Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad

J.-L. Waldspurger

10 février 2009

Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. Soit V un espace vectoriel sur F, de dimension finie d, muni d'une forme quadratique non dégénérée q. On suppose donnée une décomposition en somme directe de sous-espaces orthogonaux deux à deux $V = W \oplus D \oplus Z$. On suppose que D est une droite et que Z est muni d'une base $\{v_i; i = \pm 1, ..., \pm r\}$ telle que $q(v_i, v_j) = \delta_{i,-j}$ pour tous i, j, où $\delta_{i,-j}$ est le symbole de Kronecker. On note G, resp. H, le groupe spécial orthogonal de V, resp. W, et U le radical unipotent du sous-groupe parabolique de G qui conserve le drapeau de sous-espaces isotropes

$$Fv_r \subset Fv_r \oplus Fv_{r-1} \subset ... \subset Fv_r \oplus ... \oplus Fv_1.$$

Fixons un élément non nul $v_0 \in D$ et un caractère continu non trivial ψ de F. Définissons un caractère ξ de $U(F)$ par la formule

$$\xi(u) = \psi(\sum_{i=0,...,r-1} q(uv_i, v_{-i-1})).$$

Le groupe H est le sous-groupe des éléments de G qui agissent par l'identité sur $D \oplus Z$. Il normalise U et la conjugaison par $H(F)$ conserve ξ (ξ est essentiellement le caractère de $U(F)$ le plus régulier possible qui soit conservé par cette conjugaison). Soient π, resp. σ, une représentation admissible irréductible de $G(F)$, resp. $H(F)$, dans un espace (complexe) E_π, resp. E_σ. Notons $Hom_{H,\xi}(\pi, \sigma)$ l'espace des applications linéaires φ : $E_\pi \to E_\sigma$ telles que

$$\varphi(\pi(hu)e) = \xi(u)\sigma(h)\varphi(e)$$

pour tous $u \in U(F)$, $h \in H(F)$, $e \in E_\pi$. D'après [AGRS] théorème 1' et [GGP] corollaire 20.4, cet espace est de dimension 0 ou 1. On note $m(\sigma, \pi)$ cette dimension.

Supposons maintenant que G et H sont quasi-déployés sur F et affectons les données V, W, q, G et H d'un indice i (pour "isotrope"). Dans cette introduction, supposons pour simplifier $dim(W_i) \geq 3$. On sait qu'à isomorphisme près, il existe un unique espace V_a (a pour "anisotrope") de même dimension d que V_i, muni d'une forme quadratique q_a de même discriminant que q_i mais qui n'est pas isomorphe à q_a (c'est-à-dire d'indice de Witt opposé). Il existe de même un unique espace W_a de même dimension que W_i, muni d'une forme quadratique de même discriminant que la restriction de q_i à W_i, mais qui n'est pas isomorphe à cette restriction. On vérifie que V_a est encore isomorphe à la somme directe orthogonale $W_a \oplus D \oplus Z$, où les formes quadratiques sur D et Z sont les mêmes que précédemment. On note G_a, resp. H_a, le groupe spécial orthogonal de V_a, resp. W_a. C'est une forme intérieure de G_i, resp. H_i.

La conjecture locale de Gross-Prasad suppose l'existence des L-paquets et certaines de leurs propriétés. On y reviendra ci-dessous. Gross et Prasad énoncent leur conjecture pour les L-paquets génériques. On se limite ici aux L-paquets tempérés. Soit Π_i, resp. Σ_i, un L-paquet de représentations tempérées de $G_i(F)$, resp. $H_i(F)$. Il peut lui correspondre un L-paquet Π_a, resp. Σ_a, de représentations tempérées de $G_a(F)$, resp. $H_a(F)$. Ce L-paquet est alors unique. Ou bien, il n'y a pas de tel L-paquet Π_a, resp. Σ_a. Dans ce cas, on pose $\Pi_a = \emptyset$, resp. $\Sigma_a = \emptyset$. En tout cas, pour $(\sigma, \pi) \in (\Sigma_i \times \Pi_i) \cup (\Sigma_a \times \Pi_a)$, la dimension $m(\sigma, \pi)$ est définie.

Conjecture (Gross-Prasad). *Il existe un unique couple $(\sigma, \pi) \in (\Sigma_i \times \Pi_i) \cup (\Sigma_a \times \Pi_a)$ tel que $m(\sigma, \pi) = 1$.*

C'est une partie de la conjecture 6.9 de [GP]. Décrivons les propriétés des L-paquets tempérés que nous admettrons (on les énonce pour le couple (Π_i, Π_a), mais on admet les propriétés similaires pour le couple (Σ_i, Σ_a)). Notons $\sharp$ l'un des indices i ou a. Rappelons qu'à toute représentation admissible irréductible π de $G_\sharp(F)$ est associé un caractère θ_π que l'on peut considérer comme une distribution ou comme une fonction localement intégrable sur $G_\sharp(F)$. Dans le cas du groupe G_i, on sait définir la notion de modèle de Whittaker de π. Plus exactement, il y a une notion de modèle de Whittaker relatif à $\mathcal{O}$ pour chaque orbite nilpotente régulière $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_i(F)$ (pour tout groupe réductif L, on note $\mathfrak{l}$ son algèbre de Lie). On suppose

(1) pour $\sharp = i$ ou a, $\Pi_\sharp$ est un ensemble fini, non vide si $\sharp = i$, et la distribution $\theta_{\Pi_\sharp} = \sum_{\pi \in \Pi_\sharp} \theta_\pi$ sur $G_\sharp(F)$ est stable ;

(2) le transfert à $G_a(F)$ de la distribution θ_{Π_i} est $(-1)^d \theta_{\Pi_a}$ (en particulier est nul si $\Pi_a = \emptyset$) ;

(3) pour toute orbite nilpotente régulière $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_i(F)$, il existe un et un seul élément de Π_i qui admet un modèle de Whittaker relatif à $\mathcal{O}$.

On reviendra sur ces propriétés en 13.2. Notre résultat est le suivant.

Théorème. *Supposons vérifiées les propriétés ci-dessus. Supposons de plus que Π_i et Π_a soient formés uniquement de représentations supercuspidales. Alors la conjecture ci-dessus est vérifiée.*

Ce théorème résulte d'une formule intégrale qui calcule la dimension $m(\sigma, \pi)$ à l'aide des caractères de σ et π, dans le cas où π est supercuspidale. Revenons aux notations du début en abandonnant les indices i et a. Considérons l'ensemble des sous-tores $T \subset H$ pour lesquels il existe une décomposition en somme directe orthogonale $W = W' \oplus W''$ de sorte que

- la dimension de W' est paire et les groupes spéciaux orthogonaux H'' de W'' et G'' de $V'' = W'' \oplus D \oplus Z$ sont quasi-déployés sur F ;

- le tore T est un sous-tore maximal du groupe spécial orthogonal de W' et il ne contient aucun sous-tore déployé non trivial.

On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{T}$ des classes de conjugaison par $H(F)$ dans cet ensemble de tores. Soit $T \in \mathcal{T}$. On lui associe des groupes H'' et G'' comme ci-dessus.

Soit π une représentation admissible irréductible de $G(F)$. Harish-Chandra a décrit le comportement local du caractère θ_π. Soit x un élément semi-simple de $G(F)$. Notons G_x la composante neutre du commutant de x dans G. Alors, pour toute orbite nilpotente $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}_x(F)$, il existe un coefficient $c_{\pi,\mathcal{O}}(x) \in \mathbb{C}$ de sorte que, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_x(F))$ dont le support soit contenu dans un voisinage assez petit de 0, on ait l'égalité

$$(4) \qquad \int_{\mathfrak{g}_x(F)} \theta_\pi(xexp(X))f(X)dX = \sum_{\mathcal{O}} c_{\pi,\mathcal{O}}(x) \int_{\mathcal{O}} \hat{f}(X)dX.$$

La somme porte sur les orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_x(F)$ et le dernier terme est la transformée de Fourier de l'intégrale orbitale sur $\mathcal{O}$. Bien sûr, les mesures et la transformation de Fourier doivent être définies précisément. Supposons que x est un élément de $T(F)$ en position générale. Alors $G_x = T \times G''$, en particulier les orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}_x(F)$ sont celles de $\mathfrak{g}''(F)$. Supposons d'abord d impair. Par hypothèse, G'' est quasi-déployé. En dimension impaire, cela implique qu'il est déployé. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}''(F)$ possède une unique orbite nilpotente régulière, on la note $\mathcal{O}_{reg}$ et on pose $c_\pi(x) = c_{\pi,\mathcal{O}_{reg}}(x)$. Supposons maintenant d pair. Alors $\mathfrak{g}''(F)$ possède (en général) plusieurs orbites nilpotentes régulières. On peut les paramétrer par un sous-ensemble de $F^\times/F^{\times 2}$. Posons $\nu_0 = q(v_0)$. On montre que ν_0 appartient à l'ensemble de paramètres, on lui associe une orbite $\mathcal{O}_{\nu_0}$ et on pose $c_\pi(x) = c_{\pi,\mathcal{O}_{\nu_0}}(x)$. On a ainsi défini une fonction c_π sur un ouvert de Zariski de $T(F)$. Soit σ une représentation admissible irréductible de $H(F)$. On définit de façon similaire une fonction c_σ sur un ouvert de Zariski de $T(F)$. Posons

$$(5) \qquad m_{geom}(\sigma,\pi) = \sum_{T\in\mathcal{T}} w(T)^{-1} \int_{T(F)} c_{\check{\sigma}}(x)c_\pi(x)D^H(x)\Delta(x)^r dx.$$

Les fonctions D^H et Δ sont des déterminants élémentaires et $w(T)$ est le nombre d'éléments d'un certain normalisateur. La mesure sur $T(F)$ est de masse totale 1. La représentation $\check{\sigma}$ est la contragrédiente de σ.

Théorème. *(i) Pour des représentations admissibles irréductibles σ de $H(F)$ et π de $G(F)$, l'expression ci-dessus est absolument convergente.*

(ii) Si π est supercuspidale, on a l'égalité $m(\sigma,\pi) = m_{geom}(\sigma,\pi)$.

Ce théorème est, lui, indépendant de toute hypothèse sur les L-paquets. Indiquons comment on déduit le premier théorème du second. Rétablissons les indices i et a, posons

$$m(\Sigma_i,\Pi_i) = \sum_{(\sigma,\pi)\in\Sigma_i\times\Pi_i} m(\sigma,\pi)$$

et définissons de même $m(\Sigma_a,\Pi_a)$. A l'aide du second théorème, ces termes se calculent comme des sommes indexées par des ensembles de tores $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_a$. On peut regrouper ces tores selon leur classe de conjugaison stable. Il y a une correspondance entre classes de conjugaison stable dans $\mathcal{T}_a$ et classes de conjugaison stable dans $\mathcal{T}_i$. Cette correspondance est en fait une injection du premier ensemble de classes dans le second et c'est presqu'une surjection : l'unique classe dans $\mathcal{T}_i$ qui n'est pas dans l'image est la classe réduite au tore $T = \{1\} \in \mathcal{T}_i$. Les formules de transfert de caractères de L-paquets contiennent des signes, dont le produit est -1. On en déduit que, pour toute classe de conjugaison stable $\{T\}_a \subset \mathcal{T}_a$, la contribution de cette classe à $m(\Sigma_a,\Pi_a)$ est l'opposé de la contribution à $m(\Sigma_i, \Pi_i)$ de la classe de conjugaison stable dans $\mathcal{T}_i$ image de $\{T\}_a$. Alors seul le tore $\{1\} \in \mathcal{T}_i$ contribue de façon non nulle à la somme $m(\Sigma_a, \Pi_a) + m(\Sigma_i, \Pi_i)$. A l'aide d'un résultat de Rodier, cette contribution du tore $\{1\}$ s'interprète comme le produit des nombres d'éléments de Σ_i, resp. Π_i qui admettent un modèle de Whittaker relatif à une certaine orbite nilpotente régulière. D'après (3), ces nombres sont égaux à 1. On obtient

$$m(\Sigma_a, \Pi_a) + m(\Sigma_i, \Pi_i) = 1$$

d'où le premier théorème. Remarquons que l'apparition d'un signe négatif dans les formules de transfert, qui est cruciale pour le calcul ci-dessus, est probablement réminiscente de fait que le produit des L-groupes ${}^L H \times {}^L G$ a une représentation naturelle qui est symplectique.

