(-1)^{m-1}\gamma d_m^{-1}trace_{E(\alpha_m)/E}(\bar{v}v'\alpha_m^{2-2m})$ pour $v,v'\in E(\alpha_m)$, où $v\mapsto\bar{v}$ est la conjugaison galoisienne associée à l'extension $E(\alpha_m)/F(\alpha_m^2)$.

Soit $\underline{\gamma}=(\gamma_m)_{m=1,...,h}\in\mathcal{C}^h$. On pose $V_{\underline{\gamma}}=\oplus_{m=1,...,h}E(\alpha_m)$ et on munit cet espace de la forme hermitienne $q_{\underline{\gamma}}=\oplus_{m=1,...,h}q_{m,\gamma_m}$. On vérifie que cet espace hermitien est isomorphe à (V,q) si et seulement si $\underline{\gamma}$ appartient à $\mathcal{C}^h(V)$ (qui est l'ensemble $(\mathbb{F}_q^{\times}/\mathbb{F}_q^{\times,2})^h(V)$ du paragraphe précédent). Supposons cette condition vérifiée. On voit que l'on peut fixer, et on fixe, un isomorphisme d'espaces hermitiens $\iota_{\underline{\gamma}}:V_{\underline{\gamma}}\to V$ vérifiant les conditions suivantes :

pour $i\in\{1-h,...,h-1\}$, R_{h-1+i} est l'image par $\iota_{\underline{\gamma}}$ de la somme sur $m\in\{|i|+1,..;,h\}$ des modules $\mathfrak{o}_E\alpha_m^{m-1+i}$;

pour $i\in\{1,...h-\eta\}$, $R_{-h-1+\eta+i}$ est l'image par $\iota_{\underline{\gamma}}$ de la somme sur $m\in\{\eta+i,..;,h\}$ des modules $\mathfrak{o}_E\alpha_m^{-m-1+\eta+i}$;

pour $i\in\{1,...h-\eta\}$, $R_{-h+\eta-i}$ est l'image par $\iota_{\underline{\gamma}}$ de la somme sur $m\in\{\eta+i,..;,h\}$ des modules $\mathfrak{o}_E\alpha_m^{-m+\eta-i}$.

Notons $X'_{\underline{\gamma}}$ l'endomorphisme de $V_{\underline{\gamma}}$ qui agit sur chaque $E(\alpha_m)$ par multiplication par α_m, à l'exception suivante : si $\eta=1$ et $m=1$, auquel cas $d_1=1$, $X'_{\underline{\gamma}}$ agit sur $E_{\alpha_1}=E$ par 0. On note $X_{\underline{\gamma}}$ l'endomorphisme de V qui s'en déduit via $\iota_{\underline{\gamma}}$. On vérifie que $X_{\underline{\gamma}}\in\mathfrak{g}_{ell}(F)\cap\mathfrak{k}$. Notons $\bar{X}_{\underline{\gamma}}=\bar{X}^o_{\underline{\gamma}}\oplus\bar{X}^s_{\underline{\gamma}}$ la réduction de $X_{\underline{\gamma}}$ dans $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^{\perp}=\mathfrak{g}^o(\mathbb{F}_q)\oplus\mathfrak{g}^s(\mathbb{F}_q)$. Pour $a\in\{o,s\}$, on vérifie que $\bar{X}^a_{\underline{\gamma}}$ appartient à $\tilde{\mathfrak{g}}^a_2+\mathfrak{g}^a_{\geq 4}$ et que cet élément nilpotent est paramétré

dans le cas $a=o$, par la partition $(h,...,3,1)$ et l'élément $\underline{\gamma}\in\mathcal{C}^h(V)$;

dans le cas $a=s$, par la partition $(2h-2\eta,...,4,2)$ et l'élément $((-1)^{1+\eta}\gamma_h,....,(-1)^{1+\eta}\gamma_{2+\eta},(-1)^{1+\eta}\gamma_{1+\eta})$ de $\mathcal{C}^{h-\eta}$. On en déduit l'égalité

$$(1) \qquad \tilde{f}_G(X_{\underline{\gamma}}) = \left\{ \begin{array}{ll} sgn(-1)^{[h/2]}, & si\ \eta = 0; \\ sgn((-1)^{[h/2]}\gamma(V)), & si\ \eta = 1. \end{array} \right.$$

Cette valeur ne dépend pas de $\underline{\gamma}$.

Il est bien connu que les éléments $X_{\underline{\gamma}}$ sont tous stablement conjugués, plus précisément que la famille $(X_{\underline{\gamma}})_{\underline{\gamma}\in\mathcal{C}^h(V)}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $\mathbf{G}(F)$ dans leur classe de conjugaison stable commune. C'est aussi un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$, c'est-à-dire que, pour tout $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^h(V)$, la classe de conjugaison de $X_{\underline{\gamma}}$ par $G(F)$ est égale à sa classe de conjugaison par $\mathbf{G}(F)$. C'est évident si n est impair puisqu'alors $\pi(G(F)) = G_{AD}(F)$. Si n est pair, le commutant dans $\mathbf{G}(F)$ de $X_{\underline{\gamma}}$ contient l'image via $\iota_{\underline{\gamma}}$ du sous-groupe isomorphe à $\{\pm 1\}^h$ formé des éléments qui agissent par ± 1 sur chaque $E(\alpha_m)$. Ce sous-groupe s'envoie surjectivement sur l'image $E^1/(E^1)^n$ de $\mathbf{G}(F)$ dans $\pi(G(F))\backslash G_{AD}(F)$ et l'assertion en résulte.

On a donc pour tout $\gamma \in \mathcal{C}^h(V)$ une égalité

$$(2) \qquad S^G(X_{\underline{\gamma}}, \tilde{f}_G) = \sum_{\underline{\gamma}'\in\mathcal{C}^h(V)} I^G(X_{\underline{\gamma}'}, \tilde{f}_G).$$

Notons K_R le sous-groupe des éléments $g \in G(F)$ tels que $g(R_{\geq i}) \subset R_{\geq i}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. L'action de ce groupe fixe la fonction $\tilde{f}_G$. Montrons que

(3) l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $g^{-1}X_{\underline{\gamma}}g$ appartienne au support de $\tilde{f}_G$ est égal à K_R.

Le temps de la preuve de (3), on identifie V à $V_{\underline{\gamma}}$ par l'isomorphisme $\iota_{\underline{\gamma}}$. L'élément $\underline{\gamma}$ étant fixé, on le supprime de la notation pour alléger celle-ci. On pose $V^{<h} = \oplus_{m=1,...,h-1}E(\alpha_m)$. Fixons $g \in G(F)$ tel que $g^{-1}Xg$ appartienne au support de $\tilde{f}_G$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, posons $S_i = gR_i$, $S_{\geq i} = gS_{\geq i}$. Ces $\mathfrak{o}_E$-modules vérifient les mêmes conditions que les R_i ou $R_{\geq i}$. Par construction, le support de $\tilde{f}_G$ est contenu dans $\mathfrak{p}_{1/d}$ (où $d = d_h$), c'est-à-dire que tout élément Y de ce support satisfait la relation $Y(R_{\geq i}) \subset R_{\geq i+1}$ pour tout i. Puisque $g^{-1}Xg$ appartient à ce support, on a donc

(4) $XS_{\geq i} \subset S_{\geq i+1}$ pour tout i.

Nous allons prouver par récurrence sur n que cette relation entraîne $S_{\geq i} = R_{\geq i}$ pour tout i. La relation (4) entraîne $X^dS_{\geq i} \subset S_{\geq i+d} = \mathfrak{p}_ES_{\geq i}$. Pour $m = 1, ..., h$, l'élément $\varpi_E^{-1}X^d \in \mathfrak{g}(E)$ agit sur $E(\alpha_m)$ par multiplication par $\alpha_m^d\varpi_E^{-1}$ (à l'exception du cas $\eta = 1$, $m = 1$ où l'élément agit par 0 sur $E(\alpha_1)$). On a $val_E(\alpha_m^d\varpi_E^{-1}) > 0$ si $m < h$ tandis que $val_E(\alpha_h^d\varpi_E^{-1}) = 0$. Un sous-$\mathfrak{o}_E$-réseau de V qui est conservé par un tel élément est forcément somme de ses intersections avec les deux sous-espaces $E(\alpha_h)$ et $V^{<h}$. Ecrivons conformément $S_{\geq i} = S_{\geq i}^h \oplus S_{\geq i}^{<h}$. La relation (4) entraîne d'abord que $S_{\geq i}^h$ est un sous-$\mathfrak{o}_{E(\alpha_h)}$-module de $E(\alpha_h)$. Cela implique que $S_{\geq i}^h = \mathfrak{p}_{E(\alpha_h)}^{j(i)}$ pour un entier $j(i) \in \mathbb{Z}$. L'application $i \mapsto j(i)$ est forcément croissante. L'égalité $S_{\geq i+d}^h = \mathfrak{p}_ES_{\geq i}^h$ implique que $j(i + d) = j(i) + d$. La relation (4) entraîne aussi $\alpha_hS_{\geq i}^h \subset S_{\geq i+1}^h$, c'est-à-dire $\mathfrak{p}_{E(\alpha_h)}^{j(i)+1} \subset \mathfrak{p}_{E(\alpha_h)}^{j(i+1)}$, d'où $j(i + 1) \leq j(i) + 1$. Avec la relation $j(i + d) = j(i) + d$, cela entraîne $j(i + 1) = j(i) + 1$ pour tout i. On se rappelle l'égalité $\mathfrak{p}_ES_{\geq 0}^{\star} = S_{\geq 2h-1}$, d'où $\mathfrak{p}_ES_{\geq 0}^{h,\star} = S_{\geq 2h-1}^h$. La définition de la forme q_{h,γ_h} entraîne que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $(\mathfrak{p}_{E(\alpha_h)}^j)^{\star} = \mathfrak{p}_{E(\alpha_h)}^{-2h+2\eta-j}$. Donc $\mathfrak{p}_ES_{\geq 0}^{h,\star} = \mathfrak{p}_{E(\alpha_h)}^{-2h+2\eta+d-j(0)}$ et l'égalité précédente entraîne $j(2h - 1) = -2h + 2\eta + d - j(0)$, c'est-à-dire $2j(0) = -4h + 1 + 2\eta + d = 0$. Or donc $S_{\geq i}^h = \mathfrak{p}_{E(\alpha_h)}^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. La suite de réseaux $(S_{\geq i}^h)_{i\in\mathbb{Z}}$ est donc uniquement

déterminée et on voit que l'on a $S^h_{\geq i} = R_{\geq i} \cap E(\alpha_h)$ (cela résulte soit de la définition de la suite de réseaux $(R_{\geq i})_{i\in\mathbb{Z}}$, soit du fait que cette suite vérifie (4)).

On doit maintenant déterminer les réseaux $S^{<h}_{\geq i}$. Supposons d'abord $h \geq 2+\eta$. Pour $i \in \{-1, 0\} \cup \{2h-3, 2h-2\}$, il résulte des définitions que

$$dim_{\mathbb{F}_q}(S_{\geq i}/S_{\geq i+1}) = 1 = dim_{\mathbb{F}_q}(S^h_{\geq i}/S^h_{\geq i+1}).$$

Il en résulte que $S^{<h}_{\geq i} = S^{<h}_{\geq i+1}$. On peut réindicer la suite $(S^{<h}_{\geq i})_{i\in\mathbb{Z}}$ en définissant

$\bar{S}^{<h}_{\geq i} = S^{<h}_{\geq i+1}$ pour $i \in \{0, ..., 2h-4\}$, $\bar{S}^{<h}_{\geq i} = S^h_{\geq i-1}$ pour $i \in \{-2h+2+2\eta, -1\}$ et $\bar{S}^{<h}_{\geq i+d_{h-1}r} = \mathfrak{p}^r_E \bar{S}^{<h}_{\geq i}$ pour $i \in \{-2h+2+2\eta, 2h-4\}$ et $r \in \mathbb{Z}$.

On a encore la relation $X\bar{S}^{<h}_{\geq i} \subset \bar{S}_{\geq i+1}$ pour tout i, ce qui est l'analogue de (4). Les données $V^{<h}$, $\bar{S}^{<h}_{\geq i}$ et $X_{|V^{<h}}$ vérifient les mêmes hypothèses que V, $S_{\geq i}$ et X. On applique l'hypothèse de récurrence : les réseaux $\bar{S}^{<h}_{\geq i}$ sont uniquement déterminés et égaux aux analogues pour nos données des réseaux $R_{\geq i}$. Ces analogues sont les réseaux $\bar{R}^{<h}_{\geq i}$ déduits de $R_{\geq i} \cap V^{<h}$ de la même façon que $\bar{S}^{<h}_{\geq i}$ a été déduit de $S^{<h}_{\geq i}$. Cela entraîne la relation voulue $S_{\geq i} = R_{\geq i}$ pour tout i. Il reste à lever l'hypothèse $h \geq 2+\eta$. Si $\eta = 0$ et $h = 1$, on voit que $V^{<1} = \{0\}$ donc $S^1_{\geq i} = \{0\} = R_{\geq i} \cap V^{<1}$. Si $\eta = 1$, on a déjà exclu le cas $h = 1$ (qui impose $n = 1$). Si $\eta = 1$ et $h = 2$, $V^{<2}$ se réduit à $E(\alpha_2) = E$. On a alors $S^{<2}_{\geq i} = \mathfrak{p}^{j'(i)}_E$ pour un $j'(i) \in \mathbb{Z}$. Les mêmes arguments de dimension et de dualité utilisés plus haut entraînent que $j'(i+5r) = r$ pour $i \in \{-3, ...1\}$ et $r \in \mathbb{Z}$. On obtient encore $S^{<2}_{\geq i} = R_{\geq i} \cap V^{<2}$ et la conclusion.

Puisque $gR_{\geq i} = S_{\geq i} = R_{\geq i}$ pour tout i, on a $g \in K_R$. Cela prouve (3).

Lemme. *On a $S^G(X_{\underline{\gamma}}, f_G) \neq 0$ pour tout $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^h(V)$.*

Preuve. Puisque K_R fixe $\tilde{f}_G$, il résulte de (3) que $I^G(X_{\underline{\gamma}}, \tilde{f}_G) = c_{\underline{\gamma}} \tilde{f}_G(X_{\underline{\gamma}})$ où $c_{\underline{\gamma}} > 0$ (on vérifie qu'en fait, cette constante ne dépend pas de $\underline{\gamma}$ mais peu nous importe). On déduit de (1) et (2) que $S^G(X_{\underline{\gamma}}, \tilde{f}_G) \neq 0$ pour tout $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^h(V)$. Mais, par construction, $S^G(X_{\underline{\gamma}}, f_G) = cS^G(X_{\underline{\gamma}}, \tilde{f}_G)$ où c est un entier strictement positif. $\square$

La propriété suivante résulte de la construction :

(5) pour tout $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^h(V)$, $X_{\underline{\gamma}}$ possède une valeur propre $\alpha \in \bar{F}^\times$ telle que $val_E(\alpha) = \frac{1}{2h^o+2h^s-1}$.

5.3 Preuve des assertions (2) et (3) de ??

On reprend les notations de ce paragraphe. Soit $y \in \mathcal{Y}$, notons (i, j) son image dans $\mathbb{Y}$ et posons $(k, h) = \phi^{-1}(i, j)$. Rappelons que, par définition de l'ensemble $\mathbb{Y}$, on a $i \leq j$. On a associé à y une donnée endoscopique $\mathbf{G}'_y$. Celle-ci vérifie $G'_{y,SC}(F) = SU_{E/F}(i(i+1)/2, F) \times SU_{E/F}(j(j+1)/2, F)$, sauf dans le cas où $i = j$, auquel cas $G'_{y,SC}(F)$ peut être soit le groupe précédent, soit $SU_{Q/E_0}(n/2, E_0)$ (où E_0/F est l'extension quadratique non ramifiée et Q est l'extension biquadratique de F). Notons G'' l'un des facteurs de ces groupes. On applique à ce groupe G'' les constructions du paragraphe précédent, quitte pour le dernier groupe à remplacer le corps de base F par E_0. Elles nous fournissent un élément $f_{G''} \in FC(\mathfrak{g}''(F))$ et divers éléments notés $X_{\underline{\gamma}}$ dans ce paragraphe. On fixe un tel élément $X'' \in \mathfrak{g}''_{ell}(F)$. Le lemme **??** affirme que $S^{G''}(X'', f_{G''}) \neq 0$. Quand le groupe $G'_{y,SC}(F)$ n'a qu'un seul facteur, on note f'_y la fonction $f_{G''}$ et $Y_y = X''$. Quand il a deux facteurs, on note f'_y le produit tensoriel des deux fonctions $f_{G''}$. On a envie de définir Y_y comme la somme des deux éléments X'' mais l'élément ainsi défini n'est pas forcément

G-régulier car une même valeur propre peut apparaître dans chacun des deux facteurs. On utilise l'argument de **??** : on remplace les éléments X'' par des éléments suffisamment voisins de sorte que ces derniers vérifient les mêmes propriétés que les éléments initiaux (c'est-à-dire le lemme et la relation (5) du paragraphe précédent) mais que leur somme soit G-régulière. On note alors Y_y leur somme.

On peut préciser une propriété de cet élément Y_y. Supposons $G'_{y,SC}(F) = SU_{E/F}(i(i+1)/2, F) \times SU_{E/F}(j(j+1)/2, F)$ et considérons le groupe $G'' = SU_{E/F}(j(j+1)/2)$. D'après **??**(5), l'élément X'' possède une valeur propre $\alpha \in \bar{F}^\times$ telle que $val_E(\alpha) = \frac{1}{2j-1}$. On vérifie à l'aide de la définition de ϕ que $2j-1 = 2h+2k-1$. On en déduit

(1) pour tout élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ correspondant à Y_y, X possède une valeur propre α telle que $val_E(\alpha) = \frac{1}{2h+2k-1}$.

Le même résultat vaut dans le cas où $G'_{y,SC}(F) = SU_{Q/E_0}(n/2, E_0)$. Le fait que l'on doit changer de corps de base ne change pas la valuation puisque E_0/F est non ramifiée.

Démontrons **??** (2), c'est-à-dire

(2) pour tout élément non nul $f' \in FC^{st}(\mathfrak{g}'_y(F))^{Out(\mathbf{G}'_y)}$, on a $S^{G'_y}(Y_y, f') \neq 0$.

Les groupes G'' considérés ci-dessus sont du type $A_{n''-1}$ quasi-déployé, relatif à une extension ramifiée. Utilisons pour ces groupes les notations de **??** en y ajoutant des $''$. On a vu en **??** que la fonction $f_{G''}$ appartenait à la droite $FC''_{x''}$ pour l'unique élément $x'' \in \mathcal{X}^{'',st}$. Excluons d'abord le cas $i=0$. Alors $n'' < n$ et on peut appliquer par récurrence l'assertion (4) de **??** : $FC_{x''} = FC^{st}(\mathfrak{g}''(F))$. Il en résulte que $f'_y \in FC^{st}(\mathfrak{g}'_y(F))$ et on a vu que cette droite était fixe par $Out(\mathbf{G}'_y)$. L'inégalité $S^{G'_y}(Y_y, f'_y) \neq 0$ entraîne alors (2). Considérons maintenant le cas $i=0$. La donnée $\mathbf{G}'_y$ est la donnée principale $\mathbf{G}$ et (k,h) est l'unique élément de $\mathcal{X}^{st}$. La fonction f'_y est alors la fonction $f_{k,h}$ mais on n'a pas encore démontré qu'elle appartenait à $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. On a toutefois déjà prouvé en **??** que cet espace était de dimension 1. Notons $f_{\mathbf{G}}$ un générateur de cet espace. On peut écrire $f'_y = cf_{\mathbf{G}} + f'$, où $c \in \mathbb{C}$ et $f' \in \sum_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G), \mathbf{G}' \neq \mathbf{G}} FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$. L'élément Y_y est elliptique. Par définition des espaces $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$, on a donc $S^G(Y_y, f') = 0$. Donc $S^G(Y_y, f'_y) = cS^G(Y_y, f_{\mathbf{G}})$ et on conclut $S^G(Y_y, f_{\mathbf{G}}) \neq 0$. Cela démontre (2).

Démontrons maintenant **??** (3). Soit $x' \in \mathcal{X}$, notons (k', h') son image dans $\mathbb{X}$. La droite $FC_{x'}$ est portée par la fonction notée f_G en **??** associée au couple $(h^s, h^o) = (k', h')$, notons-la $f_{x'}$. Soit $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ un élément correspondant à Y_y. Supposons $I^G(X, f_{x'}) \neq 0$. D'après (1), X possède une valeur propre α telle que $val_E(\alpha) = \frac{1}{2h+2k-1}$. Le lemme **??** nous dit que $val_E(\alpha) \geq \frac{1}{2h'+2k'-1}$. Il en résulte que $k'+h' \geq k+h$. Par définition, cela signifie que $x' \geq \varphi^{-1}(y)$. Cela démontre **??** (3).

5.4 Action d'un automorphisme

On reprend les hypothèses de **??**. Pour exhiber un épinglage du groupe G, posons $\alpha = 1$ si n est impair et $\alpha = \varpi_E^{-1}$ si n est pair. Quitte à multiplier q par un élément de $\mathfrak{o}_F^\times$, on peut supposer qu'il existe une base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de V vérifiant les égalités suivantes

$q(e_i, e_{n+1-i}) = (-1)^i \alpha$ pour tout $i = 1, \dots, n$,

$q(e_i, e_j) = 0$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$ tels que $i + j \neq n+1$.

On identifie $GL(V \otimes_E \bar{F})$ à $GL(n, \bar{F})$ grâce à cette base. Notons B le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur de $GL(n)$ et T le sous-tore diagonal. Introduisons l'épinglage habituel formé des matrices $(E_i)_{i=1,\dots,n-1}$, où E_i est l'élément de $\mathfrak{gl}(n)$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le $(i, i+1)$-ième qui vaut 1. Notons θ l'automorphisme de $GL(n)$ qui préserve B et T, envoie E_i sur E_{n-i} pour tout $i = 1, \dots, n-1$ et agit sur $Z(GL(n))$ par $\theta(z) = z^{-1}$. On note $\sigma \mapsto \sigma_{GL(n)}$ l'action galoisienne habituelle (action sur les coefficients des matrices) et on introduit l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$ définie par $\sigma_G = \sigma_{GL(n)}$ si $\sigma \in \Gamma_E$ et $\sigma_G = \theta \circ \sigma_{GL(n)}$ si $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_E$. On vérifie qu'alors G est égal à $GL(n)$ muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$. L'automorphisme θ se restreint en un automorphisme de G défini sur F. Remarquons que, modulo le plongement $G(F) \subset G(E) = GL(n,E)$, l'action de θ sur $G(F)$ s'identifie à l'action $g \mapsto \tau_{GL(n)}(g)$, où τ est l'element non trivial de $\Gamma_{E/F}$.

Posons $n^o = h^2$, $n^s = (h-\eta)(h+1-\eta)$. Supposons d'abord n impair donc $\alpha = 1$.On peut choisir notre suite de réseaux $(R_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de sorte que $R_{\geq 0}$ soit engendré sur $\mathfrak{o}_E$ par $e_1, ...e_{n^s/2+n^o}, \varpi_E e_{n^s/2+n^o+1}, ..., \varpi_E e_n$. Alors $R^*_{\geq 0}$ est engendré sur $\mathfrak{o}_E$ par $\varpi_E^{-1}e_1, ..., \varpi_E^{-1}e_{n^s/2}$, $e_{n^s/2+1}, ..., e_n$. Posons $I^o = \{n^s/2+1, ..., n^s/2+n^o\}$, $I^s_+ = \{1, ..., n^s/2\}$, $I^s_- = \{n^s/2+n^o+1, ..., n\}$, $I^s = I^s_+ \cup I^s_-$. Pour $i \in I^o$, resp. $i \in I^s_+$, $i \in I^s_-$, notons $\underline{e_i}$ la réduction dans $V^o = R_{\geq 0}/\mathfrak{p}_E R^*_{\geq 0}$, resp $V^s = R^*_{\geq 0}/R_{\geq 0}$, de e_i, resp. $\varpi_E^{-1}e_i$, resp. e_i. L'espace V^o est muni de la base $(\underline{e_i})_{i\in I^o}$ et l'espace V^s est muni de la base $(\underline{e_i})_{i\in I^s}$. Pour $i,j \in I^s$, posons $a_{i,j} = 0$ si $i,j \in I^s_+$ ou $i,j \in I^s_-$, $a_{i,j} = 1$ si $i \in I^s_+$ et $j \in I^s_-$ et $a_{i,j} = -1$ si $i \in I^s_-$ et $j \in I^s_+$. Pour $X = (x_{i,j})_{i,j=1,...,n} \in \mathfrak{g}(E)$, notons X^o la matrice extraite $(x_{i,j})_{i,j\in I^o}$ et X^s la matrice $(\varpi_E^{a_{i,j}}x_{i,j})_{i,j\in I^s}$. Si $X \in \mathfrak{k}^E$, on vérifie que ces matrices X^o et X^s sont à coefficients dans $\mathfrak{o}_E$ et que les images de X dans $\mathfrak{g}^o(\mathbb{F}_q)$, resp. $\mathfrak{g}^s(\mathbb{F}_q)$, sont les réductions naturelles de X^o, resp. X^s, c'est-à-dire que l'on envoie chaque coefficient sur sa réduction dans $\mathbb{F}_q$. A cause des termes $\varpi_E^{a_{i,j}}$ dans les formules ci-dessus et parce que $\tau(\varpi_E) = -\varpi_E$, cette description montre que l'action de θ préserve $\mathfrak{k}^E$ et se réduit en l'identité de $\mathfrak{g}^o(\mathbb{F}_q)$ et en l'action sur $\mathfrak{g}^s(\mathbb{F}_q)$ de la similitude symplectique qui agit par -1 sur les $\underline{e_i}$ pour $i \in I^s_+$ et par 1 sur les $\underline{e_i}$ pour $i \in I^s_-$. On vérifie que cette similitude multiplie la fonction f^s par $sgn(-1)^{n^s/2}$. Posons $j = 2h-\eta$. On a $n = j(j+1)/2$. On a supposé n impair. Puisque $n = h^2 + n^s$ et que n^s est pair, h est impair. On voit alors que $n^s/2$ est de la même parité que $[(j+2)/4]$. D'où

(1) $\theta(f_G) = sgn(-1)^{[(j+2)/4]}f_G$.

Supposons maintenant n pair donc $\alpha = \varpi_E^{-1}$. On peut choisir notre suite de réseaux $(R_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de sorte que $R_{\geq -2h+2\eta}$ soit engendré sur $\mathfrak{o}_E$ par $e_1, ..., e_{n^o/2}, \varpi_E e_{n^o/2+1}, ..., \varpi_E e_n$. Alors $R^*_{\geq 2h-2\eta}$ est engendré sur $\mathfrak{o}_E$ par $e_1, ..., e_{n^s+n^o/2}, \varpi_E e_{n^s+n^o/2+1}, ..., \varpi_E e_{n/2}$. Le calcul se poursuit comme ci-dessus, les rôles de $\mathfrak{g}^o$ et $\mathfrak{g}^s$ étant inversés. L'action de θ préserve $\mathfrak{k}^E$ et se réduit en l'identité de $\mathfrak{g}^s(\mathbb{F}_q)$ et en l'action sur $\mathfrak{g}^o(\mathbb{F}_q)$ de la similitude de rapport -1. On vérifie que cette similitude multiplie la fonction f^o par $sgn(-1)^{[h(h+1)/2]}$. Cette fois, h est pair et $h(h+1)/2$ est encore de même parité que $[(j+2)/4]$. D'où encore (1).

6 Les groupes (quasi)-classiques

6.1 Type B_n déployé

On suppose G déployé de type B_n avec $n \geq 2$. C'est-à-dire que $G = Spin_{dep}(2n+1)$ est la forme déployée du groupe spinoriel et on a $G_{AD} = SO_{dep}(2n+1)$. La norme spinorielle se quotiente en un isomorphisme $\pi(G(F))\backslash G_{AD}(F) \to F^\times/F^{\times,2}$. L'image de $G_{AD}(F)_0$ dans ce groupe est le sous-groupe $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$. On note Ξ^{nr}, resp. Ξ^{ram}, l'ensemble des caractères de $F^\times/F^{\times,2}$ qui sont triviaux, resp. non triviaux, sur $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$.

Notons $\mathbb{X}^{nr}$ l'ensemble des couples $(k,h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k^2 + h^2 = 2n+1$, k est pair et h est impair. S'il n'existe pas de tel couple avec $k = 0$, on pose $\mathcal{X}^{nr} = \mathbb{X}^{nr}$. Si un tel couple $(0,h_0)$ existe, on note $\mathcal{X}^{nr}$ la réunion de $\mathbb{X}^{nr} - \{(0,h_0)\}$ et de $\{(0,h_0,\xi); \xi \in \Xi^{nr}\}$. Remarquons que le couple $(0,h_0)$ n'existe que si n est pair. Notons $\mathbb{X}^{ram}$ l'ensemble des couples $(k,h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k(k+1)/2 + h(h+1)/2 = 2n+1$, $k \geq h$ et, si $\delta_4(q-1) = 0$, l'un des termes $k(k+1)/2$ ou $h(h+1)/2$ est divisible par 4 (remarquons que l'égalité vérifiée par k et h entraîne en tout cas qu'un et un seul des deux termes précédents est pair). On note $\mathcal{X}^{ram}$ l'ensemble des triplets (k,h,ξ) avec $(k,h)\in\mathbb{X}^{ram}$ et $\xi\in\Xi^{ram}$. On pose $\mathcal{X}=\mathcal{X}^{nr}\sqcup\mathcal{X}^{ram}$ et $d_x=1$ pour tout $x\in\mathcal{X}$.

Pour tout groupe $Spin(N)$, avec $N\geq 3$, on note z l'elément non trivial du noyau de la projection naturelle $Spin(N)\to SO(N)$. En décrivant l'immeuble à l'aide de l'algèbre linéaire ou en utilisant les tables de Tits, on obtient la description suivante. L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $a+b=n$ et $a\neq 1$. Les fibres de cette surjection ont un seul élément sauf celle au-dessus de $(0,n)$ qui en a deux. L'action de $G_{AD}(F)$ préserve les fibres et permute les deux éléments de la fibre au-dessus de $(0,n)$. Pour $s\in\underline{S}(G)$ paramétré par le couple (a,b), on a $G_s=Spin(2n+1)$ si $(a,b)=(0,n)$, $G_s=Spin_{dep}(2n)$ si $(a,b)=(n,0)$, $G_s=(Spin_{dep}(2a)\times Spin(2b+1))/\{1,(z,z)\}$ si $ab\neq 0$. Considérons un sommet s paramétré par un couple (a,b) avec $ab\neq 0$. Considérons deux fonctions $f_{N^a,\epsilon^a}\in fc(\mathfrak{Spin}_{dep}(2a,\mathbb{F}_q))$ et $f_{N^b,\epsilon^b}\in fc(\mathfrak{Spin}(2b+1,\mathbb{F}_q))$. Parce que G_s est le quotient par $\{1,(z,z)\}$ de $G_{s,SC}$, le produit tensoriel des deux fonctions est un élément de $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ si et seulement si $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)$. On suppose cette condition vérifiée. L'image dans G_s de l'élément z de G est l'image dans G_s de $(1,z)$ où, ici, z est l'élément de $Spin(2b+1)$. L'action de $G_{AD}(F)_0$ sur $f_{N^a,\epsilon^a}\otimes f_{N^b,\epsilon^b}$ est donc triviale si $\epsilon^b(z)=1$, non triviale sinon. L'action du groupe $G_{AD}(F)$ tout entier est déterminée par l'action supplémentaire de l'automorphisme θ de $Spin_{dep}(2a)$. On utilise alors les descriptions de **??**, **??** et **??**. Il y a une fonction $f_{N^a,\epsilon^a}\otimes f_{N^b,\epsilon^b}$ avec $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=1$ si et seulement si $(2a,2b+1)$ est de la forme (k^2,h^2). Si cette condition est vérifiée, le couple (k,h) appartient à $\mathcal{X}^{nr}$. La fonction f_{N^a,ϵ^a} est invariante par θ. D'après **??**, $f_{N^a,\epsilon^a}\otimes f_{N^b,\epsilon^b}$ donne naissance à un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ et on note $FC_{k,h}$ la droite portée par cette fonction. Il y a des fonctions $f_{N^a,\epsilon^a}\otimes f_{N^b,\epsilon^b}$ avec $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=-1$ si et seulement si $(2a,2b+1)$ est de la forme $(k'(k'+1)/2,h'(h'+1)/2)$ et, de plus, a est pair ou $\delta_4(q-1)=0$. Supposons ces conditions vérifiées. Il y a alors deux fonctions f_{N^a,ϵ^a} qui, en les normalisant correctement, sont permutées par θ. On obtient deux fonctions $f_{N^a,\epsilon^a}\otimes f_{N^b,\epsilon^b}$ sur lesquelles $G_{AD}(F)_0$ agit par son caractère non trivial et qui sont permutées par θ. Pour chaque caractère $\xi\in\Xi^{ram}$, la somme ou la différence de ces deux fonctions se transforme selon le caractère ξ de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. D'après **??**, il se déduit pour tout $\xi\in\Xi^{ram}$ un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ et on note $FC_{k,h,\xi}$ la droite qu'elle porte, où (k,h) est le seul des couples (k',h') ou (h',k') tel que $k\geq h$. Remarquons que la condition a est pair ou $\delta_4(q-1)=0$ que l'on a imposée équivant à : si $\delta_4(q-1)=0$, $k(k+1)/2$ ou $h(h+1)/2$ est divisible par 4. Alors, le triplet (k,h,ξ) appartient à $\mathcal{X}^{ram}$. Considérons maintenant le sommet s paramétré par le couple $(n,0)$. On a $G_s=Spin_{dep}(2n)$. La description est la même que dans le cas précédent, en oubliant le facteur $Spin(2b+1)$, après avoir remarqué que l'image dans G_s de l'élément z de G est l'élément z de $Spin_{dep}(2n)$. Cela se vérifie en explicitant ces éléments grâce à l'ensemble de racines affines Δ_a de G : le z de G est $\check{\alpha}_n(-1)$, celui de $Spin_{dep}(2n)$ est l'image naturelle de $\check{\alpha}_0(-1)\check{\alpha}_1(-1)$ mais ces deux éléments sont en fait égaux car $\check{\alpha}_0\check{\alpha}_1\check{\alpha}_n\prod_{i=2,\ldots,n-1}\check{\alpha}_i^2=1$. Considérons enfin un sommet s paramétré par le couple $(0,n)$. Le stabilisateur de ce sommet dans $G_{AD}(F)$ est le sous-groupe $G_{AD}(F)_0$. Tout élément de $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ qui se transforme selon un caractère ξ_0 de $G_{AD}(F)_0$ donne naissance à deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ qui se transforment selon les deux éléments de Ξ dont la restriction à $G_{AD}(F)_0$ est ξ_0. Il y a une fonction $f\in FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ se transformant selon le caractère $\xi_0=1$ si et seulement si $2n+1$ est de la forme h_0^2. Dans ce cas, on note naturellement $FC_{0,h_0,\xi}$ les droites portées par les éléments ci-dessus, avec $\xi\in\Xi^{nr}$. On a $(0,h_0,\xi)\in\mathcal{X}^{nr}$. Il y a une fonction $f\in FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ se transformant selon l'unique caractère $\xi_0 \neq 1$ si et seulement si $2n+1$ est de la forme $k(k+1)/2$. Dans ce cas, les deux droites déduites se notent naturellement $FC_{k,0,\xi}$ pour $\xi \in \Xi^{ram}$. On a $(k,0,\xi) \in \mathcal{X}^{ram}$. Cette description démontre **??** (1).

Notons $\mathbb{Y}^{nr}$ l'ensemble des couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i(i+1)+j(j+1) = n$ et $i \leq j$. S'il n'existe pas de tel couple avec $i = j$, on pose $\mathcal{Y}^{nr} = \mathbb{Y}^{nr}$. Si un tel couple (i_0,i_0) existe, on note $\mathcal{Y}^{nr}$ la réunion de $\mathbb{Y}^{nr} - \{(i_0,i_0)\}$ et de $\{(i_0,i_0,\xi); \xi \in \Xi^{nr}\}$. Remarquons que ce couple (i_0,i_0) n'existe que si n est pair. Notons $\mathbb{Y}^{ram}$ l'ensemble des couples (i,j) avec $i,j \in \mathbb{N}$, vérifiant les conditions suivantes :

$2i(i+1) + j(j+1)/2 = n$;

si $\delta_4(q-1) = 0$, $[(i+1)/2] + [(j+2)/4]$ est pair.

On note $\mathcal{Y}^{ram}$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) pour $(i,j) \in \mathbb{Y}^{ram}$ et $\xi \in \Xi^{ram}$. On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^{nr} \sqcup \mathcal{Y}^{ram}$.

Déterminons les données endoscopiques elliptiques $\mathbf{G}'$ de G telles que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')} \neq \{0\}$. On considère un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. Rappelons que $\hat{\mathcal{D}}_a$ est le diagramme de Dynkin complété du groupe dual de G, c'est-à-dire d'un groupe de type C_n. Le groupe $\hat{\Omega}$ coïncide avec le groupe d'automorphismes de ce diagramme, lequel est $\{1,\omega\}$, où ω permute $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\alpha}_{n-i}$ pour $i = 0,...,n$.

Supposons d'abord que l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ soit triviale. L'orbite $\mathcal{O}$ est réduite à une seule racine $\hat{\alpha}_m$. Deux données étant équivalentes si et seulement si elles se déduisent l'une de l'autre par l'action de ω, on peut supposer $m \leq n/2$. Le diagramme $\hat{D}_a - \mathcal{O}$ est le produit de deux diagrammes de type C_m et C_{n-m}. La donnée n'a pas d'automorphisme non trivial si $m \neq n/2$ et elle en a un, l'action de ω, si $m = n/2$. Dualement, on obtient que G' est semi-simple et $G'_{SC} = Spin(2m+1) \times Spin(2(n-m)+1)$. L'action galoisienne étant triviale, il est clair que $\xi_{\mathbf{G}'} = 1$. Si $m \neq 0$, on peut appliquer par récurrence l'assertion (4) ci-dessous : on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $(m, n-m)$ est de la forme $(i(i+1), j(j+1))$. Dans ce cas, (i,j) appartient à $\mathcal{Y}^{nr}$, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. Si de plus $m < n/2$, il n'y a pas d'automorphisme non trivial. On pose $\mathbf{G}' = \mathbf{G}'_{i,j}$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j})}$. Dans le cas où $m = n/2$, on a $i = j$ et l'action de l'automorphisme échange les deux facteurs $Spin(n+1)$. On vérifie qu'elle agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. En notant $\mathbf{1}$ l'élément neutre de Ξ, le triplet $(i,i,\mathbf{1})$ appartient à $\mathcal{Y}^{nr}$. On pose $\mathbf{G}' = \mathbf{G}'_{i,i,\mathbf{1}}$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,i,\mathbf{1}} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,i,\mathbf{1}}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,i,\mathbf{1}})}$. Enfin, si $m = 0$, on a $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$ et on ne peut encore rien dire de l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Supposons maintenant que l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ soit non triviale. L'extension $E_{G'}/F$ est quadratique et on a $\sigma_{G'} = 1$ pour $\sigma \in \Gamma_{E_{G'}}$ et $\sigma_{G'} = \omega$ pour $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_{E_{G'}}$. L'orbite $\mathcal{O}$ est de la forme $\{\hat{\alpha}_m, \hat{\alpha}_{n-m}\}$ pour un $m < n/2$ ou $\{\hat{\alpha}_{n/2}\}$ dans le cas où n est pair. Traitons d'abord le premier cas. Le stabilisateur de $\hat{\alpha}_m$ dans Γ_F est $\Gamma_{E_{G'}}$. Le lemme **??** exclut le cas où $E_{G'}/F$ est non ramifiée. Supposons $E_{G'}/F$ ramifiée. Le diagramme $\hat{D}_a - \mathcal{O}$ est réunion de deux diagrammes de type C_m et d'un diagramme de type A_{n-2m-1} (ce dernier disparaissant si $n = 2m+1$). Pour $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_{E_{G'}}$, $\sigma_{G'}$ échange les deux premiers diagrammes et agit sur celui de type A_{n-2m-1} par l'automorphisme non trivial. Dualement, on a $G'_{SC} = Res_{E_{G'}/F}(Spin(2m+1)_{|E_{G'}}) \times SU_{E_{G'}/F}(n-2m)$, où $Spin(2m+1)_{|E_{G'}}$ est le groupe $Spin(2m+1)$ défini sur $E_{G'}$, avec la convention $SU_{E_{G'}/F}(1) = \{1\}$. On utilise par récurrence les résultats du présent paragraphe et de **??** pour les deux groupes $Spin(2m+1)$ et $SU_{E_{G'}/F}(n-2m)$: on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si m est de la forme $i(i+1)$ et $n-2m$ est de la forme $j(j+1)/2$ avec $i,j \in \mathbb{N}$ (le cas $j = 0$ est exclu puisque l'on a supposé $m < n/2$). Si ces conditions sont vérifiées, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. La donnée a un automorphisme non trivial. Cet automorphisme agit sur chacun des facteurs de G'_{SC} par l'automorphisme galoisien associé à un élément $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_E$. Nous montrerons en ?? que l'automorphisme du premier facteur agit par multiplication par $sgn(-1)^{[(i+1)/2]}$ sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ et nous avons montré en ?? que celui du second facteur agissait par multiplication par $sgn(-1)^{[(j+2)/4]}$. L'action de $Out(\mathbf{G}')$ est donc triviale si $sgn(-1) = 1$, c'est-à-dire si $\delta_4(q-1) = 1$, ou si $[(i+1)/2]+[(j+2)/4]$ est pair. Elle est non triviale si $\delta_4(q-1) = 0$ et $[(i+1)/2]+[(j+2)/4]$ est impair. Dans ce dernier cas, $\mathbf{G}'$ ne nous intéresse pas. Dans le premier cas, on calcule le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ en utilisant ?? et on obtient que $\xi_{\mathbf{G}'}$ est le caractère dont le noyau est l'image de $E_{G'}^{\times}$ dans $F^{\times}/F^{\times,2}$ par l'application norme. C'est un élément de Ξ^{ram}. Remarquons que dans cette construction, $E_{G'}$ peut être l'une ou l'autre des deux extensions quadratiques ramifiées de F et $\xi_{\mathbf{G}'}$ décrit alors les deux éléments de Ξ^{ram}. Pour $\xi \in \Xi^{ram}$, le triplet (i, j, ξ) appartient à $\mathcal{Y}^{ram}$. On note $\mathbf{G}'_{i,j,\xi}$ la donnée $\mathbf{G}'$ associée à l'extension $E_{G'}$ telle que $\xi_{\mathbf{G}'} = \xi$ et on pose $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Traitons maintenant le cas où n est pair et $m = n/2$. Le groupe unitaire disparaît. Si $E_{G'}/F$ est ramifiée, on voit que tout se passe comme précédemment à condition de prendre $j = 0$. Mais maintenant, le cas $E_{G'} = E_0$ est autorisé (où E_0 est l'extension quadratique non ramifiée de F). On a alors $G'_{SC} = Res_{E_0/F}(Spin(n+1)_{|E_0})$. De nouveau, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $n/2$ est de la forme $i_0(i_0+1)$ et, si cette condition est vérifiée, cet espace est une droite. De nouveau, $Out(\mathbf{G}')$ a deux éléments. Nous montrerons en ?? que ce groupe agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. En utilisant ??, on voit que $\xi_{\mathbf{G}'}$ est l'élément non trivial ξ_0 de Ξ^{nr}. On a $(i_0, i_0, \xi_0) \in \mathcal{Y}^{nr}$, on pose $\mathbf{G}' = \mathbf{G}'_{i_0,i_0,\xi_0}$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i_0,i_0,\xi_0} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i_0,i_0,\xi_0}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i_0,i_0,\xi_0})}$.

A ce point, on a obtenu une description de $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ qui ressemble à celle de ?? (2), aux deux différences suivantes près. On n'a pas traité la donnée principale $\mathbf{G}$. Dans le cas où il existe un élément de $\mathcal{Y}^{nr}$ de la forme $y = (0, j)$, on ne lui a pas associé d'espace $FC^{\mathcal{E}}_y$ (parce que, dans le cas d'une action galoisienne triviale, on n'a traité que le cas $m > 0$).

On définit deux applications $\phi^{nr} : \mathbb{X}^{nr} \to \mathbb{Y}^{nr}$ et $\phi^{ram} = \mathbb{X}^{ram} \to \mathbb{Y}^{ram}$ par les formules suivantes :

pour $x = (k, h) \in \mathbb{X}^{nr}$, $\phi^{nr}(x) = ((|k-h|-1)/2, (k+h-1)/2)$;

pour $x = (k, h) \in \mathbb{X}^{ram}$,

$$\phi^{ram}(x) = \begin{cases} ((k+h-1)/4, (k-h-1)/2), & si\ k \not\equiv h\ mod\ 2\mathbb{Z}, \\ ((k-h-2)/4, (k+h)/2), & si\ k \equiv h\ mod\ 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

On vérifie que ce sont des bijections. Elles se relèvent de façon évidente en des bijections $\varphi^{nr} : \mathcal{X}^{nr} \to \mathcal{Y}^{nr}$ et $\varphi^{ram} : \mathcal{X}^{ram} \to \mathcal{Y}^{ram}$. Par exemple, on voit qu'il existe un couple $(0, h_0) \in \mathbb{X}^{nr}$ si et seulement s'il existe un couple $(i_0, i_0) \in \mathbb{Y}^{nr}$. Si ces couples existent, on voit que $\phi^{nr}(0, h_0) = (i_0, i_0)$. On pose $\varphi^{nr}(0, h_0, \xi) = (i_0, i_0, \xi)$ pour tout $\xi \in \Xi^{nr}$. On note $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ la bijection dont les restrictions à $\mathcal{X}^{nr}$ et $\mathcal{X}^{ram}$ sont φ^{nr} et φ^{ram}. On voit que $\mathcal{X}^{nr}$ possède un élément (k, h) tel que $|k-h| = 1$ si et seulement si $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. Dans ce cas, $\mathcal{X}^{nr}$ possède un unique tel élément que l'on note (k^{st}, h^{st}) et on pose $\mathcal{X}^{st} = \{(k^{st}, h^{st})\}$. De même, $\mathcal{Y}^{nr}$ possède un élément de la forme $(0, j)$ si et seulement si $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. Dans ce cas, $\mathcal{Y}^{nr}$ possède un unique tel élément que l'on note $(0, j^{st})$ et on pose $\mathcal{Y}^{st} = \{(0, j^{st})\}$. Si $\delta_{2\triangle}(n) = 0$, on pose $\mathcal{X}^{st} = \mathcal{Y}^{st} = \emptyset$. On vérifie que $\varphi(\mathcal{X}^{st}) = \mathcal{Y}^{st}$.

Maintenant, le même argument de comparaison des dimensions qu'en ?? prouve que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$ si $\delta_{2\triangle}(n) = 0$ tandis que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est une droite si $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. Dans ce dernier cas, on complète notre description de l'espace $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ en posant $\mathbf{G}'_{0,j^{st}} = \mathbf{G}$ et $FC^{\mathcal{E}}_{0,j^{st}} = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. On a obtenu ??(2).

On a vu que l'action de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ sur un espace FC_x était triviale si $x \in \mathcal{X}^{nr}$ et non triviale si $x \in \mathcal{X}^{ram}$. De même, la restriction de $\xi_{\mathbf{G}'_y}$ à $G_{AD}(F)_0$ est triviale si $y \in \mathcal{Y}^{nr}$, non triviale si $y \in \mathcal{Y}^{ram}$. Pour $\star = nr$ ou ram, cela entraîne l'égalité

$transfert(\oplus_{x\in\mathcal{X}^\star} FC_x) = \oplus_{y\in\mathcal{Y}^\star} FC^{\mathcal{E}}_y$.

On munit l'ensemble $\mathbb{X}^\star$ de la relation $(k,h) \leq (k',h')$ si et seulement si $k+h \leq k'+h'$. On prouve comme en **??** que c'est une relation d'ordre total. On relève notre relation d'ordre sur $\mathbb{X}^\star$ en une relation de préordre sur $\mathcal{X}^\star$ qu'on note encore $\leq$. Dans les constructions ci-dessus, on a associé à tout $y \in \mathcal{Y}$ une donnée endoscopique $\mathbf{G}'_y$ et l'application $y \mapsto \mathbf{G}'_y$ est injective. Soit $y \in \mathcal{Y}^\star$. On introduira en **??** un élément $Y_y \in \mathfrak{g}'_{y,ell}(F)$ qui a les propriétés suivantes :

(1) pour tout élément non nul $f' \in FC^{\mathcal{E}}_y = FC^{st}(\mathfrak{g}'_y(F))^{Out(\mathbf{G}'_y)}$, on a $S^{G'_y}(Y_y, f') \neq 0$;

(2) soient $x \in \mathcal{X}^\star$ et $f \in FC_x$; soit X un élément de $\mathfrak{g}_{ell}(F)$ correspondant à Y_y ; supposons $I^G(X,f) \neq 0$; alors $\varphi^{-1}(y) \leq x$.

Alors les hypothèses (1) à (5) de **??** sont satisfaites pour $\underline{\mathcal{Y}}^\sharp = \underline{\mathcal{Y}}^\star$ avec les notations de ce paragraphe. Cela entraîne

$$(3) \qquad transfert(FC_{(x)}) = FC^{\mathcal{E}}_{\varphi((x))}$$

pour tout $(x) \in \underline{\mathcal{X}}^\star$. Comme en **??**, on raffine cette égalité en tenant compte de l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ et on obtient **??**(3). La relation **??** (4) s'en déduit comme en **??**. Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(4) on a $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))) = \delta_{2\triangle}(n)$.

6.2 Forme intérieure du type B_n

On suppose que G^* déployé de type B_n avec $n \geq 2$ et que G n'est pas déployé. C'est-à-dire que $G = Spin_{ndep}(2n+1)$ est la forme non déployée du groupe spinoriel. Ce cas est presque le même que le précédent.

Notons $\mathbb{X}^{nr} = \mathcal{X}^{nr}$ l'ensemble des couples $(k,h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k^2+h^2 = 2n+1$, k est pair, h est impair et $k \neq 0$. Si $\delta_4(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{X}^{ram} = \emptyset$. Si $\delta_4(q-1) = 0$, on note $\mathbb{X}^{ram}$ l'ensemble des couples $(k,h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k(k+1)/2 + h(h+1)/2 = 2n+1$, $k \geq h$ et l'un des termes $k(k+1)/2$, $h(h+1)/2$ est $\equiv 2 \ mod \ 4\mathbb{Z}$. On note $\mathcal{X}^{ram}$ l'ensemble des triplets (k,h,ξ) avec $(k,h) \in \mathbb{X}^{ram}$ et $\xi \in \Xi^{ram}$, où Ξ^{ram} est le même ensemble que dans le paragraphe précédent. On pose $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{nr} \cup \mathcal{X}^{ram}$ et $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ est en bijection avec l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a+b = n$ et $a \neq 0$. Pour $s \in \underline{S}(G)$ paramétré par (a,b), on a $G_s = (Spin_{ndep}(2a) \times Spin(2b+1))/\{1,(z,z)\}$ si $b \neq 0$, où $Spin_{ndep}(2a)$ est la forme non déployée de ce groupe et $G_s = Spin_{ndep}(2a)$ si $b = 0$. La preuve du cas précédent s'applique et conduit à la relation **??**(1). Il y a deux différences. Les deux sommets qui étaient conjugués par $G_{AD}(F)$ mais pas par $G(F)$ disparaissent. Parce que les groupes $Spin(2a)$ apparaissant dans les groupes G_s sont maintenant non déployés, les conditions d'invariance par $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ des faisceaux-caractères changent, ce qui conduit à la modification de l'ensemble $\mathbb{X}^{ram}$.

On note $\mathbb{Y}^{nr} = \mathcal{Y}^{nr}$ l'ensemble des couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i(i+1)+j(j+1) = n$ et $i < j$. Si $\delta_4(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{Y}^{ram} = \emptyset$. Si $\delta_4(q-1) = 0$, on note $\mathbb{Y}^{ram}$ l'ensemble des couples (i,j) avec $i,j \in \mathbb{N}$, vérifiant les conditions

$2i(i+1) + j(j+1)/2 = n$;

$[(i+1)/2] + [(j+2)/4]$ est impair.

On note $\mathcal{Y}^{ram}$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) pour $(i,j) \in \mathbb{Y}^{ram}$ et $\xi \in \Xi^{ram}$. On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^{nr} \cup \mathcal{Y}^{ram}$.