La preuve du second théorème est plus compliquée. Appelons quasi-caractère sur $G(F)$ une fonction θ définie presque partout sur $G(F)$, invariante par conjugaison et possédant un développement de la forme (4) au voisinage de tout point semi-simple. Pour une fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, disons que f est très cuspidale si, pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MU$ de G (avec des notations standard), et pour tout $m \in M(F)$, on a l'égalité

$$\int_{U(F)} f(mu)du = 0.$$

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on définit une fonction κ_N sur $G(F)$. C'est l'image réciproque de la fonction caractéristique d'un sous-ensemble compact de $H(F)U(F)\backslash G(F)$, qui devient de plus en plus grand quand N tend vers l'infini. Soient θ un quasi-caractère sur $H(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. On pose

$$I_N(\theta, f) = \int_{H(F)U(F)\backslash G(F)} \int_{H(F)} \int_{U(F)} \theta(h) f(g^{-1}hug)\xi(u)du\, dh\, \kappa_N(g)dg.$$

La plus grande partie de l'article consiste à prouver que cette expression a une limite quand N tend vers l'infini et à calculer cette limite. Celle-ci est, comme l'expression (5) ci-dessus, une somme sur les tores $T \in \mathcal{T}$ d'intégrales sur $T(F)$ de fonctions déduites de θ et f. Cf. 7.8 pour un énoncé précis. L'expression $I_N(\theta, f)$ ressemble beaucoup à celles qui interviennent dans la partie géométrique de la formule des traces locale d'Arthur ([A3]). D'ailleurs, pour l'étudier, on s'inspire largement des méthodes d'Arthur. Il y a toutefois une différence importante entre les deux situations. Dans la formule des traces locale, il n'y a pas de problème de singularités. La formule finale ne fait intervenir que des points réguliers du groupe. En particulier, si on se limite à des fonctions dont le support est formé d'éléments elliptiques réguliers, la partie géométrique de la formule des traces locale est essentiellement triviale. Ici, il y a des singularités. Pour un élément semi-simple $x \in H(F)$, le groupe G_x est en général plus gros que H_x et on peut dire que la singularité du problème croît en même temps que $dim(G_x) - dim(H_x)$. L'étude de $I_N(\theta, f)$ passe donc par une étude locale. On commence par se ramener au cas où θ et f ont des supports concentrés dans des voisinages invariants par conjugaison d'un point semi-simple $x \in H(F)$. Une méthode de descente imitée d'Harish-Chandra ramène alors le problème a un problème similaire, où les fonctions θ et f vivent cette fois sur les algèbres de Lie $\mathfrak{h}_x(F)$ et $\mathfrak{g}_x(F)$. Parce que θ est un quasi-caractère, on peut ensuite exprimer l'avatar de $I_N(\theta, f)$ en fonction de la transformée de Fourier de f. Il s'avère qu'après cette transformation, l'expression converge beaucoup mieux. On peut maintenant prouver l'existence d'une limite et calculer celle-ci par des méthodes similaires à celles d'Arthur.

Le second théorème ci-dessus s'en déduit en remplaçant θ par $\theta_{\check{\sigma}}$ et f par un coefficient de π. On montre en effet facilement que $m(\sigma,\pi)$ est essentiellement la limite de $I_N(\theta,f)$ quand N tend vers l'infini.

Les trois premières sections sont consacrées aux notations et à divers rappels d'analyse harmonique. Les sections 4 à 6 établissent les propriétés qui nous seront utiles des quasi-caractères et des fonctions très cuspidales. Les sections 7 à 12 sont consacrées à l'étude de l'expression $I_N(\theta,f)$ définie ci-dessus et au calcul de sa limite. La preuve des deux théorèmes est donnée dans la section 13.

1 Notations et premières définitions

1.1 Groupes

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On en fixe une clôture algébrique $\bar{F}$. On note val_F et $|.|_F$ les valuation et valeur absolue usuelles de F et on note de la même façon leurs prolongements à $\bar{F}$. On note$\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathbb{F}_q$ son corps résiduel et on fixe une uniformisante ϖ_F.

Tous les groupes algébriques sont supposés définis sur F. Soit G un groupe algébrique réductif connexe. On note aussi G son groupe de points sur $\bar{F}$, c'est-à-dire $G=G(\bar{F})$. On note A_G le plus grand tore déployé central dans G, $X(G)$ le groupe des caractères définis sur F de G, $\mathcal{A}_G=Hom(X(G),\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}^*=X(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ le dual de $\mathcal{A}$. On définit l'homomorphisme $H_G:G(F)\to\mathcal{A}_G$ par $H_G(g)(\chi)=log(|\chi(g)|_F)$ pour tous $g\in G(F)$ et $\chi\in X(G)$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et

$$\begin{array}{ccc} G\times\mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (g,X) & \mapsto & gXg^{-1} \end{array}$$

l'action adjointe. On appelle Lévi de G un sous-groupe M tel qu'il existe un sous-groupe parabolique P de G (défini sur F) de sorte que M soit une composante de Lévi de P. Pour un tel Lévi, on note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G de composante de Lévi M, $\mathcal{L}(M)$ celui des Lévi de G contenant M et $\mathcal{F}(M)$ celui des sous-groupes paraboliques de G contenant M. Pour $Q\in\mathcal{F}(M)$, on notera sans plus de commentaire $Q=LU$ la décomposition de Q en sa composante de Lévi L contenant M et son radical unipotent U. Il y a une décomposition naturelle $\mathcal{A}_M=\mathcal{A}_M^G\oplus\mathcal{A}_G$. On note $proj_M^G$ et $proj_G$ les projections sur chacun des facteurs. Le sous-espace $\mathcal{A}_M^G$ est engendré par l'ensemble $\check{\Sigma}_M$ des coracines indivisibles. A un élément P de $\mathcal{P}(M)$ est associé une chambre positive $\mathcal{A}_P^+\subset\mathcal{A}_M$ et un sous-ensemble de coracines simples $\check{\Delta}_P\subset\check{\Sigma}_M$. Bruhat et Tits ont défini la notion de sous-groupe compact spécial de $G(F)$. Si K est un tel sous-groupe et M est un Lévi de G, on dit que K est en bonne position relativement à M s'il existe un sous-tore déployé maximal $A\subset M$ de sorte que K fixe un point spécial de l'appartement associé à A dans l'immeuble de G. Supposons qu'il en soit ainsi et soit $P=MU\in\mathcal{P}(M)$. On définit la fonction $H_P:G(F)\to\mathcal{A}_M$ par $H_P(g)=H_M(m)$ pour $g=muk\in G(F)$, avec $m\in M(F)$, $u\in U(F)$, $k\in K$. Suivant Harish-Chandra, on définit une fonction hauteur $||.||$ sur $G(F)$, à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 1}=\{x\in\mathbb{R};x\geq 1\}$ et (en modifiant légèrement la définition d'Harish-Chandra) une fonction σ par $\sigma(g)=sup(1,log(||g||))$. On définit une fonction sur $\mathfrak{g}(F)$, également notée σ, de la façon suivante. On fixe une base de $\mathfrak{g}(F)$ sur F. Pour $X\in\mathfrak{g}(F)$, on pose $\sigma(X)=sup(1,sup\{-val_F(X_i)\})$, où les X_i

sont les coordonnées de X. Le cas échéant, on ajoutera des exposants ^{G} aux notations que l'on vient d'introduire pour préciser le groupe ambiant.

Soit G un groupe. On note Z_G son centre. Soit A un ensemble muni d'une action de G. Pour un sous-ensemble $B \subset A$, on note $Z_G(B)$ le centralisateur de B dans G et $Norm_G(B)$ le normalisateur. Si $B = \{x\}$, on note simplement $Z_G(x) = Z_G(\{x\})$. Quand $A = G$, on suppose implicitement que l'action de G est l'action par conjugaison. De même si G est un groupe algébrique linéaire et $A = \mathfrak{g}$ est son algèbre de Lie. Pour une fonction f sur A et pour $g \in G$, on note ${}^g f$ la fonction $a \mapsto f(g^{-1}(a))$.

Quand G est un groupe algébrique linéaire, on note G^0 sa composante neutre. Pour $x \in G$, resp. $X \in \mathfrak{g}$, on note $G_x = Z_G(x)^0$, resp. $G_X = Z_G(X)^0$, la composante neutre du centralisateur de x, resp. X.

Soit G un groupe réductif connexe. On note G_{ss} l'ensemble de ses éléments semi-simples et G_{reg} le sous-ensemble des éléments semi-simples réguliers. On définit de même $\mathfrak{g}_{ss}$ et $\mathfrak{g}_{reg}$. Pour $x \in G_{ss}(F)$, l'opérateur $ad(x) - 1$ est défini et inversible sur $\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_x(F)$, on pose :

$$D^G(x) = |det(ad(x) - 1)_{|\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_x(F)})|_F.$$

De même, pour $X \in \mathfrak{g}_{ss}(F)$, on pose :

$$D^G(X) = |det(ad(X)_{|\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_X(F)})|_F.$$

Pour tout sous-ensemble $\Gamma \subset G(F)$, on pose $\Gamma^G = \{g^{-1}\gamma g; g \in G(F), \gamma \in \Gamma\}$. On dit qu'un sous-ensemble $\Omega \subset G(F)$ est compact modulo conjugaison s'il existe un sous-ensemble compact $\Gamma \subset G(F)$ tel que $\Omega \subset \Gamma^G$

1.2 Mesures

On fixe pour tout l'article un caractère continu et non trivial $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$. Soit G un groupe réductif connexe. On munit $\mathfrak{g}(F)$ d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< ., . >$ invariante par conjugaison par $G(F)$. Pour tout ensemble topologique X totalement discontinu, on note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions sur X, à valeurs dans $\mathbb{C}$, localement constantes et à support compact. On définit la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ dans lui-même par

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\psi(< X, Y >)dY,$$

où dY est la mesure de Haar autoduale, c'est-à-dire telle que $\hat{\hat{f}}(X) = f(-X)$. L'espace $\mathfrak{g}(F)$ sera toujours muni de cette mesure. Si H est un sous-groupe réductif de G, le même procédé munit $\mathfrak{h}(F)$ d'une mesure.

On note $Nil(\mathfrak{g})$ l'ensemble des orbites nilpotentes. Soit $\mathcal{O}$ une telle orbite. Pour $X \in \mathcal{O}$, la forme bilinéaire $(Y, Z) \mapsto < X, [Y, Z] >$ sur $\mathfrak{g}(F)$ se descend en une forme symplectique sur $\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_X(F)$, c'est-à-dire sur l'espace tangent à $\mathcal{O}$ au point X. Ainsi, $\mathcal{O}$ est muni d'une structure de variété F-analytique symplectique et on en déduit une mesure "autoduale" sur $\mathcal{O}$. Cette mesure est invariante par conjugaison par $G(F)$.

Appelons G-domaine dans $G(F)$, resp. $\mathfrak{g}(F)$, un sous-ensemble de $G(F)$, resp. $\mathfrak{g}(F)$, qui est ouvert, fermé et invariant par conjugaison. On sait que l'on peut définir une application exponentielle $exp : \omega \to \Omega$, où ω est un certain G-domaine dans $\mathfrak{g}(F)$ contenant 0 et Ω un certain G-domaine dans $G(F)$ contenant 1. Cette application est un homéomorphisme équivariant pour les actions de $G(F)$. On a déjà muni $\mathfrak{g}(F)$ d'une mesure et on munit $G(F)$ de la mesure de Haar telle que le Jacobien de l'exponentielle soit égal à 1 au point $0 \in \mathfrak{g}(F)$. On définit de même une mesure de Haar sur $H(F)$ pour tout sous-groupe réductif H contenu dans G. Si K est un sous-groupe compact spécial de $G(F)$, on munit K de la mesure de Haar de masse totale 1. Soient M un Lévi de G et $P = MU \in \mathcal{P}(M)$. On doit munir $U(F)$ d'une mesure de Haar. On sera toujours dans l'une des situations suivantes. Ou bien le choix de la mesure sera sans importance et on ne la précisera pas. Ou bien sera fixé un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M. Dans ce cas on choisira la mesure telle que, pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$, on ait l'égalité :

$$\int_{G(F)} f(g)dg = \int_K \int_{U(F)} \int_{M(F)} f(muk)dm\,du\,dk.$$

Autrement dit, de sorte que l'on ait l'égalité :

$$mes(K, dg) = mes(K \cap M(F), dm)mes(K \cap U(F), du),$$

avec une notation évidente. En inversant le procédé ci-dessus, on munit aussi $\mathfrak{u}(F)$ d'une mesure. Dans la situation ci-dessus, pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, on définit $f_P \in C_c^\infty(M(F))$ par :

$$f_P(m) = \delta_P(m)^{1/2} \int_K \int_{U(F)} f(muk)du\,dk,$$

où δ_P est le module usuel.

Soit T un sous-tore de G. Le groupe $T(F)$ est muni d'une mesure par la définition ci-dessus, notons-la dt. Il y a une autre mesure de Haar qui intervient naturellement dans la théorie, que l'on note d_ct, et qui est définie de la façon suivante. Si T est déployé, le sous-groupe compact maximal de $T(F)$ est de volume 1 pour d_ct. En général, d_ct est compatible avec la mesure que l'on vient de définir sur $A_T(F)$ et avec la mesure sur $T(F)/A_T(F)$ de masse totale 1. Pour éviter les confusions, nous n'utiliserons que la mesure dt, mais il sera nécessaire d'introduire dans nos formules la constante $\nu(T)$ définie par $d_ct = \nu(T)dt$.

Soit M un Lévi de G. On munit $\mathcal{A}_M^G$ de la mesure pour laquelle le quotient

$$\mathcal{A}_M^G/proj_M^G(H_M(A_M(F)))$$

est de volume 1.

2 Intégrales orbitales pondérées

2.1 (G, M)-familles

Un groupe réductif connexe G est fixé pour toutes les sections 2 à 6. On fixe aussi une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}(F)$ comme en 1.2. Soit M un Lévi de G. Arthur a introduit la notion de (G, M)-famille : c'est une famille $(c_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ de fonctions C^∞ sur $i\mathcal{A}_M^*$ (où $i = \sqrt{-1}$) vérifiant une certaine condition de compatibilité ([A1] p.36). Considérons une telle (G, M)-famille. On sait lui associer un nombre complexe c_M ([A1] p.37). On a besoin pour cela d'une mesure sur $\mathcal{A}_M$: on l'a fixée dans la section précédente. Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. On déduit de notre (G,M)-famille une (G,L)-famille, on note c_L le nombre qui lui est associé. Soit $Q \in \mathcal{P}(L)$. On déduit aussi de la famille de départ une (L,M)-famille dont on note c_L^Q le nombre associé.

Soit $(Y_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}_M$. On dit qu'elle est (G,M)-orthogonale, resp. et positive, si elle vérifie la condition suivante. Soient P et P' deux éléments adjacents de $\mathcal{P}(M)$. Il y a une unique coracine $\check{\alpha}$ telle que $\check{\alpha} \in \check{\Delta}_P$ et $-\check{\alpha} \in \check{\Delta}_{P'}$. On demande que $Y_P - Y_{P'} \in \mathbb{R}\check{\alpha}$, resp. $Y_P - Y_{P'} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\check{\alpha}$. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, définissons une fonction c_P sur $i\mathcal{A}_M^*$ par $c_P(\lambda) = e^{-\lambda(Y_P)}$. Supposons que la famille $(Y_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ soit (G,M)-orthogonale. Alors la famille $(c_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille. Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. La (G,L)-famille déduite de cette (G,M)-famille est associée à la famille de points $(Y_Q)_{Q\in\mathcal{P}(L)}$ ainsi définie : $Y_Q = proj_L(Y_P)$ pour n'importe quel $P \in \mathcal{P}(M)$ tel que $P \subset Q$. De même, soit $Q \in \mathcal{P}(L)$. Alors la (L,M)-famille déduite de notre (G,M)-famille est associée à la famille de points $(Y_{P'})_{P'\in\mathcal{P}^L(M)}$ ainsi définie : $Y_{P'} = Y_P$, où P est l'unique élément de $\mathcal{P}(M)$ tel que $P \subset Q$ et $P \cap L = P'$.

2.2 Formules de descente

Soient M un Lévi de G, $(c_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ et $(d_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ deux (G,M)-familles. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, posons $(cd)_P = c_P d_P$. Alors $((cd)_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est encore une (G,M)-famille. On a une égalité ([A2] corollaire 7.4) :

$$(1) \qquad (cd)_M = \sum_{L,L'\in\mathcal{L}(M)} d_M^G(L,L') c_M^Q d_M^{Q'}.$$

Le terme $d_M^G(L,L')$ est un réel positif ou nul, qui est non nul si et seulement si

$$\mathcal{A}_M^G = \mathcal{A}_L^G \oplus \mathcal{A}_{L'}^G.$$

On a $d_M^G(M,G) = d_M^G(G,M) = 1$. On doit fixer un paramètre auxiliaire $\xi \in \mathcal{A}_M^G$, en position générale. Pour L, L' vérifiant la condition précédente, notons ξ_L et $\xi_{L'}$ les projections de ξ sur chacun des facteurs. Alors Q est l'unique élément de $\mathcal{P}(L)$ tel que $\xi_L \in \mathcal{A}_Q^+$ et Q' est défini de façon similaire.

Supposons que $(d_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est associée à une famille (G,M)-orthogonale de points $(Y_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$. Alors :

$$(2) \qquad (cd)_M = \sum_{Q\in\mathcal{F}(M)} c_M^Q u_Q(Y_Q),$$

où, pour $Q = LU$, u_Q est une fonction sur $\mathcal{A}_L$, bien sûr indépendante de nos (G,M)-familles. La fonction u_G est constante de valeur 1. La formule résulte de [A1] (6.3) et lemme 6.3.

Pour une seule (G,M)-famille $(c_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ et pour $L \in \mathcal{L}(M)$, on a aussi :

$$(3) \qquad c_L = \sum_{L'\in\mathcal{L}(M)} d_M^G(L,L') c_M^{Q'},$$

avec les mêmes définitions qu'en (1).

2.3 Intégrales orbitales pondérées

Soient M un Lévi de G et K et sous-groupe compact spécial de $G(F)$ en bonne position relativement à M. Pour $g \in G(F)$, la famille de points $(H_P(g))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est (G,M)-orthogonale et positive. On note $(v_P(g))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ la (G,M)-famille associée et $v_M(g)$ le nombre associé à cette (G,M)-famille. La fonction $g \mapsto v_M(g)$ est invariante à gauche par $M(F)$ et à droite par K.

Soient $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $x \in M(F)\cap G_{reg}(F)$. On définit l'intégrale orbitale pondérée

$$J_M(x,f) = D^G(x)^{1/2}\int_{G_x(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}xg)v_M(g)dg.$$

L'intégrale a un sens puisque $G_x = M_x \subset M$.

Lemme. *(i) Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. La fonction $x \mapsto J_M(x,f)$ définie sur $M(F)\cap G_{reg}(F)$ est localement constante et invariante par conjugaison par $M(F)$. L'adhérence dans $M(F)$ de son support est compacte modulo conjugaison.*

(ii) Il existe un entier $k \geq 0$ et, pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$, il existe $c > 0$ de sorte que l'on ait l'inégalité :

$$|J_M(x,f)| \leq c(1+|log\, D^G(x)|)^k$$

pour tout $x \in M(F)\cap G_{reg}(F)$.

Preuve. Le (i) est évident. Le (ii) est dû à Arthur mais nous allons rappeler la démonstration car nous l'utiliserons plus loin. D'après le (i), on peut fixer un sous-tore maximal T de M, un sous-ensemble compact $\omega \subset T(F)$ et se contenter de majorer $|J_M(x,f)|$ pour $x \in \omega$. Fixons une norme sur $\mathcal{A}_M$. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et tout $g \in G(F)$, on ait l'inégalité $|H_P(g)| \leq c\sigma(g)$. Par construction, $v_M(g)$ est polynomial en les $H_P(g)$, il y a donc un entier $k \geq 0$ et $c > 0$ tel que $v_M(g) \leq c\sigma(g)^k$. Posons $\sigma_T(g) = inf\{\sigma(tg); t \in T(F)\}$. Puisque $v_M(g)$ est invariante à gauche par $T(F) \subset M(F)$, on a même $v_M(g) \leq c\sigma_T(g)^k$. Rappelons le lemme 4.2 de [A3], qui précise un résultat de Harish-Chandra. Pour tous sous-ensembles compacts $\Omega \subset T(F)$ et $\Gamma \subset G(F)$, il existe $c > 0$ de sorte que, pour tout $x \in \Omega$ et tout $g \in G(F)$ tels que $g^{-1}xg \in \Gamma$, on ait l'inégalité :

$$(1) \qquad \sigma_T(g) \leq c(1+|log\, D^G(x)|).$$

On applique cela à $\Omega = \omega$ et au support Γ de f. Alors pour $x \in \omega \cap G_{reg}(F)$, on peut majorer le terme $v_M(g)$ intervenant dans la définition de $J_M(x,f)$ par $c(1+|log\, D^G(x)|)^k$, où c dépend de f mais pas k. On obtient :

$$|J_M(x,f)| \leq c(1+|log\, D^G(x)|)^k D^G(x)^{1/2}\int_{G_x(F)\backslash G(F)} |f(g^{-1}xg)|dg$$

$$\leq c(1+|log\, D^G(x)|)^k J_G(x,|f|).$$

D'après [HCvD] théorème 13, $J_G(x,|f|)$ est borné sur $\omega \cap G_{reg}(F)$ et cela conclut. □

2.4 Formule des traces locale

Soient M_{min} un Lévi minimal de G et K un sous-groupe compact spécial de $G(F)$ en bonne position relativement à M_{min}. Les définitions du paragraphe précédent se descendent à l'algèbre de Lie : pour tous $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on définit l'intégrale orbitale pondérée $J_M(X, f)$.

Soient $f, f' \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Pour $M \in \mathcal{L}(M_{min})$ et $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, posons :

$$J_M(X, f, f') = \sum_{L,L' \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L, L') J_M^L(X, f_{\bar{Q}}) J_M^{L'}(X, f'_{Q'})$$

Les définitions sont les mêmes qu'en 2.2(1) ; $\bar{Q}$ est le sous-groupe parabolique opposé à Q. On note $W^M = Norm_M(M_{min})/M_{min}$, $a_M = dim(A_M)$. Pour un sous-tore maximal T de M, on pose $W(M, T) = Norm_{M(F)}(T)/T(F)$. On dit que T est elliptique dans M si $A_T = A_M$. On fixe un ensemble $\mathcal{T}_{ell}(M)$ de représentants des classes de conjugaison de sous-tores maximaux de M, elliptiques dans M. Posons :

$$J(f, f') = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W^G|^{-1}(-1)^{a_G - a_M} \sum_{T \in \mathcal{T}_{ell}(M)} |W(M, T)|^{-1}\nu(T)^{-1} \int_{\mathfrak{t}(F)} J_M(X, f, f')dX.$$

Cette expression est absolument convergente en vertu du lemme 2.3(ii) et du lemme suivant.

Lemme. *Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur F et $(R_i)_{i=1,...,n}$ une famille finie de polynômes non nuls sur V. Alors la fonction $v \mapsto \prod_{i=1,...,n} log(|R_i(v)|_F)$ est localement intégrable sur V.* $\square$

Théorème. *Pour toutes $f, f' \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on a l'égalité $J(\hat{f}, f') = J(f, \hat{f}')$.*

Cf. [W1] théorème 5.2, qui reprenait [A3]. Il n'y a pas de $\nu(T)$ dans [W1], ce qui est dû au fait que les mesures sur les tores n'y sont pas les mêmes que les nôtres (il y a d'ailleurs aussi dans cette référence une erreur dans la définition des mesures sur les espaces $\mathcal{A}_M$).

2.5 La condition (H)

On conserve les mêmes hypothèses. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, considérons la condition :

(H). *pour tout $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, il existe $\varphi_M \in C_c^\infty(\mathfrak{m}(F))$ telle que $\varphi_P = \varphi_M$ pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$.*

En vertu de l'égalité $(\hat{\varphi})_P = (\varphi_P)\hat{}$, φ vérifie (H) si et seulement $\hat{\varphi}$ vérifie (H). En général, pour tout sous-ensemble B d'un ensemble A, notons $\mathbf{1}_B$ la fonction caractéristique de B dans A. Si Ω est un G-domaine dans $\mathfrak{g}(F)$ et si φ vérifie (H), alors $\varphi\mathbf{1}_\Omega$ vérifie aussi (H) et on a $(\varphi\mathbf{1}_\Omega)_M = \varphi_M\mathbf{1}_{\Omega\cap\mathfrak{m}(F)}$ pour tout M.