La construction du paragraphe précédent s'applique et conduit à la relation **??**(2). Pour une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ telle que $Out(\mathbf{G}') \neq \{1\}$, l'action de ce groupe d'automorphismes extérieurs est tordue par le caractère non trivial de ce groupe parce que G n'est plus déployé. Les telles données qui apparaissaient dans le cas précédent disparaissent, c'est celles qui étaient éliminées qui interviennent maintenant.

On définit la bijection φ comme dans le paragraphe précédent. La preuve de **??**(3) est similaire à celle de ce paragraphe.

6.3 Type C_n déployé

On suppose que G est déployé de type C_n avec $n \geq 2$, c'est-à-dire $G = Sp(2n)$. On définit un homomorphisme $T_{ad}(F) \to F^\times/F^{\times,2}$ par $\prod_{l=1,\dots,n} \check{\varpi}_l(x_l) \mapsto \prod_{l=1,\dots,n} x_l^l$. On a $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) = T_{ad}(F)/\pi(T(F))$. De l'homomorphisme précédent se déduit un isomorphisme $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \to F^\times/F^{\times,2}$. L'image de $G_{AD}(F)_0$ est $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$. Si n est pair, resp. impair, on note Ξ_n l'ensemble des éléments de Ξ triviaux, resp. non triviaux, sur $G_{AD}(F)_0$.

On note $\mathbb{X}$ l'ensemble des couples $(k,h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \geq h$ et $2n = k(k+1)+h(h+1)$. Supposons $\delta_{2\triangle}(n) = 0$. On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des triplets (k,h,ξ) avec $(k,h) \in \mathbb{X}$ et $\xi \in \Xi_n$. Supposons maintenant $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. Alors il existe un unique couple $(k,h) \in \mathbb{X}$ tel que $k = h$. On le note (k^{st}, k^{st}). On note $\mathcal{X}$ la réunion de $\{(k^{st}, k^{st})\}$ et de l'ensemble des triplets (k,h,ξ) avec $(k,h) \in \mathbb{X}$, $k > h$ et $\xi \in \Xi_n$. On pose $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \geq b$ et $a + b = n$. Les fibres de cette application ont deux éléments sauf, dans le cas où n est pair, au-dessus du couple $(n/2, n/2)$ où la fibre n'a qu'un élément. L'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ conserve chaque fibre et y agit transitivement. Pour un sommet s paramétré par (a,b), on a $G_s \simeq Sp(2a) \times Sp(2b)$. D'après **??**, l'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est non nul si et seulement si $(2a, 2b)$ est de la forme $(k(k+1), h(h+1))$. Si cette condition est vérifiée, l'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite portée par une fonction $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$. On note z l'élément central non trivial de tout groupe symplectique. L'élément z de G s'envoie sur le couple (z,z) de G_s (ou l'unique $z \in G_s$ si $b = 0$). On sait que $\epsilon^a(z) = (-1)^a$ et $\epsilon^b(z) = (-1)^b$. Donc l'élément z de G agit sur notre fonction par multiplication par $(-1)^{a+b} = (-1)^n$. Puisque l'action de $G_{AD}(F)_0$ sur cette fonction est déterminée par cette action de z, on voit que $G_{AD}(F)_0$ agit sur notre fonction par le caractère trivial si n est pair et non trivial si n est impair. Si $a > b$, de la fonction $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ sont issus deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ correspondant aux deux éléments de Ξ dont les restrictions à $G_{AD}(F)_0$ sont le caractère précédent, c'est-à-dire aux deux éléments de Ξ_n. On note $FC_{k,h,\xi}$ la droite portée par la fonction associé à $\xi \in \Xi_n$. Si $a = b$, ce qui se produit si et seulement si $\delta_{2\triangle}(n) = 1$, on a $(k,h) = (k^{st}, k^{st})$. L'action de $G_{AD}(F)$ tout entier sur G_s est récupérée par la permutation des deux facteurs et notre fonction $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ est fixée par cette action. De cette fonction est issue un unique élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ et on note $FC_{k^{st},k^{st}}$ la droite qu'il engendre. Cette description prouve **??**(1).

On note $\mathbb{Y}$ l'ensemble des couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = i(i+1) + j^2$. Remarquons que j est de la même parité que n. Supposons $\delta_{2\triangle}(n) = 0$. On note $\mathcal{Y}$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) avec $(i,j) \in \mathbb{Y}$ et $\xi \in \Xi_n$. Supposons maintenant $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. Alors il existe un unique couple $(i,j) \in \mathbb{Y}$ avec $j = 0$, à savoir le couple $(k^{st}, 0)$. On note $\mathcal{Y}$ la réunion de $\{(k^{st}, 0)\}$ et de l'ensemble des triplets (i,j,ξ) avec $(i,j) \in \mathbb{Y}$, $j \neq 0$ et $\xi \in \Xi_n$.

Déterminons les données endoscopiques elliptiques $\mathbf{G}'$ de G telles que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')} \neq \{0\}$. On considère un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. Le diagramme $\hat{\mathcal{D}}_a$ est le diagramme de Dynkin complété d'un groupe de type B_n. Le groupe $\hat{\Omega}$ coïncide avec le groupe d'automorphismes de ce diagramme, lequel est $\{1,\omega\}$, où ω permute $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_1$ et fixe les autres racines.

Supposons que l'action galoisienne soit triviale. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0\}$ ou $\{\hat{\alpha}_1\}$ (ces deux cas sont conjugués par ω), on a $\mathbf{G}'=\mathbf{G}$ et, à ce point, on ne peut rien dire de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m\}$ avec $m\geq 2$, on voit que $G'_{SC}\simeq Spin_{dep}(2m)\times Sp(2(n-m))$. En appliquant par récurrence (1) ci-dessous et **??** (5), l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est non nul si et seulement si $m=j^2$ et $n-m=i(i+1)$ avec $i,j\in\mathbb{N}$ et j pair. Si ces conditions sont vérifiées, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite munie d'un générateur. Le groupe $Out(\mathbf{G}')$ est $\{1,\omega\}$ et ω agit par l'automorphisme extérieur non trivial de $Spin_{dep}(2m)$ dont on voit qu'il fixe le générateur. Donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est encore une droite. Les actions galoisiennes étant triviale, le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ est l'élélément neutre $\mathbf{1}$ de Ξ. Remarquons que $\mathbf{1}$ appartient à Ξ_n car la parité de j entraîne celle de n. Donc $(i,j,1)\in\mathcal{Y}$. On note $\mathbf{G}'_{i,j,\mathbf{1}}$ la donnée endoscopique et on pose $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\mathbf{1}}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\mathbf{1}}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\mathbf{1}})}$.

Supposons que l'action galoisienne se factorise en une bijection $\Gamma_{E_0/F}\to\hat{\Omega}$ (où E_0/F est l'extension quadratique non ramifiée). Le lemme **??** exclut le cas où $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1\}$. Supposons que $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m\}$ avec $m\geq 2$. On voit que $G'_{SC}\simeq Spin_{E_0/F}(2m)\times Sp(2(n-m))$. Le résultat est le même que ci-dessus : l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est non nul si et seulement si $m=j^2$ et $n-m=i(i+1)$ avec $i,j\in\mathbb{N}$ et j pair. Si ces conditions sont vérifiées, c'est une droite. La différence est que $\xi_{\mathbf{G}'}$ n'est plus égal à $\mathbf{1}$. Un calcul facile montre que $\xi_{\mathbf{G}'}$ est l'élément non trivial de Ξ_n. Notons-le ici ξ. On a $(i,j,\xi)\in\mathcal{Y}$. On note $\mathbf{G}'_{i,j,\xi}$ la donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ et on pose $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$.

Soit E une extension quadratique ramifiée de F. Supposons que l'action galoisienne se factorise en une bijection $\Gamma_{E/F}\to\hat{\Omega}$. Supposons que $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m\}$ avec $m\geq 2$. On voit que $G'_{SC}\simeq Spin_{E/F}(2m)\times Sp(2(n-m))$. Alors l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est non nul si et seulement si $m=j^2$ et $n-m=i(i+1)$ avec $i,j\in\mathbb{N}$ et j impair, cf. (1) ci-dessous, **??**(1) et **??** (1). Si ces conditions sont vérifiées, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. Comme ci-dessus, le groupe $Out(\mathbf{G}')$ agit trivialement sur cet espace. On calcule facilement $\xi_{\mathbf{G}'}$. On voit que, quand E décrit les deux extensions quadratiques ramifiées de F, le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ associé décrit Ξ_n (remarquons que l'hypothèse j impair implique que n l'est aussi). Pour $\xi\in\Xi_n$ on note $\mathbf{G}'_{i,j,\xi}$ la donnée déterminée par l'extension E telle que $\xi_{\mathbf{G}'_{i,j,\xi}}=\xi$. On note $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Revenons à une extension E ramifiée fixée et supposons maintenant que $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1\}$ (ce cas n'est plus exclu par le lemme **??** puisque E/F est ramifiée). On peut remplacer G' par $G'_{SC}\simeq Sp(2n-2)$. Les résultats sont les mêmes que précédemment en considérant que l'entier j vaut 1.

A ce point, on a associé une donnée $\mathbf{G}'_y$ et une droite $FC^{\mathcal{E}}_y$ à tout élément $y\in\mathcal{Y}$, sauf dans le cas $\delta_{2\triangle}(n)=1$, auquel cas on n'a rien associé à l'élément $(k^{st},0)$. On n'a pas traité non plus la donnée endoscopique principale $\mathbf{G}$.

On définit une application $\phi:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ par les formules suivantes :

pour $(k,h)\in\mathbb{X}$ avec $k\equiv h\ mod\ 2\mathbb{Z}$, $i=(k+h)/2$, $j=(k-h)/2$;

pour $(k,h)\in\mathbb{X}$ avec $k\equiv h+1\ mod\ 2\mathbb{Z}$, $i=(k-h-1)/2$, $j=(k+h+1)/2$.

C'est une bijection qui se relève naturellement en une bijection $\varphi=\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. Si $\delta_{2\triangle}(n)=0$, on pose $\mathcal{X}^{st}=\mathcal{Y}^{st}=\emptyset$. Si $\delta_{2\triangle}(n)=1$, on pose $\mathcal{X}^{st}=\{(k^{st},k^{st})\}$ et $\mathcal{Y}^{st}=\{(k^{st},0)\}$. On voit que $\varphi(\mathcal{X}^{st})=\mathcal{Y}^{st}$.

Maintenant, le même argument de comparaison des dimensions qu'en **??** prouve que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))=\{0\}$ si $\delta_{2\triangle}(n)=0$ tandis que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est une droite si $\delta_{2\triangle}(n)=1$. Dans ce dernier cas, on complète notre description de l'espace $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ en posant

$\mathbf{G}'_{k^{st},0} = \mathbf{G}$ et $FC^{\mathcal{E}}_{k^{st},0} = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. On a obtenu ??(2).

On munit l'ensemble $\mathbb{X}$ de la relation $(k,h) \leq (k',h')$ si et seulement si $k+h \leq k'+h'$. On prouve comme en ?? que cette relation est un ordre total. On le relève en un préordre sur $\mathcal{X}$ par la surjection évidente $\mathcal{X} \mapsto \mathbb{X}$. Soit $y \in \mathcal{Y}$. On introduira dans le paragraphe ?? un élément $Y_y \in \mathfrak{g}'_{y,ell}(F)$ qui a les propriétés (2) et (3) de ??. Alors les hypothèses (1) à (5) de ?? sont satisfaites pour $\underline{\mathcal{Y}}^\sharp = \underline{\mathcal{Y}}$ avec les notations de ce paragraphe. On en déduit ?? (3) et (4) comme en ??. Explicitons la conséquence de ??(4) :

(1) on a $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))) = \delta_{2\triangle}(n)$.

6.4 Forme intérieure du type C_n

On suppose que G^* est du type précédent et que G en est la forme intérieure non déployée. Dans les tables de Tits, le groupe est de type ${}^2C_n$.

Si $\delta_{2\triangle}(n) = 0$, on pose $\mathcal{X} = \emptyset$. Supposons $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. On note k^{st} l'entier tel que $n = k^{st}(k^{st}+1)$. On pose $\mathcal{X} = \{(k^{st}, k^{st})\}$ et $d_x = 1$ pour (tout) $x \in \mathcal{X}$.

Le "local index" des tables de Tits est le diagramme affine $\mathcal{D}_a$ de type C_n muni de l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ qui est triviale sur $\Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}}$ et telle qu'un élément $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{F}_q} - \Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}}$ agisse par l'unique automorphisme ω de ce diagramme : ω envoie α_m sur α_{n-m}. Les éléments de $\underline{S}(G)$ correspondent aux orbites de cette action dans $\mathcal{D}_a$. Pour un sommet s correspondant à une orbite à deux éléments, le lemme ?? montre que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Si n est impair, toutes les orbites ont deux éléments, donc $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$. Supposons n pair. Il n'y a qu'une orbite galoisienne possédant un seul élément, à savoir $\{\alpha_{n/2}\}$. Notons s le sommet associé. Son unicité entraîne qu'il est conservé par l'action de $G_{AD}(F)$. Le groupe G_s est alors $Res_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(Sp(n)_{|\mathbb{F}_{q^2}})$. D'après ??, on sait que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est non nul si et seulement si $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. Si cette condition n'est pas vérifiée, on a donc $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$. Supposons $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. Alors $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite. On voit qu'elle est fixée par $G_{AD}(F)$. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note $FC_{k^{st},k^{st}}$. Cela démontre ??(1).

Si $\delta_{2\triangle}(n) = 0$, on pose $\mathcal{Y} = \emptyset$. Supposons $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. On pose $\mathcal{Y} = \{(k^{st}, 0)\}$.

Puisqu'on a déjà déterminé $\mathcal{X}$, on voit que $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ est nul si $\delta_{2\triangle}(n) = 0$ et est une droite si $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. Pour démontrer ?? (2), il suffit dans ce dernier cas de déterminer cette droite. Or, d'après ??, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}^*(F))$ est une droite. On la note $FC^{\mathcal{E}}_{k^{st},0}$ et c'est forcément $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ tout entier.

On note φ l'unique bijection de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$. L'assertion ??(3) est triviale.

6.5 Type D_n déployé, n pair

Introduisons d'abord quelques notations générales pour les groupes de type D_n, avec $n \geq 4$. On suppose que $\hat{G}$ est de ce type. On note

θ l'automorphisme de $\hat{\mathcal{D}}_a$ qui échange $\hat{\alpha}_{n-1}$ et $\hat{\alpha}_n$ et qui fixe les autres racines ;

θ' l'automorphisme de $\hat{\mathcal{D}}_a$ qui échange $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_1$ et qui fixe les autres racines ;

δ l'automorphisme de $\hat{\mathcal{D}}_a$ qui envoie $\hat{\alpha}_i$ sur $\hat{\alpha}_{n-i}$ pour tout $i = 0, ..., n$.

Si $n > 4$, le groupe $Aut(\hat{\mathcal{D}}_a)$ est engendré par θ, θ' et δ et le groupe $Aut(\hat{\mathcal{D}})$ est réduit à $\{1, \theta\}$. Si $n = 4$, il y a l'automorphisme supplémentaire $\theta_3 \in Aut(\hat{\mathcal{D}})$ introduit en ?? et $Aut(\hat{\mathcal{D}}) \simeq \mathfrak{S}_3$.

Si n est pair, $\hat{\Omega} = \{1, \delta, \theta\theta', \delta\theta\theta'\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Si n est impair, $\hat{\Omega} = \{1, \delta\theta, \theta\theta', \delta\theta'\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Les mêmes notations seront utilisées pour le groupe G, le diagramme $\mathcal{D}$ de ce groupe et son diagramme complété $\mathcal{D}_a$ étant les mêmes que $\hat{\mathcal{D}}$ et $\hat{\mathcal{D}}_a$. On utilisera des notations distinctes pour les centres : bien que $Z(G)$ et $Z(\hat{G}_{SC})$ soient isomorphes, ils ne sont pas toujours munis de la même action galoisienne. On note $Z(G) = \{1, z, z', z''\}$ et $Z(\hat{G}_{SC}) = \{1, \hat{z}', \hat{z}, \hat{z}''\}$ conformément à **??** et **??**

On suppose que G est déployé de type D_n avec $n \geq 4$, c'est-à-dire $G = Spin_{dep}(2n)$, avec une notation conforme à celles déjà utilisées. On suppose n pair. On a $Z(G) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Définissons un homomorphisme $T_{ad}(F) \to (F^\times/F^{\times,2})^2$ par $\prod_{i=1,\dots,n} \check{\varpi}(x_i) \mapsto (\prod_{i=1,\dots,n} x_i^i, x_{n-1}x_n)$. Il s'en déduit un isomorphisme $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \simeq T_{ad}(F)/\pi(T(F)) \simeq (F^\times/F^{\times,2})^2$. Notons ι_1 et ι_2 les deux plongements évidents de $F^\times/F^{\times,2}$ dans $(F^\times/F^{\times,2})^2$: $\iota_1(x) = (x, 1)$, $\iota_2(x) = (1, x)$. L'image de $SO_{dep}(2n, F)$ est $\iota_1(F^\times/F^{\times,2})$ et l'image de $G_{AD}(F)_0$ est $(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})^2$.

Notons $\tilde{\Xi}$ le sous-ensemble des $\xi \in \Xi$ de la forme $(\chi_{E/F}, 1)$ ou $(\chi_{E/F}, \chi_{E/F})$ où E/F est une extension quadratique ramifiée de F et $\chi_{E/F}$ est le caractère associé de $F^\times$. De l'inclusion $(F^\times/F^{\times,2} \times \mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}) \to (F^\times/F^{\times,2})^2$ se déduit un homomorphisme de restriction de Ξ dans le groupe $(F^\times/F^{\times,2} \times \mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})^\vee$. On voit que

(1) cet homomorphisme de restriction est injectif sur $\tilde{\Xi}$ et l'image de $\tilde{\Xi}$ est l'ensemble des caractères de $F^\times/F^{\times,2} \times \mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$ qui sont non triviaux sur $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$.

Notons $\mathbb{X}^+$ l'ensemble des couples $(k, h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k^2 + h^2 = 2n$ et $k \geq h$. Remarquons que k et h sont forcément pairs puisque n l'est. On note $\tilde{\mathcal{X}}^+$ l'ensemble des triplets (k, h, ξ) où $(k, h) \in \mathbb{X}^+$ et $\xi \in \Xi$ vérifient

$k > h$;

si $k > h > 0$, ξ vaut 1 sur $\iota_1(F^\times/F^{\times,2})$ et vaut $sgn^{(k+h)/2}$ sur $\iota_2(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$;

si $h = 0$, $\xi = (1, sgn^{n/2})$ sur $(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})^2$.

Si $\delta_\square(n) = 0$, on a $k > h$ pour tout $(k, h) \in \mathbb{X}$. On pose $\mathcal{X}^+ = \tilde{\mathcal{X}}^+$. Si $\delta_\square(n) = 1$, il existe un couple $(k, h) \in \mathbb{X}^+$ tel que $k = h$. On le note (k^{st}, k^{st}) et on pose $\mathcal{X}^+ = \{(k^{st}, k^{st})\} \cup \tilde{\mathcal{X}}^+$.

Notons $\mathbb{X}^-$ l'ensemble des couples $(k, h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k(k+1)/2 + h(h+1)/2 = 2n$, $k \geq h$ et

$k(k+1)/2$ et $h(h+1)/2$ sont pairs si $\delta_4(q-1) = 1$, $k(k+1)/2$ et $h(h+1)/2$ sont divisibles par 4 si $\delta_4(q-1) = 0$.

On note $\mathcal{X}^-$ l'ensemble des triplets (k, h, ξ) où $(k, h) \in \mathbb{X}^-$ et $\xi \in \Xi$ vérifie :

si $k > h$, la restriction de ξ à $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ est non triviale ;

si $k = h$, $\xi \in \tilde{\Xi}$.

On pose $\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ \sqcup \mathcal{X}^-$ et $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \geq b$, $a + b = n$ et $b \neq 1$. Les fibres de cette surjection ont un élément au-dessus de $(n/2, n/2)$, deux éléments au-dessus de (a, b) pour $a \neq b$ et $b \neq 0$, 4 éléments au-dessus de $(n, 0)$. L'action de $G_{AD}(F)$ préserve les fibres et est transitive sur chacune d'elles. Pour $s \in \underline{S}(G)$ paramétré par (a, b), on a $G_s = (Spin_{dep}(2a) \times Spin_{dep}(2b))/\{1, (z, z)\}$ si $b \neq 0$, $G_s = Spin_{dep}(2n)$ si $(a, b) = (n, 0)$. Considérons un sommet $s \in \underline{S}(G)$ paramétré par un couple (a, b) avec $b \geq 2$. Comme en **??**, on doit déterminer les couples de fonctions $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ tels que $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z)$. On utilise les résultats de **??** et **??**. Considérons ceux pour lesquels $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = 1$. Il y a un tel couple si et seulement si $(2a, 2b)$ est de la forme (k^2, h^2) et alors, le couple est unique. Le stabilisateur du sommet s dans $G_{AD}(F)$ est l'image réciproque de $F^\times/F^{\times,2} \times \mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$. L'action du premier facteur est récupérée par celle du groupe $\{(x, y) \in O_{dep}(2a, \mathbb{F}_q) \times O_{dep}(2b, \mathbb{F}_q); det(x) = det(y)\}$. On voit que cette action fixe $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$. L'action du second facteur est triviale ou non selon que l'action sur les faisceaux-caractères de l'image de $Z(G)$ dans G_s est triviale ou non. Remarquons que l'hypothèse $(2a, 2b) = (k^2, h^2)$ implique que a et b sont pairs.

On voit que l'application de $Z(G)$ dans $Z(G_s)$ est $z' \mapsto (z', z')$ et $z \mapsto (1, z) = (z, 1)$ (puisque $(z, z) = 1$). L'action de $(1, z)$ est triviale. Celle de chaque composante z' est la multiplication par $(-1)^{k/2}$, resp. $(-1)^{h/2}$, donc l'action de $\iota_2(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ se fait par le caractère $sgn^{(k+h)/2}$. De cette fonction $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ sont donc issus deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ correspondant aux deux caractères de $(F^\times/F^{\times,2})^2$ prolongeant le caractère que l'on vient de déterminer du sous-groupe $F^\times/F^{\times,2} \times \mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$. Pour chacun de ces caractères ξ, le triplet (k, h, ξ) appartient à $\mathcal{X}^+$, on note $FC_{k,h,\xi}$ la droite portée par la fonction correspondante. Considérons maintenant les fonctions $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ telles que $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = -1$. Il y en a si et seulement si $(2a, 2b)$ est de la forme $(k(k+1)/2, h(h+1)/2)$ et, de plus, a et b sont pairs dans le cas où $\delta_4(q-1) = 0$. Il y en a alors 4 car chacun des groupes $Spin_{dep}(2a)$ et $Spin_{dep}(2b)$ porte deux fonctions vérifiant $\epsilon^a(z) = -1$, resp. $\epsilon^b(z) = -1$. Si a et b sont pairs, notons ces fonctions $f_{N^a,\epsilon^a,\pm 1}$, resp. $f_{N^a,\epsilon^a,\pm 1}$, où le signe est celui par lequel agit z' sur le faisceau-caractère. Si a et b sont impairs, notons ces fonctions $f_{N^a,\epsilon^a,\pm i}$, resp. $f_{N^b,\epsilon^b,\pm i}$ selon le scalaire $\pm i$ par lequel agit z'. On voit que les caractères de $G_{AD}(F)_0$ selon lesquels se transforment nos fonctions sont les deux caractères de $(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})^2$ qui sont non triviaux sur la première composante. Il y a deux fonctions pour chaque caractère et elles sont permutées par l'action du groupe $\{(x, y) \in O_{dep}(2a, \mathbb{F}_q) \times O_{dep}(2b, \mathbb{F}_q); det(x) = det(y)\}$ (par exemple, si a est pair, un élément de $O_{dep}(2a, \mathbb{F}_q)$ de déterminant -1 envoie $f_{N^a,\epsilon^a,1}$ sur un multiple de $f_{N^a,\epsilon^a,-1}$). Pour tout caractère ξ_0 de $F^\times/F^{\times,2} \times \mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$ dont la restriction à $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ est non triviale, il y a donc une combinaison linéaire de nos fonctions, unique à un scalaire près, qui se transforme selon le caractère ξ_0. Ensuite, chaque telle fonction donne naissance à deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ correspondant aux deux caractères ξ de $(F^\times/F^{\times,2})^2$ prolongeant ξ_0. Pour tout tel caractère ξ, le triplet (k, h, ξ) appartient à $\mathcal{X}^-$. On note $FC_{k,h,\xi}$ la droite portée par la fonction se transformant selon ξ.

Considérons maintenant un sommet s paramétré par le couple $(n/2, n/2)$. La différence avec le cas précédent est que s est fixé par $G_{AD}(F)$ tout entier. L'action supplémentaire sur G_s est la permutation des facteurs. Supposons que n est de la forme $n = 2a = 2b = (k^{st})^2$. Il y a une fonction $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^a,\epsilon^a}$ avec $\epsilon^a(z) = 1$. Le même calcul que ci-dessus montre qu'elle est fixée par l'image réciproque de $F^\times/F^{\times,2} \times \mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$ dans $G_{AD}(F)$ et, puisqu'elle est fixée par permutation des facteurs, elle est fixée par tout $G_{AD}(F)$. On note $FC_{k^{st},k^{st}}$ la droite de $FC(\mathfrak{g}(F))$ issue de cette fonction (on a $(k^{st}, k^{st}) \in \mathcal{X}^+$). Supposons que n est de la forme $n = 2a = 2b = k(k+1)/2$ et que $n/2$ est pair si $\delta_4(q-1) = 0$. Il y a alors quatre fonctions $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ pour lesquelles $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = -1$. On a déjà associé une combinaison linéaire de telles fonctions à tout caractère ξ_0 de $F^\times/F^{\times,2} \times \mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$ dont la restriction à $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ est non triviale. Son unicité entraîne qu'elle se transforme selon un caractère ξ du groupe $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ prolongeant le caractère ξ_0. Notons $\tilde{\Xi}^X$ l'ensemble des caractères ξ obtenus ainsi. Pour $\xi \in \tilde{\Xi}^X$, on note $FC_{k,k,\xi}$ la droite de $FC(\mathfrak{g}(F))$ issue de cette fonction. Si $\tilde{\Xi}^X = \tilde{\Xi}$, le triplet (k, k, ξ) appartient à $\mathcal{X}^-$. A ce point, on ne démontre pas cette égalité $\tilde{\Xi}^X = \tilde{\Xi}$. Il résulte toutefois de la construction de $\tilde{\Xi}^X$ que cet ensemble vérifie la propriété (1) donc qu'il a même nombre d'éléments que $\tilde{\Xi}$.

Considérons enfin le cas d'un sommet s paramétré par $(n, 0)$. On a alors $G_s = Spin_{dep}(2n)$ et le stabilisateur de s dans $G_{AD}(F)$ est $G_{AD}(F)_0$. Supposons $2n = k^2$. Il y a alors une fonction caractéristique de faisceau-caractère $f_{N,\epsilon}$ telle que $\epsilon(z) = 1$. En remarquant que $k/2$ est de même parité que $n/2$, le même calcul que ci-dessus montre que cette fonction se transforme selon le caractère $\xi_0 = (1, sgn^{n/2})$ de $(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})^2$. Ensuite, cette fonction donne naissance à quatre éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ associés aux caractères ξ

de $G_{AD}(F)$ qui prolongent ξ_0. On note $FC_{k,0,\xi}$ la droite portée par la fonction correspondante. On a $(k,0,\xi)\in\mathcal{X}^+$. Supposons maintenant $2n=k(k+1)/2$. Il y a deux fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères $f_{N,\epsilon}$ telles que $\epsilon(z)=-1$, qui se transforment par les deux caractères de $(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})^2$ qui sont non triviaux sur le premier facteur. Il s'en déduit huit éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ paramétrés par les caractères ξ de $(F^\times/F^{\times,2})^2$ dont la restriction à $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ est non triviale. On note $FC_{k,0,\xi}$ les droites portées par ces fonctions, où $(k,0,\xi)\in\mathcal{X}^-$. Cela démontre l'assertion **??**(1), à ceci près que l'on a remplacé l'ensemble $\tilde{\Xi}$ par $\tilde{\Xi}^X$ dans la description de $\mathcal{X}$.

Notons $\mathbb{Y}^+$ l'ensemble des couples $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ tels que $i^2+j^2=n$ et $i\geq j$. On note $\tilde{\mathcal{Y}}^+$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) où $(i,j)\in\mathbb{Y}^+$ et $\xi\in\Xi$ vérifient

$j>0$;

si $i>j>0$, ξ vaut 1 sur $\iota_1(F^\times/F^{\times,2})$ et vaut sgn^i sur $\iota_2(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{o}_F^\times)$;

si $i=j$, $\xi=(1,sgn^{n/2})$ sur $(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{o}_F^\times)^2$.

Si $\delta_\square(n)=0$, on a $j>0$ pour tout $(i,j)\in\mathbb{Y}^+$ et on pose $\mathcal{Y}^+=\tilde{\mathcal{Y}}^+$. Si $\delta_\square(n)=1$, il y a un couple $(i,0)\in\mathbb{Y}^+$, à savoir le couple $(k^{st},0)$. On pose $\mathcal{Y}^+=\{(k^{st},0)\}\cup\tilde{\mathcal{Y}}^+$.

Notons $\mathbb{Y}^-$ l'ensemble des couples (i,j) avec $i,j\in\mathbb{N}$, tels que $2i^2+j(j+1)/2=n$, i est pair, $i/2+[(j+2)/4]$ est pair ou $\delta_4(q-1)=0$.

On note $\mathcal{Y}^-$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) où $(i,j)\in\mathbb{Y}^-$ et $\xi\in\Xi$ vérifie :

si $i\neq 0$, la restriction de ξ à $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ est non triviale ;

si $i=0$, $\xi\in\tilde{\Xi}$.

On pose $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}^+\sqcup\mathcal{Y}^-$.

Avant de déterminer les données endoscopiques de G, faisons une remarque sur l'identification du caractère que détermine une telle donnée $\mathbf{G}'$. Identifions $Z(\hat{G}_{SC})$ à $\{\pm 1\}^2$ par $\hat{z}'\mapsto(-1,1)$ et $\hat{z}\mapsto(1,-1)$. Une donnée $\mathbf{G}'$ détermine un élément de $H^1(W_F,Z(\hat{G}_{SC}))$ qui, par l'isomorphisme précédent et celui du corps de classes, détermine un couple de caractères quadratiques de $F^\times$. Les différentes identifications ont été choisies de sorte que ce couple soit précisément le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))\simeq(F^\times/F^{\times,2})^2$.

Calculons les données endoscopiques elliptiques $\mathbf{G}'$ de G telles que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}\neq\{0\}$. On considère un couple $(\sigma\mapsto\sigma_{G'},\mathcal{O})\in\mathcal{E}_{ell}(G)$. Puisque G est déployé, l'action $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ se fait par des éléments de $\hat{\Omega}$.

Supposons d'abord que l'action $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ soit triviale. L'orbite $\mathcal{O}$ est réduite à une racine. Si celle-ci est une extrémité du diagramme $\hat{\mathcal{D}}_a$, on a $\mathbf{G}'=\mathbf{G}$. A ce point, on ne peut rien dire de l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Considérons le cas où $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m\}$ pour $m\in\{2,...,n-2\}$. Le diagramme $\hat{\mathcal{D}}_a-\mathcal{O}$ est le produit de deux diagrammes de type D_m et D_{n-m} et $G'_{SC}\simeq Spin_{dep}(2m)\times Spin_{dep}(2n-2m)$. L'action des éléments de $\hat{\Omega}$ définit des équivalences entre données endoscopiques. En faisant agir δ, on peut supposer $m\geq n/2$. En raisonnant par récurrence, on peut appliquer les assertions (5) ci-dessous et **??** (1) : on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $m=i^2$ et $n-m=j^2$ avec i,j pairs. Supposons ces conditions vérifiées. Alors l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. La donnée $\mathbf{G}'$ a un automorphisme non trivial, qui est l'action de $\theta\theta'$. En utilisant la description de $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ fournie par le présent paragraphe, on voit que cet automorphisme agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Si $m\neq n/2$, l'automorphisme précédent est le seul non trivial. Si $m=n/2$, le groupe d'automorphismes extérieurs $Out(\mathbf{G}')$ est $\hat{\Omega}$ tout entier. Mais l'action de δ consiste à échanger les deux facteurs de G' et il est clair que cette action est l'identité sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est une droite. L'action galoisienne étant triviale, on a $\xi_{\mathbf{G}'}=1$. On a $(i,j,\mathbf{1})\in\mathcal{Y}^+$, on pose $\mathbf{G}'_{i,j,\mathbf{1}}=\mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\mathbf{1}}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\mathbf{1}}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\mathbf{1}})}$.

Supposons que l'action $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ ait pour image dans $\hat{\Omega}$ un sous-groupe d'ordre 2. Il y a alors une extension quadratique E/F et un élément $\omega \in \hat{\Omega} - \{1\}$ tels que $\sigma_{G'} = 1$ si $\sigma \in \Gamma_E$ et $\sigma_{G'} = \omega$ si $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_E$. Supposons d'abord que $\omega = \theta\theta'$. L'orbite $\mathcal{O}$ peut avoir un seul élément $\hat{\alpha}_m$ pour $m \in \{2, ..., n-2\}$. De nouveau, on peut supposer $m \geq n/2$. Ce cas est voisin du précédent, le groupe G'_{SC} étant cette fois $Spin_{E/F}(2m) \times Spin_{E/F}(2n-2m)$. Si E/F est non ramifiée, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $m = i^2$ et $n - m = j^2$ avec i, j pairs. Si E/F est ramifiée, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $m = i^2$ et $n - m = j^2$ avec i, j impairs (remarquons que l'on a $j \geq 2$ puisque $m \leq n-2$). Supposons ces conditions vérifiées. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite et on voit comme ci-dessus que le groupe $Out(\mathbf{G}')$ agit trivialement sur cette droite. Le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ est trivial sur $\iota_1(F^\times/F^{\times,2})$ et est égal au caractère $\chi_{E/F}$ sur $\iota_2(F^\times/F^{\times,2})$. Notons ξ ce caractère. On a $(i, j, \xi) \in \mathcal{Y}^+$, on pose $\mathbf{G}'_{i,j,\xi} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Considérons maintenant une orbite $\mathcal{O}$ à deux éléments. Cette orbite est alors égale à $\{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1\}$ ou $\{\hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. Ces deux ensembles se déduisent l'un de l'autre par l'action de δ, on peut considérer seulement le cas $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. Le lemme **??** exclut le cas où E/F est non ramifiée. Supposons E/F ramifiée. On a $G'_{SC} \simeq Spin_{E/F}(2n-2)$. On a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $n - 1 = i^2$ avec i forcément impair. La discussion se poursuit comme précédemment, on pose $\mathbf{G}'_{i,1,\xi} = \mathbf{G}'$, $FC^{\mathcal{E}}_{i,1,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,1,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,1,\xi})}$, où ξ est comme ci-dessus.

Supposons maintenant que $\sigma_{G'} = 1$ pour $\sigma \in \Gamma_E$ mais que $\sigma_{G'} = \delta$ pour $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_E$. Considérons d'abord le cas où $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m, \hat{\alpha}_{n-m}\}$, avec $2 \leq m < n/2$. De nouveau, le lemme **??** exclut le cas où E/F est non ramifiée. On suppose donc E/F ramifiée. On a $G'_{SC} \simeq Res_{E/F}(Spin_{dep}(2m)) \times SU_{E/F}(n-2m)$. En utilisant par récurrence (5) ci-dessous et **??** (5), on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $m = i^2$ avec i pair et $n - 2m = j(j+1)/2$. Puisque n est pair, $[(j+1)/2]$ est forcément pair. Supposons ces conditions sont vérifiées. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. Le groupe $Out(\mathbf{G}')$ est $\hat{\Omega}$ tout entier. L'action de $\theta\theta'$ est l'automorphisme usuel du facteur $Spin_{dep}(2m)$ qui agit trivialement sur la droite $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. L'action de δ n'est autre que l'action galoisienne naturelle de $\Gamma_{E/F}$ sur chacun des facteurs. On montrera en **??** que cette action est la multiplication par $sgn(-1)^{i/2}$ sur le premier facteur et on a montré en **??** que c'était la multiplication par $sgn(-1)^{[(j+2)/4]}$ sur le second. Donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est une droite si $sgn(-1) = 1$, c'est-à-dire $\delta_4(q-1) = 1$, ou si $i/2 + [(j+2)/4]$ est pair, et est nul sinon. Supposons ces conditions vérifiées. On calcule le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ comme en **??**. Pour cela, donnons une formule générale pour l'élément s_{sc} associé à notre donnée, qui est valable sans hypothèse de parité sur m ou n. On voit que l'on peut choisir

$$(2) \qquad s_{sc} = \Big(\prod_{l=1,...,m} \check{\hat{\alpha}}_l((-1)^l)\Big)\Big(\prod_{l=m+1,...,n-m} \check{\hat{\alpha}}_l(i^{l+m})\Big(\prod_{l=n-m+1,...,n-2} \check{\hat{\alpha}}_l(i^n)\Big)\check{\hat{\alpha}}_{n-1}(\zeta_8^n)\check{\hat{\alpha}}_n(\zeta_8^n),$$

où ζ_8 est une racine carrée de i dans $\mathbb{C}^\times$ et où $\check{\hat{\alpha}}_l$ est la coracine associée à la racine $\hat{\alpha}_l$. On calcule $\delta(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}'\hat{z}^{n/2}$ et $\theta\theta'(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}$. Pour $\tau \in \Gamma_E - \Gamma_F$, on a $\tau_{G'} = \delta$. On en déduit que $\xi_{\mathbf{G}'}$ est égal à $(\chi_{E/F}, \chi_{E/F}^{n/2})$. Notons ξ ce caractère. On a $(i, j, \xi) \in \mathcal{Y}^-$. On pose $\mathbf{G}'_{i,j,\xi} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Considérons maintenant le cas où $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_{n/2}\}$. Le groupe unitaire disparaît. Si E/F est ramifiée, ce cas ne diffère pas du précédent, on a simplement $j = 0$. Mais, cette fois, le cas où E/F est non ramifiée n'est plus exclu. Dans ce cas, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $n/2 = i^2$ avec i pair et on montrera en **??** qu'alors, $Out(\mathbf{G}')$ agit trivialement sur cet espace. Le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ est encore égal à $(\chi_{E/F}, \chi_{E/F}^{n/2})$. Notons ξ ce caractère. On a $(i, i, \xi) \in \mathcal{Y}^+$. On pose $\mathbf{G}'_{i,i,\xi} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,i,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,i,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,i,\xi})}$. Considérons enfin le cas où $\mathcal{O}$ est égale à $\{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_n\}$

ou $\{\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_{n-1}\}$. Ces deux orbites se déduisent l'une de l'autre par $\theta\theta'\in\hat{\Omega}$, on peut ne considérer que la première. De nouveau, l'extension E/F non ramifiée est exclue. Pour E/F ramifiée, la situation est la même que dans le premier cas traité ($\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m,\hat{\alpha}_{n-m}\}$, avec $2\leq m<n/2$), l'entier i devenant nul.

Supposons que $\sigma_{G'}=1$ pour $\sigma\in\Gamma_E$ mais que $\sigma_{G'}=\delta\theta\theta'$ pour $\sigma\in\Gamma_F-\Gamma_E$. Ce cas est analogue au précédent, la seule différence est le calcul du caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$: on a maintenant $\tau_{G'}=\delta\theta\theta'$. Le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ vaut alors $(\chi_{E/F},\chi_{E/F}^{1+n/2})$. On pose les mêmes définitions que précédemment, au changement près de ce caractère.

Supposons enfin que l'action $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ ait pour image $\hat{\Omega}$ tout entier. Puisque ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, le noyau de cette action est forcément le groupe Γ_Q où Q/F est l'extension biquadratique. Le cas où $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_{n-1},\hat{\alpha}_n\}$ est exclu par le lemme **??** puisque Q/F n'est pas totalement ramifiée. Considérons maintenant le cas où $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m,\hat{\alpha}_{n-m}\}$, avec $2\leq m<n/2$. Notons E/F l'extension quadratique telle que l'image de Γ_E par $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ soit $\{1,\theta\theta'\}$. Le stabilisateur d'un élément de l'orbite est Γ_E. Le lemme **??** exclut le cas où E/F est non ramifiée. Supposons donc E/F ramifiée. Fixons $\tau\in\Gamma_F-\Gamma_E$. On a $\tau_{G'}=\delta$ ou $\delta\theta\theta'$. On a $G'_{SC}\simeq Res_{E/F}(Spin_{Q/E}(2m))\times SU_{E/F}(n-2m)$. Puisque E/F est ramifiée, Q/E ne l'est pas et la situation est à peu près la même que dans le cas où l'action galoisienne se factorise par Γ_E. On a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $m=i^2$ avec i pair et $n-2m=j(j+1)/2$. Supposons ces conditions vérifiées. On voit encore que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est une droite si $\delta_4(q-1)=1$ ou si $i/2+[(j+2)/4]$ est pair, et est nul sinon. L'élément s_{sc} est comme ci-dessus et on obtient que le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ vaut $(\chi_{E/F},\chi_{E'/F})$, où E'/F est l'extension quadratique telle que l'image de $\Gamma_{E'}$ par l'application $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ soit $\{1,\delta\}$ si $n/2$ est pair, $\{1,\delta\theta\theta'\}$ si $n/2$ est impair. Les deux actions possibles de $\tau_{G'}$ donnent en tout cas les deux extensions E'/F distinctes de E, donc deux caractères $\xi\in\Xi$. Pour chacun d'eux, on a $(i,j,\xi)\in\mathcal{Y}^-$. On pose $\mathbf{G}'_{i,j,\xi}=\mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Considérons enfin le cas où $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_{n/2}\}$. On définit E/F comme ci-dessus. Si E/F est ramifiée, la situation est la même que dans le cas que l'on vient de traiter, j devenant nul. Maintenant, le cas E/F non ramifiée n'est plus exclu. Supposons que E/F soit non ramifiée. On a $G'_{SC}\simeq Res_{E/F}(Spin_{Q/E}(n))$. L'extension Q/E est maintenant ramifiée. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est non nul si et seulement si $n/2=i^2$ avec i impair. Supposons qu'il en soit ainsi. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite et on voit que $Out(\mathbf{G}')$ y agit trivialement. L'élément s_{sc} est comme précédemment et $n/2$ est impair. Alors $\xi_{\mathbf{G}'}$ est égal à $(\chi_{E/F},\chi_{E'/F})$, où E'/F est l'extension quadratique telle que l'image de $\Gamma_{E'}$ par l'application $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ soit $\{1,\delta\theta\theta'\}$. Selon la valeur de $\tau_{G'}$ qui peut être égal à δ ou $\delta\theta\theta'$, on obtient les deux extensions E'/F ramifiées donc deux caractères ξ. Pour chacun d'eux, on a $(i,i,\xi)\in\mathcal{Y}^+$. On pose $\mathbf{G}'_{i,i,\xi}=\mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,i,\xi}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,i,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,i,\xi})}$.

En rassemblant ces calculs, on a obtenu la description **??**(2) sauf sur deux points. On n'a pas traité la donnée principale $\mathbf{G}$. Si $\delta_\square(n)=1$, aucune des données décrites n'est paramétrée par le triplet $(k^{st},0)\in\mathcal{Y}^+$.

On définit des applications $\phi^+:\mathbb{X}^+\to\mathbb{Y}^+$ et $\phi^-:\mathbb{X}^-\to\mathbb{Y}^-$ par les formules suivantes :

pour $(k,h)\in\mathbb{X}^+$, $\phi^+(k,h)=((k+h)/2,(k-h)/2)$;

pour $(k,h)\in\mathbb{X}^-$,

$$\phi^-(k,h)=\begin{cases}((k-h)/4,(k+h)/2), & si\ k\equiv h\ mod\ 2\mathbb{Z},\\ ((k+h+1)/4,(k-h-1)/2), & si\ k\not\equiv h\ mod\ 2\mathbb{Z}.\end{cases}$$

On vérifie que ce sont des bijections. Si $\delta_\square(n)=0$, on pose $\mathcal{X}^{st}=\mathcal{Y}^{st}=\emptyset$. Si $\delta_\square(n)=1$, on pose $\mathcal{X}^{st} = \{(k^{st}, k^{st})\}$ et $\mathcal{Y}^{st} = \{(k^{st}, 0)\}$.

Posons $\star = \pm$. Si $\star = +$ ou si $\star = -$ et qu'il n'existe pas d'élément de $\mathbb{X}^-$ de la forme (k, k), la bijection $\phi^\star$ se relève naturellement en une bijection $\varphi^\star : \mathcal{X}^\star \to \mathcal{Y}^\star$. Par contre, si $\star = -$ et qu'il existe un tel élément $(k, k) \in \mathbb{X}^-$, on ne peut pas encore relever naturellement la bijection $\phi^\star$ en une bijection $\varphi^\star : \mathcal{X}^\star \to \mathcal{Y}^\star$ parce que l'on n'a pas encore démontré l'égalité $\tilde{\Xi}^X = \tilde{\Xi}$. Mais on a vu que ces deux ensembles avaient même nombre d'éléments. Fixons de façon provisoire une bijection arbitraire entre ces deux ensembles. Sous les hypothèses précédentes, on peut alors relever $\phi^\star$ en une bijection $\varphi^\star : \mathcal{X}^\star \to \mathcal{Y}^\star$. On réunit φ^+ et φ^- en une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Remarquons que $\varphi(\mathcal{X}^{st}) = \mathcal{Y}^{st}$.

Le même argument de dimensions qu'en **??** montre alors que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est une droite si $\delta_\Box(n) = 1$ et est nul sinon. Si $\delta_\Box(n) = 1$, on pose $\mathbf{G}'_{k^{st},0} = \mathbf{G}$, $FC^{\mathcal{E}}_{k^{st},0} = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Cela achève la preuve de **??**(2).

Soit de nouveau $\star = \pm$. Montrons que

(3) $transfert(\oplus_{x\in\mathcal{X}^\star} FC_x) = \oplus_{y\in\mathcal{Y}^\star} FC^{\mathcal{E}}_y$.

Pour $x \in \mathcal{X}$, notons $\xi_x \in \Xi$ le caractère tel que $FC_x \subset I_{cusp,\xi_x}(\mathfrak{g}(F))$. Il résulte de nos descriptions que ξ_x est trivial, resp. non trivial, sur $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ si et seulement si $x \in \mathcal{X}^+$, resp. $x \in \mathcal{X}^-$. De même, pour $y \in \mathcal{Y}$, le caractère $\xi_{\mathbf{G}'_y}$ est trivial, resp. non trivial, sur $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ si et seulement si $y \in \mathcal{Y}^+$, resp. $x \in \mathcal{Y}^-$. Alors (3) résulte de la compatibilité du transfert avec les actions de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$.

On munit l'ensemble $\mathbb{X}^\star$ de la relation $(k, h) \leq (k', h')$ si et seulement si $k+h \leq k'+h'$. On prouve comme en **??** que c'est un ordre total. On applique alors les constructions de **??**. Remarquons que la bijection encore notée $\varphi : \underline{\mathcal{X}}^\star \to \underline{\mathcal{Y}}^\star$ qui se déduit de φ s'identifie à $\phi^\star : \mathbb{X}^\star \to \mathbb{Y}^\star$ et est donc indépendante du choix arbitraire que l'on a fait ci-dessus. Soit $y \in \mathcal{Y}^\star$. On introduira dans le paragraphe **??** un élément $Y_y \in \mathfrak{g}'_{y,ell}(F)$ qui a les propriétés (1) et (2) de **??**. Alors les hypothèses (1) à (5) de **??** sont satisfaites pour $\underline{\mathcal{Y}}^\sharp = \underline{\mathcal{Y}}^\star$. Cela entraîne

$$(4) \qquad transfert(FC_{(x)}) = FC^{\mathcal{E}}_{\varphi^\star((x))}$$

pour tout $(x) \in \underline{\mathcal{X}}^\star$. Supposons qu'il existe un élément de $\mathbb{X}^-$ de la forme (k, k). Appliquons l'égalité (4) pour $\star = -$ en prenant pour (x) la classe qui se projette sur cet élément. On a $FC_{(x)} = \oplus_{\xi\in\tilde{\Xi}^X} FC_{k,k,\xi}$ et $FC_{k,k,\xi} \subset I_{cusp,\xi}(\mathfrak{g}(F))$. L'ensemble des caractères $\xi_{\mathbf{G}'_y}$ pour $y \in \varphi^-((x))$ est $\tilde{\Xi}$. La compatibilité du transfert à l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ entraîne l'égalité $\tilde{\Xi}^X = \tilde{\Xi}$, ce qui achève la preuve de **??**(1). Il y avait plus haut un arbitraire dans la définition de φ. Puisque $\tilde{\Xi}^X = \tilde{\Xi}$, il y a un choix canonique de telle bijection et c'est celui que l'on fait. On prouve les relations **??**(3) et (4) comme en **??**. Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(5) on a $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \delta_\Box(n)$.

6.6 Forme intérieure classique du type D_n déployé, n pair

On suppose que G^* est du type précédent, en particulier n est pair. Le diagramme de Dynkin complété $\mathcal{D}_a$ de G^* est identique au diagramme $\hat{\mathcal{D}}_a$ de $\hat{G}$. Identifions ces deux diagrammes. Le groupe N de **??** s'identifie au groupe $\hat{\Omega}$. On suppose ici que G est la forme intérieure de G^* associée à l'élément $\theta\theta' \in \hat{\Omega} \simeq N$, ou encore au caractère de $Z(\hat{G}_{SC})$ dont le noyau est $\{1, \hat{z}\}$. Alors G est la forme non déployée "classique" du groupe $Spin(2n)$, autrement dit le groupe $Spin$ associé à un espace de dimension $2n$ sur F muni d'une forme quadratique de déterminant 1 telle que les sous-espaces totalement isotropes maximaux sont de dimension $n-2$. Dans les tables de Tits, le groupe est de type ${}^2D'_n$. On a encore $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \simeq (F^\times/F^{\times,2})^2$, le quotient $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ ne changeant pas par passage à une forme intérieure.

Notons $\mathbb{X}^+$ l'ensemble des couples $(k,h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k^2+h^2 = 2n$ et $k \geq h \geq 2$. Remarquons que k et h sont forcément pairs puisque n l'est. On note $\tilde{\mathcal{X}}^+$ l'ensemble des triplets (k,h,ξ) où $(k,h) \in \mathbb{X}^+$ et $\xi \in \Xi$ vérifient

$k > h$;

ξ vaut 1 sur $\iota_1(F^\times/F^{\times,2})$ et vaut $sgn^{(k+h)/2}$ sur $\iota_2(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$.

Si $\delta_\square(n) = 0$, on pose $\mathcal{X}^+ = \tilde{\mathcal{X}}^+$. Si $\delta_\square(n) = 1$, il y a un élément $(k,h) \in \mathbb{X}^+$ tel que $k = h$, on le note (k^{st}, k^{st}). On pose $\mathcal{X}^+ = \{(k^{st}, k^{st})\} \cup \tilde{\mathcal{X}}^+$.

Si $\delta_4(q-1) = 1$, posons $\mathbb{X}^- = \emptyset$. Si $\delta_4(q-1) = 0$, ce qui équivaut à $\delta_4(q+1) = 1$, notons $\mathbb{X}^-$ l'ensemble des couples $(k,h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k(k+1)/2 + h(h+1)/2 = 2n$, $k \geq h$ et $k(k+1)/2$ et $h(h+1)/2$ sont congrus à 2 modulo 4.

On note $\mathcal{X}^-$ l'ensemble des triplets (k,h,ξ) où $(k,h) \in \mathbb{X}^-$ et $\xi \in \Xi$ vérifient :

si $k > h$, la restriction de ξ à $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ est non triviale ;

si $k = h$, $\xi \in \tilde{\Xi}$, avec le même ensemble $\tilde{\Xi}$ qu'en **??**.

On pose $\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ \sqcup \mathcal{X}^-$ et $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \geq b$, $a+b = n$ et $b \geq 1$. Les fibres de cette surjection ont un élément au-dessus de $(n/2, n/2)$, deux éléments au-dessus de (a,b) pour $a \neq b$. L'action de $G_{AD}(F)$ préserve les fibres et est transitive sur chacune d'elles. Pour $s \in \underline{S}(G)$ paramétré par (a,b), on a $G_s = (Spin_{ndep}(2a) \times Spin_{ndep}(2b))/\{1,(z,z)\}$ (il s'agit des formes non déployées des groupes en question). La preuve de l'assertion **??**(1) est alors similaire à celle du paragraphe précédent. Les différences sont d'une part que les sommets paramétrés par la couple $(n,0)$ disparaissent. D'autre part, parce que les groupes $Spin$ apparaissant dans les groupes G_s sont maintenant non déployés, les fonctions $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ telles que $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = -1$ existent si et seulement si $\delta_4(q+1) = 1$, $(2a, 2b)$ est de la forme $(k(k+1)/2, h(h+1)/2)$ et a et b sont impairs.