Pour tout sous-ensemble $B \subset \mathfrak{g}(F)$, posons $B^K = \{k^{-1}Xk; k \in K, X \in B\}$. Posons :

$$\Omega = \bigcup_{M \in \mathcal{L}(M_{min})} \bigcup_{T \in \mathcal{T}_{ell}(M)} (\mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F))^K.$$

C'est un ouvert de $\mathfrak{g}(F)$.

Lemme. *Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$.*

(i) Supposons $Supp(\varphi) \subset \Omega$. Alors φ vérifie (H).

(ii) Supposons $Supp(\varphi) \subset \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Alors il existe une familles finie $(\varphi_i)_{i=1,\dots,n}$ d'éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et une famille finie $(g_i)_{i=1,\dots,n}$ d'éléments de $G(F)$ telles que φ_i vérifie (H) pour tout i et $\varphi = \sum_{i=1,\dots,n} {}^{g_i}\varphi_i$.

Preuve. Supposons $Supp(\varphi) \subset \Omega$. Soient $P = MU \in \mathcal{F}(M_{min})$ et $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Par un calcul familier, on a l'égalité :

$$\varphi_P(X) = D^G(X)^{1/2} D^M(X)^{-1/2} \int_K \int_{U(F)} \varphi(k^{-1}u^{-1}Xuk)du\,dk.$$

Soit $u \in U(F)$ pour lequel il existe $k \in K$ tel que $\varphi(k^{-1}u^{-1}Xuk) \neq 0$. Alors $u^{-1}Xu \in \Omega$ et on peut fixer $L \in \mathcal{L}(M_{min})$, $T \in \mathcal{T}_{ell}(L)$, $Y \in \mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$ et $k \in K$ de sorte que $u^{-1}Xu = kYk^{-1}$. Posons $g = uk$. On a $gYg^{-1} = X$, donc gTg^{-1} est le commutant G_X de X. Le plus grand tore déployé de gTg^{-1} est gA_Lg^{-1}. Celui de G_X contient A_M. Donc $A_M \subset gA_Lg^{-1} \subset gA_{M_{min}}g^{-1}$. Puisque M est le commutant de A_M, on a $gA_{M_{min}}g^{-1} \subset M$. Alors $A_{M_{min}}$ et $gA_{M_{min}}g^{-1}$ sont deux tores déployés maximaux de M, ils sont donc conjugués par un élément de $M(F)$. Fixons $m \in M(F)$ tel que $mgA_{M_{min}}g^{-1}m^{-1} = A_{M_{min}}$. D'après Bruhat et Tits, le normalisateur $Norm_{G(F)}(A_{M_{min}})$ est contenu dans $M_{min}(F)K$. Donc $mg \in M_{min}(F)K$, puis $g \in M(F)K$ et enfin $u \in M(F)K$. Parce que K est en bonne position relativement à M, cela entraîne $u \in U(F) \cap K$. Donc :

$$\varphi_P(X) = D^G(X)^{1/2} D^M(X)^{-1/2} \int_K \int_{U(F)\cap K} \varphi(k^{-1}u^{-1}Xuk)du\,dk.$$

L'intégrale sur $U(F) \cap K$ est absorbée par celle sur K, on obtient :

$$\varphi_P(X) = D^G(X)^{1/2} D^M(X)^{-1/2} (mes(U(F) \cap K)) \int_K \varphi(k^{-1}Xk)dk.$$

Comme on l'a remarqué en 1.2, $mes(U(F) \cap K)$ ne dépend pas du sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$. L'expression ci-dessus n'en dépend donc pas non plus et c'est la condition pour que φ vérifie (H).

Supposons maintenant que $Supp(\varphi) \subset \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Pour tout $X \in Supp(\varphi)$, fixons $g_X \in G(F)$ tel que

$$g_X^{-1}Xg_X \in \bigcup_{M \in \mathcal{L}(M_{min})} \bigcup_{T \in \mathcal{T}_{ell}(M)} \mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F),$$

puis un voisinage ω_X de X tel que $g_X^{-1}\omega_X g_X \subset \Omega$. Une partition de l'unité nous ramène au cas où $Supp(\varphi)$ est contenu dans un tel voisinage ω_X. Dans ce cas, $\varphi = {}^{g_X}\varphi'$, où $\varphi' = {}^{g_X^{-1}}\varphi$. Mais $Supp(\varphi') \subset \Omega$, donc φ' vérifie (H). $\square$

2.6 Transformées de Fourier d'intégrales orbitales, germes de Shalika

Pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})$, on définit l'intégrale orbitale nilpotente

$$J_{\mathcal{O}}(f) = \int_{\mathcal{O}} f(X)dX$$

pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, et sa transformée de Fourier

$$\hat{J}_{\mathcal{O}}(f) = J_{\mathcal{O}}(\hat{f}).$$

Pour $\lambda \in F^\times$, définissons f^λ par $f^\lambda(X) = f(\lambda X)$. Notons $F^{\times 2}$ le groupe des carrés dans $F^\times$. On a l'égalité

$$J_{\mathcal{O}}(f^\lambda) = |\lambda|_F^{-dim(\mathcal{O})/2} J_{\mathcal{O}}(f)$$

pour tout $\lambda \in F^{\times 2}$.

On pose $\delta(G) = dim(G) - dim(T)$, où T est n'importe quel sous-tore maximal de G. On sait qu'il existe une unique fonction $\Gamma_{\mathcal{O}}$ sur $\mathfrak{g}_{reg}(F)$, le germe de Shalika associé à $\mathcal{O}$, vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\Gamma_{\mathcal{O}}(\lambda X) = |\lambda|_F^{(\delta(G)-dim(\mathcal{O}))/2} \Gamma_{\mathcal{O}}(X)$$

pour tous $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ et $\lambda \in F^{\times 2}$;

pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, il existe un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$ tel que :

$$J_G(X, f) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})} \Gamma_{\mathcal{O}}(X) J_{\mathcal{O}}(f)$$

pour tout $X \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$.

Remarquons que $\Gamma_{\mathcal{O}}$ coïncide sur tout compact avec une intégrale orbitale, en particulier y est borné.

Il existe une unique fonction $\hat{j}$ sur $\mathfrak{g}(F) \times \mathfrak{g}(F)$, localement intégrable, localement constante sur $\mathfrak{g}_{reg}(F) \times \mathfrak{g}_{reg}(F)$, telle que, pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on ait l'égalité :

$$J_G(X, \hat{f}) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y) \hat{j}(X, Y) dY.$$

De même, pour $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})$, il existe une unique fonction $Y \mapsto \hat{j}(\mathcal{O}, Y)$ sur $\mathfrak{g}(F)$, localement intégrable, localement constante sur $\mathfrak{g}_{reg}(F)$, telle que, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on ait l'égalité :

$$\hat{J}_{\mathcal{O}}(f) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y) \hat{j}(\mathcal{O}, Y) dY.$$

On a les égalités :

$$(1) \qquad \hat{j}(\lambda X, Y) = |\lambda|_F^{\delta(G)/2} \hat{j}(X, \lambda Y), \;\; \hat{j}(\mathcal{O}, \lambda Y) = |\lambda|_F^{-dim(\mathcal{O})/2} \hat{j}(\mathcal{O}, Y)$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})$ et $\lambda \in F^{\times 2}$.

Soient ω et Ω deux G-domaines dans $\mathfrak{g}(F)$ compacts modulo conjugaison. La conjecture de Howe entraîne l'existence d'une famille finie $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ d'élements de $\Omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$ et d'une famille finie $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ d'éléments de $C_c^\infty(\omega)$ vérifiant la condition suivante. Pour toute distribution invariante D dont la transformée de Fourier est à support dans Ω et toute $f \in C_c^\infty(\omega)$, on a l'égalité

$$(2) \qquad D(f) = \sum_{i=1,\dots,n} J_G(X_i, \hat{f}) D(f_i).$$

Il en résulte que, pour $X \in \Omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$ et $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on a l'égalité

$$(3) \qquad \hat{j}(X,Y) = \sum_{i=1,\dots,n} \hat{j}(X_i,Y) J_G(X,\hat{f}_i).$$

Au voisinage de 0, on a un résultat plus précis. Soit ω un G-domaine de $\mathfrak{g}(F)$ compact modulo conjugaison et contenant 0. Alors il existe un G-domaine Ω de $\mathfrak{g}(F)$ compact modulo conjugaison et contenant 0 tel que, pour $X \in \Omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$ et $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on ait l'égalité

$$(4) \qquad \hat{j}(X,Y) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})} \Gamma_{\mathcal{O}}(X) \hat{j}(\mathcal{O},Y).$$

Soient M un Lévi de G et $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Pour $Y \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, fixons un ensemble de représentants $(Y_i)_{i=1,\dots,r}$ des classes de conjugaison par $M(F)$ dans l'ensemble des éléments de $\mathfrak{m}(F)$ qui sont conjugués à Y par un élément de $G(F)$. On vérifie l'égalité

$$(5) \qquad \hat{j}^G(X,Y) D^G(Y)^{1/2} = \sum_{i=1,\dots,r} \hat{j}^M(X,Y_i) D^M(Y_i)^{1/2}.$$

3 Voisinages d'éléments semi-simples

3.1 Bons voisinages

On fixe pour toute la section un élément $x \in G_{ss}(F)$. On dira qu'un sous-ensemble $\omega \subset \mathfrak{g}_x(F)$ est un bon voisinage de 0 s'il vérifie les conditions (1) à (7) ci-dessous.

(1) L'ensemble ω est un G_x-domaine compact modulo conjugaison, invariant par $Z_G(x)(F)$ et contenant 0.

(2) L'exponentielle est définie sur ω ; c'est un homéomorphisme équivariant pour la conjugaison par $Z_G(x)(F)$ de ω sur un G_x-domaine $exp(\omega)$ de $G_x(F)$.

(3) Pour tout $\lambda \in F^\times$ tel que $|\lambda|_F \leq 1$, on a $\lambda\omega \subset \omega$.

(4) On a l'égalité

$$\{g \in G(F); g^{-1}xexp(\omega)g \cap xexp(\omega) \neq \emptyset\} = Z_G(x)(F).$$

(5) Pour tout sous-ensemble compact $\Gamma \subset G(F)$, il existe un sous-ensemble compact $\Gamma' \subset G(F)$ tel que l'on ait l'inclusion :

$$\{g \in G(F); g^{-1}xexp(\omega)g \cap \Gamma \neq \emptyset\} \subset G_x(F)\Gamma'.$$

Fixons un réel $c_F > 0$ tel que $c_F^k < |(k+1)!|_F$ pour tout entier $k \geq 1$.

(6) Pour tout sous-tore maximal $T \subset G_x$, tout caractère algébrique χ de T et tout élément $X \in \mathfrak{t}(F) \cap \omega$, on a l'inégalité $|\chi(X)|_F < c_F$.

Considérons un sous-espace propre $W \subset \mathfrak{g}(F)$ pour l'opérateur $ad(x)$. Notons λ la valeur propre. Soit $X \in \omega$. Alors $ad(X)$ conserve W. Soit W_X un sous-espace propre de W pour l'opérateur $ad(X)$, de valeur propre μ. Alors W_X est aussi un espace propre pour l'opérateur $ad(xexp(X))$, de valeur propre $\lambda exp(\mu)$.

(7) Supposons $\lambda \neq 1$. Alors $|\lambda exp(\mu) - 1|_F = |\lambda - 1|_F$.

De bons voisinages de 0 existent, aussi petits que l'on veut en ce sens que, si ω_0 est un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$, il existe un bon voisinage ω de 0 tel que $\omega \subset \omega_0^{G_x}$. Considérons un bon voisinage ω de 0. Les conditions (1) et (2) entraînent que l'ensemble $\Omega = (xexp(\omega))^G$ est un G-domaine dans $G(F)$, compact modulo conjugaison. La condition (4) entraîne que, pour $X \in \omega$, $Z_G(xexp(X))(F) \subset Z_G(x)(F)$ et $G_{xexp(X)} = (G_x)_X \subset G_x$. On note simplement $G_{x,X} = (G_x)_X$. La condition (6) entraîne que l'exponentielle de ω sur $exp(\omega)$ préserve les mesures. Plus généralement, elle entraîne qu'un certain nombre de jacobiens qui interviendront plus tard sont égaux à 1. Les conditions (6) et (7) entraînent que, pour tout $X \in \omega$, on a l'égalité

$$D^G(xexp(X)) = D^G(x)D^{G_x}(X).$$

Une conséquence de la propriété (4) est que, pour toute fonction φ sur ω, invariante par conjugaison par $Z_G(x)(F)$, il existe une unique fonction f sur $G(F)$, invariante par conjugaison par $G(F)$, à support dans Ω et telle que $f(xexp(X)) = \varphi(X)$ pour tout $\varphi \in \omega$. Si φ est localement constante sur $\omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, f est localement constante sur $G_{reg}(F)$.

Le cas échéant, on peut renforcer les conditions imposées aux bons voisinages. Supposons par exemple que G_x se décompose en le produit de deux groupes réductifs connexes $G_x = G' \times G''$, conservés chacun par $Z_G(x)(F)$. On peut imposer

(8) $\omega = \omega' \times \omega''$, où $\omega' \subset \mathfrak{g}'(F)$ et $\omega'' \subset \mathfrak{g}''(F)$ vérifient des conditions analogues à (1) et (2).

Ou bien, supposons fixée une représentation algébrique ρ de G dans un espace vectoriel V de dimension finie sur F. Les conditions précédant (7) s'appliquent en remplaçant $\mathfrak{g}(F)$ par V et les opérateurs $ad(x)$, $ad(X)$ et $ad(xexp(X))$ par $\rho(x)$, $\rho(X)$, $\rho(xexp(X))$. On peut imposer une condition $(7)_\rho$ analogue à (7) pour les ensembles de valeurs propres ainsi définis.

3.2 Correspondance des Lévi

Soit M un Lévi de G contenant x. On a l'égalité $M_x = M \cap G_x$ et ce groupe est un Lévi de G_x : c'est le commutant de $A_M \subset G_x$. On a $A_M \subset A_{M_x}$. Pour $P = MU \in \mathcal{P}(M)$, on a les égalités $P_x = P \cap G_x$, $U_x = U \cap G_x$, $P_x = M_x U_x$ et P_x appartient à $\mathcal{P}(M_x) = \mathcal{P}^{G_x}(M_x)$. Inversement, soit R un Lévi de G_x. Notons $\mathbf{R}$ le commutant de A_R dans G. C'est un Lévi de G. On a :

(1) $x \in \mathbf{R}(F)$, $\mathbf{R}_x = M$ et $A_{\mathbf{R}} = A_R$.

Preuve. Puisque x commute à A_R, x appartient à $\mathbf{R}(F)$. On sait déjà que $A_{\mathbf{R}} \subset A_{\mathbf{R}_x}$. Le groupe R commute à A_R, donc est inclus dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{R} \cap G_x = \mathbf{R}_x$. Cela entraîne $A_{\mathbf{R}_x} \subset A_R$. Enfin, par construction de $\mathbf{R}$, A_R est inclus dans $A_{\mathbf{R}}$. Alors $A_{\mathbf{R}} = A_{\mathbf{R}_x} = A_R$, ce qui entraîne les deux dernières assertions de (1) $\square$

L'application $R \mapsto \mathbf{R}$ est une bijection de l'ensemble des Lévi de G_x sur celui des Lévi M de G contenant x et tels que $A_M = A_{M_x}$.

3.3 Descente des poids

Fixons un Lévi minimal R_{min} de G_x, un sous-groupe compact spécial K_x de $G_x(F)$ en bonne position relativement à R_{min} et un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$

en bonne position relativement à $\mathbf{R}_{min}$. Remarquons que la bijection du paragraphe précédent se restreint en une bijection de $\mathcal{L}^{G_x}(R_{min})$ sur le sous-ensemble des $M \in \mathcal{L}^G(\mathbf{R}_{min})$ tels que $A_M = A_{M_x}$. Le Lévi $\mathbf{R}_{min}$ n'a bien sûr aucune raison d'être minimal dans G.

Lemme. *Soient $R \in \mathcal{L}(R_{min})$, $g \in G_x(F)$ et $y \in G(F)$. On a l'égalité :*

$$v_{\mathbf{R}}(gy) = \sum_{S\in\mathcal{L}(R)} \sum_{Q\in\mathcal{P}(\mathbf{S})} v_R^{Q_x}(g)u_Q(H_Q(gy) - H_{Q_x}(g)).$$

Preuve. Pour $P \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ et $\lambda \in i\mathcal{A}_{\mathbf{R}} = i\mathcal{A}_R$, posons $c_P(g)(\lambda) = v_{P_x}(g)(\lambda)$. D'après [A4] p.233, la famille $(c_P(g))_{P\in\mathcal{P}(\mathbf{R})}$ est une $(G,\mathbf{R})$-famille. Définissons la $(G,\mathbf{R})$-famille $(d_P(g,y))_{P\in\mathcal{P}(\mathbf{R})}$ par $d_P(g,y) = c_P(g)^{-1}v_P(gy)$. Elle est associée à la famille de points $(H_P(gy) - H_{P_x}(g))_{P\in\mathcal{P}(\mathbf{R})}$. On a $v_P(gy) = c_P(g)d_P(g,y)$. D'après 2.2(2),

$$v_{\mathbf{R}}(gy) = \sum_{Q=LU\in\mathcal{F}(\mathbf{R})} c_{\mathbf{R}}^Q(g)u_Q(H_Q(gy) - proj_L(H_{Q_x}(g))).$$

Soit $Q = LU \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$. D'après [A4], lemme 4.1,

$$c_{\mathbf{R}}^Q(g) = \sum_{S\in\mathcal{L}(R)} d_R^L(\mathbf{R},S)v_R^{Q_S}(g).$$

Le groupe Q_S appartient à $\mathcal{P}(S)$ et est contenu dans Q_x. La constante $d_R^L(\mathbf{R},S)$ est similaire à celle de 2.2. La condition $d_R^L(\mathbf{R},S) \neq 0$ impose $\mathcal{A}_R^L = \mathcal{A}_{\mathbf{R}}^L \oplus \mathcal{A}_S^L$. Or $\mathcal{A}_R = \mathcal{A}_{\mathbf{R}}$. Donc $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_L$. Mais alors $L = \mathbf{S}$ et $Q_S = Q_x$. On obtient :

$$c_{\mathbf{R}}^Q(g) = \begin{cases} v_R^{Q_x}(g), & \text{si } L = \mathbf{S} \text{ pour un } S \in \mathcal{P}(R), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où $L = \mathbf{S}$ pour un $S \in \mathcal{P}(R)$, on a $H_{Q_x}(g) \in \mathcal{A}_S = \mathcal{A}_L$, donc $proj_L(H_{Q_x}(g)) = H_{Q_x}(g)$. Toutes ces formules conduisent à celle de l'énoncé. $\square$

4 Quasi-caractères

4.1 Quasi-caractères de $G(F)$

Soit θ une fonction définie presque partout sur $G(F)$ et invariante par conjugaison. On dit que c'est un quasi-caractère si et seulement si, pour tout $x \in G_{ss}(F)$, il existe un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$ et, pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_x)$, il existe $c_{\theta,\mathcal{O}}(x) \in \mathbb{C}$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$(1) \qquad \theta(xexp(X)) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_x)} c_{\theta,\mathcal{O}}(x)\hat{j}(\mathcal{O},X)$$

presque partout pour $X \in \omega$. Autrement dit, pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_x(F))$ à support dans ω, on a l'égalité

$$\int_{\mathfrak{g}_x(F)} \theta(xexp(X))f(X)dX = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_x)} c_{\theta,\mathcal{O}}(x)\hat{J}_{\mathcal{O}}(f).$$

Les coefficients $c_{\theta,\mathcal{O}}(x)$ sont uniquement déterminés.

Soit θ un quasi-caractère. Alors θ est localement intégrable sur $G(F)$ et localement constant sur $G_{reg}(F)$. Pour tout G-domaine Ω dans $G(F)$, $\theta\mathbf{1}_\Omega$ est un quasi-caractère. Soient $x\in G_{ss}(F)$ et ω un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$. On dit que θ est développable dans $xexp(\omega)$ si l'égalité (1) est vérifiée pour $X\in\omega\cap\mathfrak{g}_{reg}(F)$.

4.2 Quasi-caractères de $\mathfrak{g}(F)$

La définition précédente s'adapte aux algèbres de Lie. Soit θ une fonction définie presque partout sur $\mathfrak{g}(F)$. On dit que c'est un quasi-caractère si et seulement si, pour tout $X\in\mathfrak{g}_{ss}(F)$, il existe un G_X-domaine ω dans $\mathfrak{g}_X(F)$, contenant 0, et, pour tout $\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_X)$, il existe $c_{\theta,\mathcal{O}}(X)\in\mathbb{C}$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$(1)\qquad \theta(X+Y)=\sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_X)}c_{\theta,\mathcal{O}}(X)\hat{j}(\mathcal{O},Y)$$

presque partout pour $Y\in\omega$. Les quasi-caractères de $\mathfrak{g}(F)$ ont des propriétés similaires à celles des quasi-caractères de $G(F)$.

Soit θ un quasi-caractère. On note simplement $c_{\theta,\mathcal{O}}=c_{\theta,\mathcal{O}}(0)$ les coefficients du développement de θ au point 0. Soit $\lambda\in F^{\times 2}$. Alors θ^λ est un quasi-caractère. Soient $X\in\mathfrak{g}_{ss}(F)$ et ω comme ci-dessus, tel que θ soit développable dans $X+\omega$. Alors θ^λ est développable dans $\lambda^{-1}X+\lambda^{-1}\omega$. Remarquons que $\mathfrak{g}_{\lambda^{-1}X}=\mathfrak{g}_X$. Pour tout $\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_X)$, on a l'égalité

$$(2)\qquad c_{\theta^\lambda,\mathcal{O}}(\lambda^{-1}X)=|\lambda|_F^{-dim(\mathcal{O})/2}c_{\theta,\mathcal{O}}(X).$$

Cela résulte immédiatement des formules de 2.6.

Théorème. *Soit D une distribution sur $\mathfrak{g}(F)$, invariante par conjugaison et à support compact modulo conjugaison. Alors sa transformée de Fourier est la distribution associée à une fonction localement intégrable θ qui est un quasi-caractère.*

C'est un résultat d'Harish-Chandra. La première assertion résulte du théorème 4.4 de [HCDS]. La dernière n'est pas très clairement énoncée dans cette référence mais résulte de la preuve du théorème 4.4, en particulier du théorème 5.11 et du corollaire 6.10.

4.3 Localisation

On fixe un élément $x\in G_{ss}(F)$ et un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$. Soit θ un quasi-caractère de $G(F)$. On définit une fonction $\theta_{x,\omega}$ sur $\mathfrak{g}_x(F)$ par

$$\theta_{x,\omega}(X)=\begin{cases}\theta(xexp(X)), & \text{si } X\in\omega,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors $\theta_{x,\omega}$ est un quasi-caractère de $\mathfrak{g}_x(F)$. On a les égalités $c_{\theta,\mathcal{O}}(xexp(X))=c_{\theta_{x,\omega},\mathcal{O}}(X)$ pour tout $X\in\omega\cap\mathfrak{g}_{x,ss}(F)$ et tout $\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_{x,X})$. En particulier $c_{\theta,\mathcal{O}}(x)=c_{\theta_{x,\omega},\mathcal{O}}$ pour tout $\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_x)$.

Inversement, soit θ un quasi-caractère de $\mathfrak{g}_x(F)$. Supposons que θ soit invariant par conjugaison par $Z_G(x)(F)$ et à support dans ω. Soit $\boldsymbol{\theta}$ la fonction sur $G(F)$, invariante par conjugaison par $G(F)$, à support dans $\Omega=(xexp(\omega))^G$ et telle que $\boldsymbol{\theta}(xexp(X))=\theta(X)$ pour $X\in\omega$, cf. 3.1. Alors $\boldsymbol{\theta}$ est un quasi-caractère sur $G(F)$. On a l'égalité $\boldsymbol{\theta}_{x,\omega}=\theta$.