Notons $\mathbb{Y}^+$ l'ensemble des couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i^2 + j^2 = n$ et $i > j$. On note $\tilde{\mathcal{Y}}^+$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) où $(i,j) \in \mathbb{Y}^+$ et $\xi \in \Xi$ vérifie

$j > 0$;

ξ vaut 1 sur $\iota_1(F^\times/F^{\times,2})$ et vaut sgn^i sur $\iota_2(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{o}_F^\times)$.

Si $\delta_\square(n) = 0$, on pose $\mathcal{Y}^+ = \tilde{\mathcal{Y}}^+$. Si $\delta_\square(n) = 1$, il y a un élément $(i,0) \in \mathbb{Y}^+$, à savoir l'élément $(k^{st}, 0)$. On pose $\mathcal{Y}^+ = \{(k^{st}, 0)\} \cup \tilde{\mathcal{Y}}^+$.

Si $\delta_4(q-1) = 1$ posons $\mathbb{Y}^- = \emptyset$. Si $\delta_4(q+1) = 1$, notons $\mathbb{Y}^-$ l'ensemble des couples (i,j) avec $i,j \in \mathbb{N}$, tels que $2i^2 + j(j+1)/2 = n$, i est pair et $i/2 + [(j+2)/4]$ est impair.

On note $\mathcal{Y}^-$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) où $(i,j) \in \mathbb{Y}^-$ et $\xi \in \Xi$ vérifie :

si $i \neq 0$, la restriction de ξ à $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ est non triviale ;

si $i = 0$, $\xi \in \tilde{\Xi}$.

On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^+ \sqcup \mathcal{Y}^-$.

La description des données endoscopiques elliptiques $\mathbf{G}'$ telles que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est bien sûr la même que dans le paragraphe précédent. Ce qui change est l'action du groupe d'automorphismes extérieurs. En reprenant tous les cas un à un, on s'aperçoit que cette action est tordue par la restriction à $Out(\mathbf{G}') \subset \hat{\Omega}$ du caractère de ce groupe qui vaut 1 sur $\theta\theta'$ mais -1 sur δ. Ainsi, les données telles que $Out(\mathbf{G}') \subset \{1, \theta\theta'\}$ se conservent sans changement. Pour les données telles que $Out(\mathbf{G}')$ contient δ ou $\delta\theta\theta'$, les données qui étaient admissibles dans le paragraphe précédent ne le sont plus tandis que celles que l'on avait exclues à cause de l'action de ces éléments δ ou $\delta\theta\theta'$ deviennent admissibles. On obtient ainsi l'assertion ??(2).

Pour $\star = \pm$, on définit une application $\phi^\star : \mathbb{X}^\star \to \mathbb{Y}^\star$ par les mêmes formules qu'en ??. La fin de la démonstration est identique à celle de ce paragraphe.

6.7 Forme intérieure non classique du type D_n déployé, n pair

On suppose que G^* est comme en ??, en particulier n est pair. On suppose ici que G est la forme intérieure de G^* associée à l'élément $\delta \in \hat{\Omega} \simeq N$ ou encore au caractère de $Z(\hat{G}_{SC})$ dont le noyau est $\{1, \hat{z}'\}$. Alors G est une forme non déployée "non classique" de $Spin(2n)$, c'est-à-dire que ce n'est pas le groupe associé à un espace muni d'une forme quadratique. Dans les tables de Tits, le groupe est de type $2D''_n$.

Notons Ξ' le sous-ensemble de Ξ formé des deux caractères $(\chi_{E/F}, \chi_{E/F}^{\delta_4(q+1)(\delta_4(n)+1)})$ où E/F est une extension quadratique ramifiée de F. Si $\delta_\Box(n) = 0$, posons $\mathcal{X}^+ = \emptyset$. Si $\delta_\Box(n) = 1$, c'est-à-dire $n = k^2$, pour un entier $k \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{X}^+ = \{(k,k)\}$. Si $\delta_\triangle(n) = 0$, posons $\mathcal{X}^- = \emptyset$. Si $\delta_\triangle(n) = 1$, c'est-à-dire si $n = k(k+1)/2$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{X}^- = \{(k,k,\xi); \xi \in \Xi'\}$. On pose $\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ \sqcup \mathcal{X}^-$ et $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Le diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$ des tables de Tits est le diagramme $\mathcal{D}_a$ muni de l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ qui est triviale sur $\Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}}$ et telle qu'un élément $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{F}_q} - \Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}}$ agisse par δ. Les éléments de $\underline{S}(G)$ correspondent aux orbites de cette action dans $\mathcal{D}_a$. Pour un sommet s correspondant à une orbite à deux éléments, le lemme ?? montre que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Il n'y a qu'une orbite galoisienne possédant un seul élément, à savoir $\{\alpha_{n/2}\}$. Notons s le sommet associé. Son unicité entraîne qu'il est conservé par l'action de $G_{AD}(F)$. Le groupe G_s est algébriquement le même qu'en ??, c'est-à-dire $G_s = (Spin(n) \times Spin(n))/\{1, (z,z)\}$. Notons $\sigma \mapsto \sigma_{dep}$ l'action galoisienne déployée sur $Spin(n)$. L'action galoisienne de $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ sur G_s est $(g_1, g_2) \mapsto (\sigma_{dep}(g_1), \sigma_{dep}(g_2))$ pour $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}}$ et $(g_1, g_2) \mapsto (\sigma_{dep}(g_2), \sigma_{dep}(g_1))$ pour $\sigma \notin \Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}}$. Les faisceaux-caractères cuspidaux sur $\mathfrak{g}_s$ sont les mêmes qu'en ?? puisque ces objets sont algébriques. Ce qui change est l'action galoisienne. Si $n = k^2$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$, il y a sur chaque facteur $\mathfrak{spin}(n)$ un faisceau-caractère associé à un unipotent N et un caractère ϵ tel que $\epsilon(z) = 1$. Leur produit est clairement fixe par l'action galoisienne et donne naissance à un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$. On note $FC_{k,k}$ la droite portée par cet élément (on a $(k,k) \in \mathcal{X}^+$). L'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ n'est pas claire pour l'auteur. Mais l'action du sous-groupe $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ est facile à décrire. C'est l'action par conjugaison de $SO_{dep}(n, \mathbb{F}_{q^2})$. Cette action est triviale puisque les caractères ϵ valent 1 sur z. Si $n = k(k+1)/2$, il y a sur chaque facteur $\mathfrak{spin}(n)$ deux faisceaux-caractères associés à un même unipotent N et aux deux caractères ϵ tel que $\epsilon(z) = -1$. Notons $\mathcal{F}'_1$ et $\mathcal{F}''_1$ les deux faisceaux-caractères de la première composante et $\mathcal{F}'_2$ et $\mathcal{F}''_2$ ceux de la seconde composante. Ils sont chacun fixés par Fr^2 car 4 divise $q^2 - 1$. L'action du Frobenius envoie par exemple $\mathcal{F}'_1$ sur $\mathcal{F}'_2$ ou $\mathcal{F}''_2$ selon que 4 divise $q-1$ ou $q+1$. En tout cas, parmi les quatre produits $\mathcal{F}'_1 \otimes \mathcal{F}'_2$, etc... il y a deux faisceaux-caractères invariants par l'action galoisienne tandis que les deux autres sont permutés. Donc $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 2$. Cette fois, le groupe $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ agit sur chaque fonction par le caractère non trivial puisque $\epsilon(z) = -1$. D'après ??, ce caractère se prolonge en deux caractères ξ de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ de sorte que, pour chacun d'eux, une combinaison linéaire des éléments de $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ donne naissance à un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ se transformant par ξ. On note $FC_{k,k,\xi}$ la droite portée par cet élément. On obtient une assertion similaire à ??(1) : puisqu'on n'a pas montré que les deux caractères ξ précédents étaient les éléments de Ξ', on obtient un paramétrage par un ensemble $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^+ \cup \tilde{\mathcal{X}}^-$ défini en remplaçant Ξ' par l'ensemble de ces deux caractères dans la définition de $\mathcal{X}$.

Si $\delta_{\square}(n)=0$, posons $\mathcal{Y}^+=\emptyset$. Si $\delta_{\square}(n)=1$, c'est-à-dire $n=k^2$, pour un entier $k\in\mathbb{N}$, posons $\mathcal{Y}^+=\{(k,0)\}$. Si $\delta_{\triangle}(n)=0$, posons $\mathcal{Y}^-=\emptyset$. Si $\delta_{\triangle}(n)=1$, c'est-à-dire si $n=j(j+1)/2$ pour un entier $j\in\mathbb{N}$, posons $\mathcal{Y}^-=\{(0,j,\xi);\xi\in\Xi'\}$. On pose $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}^+\sqcup\mathcal{Y}^-$.

Les données endoscopiques elliptiques $\mathbf{G}'$ de G telles que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))\neq\{0\}$ sont les mêmes qu'en **??**. Ce qui change est l'action du groupe d'automorphismes extérieurs. En reprenant tous les cas un à un, on s'aperçoit que pour toutes les données telles que $Out(\mathbf{G}')$ contient $\theta\theta'$, ce groupe agit maintenant non trivialement sur la droite $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Il y a au plus 5 données telles que $\theta\theta'\notin Out(\mathbf{G}')$. D'abord la donnée principale $\mathbf{G}$. On a vu que son espace $FC^{st}(\mathfrak{g}^*(F))$ était non nul si et seulement si $n=k^2$ pour un entier $k\in\mathbb{N}$. Si cette condition est vérifiée, l'espace précédent est une droite que l'on note $FC^{\mathcal{E}}_{k,0}$ (on a $(k,0)\in\mathcal{Y}^+$). Les quatre autres données sont déterminées par une extension quadratique E/F ramifiée, par l'action $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ triviale sur Γ_E et telle que $\sigma_{G'}=\delta$, resp. $\delta\theta\theta'$, pour $\sigma\in\Gamma_F-\Gamma_E$ et par l'orbite $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_n\}$, resp. $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_{n-1}\}$. Elles n'interviennent que si $n=j(j+1)/2$ pour un entier $j\in\mathbb{N}$. Supposons cette condition vérifiée.

Supposons $\sigma_{G'}=\delta$ pour $\sigma\in\Gamma_F-\Gamma_E$ et $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_n\}$. Alors $Out(\mathbf{G}')=\{1,\delta\}$. On a vu en **??** que l'action naturelle de δ sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ était la multiplication par $sgn(-1)^{[(j+2)/4]}$. L'égalité $n=j(j+1)/2$ et la parité de n entraînent que $[(j+2)/4]$ est de même parité que $n/2$, donc $sgn(-1)^{[(j+2)/4]}=sgn(-1)^{n/2}$. On a calculé $\delta(s_{sc})s_{sc}^{-1}=\hat{z}'\hat{z}^{n/2}$. Puisque le caractère de $Z(\hat{G}_{SC})$ associé à G est trivial sur $\hat{z}'$ mais pas sur $\hat{z}$, l'action de δ sur le facteur de transfert est la multiplication par $(-1)^{n/2}$. Donc l'action de δ sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ (qui est l'action naturelle multipliée par la constante précédente) est la multiplication par $(-sgn(-1))^{n/2}$. Elle est triviale si $sgn(-1)=-1$, c'est-à-dire $\delta_4(q+1)=1$, ou si 4 divise n. Supposons ces conditions vérifiées. Le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ est le même qu'en **??**, c'est-à-dire le caractère $\xi=(sgn_{E/F},sgn_{E/F}^{n/2})$. On a $(0,j,\xi)\in\mathcal{Y}^-$. On pose $\mathbf{G}'_{0,j,\xi}=\mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{0,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{0,j,\xi})}$.

Supposons maintenant que $\sigma_{G'}=\delta\theta\theta'$ pour $\sigma\in\Gamma_F-\Gamma_E$ et $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_{n-1}\}$. Alors $Out(\mathbf{G}')=\{1,\delta\theta\theta'\}$. L'action naturelle de $\delta\theta\theta'$ sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est encore la multiplication par $sgn(-1)^{n/2}$. On a calculé $\delta\theta\theta'(s_{sc})s_{sc}^{-1}=\hat{z}'\hat{z}^{1+n/2}$. Donc l'action de $\delta\theta\theta'$ sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est la multiplication par $(-1)^{n/2+1}sgn(-1)^{n/2}$. Elle est triviale si $n/2$ est impair et $sgn(-1)=1$, c'est-à-dire $\delta_4(q-1)=1$. Ce sont les cas opposés a ceux ci-dessus. Supposons ces conditions vérifiées. Le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ est maintenant $\xi=(sgn_{E/F},sgn_{E/F}^{n/2+1})=(sgn_{E/F},1)$. On a $(0,j,\xi)\in\mathcal{Y}^-$. On pose $\mathbf{G}'_{0,j,\xi}=\mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{0,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{0,j,\xi})}$.

Cette description démontre l'assertion **??**(2).

Les droites FC_x pour $x\in\tilde{\mathcal{X}}$ se distinguent par le caractère de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ par lequel agit ce groupe : le groupe $\iota_1(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2})$ agit trivialement sur FC_x pour $x\in\mathcal{X}^+$ et non trivialement pour $x\in\mathcal{X}^-$; le groupe $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ agit par deux caractères distincts sur les deux droites FC_x pour $x\in\tilde{\mathcal{X}}^-$ (quand elles existent). De même, les caractères $\xi_{\mathbf{G}'_y}$ pour $y\in\mathcal{Y}$ sont tous distincts. Puisque le transfert est compatible à l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$, cela entraîne d'abord que les deux caractères intervenant dans la définition de $\tilde{\mathcal{X}}^-$ sont bien les deux éléments de Ξ', ce qui achève la preuve de **??**(1). Il y a alors une bijection évidente $\varphi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. Pour $x\in\mathcal{X}$, on a forcément $transfert(FC_x)=FC^{\mathcal{E}}_{\varphi(x)}$ car $\varphi(x)$ est l'unique élément $y\in\mathcal{Y}$ tel que $\xi_{\mathbf{G}'_y}$ puisse coïncider avec le caractère par lequel $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ agit sur FC_x. Cela démontre **??**(3).

Remarque. On peut aussi considérer la forme intérieure G de G^* associée à l'élément $\delta\theta\theta' \in \hat{\Omega} \simeq N$. Ce groupe est isomorphe au précédent, on a simplement composé le torseur intérieur par l'automorphisme θ de G^*. On obtient évidemment des résultats similaires. On peut aussi reprendre la démonstration ci-dessus, l'ensemble Ξ' etant remplacé par l'ensemble Ξ'' des caractères $(sgn_{E/F}, sgn_{E/F}^{1+\delta_4(q+1)(\delta_4(n)+1)})$.

6.8 Type D_n déployé, n impair

On suppose que G est déployé de type D_n avec $n \geq 4$, c'est-à-dire $G = Spin_{dep}(2n)$, et on suppose n impair. Comme en **??**, on a $Z(G) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, avec $(z')^2 = z$. Définissons un homomorphisme $T_{ad}(F) \to F^\times/F^{\times,4}$ par $\prod_{i=1,\dots,n} \check{\varpi}_i(x_i) \mapsto (\prod_{i=1,\dots,n-2} x_i^2)x_{n-1}x_n^{-1}$. Il s'en déduit un isomorphisme $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \simeq T_{ad}(F)/\pi(T(F)) \simeq F^\times/F^{\times,4}$. L'image de $SO_{2n}(F)$ dans ce groupe est $F^{\times,2}/F^{\times,4}$. L'image de $G_{AD}(F)_0$ est $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,4}$. Remarquons que, dans le cas où $\delta_4(q-1) = 1$ ce dernier groupe est cyclique d'ordre 4.

Si $\delta_4(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{X} = \emptyset$. Supposons $\delta_4(q-1) = 1$. On note $\mathbb{X}$ l'ensemble des couples $(k, h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k(k+1)/2 + h(h+1)/2 = 2n$, $k > h$ et $k(k+1)/2$ et $h(h+1)/2$ sont pairs. On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des triplets (k, h, ξ) où $(k, h) \in \mathbb{X}$ et ξ est un élément de Ξ dont la restriction à $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,4}$ est d'ordre 4. On pose $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a > b$, $a+b = n$ et $b \neq 1$. Remarquons que les deux nombres a et b sont de parité distincte. Les fibres de cette surjection ont deux éléments sauf au-dessus de $(n, 0)$ où la fibre a 4 éléments. L'action de $G_{AD}(F)$ préserve les fibres et est transitive sur chacune d'elles. Pour un sommet s paramétré par (a, b), on a $G_s = (Spin_{dep}(2a) \times Spin_{dep}(2b))/\{1, (z, z)\}$ si $b \neq 0$, $G_s = Spin_{dep}(2n)$ si $(a, b) = (n, 0)$. Considérons un sommet s paramétré par (a, b) avec $b \geq 2$. On doit déterminer les couples de fonctions $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ tels que $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z)$. Il n'y en a pas pour lesquels $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = 1$. En effet, d'après **??** et **??**, un tel couple n'existe que si $(2a, 2b)$ est de la forme (k^2, h^2). Or cette condition implique que a et b sont tous deux pairs et on a déjà dit que ce n'était pas possible. Considérons les couples pour lesquels $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = -1$. Pour fixer les idées, supposons a impair et b pair. Il y a une telle fonction f_{N^b,ϵ^b} si et seulement si $2b$ est de la forme $h(h+1)/2$ et, dans ce cas, il y en a deux. Il y a une telle fonction f_{N^a,ϵ^a} si et seulement si $\delta_4(q-1) = 1$ et $2a$ est de la forme $k(k+1)/2$. Dans ce cas, il y en a deux. Supposons ces conditions vérifiées. On obtient alors 4 générateurs de $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. Le stabilisateur de s dans $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ est l'image réciproque de $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par l'homomorphisme $F^\times/F^{\times,4} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ issu de la valuation. L'action du sous-groupe $\mathfrak{o}_F^{\times,2}/\mathfrak{o}_F^{\times,4}$ de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ est facile à déterminer : c'est l'action naturelle de $\{(x, y) \in O_{dep}(2a, \mathbb{F}_q) \times O_{dep}(2b, \mathbb{F}_q); det(x) = det(y)\}$. L'action du sous-groupe $SO_{dep}(2a, \mathbb{F}_q) \times SO_{dep}(2b, \mathbb{F}_q)$ est non triviale puisque $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = -1$. Donc les caractères de $G_{AD}(F)_0$ par lesquels se transforment nos fonctions sont d'ordre 4. Il est clair que la situation est invariante par conjugaison complexe. On obtient donc que les deux caractères d'ordre 4 de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ interviennent et que, pour chacun de ces caractères, il y a deux générateurs de $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ qui se transforment selon ce caractère. Comme en **??**, l'action d'un élément $(x, y) \in O_{dep}(2a, \mathbb{F}_q) \times O_{dep}(2b, \mathbb{F}_q)$ tel que $det(x) = det(y) = -1$ permute les deux générateurs associés à chaque caractère de $G_{AD}(F)_0$. Pour tout caractère ξ_0 du stabilisateur de s dont la restriction à $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,4}$ est d'ordre 4, il y a donc une combinaison linéaire de nos fonctions qui se transforme selon ce caractère. Ensuite, chacune de ces fonctions donne naissance à deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ se transformant selon deux caractères ξ de $F^\times/F^{\times,4}$ prolongeant ξ_0. On note $FC_{k,h,\xi}$ la droite portée par la fonction correspondant à ξ. On a $(k,h,\xi) \in \mathcal{X}$. Considérons maintenant un sommet s paramétré par $(n,0)$. On a $G_s = Spin_{dep}(2n)$. De nouveau, parce que n est impair, il n'y a pas de fonction $f_{N,\epsilon}$ telle que $\epsilon(z) = 1$. Il y a une telle fonction avec $\epsilon(z) = -1$ si et seulement si $\delta_4(q-1) = 1$ et $2n = k(k+1)/2$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Supposons ces conditions vérifiées. Il y a alors deux telles fonctions. De nouveau, elles se transforment selon les deux caractères d'ordre 4 de $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,4}$. Maintenant, ce groupe est le stabilisateur de s dans $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ et, des deux fonctions précédentes se déduisent 8 éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ qui se transforment selon les caractères de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ qui prolongent les deux caractères précédents de $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,4}$. On note $FC_{k,0,\xi}$ la droite portée par la fonction correspondant à ξ. On a $(k,0,\xi) \in \mathcal{X}$.

Si $\delta_4(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{Y} = \emptyset$. Les assertions **??**(2) et (3) sont triviales puisqu'on a déjà prouvé que $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$. On suppose désormais que $\delta_4(q-1) = 1$. On note $\mathbb{Y}$ l'ensemble des couples (i,j) où $i,j \in \mathbb{N}$, tels que $2i^2 + j(j+1)/2 = n$ et i est impair. On note $\mathcal{Y}$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) où $(i,j) \in \mathcal{Y}$ et ξ est un élément de Ξ dont la restriction à $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,4}$ est d'ordre 4.

Commençons par une remarque concernant l'identification des caractères $\xi_{\mathbf{G}'}$. Identifions $Z(\hat{G}_{SC})$ à $\boldsymbol{\zeta}_4(\mathbb{C})$ par $\hat{z}' \mapsto i$. Un élément de $H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))$ devient un caractère d'ordre 4 de W_F qui, par l'isomorphisme du corps de classes, s'identifie à un caractère de $F^\times/F^{\times,4}$. Une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ de G détermine un élément de $H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))$ donc un caractère de $F^\times/F^{\times,4} \simeq G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. Celui-ci n'est autre que $\xi_{\mathbf{G}'}$.

Considérons un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. Rappelons que, n étant impair, $\hat{\Omega} = \{1, \delta\theta, \theta\theta', \delta\theta'\}$ est cyclique d'ordre 4, engendré par $\delta\theta$.

Supposons d'abord que l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ soit triviale. L'orbite $\mathcal{O}$ est réduite à une seule racine. Si celle-ci est une extrémité du diagramme, on a $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$ et on ne peut à présent rien dire de l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Considérons le cas où $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m\}$ avec $m \in \{2,...,n-2\}$. On a alors $G'_{SC} \simeq Spin_{dep}(2m) \times Spin_{dep}(2n-2m)$. Les deux nombres m et $n-m$ sont de parité distincte. Supposons par exemple que m est impair. On applique (1) ci-dessous par récurrence : l'espace $FC^{st}(\mathfrak{spin}_{dep}(2m,F))$ est nul. Donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$.

Supposons qu'il existe une extension quadratique E/F telle que $\sigma_{G'} = 1$ pour $\sigma \in \Gamma_E$ et $\sigma_{G'} = \theta\theta'$ pour $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_E$. L'orbite $\mathcal{O}$ peut avoir un seul élément $\hat{\alpha}_m$ pour $m \in \{2,...,n-2\}$. On a alors $G'_{SC} \simeq Spin_{E/F}(2m) \times Spin_{E/F}(2n-2m)$. On applique **??**(4) par récurrence. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ n'est non nul que si $(m, n-m)$ est de la forme (i^2, j^2) avec i,j pairs si E/F est non ramifiée, i,j impairs si E/F est ramifiée. Ces conditions ne peuvent pas être vérifiées puisque m et $n-m$ sont de parité distincte. L'orbite $\mathcal{O}$ peut aussi avoir deux éléments : $\{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1\}$ ou $\{\hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. Ces deux cas sont d'ailleurs équivalents (par conjugaison par $\delta\theta \in \hat{\Omega}$). Le stabilisateur d'un sommet de l'orbite est Γ_E. Le lemme **??** exclut le cas où E/F est non ramifiée. Supposons E/F ramifiée. Alors $G'_{SC} \simeq Spin_{E/F}(2n-2)$. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ n'est non nul que si $n-1 = j^2$ avec j impair, ce qui est impossible puisque $n-1$ est pair.

Supposons que l'image de Γ_F par l'homomorphisme $\sigma \mapsto \omega_{G'}$ soit $\hat{\Omega}$ tout entier. L'action se factorise alors par une extension galoisienne $E_{G'}/F$ cyclique d'ordre 4. On fixe un générateur ρ de $\Gamma_{E_{G'}/F}$. On peut avoir $\rho_{G'} = \delta\theta$ ou $\rho_{G'} = \delta\theta'$. Supposons $\rho_{G'} = \delta\theta$. On note E l'extension quadratique de F contenue dans $E_{G'}$, c'est-à-dire telle que $\Gamma_{E_{G'}/E} = \{1, \rho^2\}$. On peut avoir $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m, \hat{\alpha}_{n-m}\}$ avec $m \in \{2, ..., (n-1)/2\}$. Le fixateur de $\hat{\alpha}_m$ dans Γ_F est Γ_E. D'après le lemme **??**, on peut supposer que E/F est ramifiée. Il en résulte que $E_{G'}/F$ est totalement ramifiée (si $E_{G'}$ contient l'extension quadratique E_0/F

non ramifiée, l'homomorphisme naturel $\Gamma_{E_{G'}/F} \to \Gamma_{E/F} \times \Gamma_{E_0/F}$ est un isomorphisme et $\Gamma_{E_{G'}/F}$ n'est pas cyclique). Cela force $\delta_4(q-1) = 1$ et il y a 4 extensions $E_{G'}/F$ possibles. On voit que $G'_{SC} \simeq Res_{E/F}(Spin_{E_{G'}/E}(2m)) \times SU_{E/F}(n-2m)$. L'extension $E_{G'}/E$ est ramifiée. En utilisant **??** (1), **??** (1) et **??** (5) par récurrence, on obtient que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est non nul si et seulement si $m = i^2$ avec i impair et $n - 2m = j(j+1)/2$. Le groupe $Out(\mathbf{G}')$ est $\hat{\Omega}$ tout entier. L'action de $\delta\theta$ est l'action naturelle de ρ sur chacun des facteurs. On montrera en **??** que c'est l'identité sur le premier facteur et on a vu en **??** que c'était la multiplication par $sgn(-1)^{[(j+2)/4]}$ sur le second. Mais $\delta_4(q-1) = 1$ donc $sgn(-1) = 1$ et l'action est triviale. Donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}$ est une droite. Calculons le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$. On peut choisir s_{sc} comme en **??**(2). On calcule $\delta\theta(s_{sc})s_{sc}^{-1} = (\hat{z}')^n$. Le cocycle de W_F dans $Z(\hat{G}_{SC})$ qui est trivial sur $W_{E_{G'}}$ et envoie ρ sur $\hat{z}'$ correspond à un caractère $\chi_{E_{G'}/F}$ de $F^\times$ dont le noyau est le groupe des normes de l'extension $E_{G'}/F$. Alors $\xi_{\mathbf{G}'} = \chi^n_{E_{G'}/F}$. Notons ξ ce caractère. On a $(i,j,\xi) \in \mathcal{Y}$. On pose $\mathbf{G}'_{i,j,\xi} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. On peut aussi avoir $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. Le fixateur de $\hat{\alpha}_0$ dans Γ_F est $\Gamma_{E_{G'}}$. Le lemme **??** permet de supposer que $E_{G'}/F$ est totalement ramifiée, donc encore $\delta_4(q-1) = 1$. On a $G'_{SC} \simeq SU_{E/F}(n-2)$, où E est comme ci-dessus. La suite de la discussion est la même, en considérant que $i = 1$ (cas qui était exclu précédemment puisqu'on avait $i^2 = m \geq 2$).

Le cas où $\rho_{G'} = \delta\theta'$ est similaire. Le seul changement est le calcul de $\xi_{\mathbf{G}'}$. L'élément s_{sc} est le même que ci-dessus mais on doit calculer $\delta\theta'(s_{sc})s_{sc}^{-1}$. Ce terme vaut $(\hat{z}')^{-n}$ et $\xi_{\mathbf{G}'} = \chi^{-n}_{E_{G'}/F}$. Modulo ce changement, on pose les mêmes définitions que ci-dessus. Remarquons que la construction associe à chaque extension $E_{G'}$, que l'on a munie d'un générateur ρ de $\Gamma_{E_{G'}/F}$, un unique caractère $\chi_{E_{G'}/F}$. Quand $E_{G'}/F$ décrit les 4 extensions cycliques ramifiées de degré 4 de F, les caractères $\chi^{\pm n}_{E_{G'}/F}$ décrivent tous les caractères de $F^\times/F^{\times,4}$ dont les restrictions à $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,4}$ sont d'ordre 4.

A ce point, on a associé à tout élément $y \in \mathcal{Y}$ une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'_y \neq \mathbf{G}$ et une droite $FC^{\mathcal{E}}_y$. On n'a pas traité le cas de la donnée principale . On définit une bijection $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ par la même formule qu'en **??**. Elle se relève de façon évidente en une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. On applique alors l'argument de comparaison des dimensions. Il implique que l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ que l'on n'a pas encore déterminé est nul. Cela achève la preuve de **??**(2). En posant $\mathcal{X}^{st} = \emptyset$, cela démontre en même temps **??**(4).

On munit $\mathbb{X}$ de la relation $(k', h') \leq (k, h)$ si et seulement si $k' + h' \leq k + h$. On montre que c'est une relation d'ordre et on la relève en une relation de préordre sur $\mathcal{X}$. Pour tout $y \in \mathcal{Y}$, on introduira en **??** un élément $Y_y \in \mathfrak{g}'_{y,ell}(F)$ de sorte que les propriétés **??**(2) et (3) soient vérifiées. L'assertion **??**(3) s'en déduit. Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(1) $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$.

6.9 Forme intérieure classique du type D_n déployé, n impair

On suppose que G^* est du type précédent, en particulier n est impair. On suppose que G est la forme intérieure de G^* associée à l'élément $\theta\theta' \in \hat{\Omega} \simeq N$, ou encore au caractère de $Z(\hat{G}_{SC})$ dont le noyau est $\{1, \hat{z}\}$. Alors G est le groupe $Spin(2n)$ associé à un espace de dimension $2n$ sur F muni d'une forme quadratique de déterminant -1 (c'est-à-dire de déterminant normalisé 1 puisque n est impair) telle que les sous-espaces totalement isotropes maximaux sont de dimension $n-2$. Dans les tables de Tits, le groupe est de type ${}^2D'_n$.

On pose $\mathcal{X} = \emptyset$. L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a > b \geq 1$ et $a+b = n$. Les fibres de cette surjection ont deux éléments. L'action de $G_{AD}(F)$ préserve les fibres et permute leurs deux éléments. Pour un sommet s paramétré par (a,b), avec $b \geq 2$, on a $G_s = (Spin_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2a) \times Spin_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2b))/\{1,(z,z)\}$. Supposons par exemple a pair donc b impair. D'après **??**, il n'y a pas de fonction f_{N^a,ϵ^a} sur $\mathfrak{spin}(2a,\mathbb{F}_q)$ avec $\epsilon^a(z) = -1$. D'après **??**, il n'y a pas de fonction f_{N^b,ϵ^b} sur $\mathfrak{spin}(2b,\mathbb{F}_q)$ avec $\epsilon^b(z) = 1$. Donc il n'y a pas de fonctions de la forme $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ telles que $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z)$. Donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Pour un sommet s paramétré par $(n-1,1)$, le groupe $Spin_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2b)$ ci-dessus devient $GL(1)$ muni de l'action non triviale de $\Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}$. Donc $Z(G_s)^0 \neq \{1\}$ et $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Cela prouve **??**(1).

En posant $\mathcal{Y} = \emptyset$, les assertions **??**(2) et (3) s'ensuivent.

6.10 Forme intérieure non classique du type D_n déployé, n impair

On conserve le même groupe G^* et on suppose que G est la forme intérieure de G^* associée à l'élément $\delta\theta \in \hat{\Omega} \simeq N$, ou encore à un certain caractère d'ordre 4 de $Z(\hat{G}_{SC})$. Dans les tables de Tits, le groupe est de type ${}^4D_n$.

On pose $\mathcal{X} = \emptyset$.

Comme en **??**, on considère le diagramme $\mathcal{D}_a$ muni cette fois de l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ qui est triviale sur $\Gamma_{\mathbb{F}_{q^4}}$ et telle que le Frobenius agisse par $\delta\theta$. Les éléments $\underline{S}(G)$ sont paramétrés par les orbites de cette action. Toute orbite a au moins 2 éléments. Le lemme **??** montre que, pour tout $s \in \underline{S}(G)$, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Donc $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$ et **??**(1) est vérifiée.

En posant $\mathcal{Y} = \emptyset$, les assertions **??**(2) et (3) s'ensuivent.

6.11 Type D_n quasi-déployé, n pair, E_0/F non ramifiée

On suppose que G est quasi-déployé de type D_n avec $n \geq 4$, n pair, et que Γ_F agit sur le diagramme $\mathcal{D}$ de G par l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ triviale sur Γ_{E_0} et telle que $\sigma_G = \theta$ pour $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_{E_0}$ (on rappelle que E_0/F est l'extension quadratique non ramifiée). On note τ un élément de Frobenius de Γ_F, qui agit donc non trivialement sur E_0. L'action de τ sur $Z(G)$ fixe z et échange z' et z''. Un élément de $T_{AD}(F)$ s'écrit $\prod_{l=1,\dots,n} \check{\varpi}_l(x_l)$ avec $x_l \in F^\times$ pour $l = 1,\dots,n-2$, $x_{n-1}, x_n \in E_0^\times$ et $x_n = \tau(x_{n-1})$. Définissons un homomorphisme $T_{ad}(F) \to E_0^\times/E_0^{\times,2}$ par $\prod_{l=1,\dots,n} \check{\varpi}_l(x_l) \mapsto \prod_{l=1,\dots,n} x_l^l$. Il s'en déduit un isomorphisme $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \simeq E_0^\times/E_0^{\times,2}$. L'image de $SO_{E_0/F}(2n,F)$ est celle de $F^\times/F^{\times,2}$ (cette image a deux éléments car $\mathfrak{o}_F^\times \subset \mathfrak{o}_{E_0}^{\times,2}$). L'image de $G_{AD}(F)_0$ est $\mathfrak{o}_{E_0}^\times/\mathfrak{o}_{E_0}^{\times,2}$. On note Ξ_0 le sous-ensemble des éléments de Ξ dont la restriction à $\mathfrak{o}_{E_0}^\times/\mathfrak{o}_{E_0}^{\times,2}$ est triviale si $\delta_4(n) = 1$, non triviale si $\delta_4(n) = -1$.

Notons $\mathbb{X}$ l'ensemble des couples $(k,h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k^2 + h^2 = 2n$ et $k \geq h$. Puisque n est pair, k et h sont forcément pairs. Dans le cas où $\delta_\square(2n) = 0$, on pose $\mathcal{X} = \mathbb{X}$ et $d_x = 2$ pour tout $x = (k,h) \in \mathcal{X}$ avec $k > h$, $d_x = 1$ si $x = (k,h) \in \mathcal{X}$ avec $k = h$. Supposons $\delta_\square(2n) = 1$. Il y a alors un unique couple $(k,h) \in \mathbb{X}$ tel que $h = 0$. Notons-le $(k_0,0)$. On pose $\mathcal{X} = (\mathbb{X} - \{(k_0,0)\}) \sqcup \{(k_0,0,\xi); \xi \in \Xi_0\}$ et $d_x = 2$ si $x \in \mathbb{X} - \{(k_0,0)\}$, $d_x = 1$ si $x = (k_0,0,\xi)$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + b = n$, $b \neq n$ et $b \neq 1$. Les fibres ont un seul élément sauf au-dessus de

$(n,0)$ où la fibre a deux éléments. L'action de $G_{AD}(F)$ est triviale sauf sur cette fibre à deux éléments, lesquels sont permutés par cette action. Pour un sommet s paramétré par (a,b), avec $b\geq 2$, on a $G_s\simeq (Spin_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2a)\times Spin_{dep}(2b))/\{1,(z,z)\}$, avec la convention suivante : quand $a=1$, $Spin_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2a)$ devient $GL(1)$ muni de l'action non triviale de $\Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}$ et on note z l'élément $-1\in GL(1)$. Pour un sommet s paramétré par $(n,0)$, on a $G_s\simeq Spin_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2n)$. Considérons un sommet paramétré par (a,b) avec $b\geq 2$. Comme dans les paragraphes précédents, on cherche les couples de fonctions $f_{N^a,\epsilon^a}\times f_{N^b,\epsilon^b}$ telles que $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)$. Supposons d'abord $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=-1$. D'après **??** et **??**, b est pair ou $\delta_4(q-1)=1$. D'après **??** et **??**, on a a impair et $\delta_4(q+1)=1$. Ces conditions sont contradictoires puisque l'égalité $a+b=n$ impose que a et b sont de même parité. Supposons maintenant $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=1$. Il y a de telles fonctions si et seulement si $(2a,2b)$ est de la forme (k^2,h^2), avec k,h forcément pairs. Supposons ces conditions vérifiées. Il y a alors une unique fonction $f_{N^a,\epsilon^a}\times f_{N^b,\epsilon^b}$ qui donne naissance à un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$. On note $\tilde{FC}_{k,h}$ la droite portée par cette fonction. On n'a pas forcément $(k,h)\in\mathcal{X}$ car on n'a pas forcément $k\geq h$, condition que l'on a imposée aux éléments de $\mathcal{X}$. Mais considérons un élément de $\mathcal{X}$ de la forme (k,h). On a forcément $k\neq 0$ car $k\geq h$ et $h\neq 0$ car un couple $(k,0)$ peut appartenir à $\mathbb{X}$ mais pas à $\mathcal{X}$. Nos constructions pour les couples $(a,b)=(k^2,h^2)$ et (h^2,k^2) définissent des droites $\tilde{FC}_{k,h}$ et $\tilde{FC}_{h,k}$. Si $h=k$, elles sont égales et on pose $FC_{k,h}=\tilde{FC}_{k,h}$. Si $k>h$, on pose $FC_{k,h}=\tilde{FC}_{k,h}\oplus\tilde{FC}_{h,k}$. Cet espace est de dimension 2.

Considérons maintenant un sommet s paramétré par $(n,0)$. D'après **??**, $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est non nul si et seulement si $2n=k^2$ pour un $k\in\mathbb{N}$. Supposons cette condition vérifiée. Alors $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite engendrée par une fonction $f_{N,\epsilon}$ telle que $\epsilon(z)=1$. Le stabilisateur de s dans $G_{AD}(F)$ est $G_{AD}(F)_0$. L'action de ce groupe sur $f_{N,\epsilon}$ est celle du groupe $G_{s,AD}(\mathbb{F}_q)$. Celle-ci est triviale si $\delta_4(n)=1$, non triviale si $\delta_4(n)=-1$, cf **??**. La fonction $f_{N,\epsilon}$ donne naissance à deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ qui se transforment selon les deux caractères ξ de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ qui prolongent le caractère ainsi déterminé de $G_{AD}(F)_0$. On note $FC_{k,0,\xi}$ la droite portée par l'élément qui se transforme selon ξ. On a $(k,0,\xi)\in\mathcal{X}$. Cela démontre **??**(1).

Notons $\mathbb{Y}$ l'ensemble des couples $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ tels que $i^2+j^2=n$ et $i\geq j$. Dans le cas où $\delta_\square(2n)=0$, on pose $\mathcal{Y}=\mathbb{Y}$. Dans le cas où $\delta_\square(2n)=1$, il y a un unique couple $(i,j)\in\mathbb{Y}$ tel que $i=j$, on le note (i_0,i_0). On pose $\mathcal{Y}=(\mathbb{Y}-\{(i_0,i_0)\})\sqcup\{(i_0,i_0,\xi);\xi\in\Xi_0\}$.

Considérons un élément $(\sigma\mapsto\sigma_{G'},\mathcal{O})\in\mathcal{E}_{ell}(G)$. Rappelons que l'application $\sigma\mapsto\omega_{G'}(\sigma)$ est un homomorphisme injectif de $\Gamma_{E_{G'}/E_0}$ dans $\hat{\Omega}$. Cela entraîne que $E_{G'}$ est inclus dans l'extension biquadratique Q_0 de E_0. On sait que Q_0/F est galoisienne abélienne et que $\Gamma_{Q_0/F}\simeq(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (cf. **??**(1)). Soit $\sigma\in\Gamma_{E_{G'}/E_0}$. Puisque Q_0/F est abélienne, on a $(\sigma\tau)_{G'}=(\tau\sigma)_{G'}$, c'est-à-dire $\omega_{G'}(\sigma)\omega_{G'}(\tau)\theta=\omega_{G'}(\tau)\theta\omega_{G'}(\sigma)$. Donc $\omega_{G'}(\sigma)$ commute à θ. Les seuls éléments de $\hat{\Omega}$ qui commutent à θ sont 1 et $\theta\theta'$. Il en résulte que $E_{G'}=E_0$ ou $E_{G'}$ est une extension quadratique de E_0 et que, dans ce cas, l'image de $\Gamma_{E_{G'}/E_0}$ par l'action galoisienne est $\{1,\theta\theta'\}$. Rappelons que Q_0 est la composée de l'extension non ramifiée de degré 4 de F et de l'extension $F(\sqrt{\varpi_F})$ de F. Pour fixer la notation, on suppose que τ agit trivialement sur $F(\sqrt{\varpi_F})$ et on note ρ l'élément de $\Gamma_{Q_0/F}$ qui agit trivialement sur l'extension non ramifiée de degré 4 et non trivialement sur $F(\sqrt{\varpi_F})$. Il y a deux extensions quadratiques K de E_0 telles que $\Gamma_K/\Gamma_F\simeq\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, l'une non ramifiée (son fixateur est $\{1,\rho\}$), l'autre ramifiée (son fixateur est $\{1,\tau^2\rho\}$). Il y a une extension quadratique K de E_0 telles que $\Gamma_K/\Gamma_F\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, à savoir $K=Q$ l'extension biquadratique de F (son fixateur est $\{1,\tau^2\}$).

Supposons d'abord $E_{G'}=E_0$. On doit avoir $\tau_{G'}^2=1$ c'est-à-dire $\omega_{G'}(\tau)\theta\omega_{G'}(\tau)\theta=1$.

De nouveau, cela implique $\omega_{G'}(\tau)=1$ ou $\theta\theta'$. On voit que les deux cas sont conjugués par $\delta\in\Omega$, donc que les données endoscopiques associées sont équivalentes. Supposons donc $\omega_{G'}(\tau)=1$ c'est-à-dire $\tau_{G'}=\theta$. Si l'orbite $\mathcal{O}$ a deux éléments, on a $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_{n-1},\hat{\alpha}_n\}$. Le fixateur de chacune de ces deux racines est Γ_{E_0}. Puisque E_0/F est non ramifiée, ce cas est exclu par le lemme **??**. Si $\mathcal{O}$ est réduite à $\hat{\alpha}_0$ ou $\hat{\alpha}_1$, ces deux cas étant d'ailleurs conjugués, on a $\mathbf{G}'=\mathbf{G}$ et, à ce point, on ne peut rien dire de l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Supposons $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m\}$ pour un $m\in\{2,...,n-2\}$. On voit alors que $G'_{SC}\simeq Spin_{dep}(2m)\times Spin_{E_0/F}(2n-2m)$. En utilisant **??**(4) par récurrence, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $n-m=i^2$ et $m=j^2$ avec $i,j\in\mathbb{N}$ et i,j pairs. Supposons ces conditions vérifiées. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. Le groupe d'automorphismes extérieurs de $\mathbf{G}'$ est $\{1,\theta\theta'\}$. Il agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Si $i\neq j$, on pose $\mathbf{G}'_{i,j}=\mathbf{G}'$ et $\tilde{FC}^{\mathcal{E}}_{i,j}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j})}$. Supposons $i=j$. On a $n/2=i^2$ qui est pair. Calculons $\xi_{\mathbf{G}'}$. On peut choisir

$$(1)\qquad s_{sc}=(\prod_{l=1,...,n/2}\check{\hat{\alpha}}_l((-1)^l))(\prod_{l=n/2+1,...,n-2}\check{\hat{\alpha}}_l((-1)^{n/2}))\check{\hat{\alpha}}_{n-1}(i^{n/2})\check{\hat{\alpha}}_n(i^{n/2}).$$

On calcule $\theta(s_{sc})=s_{sc}$, $\delta(s_{sc})s_{sc}^{-1}=\hat{z}'\hat{z}^{n/2}$. On a écrit ces formules sous une forme générale car elle nous serviront plus loin. Ici, $n/2$ est pair et les formules se simplifient. Dans notre cas, $\sigma_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1}=1$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. Puisque $n/2$ est pair, le caractère $\mathbf{1}\in\Xi$ appartient à Ξ_0 et $(i,i,\mathbf{1})$ appartient à $\mathcal{Y}$. On pose $\mathbf{G}'_{i,i,\mathbf{1}}=\mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,i,\mathbf{1}}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,i,\mathbf{1}}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,i,\mathbf{1}})}$.

Supposons que $E_{G'}=Q$. L'extension $E_{G'}/E_0$ est ramifiée et $\Gamma_{E_{G'}/E_0}$ est engendré par l'image de ρ. On a $\rho_{G'}=\theta\theta'$. De nouveau, on a $\tau^2_{G'}=1$ donc $\omega_{G'}(\tau)=1$ ou $\theta\theta'$. Les deux cas sont encore conjugués par δ. Supposons donc $\tau_{G'}=\theta$. Le fixateur de $\hat{\alpha}_0$ ou $\hat{\alpha}_1$ est $\Gamma_{E'}$ où E' est l'extension quadratique de F telle que $\Gamma_{Q/E'}=\{1,\tau\}$. Le stabilisateur de $\hat{\alpha}_{n-1}$ ou $\hat{\alpha}_n$ est $\Gamma_{E''}$ ou E'' est l'extension quadratique de F telle que $\Gamma_{Q/E''}=\{1,\tau\rho\}$. Les extensions E' et E'' sont les deux extensions quadratiques ramifiées de F. Supposons $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m\}$ pour un $m\in\{2,...,n-2\}$. On voit alors que $G'_{SC}\simeq Spin_{E'/F}(2m)\times Spin_{E''/F}(2n-2m)$. En utilisant **??** (1) et **??** (1) par récurrence, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $n-m=i^2$ et $m=j^2$ avec $i,j\in\mathbb{N}$ et i,j impairs. Supposons ces conditions vérifiées. Alors l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. Le groupe d'automorphismes extérieurs de $\mathbf{G}'$ est $\{1,\theta\theta'\}$. Il agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Si $i\neq j$, on pose $\mathbf{G}'_{i,j}=\mathbf{G}'$ et $\tilde{FC}^{\mathcal{E}}_{i,j}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j})}$. Supposons $i=j$. On a $n/2=i^2$ qui est impair. L'élément s_{sc} est le même que ci-dessus et on calcule $\tau_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1}=1$, $\rho_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1}=\hat{z}$. La restriction de ce cocycle à Γ_{E_0} n'est pas non ramifié. Il détermine un caractère $\xi\in\Xi$ qui est non trivial sur $\mathfrak{o}^{\times}_{E_0}/\mathfrak{o}^{\times,2}_{E_0}$. Donc $\xi\in\Xi_0$ puisque $n/2$ est impair et (i,i,ξ) appartient à $\mathcal{Y}$. On pose $\mathbf{G}'_{i,i,\xi}=\mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,i,\xi}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,i,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,i,\xi})}$. Maintenant $\mathcal{O}$ peut aussi être égale à $\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1\}$ ou à $\{\hat{\alpha}_{n-1},\hat{\alpha}_n\}$ (puisque E'/F et E''/F sont ramifiées, ces cas ne sont plus exclus par le lemme **??**). On s'aperçoit que ces cas sont similaires au précédent, l'entier j, resp. i étant alors égal à 1 (ces cas étaient exclus auparavant puisqu'on avait $2\leq m\leq n-2$). On pose les mêmes définitions que ci-dessus.

Supposons que $\Gamma_{E_{G'}/F}\simeq\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On a $\rho_{G'}=1$ si $E_{G'}/F$ est non ramifiée et $(\rho\tau^2)_{G'}=1$ si $E_{G'}/F$ est ramifiée. On doit avoir $\tau^2_{G'}=\theta\theta'$, ce qui impose $\tau_{G'}=\delta\theta$ ou $\tau_{G'}=\delta\theta'$. Ces deux cas sont conjugués par δ. Supposons donc que $\tau_{G'}=\delta\theta$. Si l'orbite $\mathcal{O}$ a au moins deux éléments, le fixateur d'une racine dans $\mathcal{O}$ est de la forme Γ_L ou L est une extension non triviale de F contenue dans $E_{G'}$. Alors L contient E_0 et n'est pas totalement ramifiée sur F. Le lemme **??** exclut ce cas. Il y a une seule orbite possible à un seul élément, à savoir $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_{n/2}\}$. Alors $G'_{SC}\simeq Res_{E_0/F}(Spin_{E_{G'}/E_0}(n))$. On utilise (1) ci-dessous, **??** (2), **??** (1) et **??** (1) par récurrence. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est non nul si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées : $n/2$ est de la forme i^2 pour un $i \in \mathbb{N}$, $E_{G'}/E_0$ est non ramifiée si i est pair et est ramifiée si i est impair. Supposons $n/2 = i^2$ et supposons que $E_{G'}$ est l'extension ainsi déterminée. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. Le groupe $Out(\mathbf{G}')$ est égal à $\{1, \theta\theta'\}$ et on voit qu'il agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Calculons $\xi_{\mathbf{G}'}$. L'élément s_{sc} est le même que ci-dessus. On obtient $\tau_{G'}(s_{sc})(s_{sc})^{-1} = \hat{z}'\hat{z}^{n/2}$, $\rho_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = 1$ si $E_{G'}/F$ est non ramifiée et $\rho_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}$ si $E_{G'}/F$ est ramifiée. Si $E_{G'}/F$ est non ramifiée, c'est-à-dire si $n/2$ est pair, le cocycle est trivial sur le groupe d'inertie, donc détermine un élément $\xi \in \Xi$ qui est trivial sur $\mathfrak{o}_{E_0}^{\times}/\mathfrak{o}_{E_0}^{\times,2}$. On a $\xi \in \Xi_0$ puisque $n/2$ est pair. Mais le cocycle est non cohomologue au cocycle trivial, donc $\xi \neq \mathbf{1}$. Si $E_{G'}/F$ est ramifiée, c'est-à-dire si $n/2$ est impair, le cocycle est non trivial sur le groupe d'inertie, donc détermine un élément $\xi \in \Xi$ qui est non trivial sur $\mathfrak{o}_{E_0}^{\times}/\mathfrak{o}_{E_0}^{\times,2}$. On a $\xi \in \Xi_0$ puisque $n/2$ est impair. Mais on voit que le cocycle n'est pas cohomologue à celui que l'on a rencontré plus haut. Dans les deux cas, on a $(i, i, \xi) \in \mathcal{Y}$. On pose $\mathbf{G}'_{i,i,\xi} = \mathcal{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,i,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,i,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,i,\xi})}$.

Si $\delta_{\square}(2n) = 1$, on a défini une droite $\tilde{FC}^{\mathcal{E}}_{i_0,i_0,\xi}$ pour tout élément $\xi \in \Xi_0$ (qui intervient dans différents cas ci-dessus selon la parité de $n/2$). Soit $(i, j) \in \mathbb{Y}$ avec $i > j$. Supposons $j \neq 0$. On a construit ci-dessus deux droites $\tilde{FC}^{\mathcal{E}}_{i,j}$ et $\tilde{FC}^{\mathcal{E}}_{j,i}$ (intervenant elles-aussi dans différents cas ci-dessus selon la parité de $n/2$). On pose $FC^{\mathcal{E}}_{i,j} = \tilde{FC}^{\mathcal{E}}_{i,j} \oplus \tilde{FC}^{\mathcal{E}}_{j,i}$. Dans le cas où il existe un élément de $\mathbb{Y}$ de la forme $(i, 0)$, on n'a rien associé à cet élément (dans les constructions ci-dessus, on avait toujours $ij \neq 0$). On n'a pas traité non plus la donnée principale $\mathbf{G}$.

On définit une application $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ par $\phi(k, h) = ((k + h)/2, (k - h)/2)$. C'est une bijection qui se relève naturellement en une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Il y a un élément $(k, h) \in \mathbb{X}$ tel que $k = h$ si et seulement si $\delta_{\square}(n) = 1$. Si cette condition est vérifiée, on note (k^{st}, k^{st}) cet élément. Il y a un élément de $\mathbb{Y}$ de la forme $(i, 0)$ si et seulement si $\delta_{\square}(n) = 1$. Si cette condition est vérifiée, l'élément en question est égal à $(k^{st}, 0)$ (c'est l'élément $y \in \mathcal{Y}$ auquel on n'a encore rien associé). Si $\delta_{\square}(n) = 0$, on pose $\mathcal{X}^{st} = \mathcal{Y}^{st} = \emptyset$. Si $\delta_{\square}(n) = 1$, on pose $\mathcal{X}^{st} = \{(k^{st}, k^{st})\}$ et $\mathcal{Y}^{st} = \{(k^{st}, 0)\}$. On voit que $\varphi(\mathcal{X}^{st}) = \mathcal{Y}^{st}$.

On remarque que, pour tout $x \in \mathcal{X} - \mathcal{X}^{st}$, on a $dim(FC_x) = dim(FC^{\mathcal{E}}_{\varphi(x)})$. On peut alors appliquer l'habituel argument de dimension. On obtient que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$ si $\mathcal{Y}^{st} = \emptyset$. Si $\mathcal{Y}^{st} \neq \emptyset$, $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est une droite et on la note $FC^{\mathcal{E}}_{k^{st},0}$. Cela achève la preuve de **??**(2).

On munit $\mathbb{X}$ de la relation $(k', h') \leq (k, h)$ si et seulement si $k' + h' \leq k + h$. On montre que c'est une relation d'ordre et on la relève en une relation de préordre sur $\mathcal{X}$. Le fait que certains espaces $FC^{\mathcal{E}}_y$ sont de dimension 2 crée une petite difficulté. Pour la résoudre, notons $\mathcal{Y}_1$, resp. $\mathcal{Y}_2$, le sous-ensemble des $y \in \mathcal{Y}$ tels que $dim(FC^{\mathcal{E}}_y) = 1$, resp. $dim(FC^{\mathcal{E}}_y) = 2$. L'ensemble $\mathcal{Y}_2$ est celui des couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i^2 + j^2 = n$ et $i > j > 0$. On note $\tilde{\mathcal{Y}}_2$ l'ensemble des couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i^2 + j^2 = n$, $ij \neq 0$ et $i \neq j$. Il y a une surjection évidente $\psi_2 : \tilde{\mathcal{Y}}_2 \to \mathcal{Y}_2$ qui envoie (i, j) sur (i, j) si $i > j$, sur (j, i) si $i < j$. On pose $\tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_1 \cup \tilde{\mathcal{Y}}_2$ et on prolonge ψ_2 par l'identité de $\mathcal{Y}_1$ en une surjection $\psi : \tilde{\mathcal{Y}} \to \mathcal{Y}$. Pour unifier la notation, on pose $\tilde{FC}^{\mathcal{E}}_y = FC^{\mathcal{E}}_y$ pour $y \in \mathcal{Y}_1$. Dans les constructions précédentes, on a défini une donnée endoscopique $\mathbf{G}'_{\tilde{y}}$ et une droite $\tilde{FC}^{\mathcal{E}}_{\tilde{y}}$ pour tout $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Y}}$. L'application $\tilde{y} \mapsto \mathbf{G}'_{\tilde{y}}$ est injective. Pour $y \in \mathcal{Y}_2$, on a $FC^{\mathcal{E}}_y = \oplus_{\tilde{y} \in \psi^{-1}(y)} \tilde{FC}^{\mathcal{E}}_{\tilde{y}}$. Pour tout $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Y}}$, on introduira en **??** un élément $Y_{\tilde{y}} \in \mathfrak{g}'_{\tilde{y},ell}(F)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(2) pour un élément non nul $f' \in FC^{st}(\mathfrak{g}'_{\tilde{y}}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{\tilde{y}})}$, on a $S^{G'_{\tilde{y}}}(Y_{\tilde{y}}, f') \neq 0$;

(3) soient $x \in \mathcal{X}$, $f \in FC_x$ et X un élément de $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison stable correspond à celle de $Y_{\tilde{y}}$; supposons $I^G(X,f) \neq 0$; alors $(x) \geq \varphi^{-1}((\psi(\tilde{y})))$.

On utilise les notations de **??**. Pour $(y) \in \underline{\mathcal{Y}}$, l'entier $d_{(y)} = dim(FC^{\mathcal{E}}_{(y)})$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $\psi^{-1}((y))$. On associe à (y) les familles $(\mathbf{G}'_{\tilde{y}})_{\tilde{y}\in\psi^{-1}((y))}$ et $(Y_{\tilde{y}})_{\tilde{y}\in\psi^{-1}((y))}$. Les propriétés (2) et (3) ci-dessus entraînent que les hypothèses de **??** sont vérifiées (pour $\underline{\mathcal{Y}}^{\natural} = \underline{\mathcal{Y}}$). Cela entraîne

$$transfert(FC_{(x)}) = FC^{\mathcal{E}}_{\varphi((x))}$$

pour tout $(x) \in \underline{\mathcal{X}}$. Quand la classe (x) n'est pas réduite à un seul élément, on utilise omme en **??** l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ pour raffiner cette égalité et on obtient **??**(3). L'assertion **??**(4) se déduit de **??**(3) et de l'égalité $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC^{\mathcal{E}}_{k^{st},0}$ ci-dessus. Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(4) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))) = \delta_{\square}(n)$.

6.12 Forme intérieure du type D_n quasi-déployé, n pair, E_0/F non ramifiée

On suppose que G^* est du type précédent et que G en est la forme intérieure associée à l'unique caractère non trivial de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F} = \{1, \hat{z}\}$, ou encore à l'image de $\delta \in \hat{\Omega} \simeq N$ dans $N_{\Gamma_F^{nr}}$. Dans les tables de Tits, le groupe est de type ${}^4D_n$.

Si $\delta_{\square}(n) = 0$, posons $\mathcal{X} = \emptyset$. Si $\delta_{\square}(n) = 1$, c'est-à-dire si $n = k^2$ pour un $k \in \mathbb{N}$ (forcément pair), posons $\mathcal{X} = \{(k,k)\}$ et $\delta_x = 1$ pour $x \in \mathcal{X}$.

On considère le diagramme $\mathcal{D}_a$ muni de l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ telle que le Frobenius Fr agisse par $\delta\theta$. Cette action est triviale sur $\Gamma_{\mathbb{F}_{q^4}}$. L'ensemble $\underline{S}(G)$ est paramétré par les orbites de cette action. Pour les sommets s associés à des orbites qui ont au moins deux éléments, le lemme **??** montre que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Il reste l'unique sommet s paramétré par l'orbite $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_{n/2}\}$. Sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, on a $G_s \simeq (Spin(n) \times Spin(n))/\{1,(z,z)\}$. L'action galoisienne est l'action déployée tordue par l'action algébrique suivante : Fr permute les deux copies de $Spin(n)$ et Fr^2 agit sur chaque facteur par l'automorphisme non trivial θ relatif à ce facteur. D'après **??**, l'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est non nul si et seulement si $\delta_{\square}(n) = 1$. Supposons cette condition vérifiée, c'est-à-dire $n = k^2$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. L'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est alors une droite munie d'un générateur $f_{N,\epsilon}$ avec $\epsilon(z) = 1$. On note cette droite $FC_{k,k}$. Cela démontre l'assertion **??**(1).

Si $\delta_{\square}(n) = 0$, posons $\mathcal{Y} = \emptyset$. Si $\delta_{\square}(n) = 1$, c'est-à-dire si $n = k^2$ pour un $k \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{Y} = \{(k,0)\}$.

D'après le calcul ci-dessus de $FC(\mathfrak{g}(F))$ et par égalité des dimensions, $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ est nul si $\delta_{\square}(n) = 0$ et est une droite si $\delta_{\square}(n) = 1$. Il reste dans ce dernier cas à déterminer cette droite. Mais alors $FC^{st}(\mathfrak{g}^*(F))$ est une droite d'après le paragraphe précédent. On pose alors $\mathbf{G}'_{k,0} = \mathbf{G}$ et $FC^{\mathcal{E}}_{k,0} = FC^{st}(\mathfrak{g}^*(F))$. Cela démontre **??**(2).

En définissant φ comme l'unique bijection de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$, **??**(3) est triviale.

6.13 Type D_n quasi-déployé, n impair, E_0/F non ramifiée

On suppose que G est quasi-déployé de type D_n, avec $n \geq 4$, n impair, et que Γ_F agit sur le diagramme $\mathcal{D}$ de G par l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ triviale sur Γ_{E_0} et telle que $\sigma_G = \theta$ pour $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_{E_0}$. On note τ un élément de Frobenius de Γ_F. On a $\tau(\hat{z}') = (\hat{z}')^{-1}$. Un cocycle de W_F dans $Z(\hat{G}_{SC})$ se restreint en un homomorphisme de I_F dans ce groupe, qui est forcément trivial sur $\Gamma_{F'}$, où F' est l'extension de degré 4 de F^{nr}. Fixons un générateur ρ de $\Gamma_{F'/F^{nr}}$ et identifions τ à sa projection dans $\Gamma_{F'/F}$. Dans ce dernier groupe, on a $\tau\rho = \rho^q\tau$. Un cocycle $u : W_F \to Z(\hat{G}_{SC})$ est un couple $(u(\tau), u(\rho)) \in Z(\hat{G}_{SC})^2$ vérifiant la relation $u(\tau)u(\rho)^{-1} = u(\rho)^q u(\tau)$. Si $\delta_4(q-1) = 0$, cette condition est automatique. Si $\delta_4(q-1) = 1$, elle équivaut à $u(\rho) \in \{1, \hat{z}\}$. Le cocycle est un cobord si et seulement s'il existe $\hat{x} \in Z(\hat{G}_{SC})$ tel que $u(\tau) = \hat{x}\tau(\hat{x})^{-1} = \hat{x}^2$ et $u(\rho) = \hat{x}\rho(\hat{x})^{-1} = 1$, autrement dit si et seulement si $u(\tau) \in \{1, \hat{z}\}$. Alors de l'homomorphisme $u \mapsto (u(\tau), u(\rho))$ se déduit un isomorphisme

$$(1) \qquad H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC})) \simeq \begin{cases} Z(\hat{G}_{SC})/\{1, \hat{z}\} \times Z(\hat{G}_{SC}), & \text{si } \delta_4(q-1) = 0, \\ Z(\hat{G}_{SC})/\{1, \hat{z}\} \times \{1, \hat{z}\}, & \text{si } \delta_4(q-1) = 1. \end{cases}$$

L'homomorphisme de Langlands identifie $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ au groupe de caractères $H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))^\vee$. Puisque le centre du groupe dual de $SO_{E_0/F}(2n)$ est $Z(\hat{G}_{SC})/\{1, \hat{z}\}$, l'image de $SO_{E_0/F}(2n, F)$ dans $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ est le sous-groupe des caractères de $H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))$ qui sont triviaux sur le sous-groupe $\{1, \hat{z}\}$ de la deuxième composante de (1). C'est un sous-groupe d'indice 2. Le groupe $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ est le sous-groupe des caractères de $H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))$ dont la composée avec l'application naturelle $H^1(W_{\mathbb{F}_q}, Z(\hat{G}_{SC})) \to H^1(W_F, Z(\hat{G}_{SC}))$ est nulle, autrement dit qui se factorisent par la projection sur le deuxième facteur de (1). Ce sous-groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si $\delta_4(q-1) = 0$, à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $\delta_4(q-1) = 1$. Dans le cas où $\delta_4(q-1) = 0$, un caractère de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ est d'ordre 4 si et seulement si sa restriction à $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ est d'ordre 4 et on note Ξ_0 l'ensemble des caractères vérifiant cette condition.

Si $\delta_4(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{X} = \emptyset$.

Supposons $\delta_4(q-1) = 0$. On note $\mathbb{X}$ l'ensemble des couples $(k, h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k(k+1)/2 + h(h+1)/2 = 2n$, $k \geq h$ et $k(k+1)/2$ et $h(h+1)/2$ sont tous deux pairs. On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des triplets (k, h, ξ) où $(k, h) \in \mathbb{X}$ et $\xi \in \Xi_0$. On pose $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + b = n$, $b \neq n$ et $b \neq 1$. Les fibres ont un seul élément sauf au-dessus de $(n, 0)$ où la fibre a deux éléments. L'action de $G_{AD}(F)$ fixe tous les sommets sauf ceux de cette fibre à deux éléments, qu'elle permute. Pour un sommet s paramétré par (a, b) avec $b \geq 2$, on a $G_s \simeq (Spin_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2a) \times Spin_{dep}(2b))/\{1, (z, z)\}$, avec la même convention qu'en **??** si $a = 1$. Pour un sommet s paramétré par $(n, 0)$, on a $G_s \simeq Spin_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2n)$. Considérons un sommet s paramétré par (a, b) avec $b \geq 2$. Dans le cas $a = 1$, on a $Z(G_s)^0 \neq \{1\}$ et $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Supposons $a \neq 1$ donc $a \geq 2$ puisque $a \neq 0$. Comme dans les paragraphes précédents, on cherche les couples de fonctions $f_{N^a, \epsilon^a} \times f_{N^b, \epsilon^b}$ telles que $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z)$. Supposons d'abord $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = 1$. D'après **??** et **??**, on a a pair et $\delta_\Box(2a) = 1$. D'après **??** et **??**, on a b pair et $\delta_\Box(2b) = 1$. Ces conditions sont impossibles car l'égalité $a + b = n$ entraîne que a et b sont de parité distincte. Supposons maintenant $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = -1$. D'après **??** et **??**, on a a impair, $\delta_\triangle(2a) = 1$ et $\delta_4(q-1) = 0$. Ces conditions impliquent que b est pair. D'après **??** on a $\delta_\triangle(2b) = 1$. Supposons donc $\delta_4(q-1) = 0$, $\delta_\triangle(2a) = \delta_\triangle(2b) = 1$, c'est-à-dire $2a = k'(k'+1)/2$ et $2b = 2h'(h'+1)/2$. Il y a alors deux fonctions sur chaque composante de G_s que l'on note f_{N^a, ϵ'^a}, f_{N^a, ϵ''^a}, f_{N^b, ϵ'^b}, f_{N^b, ϵ''^b} conformément à **??** et **??**. L'image de $z' \in Z(G)$ dans $Z(G_s)$ est (z', z'). Ce couple multiplie chaque fonction $f_{N^a, \epsilon^a} \times f_{N^b, \epsilon^b}$ par $\pm i$ et le signe n'est pas le même sur toutes les fonctions car z' agit différemment sur f_{N^a, ϵ'^a} et f_{N^a, ϵ''^a}, ainsi que sur f_{N^b, ϵ'^b} et f_{N^b, ϵ'^b}. Pour chacun des deux caractères d'ordre 4 de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$, on obtient deux fonctions se transformant selon ce caractère. L'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ tout entier est récupérée par l'action naturelle d'un élément $(x,y) \in O_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(2a,\mathbb{F}_q)\times O_{dep}(2b,\mathbb{F}_q)$ tel que $det(x) = det(y) = -1$. Or cette action permute nos fonctions, car l'action de x permute f_{N^a,ϵ'^a} et f_{N^a,ϵ''^a} et celle de y permute f_{N^b,ϵ'^b} et f_{N^b,ϵ''^b}. Pour chaque caractère $\xi \in \Xi$ dont la restriction à $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ est d'ordre 4, c'est-à-dire pour tout $\xi \in \Xi_0$, il y a donc une combinaison linéaire convenable de deux de nos fonctions qui se transforme selon ξ. On note $FC_{k,h,\xi}$ la droite de $FC(\mathfrak{g}(F))$ issue de cette fonction, où (k,h) est l'unique élément de $\{(k',h'),(h',k')\}$ tel que $k > h$ (on ne peut pas avoir $k = h$ puisque $a \neq b$). Remarquons que le couple (k',h') est uniquement déterminé par (k,h) puisque $k'(k'+1)/4$ doit être impair et $h'(h'+1)/4$ doit être pair. Supposons maintenant que s est paramétré par $(n,0)$. Il n'y a toujours pas de fonction $f_{N,\epsilon}$ avec $\epsilon(z) = 1$ car n est impair. Il y a une fonction $f_{N,\epsilon}$ avec $\epsilon(z) = -1$ si et seulement si $\delta_4(q-1) = 0$ et $\delta_\triangle(2n) = 1$, c'est-à-dire $2n = k(k+1)/2$ pour un $k \in \mathbb{N}$. Supposons ces conditions vérifiées. On a deux fonctions, qui se transforment selon les deux caractères de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ d'ordre 4. Ici, ce groupe est le fixateur de s dans $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. Selon **??**, pour tout caractère $\xi \in \Xi$ prolongeant l'un de ces caractères, c'est-à-dire pour tout $\xi \in \Xi_0$, on obtient un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ se transformant selon ξ. On note $FC_{k,0,\xi}$ la droite portée par cet élément. Cela prouve **??**(1).

Si $\delta_4(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{Y} = \emptyset$. Supposons $\delta_4(q-1) = 0$. On note $\mathbb{Y}$ l'ensemble des couples (i,j) avec $i,j \in \mathbb{N}$, i est impair et $2i^2 + j(j+1)/2 = n$. On note $\mathcal{Y}$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) où $(i,j) \in \mathbb{Y}$ et $\xi \in \Xi_0$.

Dans le cas $\delta_4(q-1) = 1$, on a déjà vu que $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$, donc les assertions (2), (3) et (4) sont triviales. On suppose désormais que $\delta_4(q-1) = 0$.

Considérons un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O})$. Remarquons que $\tau_{G'} \in \hat{\Omega}\theta$ et que tout élément de cet ensemble est de carré 1, donc $\tau_{G'}^2 = 1$.

Considérons le cas où $E_{G'} = E_0$. Le terme $\omega_{G'}(\tau)$ peut être n'importe quel élément de $\hat{\Omega}$ mais on voit que les cas $\omega_{G'}(\tau) = 1$ et $\omega_{G'}(\tau) = \theta\theta'$ sont équivalents (conjugués par $\delta\theta$) ainsi que les cas $\omega_{G'}(\tau) = \delta\theta$ et $\omega_{G'}(\tau) = \delta\theta'$. Supposons $\omega_{G'}(\tau) = 1$ donc $\tau_{G'} = \theta$. Si l'orbite $\mathcal{O}$ est réduite à une racine $\hat{\alpha}_0$ ou $\hat{\alpha}_1$ (ces deux cas sont équivalents, conjugués par $\theta\theta'$), la donnée $\mathbf{G}'$ est la donnée principale $\mathbf{G}$ et, à ce point, on ne peut rien dire de $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$, le fixateur d'une de ces racines est Γ_{E_0}. Puisque E_0/F est non ramifiée, ce cas est exclu par le lemme **??**. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m\}$ avec $m \in \{2,...,n-2\}$. On voit que $G'_{SC} \simeq Spin_{dep}(2m) \times Spin_{E_0/F}(2n-2m)$. On utilise **??** (5) et **??** (4) par récurrence : on n'a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ que si m et $n-m$ sont tous deux des carrés pairs. C'est impossible puisque n est impair. Supposons maintenant $\omega_{G'}(\tau) = \delta\theta$, donc $\sigma_{G'}(\tau) = \delta$. Puisque n est impair, l'orbite $\mathcal{O}$ contient deux éléments et le stabilisateur de chacun d'eux est Γ_{E_0}. Ce cas est encore exclu par le lemme **??**.

Considérons le cas où l'image de $\Gamma_{E_{G'}/E_0}$ dans $\hat{\Omega}$ est l'unique sous-groupe d'ordre 2, à savoir $\{1, \theta\theta'\}$. On voit que $E_{G'}$ est forcément l'extension biquadratique Q de F. On note $\Gamma_{E_{G'}/E_0} = \{1, \rho\}$ (ρ est la restriction à $E_{G'}$ de l'élément $\rho \in \Gamma_{F'/F^{nr}}$ fixé plus haut). De nouveau, à équivalence près, on a $\tau_{G'} = \theta$ ou $\tau_{G'} = \delta$. Supposons $\tau_{G'} = \theta$. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m\}$ avec $m \in \{2,...,n-2\}$. On voit que $G'_{SC} \simeq Spin_{E'/F}(2m) \times Spin_{E''/F}(2n-2m)$, où E' et E'' sont les extensions quadratiques de F telles que $\Gamma_{E_{G'}/E'} = \{1, \tau\}$, $\Gamma_{E_{G'}/E''} = \{1, \tau\rho\}$. Ce sont les deux extensions quadratiques ramifiées de F. On utilise **??**(1) et **??**(1) par récurrence : on n'a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ que si m et $n-m$ sont tous deux des carrés impairs. C'est impossible puisque n est impair. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1\}$ ou $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. Le lemme **??** ne s'applique pas. Toutefois, on a $G'_{SC} \simeq Spin_{E''/F}(2n-2)$ ou $Spin_{E'/F}(2n-2)$ avec les mêmes extensions E' et E'' que ci-dessus et on ne peut avoir

$FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ que si $n-1$ est un carré impair, ce qui est impossible. Supposons maintenant $\tau_{G'} = \delta$. On voit que l'orbite $\mathcal{O}$ a 2 ou 4 éléments et que le fixateur d'un de ces éléments est Γ_{E_0} ou $\Gamma_{E_{G'}}$. En tout cas, cela est exclu par le lemme **??**.

Il reste le cas où l'image de $\Gamma_{E_{G'}/E_0}$ est $\hat{\Omega}$ tout entier. On a alors $\Gamma_{E_{G'}/E_0} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Fixons un générateur ρ de $\Gamma_{E_{G'}/E_0}$. On a forcément $\rho_{G'} = \delta\theta$ ou $\rho_{G'} = \delta\theta'$. Puisque $\tau_{G'} \in \hat{\Omega}\theta$, on voit que $(\rho\tau)_{G'} = (\tau\rho^{-1})_{G'}$. D'après **??** (3), et puisqu'on a supposé $\delta_4(q-1) = 0$, une telle extension $E_{G'}$ existe,, elle est unique et $E_{G'}/E_0$ est totalement ramifiée. On peut supposer que ρ est la restriction à $E_{G'}$ de l'élément ρ fixé plus haut. A équivalence près, il y a 4 actions galoisiennes possibles, définies par $\rho_{G'} = \delta\theta$ ou $\rho_{G'} = \delta\theta'$ et $\tau_{G'} = \theta$ ou $\tau_{G'} = \delta$. On note τ' et ρ' les éléments de $\Gamma_{E_{G'}/F}$ tels que $\tau'_{G'} = \theta$ et $\rho'_{G'} = \delta\theta$. Selon les cas, le couple (τ', ρ') est l'un des quatre couples (τ, ρ), (τ, ρ^{-1}), $(\tau\rho, \rho)$, $(\tau\rho^{-1}, \rho^{-1})$. Supposons que $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m\}$ avec $m \in \{2, ..., n-2\}$. Notons E', resp. K, la sous-extension de $E_{G'}$ telle que $\Gamma_{E_{G'}/E'} = \{1, \tau', (\rho')^2, \tau'(\rho')^2\}$, resp. $\Gamma_{E_{G'}/K} = \{1, \tau'\}$. Les extensions K/E' et E'/F sont quadratiques ramifiées. Le fixateur de $\hat{\alpha}_m$ est $\Gamma_{E'}$. D'après **??**, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{SC}(F))$. On a $G'_{SC} \simeq Res_{E'/F}Spin_{K/E'}(2m) \times SU_{E'/F}(n-2m)$. On applique **??** (1) , **??** (1) et **??** (5) par récurrence. On a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $m = i^2$ avec $i \in \mathbb{N}$, i impair et $n - 2m = j(j+1)/2$ avec $j \in \mathbb{N}$. Supposons ces conditions vérifiées. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. Le groupe d'automorphismes extérieurs $Out(\mathbf{G}')$ est égal à $\{1, \theta\theta'\}$. On voit qu'il agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Calculons $\xi_{\mathbf{G}'}$. On peut choisir s_{sc} comme en **??** (2). On a $\theta(s_{sc}) = s_{sc}$ et $\delta(s_{sc})s_{sc}^{-1} = (\hat{z}')^n$. Donc $\tau'_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = 1$ et $\rho'_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = (\hat{z}')^n$. En remplaçant (τ', ρ') par les quatre couples possibles, on voit que l'on obtient 4 cocycles non cohomologues qui sont d'ordre 4. Ils s'identifient aux 4 éléments de Ξ_0. Donc, pour chaque $\xi \in \Xi_0$, il y a une et une seule de nos données $\mathbf{G}'$ telle que $\xi_{\mathbf{G}'} = \xi$. On la note $\mathbf{G}'_{i,j,\xi}$ et on pose $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. On a $(i, j, \xi) \in \mathcal{Y}$. Supposons maintenant que $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. Le fixateur de $\hat{\alpha}_0$ est Γ_K et K/F est totalement ramifiée. Comme ci-dessus, on peut remplacer G' par $G'_{SC} \simeq SU_{E'/F}(n-2)$. Ce cas est similaire au précédent, l'entier i devenant 1 (cas exclu auparavant puisqu'on avait $m \geq 2$).

On a associé une droite $FC^{\mathcal{E}}_y$ à tout élément $y \in \mathcal{Y}$. On n'a pas traité la donnée principale $\mathbf{G}$.

On définit une application $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ par

$$\phi(k,h) = \begin{cases} ((k-h)/4, (k+h)/2), & si\ k \equiv h\ mod\ 2\mathbb{Z}, \\ ((k+h+1)/4, (k-h-1)/2), & si\ k \not\equiv h\ mod\ 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ce sont les mêmes formules qui définissaient ϕ^- en **??**. On vérifie que ϕ est une bijection. Elle se relève naturellement en une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. On pose $\mathcal{X}^{st} = \emptyset$.

On utilise l'habituel argument de dimension. On obtient que la donnée principale ne peut pas intervenir, c'est-à-dire que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$. Cela achève la preuve de **??**(2) et démontre en même temps **??**(4). On prouve **??**(3) comme en **??**. Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(2) $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$.

6.14 Forme intérieure du type D_n quasi-déployé, n impair, E_0/F non ramifiée

On suppose que G^* est comme dans le paragraphe précédent et que G en est la forme intérieure associée à l'unique caractère non trivial de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F} = \{1, \hat{z}\}$ ou encore à l'image dans $N_{\Gamma_F^{nr}}$ de l'élément $\delta\theta \in \hat{\Omega} \simeq N$. Dans les tables de Tits, le groupe est de type ${}^2D''_n$.

On pose $\mathcal{X} = \emptyset$. On munit le diagramme $\mathcal{D}_a$ de l'action galoisienne triviale sur Γ_{E_0} et telle que $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_{E_0}$ agisse par δ. L'ensemble $\underline{S}(G)$ est paramétré par l'ensemble des orbites de cette action galoisienne. Or toute orbite a deux éléments et le stabilisateur d'une racine est Γ_{E_0}. Alors $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après le lemme **??**. Donc $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$. Cela démontre **??** (1).

En posant $\mathcal{Y} = \emptyset$, les assertions **??**(2) et (3) sont triviales.

6.15 Type D_n quasi-déployé, n pair, E/F ramifiée

On fixe une extension quadratique E/F ramifiée. On suppose que G est quasi-déployé de type D_n avec $n \geq 4$, n pair, et que Γ_F agit sur le diagramme $\mathcal{D}$ de G par l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ triviale sur Γ_E et telle que $\sigma_G = \theta$ pour $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_E$. Dans les tables de Tits, le groupe est de type $C - B_{n-1}$. On fixe un élément $\tau \in \Gamma_F - \Gamma_E$. L'action de τ sur $Z(G)$ fixe z et échange z' et z''. Un élément de $T_{AD}(F)$ s'écrit $\prod_{l=1,...,n} \check{\varpi}_l(x_l)$ avec $x_l \in F^\times$ pour $l = 1, ..., n-2$, $x_{n-1}, x_n \in E^\times$ et $x_n = \tau(x_{n-1})$. Définissons un homomorphisme $T_{ad}(F) \to E^\times/E^{\times,2}$ par $\prod_{l=1,...,n} \check{\varpi}_l(x_l) \mapsto \prod_{l=1,...,n} x_l^l$. De cet homomorphisme se déduit un isomorphisme $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \simeq E^\times/E^{\times,2}$. Les images de $SO_{E/F}(2n, F)$ et de $G_{AD}(F)_0$ sont les mêmes, à savoir $\mathfrak{o}_E^\times/\mathfrak{o}_E^{\times,2} \simeq \{\pm 1\}$. On note Ξ_0 l'ensemble des éléments de Ξ dont la restriction à $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ est non triviale.

On note $\mathbb{X}$ l'ensemble des couples $(k, h) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2n = k(k+1)/2 + h(h+1)/2$, $k > h$ et $k(k+1)/2$ et $h(h+1)/2$ tous deux impairs. On pose $\mathcal{X} = \{(k, h, \xi); (k, h) \in \mathbb{X}, \xi \in \Xi_0\}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + b = n - 1$ et $a > b$ (puisque n est pair, on ne peut pas avoir $a = b$). Les fibres ont deux éléments. L'action de $G_{AD}(F)$ préserve les fibres et permute les éléments de celles-ci. Pour un sommet s paramétré par (a, b), on a $G_s \simeq (Spin(2a+1) \times Spin(2b+1))/\{1, (z, z)\}$ si $b \neq 0$, $G_s \simeq Spin(2a+1)$ si $b = 0$. Supposons $b \neq 0$. On cherche les fonctions $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$ telles que $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z)$. On utilise **??**. Si $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = 1$, on doit avoir $2a + 1 = k^2$ et $2b + 1 = h^2$ avec $k, h \in \mathbb{N}$ tous deux impairs. Alors $2n = 2a + 1 + 2b + 1 = k^2 + h^2$ est congru à 2 modulo $8\mathbb{Z}$, ce qui est impossible puisque n est pair. Supposons $\epsilon^a(z) = \epsilon^b(z) = -1$. C'est possible si et seulement si $2a + 1 = k(k+1)/2$ et $2b + 1 = h(h+1)/2$ avec $k, h \in \mathbb{N}$. Supposons ces conditions vérifiées. Il y a alors une unique fonction $f_{N^a,\epsilon^a} \times f_{N^b,\epsilon^b}$. L'élément $z \in Z(G)$ appartient à $Z(G)^{I_F}$ et s'envoie sur l'élément $(1, z) = (z, 1)$ de G_s qui agit non trivialement sur notre fonction. Celle-ci se transforme donc selon le caractère non trivial de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$. Conformément à **??**, pour tout $\xi \in \Xi_0$, la fonction donne naissance à un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ qui se transforme selon le caractère ξ de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. On note $FC_{k,h,\xi}$ la droite portée par cet élément. On obtient **??**(1).

On note $\mathbb{Y}$ l'ensemble des couples (i, j) avec $i, j \in \mathbb{N}$, $2i^2 + j(j+1)/2 = n$ et i est impair. On pose $\mathcal{Y} = \{(i, j, \xi); (i, j) \in \mathbb{Y}, \xi \in \Xi_0\}$.

Considérons un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. L'image de l'homomorphisme $\omega_{G'} : \Gamma_{E_{G'}/G} \to \hat{\Omega}$ est normalisée par $\tau_{G'}$ qui appartient à $\hat{\Omega}\theta$. Un tel élément permute δ et $\delta\theta\theta'$ et fixe $\theta\theta'$. Les seules images possibles sont donc $\{1\}$, $\{1, \theta\theta'\}$ ou $\hat{\Omega}$ tout entier.

Supposons $E_{G'} = E$. On a alors $\tau_{G'}^2 = 1$ donc $\omega_{G'}(\tau) = 1$ ou $\omega_{G'}(\tau) = \theta\theta'$, c'est-à-dire $\tau_{G'} = \theta$ ou θ'. Les deux cas sont équivalents (conjugués par $\delta \in \hat{\Omega}$), on peut supposer $\tau_{G'} = \theta$. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0\}$ ou $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_1\}$ (ces deux cas sont équivalents), on a $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$ et on ne peut rien dire à présent de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m\}$ avec $m \in \{2, ..., n-2\}$, on a $G'_{SC} \simeq Spin_{dep}(2m) \times Spin_{E/F}(2n-2m)$. En utilisant **??**(5), **??**(1), (1) ci-dessous et **??**(1) par récurrence, on n'a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ que si $m = i^2$ et $n - m = j^2$ avec $i, j \in \mathbb{N}$, i pair et j impair. C'est impossible puisque n est pair. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$, le fixateur de chacune de ces racines est Γ_E. D'après le lemme **??**, on peut remplacer G' par G'_{SC}. On a $G'_{SC} \simeq Spin_{dep}(2n-2)$ et, comme ci-dessus, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$.

Supposons que $E_{G'}/F$ soit de degré 4 et que $\Gamma_{E_{G'}/F}$ soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Alors $E_{G'} = Q$ est l'extension biquadratique de F et l'extension $E_{G'}/E$ est non ramifiée. On pose $\Gamma_{E_{G'}/E} = \{1, \rho\}$. On a forcément $\rho_{G'} = \theta\theta'$. L'égalité $\tau_{G'}^2 = 1$ force $\tau_{G'} = \theta$ ou $\tau_{G'} = \theta'$. Les deux cas sont équivalents (conjugués par δ). On suppose $\tau_{G'} = \theta$. Notons E', resp. E'', l'extension quadratique de F telles que $\Gamma_{E_{G'}/E'} = \{1, \tau\}$, resp. $\Gamma_{E_{G'}/E''} = \{1, \tau\rho\}$. Ce sont les deux extensions quadratiques de F distinctes de E. L'une est non ramifiée, l'autre est ramifiée. Pour fixer la notation, supposons que E' soit l'extension non ramifiée E_0. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m\}$ avec $m \in \{2, ..., n-2\}$, on a $G'_{SC} \simeq Spin_{E_0/F}(2m) \times Spin_{E''/F}(2n-2m)$. Puisque E_0/F est non ramifiée et E''/F est ramifiée, on a encore $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ seulement si $m = i^2$ et $n - m = j^2$ avec $i, j \in \mathbb{N}$, i pair et j impair. C'est impossible puisque n est pair. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1\}$, le fixateur d'une de ces racines est Γ_{E_0} et le lemme **??** exclut ce cas. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$, on a $G'_{SC} \simeq Spin_{E_0/F}(2n-2)$ et, comme ci-dessus, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$.

Supposons que $E_{G'}/F$ soit cyclique de degré 4. Puisque $E \subset E_{G'}$, $E_{G'}/F$ est totalement ramifiée. D'après **??**(2) et (3), on a $\delta_4(q-1) = 1$. Supposons cette condition vérifiée et introduisons l'extension biquadratique Q_E de E et les notations de **??**(6), en particulier les éléments ρ' et ρ'' de $\Gamma_{Q_E/E}$. L'extension $E_{G'}$ peut être K' ou K''. L'élément $\tau_{G'}$ est d'ordre 4 ce qui impose $\omega_{G'}(\tau) = \delta$ ou $\delta\theta\theta'$, c'est-à-dire $\tau_{G'} = \delta\theta$ ou $\delta\theta'$. Ces deux cas sont équivalents (conjugués par δ). Supposons $\tau_{G'} = \delta\theta$. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m, \hat{\alpha}_{n-m}\}$ avec $m \in \{2, ..., n/2-1\}$. Le fixateur de chacune de ces racines est Γ_E. D'après le lemme **??**, on peut remplacer G' par G'_{SC} qui est isomorphe à $Res_{E/F}(Spin_{E_{G'}/E}(2m)) \times SU_{E/F}(n-2m)$. L'extension $E_{G'}/E$ est ramifiée. En utilisant (1) ci-dessous, **??** (1) et **??** (5) par récurrence, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $m = i^2$ avec $i \in \mathbb{N}$ et i impair et $n - 2m = j(j+1)/2$ avec $j \in \mathbb{N}$. Supposons ces conditions vérifiées. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. On a $Out(\mathbf{G}') = \{1, \theta\theta'\}$ et on voit que ce groupe agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Calculons $\xi_{\mathbf{G}'}$. On peut choisir s_{sc} comme en **??**(2). On a $\theta(s_{sc}) = s_{sc}$ et $\delta(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}'\hat{z}^{n/2}$. On en déduit $\tau_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}'\hat{z}^{n/2}$, puis $\tau_{G'}^2(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}$. Si $E_{G'} = K'$, on a $\rho'_{G'} = 1$ donc $\rho'_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = 1$. Si $E_{G'} = K''$, on a $\rho''_{G'} = 1$ donc $\rho''_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = 1$ mais $\rho'' = \rho'\tau^2$ donc $\rho'_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}$. On voit que l'on obtient deux cocycles distincts dont la restriction à I_E est non triviale. Ces cocycles correspondent aux deux élément de Ξ_0. Donc, pour tout $\xi \in \Xi_0$, il y a une et une seule de nos données (c'est-à-dire une et une seule des deux extensions K' et K'' possibles) telle que $\xi_{\mathbf{G}'} = \xi$. On a $(i, j, \xi) \in \mathcal{Y}$. On pose $\mathbf{G}'_{i,j,\xi} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Supposons maintenant $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. Le fixateur d'une de ces racines est $\Gamma_{E_{G'}}$. Puisque $E_{G'}/F$ est totalement ramifiée, on peut encore remplacer G' par $G'_{SC} \simeq SU_{E/F}(n-2)$. Ce cas est similaire au précédent, l'entier i devenant 1.

Supposons que l'image par $\sigma \mapsto \omega_{G'}(\sigma)$ de $\Gamma_{K/E}$ soit $\hat{\Omega}$ tout entier. Alors $E_{G'}$ est l'extension biquadratique Q_E de E. L'homomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ est un isomorphisme de $\Gamma_{Q_E/F}$ sur $Aut(\hat{D}_a)$. Ce dernier groupe n'est pas commutatif. D'après **??**(2) et (3), on a $\delta_4(q-1) = 0$. Supposons cette condition vérifiée. On utilise les notations ρ', ρ_0, ρ'' de **??**(3) et on suppose que τ vérifie les conditions de cette assertion. L'élément ρ_0 est central dans $\Gamma_{Q_E/F}$ donc forcément $\rho_{0,G'} = \theta\theta'$. On a alors $\rho'_{G'} = \delta$ ou $\delta\theta\theta'$. On a $\tau^2 \in \Gamma_{Q_E}$ donc $\tau^2_{G'} = 1$. Puisque $\tau_{G'} \in \hat{\Omega}\theta$, on a forcément $\tau_{G'} = \theta$ ou θ'. Ces deux cas sont équivalents (conjugués par δ). On suppose $\tau_{G'} = \theta$. Par contre, la valeur de $\rho'_{G'}$ ne change pas par équivalence, on a donc deux données $\mathbf{G}'$ correspondant à ces deux valeurs de $\rho'_{G'}$. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m, \hat{\alpha}_{n-m}\}$ avec $m \in \{2, ..., n/2 - 1\}$. Le fixateur de $\hat{\alpha}_m$ dans $\Gamma_{Q_E/F}$ est le groupe $\{1, \tau, \rho_0, \tau\rho_0\}$, c'est-à-dire $\Gamma_{Q_E/E'}$, où E' est l'extension quadratique ramifiée de F différente de E (cf. **??**(3)). Notons K l'extension de E' telle que $\Gamma_{Q_E/K} = \{1, \tau\}$. L'extension K/E' est ramifiée (car l'extension non ramifiée est fixée par ρ_0 et non pas par τ). Puisque E'/F est ramifiée, le lemme **??** nous permet de remplacer G' par G'_{SC} qui est isomorphe à $Res_{E'/F}(Spin_{K/E'}(2m)) \times SU_{E'/F}(n - 2m)$. En utilisant (1) ci-dessous, **??** (1) et **??** (5) par récurrence, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $m = i^2$ avec $i \in \mathbb{N}$ et i impair et $n - 2m = j(j+1)/2$ avec $j \in \mathbb{N}$. Supposons ces conditions vérifiées. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. On a $Out(\mathbf{G}') = \{1, \theta\theta'\}$ et on voit que ce groupe agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Calculons $\xi_{\mathbf{G}'}$. L'élément s_{sc} est le même qu'en **??**(2) et on calcule $\tau_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = 1$, $\rho_0(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}$, $\rho'_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}'\hat{z}^{n/2}$ si $\rho_{G'} = \delta$, $\rho'_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}''\hat{z}^{n/2}$ si $\rho_{G'} = \delta\theta\theta'$. On voit que l'on obtient deux cocycles distincts dont la restriction à I_E est non triviale. Ces cocycles correspondent aux deux élément de Ξ_0. Donc, pour tout $\xi \in \Xi_0$, il y a une et une seule de nos données (c'est-à-dire une et une seule des deux actions possibles de $\rho'_{G'}$) telle que $\xi_{\mathbf{G}'} = \xi$. On a $(i, j, \xi) \in \mathcal{Y}$. On pose $\mathbf{G}'_{i,j,\xi} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Supposons maintenant $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. Le fixateur d'une de ces racines est Γ_K. Puisque K/F est totalement ramifiée, on peut encore remplacer G' par $G'_{SC} \simeq SU_{E/F}(n-2)$. Ce cas est similaire au précédent, l'entier i devenant 1.

On a associé à tout $y \in \mathcal{Y}$ une droite $FC^{\mathcal{E}}_y$ (avec deux constructions différentes selon la valeur de $\delta_4(q-1)$). On n'a pas traité la donnée principale $\mathbf{G}$.

On définit une bijection $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ comme en **??**. Elle se relève naturellement en une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. On pose $\mathcal{X}^{st} = \emptyset$. On peut alors achever la preuve de **??**(2), (3) et (4) comme en **??**. Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(1) $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$.

6.16 Forme intérieure du type D_n quasi-déployé, n pair, E/F ramifiée

On suppose que G^* est comme ci-dessus. Le groupe N est ici le groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin local de type $C - B_{n-1}$. On a $N \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On suppose que G est la forme intérieure de G^* paramétrée par l'élément non trivial de ce groupe, ou encore par le caractère non trivial de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F} = \{1, \hat{z}\}$.

On pose $\mathcal{X} = \emptyset$. L'ensemble $\underline{S}(G)$ est paramétré par l'ensemble des orbites de N agissant sur le diagramme de Dynkin local. Parce que n est pair, ces orbites ont deux éléments. D'après le lemme **??**, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ pour tout $s \in \underline{S}(G)$. Cela entraîne $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$, d'où la relation **??**(1).

En posant $\mathcal{Y} = \emptyset$, les assertions **??**(2) et (3) sont triviales.

6.17 Type D_n quasi-déployé, n impair, E/F ramifiée

On fixe une extension quadratique E/F ramifiée. On suppose que G est quasi-déployé de type D_n avec $n \geq 4$, n impair, et que Γ_F agit sur le diagramme $\mathcal{D}$ de G par l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ triviale sur Γ_E et telle que $\sigma_G = \theta$ pour $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_E$. Dans les tables de

Tits, le groupe est de type $C-B_{n-1}$. Tout élément de $\Gamma_F-\Gamma_E$ agit sur $Z(\hat{G}_{SC})$ par $\hat{x}\mapsto\hat{x}^{-1}$. Notons F', resp. F'', l'extension de degré 2, resp. 8, de F^{nr}. Remarquons que F' est la composée de E et de F^{nr}. Tout cocycle de W_F dans $Z(\hat{G}_{SC})$ se restreint en un homomorphisme de $\Gamma_{F'}$ dans ce groupe, dont le noyau contient forcément trivial $\Gamma_{F''}$. Fixons un générateur τ de $\Gamma_{F''/F^{nr}}$ et fixons un élément de Frobenius $\varphi\in\Gamma_{F''/F}$ dont l'action sur $\mathcal{D}$, donc aussi sur $Z(\hat{G}_{SC})$, soit triviale. Dans $\Gamma_{F''/F}$, on a l'égalité $\varphi\tau=\tau^q\varphi$. Un cocycle $u:W_F\to Z(\hat{G}_{SC})$ est déterminé par un couple $(u(\varphi),u(\tau))\in Z(\hat{G}_{SC})^2$, vérifiant la condition $u(\varphi)u(\tau)=u(\tau^q)\tau(u(\varphi))=u(\tau^q)u(\varphi)^{-1}$. Puisque u est un cocycle, on a $u(\tau^2)=u(\tau)\tau(u(\tau))=u(\tau)u(\tau)^{-1}=1$ et $u(\tau^3)=u(\tau)\tau(u(\tau^2))=u(\tau)$. Donc $u(\tau^q)=u(\tau)$ et la condition ci-dessus équivaut à $u(\varphi)^2=1$, c'est-à-dire $u(\varphi)\in\{1,\hat{z}\}$. Le cocycle est un cobord si et seulement s'il existe $\hat{x}\in Z(\hat{G}_{SC})$ tel que $u(\varphi)=\hat{x}\varphi(\hat{x})^{-1}=1$ et $u(\tau)=\hat{x}\tau(\hat{x})^{-1}=\hat{x}^2$. Autrement dit si et seulement si $u(\varphi)=1$ et $u(\tau)\in\{1,\hat{z}\}$. Alors, de l'homomorphisme $u\mapsto(u(\varphi),u(\tau))$ se déduit un isomorphisme

$$H^1(W_F,Z(\hat{G}_{SC}))\simeq\{1,\hat{z}\}\times Z(\hat{G}_{SC})/\{1,\hat{z}\}.$$

L'homomorphisme de Langlands identifie $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ au groupe de caractères $H^1(W_F,Z(\hat{G}_{SC}))^\vee$. On détermine le sous-groupe $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ et l'image de $SO_{E/F}(2n,F)$ dans $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ par les mêmes arguments qu'en **??**. Ces sous-groupes sont ici égaux. Ce sous-groupe unique est celui des caractères de $H^1(W_F,Z(\hat{G}_{SC}))$ qui sont triviaux sur la première composante ci-dessus. Il a deux éléments. Notons Ξ^+, resp. Ξ^-, l'ensemble des $\xi\in\Xi$ dont la restriction à ce sous-groupe est triviale, resp. non triviale.

On note $\mathbb{X}^+$ l'ensemble des couples $(k,h)\in\mathbb{N}^2$ tels que $k^2+h^2=2n$, k et h sont impairs et $k\geq h$. Si $\delta_\square(n)=0$, on note $\mathcal{X}^+$ l'ensemble des triplets (k,h,ξ) avec $(k,h)\in\mathbb{X}^+$ et $\xi\in\Xi^+$. Si $\delta_\square(n)=1$, il y a dans $\mathbb{X}^+$ un unique couple (k,h) avec $k=h$. On le note (k^{st},k^{st}). On note $\mathcal{X}^+$ la réunion de $\{(k^{st},k^{st})\}$ et de l'ensemble des triplets (k,h,ξ) avec $(k,h)\in\mathbb{X}^+$, $k>h$ et $\xi\in\Xi^+$. On note $\mathbb{X}^-$ l'ensemble des couples $(k,h)\in\mathbb{N}^2$ tels que $2n=k(k+1)/2+h(h+1)/2$, $k(k+1)/2$ et $h(h+1)/2$ sont impairs et $k\geq h$. Si $\delta_\triangle(n)=0$, on note $\mathcal{X}^-$ l'ensemble des triplets (k,h,ξ) avec $(k,h)\in\mathbb{X}^-$ et $\xi\in\Xi^-$. Si $\delta_\triangle(n)=1$, il y a dans $\mathbb{X}^-$ un unique couple (k,h) avec $k=h$. On le note (k_0,k_0). On note $\mathcal{X}^-$ la réunion de $\{(k_0,k_0)\}$ et de l'ensemble des triplets (k,h,ξ) avec $(k,h)\in\mathbb{X}^-$, $k>h$ et $\xi\in\Xi^-$. On pose $\mathcal{X}=\mathcal{X}^+\sqcup\mathcal{X}^-$ et $d_x=1$ pour tout $x\in\mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $a+b=n-1$ et $a\geq b$. Les fibres ont deux éléments, sauf celle au-dessus du couple $((n-1)/2,(n-1)/2)$ qui n'en a qu'un. L'action de $G_{AD}(F)$ préserve les fibres et permute les éléments de celles-ci. Pour un sommet s paramétré par (a,b), on a $G_s\simeq(Spin(2a+1)\times Spin(2b+1))/\{1,(z,z)\}$ si $b\neq0$, $G_s\simeq Spin(2a+1)$ si $b=0$. Supposons $b\neq0$ et $a\neq b$. On cherche les couples de fonctions $(f_{N^a,\epsilon^a},f_{N^b,\epsilon^b})$ telles que $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)$. On utilise **??**. Il y a un tel couple avec $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=1$ si et seulement si $2a+1=k^2$, $2b+1=h^2$ pour deux entiers k,h forcément impairs. Supposons ces conditions vérifiées. Il y a une unique fonction $f_{N^a,\epsilon^a}\times f_{N^b,\epsilon^b}$. Puisque $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=1$, elle est invariante par l'action naturelle du groupe $SO(2a+1,\mathbb{F}_q)\times SO(2b+1,\mathbb{F}_q)$ et cette action est aussi celle de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$. Conformément à **??**, pour tout $\xi\in\Xi^+$, la fonction détermine un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ se transformant par $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ selon le caractère ξ. On a $(k,h,\xi)\in\mathcal{X}^+$. On note $FC_{k,h,\xi}$ la droite portée par l'élément précédent. Il y a un couple de fonctions $(f_{N^a,\epsilon^a},f_{N^b,\epsilon^b})$ telles que $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=-1$ si et seulement si $2a+1=k(k+1)/2$, $2b+1=h(h+1)/2$ pour deux entiers k,h avec $k(k+1)/2$ et $h(h+1)/2$ impairs. Supposons ces conditions vérifiées. Il y a une unique fonction $f_{N^a,\epsilon^a}\times f_{N^b,\epsilon^b}$. Puisque $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=-1$, elle se transforme selon le caractère non trivial de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$. Conformément à **??**, pour tout $\xi\in\Xi^-$, la fonction détermine un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ se transformant par $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ selon le caractère ξ. On a $(k,h,\xi)\in\mathcal{X}^-$ et on note $FC_{k,h,\xi}$ la droite portée par l'élément précédent. Supposons maintenant $b=0$. On voit que le résultat est le même, l'entier h devenant 1 dans les deux cas possibles. Supposons enfin $a=b=(n-1)/2$. Le seul changement est que le sommet s est conservé par $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ tout entier, donc chacune de nos fonctions détermine un seul élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$. Si n est un carré, c'est-à-dire $n=(k^{st})^2$, on a une fonction $f_{N^a,\epsilon^a}\times f_{N^b,\epsilon^b}$ avec $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=1$. Elle détermine un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ qui se transforme selon un certain caractère de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ trivial sur $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$. On note $FC_{k^{st},k^{st}}$ la droite portée par cet élément (on a $(k^{st},k^{st})\in\mathcal{X}^+$). Si $\delta_\triangle(n)=1$, c'est-à-dire $n=k_0(k_0+1)/2$, on a une fonction $f_{N^a,\epsilon^a}\times f_{N^b,\epsilon^b}$ avec $\epsilon^a(z)=\epsilon^b(z)=-1$. Elle détermine un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ qui se transforme selon un certain caractère de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ non trivial sur $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$. On note FC_{k_0,k_0} la droite portée par cet élément (on a $(k_0,k_0)\in\mathcal{X}^-$). Cela démontre **??**(1).

On note $\mathbb{Y}^+$ l'ensemble des couples $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ tels que $i^2+j^2=n$ et $i>j$. Remarquons que i et j sont de parités distinctes. Si $\delta_\square(n)=0$, on note $\mathcal{Y}^+$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) avec $(i,j)\in\mathbb{Y}^+$ et $\xi\in\Xi^+$. Si $\delta_\square(n)=1$, il y a dans $\mathbb{Y}^+$ un unique couple (i,j) avec $j=0$, à savoir $(k^{st},0)$. On note $\mathcal{Y}^+$ la réunion de $\{(k^{st},0)\}$ et de l'ensemble des triplets (i,j,ξ) avec $(i,j)\in\mathbb{Y}^+$, $j\neq 0$ et $\xi\in\Xi^+$. On note $\mathbb{Y}^-$ l'ensemble des couples (i,j) avec $i,j\in\mathbb{N}$, $2i^2+j(j+1)/2=n$ et i est pair. Si $\delta_\triangle(n)=0$, on note $\mathcal{Y}^-$ l'ensemble des triplets (i,j,ξ) avec $(i,j)\in\mathbb{Y}^-$ et $\xi\in\Xi^-$. Si $\delta_\triangle(n)=1$, il y a un couple $(i,j)\in\mathbb{Y}^-$ tel que $i=0$, à savoir le couple $(0,k_0)$. On note $\mathcal{Y}^-$ la réunion de $\{(0,k_0)\}$ et de l'ensemble des triplets (i,j,ξ) avec $(i,j)\in\mathbb{Y}^-$, $i\neq 0$ et $\xi\in\Xi^-$.

Considérons un couple $(\sigma\mapsto\sigma_{G'},\mathcal{O})\in\mathcal{E}_{ell}(G)$ et une orbite $\mathcal{O}$. On a $\tau_{G'}\in\hat{\Omega}\theta$ et on voit que tout élément de cet ensemble est de carré 1. Donc $\tau_{G'}^2=1$.