5 Fonctions très cuspidales

5.1 Définition

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. On dit que f est très cuspidale si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MU$ de G et pour tout $x \in M(F)$, on a l'égalité

$$\int_{U(F)} f(xu)du = 0.$$

Remarquons que l'intégrale ci-dessus est localement constante en x. Sa nullité sur $M(F)$ équivaut à sa nullité sur $M(F) \cap G_{reg}(F)$. Mais, pour $x \in M(F) \cap G_{reg}(F)$, on a l'égalité

$$\delta_P(x)^{1/2} \int_{U(F)} f(xu)du = D^G(x)^{1/2} D^M(x)^{-1/2} \int_{U(F)} f(u^{-1}xu)du.$$

Alors f est très cuspidale si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MU$ de G et pour tout $x \in M(F) \cap G_{reg}(F)$, on a l'égalité

$$\int_{U(F)} f(u^{-1}xu)du = 0.$$

Disons qu'un élément $x \in G_{reg}(F)$ est elliptique si $A_{G_x} = A_G$. Si le support de f est contenu dans l'ensemble des éléments réguliers elliptiques de $G(F)$, alors f est très cuspidale. Si Ω est un G-domaine dans $G(F)$ et si f est très cuspidale, alors $f\mathbf{1}_\Omega$ est très cuspidale. Si f est très cuspidale, ${}^g f$ l'est pour tout $g \in G(F)$.

5.2 Intégrales orbitales pondérées de fonctions très cuspidales

Soient M un Lévi de G et K un sous-groupe compact spécial de $G(F)$ en bonne position relativement à M.

Lemme. *Soient $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $x \in M(F) \cap G_{reg}(F)$. On suppose f très cuspidale.*
(i) L'intégrale orbitale pondérée $J_M(x, f)$ ne dépend pas de K.
(ii) Pour tout $y \in G(F)$, on a l'égalité $J_M(x, {}^y f) = J_M(x, f)$.
(iii) Si $A_{G_x} \neq A_M$, alors $J_M(x, f) = 0$.

Preuve. Soit $\tilde{K}$ un autre sous-groupe compact spécial en bonne position relativement à M. Soit $g \in G(F)$. En utilisant K, on a défini la famille de points $(H_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$ et la (G, M)-famille $(v_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$. En utilisant $\tilde{K}$, on définit de même une famille de points $(\tilde{H}_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$ et une (G, M)-famille $(\tilde{v}_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$. On définit la (G, M)-famille $(d_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ par $d_P(g) = v_P(g)\tilde{v}_P(g)^{-1}$. Elle est associée à la famille de points $(H_P(g) - \tilde{H}_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$. On a $v_P(g) = \tilde{v}_P(g)d_P(g)$, d'où, d'après 2.2(2)

$$v_M(g) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} \tilde{v}_M^Q(g) u_Q(H_Q(g) - \tilde{H}_Q(g)).$$

Alors

$$J_M(x, f) = D^G(x)^{1/2} \int_{G_x(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}xg)v_M(g)dg$$

$$= D^G(x)^{1/2} \sum_{Q\in\mathcal{F}(M)} \int_{G_x(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}xg)\tilde{v}_M^Q(g)u_Q(H_Q(g)-\tilde{H}_Q(g))dg$$

$$= D^G(x)^{1/2} \sum_{Q=LU\in\mathcal{F}(M)} \int_{L_x(F)\backslash L(F)} \int_{\tilde{K}} \int_{U(F)} f(k^{-1}u^{-1}l^{-1}xluk)$$

$$\tilde{v}_M^L(l)u_Q(H_Q(k))du\,dk\,dl.$$

Si $Q \neq G$, l'intégrale intérieure sur $U(F)$ est nulle puisque f est très cuspidale. Le terme pour $Q = G$ est l'intégrale orbitale pondérée calculée à l'aide de $\tilde{K}$. Cela prouve (i).

Par changement de variable

$$J_M(x, {}^yf) = D^G(x)^{1/2} \int_{G_x(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}xg)v_M(gy^{-1})dg.$$

La relation 2.2(2) permet d'exprimer $v_M(gy^{-1})$ à l'aide des $v_M^Q(g)$ pour $Q \in \mathcal{F}(M)$. Comme ci-dessus, les termes indexés par $Q \neq G$ ont une contribution nulle. Le terme pour $Q = G$ donne l'intégrale $J_M(x, f)$. Cela prouve (ii).

Soit $M(x)$ le commutant de A_{G_x} dans G. C'est un Lévi de M. Quitte à changer de groupe K, ce qui est loisible d'après (i), on peut supposer que K est en bonne position relativement à $M(x)$. La formule 2.2(3) appliquée aux poids conduit aisément à l'égalité

$$J_M(x, f) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M(x))} d_{M(x)}^G(M, L)J_{M(x)}^L(x, f_Q).$$

Supposons $A_{G_x} \neq A_M$. Alors $M(x) \neq M$ et tous les Lévi L intervenant dans cette somme sont différents de G. Les fonctions correspondantes f_Q sont nulles et on obtient l'assertion (iii). $\square$

5.3 La distribution invariante associée à une fonction très cuspidale

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. On suppose f très cuspidale. Soit $x \in G_{reg}(F)$. Notons $M(x)$ le commutant de A_{G_x} dans G. C'est un Lévi de G. On pose

$$\theta_f(x) = (-1)^{a_{M(x)}-a_G}\nu(G_x)^{-1}D^G(x)^{-1/2}J_{M(x)}(x, f),$$

l'intégrale orbitale pondérée étant calculée à l'aide d'un sous-groupe compact spécial de $G(F)$ en bonne position relativement à $M(x)$. Cette définition est loisible d'après le (i) du lemme précédent.

Lemme. *La fonction θ_f est invariante par conjugaison, à support compact modulo conjugaison, localement intégrable sur $G(F)$ et localement constante sur $G_{reg}(F)$.*

Preuve. Soient $y \in G(F)$ et $x \in G_{reg}(F)$. On a $M(yxy^{-1}) = yM(x)y^{-1}$. Par transport de structure,

$$J_{M(x)}(x, f) = J_{yM(x)y^{-1}}(yxy^{-1}, {}^yf).$$

Le second terme est égal à $J_{yM(x)y^{-1}}(yxy^{-1}, f)$ d'après le (ii) du lemme précédent. Alors $\theta_f(x) = \theta_f(yxy^{-1})$, d'où la première assertion. Le support de θ_f est contenu dans

$(Supp(f))^G$, d'où la deuxième assertion. Puisque θ_f est invariante par conjugaison, la locale intégrabilité et la locale constance se testent sur les tores maximaux de G. Soit T un tel tore, notons $M(T)$ le commutant de A_T dans G. Pour $x \in T(F) \cap G_{reg}(F)$, on a $M(x) = M(T)$. Les assertions à prouver résultent des assertions similaires pour la fonction $x \mapsto J_{M(T)}(x, f)$ sur $T(F) \cap G_{reg}(F)$. Celles-ci résultent du lemme 2.3. $\square$

5.4 Localisation : premières propriétés

Soit $x \in G_{ss}(F)$. On suppose que G_x est le produit de deux groupes réductifs connexes $G_x = G' \times G''$, conservés chacun par $Z_G(x)(F)$. Tout élément $X \in \mathfrak{g}_x(F)$ se décompose en somme d'un élément de $\mathfrak{g}'(F)$ et d'un élément de $\mathfrak{g}''(F)$. On notera sans plus de commentaire $X = X' + X''$ cette décomposition. De même, tout Lévi R de G_x se décompose en $R = R' \times R''$, où R' est un Lévi de G' et R'' un Lévi de G''. On note $f \mapsto f^\sharp$ la transformation de Fourier partielle dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}_x(F))$ relative à la deuxième variable. C'est-à-dire que, pour $X = X' + X'' \in \mathfrak{g}_x(F)$,

$$f^\sharp(X) = \int_{\mathfrak{g}''(F)} f(X' + Y'')\psi(< Y'', X'' >)dY''.$$

Si R est un Lévi de G_x, on définit de même une transformation de Fourier partielle $f \mapsto f^\sharp$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{r}(F))$. Soit ω un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$, auquel on impose la condition (8) de 3.1. Cette situation sera conservée jusqu'en 5.8 inclus.

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. Pour $g \in G(F)$, on définit ${}^g f_{x,\omega} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_x(F))$ par

$${}^g f_{x,\omega}(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } X \notin \omega, \\ f(g^{-1}x exp(X)g), & \text{si } X \in \omega. \end{cases}$$

On pose ${}^g f^\sharp_{x,\omega} = ({}^g f_{x,\omega})^\sharp$. Pour $y \in Z_G(x)(F)$ et $X \in \mathfrak{g}_x(F)$, on a les égalités

$$(1) \qquad {}^{yg} f_{x,\omega}(X) = {}^g f_{x,\omega}(y^{-1}Xy), \; {}^{yg} f^\sharp_{x,\omega}(X) = {}^g f^\sharp_{x,\omega}(y^{-1}Xy).$$

Soient M un Lévi de G tel que $x \in M(F)$. On fixe un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M. Soit $P = MU \in \mathcal{P}(M)$. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, définissons des fonctions $\varphi[P, f]$, $\varphi^\sharp[P, f]$ et $J^\sharp_{M,x,\omega}(., f)$ sur $\mathfrak{m}_x(F) \cap \mathfrak{g}_{x,reg}(F)$ par

$$\varphi[P, f](X) = D^{G_x}(X)^{1/2} D^{M_x}(X)^{-1/2} \int_{U(F)} {}^u f_{x,\omega}(X)du,$$

$$\varphi^\sharp[P, f](X) = D^{G_x}(X)^{1/2} D^{M_x}(X)^{-1/2} \int_{U(F)} {}^u f^\sharp_{x,\omega}(X)du,$$

$$J^\sharp_{M,x,\omega}(X, f) = D^{G_x}(X)^{1/2} \int_{G_{x,X}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X) v_M(g)dg.$$

Lemme. *(i) Ces trois intégrales sont absolument convergentes.*

(ii) Les fonctions $\varphi[P, f]$ et $\varphi^\sharp[P, f]$ se prolongent en des éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{m}_x(F))$ et on a l'égalité $\varphi^\sharp[P, f] = (\varphi[P, f])^\sharp$.

(iii) La fonction $X \mapsto J^\sharp_{M,x,\omega}(X, f)$ est invariante par conjugaison par $M_x(F)$. Son support est compact modulo conjugaison. Elle est localement constante sur $\mathfrak{m}_x(F) \cap$

$\mathfrak{g}_{x,reg}(F)$. Il existe $c>0$ et un entier $k\geq 0$ (d'ailleurs indépendant de f) tels que l'on ait l'inégalité

$$|J^\sharp_{M,x,\omega}(X,f)|\leq c(1+|log(D^{G_x}(X))|)^k$$

pour tout $X\in\mathfrak{m}_x(F)\cap\mathfrak{g}_{x,reg}(F)$.

Preuve. Ecrivons

$$(2)\qquad \varphi[P,f](X)=\int_{U_x(F)\backslash U(F)}D^{G_x}(X)^{1/2}D^{M_x}(X)^{-1/2}\int_{U_x(F)}{}^{uv}f_{x,\omega}(X)du\,dv,$$

$$(3)\qquad \varphi^\sharp[P,f](X)=\int_{U_x(F)\backslash U(F)}D^{G_x}(X)^{1/2}D^{M_x}(X)^{-1/2}\int_{U_x(F)}{}^{uv}f^\sharp_{x,\omega}(X)du\,dv.$$

D'après 2.1(5), on peut fixer un sous-ensemble compact Γ de $G(F)$ tel que ${}^gf_{x,\omega}=0$ pour $g\in G(F)$, $g\notin G_x(F)\Gamma$. On a donc aussi ${}^gf^\sharp_{x,\omega}=0$ pour un tel g. On vérifie que l'application

$$U_x(F)\backslash U(F)\to G_x(F)\backslash G(F)$$

est d'image fermée et est un homéomorphisme de sa source sur son image. Il en résulte que les intégrales en $v\in U_x(F)\backslash U(F)$ dans les égalités (2) et (3) sont à support compact. Les expressions que l'on intègre étant localement constantes, il suffit de fixer $v\in U(F)$ et de prouver les assertions pour les expressions en question. Grâce à (1), celles-ci s'écrivent

$$D^{G_x}(X)^{1/2}D^{M_x}(X)^{-1/2}\int_{U_x(F)}{}^vf_{x,\omega}(u^{-1}Xu)du,$$

$$D^{G_x}(X)^{1/2}D^{M_x}(X)^{-1/2}\int_{U_x(F)}{}^vf^\sharp_{x,\omega}(u^{-1}Xu)du.$$

Par un calcul familier, elles sont égales à

$$\int_{\mathfrak{u}_x(F)}{}^vf_{x,\omega}(X+N)dN \text{ et } \int_{\mathfrak{u}_x(F)}{}^vf^\sharp_{x,\omega}(X+N)dN.$$

Les assertions sont maintenant faciles à prouver.