Supposons $E_{G'}=E$. On voit qu'à équivalence près (conjugaison par $\delta\theta\in\hat{\Omega}$), on a $\tau_{G'}=\theta$ ou $\tau_{G'}=\delta$. Supposons d'abord $\tau_{G'}=\theta$. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0\}$ ou $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_1\}$ (ces deux cas sont équivalents, conjugués par $\theta\theta'\in\hat{\Omega}$), la donnée $\mathbf{G}'$ est la donnée principale $\mathbf{G}$ et, à ce point, on ne peut rien dire de l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Supposons $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m\}$, avec $m\in\{2,...,n-2\}$. Alors $G'_{SC}\simeq Spin_{dep}(2m)\times Spin_{E/F}(2n-2m)$. On utilise **??** (5), **??** (1), **??** (1) et (1) ci-dessous par récurrence. On a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $m=(i')^2$ et $n-m=(j')^2$ avec i' pair et j' impair. Supposons ces conditions vérifiées. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. Le groupe $Out(\mathbf{G}')$ est $\{1,\theta\theta'\}$, qui agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. On calcule

$$s_{sc}=\prod_{l=1,...,m}\check{\hat{\alpha}}_l((-1)^l).$$

On voit que $\tau_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1}=1$ donc $\xi_{\mathbf{G}'}=\mathbf{1}$. On note (i,j) l'unique couple (i',j') ou (j',i') tel que $i\geq j$. Remarquons que (i,j) détermine (i',j') puisque i' est pair tandis que j' est impair. Le triplet $(i,j,\mathbf{1})$ appartient à $\mathcal{Y}^+$. On pose $\mathbf{G}'_{i,j,\mathbf{1}}=\mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\mathbf{1}}=FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\mathbf{1}}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,1})}$. Supposons $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_{n-1},\hat{\alpha}_n\}$. Le fixateur de chacune de ces racines est Γ_E. Le lemme **??** permet de remplacer G' par G'_{SC}. Le résultat est le même que ci-dessus, l'entier j' devenant 1. Supposons maintenant que $\tau_{G'}=\delta$. Supposons $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m,\hat{\alpha}_{n-m}\}$ avec $m\in\{2,...,(n-1)/2\}$. De nouveau, on peut remplacer G' par $G'_{SC}\simeq Res_{E/F}(Spin_{dep}(2m))\times SU_{E/F}(n-2m)$. On utilise **??** (5), **??** (1) et **??** (5) par récurrence. On a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $m=i^2$ pour un entier i pair et $n-2m=j(j+1)/2$ pour un entier $j\in\mathbb{N}$. Supposons ces conditions vérifiées. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est une droite. Le groupe $Out(\mathbf{G}')$ est $\{1,\theta\theta'\}$, qui agit trivialement sur

$FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Calculons $\xi_{\mathbf{G}'}$. L'élément s_{sc} est le même qu'en **??**(2). On a $\theta(s_{sc}) = s_{sc}$ et $\delta(s_{sc})s_{sc}^{-1} = (\hat{z}')^n$. D'où $\tau_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = (\hat{z}')^n$ et $\sigma_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = 1$ pour $\sigma \in \Gamma_E$. Le cocycle ainsi défini est non trivial sur I_F et détermine un certain élément $\xi \in \Xi^-$. Le triplet (i,j,ξ) appartient à $\mathcal{Y}^-$. On pose $\mathbf{G}'_{i,j,\xi} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_n\}$ ou $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_{n-1}\}$. Ces deux cas sont équivalents (conjugués par $\theta\theta'$). Le résultat est le même que précédemment, le couple (i,j) devenant $(0,k_0)$. On pose simplement $\mathbf{G}'_{0,k_0} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{0,k_0} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{0,k_0}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{0,k_0})}$.

Supposons que $E_{G'}/E$ soit quadratique. Puisque $\tau_{G'}^2 = 1$, $E_{G'}$ est forcément l'extension biquadratique Q de F. On pose $\Gamma_{E_{G'}/E} = \{1,\rho\}$ et on suppose que τ est trivial sur l'extension quadratique non ramifiée E_0/F. L'image de $\Gamma_{E_{G'}/E}$ dans $\hat{\Omega}$ par l'homomorphisme $\omega_{G'}$ est $\{1, \theta\theta'\}$, c'est-à-dire $\rho_{G'} = \theta\theta'$. Comme précédemment, on peut avoir $\tau_{G'} = \theta$ ou $\tau_{G'} = \delta$. Supposons d'abord $\tau_{G'} = \theta$. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m\}$, avec $m \in \{2,...,n-2\}$. Alors $G'_{SC} \simeq Spin_{E_0/F}(2m) \times Spin_{E'/F}(2n-2m)$, où E' est l'extension quadratique ramifiée de F différente de E. On a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $m = (i')^2$ et $n - m = (j')^2$ avec i' pair et j' impair. Supposons ces conditions vérifiées. On note encore (i,j) l'unique couple (i',j') ou (j',i') tel que $i \geq j$. Le calcul se poursuit comme plus haut. La différence est dans le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$. On a cette fois $\tau_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = 1$ mais $\rho_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}$. Ce cocycle est non trivial mais trivial sur I_F. Il détermine l'élément non trivial ξ de Ξ^+. Le triplet (i,j,ξ) appartient à $\mathcal{Y}^+$. On pose $\mathbf{G}'_{i,j,\xi} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. On voit que ce cas est similaire au précédent, l'entier j' devenant 1. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1\}$. Alors le stabilisateur de $\hat{\alpha}_0$ est Γ_{E_0}. Puisque E_0/F est non ramifiée, ce cas est exclu par le lemme **??**. Supposons maintenant que $\tau_{G'} = \delta$. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_m, \hat{\alpha}_{n-m}\}$ avec $m \in \{2,...,(n-1)/2\}$. Le fixateur de chacune de ces racines est Γ_E et on peut remplacer G' par $G'_{SC} \simeq Res_{E/F}(Spin_{Q/E}(2m)) \times SU_{E/F}(n-2m)$. On a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \neq \{0\}$ si et seulement si $m = i^2$ pour un entier i pair et $n - m = j(j+1)/2$ pour un entier $j \in \mathbb{N}$. Supposons ces conditions vérifiées. Le calcul se poursuit comme ci-dessus, le changement portant sur le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$. On a $\tau_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = (\hat{z}')^n$ et $\rho_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1} = \hat{z}$. Le cocycle ainsi défini est non trivial sur I_F mais non cohomologue au cocycle obtenu plus haut. Il détermine un élément $\xi \in \Xi^-$ qui est l'autre élément que celui obtenu plus haut. Le triplet (i,j,ξ) appartient à $\mathcal{Y}^-$. On pose $\mathbf{G}'_{i,j,\xi} = \mathbf{G}'$ et $FC^{\mathcal{E}}_{i,j,\xi} = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{i,j,\xi}(F))^{Out(\mathbf{G}'_{i,j,\xi})}$. Supposons enfin $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n\}$. Le fixateur d'une de ces racines est Γ_Q. Puisque Q/F n'est pas totalement ramifiée, ce cas est exclu par le lemme **??**. Remarquons que, contrairement au cas $E_{G'} = E$, on n'a pas obtenu ici de donnée paramétrée par l'éventuel élément $(i,j) \in \mathbb{Y}^-$ tel que $i = 0$.

On a associé une droite $FC^{\mathcal{E}}_y$ à tout élément $y \in \mathcal{Y}$, sauf à l'élément $(k^{st}, 0)$ dans le cas où $\delta_\square(n) = 1$. On n'a pas traité le cas de la donnée principale $\mathbf{G}$.

On définit des bijections $\phi^\pm : \mathbb{X}^\pm \to \mathbb{Y}^\pm$ comme en **??**. Il s'en déduit des bijections $\varphi^\pm : \mathcal{X}^\pm \to \mathcal{Y}^\pm$ que l'on réunit en une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Si $\delta_\square(n) = 0$, on pose $\mathcal{X}^{st} = \emptyset$. Si $\delta_\square(n) = 1$, on pose $\mathcal{X}^{st} = \{(k^{st}, k^{st})\}$. On peut alors achever la preuve de **??**(2), (3) et (4) de la même façon qu'en **??**. En particulier, si $\delta_\square(n) = 1$, on pose $FC^{\mathcal{E}}_{k^{st},0} = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(1) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \delta_\square(n)$.

6.18 Forme intérieure du type D_n quasi-déployé, n impair, E/F ramifiée

On suppose que G^* est comme ci-dessus. Le groupe N est ici le groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin local de type $C-B_{n-1}$. On a $N \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On suppose que G est la forme intérieure de G^* paramétrée par l'élément non trivial de ce groupe, ou encore par le caractère non trivial de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F} = \{1, \hat{z}\}$.

Si $\delta_\Box(n) = 0$, on pose $\mathcal{X}^+ = \emptyset$. Si $\delta_\Box(n) = 1$, on écrit $n = (k^{st})^2$. On pose $\mathcal{X}^+ = \{(k^{st}, k^{st})\}$. Si $\delta_\triangle(n) = 0$, on pose $\mathcal{X}^- = \emptyset$. Si $\delta_\triangle(n) = 1$, on écrit $n = k_0(k_0+1)/2$ et on pose $\mathcal{X}^- = \{(k_0, k_0)\}$. On pose $\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ \sqcup \mathcal{X}^-$ et $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ est paramétré par l'ensemble des orbites de N agissant sur le diagramme de Dynkin local. Pour un sommet s paramétré par une orbite à deux éléments, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après le lemme **??**. Parce que n est impair, il y a un unique sommet s paramétré par la racine centrale dans le diagramme. Pour celui-ci, on a $G_s \simeq (Spin(n) \times Spin(n))/\{1, (z, z)\}$ sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ avec une action galoisienne tordue par l'action algébrique de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ qui est triviale sur $\Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}}$ et telle qu'un élément de $\Gamma_{\mathbb{F}_q} - \Gamma_{\mathbb{F}_{q^2}}$ échange les deux copies de $Spin(n)$. Il y a une fonction $f_{N,\epsilon}$ avec $\epsilon(z) = 1$ si et seulement si $\delta_\Box(n) = 1$ et une fonction $f_{N,\epsilon}$ avec $\epsilon(z) = -1$ si et seulement si $\delta_\triangle(n) = 1$. Quand elles existent, ces fonctions donnent naissance à des éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$. On note $FC_{k^{st},k^{st}}$, resp. FC_{k_0,k_0}, la droite portée par la première, resp. seconde, fonction. Comme dans le paragraphe précédent, ces fonctions se transforment selon le caractère trivial de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ pour la première, par le caractère non trivial pour la seconde. On obtient ainsi **??**(1).

Si $\delta_\Box(n) = 0$, on pose $\mathcal{Y}^+ = \emptyset$. Si $\delta_\Box(n) = 1$, on pose $\mathcal{Y}^+ = \{(k^{st}, 0)\}$. Si $\delta_\triangle(n) = 0$, on pose $\mathcal{Y}^- = \emptyset$. Si $\delta_\triangle(n) = 1$, on pose $\mathcal{Y}^- = \{(0, k_0)\}$. On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^+ \sqcup \mathcal{Y}^-$.

La description des données endoscopiques $\mathbf{G}'$ est la même que dans le paragraphe précédent. Parce que le groupe G est paramétré par le caractère non trivial de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}$, on voit que, quand le groupe $Out(\mathbf{G}')$ contient $\theta\theta'$, cet automorphisme agit maintenant par multiplication par -1 sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$. Ces données disparaissent donc. Il reste au plus deux données dont le groupe d'automorphismes extérieurs ne contient pas $\theta\theta'$. Leurs groupes d'automorphismes extérieurs est d'ailleurs trivial. C'est la donnée principale $\mathbf{G}$ et la donnée que l'on avait paramétrée par $(0, k_0)$ (qui existe si et seulement si $\delta_\triangle(n) = 1$). Pour la donnée $\mathbf{G}$, d'après le résultat du paragraphe précédent, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}^*(F))$ est non nul si et seulement si $\delta_\Box(n) = 1$. Dans ce cas, cet espace est une droite. On note $FC^{\mathcal{E}}_{k^{st},0}$ cette droite et on pose $\mathbf{G}'_{k^{st},0} = \mathbf{G}$. Pour l'autre donnée, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est non nul si et seulement si $\delta_\triangle(n) = 1$. Dans ce cas, cet espace est une droite fixée par $Out(\mathbf{G}')$ que l'on note $FC^{\mathcal{E}}_{0,k_0}$ et on pose $\mathbf{G}'_{0,k_0} = \mathbf{G}'$. Remarquons que, comme dans le paragraphe précédent, $\xi_{\mathbf{G}'_{0,k_0}}$ est non trivial sur $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$. On a obtenu **??**(2).

On note $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ la bijection évidente. L'assertion **??**(3) est immédiate puisque les droites FC_x pour $x \in \mathcal{X}$ se distinguent par le caractère de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$ par lequel ce groupe agit sur elles et que les données endoscopiques $\mathbf{G}'_y$ pour $y \in \mathcal{Y}$ se distinguent elles-aussi selon la restriction à ce groupe du caractère $\xi_{\mathbf{G}'_y}$.

7 Descriptions explicites pour les groupes classiques

7.1 Type B_n déployé

On suppose que G est déployé de type B_n avec $n \geq 2$. On suppose aussi que $\delta_{2\triangle}(n) = 1$. L'ensemble $\mathcal{X}^{st}$ de **??** a un élément que l'on note (k,h). Rappelons que $k,h \in \mathbb{N}$, $2n+1 = k^2+h^2$, k est pair, h est impair et $|k-h| = 1$.

Fixons un espace V sur F de dimension $2n+1$, muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,2n+1}$ et de la forme quadratique q définie par $q(v) = x_{n+1}^2 + \sum_{i=1,...,2n+1, i\neq n+1} x_i x_{2n+2-i}$ pour tout $v = \sum_{i=1,...,2n+1} x_i e_i$. Le groupe G_{AD} s'identifie au groupe spécial orthogonal de cet espace quadratique et G à son revêtement simplement connexe.

Notons $R_{\geq 0} \subset V$ le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par $e_1,...,e_{2n+1-k^2/2}, \varpi_F e_{2n+2-k^2/2},...,\varpi_F e_{2n+1}$. On pose $R^*_{\geq 0} = \{v \in V; \forall v' \in R_{\geq 0},\ q(v,v') \in \mathfrak{o}_F\}$. Alors $R^*_{\geq 0}$ est le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par $\varpi_F^{-1}e_1,...,\varpi_F^{-1}e_{k^2/2}, e_{1+k^2/2},...,e_{2n+1}$. Posons $I^h = \{k^2/2+1,...,2n+1-k^2/2\}$, $I^k_+ = \{1,...,k^2/2\}$, $I^k_- = \{2n+2-k^2/2,...,2n+1\}$ et $I^k = I^k_+ \cup I^k_-$. On pose $\underline{V}^h = R_{\geq 0}/\mathfrak{p}_F R^*_{\geq 0}$, $\underline{V}^k = R^*_{\geq 0}/R_{\geq 0}$. Pour $i \in I^h$, resp. $i \in I^k_+$, $i \in I^k_-$, notons $\underline{e}_i$ la réduction dans $\underline{V}^h$, resp. $\underline{V}^k$, de e_i, resp. $\varpi_F^{-1}e_i$, e_i. L'espace $\underline{V}^h$ sur $\mathbb{F}_q$ est muni de la base $(\underline{e}_i)_{i\in I^h}$ et de la réduction q^h de la forme q. L'espace $\underline{V}^k$ sur $\mathbb{F}_q$ est muni de la base $(\underline{e}_i)_{i\in I^k}$ et de la réduction q^k de la forme $\varpi_F q$. Pour $\underline{v} = \sum_{i\in I^h} \underline{x}_i \underline{e}_i \in \underline{V}^h$, on a $q^h(\underline{v}) = \underline{x}_{n+1}^2 + \sum_{i\in I^h, i\neq n+1} \underline{x}_i \underline{x}_{2n+2-i}$. Pour $\underline{v} = \sum_{i\in I^k} \underline{x}_i \underline{e}_i \in \underline{V}^k$, on a $q^k(\underline{v}) = \sum_{i\in I^k} \underline{x}_i \underline{x}_{2n+2-i}$. Pour $a = h$ ou k, on note $\underline{G}^a$ le groupe spinoriel associé à $(\underline{V}^a, q^a)$. On construit comme en **??** ou **??** une fonction $f_{N_\square,\epsilon_\square}$ sur $\underline{\mathfrak{g}}^a(\mathbb{F}_q)$, que l'on note simplement f^a.

Notons $\mathfrak{k}$, resp. $\mathfrak{k}^\perp$, le sous-ensemble des $X \in \mathfrak{g}(F)$ tels que $X(R_{\geq 0}) \subset R_{\geq 0}$, resp. $X(R^*_{\geq 0}) \subset R_{\geq 0}$ et $X(R_{\geq 0}) \subset \varpi_F R^*_{\geq 0}$. On a l'égalité

$$\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^\perp = \underline{\mathfrak{g}}^k(\mathbb{F}_q) \oplus \underline{\mathfrak{g}}^h(\mathbb{F}_q).$$

On relève la fonction $f^k \otimes f^h$ en une fonction sur $\mathfrak{k}$ et on l'étend par 0 hors de $\mathfrak{k}$. On obtient une fonction $f_{k,h} \in FC(\mathfrak{g}(F))$ qui engendre la droite $FC_{k,h}$ définie en **??**.

Comme en **??**, on fixe un ensemble de représentants $\mathcal{C} \subset \mathfrak{o}_F^\times$ du quotient $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$. Posons $l = \frac{k+h-1}{2}$. Soit $m \in \{1,...,l\}$. On fixe un élément $\alpha_m \in \bar{F}^\times$ tel que $\alpha_m^{4m} = \varpi_F$. On considère $F(\alpha_m)$ comme un espace sur F et, pour $\gamma \in \mathcal{C}$, on le munit de la forme quadratique $q_{m,\gamma}(v,v') = (4m)^{-1}\gamma trace_{F(\alpha_m)/F}(\bar{v}v')$, où $v \mapsto \bar{v}$ est la conjugaison galoisienne relative à l'extension $F(\alpha_m)/F(\alpha_m^2)$. Soit $\underline{\gamma} = (\gamma_m)_{m=1,...,l} \in \mathcal{C}^l$. On pose $\gamma_0 = (-1)^l$ si $k = h-1$, $\gamma_0 = \varpi_F^{-1}(-1)^l$ si $k = h+1$. On pose $V_{\underline{\gamma}} = F \oplus (\oplus_{m=1,...,l} F(\alpha_m))$. On munit le premier facteur F de la forme quadratique $x \mapsto \gamma_0 x^2$ et les $F(\alpha_m)$ des formes q_{m,γ_m}. On munit $V_{\underline{\gamma}}$ de la somme orthogonale de ces formes quadratiques. On vérifie que cet espace quadratique est isomorphe à (V,q) si et seulement si $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^m(V)$, où $\mathcal{C}^m(V)$ est l'ensemble des $\underline{\gamma} = (\gamma_m)_{m=1,...,l} \in \mathcal{C}^l$ tels que $\prod_{m=1,...,l} \gamma_l = (-1)^{(h-1)/2}$. On suppose cette condition vérifiée et on fixe un isomorphisme d'espaces quadratiques $\iota_{\underline{\gamma}} : V_{\underline{\gamma}} \to V$. On note $X'_{\underline{\gamma}}$ l'endomorphisme de $V_{\underline{\gamma}}$ qui agit par multiplication par α_m sur chaque $F(\alpha_m)$ et par 0 sur F. On note $X_{\underline{\gamma}}$ l'endomorphisme de V qui s'en déduit par $\iota_{\underline{\gamma}}$. On vérifie que $X_{\underline{\gamma}} \in \mathfrak{g}_{ell}(F)$. Remarquons que

(1) il existe une valeur propre $\alpha \in \bar{F}^\times$ de $X_{\underline{\gamma}}$ (considéré comme un élément de $End_F(V)$) telle que $val_F(\alpha) = \frac{1}{2(k+h-1)}$.

Il est bien connu que les éléments $X_{\underline{\gamma}}$ sont tous stablement conjugués, plus précisément que la famille $(X_{\underline{\gamma}})_{\underline{\gamma}\in\mathcal{C}^l(V)}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G_{AD}(F)$ dans leur classe de conjugaison stable. Ce n'est pas un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ mais cela n'importe pas pour calculer les intégrales orbitales stables : on a

$$S^G(X_{\underline{\gamma}},f)=c\sum_{\underline{\gamma}\in\mathcal{C}^l(V)}I^{G_{AD}}(X_{\underline{\gamma}'},f)$$

pour tout $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, avec une constante $c>0$ provenant de la comparaison entre les mesures sur $G(F)$ et sur $G_{AD}(F)$. Un calcul similaire à celui de **??** prouve que

Lemme. *On a $S^G(X_{\underline{\gamma}},f_{k,h})\neq 0$ pour tout $\underline{\gamma}\in\mathcal{C}^l(V)$.*

7.2 Type C_n déployé

On suppose que G est déployé de type C_n avec $n\geq 2$. On suppose aussi que $\delta_{2\triangle}(n)=1$. L'ensemble $\mathcal{X}^{st}$ de **??** a un élément que l'on note (k,k). Rappelons que $k\in\mathbb{N}$ et $n=k(k+1)$. On fixe un élément non nul $f_{k,k}$ de la droite $FC_{k,k}$. On peut en donner une description analogue à celle de **??**, nous la laissons au lecteur.

On fixe un espace V sur F de dimension $2n$, munie d'une forme symplectique q. Le groupe G s'identifie au groupe symplectique de (V,q).

Soit $m\in\{1,...,k\}$. On fixe un élément $\alpha_m\in\bar{F}^\times$ tel que $\alpha_m^{4m}=\varpi_F$. On considère $F(\alpha_m)$ comme un espace sur F et, pour $\gamma\in\mathcal{C}$, on le munit de la forme symplectique $q_{m,\gamma}(v,v')=(4m)^{-1}\gamma trace_{F(\alpha_m)/F}(\alpha_m\bar{v}v')$, où $v\mapsto\bar{v}$ est la conjugaison galoisienne relative à l'extension $F(\alpha_m)/F(\alpha_m^2)$. Soit $\underline{\gamma}=(\gamma_m)_{m=1,...,k}\in\mathcal{C}^k$. On pose $V_{\underline{\gamma}}=\oplus_{m=1,...,k}F(\alpha_m)$. On munit les $F(\alpha_m)$ des formes q_{m,γ_m}. On munit $V_{\underline{\gamma}}$ de la somme orthogonale de ces formes symplectiques. Cet espace symplectique est évidemment isomorphe à (V,q). On fixe un isomorphisme d'espaces symplectiques $\iota_{\underline{\gamma}}:V_{\underline{\gamma}}\to V$. On note $X'_{\underline{\gamma}}$ l'endomorphisme de $V_{\underline{\gamma}}$ qui agit par multiplication par α_m sur chaque $F(\alpha_m)$. On note $X_{\underline{\gamma}}$ l'endomorphisme de V qui s'en déduit par $\iota_{\underline{\gamma}}$. On vérifie que $X_{\underline{\gamma}}\in\mathfrak{g}_{ell}(F)$. Remarquons que

(1) il existe une valeur propre $\alpha\in\bar{F}^\times$ de $X_{\underline{\gamma}}$ (considéré comme un élément de $End_F(V)$) telle que $val_F(\alpha)=\frac{1}{4k}$.

Les éléments $X_{\underline{\gamma}}$ sont tous stablement conjugués, plus précisément la famille $(X_{\underline{\gamma}})_{\underline{\gamma}\in\mathcal{C}^l(V)}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans leur classe de conjugaison stable. Un calcul similaire à celui de **??** prouve que

Lemme. *On a $S^G(X_{\underline{\gamma}},f_{k,k})\neq 0$ pour tout $\underline{\gamma}\in\mathcal{C}^k$.*

7.3 Type D_n

On suppose que G est quasi-déployé de type D_n. Dans les différents paragraphes concernant les groupes quasi-déployés de type D_n, on a défini un ensemble $\mathcal{X}^{st}$ et on suppose qu'il est non vide. On a alors $\delta_\square(n)=1$, c'est-à-dire $n=k^2$ pour un entier $k\in\mathbb{N}$ et l'ensemble $\mathcal{X}^{st}$ est égal à (k,k). De plus, on est forcément dans l'une des situations suivantes :

(A) n est pair et G est déployé ;

(B) n est pair, G n'est pas déployé et l'est sur l'extension quadratique E_0/F non ramifiée ;

(C) n est impair, G n'est pas déployé et l'est sur une extension quadratique E/F ramifiée.

Dans le cas (A), on pose $\lambda = 1$. Dans les cas (B), resp. (C), on fixe un élément $\lambda \in F^\times$ tel que $E_0 = F(\sqrt{\lambda})$ et $val_F(\lambda) = 0$, resp. $E = F(\sqrt{\lambda})$ et $val_F(\lambda) = -1$. On note $\underline{\lambda}$ la réduction dans $\mathbb{F}_q$ de λ dans les cas (A) ou (B), de $\varpi_F\lambda$ dans le cas (C).

On fixe un espace vectoriel V sur F de dimension $2n$, muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,2n}$. On définit une forme quadratique q sur V par l'égalité suivante, pour $v = \sum_{i=1,...,2n} x_iv_i$:

dans les cas (A) ou (B), $q(v) = x_n^2 - \lambda x_{n+1}^2 + \sum_{i=1,...,2n, i\neq n,n+1} x_ix_{2n+1-i}$;

dans le cas (C), $q(v) = x_n^2 - \lambda x_{2n}^2 + \sum_{i=1,...,2n-1, i\neq n} x_ix_{2n-i}$.

Posons $l^- = [n/2]$, $l^+ = [(n+1)/2]$. Notons $R_{\geq 0} \subset V$ le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par $e_1, ..., e_{2n-l^+}, \varpi_F e_{2n+1-l^+}, ..., \varpi_F e_{2n}$. On pose $R_{\geq 0}^* = \{v \in V; \forall v' \in R_{\geq 0},\ q(v,v') \in \mathfrak{o}_F\}$. Alors $R_{\geq 0}^*$ est le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par $\varpi_F^{-1}e_1, ..., \varpi_F^{-1}e_{l^-}, e_{1+l^-}, ..., e_{2n}$. Posons $I' = \{l^- + 1, ..., 2n - l^+\}$, $I''_+ = \{1, ..., l^-\}$, $I''_- = \{2n+1-l^+, ..., 2n\}$ et $I'' = I''_+ \cup I''_-$. On pose $\underline{V}' = R_{\geq 0}/\mathfrak{p}_F R_{\geq 0}^*$, $\underline{V}'' = R_{\geq 0}^*/R_{\geq 0}$. Pour $i \in I'$, resp. $i \in I''_+$, $i \in I''_-$, notons $\underline{e}_i$ la réduction dans $\underline{V}'$, resp. $\underline{V}''$, de e_i, resp. $\varpi_F^{-1}e_i$, e_i. L'espace $\underline{V}'$ sur $\mathbb{F}_q$ est muni de la base $(\underline{e}_i)_{i\in I'}$ et de la réduction q' de la forme q. L'espace $\underline{V}''$ sur $\mathbb{F}_q$ est muni de la base $(\underline{e}_i)_{i\in I''}$ et de la réduction q'' de la forme $\varpi_F q$. Pour $\underline{v} = \sum_{i\in I'} \underline{x}_i\underline{e}_i \in \underline{V}'$, on a

dans les cas (A) ou (B), $q'(\underline{v}) = \underline{x}_n^2 - \underline{\lambda}\underline{x}_{n+1}^2 + \sum_{i\in I', i\neq n,n+1} \underline{x}_i\underline{x}_{2n+1-i}$;

dans le cas (C), $q'(\underline{v}) = \underline{x}_n^2 + \sum_{i\in I', i\neq n} \underline{x}_i\underline{x}_{2n-i}$.

Pour $\underline{v} = \sum_{i\in I''} \underline{x}_i\underline{e}_i \in \underline{V}''$, on a

dans les cas (A) ou (B), $q''(\underline{v}) = \sum_{i\in I''} \underline{x}_i\underline{x}_{2n+1-i}$;

dans le cas (C), $q''(\underline{v}) = -\underline{\lambda}\underline{x}_{2n}^2 + \sum_{i\in I'', i\neq 2n} \underline{x}_i\underline{x}_{2n-i}$.

Pour a l'un des symboles $'$ ou $''$, on note $\underline{G}^a$ le groupe spinoriel associé à $(\underline{V}^a, q^a)$. On construit selon les cas comme en ?? ou ?? ou ?? une fonction $f_{N_\square,\epsilon_\square}$ sur $\underline{\mathfrak{g}}^a(\mathbb{F}_q)$, que l'on note simplement f^a.

Notons $\mathfrak{k}$, resp. $\mathfrak{k}^\perp$, le sous-ensemble des $X \in \mathfrak{g}(F)$ tels que $X(R_{\geq 0}) \subset R_{\geq 0}$, resp. $X(R_{\geq 0}^*) \subset R_{\geq 0}$ et $X(R_{\geq 0}) \subset \varpi_F R_{\geq 0}^*$. On a l'égalité

$$\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^\perp = \underline{\mathfrak{g}}''(\mathbb{F}_q) \oplus \underline{\mathfrak{g}}'(\mathbb{F}_q).$$

On relève la fonction $f'' \otimes f'$ en une fonction sur $\mathfrak{k}$ et on l'étend par 0 hors de $\mathfrak{k}$. On obtient une fonction $f_{k,k} \in FC(\mathfrak{g}(F))$ qui engendre la droite $FC_{k,k}$ définie selon les cas en ??, ??, ??.

On fixe une famille $\underline{\beta} = (\beta_m)_{m=1,...,k}$ d'éléments de $\mathfrak{o}_F^\times$ telle que la réduction dans $\mathbb{F}_q^\times$ de $\prod_{m=1,...,k} \beta_m$ appartient à $\underline{\lambda}\mathbb{F}_q^{\times,2}$.

Soit $m \in \{1, ..., k\}$. On fixe un élément un élément $\alpha_m \in \bar{F}^\times$ tel que $\alpha_m^{4m-2} = \varpi_F\beta_m$. On considère $F(\alpha_m)$ comme un espace sur F et, pour $\gamma \in \mathcal{C}$, on le munit de la forme quadratique $q_{m,\gamma}(v,v') = (4m)^{-1}\gamma trace_{F(\alpha_m)/F}(\bar{v}v')$, où $v \mapsto \bar{v}$ est la conjugaison galoisienne relative à l'extension $F(\alpha_m)/F(\alpha_m^2)$.

Soit $\underline{\gamma} = (\gamma_m)_{m=1,...,k} \in \mathcal{C}^k$. On pose $V_{\underline{\gamma}} = \oplus_{m=1,...,l} F(\alpha_m)$. On munit les $F(\alpha_m)$ des formes q_{m,γ_m}. On munit $V_{\underline{\gamma}}$ de la somme orthogonale de ces formes quadratiques. On vérifie que cet espace quadratique est isomorphe à (V, q) si et seulement si $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^k(V)$, où $\mathcal{C}^k(V)$ est l'ensemble des $\underline{\gamma} = (\gamma_m)_{m=1,...,k} \in \mathcal{C}^k$ vérifiant l'égalité suivante dans $\mathcal{C} \simeq \mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$:

dans les cas (A) ou (B), $\prod_{m=1,...,k} \gamma_m = \lambda(-1)^{k/2}$;

dans le cas (C), $\prod_{m=1,...,k} \gamma_m = (-1)^{(k-1)/2}$.

On suppose $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^k(V)$ et on fixe un isomorphisme d'espaces quadratiques $\iota_{\underline{\gamma}} : V_{\underline{\gamma}} \to V$. On note $X'_{\underline{\gamma}}$ l'endomorphisme de $V_{\underline{\gamma}}$ qui agit par multiplication par α_m sur chaque $F(\alpha_m)$ et par 0 sur F. On note $X_{\underline{\gamma}}$ l'endomorphisme de V qui s'en déduit par $\iota_{\underline{\gamma}}$. On vérifie que $X_{\underline{\gamma}} \in \mathfrak{g}_{ell}(F)$. Remarquons que

(1) il existe une valeur propre $\alpha \in \bar{F}^\times$ de $X_{\underline{\gamma}}$ (considéré comme un élément de $End_F(V)$) telle que $val_F(\alpha) = \frac{1}{4k-2}$.

Les éléments $X_{\underline{\gamma}}$ ne sont pas forcément stablement conjugués. Ils sont inclus dans une seule classe de conjugaison par le groupe orthogonal tout entier $O(2n, \bar{F})$. Mais cette classe se coupe en deux classes de conjugaison par $SO(2n, \bar{F})$. L'action d'un élément de $O(2n, F)$ de déterminant -1 échange ces deux classes. Quitte à remplacer chaque isomorphisme $\iota_{\underline{\gamma}}$ par l'action d'un tel élément, on peut donc supposer que les éléments $X_{\underline{\gamma}}$ sont tous stablement conjugués. Alors la famille $(X_{\underline{\gamma}})_{\underline{\gamma}\in\mathcal{C}^k(V)}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G_{AD}(F)$ dans leur classe de conjugaison stable. Ce n'est pas un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ mais, comme en **??**, cela n'importe pas pour calculer les intégrales orbitales stables. Un calcul similaire à celui de **??** prouve alors que

Lemme. *On a* $S^G(X_{\underline{\gamma}}, f_{k,k}) \neq 0$ *pour tout* $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^k(V)$.

7.4 Les éléments Y_y

Ici, le groupe G est l'un des groupes traités dans les paragraphes **??** à **??**. Dans plusieurs de ces paragraphes, on a affirmé l'existence d'éléments Y_y pour $y \in \mathcal{Y}$.

Remarque. Il y a une variante en **??**, où les éléments ci-dessus sont remplacés par des $Y_{\tilde{y}}$ pour $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Y}}$. Cette variante ne crée pour ce paragraphe qu'une différence de notations . Pour simplifier la rédaction, nous rédigeons la preuve en négligeant cette différence.

Selon les cas, les ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étaient divisés en deux sous-ensembles se correspondant par la bijection φ. Dans ce cas on fixe de tels sous-ensembles $\mathcal{X}^\star$ et $\mathcal{Y}^\star$. Dans le cas où on n'a pas divisé $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ en de tels sous-ensembles, on pose $\mathcal{X}^\star = \mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}^\star = \mathcal{Y}$ pour unifier la notation.

A $y \in \mathcal{Y}^\star$ est associée une donnée $\mathbf{G}'_y$. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'_y(F))$ est une droite. Les propriétés exigées de Y_y sont les suivantes :

(1) c'est un élément G-régulier de $\mathfrak{g}'_{y,ell}(F)$;

(2) pour un élément non nul $f' \in FC^{st}(\mathfrak{g}'_y(F))$, $S^{G'_y}(Y_y, f') \neq 0$;

(3) soit $x \in \mathcal{X}^\star$, $f \in FC_x$ et $X \in \mathfrak{g}(F)$ un élément dont la classe de conjugaison stable correspond à celle de Y_y ; supposons $I^G(X, f) \neq 0$; alors $x \geq \varphi^{-1}(y)$.

En examinant nos constructions, on voit que $G'_{y,SC}$ est toujours produit d'au plus 2 groupes quasi-déployés de la forme suivante :

(a) $SU_{E/F}(m)$ pour une extension quadratique E/F ramifiée ;

(b) $Spin(2m+1)$, $Sp(2m)$, $Spin_{dep}(2m)$ avec m pair, $Spin_{E_0/F}$ avec m pair, où E_0/F est l'extension quadratique non ramifiée, $Spin_{E/F}$ avec m impair, pour une extension quadratique E/F ramifiée ;

(c) $Res_{K/F}(H)$ où K/F est une extension quadratique de F et H est du type (b) ci-dessus au changement près du corps de base F qui est remplacé par K.

On raffine de façon évidente les cas (b) et (c) en cas (b, B_m), (b, C_m), (b, D_m), (c, B_m), (c, C_m), (c, D_m).

Notons G'' un tel groupe. L'ensemble $\mathcal{X}''^{st}$ associé à ce groupe est réduit à un élément que nous notons (k'', h''). Fixons un élément non nul de l'espace correspondant $FC_{k'',h''}$. Posons

$$d'' = \begin{cases} 2k'' + 2h'' - 1, & \text{dans le cas (a)}, \\ 2k'' + 2h'' - 2, & \text{dans les cas } (\mathrm{b}, \mathrm{B_m}), (\mathrm{c}, \mathrm{B_m}), (\mathrm{b}, \mathrm{D_m}) \text{ et } (\mathrm{c}, \mathrm{D_m}), \\ 2k'' + 2h'', & \text{dans les cas } (\mathrm{b}, \mathrm{C_m}) \text{ et } (\mathrm{c}, \mathrm{C_m}). \end{cases}$$

Dans les paragraphes **??**, **??**, **??**, **??**, on a défini des élément notés alors $X_{\underline{\gamma}}$ (dans le cas (C), il faut changer de corps de base). Fixons un tel élément que l'on note X''. On a prouvé

(4) $S^{G''}(X'', f_{k'',h''}) \neq 0$.

On peut considérer X'' comme un endomorphisme d'un espace vectoriel sur une extension L de F : $L = E$ dans le cas (a), $L = F$ dans le cas (b), $L = K$ dans le cas (c). On a prouvé qu'il existait une valeur propre $\alpha'' \in \bar{F}^\times$ de X'' telle que

(5) $val_L(\alpha) = \frac{1}{d''}$.

Quand $G'_{y,SC}$ est réduit à un seul groupe G'', on pose $Y_y = X''$ et $f'_y = f_{k'',h''}$. Quand $G'_{y,SC} = G''_1 \times G''_2$, on affecte les notations ci-dessus d'indices 1 et 2 et on pose $f'_y = f_{k''_1,h''_1} \otimes f_{k''_2,h''_2}$. L'élément $X''_1 \oplus X''_2$ n'est pas forcément G-régulier. Mais, comme on l'a expliqué en **??** et utilisé en **??**, on peut remplacer X''_1 et X''_2 par des éléments assez voisins de sorte que les propriétés (4) et (5) restent vérifiées et que $X''_1 \oplus X''_2$ soit G-régulier. On pose alors $Y_y = X''_1 \oplus X''_2$. On a

(6) $S^{G'_y}(Y_y, f'_y) \neq 0$.

Les dimensions des groupes G'' intervenant sont inférieures ou égales à celui de G. Si G n'est pas quasi-déployé ou si ces dimensions sont strictement inférieures à celui de G, notre hypothèse de récurrence **??**(4) appliquée à ces groupes nous dit que f'_y appartient à l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'_y(F))$, qui est une droite. Alors (6) est équivalent à (2). On doit aussi traiter le cas où G est quasi-déployé et la dimension d'un des groupes G'' est égal à celui de G. Cette dernière condition équivaut à $\mathbf{G}'_y = \mathbf{G}$. Comme en **??**, on remarque que, lorsqu'on utilise les éléments Y_y, on n'a pas encore déterminé l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ mais on a déjà prouvé par l'habituel argument de dimensions qu'il était de dimension au plus 1. En fait, l'hypothèse qu'il existe un élément $y \in \mathcal{Y}$ tel que $\mathbf{G}'_y = \mathbf{G}$ implique que cette dimension est 1. Alors, le même argument qu'en **??** permet de déduire (2) de (6).

Remarquons que, dans chacun de ces paragraphes, G est un groupe vraiment classique et a donc une représentation naturelle dans un espace vectoriel sur F. On peut parler des valeurs propres d'un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$. L'élément $\varphi^{-1}(y)$ se projette dans un ensemble $\mathbb{X}^\star$ qui est toujours un ensemble de couples $(k, h) \in \mathbb{N}^2$. Notons (k_y, h_y) le couple associé à $\varphi^{-1}(y)$. En examinant tous les cas un à un, on voit que la condition (5) entraîne

(7) soit $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ un élément dont la classe de conjugaison stable correspond à celle de Y_y ; alors il existe une valeur propre $\alpha \in \bar{F}^\times$ de X telle que $val_F(\alpha) = \frac{1}{2k_y+2h_y-e(G)}$, où $e(G) \in \mathbb{N}$ est défini par

$$e(G) = \begin{cases} 2, & \mathrm{si\,G\,est\,de\,type\,B_n\,ou\,D_n}, \\ 0, & \mathrm{si\,G\,est\,de\,type\,C_n}. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathcal{X}^{st}$, notons (k, h) l'élément de $\mathbb{X}^\star$ qui lui est associé. On peut construire une base de FC_x par l'algèbre linéaire comme en **??**. Nous passons cette construction fastidieuse mais nous utilisons la conséquence, analogue au lemme de ce paragraphe **??** :

(8) soit $f \in FC_x$ et X un élément du support de f ; soit $\alpha \in \bar{F}$ une valeur propre de X ; alors on a $val_F(\alpha) \geq \frac{1}{2k+2h-e(G)}$.

Soient alors x, f et X comme en (3). L'hypothèse $I^G(X, f) \neq 0$ et la relation (7) impliquent qu'il existe un élément X' conjugué à X dans le support de f. La réunion des relations (7) et (8) entraîne que $k+h \geq k_y+h_y$. Or cette relation équivaut à $x \geq \varphi^{-1}(y)$. Cela démontre (3).

7.5 Action d'automorphismes

Notons G l'un des groupes notés G'' dans le paragraphe précédent. Ils sont parfois munis d'automorphismes algébriques qui préservent la droite $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ donc y agissent par multiplication par un scalaire. On a utilisé dans certains cas la valeur de ce scalaire, il nous faut justifier ce calcul. Remarquons qu'à chaque fois que l'on a utilisé la valeur de ce scalaire, on pouvait appliquer au groupe G nos hypothèses de récurrence, donc on connaissait l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. On a déjà fait le calcul en **??** pour les groupes de type (a) de **??** que l'on peut donc exclure. En examinant les paragraphes **??** à **??**, on voit que les groupes G qui nous importent sont des types suivants, où E/F est une extension quadratique et les groupes dans les parenthèses sont définis sur E :

(a) $Res_{E/F}(Spin(2n+1))$ avec $\delta_{2\triangle}(n)=1$;

(b) $Res_{E/F}(Spin_{dep}(2n))$ avec n pair et $\delta_{\square}(n)=1$;

(c) $Res_{E/F}(Spin_{Q/E}(2n))$ avec $\delta_{\square}(n)=1$, où on suppose E/F ramifiée si n est pair et E/F non ramifiée si n est impair (on rappelle que Q/F est l'extension biquadratique de F) ;

(d) $Res_{E/F}(Spin_{K/E}(2n)$ avec n impair et $\delta_{\square}(n)=1$, où on suppose $\delta_4(q-1)=1$, K/F est une extension galoisienne cyclique de degré 4 totalement ramifiée et contenant E.

Un seul des automorphismes de ces groupes nous intéresse, que l'on note Θ. Dans les cas (a), (b) et (c), le groupe entre parenthèses est obtenu par restriction des scalaires de F à E d'un groupe défini sur F : le groupe est évident dans les cas (a) et (b) ; c'est $Spin_{E'/F}(2n)$ dans le cas (c), où E' est une extension quadratique de F différente de E, que l'on suppose non ramifiée si n est pair. Alors le groupe G est naturellement muni d'une action algébrique du groupe $\Gamma_{E/F}$ et l'automorphisme Θ est l'action de l'élément non trivial de $\Gamma_{E/F}$. Le cas (d) est plus compliqué. Notons G_0 le groupe $Spin_{dep}(2n)$ défini sur F, muni d'un épinglage défini sur F. Notons $\sigma\mapsto\sigma_{G_0}$ l'action galoisienne naturelle déployée qui fixe l'épinglage et θ l'automorphisme extérieur non trivial qui le conserve. Fixons un générateur ρ de $\Gamma_{K/F}$. Le groupe G se décrit de la façon suivante. On a $G(\bar{F})=G_0(\bar{F})\times G_0(\bar{F})$ et il est muni de l'action galoisienne $\sigma\mapsto\sigma_G$ telle que

pour $\sigma\in\Gamma_K$, $\sigma_G(g_1,g_2)=(\sigma_{G_0}(g_1),\sigma_{G_0}(g_2))$;

$\rho_G(g_1,g_2)=(\rho_{G_0}(g_2),\rho_{G_0}\theta(g_1))$.

L'application $(g_1,g_2)\mapsto g_1$ identifie $G(F)$ à $Spin_{K/E}(2n,E)$. L'automorphisme Θ est défini par $\Theta(g_1,g_2)=(g_2,\theta(g_1))$. Il est d'ordre 4.

Posons $n=i(i+1)$ dans le cas (a) et $n=i^2$ dans les cas (b), (c), (d), avec $i\in\mathbb{N}$. Définissons

$$\xi=\begin{cases} 1, & \text{dans les cas (a), (b), (c), si } E/F \text{ est non ramifiée,}\\ sgn(-1)^{[(i+1)/2]}, & \text{dans le cas (a) si } E/F \text{ est ramifiée,}\\ sgn(-1)^{i/2}, & \text{dans les cas (b) et (c) si } E/F \text{ est ramifiée,}\\ 1, & \text{dans le cas (d).}\end{cases}$$

Lemme. *L'action de Θ sur $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est la multiplication par ξ.*

Preuve. On pose $\Gamma_{E/F}=\{1,\tau\}$. Traitons d'abord les cas (a), (b) et (c). Concrètement, réalisons le groupe $G(F)=Spin(2n+1,E)$, resp. $G(F)=Spin_{dep}(2n,E)$, $G(F)=Spin_{Q/E}(2n,E)$, comme le groupe d'automorphismes d'un espace (V,q) comme en **??**, resp. **??** cas (A) ou (B), cet espace étant maintenant un E-espace vectoriel. On munit V d'une base comme dans ces paragraphes. Dans le cas (c), on suppose que le terme λ

intervenant en ?? cas (B) appartient à $F^\times$. Alors les éléments de $G(F)$ s'identifient à des matrices à coefficients dans E. On vérifie que, pour $g \in G(F)$, $\Theta(g)$ est la matrice obtenue en appliquant τ aux coefficients de g.

Considérons le cas (a) et reprenons les définitions de ??. On choisit pour uniformisante ϖ_E l'élement ϖ_F si E/F est non ramifiée, la racine carrée d'un élément de $\varpi_F \mathfrak{o}_F^\times$ si E/F est ramifiée. Pour $i,j \in I^k$, posons $a_{i,j} = 0$ si $i,j \in I^k_+$ ou $i,j \in I^k_-$, $a_{i,j} = 1$ si $i \in I^k_+$ et $j \in I^k_-$ et $a_{i,j} = -1$ si $i \in I^k_-$ et $j \in I^k_+$. Pour $X = (x_{i,j})_{i,j=1,...,2n+1} \in \mathfrak{g}(F)$, notons X^h la matrice extraite $(x_{i,j})_{i,j\in I^h}$ et X^k la matrice $(\varpi_E^{a_{i,j}} x_{i,j})_{i,j\in I^k}$. Si $X \in \mathfrak{k}$, on vérifie que ces matrices sont à coefficients dans $\mathfrak{o}_E$ et que les images dans $\mathfrak{g}^h(\mathbb{F}_q) = \mathfrak{spin}(h^2, \mathbb{F}_{q_E})$, resp.$\mathfrak{g}^k(\mathbb{F}_q) = \mathfrak{spin}(k^2, \mathbb{F}_{q_E})$, sont les réductions naturelles de X^h, resp. X^k. Cette description montre que Θ conserve $\mathfrak{k}$. De plus, à cause des termes $\varpi_E^{a_{i,j}}$ et parce que $\tau(\varpi_E) = \varpi_E$ si E/F n'est pas ramifiée, $\tau(\varpi_E) = -\varpi_E$ si E/F est ramifiée, on voit que Θ et se réduit en les actions suivantes :

si E/F est non ramifiée, l'action "matricielle" du Frobenius sur $\mathfrak{spin}(h^2, \mathbb{F}_{q^2})$ et $\mathfrak{spin}(k^2, \mathbb{F}_{q^2})$;

si E/F est ramifiée, l'action triviale sur $\mathfrak{spin}(h^2, \mathbb{F}_q)$ et la conjugaison dans $\mathfrak{spin}(k^2, \mathbb{F}_q)$ par une similitude de rapport -1 (celle qui agit par -1 sur les $\underline{e}_i$ pour $i \in I^k_+$ et par 1 sur les $\underline{e}_i$ pour $i \in I^k_-$).

Dans le cas où E/F est non ramifiée, l'action de Frobenius conserve l'orbite nilpotente (pour le groupe spécial orthogonal) supportant une fonction $f_{N_\square,\epsilon_\square}$. Une orbite nilpotente conservée par l'action de Frobenius contient un point fixe par cette action. Le support de la fonction $f_{N_\square,\epsilon_\square}$ contient donc un point fixe par l'action de Frobenius, cette action fixe donc cette fonction. On en déduit que $\Theta(f_{k,h}) = f_{k,h}$. C'est l'assertion de l'énoncé puisque ξ vaut 1 sous nos hypothèses et que $f_{h,k}$ engendre la droite $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Dans le cas où E/F est ramifiée, considérons un élément nilpotent N dans le support de la fonction $f_{N_\square,\epsilon_\square}$ de $\mathfrak{spin}(k^2, \mathbb{F}_q)$. Son orbite par le groupe spécial orthogonal est paramétrée par la partition $(2k-1, 2k-3, ..., 1)$ et par une collection $(\gamma_j)_{j=2k-1,2k-3,...,1} \in (\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,2})^k$. Son image N' par la similitude de rapport -1 est paramétrée par la même partition et par la collection $(-\gamma_j)_{j=2k-1,2k-3,...,1}$. En se référant à ??, on voit que $f_{k,h}(N') = sgn(-1)^{k/2} f_{k,h}(N)$. On vérifie que $i = inf(h,k)$ et $k/2 = [(i+1)/2]$. D'où aussi $f_{k,h}(N') = sgn(-1)^{[(i+1)/2]} f_{k,h}(N)$, ce qui est l'assertion de l'énoncé.

Un calcul analogue vaut pour les cas (b) et (c).

Traitons maintenant le cas (d). Concrètement, réalisons $G(F) = Spin_{K/E}(2n, E)$ comme le groupe d'automorphismes d'un espace (V,q) comme en ?? cas (C), cet espace étant maintenant un E-espace vectoriel. On munit V d'une base comme dans ce paragraphe en supposant que λ vérifie $\tau(\lambda) = -\lambda$. Alors les éléments de $G(F)$ s'identifient à des matrices à coefficients dans E. Pour une telle matrice g, notons $\tau_{mat}(g)$ la matrice obtenue en appliquant τ aux coefficients de g. Fixons une racine primitive ζ d'ordre 4 de l'unité dans $F^\times$ (qui existe grâce à l'hypothèse $\delta_4(q-1) = 1$). Notons t la matrice qui multiplie l'élément de base e_{2n} par ζ et fixe les autres éléments de base. On vérifie que, pour $g \in G(F)$, $\Theta(g) = t^{-1}\tau_{mat}(g)t$ (plus exactement, on peut choisir les diverses identifications de sorte qu'il en soit ainsi).

Reprenons les notations de ?? cas (C). On voit comme dans le cas (a) ci-dessus que Θ conserve $\mathfrak{k}$ et se réduit en l'identité de $\underline{\mathfrak{g}}'(\mathbb{F}_q)$ (parce que, K/F étant totalement ramifiée, l'action galoisienne de ρ se réduit en l'identité de $\mathbb{F}_q$) et en la conjugaison dans $\underline{\mathfrak{g}}''(F)$ par une similitude de rapport -1. Il s'agit de la similitude qui multiplie $\underline{e}_i$ par -1 pour $i \in I''_+$, par la réduction $\bar{\zeta}$ de ζ dans $\mathbb{F}_q$ pour $i = 2n$ et par 1 pour $i \in I''_- - \{2n\}$. Or cette similitude est le produit d'un élément du groupe spécial orthogonal de $\underline{V}''$ et de la multiplication par $\bar{\zeta}$, dont l'action par conjugaison est triviale. Puisque la fonction f'' est invariante par conjugaison par le groupe spécial orthogonal, elle est aussi invariante par notre similitude. D'où $\Theta(f_{k,k}) = f_{k,k}$, ce qui est l'assertion de l'énoncé. $\square$

8 Type D_4 trialitaire et types exceptionnels

8.1 Un lemme immobilier

Pour tout $x \in Imm(G_{AD})$ et tout réel r, Moy et Prasad ont défini le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{k}_{x,r} \subset \mathfrak{g}(F)$. On pose $\mathfrak{k}_{x,r+} = \cup_{s>r}\mathfrak{k}_{x,s}$. En particulier $\mathfrak{k}_{x,0} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{k}_{x,0+} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$, où $\mathcal{F}$ est la facette à laquelle appartient x. On pose $\mathfrak{g}(F)_r = \cup_{x\in Imm(G_{AD})}\mathfrak{k}_{x,r}$. Pour $X \in \mathfrak{g}(F)$, on appelle profondeur de X et on note $r(X)$ la borne supérieure de l'ensemble des $r \in \mathbb{R}$ tels que $X \in \mathfrak{g}(F)_r$. Si X est nilpotent, cette profondeur est $+\infty$. Sinon, cette profondeur est finie et est atteinte, c'est-à-dire que $X \in \mathfrak{g}(F)_{r(X)}$. Indiquons une définition équivalente de $r(X)$. Décomposons X en somme $X_s + X_n$ de ses parties semi-simple et nilpotente et fixons un sous-tore maximal T de G tel que $X_s \in \mathfrak{t}(F)$. Introduisons l'ensemble Σ^T des racines de T dans G (sur la clôture algébrique $\bar{F}$). Alors

(1) $r(X) = inf_{\alpha\in\Sigma^T} val_F(\alpha(X_s))$.

On utilisera la propriété suivante. Soit K une extension galoisienne finie de F modérément ramifiée. Notons e l'indice de ramification de K/F. On a déjà dit que $Imm_F(G_{AD})$ s'identifiait au sous-ensemble des points fixes de l'action de $\Gamma_{K/F}$ dans $Imm_K(G_{AD})$. A $x \in Imm_F(G_{AD})$ sont associés des réseaux $\mathfrak{k}_{x,r,F} \subset \mathfrak{g}(F)$ et $\mathfrak{k}_{x,r,K} \subset \mathfrak{g}(K)$. On a alors

(2) $\mathfrak{k}_{x,r,F} = \mathfrak{g}(F) \cap \mathfrak{k}_{x,er,K}$.

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme. *Supposons G déployé, soit T un sous-tore maximal déployé de G et soit $X \in \mathfrak{t}(F)$. Supposons $val_F(\beta(X)) = 0$ pour toute racine β de T dans G. Alors le sous-ensemble des $x \in Imm(G_{AD})$ tels que $X \in \mathfrak{k}_{x,0}$ est égal à l'appartement associé à T.*

Preuve. On note $A(T)$ cet appartement. Puisque G est supposé semi-simple et puisque p est grand, $\mathfrak{g}$ coïncide avec $\mathfrak{g}_{AD}$ et, pour tout $x \in Imm(G_{AD})$, $\mathfrak{k}_{x,0}$ coïncide avec $\mathfrak{k}_{AD,x,0}$. On ne perd rien à remplacer G par G_{AD} et à supposer, le temps de cette démonstration, que G est adjoint. Le tore T étant déployé, a une structure naturelle sur $\mathfrak{o}_F$ et l'hypothèse entraîne que $X \in \mathfrak{t}(\mathfrak{o}_F)$. Or cet ensemble est inclus par construction dans $\mathfrak{k}_{x,0}$ pour tout $x \in A(T)$. Inversement, soit $x \in Imm(G_{AD})$ tel que $X \in \mathfrak{k}_{x,0}$. Fixons un point $y \in A(T)$. Comme on vient de le voir, on a aussi $X \in \mathfrak{k}_{y,0}$. Traçons la géodésique $[x, y]$ reliant x à y. Il est bien connu que $\mathfrak{k}_{x,0}\cap\mathfrak{k}_{y,0} \subset \mathfrak{k}_{z,0}$ pour tout $z \in [x, y]$. En particulier, $X \in \mathfrak{k}_{z,0}$. Notons u le point le plus proche de x dans l'ensemble fermé $[x, y]\cap A(T)$. Si $u = x$, on a $x \in A(T)$ comme on le voulait. Supposons $u \neq x$. Notons $\mathcal{F} \in Fac(G)$ la facette contenant u. Il existe une facette $\mathcal{F}' \in Fac(G)$ telle que tout point de $[x, u[$ suffisamment proche de u appartienne à $\mathcal{F}'$. La facette $\mathcal{F}$ est contenue dans l'adhérence $\bar{\mathcal{F}}'$ de $\mathcal{F}'$. Comme on l'a dit ci-dessus, on a $X \in \mathfrak{k}_{\mathcal{F}} \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}'}$. Puisque $u \in A(T)$, le tore T se réduit en un sous-tore maximal $T_{\mathcal{F}}$ de $G_{\mathcal{F}}$. L'élément $X \in \mathfrak{k}_{\mathcal{F},0}$ se réduit en un élément $X_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{t}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Pour toute racine $\beta_{\mathcal{F}}$ de $T_{\mathcal{F}}$ dans $G_{\mathcal{F}}$, il existe une racine β de T dans G de sorte que $\beta_{\mathcal{F}}(X_{\mathcal{F}})$ soit la réduction dans $\mathbb{F}_q$ de $\beta(X) \in \mathfrak{o}_F$. L'hypothèse entraîne donc que $X_{\mathcal{F}}$ est régulier. Puisque $\mathcal{F} \subset \bar{\mathcal{F}}'$, il existe un sous-groupe parabolique $P_{\mathcal{F}'} \subset G_{\mathcal{F}}$ de sorte que l'image de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}'} \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ soit égale à $\mathfrak{p}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$ et on sait que $\mathcal{F}' \subset A(T)$ si et seulement si $P_{\mathcal{F}'}$ contient $T_{\mathcal{F}}$. Puisque $X \in \mathfrak{k}_{\mathcal{F}} \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}'}$, on a $X_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{p}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$. Puisque $X_{\mathcal{F}}$ est régulier, cela entraîne que $P_{\mathcal{F}'}$ contient $T_{\mathcal{F}}$. Donc $\mathcal{F}' \subset A(T)$ mais cela contredit la définition de u. Cette contradiction achève la preuve. $\square$

8.2 Profondeur des éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$

En **??**, on a introduit l'appartement $\mathcal{A}^{nr}$ de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ et l'alcôve C^{nr} et on a décrit ces ensembles. Il y a une relation affine

$$(1) \qquad \sum_{\alpha\in\Delta_a^{nr}} d(\alpha)\alpha^{aff} = 1,$$

cf. **??**(2). Fixons un sommet s de C^{nr} fixé par Γ_F^{nr} donc correspondant à une racine $\alpha_s \in \Delta_a^{nr}$ également fixée par ce groupe. Les coordonnées de s sont $\alpha^{aff}(s) = 0$ pour $\alpha \in \Delta_a^{nr} - \{\alpha_s\}$ et $\alpha_s^{aff}(s) = \frac{1}{d(\alpha_s)}$.

Le groupe G_s sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ a un système de racines dont une base s'identifie à $\Delta_a^{nr} - \{\alpha_s\}$. Considérons une fonction $f \in fc(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. On a introduit en **??** une fonction $\tilde{f}$ à support dans le radical nilpotent $\mathfrak{u}_P(\mathbb{F}_q)$ de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique P de G_s. On peut supposer et on suppose que P est standard. Comme on l'a dit en **??**, on peut identifier ces deux fonctions à des fonctions sur $\mathfrak{g}(F)$, à support dans $\mathfrak{k}_s$. En poussant ces fonctions dans $I(\mathfrak{g}(F))$, on a alors l'égalité

$$f = |G_s(\mathbb{F}_q)/P(\mathbb{F}_q)|\tilde{f}.$$

Le support de la fonction $\tilde{f}$ est contenu dans l'image réciproque de $\mathfrak{u}_P(\mathbb{F}_q)$ dans $\mathfrak{k}_s$. Notons $\mathfrak{k}_s[\mathfrak{u}_P]$ cette image réciproque. Le sous-groupe P est standard donc associé à un sous-ensemble $\Delta(U_P) \subset \Delta_a^{nr} - \{\alpha_s\}$. C'est-à-dire que, pour $\beta \in \Delta_a^{nr} - \{\alpha_s\}$, un élément de base E_β de l'espace radiciel dans $\mathfrak{g}_s$ associé à β appartient à $\mathfrak{u}_P$ si et seulement si $\beta \in \Delta(U_P)$. Cet ensemble $\Delta(U_P)$ est invariant par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ sur Δ_a^{nr}. Posons

$$r = \frac{1}{\sum_{\alpha\in\Delta(U_P)\cup\{\alpha_s\}} d(\alpha)}.$$

Introduisons le point $x \in \mathcal{A}^{nr}$ tel que $\alpha^{aff}(x) = 0$ pour $\alpha \in \Delta_a^{nr} - (\Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\})$ et $\alpha^{aff}(x) = r$ pour $\alpha \in \Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\}$. Ce point appartient à l'adhérence $\bar{C}^{nr}$ de C^{nr}. Il est invariant par l'action galoisienne de Γ_F^{nr} sur $\mathcal{A}^{nr}$ et appartient donc à $Imm_F(G_{AD})$.

Lemme. *(i) On a l'égalité* $\mathfrak{k}_s[\mathfrak{u}_P] = \mathfrak{k}_{x,r}$.

(ii) Soient $y \in Imm_F(G_{AD})$ *et* $v \in \mathbb{R}$. *Supposons* $\mathfrak{k}_s[\mathfrak{u}_P] \subset \mathfrak{k}_{y,v}$. *Alors* $v \leq r$. *Si* $v = r$, *on a* $y = x$.

Preuve. La première étape est d'étendre le corps de base F en F^{nr}. Le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{k}_s[\mathfrak{u}_P]$ a un analogue sur F^{nr}, qui est un $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-réseau $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P]$. Il est stable par l'action naturelle de Γ_F^{nr} sur $\mathfrak{g}(F^{nr})$ et $\mathfrak{k}_s[\mathfrak{u}_P]$ est son sous-ensemble des points fixes. De même, pour $y \in Imm_F(G_{AD})$ et $v \in \mathbb{R}$, le réseau $\mathfrak{k}_{y,v}$ a un analogue sur F^{nr}, qui est un $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-réseau $\mathfrak{k}_{y,v,F^{nr}}$. Il est stable par l'action naturelle de Γ_F^{nr} sur $\mathfrak{g}(F^{nr})$ et $\mathfrak{k}_{y,v}$ est son sous-ensemble des points fixes. La propriété générale suivante est bien connue. Soit V un espace de dimension finie sur F. Posons $V^{nr} = V \otimes_F F^{nr}$. Le groupe Γ_F^{nr} agit naturellement sur cet espace. Soit R un sous-$\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-réseau de V^{nr}. Supposons R stable par l'action de Γ_F^{nr}, notons $R^{\Gamma_F^{nr}}$ son ensemble de points fixes. Alors $R^{\Gamma_F^{nr}}$ est un sous-$\mathfrak{o}_F$-réseau de V et R est le sous-$\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-module de V^{nr} engendré par $R^{\Gamma_F^{nr}}$. En utilisant cette propriété, on voit que l'égalité

$\mathfrak{k}_s[\mathfrak{u}_P] = \mathfrak{k}_{y,v}$, resp. l'inclusion $\mathfrak{k}_s[\mathfrak{u}_P] \subset \mathfrak{k}_{y,v}$, est équivalente à l'égalité $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P] = \mathfrak{k}_{y,v,F^{nr}}$, resp. l'inclusion $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P] \subset \mathfrak{k}_{y,v,F^{nr}}$. Alors le lemme résulte des assertions plus fortes :

(2) on a l'égalité $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P] = \mathfrak{k}_{x,r,F^{nr}}$;

(3) soient $y \in Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ et $v \in \mathbb{R}$; supposons $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P] \subset \mathfrak{k}_{y,v,F^{nr}}$; alors $v \leq r$; si $v = r$, on a $y = x$.

Puisque le corps de base est maintenant F^{nr}, on peut supposer G quasi-déployé et reprendre les définitions de **??** et **??**. Il convient de distinguer deux cas selon que G est déployé ou non sur F^{nr}. Nous ne traiterons que le second cas, le premier étant similaire et plus simple. On note E la plus petite extension de F^{nr} sur laquelle G est déployé. On suppose que $I_F/\Gamma_E = \Gamma_{E/F^{nr}} \simeq \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ pour un entier $e \geq 2$. On fixe un élément $\rho \in I_F$ d'image 1 dans ce groupe cyclique. Cet élément agit sur le diagramme de Dynkin par un automorphisme θ. On en déduit un automorphisme de G que l'on note encore θ, qui préserve notre paire de Borel épinglée. Il est d'ordre e. On a complété l'épinglage en une famille de Chevalley $(E_\beta)_{\beta\in\Sigma}$ de sorte que $\mathfrak{k}_{s^{nr},F^{nr}}$ soit le sous-ensemble des points fixes par I_F dans le $\mathfrak{o}_{\bar{F}}$-réseau engendré par cette base et par $X_*(T) \subset \mathfrak{t}$. D'après [?] 1.3, on peut supposer que $E_{\theta(\beta)} = \theta(E_\beta)$ pour tout $\beta \in \Sigma$ tel que β^{res} soit de type I ou II et $E_\beta = -\theta(E_\beta)$ pour tout $\beta \in \Sigma$ tel que β^{res} soit de type III. L'ensemble Σ^{nr} des restrictions à $X_*(T)^{I_F}$ des éléments de Σ s'identifie à l'ensemble des orbites de l'action de θ dans Σ. On a identifié l'appartement $\mathcal{A}^{nr}$ associé à T^{nr} dans $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ à $X_*(T)^{I_F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ de sorte que s^{nr} s'identifie à 0. Soit $v \in \mathbb{R}$. On pose $\mathfrak{t}(F^{nr})_v = \{X \in \mathfrak{t}(F^{nr}); \forall \beta \in \Sigma, val_F(\beta(X)) \geq v\}$. Pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$, notons $\mathfrak{u}(\alpha)_v$ l'ensemble des $X = \sum_{\beta\in\Sigma,\beta^{res}=\alpha} \lambda_\beta E_\beta$ avec des $\lambda_\beta \in E$, tels que $\lambda_{\theta(\beta)} E_{\theta(\beta)} = \rho(\lambda_\beta)\theta(E_\beta)$ et $val_F(\lambda_\beta) \geq v$ pour tout $\beta \in \Sigma$ tel que $\beta^{res} = \alpha$.

Remarque. L'ensemble Γ_α défini en **??** est celui des $v \in \mathbb{R}$ tels que $\mathfrak{u}(\alpha)_v \neq \mathfrak{u}(\alpha)_{v+\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$. Cet ensemble Γ_α est l'image réciproque dans $\mathbb{R}$ d'une unique classe dans $\mathbb{R}/\frac{1}{e(\alpha)}\mathbb{Z}$. Cette classe est celle de 0 si α est de type I ou II, de $\frac{1}{2}$ si α est de type III. On a $\Gamma_\alpha \subset \frac{1}{e}\mathbb{Z}$ et $\Gamma_\alpha = -\Gamma_\alpha = \Gamma_{-\alpha}$.

Soient $y \in \mathcal{A}^{nr}$ et $v \in \mathbb{R}$. Alors, par définition,

(4) le réseau $\mathfrak{k}_{y,v,F^{nr}}$ est la somme de $\mathfrak{t}(F^{nr})_v$ et des $\mathfrak{u}(\alpha)_{-\alpha(y)+v}$ sur les $\alpha \in \Sigma^{res}$.

Du tore T^{nr} se déduit un sous-tore maximal T_s de G_s. Notons $\Sigma^\star(G_s)$ le sous-ensemble des racines affines $\gamma \in \Sigma^{aff}$ telles que $\gamma(s) = 0$. C'est l'ensemble des $\alpha[-\alpha(s)]$ quand α parcourt le sous-ensemble $\Sigma^{nr}(G_s)$ des $\alpha \in \Sigma^{nr}$ tels que $\alpha(s) \in \Gamma_\alpha$. L'ensemble $\Sigma^{nr}(G_s)$ est le système de racines de G_s relatif à T_s et $\Delta_a^{nr} - \{\alpha_s\}$ en est une base. On note $\alpha \mapsto \alpha^\star = \alpha[-\alpha(s)]$ la bijection de $\Sigma^{nr}(G_s)$ sur $\Sigma^\star(G_s)$. Pour $\alpha \in \Delta_a^{nr} - \{\alpha_s\}$, on a $\alpha^\star = \alpha^{aff}$. L'espace $\mathfrak{g}_s(\bar{\mathbb{F}}_q)$ s'identifie à

$$(5) \qquad \mathfrak{t}(F^{nr})_0/\mathfrak{t}(F^{nr})_{\frac{1}{e}} \oplus \oplus_{\alpha\in\Sigma^{nr}(G_s)} \mathfrak{u}(\alpha)_{-\alpha(s)}/\mathfrak{u}(\alpha)_{-\alpha(s)+\frac{1}{e(\alpha)}}.$$

On note $\Sigma^{nr}(U_P)$, resp. $\Sigma^{nr}(\bar{P})$, le sous-ensemble des $\alpha \in \Sigma^{nr}(G_s)$ qui interviennent, resp. n'interviennent pas, dans le radical nilpotent $\mathfrak{u}_P$ de P. Pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$, notons b_α le plus petit élément de Γ_α tel que $\alpha(s)+b_\alpha \geq 0$ si $\alpha \in \Sigma^{nr}(U_P)$, $\alpha(s)+b_\alpha > 0$ si $\alpha \in \Sigma^{nr}(\bar{P})$ ou $\alpha \notin \Sigma^{nr}(G_s)$. Remarquons que $b_\alpha = -\alpha(s)$ si $\alpha \in \Sigma^{nr}(U_P)$ et $b_\alpha = -\alpha(s) + \frac{1}{e(\alpha)}$ si $\alpha \in \Sigma^{nr}(\bar{P})$. Il résulte de (5) que

(6) le réseau $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P]$ est la somme de $\mathfrak{t}(F^{nr})_{\frac{1}{e}}$ et des $u(\alpha)_{b_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Sigma^{nr}$.

En comparant (4) et (6), on voit que, pour prouver (2), il suffit de prouver les inégalités

(7) $0 < r \leq \frac{1}{e}$;

(8) pour tout $\alpha \in \Sigma^{nr}$, $b_\alpha - \frac{1}{e(\alpha)} < -\alpha(x) + r \leq b_\alpha$.

Montrons que

(9) e divise $d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta_a^{nr}$.

Par définition, $d(\alpha_0) = e$. Pour $\alpha \in \Delta^{nr}$, $d(\alpha) = e'(\alpha)d(\check{\alpha})$. Le terme $e'(\alpha)$ est divisible par e sauf si $e(\alpha) = 1$. Pour $\alpha \in \Delta^{nr}$, $\check{\alpha}$ appartient à $\check{\Sigma}_{nm}^{nr}$ et, si $e(\alpha) = 1$, $\check{\alpha}$ est une coracine courte de ce système de coracines. En inspectant tous les systèmes de racines possibles, on voit qu'alors $d(\check{\alpha})$ est divisible par e. Cela prouve (9).

On en déduit l'assertion suivante, qui est plus forte que (7) :

(10) il existe un entier $c \geq 2$ tel que $r = \frac{1}{ce}$.

D'après (9) et la définition de r, cela résulte du fait que l'ensemble $\Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\}$ a au moins 2 éléments. Sinon, $\Delta(U_P)$ serait vide et on aurait $P = G_s$. La fonction f serait portée par l'orbite nilpotente $\{0\}$, mais ce n'est jamais le cas.

Pour démontrer (8), on a besoin de quelques préliminaires. On note M la composante de Levi standard de P, $\Sigma^{nr}(M) \subset \Sigma^{nr}(G_s)$ son ensemble de racines et on pose $\Delta(M) = \Delta_a^{nr} - (\Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\})$. L'ensemble $\Delta(M)$ est une base de $\Sigma^{nr}(M)$. On pose $\Sigma^\star(M) = \{\alpha^\star; \alpha \in \Sigma^{nr}(M)\}$. Montrons que

(11) l'ensemble des racines affines $\gamma \in \Sigma^{aff}$ telles que $\gamma(x) = 0$ est égal à $\Sigma^\star(M)$.

Pour $\alpha \in \Delta(M)$, on a par définition $\alpha^{aff}(s) = \alpha^{aff}(x) = 0$, d'où $\alpha(s) = \alpha(x)$. Donc cette égalité vaut pour tout $\alpha \in \Sigma^{nr}(M)$. Puisque $\alpha^\star = \alpha[-\alpha(s)]$, on a donc $\alpha^\star(x) = 0$ pour tout $\alpha^\star \in \Sigma^\star(M)$. Pour démontrer la réciproque, on remarque tout d'abord que les deux ensembles de racines affines concernés sont stables par multiplication par -1. Soit $\alpha \in \Sigma^{nr}$ et $b \in \Gamma_\alpha$ tels que $\alpha(x) + b = 0$. Supposons d'abord que α soit indivisible, c'est-à-dire de type I ou II. D'après la remarque précédente, on peut supposer $\alpha > 0$ pour l'ordre défini par Δ^{nr}. Ecrivons α dans cette base :

$$\alpha = \sum_{\alpha' \in \Delta^{nr}} m(\alpha')\alpha'.$$

On identifie chaque racine α'' intervenant ci-dessus à $e'(\alpha'')^{-1}\check{\alpha}''$. Alors

$$\check{\alpha} = \sum_{\alpha' \in \Delta^{nr}} m(\check{\alpha}')\check{\alpha}',$$

où $m(\check{\alpha}') = e'(\alpha)e'(\alpha')^{-1}m(\alpha')$. On se rappelle que $-\check{\alpha}_{00}$ est la plus grande coracine dans $\check{\Sigma}_{nm}^{nr}$ et que l'on a

$$-\check{\alpha}_{00} = \sum_{\alpha' \in \Delta^{nr}} d(\check{\alpha}')\check{\alpha}'.$$

Il en résulte que $m(\check{\alpha}') \leq d(\check{\alpha}')$ pour tout $\alpha' \in \Delta^{nr}$, ou encore $m(\alpha') \leq e'(\alpha)^{-1}e'(\alpha')d(\check{\alpha}') = e'(\alpha)^{-1}d(\alpha')$. Par définition de x, on a

$$(12) \qquad \alpha(x) = \sum_{\alpha' \in \Delta^{nr} \cap (\Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\})} rm(\alpha').$$

Les inégalités précédentes entraînent

$$0 \leq \alpha(x) \leq e'(\alpha)^{-1}rD,$$

où

$$D = \sum_{\alpha' \in \Delta^{nr} \cap (\Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\})} d(\alpha').$$

Par définition de r, on a $rD \leq 1$. D'où $0 \leq \alpha(x) \leq e'(\alpha)^{-1}$. Par hypothèse, $\alpha(x) = -b \in \Gamma_\alpha$ et $\Gamma_\alpha = \frac{1}{e(\alpha)}\mathbb{Z}$ puisqu'on a supposé α indivisible. On a aussi $e'(\alpha) = e(\alpha)$ si α est de type I et $e'(\alpha) = 2e(\alpha)$ si α est de type II. Ces relations impliquent que, ou bien $\alpha(x) = 0$, ou bien α est de type I et $\alpha(x) = e(\alpha)^{-1}$.

Supposons $\alpha(x) = 0$. Alors $b = 0$. D'après (12), on a $m(\alpha') = 0$ pour $\alpha' \in \Delta^{nr} \cap (\Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\})$. Donc α est combinaison linéaire d'éléments de $\Delta^{nr} \cap \Delta(M)$. Cela entraîne $\alpha(s) = 0 \in \Gamma_\alpha$ donc $\alpha \in \Sigma^{nr}(G_s)$. Une combinaison linéaire d'éléments de $\Delta(M)$ qui appartient à $\Sigma^{nr}(G_s)$ appartient à $\Sigma^{nr}(M)$. Alors $\alpha[b] = \alpha[0] = \alpha[-\alpha(s)] = \alpha^\star$, donc $\alpha[b] \in \Sigma^\star(M)$.

Supposons maintenant que α soit de type I et que $\alpha(x) = e(\alpha)^{-1}$. En remontant le calcul, on voit que cela entraîne $r = D$ et $m(\check{\alpha}') = d(\check{\alpha}')$ pour tout $\alpha' \in \Delta^{nr} \cap (\Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\})$. L'égalité $r = D$ implique que $\Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\} \subset \Delta^{nr}$, donc $\alpha_0 \in \Delta(M)$. On écrit

$$\check{\alpha} = -\check{\alpha}_{00} - \sum_{\alpha' \in \Delta^{nr}} (d(\check{\alpha}') - m(\check{\alpha}'))\check{\alpha}'$$

$$= -\check{\alpha}_{00} - \sum_{\alpha' \in \Delta^{nr} \cap \Delta(M)} (d(\check{\alpha}') - m(\check{\alpha}'))\check{\alpha}',$$

ou encore

$$(13) \qquad e'(\alpha)\alpha = -e'(\alpha_0)\alpha_0 - \sum_{\alpha' \in \Delta^{nr} \cap \Delta(M)} (d(\check{\alpha}') - m(\check{\alpha}'))e'(\alpha')\alpha'.$$

La racine affine α_0^{aff} est égale à $\alpha_0[\frac{1}{e'(\alpha_0)}]$, donc $e'(\alpha_0)\alpha_0(s) = -1$. On en déduit $\alpha(s) = \frac{1}{e'(\alpha)} = \frac{1}{e(\alpha)}$ (puisque α est de type I) donc $\alpha(s) \in \Gamma_\alpha$. Cela entraîne que $\alpha \in \Sigma^{nr}(G_s)$. Puisque α est combinaison linéaire d'éléments de $\Delta(M)$ d'après (13), on a $\alpha \in \Sigma^{nr}(M)$. On a $b = -\alpha(x) = -\frac{1}{e(\alpha)} = -\alpha(s)$, donc $\alpha[b] = \alpha^\star$, donc $\alpha[b] \in \Sigma^\star(M)$.

Supposons maintenant que α soit de type III. Posons $\alpha_1 = \alpha/2$. C'est une racine de type II donc $e'(\alpha_1) = 4$. On reprend le calcul ci-dessus en remplaçant α par α_1 et on obtient

$$0 \leq \alpha_1(x) \leq e'(\alpha_1)^{-1} rD \leq e'(\alpha_1)^{-1} = \frac{1}{4}.$$

On a $\alpha(x) = -b \in \Gamma_\alpha = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ donc $\alpha_1(x) \in \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Ces relations impliquent $\alpha_1(x) = \frac{1}{4}$. Cette égalité a les mêmes conséquences que ci-dessus, à savoir que $\alpha_0 \in \Delta(M)$ et que l'on a l'égalité

$$e'(\alpha_1)\alpha_1 = -e'(\alpha_0)\alpha_0 - \sum_{\alpha' \in \Delta^{nr} \cap \Delta(M)} (d(\check{\alpha}') - m(\check{\alpha}'))e'(\alpha')\alpha'.$$

De nouveau, cela entraîne $\alpha_1(s) = \frac{1}{e'(\alpha_1)} = \frac{1}{4}$. D'où $\alpha(s) = \frac{1}{2} \in \Gamma_\alpha$. Donc $\alpha \in \Sigma^{nr}(G_s)$, puis $\alpha \in \Sigma^{nr}(M)$. On a $b = -\alpha(x) = -2\alpha_1(x) = -\frac{1}{2} = -\alpha(s)$ et encore $\alpha[b] = \alpha[-\alpha(s)] = \alpha^\star$. Donc $\alpha[b] \in \Sigma^\star(M)$, ce qui achève la preuve de (11).

Prouvons maintenant

(14) on a $\alpha[b_\alpha](x) \in r\mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Sigma^{nr}$; on a $\alpha(x) \geq \alpha(s) + r$ pour $\alpha \in \Sigma^{nr}(U_P)$ et $\alpha(x) \leq \alpha(s)$ pour $\alpha \in \Sigma^{nr}(\bar{P})$.

Par définition de x, on a $\alpha(x) \in r\mathbb{Z}$ pour toute $\alpha \in \Delta^{nr}$, donc $\alpha(x) \in r\mathbb{Z}$ pour toute $\alpha \in \Sigma^{nr}_{ind}$ et donc aussi $\alpha(x) \in r\mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Sigma^{nr}$. On a aussi $b_\alpha \in \Gamma_\alpha \subset \frac{1}{e}\mathbb{Z} \subset r\mathbb{Z}$ d'après (10). D'où la première assertion à prouver. Supposons $\alpha \in \Sigma^{nr}(U_P)$. Alors α est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls d'éléments de $\Delta(U_P)$, avec au moins un coefficient strictement positif. Pour $\alpha' \in \Delta(U_P)$, on a par définition $(\alpha')^{aff}(x) = r + (\alpha')^{aff}(s)$, d'où $\alpha'(x) = \alpha'(s) + r$. Donc $\alpha(x) \geq r + \alpha(s)$, ce qui est la deuxième assertion à prouver. La troisième se démontre de façon similaire.

Prouvons maintenant les inégalités (8). Soit $\alpha \in \Sigma^{nr}$. On doit d'abord prouver que $r \leq \alpha[b_\alpha](x)$. Si $\alpha \in \Sigma^{nr}(U_P)$, on a $\alpha[b_\alpha](x) \geq \alpha[b_\alpha](s) + r$ d'après (14). Or $\alpha[b_\alpha](s) = 0$ par définition de b_α. D'où $r \leq \alpha[b_\alpha](x)$. Supposons $\alpha \notin \Sigma^{nr}(G_s)$ ou $\alpha \in \Sigma^{nr}(\bar{P})$. Par définition de b_α, la racine affine $\alpha[b_\alpha]$ prend une valeur strictement positive en $s \in \bar{C}^{nr}$. L'annulateur de cette racine ne coupe pas C^{nr} donc la racine est positive ou nulle en tout point de $\bar{C}^{nr}$, en particulier en x. Donc $\alpha[b_\alpha](x) \geq 0$. Si $\alpha[b_\alpha](x) = 0$, (11) implique que $\alpha[b_\alpha] \in \Sigma^\star(M)$. Alors $\alpha[b_\alpha](s) = 0$, ce qui contredit la définition de b_α. Donc $\alpha[b_\alpha](x) > 0$. D'après la première assertion de (14), on a alors $\alpha[b_\alpha](x) \geq r$. Posons $b'_\alpha = b_\alpha - \frac{1}{e(\alpha)}$. On doiit prouver que $\alpha[b'_\alpha](x) < r$. Supposons $\alpha \notin \Sigma^{nr}(G_s)$ ou $\alpha \in \Sigma^{nr}(U_P)$. Alors la racine affine $\alpha[b'_\alpha]$ prend une valeur strictement négative en $s \in \bar{C}^{nr}$. Comme ci-dessus, cela entraîne $\alpha[b'_\alpha](x) \leq 0$, a fortiori $\alpha[b'_\alpha](x) < r$. Supposons enfin $\alpha \in \Sigma^{nr}(\bar{P})$. D'après (14), on a $\alpha[b'_\alpha](x) \leq \alpha[b'_\alpha](s) = 0$, a fortiori $\alpha[b'_\alpha](x) < r$. Cela démontre (8).

Pour prouver (3), nous aurons besoin de l'assertion suivante :

(15) $\alpha_s[b_{\alpha_s}] = \alpha_s^{aff}$.

La relation (1) entraîne que α_s n'est pas combinaison linéaire à coefficients positifs on nuls d'éléments de $\Delta(U_P)$. Donc $\alpha_s \notin \Sigma^{nr}(G_s)$ ou $\alpha_s \in \Sigma^{nr}(\bar{P})$. En tout cas, b_{α_s} est le plus petit élément de Γ_{α_s} tel que $\alpha_s(s) + b_{\alpha_s} > 0$. Par construction, α_s^{aff} est de la forme $\alpha_s[b']$ pour un $b' \in \Gamma_\alpha$ et on a $\alpha_s^{aff}(s) = \frac{1}{d(\alpha_s)}$. Or $e(\alpha_s)$ divise e et e divise $d(\alpha_s)$ d'après (9). Donc $e(\alpha_s) \leq d(\alpha_s)$. Alors $0 < \alpha_s(s) + b' \leq \frac{1}{e(\alpha_s)}$. Puisque $\Gamma_\alpha = b' + \frac{1}{e(\alpha)}\mathbb{Z}$, b' vérifie la définition ci-dessus de b_{α_s}, c'est-à-dire $b_{\alpha_s} = b'$, d'où (15).

Notons W^{G_s} le groupe de Weyl de G_s relatif à T_s. Il s'identifie au quotient $(K_s \cap Norm_{G(F^{nr})}(T^{nr}))/T(\mathfrak{o}_{\bar{F}})^{I_F}$. Pour $w \in W^{G_s}$, fixons un relèvement w_G de w dans $K_s \cap Norm_{G(F^{nr})}(T^{nr})$. L'élément w agit naturellement sur $\Sigma^{nr}(G_s)$. L'élément w_G agit naturellement sur $\mathcal{A}^{nr}$ et il s'en déduit une action sur Σ^{aff}. On a la relation suivante entre ces deux actions :

(16) pour $\alpha \in \Sigma^{nr}(G_s)$ et $w \in W^{G_s}$, $(w(\alpha))^\star = w_G(\alpha^\star)$.

Le groupe $K_s \cap Norm_{G(F^{nr})}(T^{nr})$ agit par conjugaison sur $\mathfrak{g}(F^{nr})$ en conservant $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}$. L'action du sous-groupe $T(\mathfrak{o}_{\bar{F}})^{I_F}$ conserve $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P]$. Ainsi, pour $w \in W^{G_s}$, le réseau $w_G(\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P])$ est bien défini. Notons $W^M \subset W^{G_s}$ le groupe de Weyl de M relatif à T_s. On voit à l'aide de (16) que w_G conserve le réseau $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P]$ pour tout $w \in W^M$.

Soient $y \in \mathcal{A}^{nr}$ et $v \in \mathbb{R}$. Supposons

(17) $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P] \subset \mathfrak{k}_{y,v,F^{nr}}$.

D'après ce que l'on vient de voir, on a aussi $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P] \subset \mathfrak{k}_{w_G(y),v,F^{nr}}$ pour tout $w \in W^M$. En remplaçant y par $w_G(y)$ pour un $w \in W^M$ bien choisi, on peut supposer $\alpha^{aff}(y) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta(M)$. Soit $\alpha \in \Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\}$. En comparant (4) et (6), l'inclusion (17) implique $-\alpha(y) + v \leq b_\alpha$, c'est-à-dire $\alpha[b_\alpha](y) \geq v$. Pour $\alpha \in \Delta(U_P)$, on a $b_\alpha = -\alpha(s)$ et $\alpha[b_\alpha] = \alpha^{aff}$. D'après (14), il en est de même pour $\alpha = \alpha_s$. On a donc $\alpha^{aff}(y) \geq v$ pour $\alpha \in \Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\}$. On applique (1) au point y et on obtient

$$vr^{-1} = v \sum_{\alpha \in \Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\}} d(\alpha) \leq$$

$$v \sum_{\alpha \in \Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\}} d(\alpha) + \sum_{\alpha \in \Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\}} d(\alpha)(\alpha^{aff}(y) - r) + \sum_{\alpha \in \Delta(M)} d(\alpha)\alpha^{aff}(y)$$

$$= \sum_{\alpha \in \Delta_a^{nr}} d(\alpha)\alpha^{aff}(y) = 1.$$

Cela entraîne $v \leq r$. Si $v = r$, cela entraîne que $\alpha^{aff}(y) = r$ pour $\alpha \in \Delta(U_P) \cup \{\alpha_s\}$ et $\alpha^{aff}(y) = 0$ pour $\alpha \in \Delta(M)$, c'est-à-dire $y = x$. Notre y n'est plus ici le y initial car on a remplacé celui-ci par $w_G(y)$ pour un $w \in W^M$. Mais, pour un tel w, on a $w_G(x) = x$: W^M est engendré par les symétries élémentaires w_α associées aux racines $\alpha \in \Delta(M)$ et l'ensemble des points fixes de $w_{\alpha,G}$ est l'annulateur de α^{aff}. Donc le y initial est lui-même égal à x. Cela démontre (3) avec la restriction que l'on a supposé $y \in \mathcal{A}^{nr}$.

Levons cette restriction. Soit $y \in Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ et $v \in \mathbb{R}$. Supposons l'inclusion (17) vérifiée. Introduisons la géodésique $[x, y]$ joignant x à y dans $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. Elle est incluse dans un appartement qui est un espace euclidien dont on note la distance $|.|$. Pour $t \in [0, 1]$, on note $x_t \in [x, y]$ le point tel que $|x_t - x| = t|y - x|$ et on pose $v_t = tv + (1 - t)r$. On vérifie sur la formule (4) que $\mathfrak{k}_{x_t,v_t,F^{nr}}$ contient $\mathfrak{k}_{y,v,F^{nr}} \cap \mathfrak{k}_{x,r,F^{nr}}$. D'après (17) et l'assertion (2) déjà prouvée, on a donc $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P] \subset \mathfrak{k}_{x_t,v_t,F^{nr}}$. Pour un élément $t \in]0, 1]$ assez petit, x_t appartient à une facette $\mathcal{F}$ dont l'adhérence contient x. On sait qu'alors, il existe un élément $k \in K^0_{x,F^{nr}}$ tel que $k\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^{nr}$. Fixons un tel k. La conjugaison par k conserve $\mathfrak{k}_{x,r,F^{nr}}$, c'est-à-dire $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P]$ d'après l'assertion (2) déjà prouvée. Donc $\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P] = Ad(k)(\mathfrak{k}_{s,F^{nr}}[\mathfrak{u}_P]) \subset Ad(k)(\mathfrak{k}_{x_t,v_t,F^{nr}}) = \mathfrak{k}_{k(x_t),v_t,F^{nr}}$. On applique ce que l'on a déjà prouvé à $k(x_t) \in \mathcal{A}^{nr}$ et v_t. On en déduit $v_t \leq r$. Puisque $t > 0$, cela entraine $v \leq r$. Si $v = r$, cela démontre que $k(x_t) = x$, d'où $x_t = x$ mais alors tout le segment $[x, y]$ est réduit à $\{x\}$. Cela achève la preuve de (3) et du lemme. $\square$

8.3 Type D_4 trialitaire

On suppose G quasi-déployé de type D_4. On rappelle que le diagramme $\mathcal{D}$ de ce groupe a un groupe d'automorphismes isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ et on a introduit des générateurs θ et θ_3 de ce diagramme en **??**. Le diagramme du groupe dual $\hat{G}$ est le même mais, pour plus de précision, on le note $\hat{\mathcal{D}}$ et on note $\hat{\theta}$ et $\hat{\theta}_3$ les générateurs de son groupe d'automorphismes. On suppose que l'homorphisme $\sigma \mapsto \sigma_G$ de Γ_F dans $Aut(\hat{\mathcal{D}})$ a pour image un sous-groupe d'ordre ≥ 3. A l'aide de **??**, on voit qu'il y a trois cas possibles :

(A) soit E/F l'extension non ramifiée de degré 3 ; Γ_E agit trivialement sur $\hat{\mathcal{D}}$ et il existe un élément de Frobenius $\rho \in \Gamma_F$ tel que $\rho_G = \hat{\theta}_3$;

(B) on suppose que $\delta_3(q - 1) = 1$; soit E une extension galoisienne ramifiée de F de degré 3 ; Γ_E agit trivialement sur $\hat{\mathcal{D}}$ et il existe un élément $\rho \in \Gamma_F - \Gamma_E$ tel que $\rho_G = \hat{\theta}_3$;

(C) on suppose que $\delta_3(q + 1) = 1$; on note E l'unique extension galoisienne de F telle que $\Gamma_{E/F} \simeq \mathfrak{S}_3$ (cf. **??**(3)) ; elle contient l'extension quadratique E_0 non ramifiée de F ; Γ_E agit trivialement sur $\hat{\mathcal{D}}$ et il existe un élément $\rho \in \Gamma_{E_0} - \Gamma_E$ et un élément de Frobenius $\tau \in \Gamma_F$ tels que $\rho_G = \hat{\theta}_3$ et $\tau_G = \hat{\theta}$.

Dans le cas (A), on pose $\mathcal{X} = \{2\}$. Dans les cas (B) ou (C), on pose $\mathcal{X} = \{0, 134\}$. On pose $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

On se place d'abord dans le cas (A). Le groupe est de type ${}^3D_4$ dans les tables de Tits. L'index local (c'est-à-dire le diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$ de **??**) est le diagramme de Dynkin affine de type D_4 avec l'action galoisienne suivante : elle est triviale sur $\Gamma_{\mathbb{F}_{q^3}}$ et le Frobenius agit par θ_3. Les éléments de $\underline{S}(G)$ sont en bijection avec les orbites de cette action galoisienne. L'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ sur $\underline{S}(G)$ est triviale. L'orbite $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ est exclue par le lemme **??**. Pour le sommet s associé à l'orbite $\{\alpha_0\}$, on voit que G_s est isogène au groupe trialitaire de type D_4 sur $\mathbb{F}_q$, donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après **??**. Considérons le sommet s paramétré par l'orbite $\{\alpha_2\}$. On voit que $G_s \simeq (Res_{\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q}(SL(2)) \times SL(2))/diag(\{\pm 1\})$, le groupe $\{\pm 1\}$ s'identifiant évidement aux centres de chacun des deux facteurs. D'après **??**, l'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite. Elle donne naissance à une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_2. Cela démontre **??**(1) dans le cas (A).

Considérons le cas (B). Le groupe est de type G_2^1 dans les tables de Tits. Explicitons les descriptions de **??** et **??**. On a $\mathcal{A}^{nr} = X_*(T)^{I_F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. L'ensemble Σ^{nr} est celui des β^{res} pour $\beta \in \Sigma$. Puisque nous notons β les éléments de Σ, on note l'ensemble $\Delta = \{\beta_i; i = 1, ..., 4\}$. La base Δ^{nr} est égale à $\{\alpha_2, \alpha_{134}\}$, où $\alpha_2 = \beta_2^{res}$ et $\alpha_{134} = \beta_1^{res} = \beta_3^{res} = \beta_4^{res}$. Le sous-ensemble de racines positives dans Σ^{nr} est $\{\alpha_2, \alpha_{134}, \alpha_{134} + \alpha_2, 2\alpha_{134} + \alpha_2, 3\alpha_{134} + \alpha_2, 3\alpha_{134} + 2\alpha_2\}$. On a $\alpha_0 = -\alpha_2 - 2\alpha_{134}$, $e(\alpha_0) = e(\alpha_{134}) = 3$ et $e(\alpha_2) = 1$. La relation (3) de **??** est

$$(1) \qquad 3\alpha_0 + 3\alpha_2 + 6\alpha_{134} = 0.$$

C'est-à-dire $d(\alpha_0) = d(\alpha_2) = 3$, $d(\alpha_{134}) = 6$. On a $\alpha_0^{aff} = \frac{1}{3} + \alpha_0$. L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'identifie à celui des sommets de l'alcôve, donc à l'ensemble $\Delta_a^{nr} = \{\alpha_2, \alpha_{134}, \alpha_0\}$. Introduisons un tore $\underline{T}$ défini sur $\mathbb{F}_q$ tel que $X_*(\underline{T}) = X_*(T)^{I_F}$, cet ensemble étant muni de l'action triviale de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. On le munit du même ensemble de racines que ci-dessus. Pour le sommet s associé à $\alpha \in \Delta_a^{nr}$, le groupe G_s est déployé, il a pour tore maximal $\underline{T}$ et pour ensemble de racines le sous-ensemble $\Sigma^{nr}(G_s)$ de Σ^{nr} décrit en **??**. Pour la racine α_0, on voit que G_s est de type G_2. Alors $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite d'après **??**. Il s'en déduit une droite de $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_0. Pour la racine $\alpha_{1,3,4}$, $G_s \simeq (SL(2) \times SL(2))/diag(\{\pm 1\})$. L'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite. Il s'en déduit une droite de $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_{134}. Pour la racine α_2, on trouve $G_s = PGL(3)$ et $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Cela démontre **??**(1) dans le cas (B).

Le calcul est le même dans le cas (C) car l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ sur $\mathcal{D}_a^{nr}$ (qui se déduit de l'action de θ) est triviale. Cela achève la preuve de **??**(1).

On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $\mathcal{X}^{st} = \mathcal{X}$ et on note φ l'identité de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$. Montrons que les assertions (2), (3) et (4) de **??** sont vérifiées. Il suffit de prouver que

(2) $FC(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

En effet, on pose alors $FC_y^{\mathcal{E}} = FC_y$ pour tout $y \in \mathcal{Y} = \mathcal{X}$ et ces assertions (2), (3) et (4) de **??** deviennent triviales.

Prouvons (2). On a décrit le groupe $\hat{\Omega} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ en **??** . Le groupe $Aut(\hat{\mathcal{D}}_a)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 = \Omega \rtimes \mathfrak{S}_3$. On considère un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. Notons $\hat{\Omega}_{G'}$ l'image de Γ_E dans $\hat{\Omega}$ par l'homomorphisme $\sigma \mapsto \omega_{G'}(\sigma)$. C'est un sous-groupe de $\hat{\Omega}$ invariant par l'image de $\Gamma_{E/F}$ dans $\mathfrak{S}_3$ par l'application $\sigma \mapsto \sigma_G$. Cette image contient toujours $\hat{\theta}_3$. L'action par conjugaison de $\hat{\theta}_3$ dans $\hat{\Omega}$ permute cycliquement les 3 éléments non triviaux de $\hat{\Omega}$. Donc $\hat{\Omega}_{G'}$ est égal à $\{1\}$ ou a $\hat{\Omega}$ tout entier. Si $\hat{\Omega}_{G'} = \hat{\Omega}$, on voit que le groupe $\Gamma_{E_{G'}/F}$ dans les cas (A) ou (B), resp. $\Gamma_{E_{G'}/E_0}$ dans le cas (C), a une structure qui est exclue par **??**. Donc $\hat{\Omega}_{G'} = \{1\}$, c'est-à-dire $E_{G'} = E$. Parce que l'action par conjugaison de $\hat{\theta}_3$ dans $\hat{\Omega}$ permute cycliquement les 3 éléments non triviaux de $\hat{\Omega}$, on voit que tout élément de $\hat{\Omega}\hat{\theta}_3$ est conjugué à $\hat{\theta}_3$ par un élément de $\hat{\Omega}$. A équivalence près, on peut donc supposer $\omega_{G'}(\rho) = 1$ et $\rho_{G'} = \rho_G = \hat{\theta}_3$. Dans les cas (A) ou (B), cela implique $\sigma_{G'} = \sigma_G$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Dans le cas (C), cela implique $\sigma_{G'} = \sigma_G$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{E_0}$. Dans ce cas (C), puisque $\tau^{-1}\rho\tau \in \Gamma_{E_0}$, on a $\tau_{G'}^{-1}\rho_{G'}\tau_{G'} = \tau_G^{-1}\rho_G\tau_G$, c'est-à-dire $\omega_{G'}(\tau)^{-1}\hat{\theta}_3\omega_{G'}(\tau) = \hat{\theta}_3$. D'où $\omega_{G'}(\tau) = 1$ et, de nouveau, $\sigma_{G'} = \sigma_G$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Il y a trois orbites possibles : $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0\}$, $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_2\}$, $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4\}$. Dans le premier cas, on a $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$. Dans les deux autres cas, on voit que G'_{SC} contient un facteur $SL(2)$ dans le cas $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_2\}$, $SL(3)$ dans le cas $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4\}$. D'après **??** (1), on a $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$. Cela démontre que, si $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$, alors $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')} = \{0\}$

L'assertion (2) en résulte.

Explicitons la conséquence de **??**(4) :

$$(3) \qquad dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \begin{cases} 1, & \text{dans le cas (A)}, \\ 2, & \text{dans les cas (B) et (C)}. \end{cases}$$

8.4 Type D_4 trialitaire, séparation des éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$

On se place dans le cas (B) du paragraphe précédent. On fixe des éléments non nuls $f_0 \in FC_0$ et $f_{134} \in FC_{134}$. On va introduire un élément régulier $X \in \mathfrak{g}_{ell}(F)$ et prouver

(1) $S^G(X, f_0) = 0$, $S^G(X, f_{134}) \neq 0$.

Explicitons les constructions de **??** et **??** pour les deux sommets s_0 et s_{134} associés aux racines $\alpha_0, \alpha_{134} \in \Delta_a^{nr}$. On a attaché à chacun de ces sommets divers objets que l'on affecte d'un indice 0 ou 134.

On a $\alpha_2(s_0) = \alpha_{134}(s_0) = 0$, $\Delta(U_{P_0}) = \{\alpha_2\}$ et, en utilisant **??**(1), on trouve que $r_0 = \frac{1}{6}$, $\alpha_2(x_0) = \frac{1}{6}$, $\alpha_{134}(x_0) = 0$. On a $b_{\alpha,0} = 0$ pour $\alpha = \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_{134}, \alpha_2 + 2\alpha_{134}, \alpha_2 + 3\alpha_{134}, 2\alpha_2 + 3\alpha_{134}$, $b_{\alpha,0} = \frac{1}{3}$ pour $\alpha = \pm\alpha_{134}, -\alpha_2 - \alpha_{134}, -\alpha_2 - 2\alpha_{134}$ et $b_{\alpha,0} = 1$ pour $\alpha = -\alpha_2, -\alpha_2 - 3\alpha_{134}, -2\alpha_2 - 3\alpha_{134}$. Le réseau $\mathfrak{k}_{x_0,r_0,F^{nr}}$ est décrit par **??** (6) et ces valeurs de $b_{\alpha,0}$. On voit que l'image de ce réseau dans $\mathfrak{g}_{s_0}(\mathbb{F}_q)$ est le sous-espace des invariants par $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ dans

(2) $\oplus_{\alpha\in\Sigma^{nr}(U_{P_0})}\mathfrak{u}(\alpha)_0/\mathfrak{u}(\alpha)_{\frac{1}{e(\alpha)}}$.

On peut supposer que f_0 est la fonction $\tilde{f}$ de **??** associée à s_0. Le lemme de ce paragraphe entraîne que

(3) le support de f_0 est contenu dans $\mathfrak{g}(F)_{\frac{1}{6}}$.

On a $\alpha_2(s_{134}) = 0$, $\alpha_{134}(s_{134}) = \frac{1}{6}$, $\Delta_{U_{P_{134}}} = \{\alpha_0, \alpha_2\}$. On trouve que $r_{134} = \frac{1}{12}$, $\alpha_2(x_{134}) = \alpha_{134}(x_{134}) = \frac{1}{12}$. On a $b_{\alpha,134} = 0$ pour toute racine positive $\alpha \in \Sigma^{nr}$, $b_{\alpha,134} = 1$ pour $\alpha = -\alpha_2, -\alpha_2 - 3\alpha_{134}, -2\alpha_2 - 3\alpha_{134}$ et $b_{\alpha,134} = \frac{1}{3}$ pour $\alpha = -\alpha_{134}, -\alpha_2 - \alpha_{134}, -\alpha_2 - 2\alpha_{134}$. Le réseau $\mathfrak{k}_{x_{134},r_{134},F^{nr}}$ est décrit par **??** (6) et ces valeurs de $b_{\alpha,134}$. On voit que l'image de ce réseau dans $\mathfrak{g}_{s_{134}}(\mathbb{F}_q)$ est le sous-espace des invariants par $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ dans

(4) $\mathfrak{u}(\alpha_2)_0/\mathfrak{u}(\alpha_2)_1 \oplus \mathfrak{u}(\alpha_0)_{\frac{1}{3}}/\mathfrak{u}(\alpha_0)_{\frac{2}{3}}$.

On peut supposer que f_{134} est la fonction $\tilde{f}$ de **??** associée à s_{134}. Le lemme de ce paragraphe entraîne que le support de f_{134} est contenu dans $\mathfrak{g}(F) \cap \mathfrak{k}_{x_{134},r_{134},F^{nr}}$. On a fixé une famille de Chevalley $(E_\beta)_{\beta\in\Sigma}$ de $\mathfrak{g}(\bar{F})$ et on a supposé que $\theta_3(E_\beta) = E_{\theta_3(\beta)}$ pour tout $\beta \in \Sigma$. Fixons une uniformisante ϖ_E de E telle que $\varpi_E^3 \in F^\times$, notons $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_3(\bar{F})$ la racine telle que $\rho(\varpi_E) = \zeta\varpi_E$. Posons

$$X = (\sum_{l=1,\dots,4} E_l) + \varpi_E(\zeta^{-1}E_{-123} + E_{-234} + \zeta E_{-124}),$$

où on a noté $E_l = E_{\beta_l}$ et, par exemple, $E_{-123} = E_{-\beta_1-\beta_2-\beta_3}$. On voit que $X \in \mathfrak{g}(F) \cap \mathfrak{k}_{x_{134},r_{134},F^{nr}}$ et que la réduction de X dans $\mathfrak{g}_{s_{134}}(\mathbb{F}_q)$ appartient à $\tilde{\mathfrak{g}}_{s_{134},2}$. Donc $f_{134}(X) \neq 0$.