De même, pour démontrer les assertions relatives à la fonction $J^\sharp_{M,x,\omega}(.,f)$, on peut fixer $\gamma\in\Gamma$ et prouver les mêmes assertions pour la fonction

$$X\mapsto D^{G_x}(X)^{1/2}\int_{G_{x,X}(F)\backslash G_x(F)}{}^{g\gamma}f^\sharp_{x,\omega}(X)v_M(g\gamma)dg,$$

ou encore

$$X\mapsto D^{G_x}(X)^{1/2}\int_{G_{x,X}(F)\backslash G_x(F)}{}^{\gamma}f^\sharp_{x,\omega}(g^{-1}Xg)v_M(g\gamma)dg.$$

Il suffit alors de reprendre la preuve du lemme 2.3. $\square$

5.5 Localisation pour une fonction très cuspidale

Les groupes M, P et K sont comme dans le paragraphe précédent.

Lemme. *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale.*

(i) Si $P \neq G$, les fonctions $\varphi[P, f]$ et $\varphi^\sharp[P, f]$ sont nulles.

(ii) La fonction $J^\sharp_{M,x,\omega}(., f)$ ne dépend pas du choix de K. Elle s'annule aux points $X \in \mathfrak{m}_x(F) \cap \mathfrak{g}_{x,reg}(F)$ tels que $A_{G_{x,X}} \neq A_M$. En particulier, elle est partout nulle si $A_{M_x} \neq A_M$. Pour tous $y \in G(F)$ et $X \in \mathfrak{m}_x(F) \cap \mathfrak{g}_{x,reg}(F)$, on a l'égalité

$$J^\sharp_{M,x,\omega}(X, f) = J^\sharp_{M,x,\omega}(X, {}^y f).$$

Preuve. Soit $X \in \mathfrak{m}_x(F) \cap \mathfrak{g}_{x,reg}(F)$. Par définition, $\varphi[P, f](X) = 0$ si $X \notin \omega$. Supposons $X \in \omega$. Alors

$$\varphi[P, f](X) = D^{G_x}(X)^{1/2} D^{M_x}(X)^{-1/2} \int_{U(F)} f(u^{-1} xexp(X) u) du.$$

On a $xexp(X) \in M(F) \cap G_{reg}(F)$. Si $P \neq G$, cette intégrale est nulle puisque f est très cuspidale. Donc $\varphi[P, f] = 0$. Puisque $\varphi^\sharp[P, f] = (\varphi[P, f])^\sharp$, on a aussi $\varphi^\sharp[P, f] = 0$.

On démontre (ii) en reprenant la preuve du lemme 5.2. On y avait utilisé l'hypothèse de forte cuspidalité de f pour annuler certaines intégrales. Maintenant, les intégrales similaires s'annulent d'après la nullité des fonctions $\varphi^\sharp[Q, f]$ pour tout $Q \in \mathcal{F}(M)$, $Q \neq G$. Cela conduit aux mêmes résultats. $\square$

5.6 Les distributions locales associées à une fonction très cuspidale

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. On définit une fonction $\theta_{f,x,\omega}$ sur $\mathfrak{g}_{x,reg}(F)$ par

$$\theta_{f,x,\omega}(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } X \notin \omega, \\ \theta_f(xexp(X)), & \text{si } X \in \omega. \end{cases}$$

Soit $X \in \mathfrak{g}_{x,reg}(F)$. Notons $\mathbf{M}(X)$ le commutant de $A_{G_{x,X}}$ dans G. On pose

$$\theta^\sharp_{f,x,\omega}(X) = (-1)^{a_{\mathbf{M}(X)} - a_G} \nu(G_{x,X})^{-1} D^{G_x}(X)^{-1/2} J^\sharp_{\mathbf{M}(X),x,\omega}(X, f),$$

le dernier terme étant calculé à l'aide d'un sous-groupe compact spécial de $G(F)$ en bonne position relativement à $\mathbf{M}(X)$. Cette définition est loisible d'après le (ii) du lemme précédent.

Lemme. *Les fonctions $\theta_{f,x,\omega}$ et $\theta^\sharp_{f,x,\omega}$ sont invariantes par conjugaison par $G_x(F)$, à support compact modulo conjugaison, localement intégrables sur $\mathfrak{g}_x(F)$ et localement constantes sur $\mathfrak{g}_{x,reg}(F)$.*

Preuve. Pour la fonction $\theta_{f,x,\omega}$, les assertions résultent du lemme 5.3. Pour la fonction $\theta^\sharp_{f,x,\omega}$, elles se prouvent comme dans ce lemme, en utilisant les lemmes 5.4(iii) et 5.5(ii). $\square$

5.7 Descente des intégrales orbitales pondérées

On fixe un Lévi minimal R_{min} de G_x et un sous-groupe compact spécial K_x de $G_x(F)$ en bonne position relativement à R_{min}. Rappelons l'application $R \mapsto \mathbf{R}$ de 3.2. On fixe un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à $\mathbf{R}_{min}$.

Lemme. *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. Pour tout $S \in \mathcal{L}(R_{min})$, il existe une fonction $f^S \in C_c^\infty(\mathfrak{s}(F))$, à support dans $\omega \cap \mathfrak{s}(F)$, telle que, pour tout $R \in \mathcal{L}(R_{min})$, on ait les égalités*

(i) $J_{\mathbf{R}}(xexp(X), f) = D^G(x)^{1/2} \sum_{S\in\mathcal{L}(R)} J_R^S(X, f^S)$ pour tout $X \in \mathfrak{r}(F)\cap\mathfrak{g}_{x,reg}(F)\cap\omega$;

(ii) $J^\sharp_{\mathbf{R},x,\omega}(X, f) = \sum_{S\in\mathcal{L}(R)} J_R^S(X, f^{S,\sharp})$ pour tout $X \in \mathfrak{r}(F) \cap \mathfrak{g}_{x,reg}(F)$, où $f^{S,\sharp} = (f^S)^\sharp$.

Preuve. Soient $R \in \mathcal{L}(R_{min})$ et $X \in \mathfrak{r}(F) \cap \mathfrak{g}_{x,reg}(F) \cap \omega$. On a les égalités

$$J_{\mathbf{R}}(xexp(X), f) = D^G(xexp(X))^{1/2} \int_{G_{x,X}(F)\backslash G(F)} {}^g f_{x,\omega}(X) v_{\mathbf{R}}(g)dg,$$

$$(1) \qquad J_{\mathbf{R}}(xexp(X)) = D^G(x)^{1/2} D^{G_x}(X)^{1/2} \int_{G_{x,X}(F)\backslash G(F)} {}^g f_{x,\omega}(X) v_{\mathbf{R}}(g)dg.$$

Fixons un sous-groupe ouvert compact K' de K tel que f soit invariante par conjugaison par K'. Soit Δ un ensemble de représentants de $G_x(F)\backslash G(F)/K'$. On a l'égalité

$$\int_{G_{x,X}(F)\backslash G(F)} {}^g f_{x,\omega}(X) v_{\mathbf{R}}(g)dg = \sum_{\delta\in\Delta} m(\delta) \int_{G_{x,X}(F)\backslash G_x(F)} {}^{g\delta} f_{x,\omega}(X) v_{\mathbf{R}}(g\delta)dg,$$

où $m(\delta) = mes(K')mes(G_x(F) \cap \delta K'\delta^{-1})^{-1}$. D'après 3.1(5), on peut fixer un sous-ensemble fini $\Delta_0 \subset \Delta$ tel que ${}^{g\delta} f_{x,\omega} = 0$ pour tout $g \in G_x(F)$ et tout $\delta \in \Delta$ tel que $\delta \notin \Delta_0$. Le lemme 3.3 conduit à l'égalité suivante

$$(2) \qquad J_{\mathbf{R}}(xexp(X), f) = D^G(x)^{1/2} \sum_{S\in\mathcal{L}(R)} \sum_{\delta\in\Delta_0} \sum_{Q\in\mathcal{P}(\mathbf{S})} m(\delta) c^{Q,\delta}(X),$$

où

$$c^{Q,\delta}(X) = D^{G_x}(X)^{1/2} \int_{G_{x,X}(F)\backslash G_x(F)} {}^\delta f_{x,\omega}(g^{-1}Xg) v_R^{Q_x}(g) u_Q(H_Q(g\delta) - H_{Q_x}(g))dg.$$

Un calcul familier remplace cette expression par

$$c^{Q,\delta}(X) = D^S(X)^{1/2} \int_{G(x,X)(F)\backslash S(F)} \int_{K_x} \int_{\mathfrak{u}_x(F)} {}^{k\delta} f_{x,\omega}(l^{-1}Xl+N) v_R^S(l) u_Q(H_Q(k\delta))dN\, dk\, dl,$$

où U_x est le radical unipotent de Q_x. Définissons une fonction $f^{Q,\delta}$ sur $\mathfrak{s}(F)$ par

$$f^{Q,\delta}(Y) = \int_{K_x} \int_{\mathfrak{u}_x(F)} {}^{k\delta} f_{x,\omega}(Y + N) u_Q(H_Q(k\delta))dN\, dk.$$

Cette fonction appartient à $C_c^\infty(\mathfrak{s}(F))$ et on a l'égalité

$$c^{Q,\delta}(X) = J_R^S(X, f^{Q,\delta}).$$

En posant
$$f^S=\sum_{\delta\in\Delta_0}\sum_{Q\in\mathcal{P}(\mathbf{S})}m(\delta)f^{Q,\delta},$$
l'égalité (2) devient celle du (i) de l'énoncé.

Pour tout $X\in\mathfrak{r}(F)\cap\mathfrak{g}_{x,reg}(F)$, le terme $J^{\sharp}_{\mathbf{R},x,\omega}(X,f)$ s'exprime par une formule analogue à (1) : il suffit de supprimer le facteur $D^G(x)^{1/2}$ et de remplacer les fonctions ${}^gf_{x,\omega}$ par ${}^gf^{\sharp}_{x,\omega}$. On peut refaire le calcul ci-dessus. Les fonctions $f^{Q,\delta}$ sont remplacées par les fonctions
$$Y\mapsto\int_{K_x}\int_{\mathfrak{u}_x(F)}{}^{k\delta}f^{\sharp}_{x,\omega}(Y+N)u_Q(H_Q(k\delta))dn\,dk.$$
On vérifie aisément que ce sont les images $f^{Q,\delta,\sharp}$ de $f^{Q,\delta}$ par transformation de Fourier partielle. Le (ii) de l'énoncé s'ensuit. □

5.8 Transformées de Fourier des distributions locales

Proposition. *Soit $f\in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. Alors la fonction $\theta^{\sharp}_{f,x,\omega}$ est la transformée de Fourier partielle de $\theta_{f,x,\omega}$, c'est-à-dire que, pour toute $\varphi\in C_c^\infty(\mathfrak{g}_x(F))$, on a l'égalité*
$$\int_{\mathfrak{g}_x(F)}\theta^{\sharp}_{f,x,\omega}(X)\varphi(X)dX=\int_{\mathfrak{g}_x(F)}\theta_{f,x,\omega}(X)\varphi^{\sharp}(X)dX.$$