Montrons que

(5) x_{134} est l'unique point $y \in Imm(G_{AD})$ tel que $X \in \mathfrak{k}_{y,\frac{1}{12}}$.

Plongeons $\mathfrak{g}(\bar{F})$ dans $\mathfrak{gl}(8, \bar{F})$. On peut choisir le plongement de telle sorte que l'image de X soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \varpi_E\zeta^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \varpi_E\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \varpi_E & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\varpi_E & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\varpi_E\zeta & -\varpi_E\zeta^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le polynôme caractéristique de X. On obtient

$$T^8 + 6\varpi_E T^4 - 3\varpi_E^2.$$

L'algèbre $\mathfrak{g}(E)$ est l'algèbre déployée du groupe D_4 et un élément ayant un tel polynôme caractéristique est elliptique régulier, c'est-à-dire que X est régulier et elliptique dans $\mathfrak{g}(E)$, a fortiori dans $\mathfrak{g}(F)$. Fixons une extension galoisienne finie K de F, contenant E et telle que le tore T_X commutant de X soit déployé. Elle contient un élément u tel que $val_F(u) = 1/12$. Le calcul ci-dessus du polynôme caractéristique de X entraîne que $u^{-1}X$ appartient à $\mathfrak{t}_X(\mathfrak{o}_K)$ et que $val_K(\beta(u^{-1}X)) = 0$ pour toute racine β de T_X. Soit $y \in Imm(G_{AD})$, supposons $X \in \mathfrak{k}_{y,1/12}$. Plongeons $Imm(G_{AD})$ dans l'immeuble $Imm_K(G_{AD})$. Alors $u^{-1}X \in \mathfrak{k}_{y,0,K} = \mathfrak{k}_{y,K}$. D'après le lemme **??**, y appartient à l'appartement $S_K(T_X)$ de $Imm_K(G_{AD})$ associé au tore T_X. Donc $y \in S_K(T_X) \cap Imm(G_{AD})$. Cet ensemble est l'ensemble des points fixes par l'action galoisienne dans $S_K(T_X)$ et est isomorphe à l'immeuble étendu de T_X sur F. Puisque T_X est elliptique, cet immeuble est réduit à un point et y est ce point. Cela démontre (5).

Calculons $I^G(X, f_{134})$. On a

$$I^G(X, f_{134}) = \int_{G(F)} f_{134}(g^{-1}Xg)\, dg.$$

Pour g tel que $f_{134}(g^{-1}Xg) \neq 0$, $g^{-1}Xg$ appartient au support de f_{134}, donc à $\mathfrak{k}_{x_{134},1/12}$. Donc $X \in \mathfrak{k}_{gx_{134},1/12}$. D'après (5), cela entraîne $gx_{134} = x_{134}$, donc $g \in K^0_{x_{134}}$. Mais ce groupe conserve f_{134}. Donc $I^G(X, f_{134})$ est le produit d'une mesure et de $f_{134}(X)$, qui est non nul. Donc $I^G(X, f_{134}) \neq 0$. Puisque X est elliptique et que f_{134} appartient à $I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, $S^G(X, f_{134})$ est un multiple non nul de $I^G(X, f_{134})$ et est non nul. Cela démontre la deuxième relation de (1).

Enfin, puisque $val_F(\beta(X)) = 1/12$ pour toute racine β de T_X, on a

(6) $r(X) = \frac{1}{12}$.

D'après (3), aucun élément stablement conjugué à X n'appartient au support de f_0. Donc $S^G(X, f_0) = 0$. Cela démontre (1).

Plaçons-nous maintenant dans le cas (C) du paragraphe précédent. On va introduire un élément régulier $X \in \mathfrak{g}_{ell}(F)$ qui a les mêmes propriétés que ci-dessus. Notons K le sous-corps de E tel que Γ_K soit engendré par Γ_E et τ. L'extension E/K est quadratique et la définition de τ implique que E est la composée des extensions K et E_0 de F. Il résulte de **??**(2) que K contient une uniformisante ϖ_K telle que $\varpi_K^3 \in F^\times$. On fixe un tel élément, on note $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_3(\bar{F})$ la racine telle que $\rho(\varpi_K) = \zeta\varpi_K$. Posons

$$X = (\sum_{l=1,\dots,4} E_l) + \varpi_K(\zeta^{-1}E_{-123} + E_{-234} + \zeta E_{-124}).$$

Montrons que $X \in \mathfrak{g}(F)$. D'après la définition d'une famille de Chevalley, on a $E_{-123} = \lambda[E_{-1},[E_{-2},E_{-3}]]$ pour un $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$ de valuation p-adique nulle. Puisque $E_{-234} = \theta_3(E_{-123})$ et $E_{-124} = \theta_3^2(E_{-123})$, on a $E_{-234} = \lambda[E_{-3},[E_{-2},E_{-4}]]$, $E_{-124} = \lambda[E_{-4},[E_{-2},E_{-1}]$. L'élément θ fixe E_{-1}, E_{-2} et permute E_{-3} et E_{-4}. On constate que θ fixe E_{-234} et permute E_{-123} et E_{-124}. Les conditions pour que X appartienne à $\mathfrak{g}(F)$ sont donc

$\rho(\zeta^{-1}\varpi_K) = \varpi_K$, $\rho(\varpi_K) = \zeta\varpi_K$;

$\tau(\varpi_K) = \varpi_K$, $\tau(\zeta^{-1}\varpi_K) = \zeta\varpi_K$.

Elles résultent de la définition de K et ζ, en tenant compte des relations $\rho(\zeta) = \zeta$ (car $\zeta \in E_0$ et ρ fixe tout élément de ce corps) et $\tau(\zeta) = \zeta^{-1}$ (car on a supposé $\delta_3(q+1) = 1$ donc $\zeta \notin F^\times$ et τ ne fixe pas ζ).

Ensuite, la même preuve que ci-desus s'applique : les réseaux sont les mêmes que précédemment car l'action de Γ_F^{nr} sur Σ^{nr} est triviale, tous les éléments de cet ensemble étant fixes par θ.

8.5 Type D_4 trialitaire, action d'un automorphisme

On se place dans le cas (B) du paragraphe **??**. Le groupe G a un automorphisme θ_3. Cet automorphisme agit trivialement sur $\mathcal{A}^{nr}$ par définition de cet ensemble, donc fixe les sommets s_0 et s_{134}. Pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$, on voit que θ_3 agit trivialement sur $\mathfrak{u}(\alpha)_0/\mathfrak{u}(\alpha)_{\frac{1}{e(\alpha)}}$. Il résulte alors de **??**(2) que θ_3 fixe tout élément de FC_0. Rappelons que l'on a supposé $\delta_3(q-1) = 1$ donc $\boldsymbol{\zeta}_3(\mathbb{F}_q)$ est d'ordre 3. Pour $\alpha \in \Sigma^{nr}$ tel que $e(\alpha) = 3$, on voit que θ_3 agit sur $\mathfrak{u}(\alpha)_{\frac{1}{3}}/\mathfrak{u}(\alpha)_{\frac{2}{3}}$ par multiplication par une racine primitive de l'unité d'ordre 3 dans $\mathbb{F}_q^\times$ (on le voit par exemple en réduisant l'élément X introduit dans le paragraphe précédent). La relation **??**(4) nous dit comment agit θ_3 sur le support de la fonction f_{134} associée à s_{134}. On se rappelle que cette fonction est produit tensoriel de deux fonctions vivant sur les deux composantes $\mathfrak{sl}(2)(\mathbb{F}_q)$ de $G_{s_{134}}(\mathbb{F}_q)$. Mais la multiplication par un carré ne change pas l'orbite d'un élément nilpotent de $\mathfrak{sl}(2)(\mathbb{F}_q)$ (et une racine de l'unité d'ordre 3 est un carré). Il en résulte que θ_3 fixe tout élément de FC_{134}. En résumé, θ_3 fixe tout élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$.

8.6 Le type E_6 déployé

On suppose que G est déployé de type E_6. On définit un homomorphisme $T_{ad}(F) \to F^\times/F^{\times,3}$ par $\prod_{l=1,\dots,6}\varpi_l(x_l) \mapsto x_1x_3^2x_5x_6^2$. De cet homomorphisme se déduit un isomorphisme $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \simeq T_{ad}(F)/\pi(T(F)) \simeq F^\times/F^{\times,3}$. L'image de $G_{AD}(F)_0$ est $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,3}$.

Si $\delta_3(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{X} = \emptyset$.

Supposons $\delta_3(q-1) = 1$. On note Ξ^{ram} l'ensemble des éléments de Ξ dont la restriction à $G_{AD}(F)_0$ est non triviale. On pose $\mathcal{X} = \{4\}\cup\{(016,\xi);\xi \in \Xi^{ram}\}\cup\{(235,\xi);\xi \in \Xi^{ram}\}$, $d_x = 2$ si $x = 4$ et $d_x = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, $x \neq 4$.

Le diagramme $\mathcal{D}$ a un automorphisme θ que l'on a décrit en **??**. Le diagramme $\mathcal{D}_a$ a un groupe d'automorphismes isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. On note θ_3 l'automorphisme d'ordre 3 qui permute cycliquement $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_6$ ainsi que $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ et fixe α_4. L'action de $G_{AD}(F)$ sur le diagramme se fait par le groupe d'ordre 3 engendré par θ_3. L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur celui des orbites de cette action, qui s'identifie à l'ensemble de représentants $\{\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4\}$. Les fibres ont trois éléments au-dessus de α_0 et α_2 et un seul au-dessus de α_4. Pour un sommet s paramétré par α_0, le groupe G_s est simplement connexe et déployé de type E_6. On a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$ si et seulement si $\delta_3(q-1) = 1$.

Supposons cette condition vérifiée. D'après **??**, $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est de dimension 2, engendré par deux fonctions $f_{N,\epsilon}$ pour lesquelles les restrictions de ϵ au centre de G_s sont les deux caractères non triviaux de ce centre. Le centre de G s'envoie surjectivement sur celui de G_s. Il en résulte que chacune des fonctions $f_{N,\epsilon}$ se transforme par un caractère non trivial de $G_{AD}(F)_0$ et que les caractères en question sont différents pour les deux fonctions. D'après **??**, chaque fonction donne naissance à trois éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ qui se transforment selon les caractères de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ prolongeant le caractère de $G_{AD}(F)_0$ attaché à la fonction en question. En réunissant ces deux ensembles à trois éléments, on obtient pour tout $\xi \in \Xi^{nr}$ un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ se transformant selon ξ. On note $FC_{016,\xi}$ la droite portée par cet élément. Pour un sommet s paramétré par α_2, on a $G_s = (SL(2) \times SL(6))/diag(\{\pm 1\})$, le groupe $\{\pm 1\}$ s'identifiant au centre de $SL(2)$ et au sous-groupe d'ordre 2 de celui de $SL(6)$. D'après **??**, $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$ si et seulement si $\delta_3(q-1) = 1$. Supposons cette condition vérifiée. Alors $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est de dimension 2, engendré par deux fonctions $f_{N_2,\epsilon_2} \otimes f_{N_6,\epsilon_6}$, où f_{N_2,ϵ_2} est une unique fonction sur $SL(2)$ et f_{N_6,ϵ_6} est une fonction sur $SL(6)$, ϵ_6 étant l'un des deux caractères d'ordre 6 du centre de $SL(6)$. Le centre de G s'identifie au sous-groupe d'ordre 3 de celui de $SL(6)$. Le résultat est alors le même que pour la racine α_0 : de nos fonctions est issue une famille d'éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ paramétrée par Ξ^{ram}, de sorte que l'élément paramétré par $\xi \in \Xi^{ram}$ se tranforme selon ce caractère par le groupe $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. On note $FC_{235,\xi}$ la droite portée par cet élément. Pour un sommet s paramétré par α_4, on a $G_s = (SL(3) \times SL(3) \times SL(3))/diag(\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q))$, le groupe $\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$ s'identifiant aux centres de chaque facteur. Précisément, indexons les trois facteurs par $0, 1, 6$, le facteur indexé par l contenant la coracine $\check{\alpha}_l$. Un élément $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$ s'identifie aux éléments centraux $\iota_0(\zeta) = \check{\alpha}_0(\zeta)\check{\alpha}_2(\zeta^2)$, $\iota_1(\zeta) = \check{\alpha}_1(\zeta)\check{\alpha}_3(\zeta^2)$, $\iota_6(\zeta) = \check{\alpha}_6(\zeta)\check{\alpha}_5(\zeta^2)$. Ces formules permettent d'identifier les centres de chacun des trois facteurs $SL(3)$. D'après **??**, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$ si et seulement si $\delta_3(q-1) = 1$. Supposons cette condition vérifiée. Alors, sur chaque facteur $SL(3)$, on a deux fonctions f_{N_l,ϵ_l} où ϵ_l est l'un des deux caractères d'ordre 3 du centre de $SL(3)$. Un produit tensoriel $f_{N_0,\epsilon_0} \otimes f_{N_1,\epsilon_1} \times f_{N_6,\epsilon_6}$ se quotiente par $diag(\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q))$ si et seulement si $\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_6 = 1$ (en identifiant les centres de chaque facteur), ce qui équivaut à $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon_6$. Il reste deux fonctions de la forme précédente. Le centre de G s'envoie surjectivement sur le groupe $\{\iota_0(\zeta_0)\iota_1(\zeta_1)\iota_6(\zeta_6); \zeta_0, \zeta_1, \zeta_6 \in \boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q), \zeta_0\zeta_1\zeta_6 = 1\}/diag(\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q))$. Puisque $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon_6$, le caractère $\epsilon_0 \otimes \epsilon_1 \otimes \epsilon_6$ est trivial sur ce groupe. Donc chaque fonction est invariante par $G_{AD}(F)_0$. L'action du groupe $G_{AD}(F)$ tout entier est récupéré par la permutation cyclique des facteurs qui fixe évidemment chacune des fonctions. On obtient donc deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ invariants par l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. On note FC_4 l'espace engendré par ces deux fonctions. On a obtenu **??**(1).

Dans le cas où $\delta_3(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{Y} = \emptyset$. Puisqu'on a déjà prouvé que $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$, les assertions (2), (3) et (4) de **??**(1) sont triviales.

On suppose désormais $\delta_3(q-1) = 1$. On pose $\mathcal{Y} = \{0\} \cup \{(016, 0, \xi); \xi \in \Xi^{ram}\} \cup \{(016, 134, \xi); \xi \in \Xi^{ram}\}$.

On considère un élément $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O})$ de $\mathcal{E}_{ell}(G)$. Le groupe $\hat{\Omega}$ est d'ordre 3 et est engendré par l'automorphisme $\hat{\theta}_3$ similaire au θ_3 ci-dessus (le diagramme $\hat{\mathcal{D}}_a$ est le même que $\mathcal{D}_a$). Puisque G est déployé, on a $\sigma_{G'} = \omega_{G'}(\sigma)$ pour tout σ et $\sigma \mapsto \omega_{G'}(\sigma)$ est un homomorphisme injectif de $\Gamma_{E_{G'}/F}$ dans $\hat{\Omega}$.

Supposons d'abord $E_{G'} = F$, donc l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ est triviale. A conjugaison par $\hat{\Omega}$ près, l'orbite $\mathcal{O}$ peut être égale à $\{\hat{\alpha}_0\}$, $\{\hat{\alpha}_2\}$ ou $\{\hat{\alpha}_4\}$. Dans le premier cas $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$ et, à ce point, on ne peut rien dire de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Dans les deux autres cas, on voit que G'_{SC} contient un facteur $SL(2)$ ou $SL(3)$ donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$ d'après **??**(1).

Supposons maintenant que $E_{G'}$ soit l'extension non ramifiée de degré 3 de F. Le lemme **??** exclut les orbites $\mathcal{O}$ formées de trois éléments. Il reste l'orbite $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_4\}$ pour laquelle on peut remplacer G' par G'_{SC}. On a $G'_{SC} \simeq Res_{E_{G'}/F}(SL(3))$ donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$ d'après **??**(1).

Supposons enfin que $E_{G'}$ soit une extension cyclique d'ordre 3 et ramifiée de F. Une telle extension existe puisque $\delta_3(q-1) = 1$. Il y a 3 extensions possibles. Fixons-en une et choisissons un générateur τ de $\Gamma_{E_{G'}/F}$. Il y a deux actions $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ possibles, l'une telle que $\tau_{G'} = \hat{\theta}_3$, l'autre telle que $\tau_{G'} = \hat{\theta}_3^2$. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_4\}$, on a comme ci-dessus $G'_{SC} \simeq Res_{E_{G'}/F}(SL(3))$ donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_5\}$, on a $G'_{SC} \simeq Res_{E_{G'}/F}(SL(2)) \times SL(2)$ donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$. Supposons $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_6\}$. D'après le lemme **??**, on peut remplacer G' par $G'_{SC} \simeq Spin_{E_{G'}/F}(8)$, où on désigne ainsi la forme trialitaire de $Spin(8)$ associée à l'extension $E_{G'}/F$. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est de dimension 2 d'après **??**. Plus précisément, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est somme de deux droites notées FC_0 et FC_{134} dans ce paragraphe, notons-les $FC_0(\mathfrak{g}'(F))$ et $FC_{134}(\mathfrak{g}'(F))$. Le groupe $Out(\mathbf{G}')$ est $\hat{\Omega}$ tout entier. L'action de $\hat{\theta}_3$ sur G'_{SC} est l'automorphisme θ_3 de ce groupe. Il agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ d'après **??**. Il nous reste à déterminer $\xi_{\mathbf{G}'}$. Rappelons (cf. **??**) que l'élément s de la donnée $\mathbf{G}'$ dépend du choix de racines de l'unité dans $\mathbb{C}^\times$, ici d'une racine primitive d'ordre 3 que l'on note j. L'élément s de la donnée $\mathbf{G}'$ vérifie $\hat{\alpha}_1(s) = \hat{\alpha}_6(s) = j$ et $\hat{\alpha}_i(s) = 1$ pour $i = 2, ..., 5$. On peut choisir $s_{sc} = \check{\hat{\alpha}}_1(j^2)\check{\hat{\alpha}}_2(j^2)\check{\hat{\alpha}}_4(j)\check{\hat{\alpha}}_6(j^2)$. Alors $\hat{\theta}_3(s_{sc})s_{sc}^{-1} = z$ où $z = \check{\hat{\alpha}}_1(j^2)\check{\hat{\alpha}}_3(j)\check{\hat{\alpha}}_5(j^2)\check{\hat{\alpha}}_6(j) \in Z(\hat{G}_{SC})$. L'action galoisienne sur $Z(\hat{G}_{SC})$ étant triviale, les cocycles s'identifient à des caractères de Γ_F dans ce groupe d'ordre 3. Pour $E_{G'}$ fixée, les deux actions $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ possibles déterminent les deux caractères d'ordre 3 triviaux sur $\Gamma_{E_{G'}}$. Quand on fait varier $E_{G'}$ on obtient les 6 caractères d'ordre 3 de Γ_F qui sont ramifiés. Ils correspondent aux 6 élements de Ξ^{ram}. Donc, pour tout $\xi \in \Xi^{ram}$, il y a une et une seule de nos donnée $\mathbf{G}'$ telle que $\xi_{\mathbf{G}'} = \xi$. On la note $\mathbf{G}'_{016,\xi}$ cette donnée et on pose $FC^{\mathcal{E}}_{016,0,\xi} = FC_0(\mathfrak{g}'_{016,\xi}(F))$, $FC^{\mathcal{E}}_{016,134,\xi} = FC_{134}(\mathfrak{g}'_{016,\xi}(F))$.

On pose $\mathbb{X} = \{4, 016, 235\}$, $\mathbb{Y} = \{0, (016, 0), (016, 134)\}$ et on définit une bijection $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ par $\phi(4) = 0$, $\phi(016) = (016, 0)$, $\phi(235) = (016, 134)$. Il y a des surjections évidentes $\mathcal{X} \to \mathbb{X}$ et $\mathcal{Y} \to \mathbb{Y}$ et la bijection ϕ se relève naturellement (en ajoutant des $\xi \in \Xi^{ram}$ dans la définition) en une bijection $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. On pose $\mathcal{X}^{st} = \{4\}$.

On a associé ci-dessus une droite $FC^{\mathcal{E}}_y$ à tout élément $y \in \mathcal{Y}$ différent de 0. On n'a pas traité la donnée principale $\mathbf{G}$. A l'aide de la bijection φ, l'argument habituel de dimension montre que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est de dimension 2 et on pose $FC^{\mathcal{E}}_0 = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. On a ainsi complété la description **??**(3).

L'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ suffit à démontrer **??**(4). En effet, on a forcément

$$FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \subset FC(\mathfrak{g}(F)) \cap I_{cusp,\mathbf{1}}(\mathfrak{g}(F)) = FC_4(\mathfrak{g}(F)).$$

Les espaces extrêmes étant tous deux de dimension 2, ils sont égaux.

Posons $\mathbb{X}^\star = \{016, 235\}$, $\mathbb{Y}^\star = \{(016, 0), (016, 134)\}$. On munit $\mathbb{X}^\star$ de l'ordre $016 < 235$. Par la surjection $\mathcal{X} \to \mathbb{X}$, il se relève en un préordre sur l'image réciproque $\mathcal{X}^\star$ de $\mathbb{X}^\star$ et on applique les constructions de **??**. L'ensemble $\underline{\mathcal{Y}}^\star$ s'identifie à $\mathbb{Y}^\star$ dont le plus petit élément (y_{min}) est $(016, 0)$. On pose $\underline{\mathcal{Y}}^\sharp = \underline{\mathcal{Y}}^\star - \{(y_{min})\}$. Il a un unique élément que l'on note (y) (on peut l'identifier à l'élément $(016, 134)$ de $\mathbb{Y}^\star$). On a $d_{(y)} = |\Xi^{ram}| = 6$. On associe à (y) la collection $(\mathbf{G}'_{016,\xi})_{\xi \in \Xi^{ram}}$. Pour chaque groupe $G'_{016,\xi}$, on a construit en **??** un élément $X \in \mathfrak{g}'_{016,\xi,reg}(F)$. Un calcul fastidieux permet de prouver que X est G-régulier. Nous n'avons pas besoin de ce calcul : par l'argument de **??**, on peut remplacer X par un élément assez voisin de sorte les propriétés (1) et (6) de **??** soient encore vérifiées et que X soit G-régulier. On fixe un tel élément que l'on note Y_ξ. On associe à (y) la collection $(Y_\xi)_{\xi\in\Xi^{ram}}$.

Montrons que les conditions de **??** sont satisfaites. La relation (1) de ce paragraphe est vérifiée par simple compatibilité du transfert avec les actions de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. La condition (2) est satisfaite d'après notre description des espaces en question. Les conditions (3) et (4) résultent de la condition (1) de **??** et du fait que, pour un élément $\xi\in\Xi^{ram}$, un élément $y'\in\mathcal{Y}^\star$ et une fonction $f'_{y'}\in FC^{\mathcal{E}}_{y'}$, les définitions entraînent que $S^{G'_{016,\xi}}(Y_\xi,f'_{y'})$ ne peut être non nul que si l'élément ξ' qui figure dans y' est égal à ξ. Il reste à prouver la condition (5). Celle-ci se récrit sous la forme suivante :

(1) soient $x=(016,\xi')\in\mathcal{X}$, $f\in FC_x$, $\xi\in\Xi^{ram}$ et X un élément de $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison stable correspond à celle de Y_ξ ; alors $I^G(X,f)=0$.

D'après **??** (6), on a $r(X)=\frac{1}{12}$. Il suffit donc de prouver que le support de f est contenu dans $\mathfrak{g}(F)_r$ pour un $r>r(X)$. La fonction f est par définition combinaison linéaire de trois fonctions issues des sommets associés aux trois racines α_0, α_1, α_6. Ces fonctions sont conjuguées par l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ et leurs supports sont aussi conjugués. Il suffit de considérer l'une d'elles, par exemple celle associée au sommet s_0 attaché à la racine α_0. C'est une fonction $\tilde{f}$ du type considéré en **??**. Le système de racines Σ^{nr} de G_{s_0} est Σ tout entier. D'après **??**, on a $\Delta(U_{P_0})=\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_6\}$. On a $d(\alpha_0)=d(\alpha_1)=d(\alpha_6)=1$ et $d(\alpha_4)=3$. Alors le nombre r de **??** est égal à $\frac{1}{6}$, donc $\tilde{f}$ est à support dans $\mathfrak{g}(F)_{\frac{1}{6}}$. Cela démontre (1).

Alors le lemme de **??** nous dit que $transfert(FC_{(x)})=FC^{\mathcal{E}}_{\varphi((x))}$ pour tout $(x)\in\underline{\mathcal{X}}^\star$. Comme d'habitude, l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ permet de raffiner cette égalité en $transfert(FC_x)=FC^{\mathcal{E}}_{\varphi(x)}$ pour tout $x\in\mathcal{X}^\star$. Cela prouve **??**(3).

Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(2) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)))=2\delta_3(q-1)$.

8.7 Forme intérieure du type E_6 déployé

On suppose que G^* est du type précédent et que G en est une forme intérieure non déployée. Dans les tables de Tits, le groupe est de type ${}^3E_6$.

Si $\delta_3(q-1)=0$, on pose $\mathcal{X}=\emptyset$. Si $\delta_3(q-1)=1$, on pose $\mathcal{X}=\{4\}$ et $d_4=2$.

Le diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$ est le diagramme de Dynkin affine d'un système de racines de type E_6 sur lequel le Frobenius $Fr\in\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit par θ_3. L'ensemble $\underline{S}(G)$ est paramétré par l'ensemble des orbites de cette action. Pour un sommet paramétré par une orbite à 3 éléments, le lemme **??** implique que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))=\{0\}$. Il reste le sommet s paramétré par l'orbite réduite à α_4. Sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, on a $G_s\simeq(SL(3)\times SL(3)\times SL(3))/diag(\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q))$. On a décrit précisément ce groupe dans le paragraphe précédent en indexant les trois facteurs $SL(3)$ par $0,1,6$. En notant $Fr_{SL(3)}$ l'action usuelle du Frobenius sur $SL(3)$, celle sur G_s est $(g_0,g_1,g_6)\mapsto(Fr_{SL(3)}(g_6),Fr_{SL(3)}(g_0),Fr_{SL(3)}(g_1))$. Il y a deux faisceaux-caractères cuspidaux sur chaque facteur $SL(3)$, associés à des couples (N,ϵ) où ϵ est l'un des deux caractères de $Z(SL(3))$ d'ordre 3. Considérons un produit de trois tels faisceaux sur chacune des composantes, d'où trois caractères $\epsilon_0,\epsilon_1,\epsilon_6$. Pour que le produit soit invariant par $diag(\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q))$, on doit avoir $\epsilon_0=\epsilon_1=\epsilon_6$. Pour que le produit soit invariant par l'action galoisienne, la formule ci-dessus entraîne qu'il faut que ce caractère commun $\epsilon_0=\epsilon_1=\epsilon_6$ soit invariant par l'action galoisienne naturelle, c'est-à-dire que $\delta_3(q-1)=1$. Si cette condition est vérifiée, on récupère deux faisceaux-caractères, d'où deux éléments de $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. Il s'en déduit deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ et on note $FC_4(\mathfrak{g}(F))$ le plan qu'ils engendrent. On obtient ainsi l'assertion **??**(1).

Si $\delta_3(q-1)=0$, on pose $\mathcal{Y}=\emptyset$. Puisqu'on vient de prouver que $FC(\mathfrak{g}(F))=\{0\}$, les assertions (2) et (3) de **??** sont tautologiques. Supposons $\delta_3(q-1)=1$. On pose $\mathcal{Y}=\{0\}$. On a vu dans le paragraphe précédent que $FC^{st}(\mathfrak{g}^*(F))$ etait de dimension 2. On note cet espace $FC_0^{\mathcal{E}}$. L'argument de comparaison des dimensions montre que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}=\{0\}$ pour toute donnée endoscopique $\mathbf{G}'\neq\mathbf{G}$. Les assertions (2) et (3) de **??** s'en déduisent (où φ est l'unique bijection de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$).

8.8 Type E_6 quasi-déployé, E/F non ramifiée

On note E_0 l'extension quadratique non ramifiée de F. On fixe $\tau\in\Gamma_F-\Gamma_{E_0}$. On suppose que G est quasi-déployé de type E_6 et que Γ_F agit sur $\mathcal{D}$ de la façon suivante : l'action de Γ_{E_0} est triviale et τ agit par l'automorphisme θ. Dans les tables de Tits, le groupe est de type ${}^2E_6$. Un élément de $T_{ad}(F)$ s'écrit $\prod_{l=1,\ldots,6}\check{\varpi}_l(x_l)$ avec $x_2,x_4\in F^\times$, $x_1,x_3\in E_0^\times$ et $x_6=\tau(x_1)$, $x_5=\tau(x_3)$. Notons E_0^1 le groupe des éléments de $E_0^\times$ de norme 1 et $(E_0^1)^3=\{z^3;z\in E_0^1\}$. On définit un homomorphisme $T_{ad}(F)\to E_0^1/(E_0^1)^3$ par $\prod_{l=1,\ldots,6}\check{\varpi}_l(x_l)\mapsto\frac{x_1x_3^2}{\tau(x_1x_3^2)}$. De cet homomorphisme est issu un isomorphisme $G_{AD}(F)/\pi(G(F))\simeq T_{ad}(F)/\pi(T(F))\simeq E_0^1/(E_0^1)^3$. On a $G_{AD}(F)_0=G_{AD}(F)$. Remarquons que $E_0^1/(E_0^1)^3$ est $\{1\}$ si $\delta_3(q-1)=1$ et est d'ordre 3 si $\delta_3(q-1)=0$. Dans ce dernier cas, on note $\Xi_{\neq\mathbf{1}}$ l'ensemble des deux éléments non triviaux de Ξ.

Si $\delta_3(q-1)=1$, on pose $\mathcal{X}=\{4\}$ et $d_4=2$. Si $\delta_3(q-1)=0$, on pose $\mathcal{X}=\{(0,\xi);\xi\in\Xi_{\neq\mathbf{1}}\}\cup\{(2,\xi);\xi\in\Xi_{\neq\mathbf{1}}\}$ et $d_x=1$ pour tout $x\in\mathcal{X}$.

L'ensemble $\underline{S}(G)$ est en bijection avec les orbites de l'action galoisienne sur $\mathcal{D}_a$. Pour un sommet s paramétré par une orbite à deux éléments, le lemme **??** dit que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))=\{0\}$. Pour le sommet s paramétré par α_0, le groupe G_s est simplement connexe de type E_6, avec action du Frobenius par θ. D'après **??**, $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est nul si $\delta_3(q-1)=1$, de dimension 2 si $\delta_3(q-1)=0$. Dans ce dernier cas, on voit comme en **??** que les deux générateurs naturels de cet espace se transforment par le groupe $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ selon les deux éléments non triviaux de Ξ. Pour chaque $\xi\in\Xi_{\neq\mathbf{1}}$, il s'en déduit un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ et on note $FC_{0,\xi}$ la droite qu'il engendre. Pour le sommet s paramétré par α_2, on a $G_s=(SL(2)\times SU_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(6))/\{\pm1\}$. D'après **??**, $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est nul si $\delta_3(q-1)=1$, de dimension 2 si $\delta_3(q-1)=0$. Dans ce dernier cas, on voit comme en **??** que les deux générateurs naturels de l'espace se transforment par le groupe $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ selon les deux éléments non triviaux de Ξ. On en déduit comme ci-dessus des droites dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note $FC_{2,\xi}$ pour $\xi\in\Xi_{\neq\mathbf{1}}$. Pour le sommet s paramétré par α_4, on a $G_s=(SL(3)\times Res_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(SL(3)))/\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$, le plongement de $\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$ étant le même qu'en **??**. On voit comme dans ce paragraphe que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est nul si $\delta_3(q-1)=0$, de dimension 2 si $\delta_3(q-1)=1$, et que, dans ce dernier cas, les deux générateurs naturels sont invariants par $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. On en déduit deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ et on note FC_4 le plan qu'ils engendrent. Cela démontre **??**(1).

Si $\delta_3(q-1)=1$, on pose $\mathcal{Y}=\{0\}$. Si $\delta_3(q-1)=0$, on pose $\mathcal{Y}=\{(016,0,\xi;\xi\in\Xi_{\neq\mathbf{1}}\}\cup\{(016,134,\xi;\xi\in\Xi_{\neq\mathbf{1}}\}$.

Considérons un couple $(\sigma\mapsto\sigma_{G'},\mathcal{O})\in\mathcal{E}_{ell}(G)$.

Supposons d'abord $E_{G'}=E_0$. On a $\tau_{G'}\in\hat{\Omega}\tau_G=\hat{\Omega}\theta$. Or tout élément de $\hat{\Omega}\theta$ est conjugué à θ par un élément de $\hat{\Omega}$ donc, à équivalence près, on peut supposer $\tau_{G'}=\theta$. Le cas d'une orbite $\mathcal{O}$ à deux éléments est exclu par le lemme **??**. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_4\}$, resp. $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_2\}$, le groupe G'_{SC} contient un facteur $SL(3)$, resp. $SL(2)$, donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))=\{0\}$. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0\}$, on a $\mathbf{G}'=\mathbf{G}$ et, à ce point, on ne peut rien dire de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Supposons maintenant que $E_{G'}$ soit une extension de E_0 de degré 3. La structure de $\Gamma_{E_{G'}/F}$ est alors celle étudiée en **??**(3) : une telle extension $E_{G'}$ existe si et seulement si $\delta_3(q-1)=0$ et, si cette égalité est vérifiée, cette extension est unique. Supposons $\delta_3(q-1)=0$ et considérons cette extension $E_{G'}/F$. Elle est ramifiée. On a déjà fixé τ (on a forcément $\tau^2\in\Gamma_{E_{G'}}$) et on fixe un générateur ρ de $\Gamma_{E_{G'}/E_0}$. Comme ci-cessus, à équivalence près, on peut supposer $\tau_{G'}=\theta$. Il y a deux possibilités pour $\rho_{G'}$: $\rho_{G'}=\theta_3$, $\rho_{G'}=\theta_3^2$, qui ne sont pas équivalentes. Supposons $\rho_{G'}=\theta_3$. Notons K la sous-extension de $E_{G'}$ telle que $\Gamma_{E_{G'}/K}=\{1,\tau\}$. L'extension $E_{G'}/K$ est non ramifiée et l'extension K/F est ramifiée et non galoisienne. Remarquons que $\Gamma_{E_{G'}/K}$ est le fixateur de $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_2$ pour l'action galoisienne $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_4\}$, $G'_{SC}\simeq Res_{K/F}(SL(3))$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))=\{0\}$. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_2,\hat{\alpha}_3,\hat{\alpha}_5\}$, $G'_{SC}\simeq SL(2)\times Res_{K/F}(SL(2))$ et encore $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))=\{0\}$. Supposons $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_6\}$. D'après le lemme **??**, on peut remplacer G' par $G'_{SC}=Spin_{E_{G'}/F}(8)$, c'est-à-dire le groupe de type (C) étudié en **??**. On a vu dans ce paragraphe que l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est de dimension 2 et est somme de deux droites notées alors FC_0 et FC_{134} et que nous notons ici $FC_0(\mathfrak{g}'(F))$ et $FC_{134}(\mathfrak{g}'(F))$. Le groupe $Out(\mathbf{G}')$ est contenu dans celui des $\omega\in\hat{\Omega}$ qui commutent à $\sigma_{G'}$ pour tout σ, donc est réduit à 1. Calculons $\xi_{\mathbf{G}'}$. L'élément s figurant dans la donnée vérifie $\hat{\alpha}_1(s)=\hat{\alpha}_6(s)=j$ et $\hat{\alpha}_i(s)=1$ pour $i=2,...,5$, où j est une racine cubique de 1 dans $\mathbb{C}^\times$. On peut choisir $s_{sc}=\check{\hat{\alpha}}_1(j^2)\check{\hat{\alpha}}_2(j^2)\check{\hat{\alpha}}_4(j)\check{\hat{\alpha}}_6(j^2)$. On a $\hat{\theta}(s_{sc})=s_{sc}$ et $\hat{\theta}_3(s_{sc})s_{sc}^{-1}=z$ où $z=\check{\hat{\alpha}}_1(j^2)\check{\hat{\alpha}}_3(j)\check{\hat{\alpha}}_5(j^2)\check{\hat{\alpha}}_6(j)\in Z(\hat{G}_{SC})$. D'où $\rho_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1}=z$. Cela signifie que $\xi_{\mathbf{G}'}$ est un caractère d'ordre 3 de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. Supposons maintenant $\rho_{G'}=\theta_3^2$. Les résultats sont les mêmes, la seule différence étant le calcul de $\xi_{\mathbf{G}'}$: on a cette fois $\rho_{G'}(s_{sc})s_{sc}^{-1}=z^2$. Le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$ est encore un élément de Ξ d'ordre 3 mais il est différent du caractère précédent. Pour les deux éléments de $\Xi_{\neq\mathbf{1}}$, on a donc une unique donnée $\mathbf{G}'$ comme ci-dessus telle que $\xi_{\mathbf{G}'}=\xi$. On la note $\mathbf{G}'_{016,\xi}$ et on pose $FC^{\mathcal{E}}_{016,0,\xi}=FC_0(\mathfrak{g}'_{016,\xi}(F))$, $FC^{\mathcal{E}}_{016,134,\xi}=FC_{134}(\mathfrak{g}'_{016,\xi}(F))$.

Supposons $\delta_3(q-1)=1$. On pose $\mathcal{X}^{st}=\mathcal{X}$. On n'a construit ci-dessus aucune donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ telle que $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Out(\mathbf{G}')}\neq\{0\}$ mais on n'a pas traité la donnée principale $\mathbf{G}$. L'argument de comparaison des dimensions montre que $FC(\mathfrak{g}(F))=FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. On pose $FC^{\mathcal{E}}_0=FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ et les assertions (2), (3) et (4) de **??** sont immédiates (φ étant l'unique bijection de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$).

Supposons $\delta_3(q-1)=0$. On pose $\mathbb{X}=\{016,235\}$, $\mathbb{Y}=\{(016,0),(016,134)\}$ et on définit une bijection $\phi:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ par $\phi(016)=(016,0)$, $\phi(235)=(016,134)$. Elle se relève en une bijection $\varphi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. On pose $\mathcal{X}^{st}=\emptyset$. On a associé ci-dessus une droite $FC^{\mathcal{E}}_y$ à tout élément de $\mathcal{Y}$. L'argument de comparaison des dimensions entraîne que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))=\{0\}$. On a ainsi achevé la preuve de **??**(2) et prouvé **??**(4). Remarquons que $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ est le même qu'en **??**. On prouve alors **??**(3) de la même façon que dans ce paragraphe.

Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(1) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))=2\delta_3(q-1)$.

8.9 Type E_6 quasi-déployé, E/F ramifiée

On fixe une extension quadratique E/F ramifiée. On fixe $\tau\in\Gamma_F-\Gamma_E$. On suppose que G est quasi-déployé de type E_6 et que Γ_F agit sur $\mathcal{D}$ de la façon suivante : l'action de Γ_E est triviale et τ agit par l'automorphisme θ. Dans les tables de Tits, le groupe est de type F_4^I.

Si $\delta_3(q-1)=0$, on pose $\mathcal{X}=\{0\}$ et $d_0=1$. Si $\delta_3(q-1)=1$, on pose $\mathcal{X}=\{0,35\}$,

$d_0 = 1$ et $d_{0,35} = 2$.

Explicitons les descriptions de ?? et ??. On a $\mathcal{A}^{nr} = X_*(T)^{I_F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. L'ensemble Σ^{nr} est celui des β^{res} pour $\beta \in \Sigma$. On pose $\Delta = \{\beta_i; i = 1, ..., 6\}$. La base Δ^{nr} est égale à $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{35}, \alpha_{16}\}$, où $\alpha_2 = \beta_2^{res}$, $\alpha_4 = \beta_4^{res}$, $\alpha_{35} = \beta_3^{res} = \beta_5^{res}$, $\alpha_{16} = \beta_1^{res} = \beta_6^{res}$. L'ensemble de racines Σ^{nr} est de type F_4. On a $\alpha_0 = -\alpha_2 - 2\alpha_4 - 3\alpha_{35} - 2\alpha_{16}$ (rappelons que α_0 n'est pas l'opposée de la plus grande racine, c'est la racine telle que $-\check{\alpha}_0$ est la plus grande coracine). On a $e(\alpha_2) = e(\alpha_4) = 1$, $e(\alpha_0) = e(\alpha_{35}) = e(\alpha_{16}) = 2$. La relation (3) de ?? est

(1) $2\alpha_0 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4 + 6\alpha_{35} + 4\alpha_{16} = 0$.

C'est-à-dire $d(\alpha_0) = d(\alpha_2) = 2$, $d(\alpha_4) = d(\alpha_{16}) = 4$ et $d(\alpha_{35}) = 6$. On a $\alpha_0^{aff} = \frac{1}{2} + \alpha_0$. L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'identifie à celui des sommets de l'alcôve, donc à l'ensemble $\Delta_a^{nr} = \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{35}, \alpha_{16}, \alpha_0\}$. Introduisons le tore $\underline{T}$ défini et déployé sur $\mathbb{F}_q$ tel que $X_*(\underline{T}) = X_*(T)^{I_F}$. On le munit de l'ensemble de racines Σ^{nr}. Pour le sommet s associé à $\alpha \in \Delta_a^{nr}$, le groupe G_s est déployé, il a pour tore maximal $\underline{T}$ et pour ensemble de racines le sous-ensemble $\Sigma^{nr}(G_s)$ décrit en ??. On note s_0, s_{35} etc... le sommet attaché à α_0, α_{35} etc... On voit que G_{s_0} est de type F_4, $G_{s_2} = Sp(8)/\{\pm 1\}$, $G_{s_{\alpha_4}} = (SL(2) \times SL(4))/\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$, où $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$ s'envoie sur les éléments centraux évidents ζ^2 de $SL(2)$ et ζ de $SL(4)$, $G_{s_{\alpha_{3,5}}} = (SL(3) \times SL(3))/diag(\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q))$, $G_{s_{\alpha_{1,6}}} = (SL(2) \times Spin(7))/diag(\{\pm 1\})$. D'après ??, ?? et ??, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ pour $s = s_2, s_4, s_{16}$. D'après ??, $FC(\mathfrak{g}_{s_0}(\mathbb{F}_q))$ est une droite. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_0. D'après ??, $FC(\mathfrak{g}_{s_{35}}(\mathbb{F}_q))$ est de dimension 2 si $\delta_3(q-1) = 1$ et est nul sinon. Si $\delta_3(q-1) = 1$, on note FC_{35} le sous-espace de dimension 2 de $FC(\mathfrak{g}(F))$ issu de $FC(\mathfrak{g}_{s_{35}}(\mathbb{F}_q))$. Cela démontre ??(1).

On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $\mathcal{X}^{st} = \mathcal{X}$ et on note $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ l'identité. Prouvons que

(2) $FC(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

En admettant cela, on pose $FC_y^{\mathcal{E}} = FC_y$ pour tout $y \in \mathcal{Y} = \mathcal{X}$ et les assertions (2), (3) et (4) de ?? sont triviales.

Prouvons (2). Considérons un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. Le groupe $\hat{\Omega}$ est le même qu'en ??, il est d'ordre 3 et engendré par θ_3. Rappelons que $\omega_{G'}$ est un homomorphisme injectif de $\Gamma_{E_{G'}/E}$ dans $\hat{\Omega}$. Si l'image de cet homomorphisme est $\hat{\Omega}$ tout entier, le groupe $\Gamma_{E_{G'}/F}$ a une structure qui est interdite par ??(4). Donc l'image est réduite à $\{1\}$ et on a $E_{G'} = E$. Tout élément de $\hat{\Omega}\hat{\theta}$ est conjugué à $\hat{\theta}$ par un élément de $\hat{\Omega}$. A équivalence près, on peut donc supposer $\omega_{G'}(\tau) = 1$, c'est-à-dire $\sigma_{G'} = \sigma_G$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0\}$, on a $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$ et, comme toujours, on ne sait encore rien de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_2\}$, $\{\hat{\alpha}_4\}$, $\{\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_5\}$, on voit que G'_{SC} contient un facteur $SL(2)$, resp. $SL(3)$, $SL(4)$, donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$ d'après ??. Si $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_6\}$, le groupe G'_{SC} contient un facteur $Spin_{E/F}(10)$ et encore $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$ d'après ?? (1). La seule donnée possible est donc $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$, ce qui démontre (2).

Explicitons la conséquence de ??(4) :

(3) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = 1 + 2\delta_3(q-1)$.

8.10 Type E_6 quasi-déployé, E/F ramifiée, séparation des éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$

Le groupe G est celui du paragraphe précédent et on suppose $\delta_3(q-1) = 1$. On va introduire deux éléments $X_i \in \mathfrak{g}_{ell}(F)$ pour $i = 1, 2$ tels que

(1) les formes linéaires $f \mapsto S^G(X_i, f)$ pour $i = 1, 2$ sont nulles sur FC_0 et se restreignent en une base du dual de FC_{35}.

Explicitons les constructions de **??** et **??** pour les deux sommets s_0 et s_{35} associés aux racines $\alpha_0, \alpha_{35} \in \Delta_a^{nr}$. On a attaché à chacun de ces sommets divers objets que l'on affecte d'un indice 0 ou 35.

On a $\alpha(s_0) = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^{nr}$, $\Delta(U_{P_0}) = \{\alpha_4\}$ (d'après **??**) et, en utilisant **??**(1), on trouve que $r_0 = \frac{1}{6}$. Soit f_0 un élément non nul de FC_0. On peut supposer que f_0 est la fonction $\tilde{f}$ de **??** associée à s_0. Le lemme de ce paragraphe entraîne que

(2) le support de f_0 est contenu dans $\mathfrak{g}(F)_{\frac{1}{6}}$.

On a $\alpha_2(s_{35}) = \alpha_4(s_{35}) = \alpha_{16}(s_{35}) = 0$ et $\alpha_{35}(s_{35}) = \frac{1}{6}$. On a $\Delta_{U_{P_{35}}} = \Delta_a^{nr} - \{\alpha_{35}\}$ d'après **??**. On trouve que $r_{35} = \frac{1}{18}$. On a $\alpha(x_{35}) = \frac{1}{18}$ pour tout $\alpha \in \Delta^{nr}$. On calcule $b_{\alpha,35} = 0$ pour toute racine positive $\alpha \in \Sigma^{nr}$ et $b_{\alpha,35} = \frac{1}{e(\alpha)}$ pour toute racine négative. Rappelons que, d'après **??**(9), $\mathfrak{k}_{x_{35},r_{35}} = \mathfrak{k}_{s_{35}}[U_{P_{35}}]$ est le sous-espace des points fixes par Γ_F^{nr} dans

(3) $\mathfrak{k}_{x_{35},r_{35},F^{nr}} = \mathfrak{t}(F^{nr})_{\frac{1}{2}} \oplus \oplus_{\alpha\in\Sigma^{nr}} \mathfrak{u}(\alpha)_{b_{\alpha,35}}$.

Rappelons que $\mathfrak{g}_{s_{35}} \simeq \mathfrak{sl}(3) \oplus \mathfrak{sl}(3)$. On a défini en **??** un sous-espace $\mathfrak{g}_{s_{35},2}$. On peut l'identifier à la somme des deux sous-espaces de $\mathfrak{sl}(3)$ engendrés par les deux éléments de l'épinglage standard de cette algèbre. Les deux sous-espaces en question sont les images dans $\mathfrak{g}_{s_{35}}(\mathbb{F}_q)$ des sous-espaces des points fixes par Γ_F^{nr} dans $\mathfrak{u}(\alpha_2)_0 \oplus \mathfrak{u}(\alpha_4)_0$, resp. $\mathfrak{u}(\alpha_{16})_0 \oplus \mathfrak{u}(\alpha_0)_{\frac{1}{2}}$. L'espace $FC_{35}(\mathfrak{g}(F))$ a deux générateurs naturels qui sont issus d'éléments de $fc(\mathfrak{g}_{s_{35}}(\mathbb{F}_g))$. Notons $\tilde{f}_i$, pour $i = 1,2$ ces deux éléments. On a plus précisément $\tilde{f}_i = \tilde{f}_{N',\epsilon_i} \otimes \tilde{f}_{N'',\epsilon_i}$. Les deux facteurs vivent sur $\mathfrak{sl}(3)$; N' et N'' sont des éléments fixés de l'orbite ouverte dans chacun des espaces de dimension 2 que l'on vient de décrire, ils ne dépendent pas de i ; on a identifié les centres des deux facteurs $SL(3)$ et les ϵ_i pour $i = 1,2$ décrivent les deux caractères non triviaux de ce centre. On a fixé une famille de Chevalley $(E_\beta)_{\beta\in\Sigma}$ de $\mathfrak{g}(\bar{F})$. On a supposé que $\theta(E_\beta) = E_{\theta(\beta)}$ pour tout $\beta \in \Sigma$. Fixons une uniformisante ϖ_E de E telle que $\tau(\varpi_E) = -\varpi_E$. On peut supposer que N' est l'image de $E_2 + E_4$ dans la première copie de $\mathfrak{sl}(3)$, où on a posé $E_l = E_{\beta_l}$, et que N'' est l'image de $E_1 + E_6 + \varpi_E(E_{-123^24^256} - E_{-1234^25^26})$ dans la seconde copie, où on a posé par exemple, $E_{-123^24^256} = E_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3-2\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6}$. Soit v une racine de l'unité dans $F^\times$ d'ordre premier à p. Posons

$$(4) \qquad X(v) = vE_2 + E_4 + (E_3 + E_5) + (E_1 + E_6) + \varpi_E(E_{-123^24^256} - E_{-1234^25^26}).$$

Grâce à (3), on voit que $X(v)$ appartient à $\mathfrak{k}_{x_{35},r_{35}}$. On voit aussi que son image $\underline{X}(v)$ dans $\mathfrak{g}_{s_{35}}(\mathbb{F}_q) = \mathfrak{sl}(3)(\mathbb{F}_q) \oplus \mathfrak{sl}(3)(\mathbb{F}_q)$ est l'image du couple $(vE_2+E_4, E_1+E_6+\varpi_E(E_{-123^24^256} - E_{-1234^25^26}))$. La deuxième composante est N''. La première est conjuguée à N' par un élément de $GL(3)(\mathbb{F}_q)$ de déterminant v (en notant encore v l'image de ce terme dans $\mathbb{F}_q^\times$). Pour $i = 1,2$, ϵ_i s'identifie à un caractère de $\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times,3}$ et on obtient

(5) $\tilde{f}_i(\underline{X}(v)) = \epsilon_i(v)$.

Montrons que

(6) x_{35} est l'unique point $x \in Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ tel que $X(v) \in \mathfrak{k}_{x,r_{35},F^{nr}}$.

Soit un tel point x. Alors, pour tout y dans la géodésique joignant x à x_{35}, on a $X(v) \in \mathfrak{k}_{y,r_{35},F^{nr}}$. Le point x_{35} est à l'intérieur de l'alcôve C^{nr}. Si $x \neq x_{35}$, on peut donc choisir un point y dans la géodésique tel que $y \neq x_{35}$ et $y \in C^{nr}$. Ecrivons $X(v) = \sum_{\alpha\in\Sigma^{nr}} X(v,\alpha)$, avec $X(v,\alpha) \in \mathfrak{u}(\alpha)$. La condition $X(v) \in \mathfrak{k}_{y,r_{35},F^{nr}}$ équivaut à $X(v,\alpha) \in \mathfrak{u}(\alpha)_{-\alpha(y)+r_{35}}$ pour tout α. On voit sur la définition (4) que cela entraîne $-\alpha(y)+r_{35} \leq 0$ pour $\alpha \in \Delta^{nr}$ et $-\alpha_0(y) + r_{35} \leq \frac{1}{2}$. En posant $z = y - x_{35}$, cela équivaut à $\alpha(z) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_a^{nr}$. La relation (1) de **??** entraîne alors $z = 0$ contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction prouve (6).

Montrons que

(7) $X(v)$ est semi-simple régulier elliptique.

On décompose $X(v)$ en somme de sa partie semi-simple et de sa partie nilpotente : $X(v) = X(v)_s + X(v)_n$. La profondeur de $X(v)_s$ est la même que $X(v)$, donc $r(X(v)_s) \geq r_{35}$. Introduisons le commutant connexe $G' = G_{X(v)_s}$, qui devient un Levi de G sur $\bar{F}$. Notons $Imm_{F^{nr}}(G')$ son immeuble élargi. On affecte d'un $'$ les objets relatifs à cet immeuble. Cet immeuble se plonge dans $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. Modulo ce plongement, on a $\mathfrak{k}'_{x,r,F^{nr}} \subset \mathfrak{k}_{x,r,F^{nr}}$ pour tout point $x \in Imm_{F^{nr}}(G')$ et tout $r \in \mathbb{R}$. Si $X(v)_n \neq 0$, le groupe G' contient un tore maximal T' défini et maximalement déployé sur F^{nr} et tel qu'il existe $t \in T'(F^{nr})$ de sorte que $ad(t)^m(X(v)_n)$ tend vers 0 quand m tend vers l'infini. Soit $\mathcal{A}'$ l'appartement de $Imm_{F^{nr}}(G')$ associé à ce tore. Puisque $X(v)_s$ est central dans G' et $r(X(v)_s) \geq r_{35}$, on a $X(v)_s \in \mathfrak{k}'_{x,r_{35},F^{nr}}$ pour tout $x \in \mathcal{A}'$. Il est clair qu'il existe une infinité de points $x \in \mathcal{A}'$ tels que l'on ait aussi $X(v)_n \in \mathfrak{k}'_{x,r_{35},F^{nr}}$ (à partir d'un point x quelconque, le point $t^{-m}x$ vérifie cette condition pour m assez grand). Alors $X(v) \in \mathfrak{k}'_{x,r_{35},F^{nr}}$ donc aussi à $\mathfrak{k}_{x,r_{35},F^{nr}}$ pour une infinité de x, ce qui est exclu par (6). Cela prouve que $X(v)_n = 0$ et $X(v)$ est semi-simple. Par le même argument, $X(v)$ appartient à $\mathfrak{k}'_{x,r_{35},F^{nr}}$ pour tout point $x \in Imm_{F^{nr}}(G')$ et on conclut comme précédemment que cet immeuble est réduit à un point. Cela entraîne que tout sous-tore de G' qui est déployé sur F^{nr} est réduit à $\{1\}$. Un tel groupe G' est forcément un tore anisotrope sur F^{nr}. Un élément de $\mathfrak{g}(F^{nr})$ dont le commutant vérifie ces conditions est régulier elliptique. Cela démontre (7).

Pour tout point $x \in Imm(G_{AD})$ et tout $r \in \mathbb{R}$ tel que $r > r_{35}$, on a $X(v) \notin \mathfrak{k}_{x,r}$: sinon on a a fortiori $X(v) \in \mathfrak{k}_{x,r_{35}}$ donc $x = x_{35}$ d'après (6), or un calcul analogue à celui de (6) montre que $X(v) \notin \mathfrak{k}_{x_{35},r}$. Donc

(8) $r(X(v)) = r_{35} = \frac{1}{18}$.

On a aussi $r(X) = \frac{1}{18}$ pour tout élément X stablement conjugué à $X(v)$. Alors l'assertion (2) implique

(9) $S^G(f_0, X(v)) = 0$.

A l'aide de (5) et (6), on voit comme en **??** que

$S^G(\tilde{f}_i) = c\epsilon_i(v)$ pour $i = 1, 2$,

où c est une constante non nulle. On choisit un élément v tel que $\epsilon_1(v) \neq \epsilon_2(v)$. On pose $X_1 = X(1)$, $X_2 = X(v)$. Alors la deuxième condition de (1) est vérifiée. La première l'est d'après (9). Cela prouve (1).

8.11 Type E_6 quasi-déployé, E/F ramifiée, action d'un automorphisme

Le groupe G est comme en **??**. Il a un automorphisme θ. Celui-ci agit trivialement sur $\mathcal{A}^{nr}$ par définition de cet ensemble. Il fixe donc les sommets s_0 et s_{35} et donc aussi les réseaux $\mathfrak{k}_{s_0}$ et $\mathfrak{k}_{s_{35}}$.

On voit que $\mathfrak{g}_{s_0}(\mathbb{F}_q)$ est l'image par réduction du sous-$\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-module de $\mathfrak{k}_{s_0,F^{nr}}$ engendré par $X_*(T^{nr})$, par les E_β pour $\beta \in \Sigma$ tel que $\theta(\beta) = \beta$ et les $E_\beta + E_{\theta(\beta)}$ pour $\beta \in \Sigma$ tel que $\theta(\beta) \neq \beta$. Alors θ agit trivialement sur $\mathfrak{g}_{s_0}(\mathbb{F}_q)$, donc aussi sur FC_0.

Supposons $\delta_3(q-1) = 1$. On calcule $\theta(X(v))$ avec les notations du paragraphe précédent. On obtient

$$\theta(X(v)) = vE_2 + E_4 + (E_3 + E_5) + (E_1 + E_6) - \varpi_E(E_{-123^24^256} - E_{-1234^25^26}),$$

le dernier terme a changé de signe. Donc θ n'agit pas trivialement sur $\mathfrak{g}_{s_{35}}(\mathbb{F}_q)$. Toutefois, la réduction $red(\theta(X(v)))$ de $\theta(X(v))$ dans cet espace, lequel est isomorphe à $\mathfrak{sl}(3)(\mathbb{F}_q) \oplus \mathfrak{sl}(3)(\mathbb{F}_q)$, a la même première composante que la réduction $red(X(v))$ de $X(v)$ et une seconde composante conjuguée à celle de $red(X(v))$ par un élément de $GL(3, \mathbb{F}_q)$ de déterminant -1. Or -1 est un cube de $\mathbb{F}_q^\times$. Cela entraîne que les fonctions $\tilde{f}_i$, pour $i = 1, 2$, prennent la même valeur sur $red(X(v))$ et $red(\theta(X(v)))$, où encore que $\theta(\tilde{f}_i)(X(v)) = \tilde{f}_i(X(v))$ pour $i = 1, 2$. Puisque les évaluations sur $X(v)$ séparent les deux fonctions $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ quand v décrit les racines de l'unité de $F^\times$ d'ordre premier à p, on a $\theta(\tilde{f}_i) = \tilde{f}_i$ pour $i = 1, 2$. Donc θ agit trivialement sur FC_{35}.

8.12 Type E_7 déployé

On suppose G déployé de type E_7. On définit un homomorphisme $T_{ad}(F) \to F^\times/F^{\times,2}$ par $\prod_{l=1,\dots,7} \check{\varpi}_l(x_l) \mapsto x_2x_5x_7$. De cet homomorphisme est issu un isomorphisme $G_{AD}(F)/\pi(G(F)) \simeq T_{ad}(F)/\pi(T(F)) \simeq F^\times/F^{\times,2}$. L'image de $G_{AD}(F)_0$ est $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$. On note Ξ^{ram} le sous-ensemble à deux éléments de Ξ formé des éléments non triviaux sur $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$.

On pose $\mathcal{X}_0 = \{(0, \xi); \xi \in \Xi^{ram}\}$. Si $\delta_3(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{X}_3 = \emptyset$; si $\delta_3(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{X}_3 = \{(3, \xi); \xi \in \Xi^{ram}\}$. Si $\delta_4(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{X}_4 = \emptyset$; si $\delta_4(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{X}_4 = \{4\}$. On pose $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_3 \cup \mathcal{X}_4$, $d_x = 1$ pour $x \in \mathcal{X}_0$ et $d_x = 2$ pour $x \in \mathcal{X}_3 \cup \mathcal{X}_4$.

Le groupe d'automorphismes du diagramme $\mathcal{D}_a$ est le groupe a deux éléments $\{1, \omega\}$, où ω permute les sommets α_0 et α_7, α_1 et α_6, α_3 et α_5 et fixe les deux sommets α_2 et α_4. Le groupe $G_{AD}(F)$ agit sur le diagramme $\mathcal{D}_a$ par ce groupe d'automorphismes. L'ensemble $\underline{S}(G)$ s'envoie surjectivement sur celui des orbites de cette action, la fibre au-dessus d'une orbite ayant pour nombre d'éléments le nombre d'éléments de l'orbite. Pour un sommet s paramétré par l'orbite de α_0, le groupe G_s est simplement connexe de type E_7. D'après **??**, l'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite portée par un générateur $f_{N,\epsilon}$. Le centre de G s'identifie à celui de G_s et ϵ est non trivial sur ce centre. La fonction se transforme donc par le caractère non trivial de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$. Conformément à **??**, il se déduit de cette fonction deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ qui se transforment selon les deux caractères de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ prolongeant ce caractère non trivial, c'est-à-dire selon les deux éléments $\xi \in \Xi^{ram}$. Pour un tel caractère $\xi \in \Xi^{ram}$, on note $FC_{0,\xi}$ la droite portée par la fonction en question. Pour un sommet s paramétré par l'orbite de α_1, on a $G_{s,SC} = SL(2) \times Spin_{dep}(12)$ et $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après **??**. Pour un sommet paramétré par l'orbite de α_3, on a $G_s = (SL(3) \times SL(6))/\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Précisément $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$ s'envoie sur l'élément $\check{\alpha}_0(\zeta)\check{\alpha}_1(\zeta^2)$ du centre de $SL(3)$ et sur l'élément $\check{\alpha}_2(\zeta^2)\check{\alpha}_4(\zeta)\check{\alpha}_6(\zeta^2)\check{\alpha}_7(\zeta)$ du centre de $SL(6)$. Si $\delta_3(q-1) = 0$, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après **??**. Supposons $\delta_3(q-1) = 1$. Sur chacune des composantes $SL(3)$ et $SL(6)$, il y a deux fonctions du type $f_{N,\epsilon}$, d'où 4 fonctions produits tensoriels. Mais deux seulement se factorisent par $\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Le centre de G s'envoie sur le sous-groupe à deux éléments du centre de $SL(6)$ et le caractère ϵ de chacune de nos fonctions est non trivial sur ce groupe. Donc les deux fonctions se transforment selon le caractère non trivial de $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$. Il se déduit de nos deux fonctions 4 éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$. Pour chaque caractère $\xi \in \Xi$ prolongeant ce caractère non trivial, c'est-à-dire pour chaque $\xi \in \Xi^{ram}$, on obtient deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$ se transformant selon ξ. On note $FC_{3,\xi}$ le plan engendré par ces deux fonctions. Pour un sommet s paramétré par α_4, on a $G_s = (SL(4) \times SL(4) \times SL(2))/\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Précisément, $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$ s'envoie sur l'élément $\check{\alpha}_0(\zeta)\check{\alpha}_1(\zeta^2)\check{\alpha}_3(\zeta^3)$ du centre de la première composante, sur l'élément $\check{\alpha}_7(\zeta)\check{\alpha}_6(\zeta^2)\check{\alpha}_5(\zeta^3)$ du centre de la seconde et sur l'élément

$\check{\alpha}_2(\zeta^2)$ du centre de $SL(2)$. Si $\delta_4(q-1)=0$, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))=\{0\}$ d'après **??**. Supposons $\delta_4(q-1)=1$. Il y a deux fonctions du type $f_{N,\epsilon}$ sur chaque composante $SL(4)$ et une fonction de ce type sur $SL(2)$. D'où 4 fonctions produits tensoriels. Mais deux seulement se factorisent par $\boldsymbol{\zeta}_4(\mathbb{F}_q)$. L'élément non trivial du centre de G s'envoie sur le produit de l'élément trivial de la première composante $SL(4)$, de l'élément d'ordre 2 du centre de la seconde composante et de l'élement non trivial du centre de $SL(2)$. On voit que le produit des caractères ϵ vaut 1 sur cet élément donc nos fonctions sont invariantes par $G_{AD}(F)_0/\pi(G(F))$. Il se déduit de nos deux fonctions deux éléments de $FC(\mathfrak{g}(F))$. On note FC_4 le plan qu'elles engendrent. Pour le sommet s paramétré par α_2, on a $G_s=SL(8)/\{\pm 1\}$ et $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))=\{0\}$ d'après **??**. Cela démontre **??**(1).

On pose $\mathcal{Y}_0=\{(07,0,\xi);\xi\in\Xi^{ram}\}$. Si $\delta_3(q-1)=0$, on pose $\mathcal{Y}_3=\emptyset$; si $\delta_3(q-1)=1$, on pose $\mathcal{Y}_3=\{(07,35,\xi);\xi\in\Xi^{ram}\}$. On pose $\mathcal{Y}_4=\mathcal{X}_4$. On pose $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_0\cup\mathcal{Y}_3\cup\mathcal{Y}_4$.

Considérons un couple $(\sigma\mapsto\sigma_{G'},\mathcal{O})\in\mathcal{E}_{ell}(G)$. Le groupe $\hat{\Omega}$ est égal à $\{1,\hat{\omega}\}$, où $\hat{\omega}$ est similaire au ω ci-dessus (les diagrammes $\mathcal{D}_a$ et $\hat{\mathcal{D}}_a$ sont les mêmes).

Supposons que l'action $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$ soit triviale. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0\}$ ou $\{\hat{\alpha}_7\}$ (ces deux cas sont conjugués), on a $\mathbf{G}'=\mathbf{G}$ et, à ce point, on ne peut rien dire de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_m\}$, avec $m\in\{1,...,6\}$, on voit que le groupe G'_{SC} contient un facteur $SL(l)$ avec $l\geq 2$. Donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))=\{0\}$ d'après **??**.

Supposons que $E_{G'}/F$ soit quadratique et fixons un élément $\tau\in\Gamma_F-\Gamma_{E_{G'}}$. Alors $\tau_{G'}=\hat{\omega}$. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_4\}$, on a $G'_{SC}=Res_{E_{G'}/F}(SL(4))\times SL(2)$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))=\{0\}$. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_2\}$, on a $G'_{SC}=SU_{E_{G'}/F}(8)$ et encore $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))=\{0\}$ d'après **??** et **??** (5). Il ne reste que des orbites $\mathcal{O}$ a deux éléments. Le lemme **??** exclut le cas où $E_{G'}/F$ est non ramifiée. Supposons donc $E_{G'}/F$ ramifiée. On peut alors remplacer le groupe G' par G'_{SC}. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_6\}$ ou $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_3,\hat{\alpha}_5\}$, on voit que G'_{SC} contient un facteur $Res_{E_{G'}/F}(SL(2))$ ou $Res_{E_{G'}/F}(SL(3))$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))=\{0\}$ d'après **??**. Si $\mathcal{O}=\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_7\}$, le groupe G'_{SC} est de type E_6 avec action galoisienne non triviale par $\Gamma_{E_{G'}/F}$. D'après **??**, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ est de dimension $1+2\delta_3(q-1)$. Précisément, il est somme d'une droite notée FC_0 dans **??** et, si $\delta_3(q-1)=1$, d'un plan noté FC_{35}. Nous notons ici ces espaces $FC_0(\mathfrak{g}'(F))$ et $FC_{35}(\mathfrak{g}'(F))$. Le groupe d'automorphismes extérieurs de $\mathbf{G}'$ est $\hat{\Omega}$ et ce groupe agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$ d'après **??**. Calculons le caractère $\xi_{\mathbf{G}'}$. L'élément s de la donnée $\mathbf{G}'$ vérifie $\hat{\alpha}_l(s)=1$ pour $l=1,...,6$ et $\hat{\alpha}_7(s)=-1$. On peut choisir

$$s_{sc}=\check{\hat{\alpha}}_1(-1)\check{\hat{\alpha}}_2(i^{-1})\check{\hat{\alpha}}_4(-1)\check{\hat{\alpha}}_5(i)\check{\hat{\alpha}}_7(i^{-1}).$$

Alors $\hat{\omega}(s_{sc})s_{sc}^{-1}$ est l'élement non trivial du centre de $\hat{G}_{SC}$ donc $\xi_{\mathbf{G}'}$ est le caractère d'ordre 2 de Γ_F qui se factorise par $\Gamma_{E_{G'}/F}$. Quand $E_{G'}/F$ décrit les deux extensions quadratiques ramifiées de F, $\xi_{\mathbf{G}'}$ décrit les deux éléments de Ξ qui sont non triviaux sur le sous-groupe $\mathfrak{o}_F^{\times}/\mathfrak{o}_F^{\times,2}$ de $F^{\times}/F^{\times,2}$. Autrement dit les deux éléments de Ξ^{ram}. Pour un caractère $\xi\in\Xi^{ram}$, on note $\mathbf{G}'_{07,\xi}$ la donnée $\mathbf{G}'$ telle que $\xi_{\mathbf{G}'}=\xi$. On pose $FC^{\mathcal{E}}_{07,0,\xi}=FC_0(\mathfrak{g}'_{07,\xi}(F))$ et, si $\delta_3(q-1)=0$, $FC^{\mathcal{E}}_{07,35,\xi}=FC_{35}(\mathfrak{g}'_{07,\xi}(F))$.

On note $\varphi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ la bijection évidente qui envoie $\mathcal{X}_i$ sur $\mathcal{Y}_i$ pour $i=0,3,4$. On pose $\mathcal{X}^{st}=\mathcal{X}_4$.

Nous avons associé un espace $FC^{\mathcal{E}}_y$ à tout élément de $\mathcal{Y}-\mathcal{Y}_4$. On n'a pas traité la donnée principale $\mathbf{G}$. Par l'argument habituel de comparaison des dimensions, on voit que $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))=dim(FC_4)=2\delta_4(q-1)$. Si $\delta_4(q-1)=0$, la donnée principale ne contribue pas à l'espace $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ et on a achevé de prouver **??**(2), et en même temps **??**(4). Supposons $\delta_4(q-1)=1$. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))\subset I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))\cap FC(\mathfrak{g}(F))$. Or, pour $x\in\mathcal{X}_0\cup\mathcal{X}_3$, FC_x est contenu dans un espace $I_{cusp,\xi}(\mathfrak{g}(F))$ pour un caractère ξ non trivial. Donc $I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))\cap FC(\mathfrak{g}(F))$ est inclus dans l'orthogonal de ces espaces, c'est-à-dire dans FC_4. On obtient $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \subset FC_4$. Ces espaces étant de dimension 2, ils sont égaux. On complète la description **??**(2) en posant $FC_4^{\mathcal{E}} = FC_4$. On obtient en même temps **??**(4).

Il reste à démontrer **??**(3). Si $\delta_3(q-1) = 0$, c'est évident : on a forcément $transfert(\oplus_{x\in\mathcal{X}_0} FC_x) = \oplus_{y\in\mathcal{Y}_0} FC_y^{\mathcal{E}}$ d'après ce qui précède et les espaces intérieurs se séparent par les caractères $\xi \in \Xi^{ram}$ par lesquels agit le groupe $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. Supposons $\delta_3(q-1) = 1$. Posons $\mathcal{X}^\star = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_3$, $\mathcal{Y}^\star = \mathcal{Y}_0 \cup \mathcal{Y}_3$. On munit $\mathcal{X}^\star$ de la relation de préordre défini ainsi : pour $x \in \mathcal{X}_i$ et $x' \in \mathcal{X}_{i'}$, avec $i, i' \in \{0, 3\}$, $x \leq x'$ si et seulement si $i \leq i'$. On applique les constructions de **??**. L'ensemble $\underline{\mathcal{Y}}^\star$ s'identifie à $\{0, 3\}$ dont le plus petit élément (y_{min}) est 0. On pose $\underline{\mathcal{Y}}^\sharp = \underline{\mathcal{Y}}^\star - \{(y_{min})\}$. Il a un unique élément que l'on note (y) et qui n'est autre que $\mathcal{Y}_3$. On a $d_{(y)} = 4$. Pour réconcilier nos notations avec celles de **??**, on identifie l'ensemble $\{1, ..., 4\}$ avec $I = \{(\xi, i); \xi \in \Xi^{ram}, i = 1, 2\}$. Pour $(\xi, i) \in I$, on pose $\mathbf{G}'_{\xi,i} = \mathbf{G}'_{07,\xi}$. Pour chaque groupe $G'_{07,\xi}$, on a construit en **??** deux éléments $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}'_{07,\xi,reg}(F)$. Il n'est pas clair qu'ils soient G-réguliers. Mais, comme en **??**, on peut les remplacer par des éléments très voisins qui le sont. On fixe de tels éléments que l'on note $Y_{\xi,1}$ et $Y_{\xi,2}$. On associe à (y) les collections $(G'_{\xi,i})_{(\xi,i)\in I}$ et $(Y_{\xi,i})_{(\xi,i)\in I}$.

Montrons que les conditions de **??** sont satisfaites. La relation (1) de ce paragraphe est vérifiée comme plus haut par simple compatibilité du transfert avec les actions de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$. La condition (2) est satisfaite d'après notre description des espaces en question. Les conditions (3) et (4) résultent de la condition (1) de **??** et du fait que, pour un élément $(\xi, i) \in I$, un élément $y' \in \mathcal{Y}^\star$ et une fonction $f'_{y'} \in FC_{y'}^{\mathcal{E}}$, les définitions entraînent que $S^{G'_{07,\xi}}(Y_{\xi,i}, f'_{y'})$ ne peut être non nul que si l'élément ξ' qui figure dans y' est égal à ξ. Il reste à prouver la condition (5). Celle-ci se récrit sous la forme suivante :

(1) soient $x = (0, \xi') \in \mathcal{X}$, $f \in FC_x$, $(\xi, i) \in I$ et X un élément de $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison stable correspond à celle de $Y_{\xi,i}$; alors $I^G(X, f) = 0$.

D'après **??** (6), on a $r(X) = \frac{1}{18}$. Il suffit donc de prouver que le support de f est contenu dans $\mathfrak{g}(F)_r$ pour un $r > r(X)$. La fonction f est par définition combinaison linéaire de deux fonctions issues des sommets associés aux deux racines α_0 et α_7. Ces fonctions sont conjuguées par l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ et leurs supports sont aussi conjugués. Il suffit de considérer l'une d'elles, par exemple celle associée au sommet s_0 attaché à la racine α_0. C'est une fonction $\tilde{f}$ du type considéré en **??**. Le système de racines $\Sigma^{nr}(G_{s_0})$ de G_{s_0} est Σ tout entier. D'après **??**, on a $\Delta(U_{P_0}) = \{\alpha_4, \alpha_7\}$. On a $d(\alpha_0) = d(\alpha_7) = 1$ et $d(\alpha_4) = 4$. Alors le nombre r de **??** est égal à $\frac{1}{6}$, donc $\tilde{f}$ est à support dans $\mathfrak{g}(F)_{\frac{1}{6}}$. Cela démontre (1).

Alors le lemme de **??** nous dit que $transfert(FC_{(x)}) = FC^{\mathcal{E}}_{\varphi((x))}$ pour tout $(x) \in \underline{\mathcal{X}}^\star$. Comme d'habitude, l'action de $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ permet de raffiner cette égalité en $transfert(FC_x) = FC^{\mathcal{E}}_{\varphi(x)}$ pour tout $x \in \mathcal{X}^\star$. Cela prouve **??**(3).

Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(2) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))) = 2\delta_4(q-1)$.

8.13 Forme intérieure du type E_7

On suppose que G^* est de type E_7 et que G en est la forme intérieure non déployée. Si $\delta_4(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{X} = \emptyset$. Si $\delta_4(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{X} = \{4\}$ et $d_4 = 2$.

Le diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$ est le diagramme de Dynkin affine d'un système de racines de type E_7 sur lequel le Frobenius Fr agit par l'automorphisme ω non trivial. L'ensemble

$\underline{S}(G)$ est paramétré par l'ensemble des orbites de cette action. Pour un sommet s paramétré par une orbite à 2 éléments, le lemme **??** implique que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Pour le sommet s paramétré par $\{\alpha_2\}$, le groupe G_s est le même que dans le paragraphe précédent, avec une action galoisienne différente : on voit que $G_s = SU_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(8)/\{\pm 1\}$, d'où $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après **??**. Pour le sommet s paramétré par α_4, on trouve de même $G_s = (Res_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(SL(4)) \times SL(2))/\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, on a $G_s = (SL(4) \times SL(4) \times SL(2))/\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Notons Fr_{dep} l'action "naturelle" du Frobenius sur chacun des facteurs. L'action du Frobenius sur G_s est alors $(x, y, z) \mapsto (Fr_{dep}(y), Fr_{dep}(x), Fr_{dep}(z))$. Il y a sur chacun des facteurs $SL(4)$ deux faisceaux-caractères cuspidaux, paramétrés par les deux caractères d'ordre 4 de $\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Notons ces caractères ϵ' et ϵ'' et, pour ϵ l'un de ces caractères, notons $\mathcal{F}_{N_4,\epsilon}$ le faisceau-caractère associé. Il y a sur $SL(2)$ un unique faisceau-caractère, noté $\mathcal{F}_{N_2,\mu}$, où μ est le caractère non trivial de $\{\pm 1\}$. L'image par le Frobenius du faisceau $\mathcal{F}_{N_4,\epsilon_1} \otimes \mathcal{F}_{N_4,\epsilon_2} \otimes \mathcal{F}_{N_2,\mu}$ est $\mathcal{F}_{N_4,\epsilon_2 \circ Fr} \otimes \mathcal{F}_{N_4,\epsilon_1 \circ Fr} \otimes \mathcal{F}_{N_2,\mu}$, où ici, Fr est l'action du Frobenius sur $\bar{\mathbb{F}}_q$. Le faisceau-caractère est invariant par le Frobenius si et seulement si $\epsilon_1 = \epsilon_2 \circ Fr$ et $\epsilon_2 = \epsilon_1 \circ Fr$. Ces deux égalités sont équivalentes car Fr^2 agit trivialement sur $\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Supposons donc $\epsilon_1 = \epsilon_2 \circ Fr$. Pour que le faisceau-caractère se descende en un tel faisceau sur G_s, il faut et il suffit que $\epsilon_1 \times \epsilon_2 \times \mu$ soit trivial sur (ζ, ζ, ζ^2) pour tout $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$, c'est-à-dire $\epsilon_1(\zeta Fr(\zeta)) = \mu(\zeta^2)$. Cette égalité ne peut être vérifiée que si Fr est trivial sur $\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$, c'est-à-dire si $\delta_4(q-1) = 1$. Si $\delta_4(q-1) = 1$, elle est vérifiée pour les deux caractères $\epsilon_1 = \epsilon', \epsilon''$. On obtient dans ce cas deux faisceaux-caractères cuspidaux sur G_s, donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est de dimension 2. De cet espace se déduit un sous-espace de dimension 2 de $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_4. Cela démontre **??**(1).

On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ et on note $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ l'identité. On montre comme en **??** que l'espace $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ est réduit à $FC^{st}(\mathfrak{g}^*(F))$. Si $\delta_4(q-1) = 1$, on pose $FC_4^{\mathcal{E}} = FC^{st}(\mathfrak{g}^*(F))$ et les assertions (2) et (3) de **??** sont triviales.

8.14 Le type E_8

On suppose G déployé de type E_8.

On pose $\mathcal{X}_0 = \{0, 1, 8\}$. Si $\delta_3(q-1) = 0$, resp. $\delta_4(q-1) = 0$, resp. $\delta_5(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{X}_3 = \emptyset$, resp. $\mathcal{X}_4 = \emptyset$, resp. $\mathcal{X}_5 = \emptyset$. Si $\delta_3(q-1) = 1$, resp. $\delta_4(q-1) = 1$, resp. $\delta_5(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{X}_3 = \{4, 7\}$, resp. $\mathcal{X}_4 = \{6\}$, resp. $\mathcal{X}_5 = \{5\}$. On pose $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_3 \cup \mathcal{X}_4 \cup \mathcal{X}_5$, $d_x = 1$ pour $x \in \mathcal{X}_0$, $d_x = 2$ pour $x \in \mathcal{X}_3 \cup \mathcal{X}_4$, $d_x = 4$ pour $x \in \mathcal{X}_5$.

On a $G_{AD} = G$ donc l'action de $G_{AD}(F)$ sur $\underline{S}(G)$ est triviale. Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des racines du diagramme $\mathcal{D}_a$. On calcule aisément les divers groupes G_s en se rappelant l'égalité

$$\check{\alpha}_0 + 2\check{\alpha}_1 + 3\check{\alpha}_2 + 4\check{\alpha}_3 + 6\check{\alpha}_4 + 5\check{\alpha}_5 + 4\check{\alpha}_6 + 3\check{\alpha}_7 + 2\check{\alpha}_8 = 0.$$

Pour le sommet s paramétré par α_0, G_s est de type E_8 donc $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 1$ d'après **??**. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_0. Pour le sommet s paramétré par α_1, $G_s \simeq Spin_{dep}(16)/\{1, z'\}$, avec les notations de **??**. Donc $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 1$ d'après **??**. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_1. Pour le sommet s paramétré par α_2, $G_s = SL(9)/\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$, donc $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 0$ d'après **??**. Pour le sommet s paramétré par α_3, $G_s = (SL(8) \times SL(2))/\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$, un élément $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$ d'ordre 4 s'envoyant sur un élément central d'ordre 4 de $SL(8)$ et sur l'élément central d'ordre 2 de $SL(2)$. Donc $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 0$ d'après **??**. Pour le sommet s paramétré par α_4, on a $G_s = (SL(2) \times SL(3) \times SL(6))/\boldsymbol{\zeta}_6(\bar{\mathbb{F}}_q)$, un élément

$\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_6(\bar{\mathbb{F}}_q)$ d'ordre 6 s'envoyant sur un élément central d'ordre 6 de $SL(6)$, un élément central d'ordre 3 de $SL(3)$ et l'élément central d'ordre 2 de $SL(2)$. Si $\delta_3(q-1) = 0$, les facteurs $SL(6)$ et $SL(3)$ ne portent pas de fonctions de type $f_{N,\epsilon}$ donc $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 0$. Supposons $\delta_3(q-1) = 1$. Chaque facteur $SL(6)$ et $SL(3)$ porte deux telles fonctions et le facteur $SL(2)$ en porte une. On obtient 4 telles fonctions produits tensoriels mais seulement deux se factorisent par $\boldsymbol{\zeta}_6(\bar{\mathbb{F}}_q)$. D'où $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 2$. Il s'en déduit un plan dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_4. Pour le sommet s paramétré par α_5, on a $G_s = (SL(5) \times SL(5))/\boldsymbol{\zeta}_5(\bar{\mathbb{F}}_q)$, un élément $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_5(\bar{\mathbb{F}}_q)$ d'ordre 5 s'envoyant sur le produit de deux éléments centraux d'ordre 5 de chaque facteur $SL(5)$. Le groupe $SL(5)$ porte des fonctions $f_{N,\epsilon}$ si et seulement si $\delta_5(q-1) = 1$. Supposons cette condition vérifiée. Le groupe $SL(5)$ porte alors 4 telles fonctions. On obtient 16 fonctions produits tensoriels mais seulement 4 d'entre elles se factorisent par $\boldsymbol{\zeta}_5(\bar{\mathbb{F}}_q)$. D'où $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 4$. Il s'en déduit un sous-espace de dimension 4 de$FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_5. Pour le sommet s paramétré par α_6, on a $G_s = (Spin_{dep}(10) \times SL(4))/\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$, un élément d'ordre 4 de $\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$ s'envoyant sur le produit de deux éléments centraux d'ordre 4 de $SL(4)$ et $Spin_{dep}(10)$. Si $\delta_4(q-1) = 0$, les facteurs $SL(4)$ et $Spin_{dep}(10)$ ne portent pas de fonctions $f_{N,\epsilon}$. Supposons $\delta_4(q-1) = 1$. Chacun de ces facteurs porte 2 telles fonctions. On obtient 4 fonctions produits tensoriels mais seulement 2 d'entre elles se factorisent par $\boldsymbol{\zeta}_4(\bar{\mathbb{F}}_q)$. D'où $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 2$. Il s'en déduit un plan dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_6. Pour le sommet s paramétré par α_7, on a $G_s = (G_{E_6,SC} \times SL(3))/\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$. On a noté $G_{E_6,SC}$ le groupe déployé simplement connexe de type E_6. Un élément d'ordre 3 de $\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$ s'envoie sur le produit de deux éléments centraux d'ordre 3 de $SL(3)$ et $G_{E_6,SC}$. Par un même calcul que ci-dessus et grâce à **??**, $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 2\delta_3(q-1)$. Si $\delta_3(q-1) = 1$, il s'en déduit un plan dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_7. Pour le sommet s paramétré par α_8, on a $G_s = (G_{E_7,SC}) \times SL(2))/\{\pm 1\}$. On a noté $G_{E_7,SC}$ le groupe simplement connexe de type E_7. Le groupe $\{\pm 1\}$ s'envoyant diagonalement dans le produit des centres des deux facteurs. Grâce à **??**, on obtient $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 1$. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_8. Cela démontre **??** (1).

On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $\mathcal{X}^{st} = \mathcal{X}$ et on note $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ l'identité. Pour prouver les assertions (2), (3) et (4) de **??**, il suffit de prouver que

(1) $FC(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

On pose alors $FC^{\mathcal{E}}_y = FC_y$ pour tout $y \in \mathcal{Y} = \mathcal{X}$ et les assertions à démontrer sont triviales.

Prouvons (1). Considérons un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. Le groupe $\hat{\Omega}$ est trivial et l'action galoisienne sur G aussi, donc l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ est triviale. Pour $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0\}$, $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$. Pour $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_1\}$, $G'_{SC} = Spin_{dep}(16)$ donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$ d'après **??** (5). Pour $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_i\}$ avec $i \in \{2, ..., 8\}$, G'_{SC} contient un facteur $SL(m)$ avec $m \geq 2$. Donc encore $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$ d'après **??** (1). Donc $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F))$ est réduit à $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, ce qui prouve (1).

Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(2) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = 3 + 4\delta_3(q-1) + 2\delta_4(q-1) + 4\delta_5(q-1)$.

8.15 Le type F_4

On suppose G de type F_4. Donc G est déployé et $Z(G) = \{1\}$. Le groupe dual $\hat{G}$ est aussi de type F_4. On utilise les notations de Bourbaki pour les diagrammes des deux groupes mais mais on prendra garde que la correspondance naturelle entre les racines des deux groupes n'est pas compatible avec la numérotation de ces racines. Cela vient du fait que cette correspondance naturelle provient d'un isomorphisme $X^*(T) \simeq X_*(\hat{T})$ et échange en fait racines et coracines. Or une racine est longue si et seulement sa coracine est courte. Avec les notations de Bourbaki, la correspondance est donc $\alpha_i \mapsto \hat{\alpha}_{5-i}$ pour $i = 1, ..., 4$.

On pose $\mathcal{X}_0 = \{0, 1, 4\}$. Si $\delta_3(q-1) = 0$, resp. $\delta_4(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{X}_3 = \emptyset$, resp. $\mathcal{X}_4 = \emptyset$. Si $\delta_3(q-1) = 1$, resp. $\delta_4(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{X}_3 = \{2\}$, resp. $\mathcal{X}_4 = \{3\}$. On pose $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_3 \cup \mathcal{X}_4$, $d_x = 1$ pour $x \in \mathcal{X}_0$, $d_x = 2$ pour $x \in \mathcal{X}_3 \cup \mathcal{X}_4$.

On a $G_{AD} = G$ donc l'action de $G_{AD}(F)$ sur $S(G)$ est triviale. L'ensemble $\underline{S}(G)$ est en bijection avec l'ensemble des racines du diagramme $\mathcal{D}_a$. On calcule les groupes G_s en se rappelant la relation

$$\check{\alpha}_0 + 2\check{\alpha}_1 + 3\check{\alpha}_2 + 2\check{\alpha}_3 + \check{\alpha}_4 = 0.$$

Pour le sommet s correspondant à α_0, le groupe G_s est de type F_4 donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite d'après **??**. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_0. Pour le sommet s correspondant à α_1, le groupe G_s est isomorphe à $(SL(2) \times Sp(6))/\{\pm 1\}$, où $\{\pm 1\}$ s'identifie aux centres des deux composantes. Alors $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite d'après **??**. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_1. Pour le sommet s correspondant à α_2, le groupe G_s est isomorphe à $(SL(3) \times SL(3))/\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$, où $\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$ s'identifie aux centres des deux composantes. Si $\delta_3(q-1) = 0$, on a $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Supposons $\delta_3(q-1) = 1$. Il y a deux fonctions du type $f_{N,\epsilon}$ sur chaque composante $SL(3)$ donc 4 fonctions produits tensoriels mais seulement deux d'entre elles se quotientent par $\boldsymbol{\zeta}_3(\bar{\mathbb{F}}_q)$. D'où $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 2$. Il s'en déduit un plan dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_2. Pour le sommet s correspondant à α_3, le groupe G_s est isomorphe à $(SL(4) \times SL(2))/\{\pm 1\}$, le groupe $\{\pm 1\}$ s'identifiant au centre de $SL(2)$ et au sous-groupe d'ordre 2 du centre de $SL(4)$. L'espace $\mathfrak{sl}(2)(\mathbb{F}_q)$ porte une fonction du type $f_{N,\epsilon}$. Si $\delta_4(q-1) = 0$, l'espace $\mathfrak{sl}(4)(\mathbb{F}_q)$ n'en porte pas. Supposons $\delta_4(q-1) = 1$. Alors cet espace porte 2 telles fonctions et le produit tensoriel de chacune d'elles avec la fonction sur $\mathfrak{sl}(2)(\mathbb{F}_q)$ se quotiente par $\{\pm 1\}$. Donc $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 2$. Il s'en déduit un plan dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_3. Pour le sommet s correspondant à α_4, le groupe G_s est isomorphe à $Spin_{dep}(9)$, donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite d'après **??**. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_4.Cela achève la preuve de **??**(1).

On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $\mathcal{X}^{st} = \mathcal{X}$ et on note $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ l'identité. Pour prouver les assertions (2), (3) et (4) de **??**, il suffit de prouver que

(1) $FC(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

On pose alors $FC^{\mathcal{E}}_y = FC_y$ pour tout $y \in \mathcal{Y} = \mathcal{X}$ et les assertions à démontrer sont triviales.

Prouvons (1). Considérons un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. Le groupe $\hat{\Omega}$ est trivial et l'action galoisienne sur G aussi, donc l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ est triviale. Pour $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0\}$, on a $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$. Pour $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_1\}$, resp. $\{\hat{\alpha}_2\}$, $\{\hat{\alpha}_3\}$, le groupe G'_{SC} contient un facteur $SL(2)$, resp. $SL(3)$, $SL(4)$, donc $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$ d'après **??**. Pour $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_4\}$, le groupe G'_{SC} est $Sp(8)$ et encore $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$ d'après **??**. Cela démontre que $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, d'où (1).

Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(2) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))) = 3 + 2\delta_3(q-1) + 2\delta_4(q-1)$.

8.16 Le type G_2

On suppose G de type G_2. Donc G est déployé et $Z(G) = \{1\}$. Le groupe dual $\hat{G}$ est aussi de type G_2. On utilise les notations de Bourbaki pour les diagrammes des deux groupes mais, comme en **??**, on prendra garde que la correspondance naturelle entre les racines des deux groupes n'est pas compatible avec la numérotation de ces racines.

On pose $\mathcal{X}_0 = \{0, 2\}$. Si $\delta_3(q-1) = 0$, on pose $\mathcal{X}_3 = \emptyset$. Si $\delta_3(q-1) = 1$, on pose $\mathcal{X}_3 = \{1\}$. On pose $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_3$, $d_x = 1$ pour $x \in \mathcal{X}_0$ et $d_x = 2$ pour $x \in \mathcal{X}_3$.

On a $G_{AD} = G$ donc l'action de $G_{AD}(F)$ sur $S(G)$ est triviale. L'ensemble $\underline{S}(G)$ est en bijection avec l'ensemble des racines du diagramme $\mathcal{D}_a$. Pour le sommet s correspondant à α_0, le groupe G_s est de type G_2 donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite d'après **??**. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_0. Pour le sommet s correspondant à α_1, on a $G_s \simeq SL(3)$. D'où $dim(FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))) = 2\delta_3(q-1)$. Si $\delta_3(q-1) = 1$, il s'en déduit un plan dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_1. Pour le sommet s correspondant à α_2, on a $G_s \simeq (SL(2) \times SL(2))/\{\pm 1\}$, donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite. Il s'en déduit une droite dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ que l'on note FC_2. Cela démontre **??**(1).

On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $\mathcal{X}^{st} = \mathcal{X}$ et on note $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ l'identité. Pour prouver les assertions (2), (3) et (4) de **??**, il suffit de prouver que

(1) $FC(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

On pose alors $FC_y^{\mathcal{E}} = FC_y$ pour tout $y \in \mathcal{Y} = \mathcal{X}$ et les assertions à démontrer sont triviales.

Considérons un couple $(\sigma \mapsto \sigma_{G'}, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}_{ell}(G)$. Ici, le groupe $\hat{\Omega}$ est trivial et l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ aussi. Donc l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ est triviale. Pour $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_0\}$, on a $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$. Pour $\mathcal{O} = \{\hat{\alpha}_1\}$, resp. $\{\hat{\alpha}_2\}$, on voit que G'_{SC} est $SL(3)$, resp. $SL(2) \times SL(2)$. D'après **??**, $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) = \{0\}$. Cela démontre que $FC^{\mathcal{E}}(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, d'où (1).

Explicitons la conséquence de **??**(4) :

(2) $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F))) = 2(1 + \delta_3(q-1))$.

9 Résumé des résultats pour l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$

Nous allons passer en revue les résultats obtenus pour l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. En **??**, on n'a défini cet espace que dans le cas où G est quasi-déployé (en nous conformant au principe d'Arthur selon lequel la notion de stabilité ne joue un rôle que pour un tel groupe). Ici, nous étendons la définition en supprimant cette condition : que G soit quasi-déployé ou non, on pose $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G})$, cf. **??**.

On a fixé une chambre $C^{nr} \subset Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ conservée par l'action de Γ_F^{nr} et noté $\underline{S}(G)$ l'ensemble des sommets de $Imm(G_{AD})$ contenus dans l'adhérence de C^{nr}. D'après **??**(1), $FC(\mathfrak{g}(F))$ s'identifie à $\oplus_{s \in \underline{S}(G)} FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. Pour $s \in \underline{S}(G)$, posons $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \cap FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Une conséquence de nos résultats est

(1) $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{s \in \underline{S}(G)} FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$.

On note $\underline{S}^{st}(G)$ le sous-ensemble des $s \in \underline{S}(G)$ tels que $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$. Notons $\underline{S}_{F^{nr}}(G)$ l'ensemble des sommets de l'immeuble $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ contenus dans l'adhérence de C^{nr}. En général, un sommet de $Imm(G_{AD})$ ne reste pas un sommet dans $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. Toutefois, le lemme **??** dit que c'est le cas pour tout sommet s tel que $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$, a fortiori pour tout $s \in \underline{S}^{st}(G)$. On peut donc considérer $\underline{S}^{st}(G)$ comme un sous-ensemble de $\underline{S}_{F^{nr}}(G)$. Soit F' une extension finies non ramifiée de F. Remplaçant le corps de base F par F', on définit un ensemble que nous notons $\underline{S}_{F'}^{st}(G)$, qui est encore inclus dans $\underline{S}_{F^{nr}}(G)$. Notons $\underline{S}_{F^{nr}}^{st}(G)$ la réunion des $\underline{S}_{F'}^{st}(G)$ quand F' parcourt les extensions finies non ramifiées F' de F. Une conséquence de nos résultats est

(2) pour tout $s \in \underline{S}_{F^{nr}}^{st}(G)$, il existe un entier $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que $s \in \underline{S}^{st}(G)$ si et seulement si $\delta_a(q-1) = 1$.

Remarquons que, pour $a=1$, la condition $\delta_1(q-1)=1$ est toujours vérifiée. D'autre part, il résulte de (2) que, pour deux groupes G, G' définis sur F et isomorphes sur F^{nr}, on a $\underline{S}^{st}(G)=\underline{S}^{st}(G')$. En fait, nos résultats sont plus précis :

(3) pour $s\in\underline{S}^{st}(G)=\underline{S}^{st}(G')$, on a $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)))=dim(FC^{st}(\mathfrak{g}'_s(\mathbb{F}_q)))$.

La description explicite est la suivante. On y identifie $\underline{S}_{F^{nr}}(G)$ à Δ_a^{nr} par l'application $\alpha\mapsto s_\alpha$.

(A_{n-1},nr) Supposons que G est de type A_{n-1} avec $n\geq 2$ et que G est déployé sur F^{nr}. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))=\{0\}$.

(A_{n-1},ram) Supposons que G est de type A_{n-1} avec $n\geq 3$, que G n'est pas déployé sur F^{nr} mais l'est sur l'extension quadratique de F^{nr}. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $n=h^2+k(k+1)$ avec $h,k\in\mathbb{N}$ et $h=k$ ou $h=k+1$. Si cette condition est vérifiée, $\underline{S}^{st}(G)=\{\alpha^{res}_{[h^2/2]}\}$ et $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)))=1$.

(B_n) Supposons que G est de type B_n avec $n\geq 2$. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $2n+1=k^2+h^2$ avec $h,k\in\mathbb{N}$, k est pair, h est impair et $|k-h|=1$. Si cette condition est vérifiée, $\underline{S}^{st}(G)=\{\alpha_{k^2/2}\}$ et $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)))=1$.

(C_n) Supposons que G est de type C_n avec $n\geq 2$. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $n=k(k+1)$ avec $k\in\mathbb{N}$. Si cette condition est vérifiée, $\underline{S}^{st}(G)=\{\alpha_{k(k+1)/2}\}$ et $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)))=1$.

(D_n,nr) Supposons que G est de type D_n avec $n\geq 4$ et que G est déployé sur F^{nr}. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $n=k^2$ avec $k\in\mathbb{N}$ et k pair. Si cette condition est vérifiée, $\underline{S}^{st}(G)=\{\alpha_{k^2/2}\}$ et $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)))=1$.

(D_n,ram) Supposons que G est de type D_n avec $n\geq 4$, que G n'est pas déployé sur F^{nr} mais l'est sur l'extension quadratique de F^{nr}. Alors $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))\neq\{0\}$ si et seulement si $n=k^2$ avec $k\in\mathbb{N}$ et k impair. Si cette condition est vérifiée, $\underline{S}^{st}(G)=\{\alpha^{res}_{(k^2-1)/2}\}$ et $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}(F)))=1$.

$(D_n,3-ram)$ Supposons que G est de type D_4, que G n'est pas déployé sur F^{nr} mais l'est sur l'extension de F^{nr} de degré 3. Alors $\underline{S}^{st}(G)=\{\alpha_0,\alpha_{134}\}$, où on rappelle que $\alpha_{134}=\alpha_1^{res}=\alpha_3^{res}=\alpha_4^{res}$. On a $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_0}}(\mathbb{F}_q)))=dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_{134}}}(\mathbb{F}_q)))=1$.

(E_6,nr) Supposons que G est de type E_6 et que G est déployé sur F^{nr}. Alors $\underline{S}^{st}_{F^{nr}}(G)=\{\alpha_4\}$ et $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_4}}(\mathbb{F}_q)))=2\delta_3(q-1)$.

(E_6,ram) Supposons que G est de type E_6, que G n'est pas déployé sur F^{nr} mais l'est sur l'extension quadratique E de F^{nr}. Alors $\underline{S}^{st}_{F^{nr}}(G)=\{\alpha_0,\alpha_{35}\}$. On a $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_0}}(\mathbb{F}_q)))=1$ et $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_{35}}}(\mathbb{F}_q)))=2\delta_3(q-1)$.

(E_7) Supposons que G est de type E_7. Alors $\underline{S}^{st}_{F^{nr}}(G)=\{\alpha_4\}$ et $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_4}}(\mathbb{F}_q)))=2\delta_4(q-1)$.

(E_8) Supposons que G est de type E_8. Alors $\underline{S}^{st}_{F^{nr}}(G)=\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8\}$. On a $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_0}}(\mathbb{F}_q)))=dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_1}}(\mathbb{F}_q)))=dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_8}}(\mathbb{F}_q)))=1$, $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_4}}(\mathbb{F}_q)))=dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_7}}(\mathbb{F}_q)))=2\delta_3(q-1)$, $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_6}}(\mathbb{F}_q)))=2\delta_4(q-1)$, $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_5}}(\mathbb{F}_q)))=4\delta_5(q-1)$.

(F_4) Supposons que G est de type F_4. Alors $\underline{S}^{st}_{F^{nr}}(G)=\Delta_a^{nr}$, $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_0}}(\mathbb{F}_q)))=dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_1}}(\mathbb{F}_q)))=dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_4}}(\mathbb{F}_q)))=1$, $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_2}}(\mathbb{F}_q)))=2\delta_3(q-1)$, $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_3}}(\mathbb{F}_q)))=2\delta_4(q-1)$.

(G_2) Supposons que G est de type G_2. Alors $\underline{S}^{st}_{F^{nr}}(G)=\Delta_a^{nr}$, $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_0}}(\mathbb{F}_q)))=dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_2}}(\mathbb{F}_q)))=1$ et $dim(FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_{\alpha_1}}(\mathbb{F}_q)))=2\delta_3(q-1)$.

Notons $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$ le groupe d'automorphismes du diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$. On constate que

(4) tout élément de $\underline{S}^{st}(G)$ est fixé par $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$.

Soit θ un automorphisme de G défini sur F. Une dernière propriété utile est

(5) supposons G quasi-déployé ; si G n'est pas du type (A_{n-1}, ram) ci-dessus, θ agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$; si G est du type (A_{n-1}, ram) et que l'image de θ dans le groupe des automorphismes extérieurs de G est non triviale, θ agit sur $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ par multiplication par $sgn(-1)^{[(h+k+2)/4]}$.

Preuve. On peut supposer $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \neq \{0\}$. Puisque $G_{AD}(F)$ agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, on peut supposer que θ conserve l'épinglage fixé en **??**. On peut supposer aussi que θ n'est pas l'identité. Le cas (A_{n-1}, ram) est traité en **??**. Supposons que G soit de type D_n avec $n \geq 4$ et que θ soit d'ordre 2. On peut réaliser $\mathfrak{g}$ comme l'algèbre de Lie d'un groupe spécial orthogonal et θ comme l'action d'un élément du groupe orthogonal de déterminant -1. En reprenant nos constructions, on voit qu'une fonction $f \in FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ a dans son support un élément fixe par θ. La fonction est donc elle-même fixée par θ. Supposons que G soit de type D_4 et que θ soit d'ordre 3. Si G n'est pas déployé sur F^{nr}, il ne peut être que du type $(D_4, 3-ram)$ (sinon θ ne serait pas défini sur F). Ce cas est traité en **??**. Supposons G déployé sur F^{nr}. Pour la même raison, G est déployé ou du type (A) de **??**. Alors $\underline{S}^{st}(G) = \{\alpha_2\}$. On a $G_{s_{\alpha_2}} \simeq SL(2)^4/diag(\{\pm 1\})$ dans le cas déployé et $G_{s,\alpha_2} \simeq (Res_{\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q}(SL(2)) \times SL(2))/diag(\{\pm 1\})$ sinon. L'automorphisme θ agit par permutation des facteurs dans le premier cas. Dans le second, l'action de θ sur l'ensemble de racines de $G_{s_{\alpha_2}}$ coïncide avec celle du Frobenius. On voit en tout cas qu'une fonction $f \in FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ a dans son support un élément fixe par θ. La fonction est donc elle-même fixée par θ. Considérons le cas où G est de type E_6 et est déployé sur F^{nr} et où $\delta_3(q-1) = 1$. On a construit deux droites dans $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, indexées par deux caractères du centre de G_{s_4}. Un calcul comme ci-dessus montre que θ préserve ces deux caractères et que les fonctions de chacune de ces droites ont dans leur support un élément fixe par θ. Les deux droites sont donc fixées par θ. Enfin, le cas où G est de type (E_6, ram) est traité en **??**. Cela prouve (4).

Références

[1] N. Bourbaki : *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann 1968

[2] S. DeBacker, D. Kazhdan : *Stable distributions supported on the nilpotent cone for the group G_2*, in *The unity of mathematics*, Prog. Math. 244, Birkhäuser 2006, p. 205-262

[3] T. Haines, M. Rapoport : *On parahoric subgroups*, appendice à G.Pappas, M. Rapoport *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. in Math. 219 (2008), p. 118-198

[4] R. Kottwitz : *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Annalen 275 (1986), p. 365-399

[5] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[6] B. Lemaire, J.-L. Waldspurger : *Données endoscopiques d'un groupe réductif connexe : applications d'une construction de Langlands*, prépublication 2019

[7] G. Lusztig : *Fourier transform on a semi-simple Lie algebra over $\mathbb{F}_q$*, in *Algebraic groups, Utrecht 1986*, Springer LN 1271 (1987), p. 177-188

[8] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Stabilisation de la formule des traces tordue*, volume 1, Progress in Math. 316, Birkhäuser 2016

[9] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *: Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour* $SO(2n+1)$, Invent. Math. 152 (2003), p. 461-623

[10] J. Tits : *Reductive groups over local fields*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. of Symp. in Pure Math XXXIII, part 1, AMS 1979, p. 29-70

[11] J.-L. Waldspurger : *Fonctions dont les intégrales orbitales et celles de leurs transformées de Fourier sont à support topologiquement nilpotent*, prépublication 2019

[12] J.-L. Waldspurger : *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque 269 (2001)

jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr
Institut de mathématiques de Jussieu-Paris rive gauche
4 place Jussieu
Boîte courrier 247
75252 Paris cedex 05