Preuve. Soit $\varphi\in C_c^\infty(\mathfrak{g}_x(F))$. Notons $\theta^{\sharp}(\varphi)$ le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé et $\theta(\varphi^{\sharp})$ celui de droite. D'après la formule de Weyl, on a
$$\theta(\varphi^{\sharp})=\sum_{R\in\mathcal{L}(R_{min})}|W^R||W^{G_x}|^{-1}\sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}(R)}|W(R,T)|^{-1}\int_{\mathfrak{t}(F)}J_{G_x}(X,\varphi^{\sharp})\theta_{f,x,\omega}(X)D^{G_x}(X)^{1/2}dX.$$
Soient $R\in\mathcal{L}(R_{min})$, $T\in\mathcal{T}_{ell}(R)$ et $X\in\mathfrak{t}(F)\cap\mathfrak{g}_{x,reg}(F)$. Supposons d'abord $X\in\omega$. Alors
$$\theta_{f,x,\omega}(X)=(-1)^{a_{M(xexp(X))}-a_G}\nu(T)^{-1}D^G(xexp(X))^{-1/2}J_{M(xexp(X))}(xexp(X),f).$$
On a $D^G(xexp(X))=D^G(x)D^{G_x}(X)$. On a aussi $M(xexp(X))=\mathbf{R}$. Enfin $J_{\mathbf{R}}(xexp(X),f)$ est calculé par le lemme 5.7 et on obtient :
$$\theta_{f,x,\omega}(X)=(-1)^{a_R-a_G}\nu(T)^{-1}D^{G_x}(X)^{-1/2}\sum_{S\in\mathcal{L}(R)}J_R^S(X,f^S).$$
Cette formule reste vraie pour $X\notin\omega$ car ses deux membres sont nuls : par définition de $\theta_{f,x,\omega}$ pour celui de gauche ; parce que les fonctions f^S sont à support dans $\mathfrak{s}(F)\cap\omega$ pour celui de droite. D'où l'égalité
$$\theta(\varphi^{\sharp})=\sum_{S\in\mathcal{L}(R)}|W^S||W^{G_x}|^{-1}(-1)^{a_S-a_G}\theta^S(\varphi^{\sharp},f^S),$$
où
$$(1)\qquad\theta^S(\varphi^{\sharp},f^S)=\sum_{R\in\mathcal{L}^S(R_{min})}|W^R||W^{G_x}|^{-1}(-1)^{a_R-a_S}$$

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}(R)}|W(R,T)|^{-1}\nu(T)^{-1}\int_{\mathfrak{t}(F)}J_{G_x}(X,\varphi^\sharp)J_R^S(X,f^S)dX.$$

Soient $S\in\mathcal{L}(R_{min})$, α et β deux éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{s}(F))$. Pour $R\in\mathcal{L}^S(R_{min})$, $T\in\mathcal{T}_{ell}(R)$ et $X\in\mathfrak{t}(F)\cap\mathfrak{g}_{x,reg}(F)$, posons

$$(2)\qquad j_R^S(X,\alpha,\beta)=\sum_{S''_1,S''_2\in\mathcal{L}^{S''}(R'')}d_{R''}^{S''}(S''_1,S''_2)J_{S'\times R''}^{S'\times S''_1}(X,\alpha_{S'\times\bar{Q}''_1})J_R^{S'\times S''_2}(X,\beta_{S'\times Q''_2}).$$

Les sous-groupes paraboliques Q''_1 et Q''_2 sont déterminés par un paramètre auxiliaire $\xi''\in\mathcal{A}_{R''}^{S''}$. On pose

$$j^S(\alpha,\beta)=\sum_{R\in\mathcal{L}^S(R_{min})}|W^R||W^S|^{-1}(-1)^{a_R-a_S}\sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}(R)}|W(R,T)|^{-1}\nu(T)^{-1}\int_{\mathfrak{t}(F)}j_R^S(X,\alpha,\beta)dX.$$

Revenons à la formule (2) et supposons que α vérifie l'hypothèse (H) de 2.5. On peut alors remplacer $\alpha_{S'\times\bar{Q}''_1}$ par $\alpha_{S'\times S''_1}$. Soit $S''_1\in\mathcal{L}^{S''}(M'')$. Pour tout $\gamma\in C_c^\infty(\mathfrak{s}'(F)\times\mathfrak{s}''_1(F))$, on a la formule de descente

$$J_{S'\times R''}^{S'\times S''_1}(X,\gamma)=J_R^{R'\times S''_1}(X,\gamma_{Q'\times S''_1})$$

où Q' est un élément quelconque de $\mathcal{P}^{S'}(R')$. Appliquée à $\gamma=\alpha_{S'\times S''_1}$, cette formule devient

$$J_{S'\times R''}^{S'\times S''_1}(X,\alpha_{S'\times S''_1})=J_R^{R'\times S''_1}(X,\alpha_{R'\times S''_1}).$$

Alors

$$j_R^S(X,\alpha,\beta)=\sum_{S''_1\in\mathcal{L}^{S''}(R'')}J_R^{R'\times S''_1}(X,\alpha_{R'\times S''_1})\sum_{S''_2\in\mathcal{L}^{S''}(R'')}d_{R''}^{S''}(S''_1,S''_2)J_R^{S'\times S''_2}(X,\beta_{S'\times Q''_2}).$$

Fixons $S''_1\in\mathcal{L}^{S''}(R'')$. L'application $S_2\mapsto S''_2$ est une bijection de l'ensemble des $S_2\in\mathcal{L}^S(R)$ tels que $d_R^S(R'\times S''_1,S_2)\neq 0$ sur l'ensemble des $S''_2\in\mathcal{L}^{S''}(R'')$ tels que $d_{R''}^{S''}(S''_1,S''_2)\neq 0$. La bijection réciproque est $S''_2\mapsto S'\times S''_2$. Fixons un paramètre auxiliaire $\xi\in\mathcal{A}_R^S$ dont la seconde composante soit ξ''. Pour S_2 et S''_2 se correspondant par la bijection ci-dessus, on a $d_R^S(R'\times S''_1,S_2)=d_{R''}^{S''}(S''_1,S''_2)$ et le parabolique Q_2 associé à $R'\times S''_1$, S_2 et ξ n'est autre que $S'\times Q''_2$. Cela conduit à l'égalité

$$j_R^S(X,\alpha,\beta)=\sum_{S''_1\in\mathcal{L}^{S''}(R'')}J_R^{R'\times S''_1}(X,\alpha_{R'\times S''_1})\sum_{S_2\in\mathcal{L}^S(R)}d_R^S(R'\times S''_1,S_2)J_R^{S_2}(X,\beta_{Q_2}),$$

ou encore, d'après 2.2(3),

$$(3)\qquad j_R^S(X,\alpha,\beta)=\sum_{S''_1\in\mathcal{L}^{S''}(R'')}J_R^{R'\times S''_1}(X,\alpha_{R'\times S''_1})J_{R'\times S''_1}^S(X,\beta).$$

Supposons que la fonction φ vérifie l'hypothèse (H). Une généralisation immédiate de ce que l'on a dit en 2.5 montre que $\varphi^\sharp$ vérifie aussi cette hypothèse et que $(\varphi_S)^\sharp=(\varphi^\sharp)_S$. On peut noter sans ambigüité $\varphi_S^\sharp$ cette fonction. Elle vérifie aussi (H) et $j_R^S(X,\varphi_S^\sharp,f^S)$ se calcule par la formule (3). Remarquons que le terme de cette formule indexé par

$S_1''=R''$ est $J_R^R(X,\varphi_R^\sharp)J_R^S(X,f^S)$, égal à $J_{G_x}(X,\varphi^\sharp)J_R^S(X,f^S)$, qui est précisément le terme intervenant dans (1). On en déduit

$$j^S(\varphi_S^\sharp,f^S)-\theta^S(\varphi^\sharp,f^S)=\sum_{R\in\mathcal{L}^S(R_{min})}|W^R||W^S|^{-1}(-1)^{a_R-a_S}\sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}(R)}|W(R,T)|^{-1}$$

$$\nu(T)^{-1}\int_{\mathfrak{t}(F)}\sum_{S_1''\in\mathcal{L}^{S''}(R''),S_1''\neq R''}J_R^{R'\times S_1''}(X,\varphi^\sharp_{R'\times S_1''})J^S_{R'\times S_1''}(X,f^S)dX.$$

Posons

$$j(\varphi^\sharp)=\sum_{S\in\mathcal{L}(R_{min})}|W^S||W^{G_x}|^{-1}(-1)^{a_S-a_G}j^S(\varphi_S^\sharp,f^S).$$

Alors

$$j(\varphi^\sharp)-\theta(\varphi^\sharp)=\sum_{S\in\mathcal{L}(R_{min})}|W^S||W^{G_x}|^{-1}(-1)^{a_S-a_G}(j^S(\varphi_S^\sharp,f^S)-\theta^S(\varphi^\sharp,f^S)),$$

$$j(\varphi^\sharp)-\theta(\varphi^\sharp)=\sum_{R\in\mathcal{L}(R_{min})}|W^R||W^{G_x}|^{-1}(-1)^{a_R-a_G}\sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}(R)}|W(R,T)|^{-1}\nu(T)^{-1}$$

$$\int_{\mathfrak{t}(F)}\sum_{S_1''\in\mathcal{L}^{G''}(R''),S_1''\neq R''}J_R^{R'\times S_1''}(X,\varphi^\sharp_{R'\times S_1''})\sum_{S\in\mathcal{L}^{G_x}(R'\times S_1'')}J^S_{R'\times S_1''}(X,f^S)dX.$$

D'après le lemme 5.7, la dernière somme dans l'expression ci-dessus est

$$D^G(x)^{-1/2}J_{\mathbf{S}_1}(xexp(X),f),$$

où on a posé $S_1=R'\times S_1''$. Or $xexp(X)\in\mathbf{R}\subsetneq\mathbf{S}_1$ puisque $R''\subsetneq S_1''$. D'après le lemme 5.2(iii), l'expression ci-dessus est nulle. D'où l'égalité

$$\theta(\varphi^\sharp)=j(\varphi^\sharp).$$

Définissons $j^\sharp(\varphi)$ en remplaçant $j^S(\varphi_S^\sharp,f^S)$ par $j^S(\varphi_S,f^{S,\sharp})$ dans la formule (4). Le même calcul conduit à l'égalité

$$\theta^\sharp(\varphi)=j^\sharp(\varphi).$$

Il suffit en effet de remplacer l'usage du lemme 5.2(iii) par celui du lemme 5.5(ii).

L'égalité $\theta(\varphi^\sharp)=\theta^\sharp(\varphi)$ que l'on veut prouver équivaut donc à $j(\varphi^\sharp)=j^\sharp(\varphi)$. Il suffit de fixer $S\in\mathcal{L}(R_{min})$ et de prouver l'égalité $j^S(\varphi_S^\sharp,f^S)=j^S(\varphi_S,f^{S,\sharp})$. On va plus généralement prouver l'égalité $j^S(\alpha^\sharp,\beta)=j^L(\alpha,\beta^\sharp)$ pour toutes $\alpha,\beta\in C_c^\infty(\mathfrak{s}(F))$. Par linéarité, on peut supposer $\alpha=\alpha'\otimes\alpha''$, $\beta=\beta'\otimes\beta''$, où $\alpha',\beta'\in C_c^\infty(\mathfrak{s}'(F))$, $\alpha'',\beta''\in C_c^\infty(\mathfrak{s}''(F))$. Considérons l'expression (2). On a

$$j_R^S(X,\alpha^\sharp,\beta)=J_{S'}(X',\alpha')J_{R'}^{S'}(X',\beta')\sum_{S_1'',S_2''\in\mathcal{L}^{S''}(R'')}d_{R''}^{S''}(S_1'',S_2'')J_{R''}^{S_1''}(X'',\hat{\alpha}''_{\bar{Q}_1''})J_{R''}^{S_2''}(X'',\beta''_{Q_2''}),$$

puis

$$j_R^S(X,\alpha^\sharp,\beta)=J_{S'}(X',\alpha')J_{R'}^{S'}(X',\beta')J_{R''}^{S''}(X'',\hat{\alpha}'',\beta''),$$

avec la notation de 2.4. On en déduit aisément

$$j^S(\alpha^\sharp,\beta)=k^{S'}(\alpha',\beta')J^{S''}(\hat{\alpha}'',\beta''),$$

où

$$k^{S'}(\alpha',\beta') = \sum_{R'\in\mathcal{L}^{S'}(R'_{min})} |W^{R'}||W^{S'}|^{-1}(-1)^{a_{R'}-a_{S'}} \sum_{T'\in\mathcal{T}_{ell}(R')} |W(R',T')|^{-1}$$
$$\nu(T')^{-1}\int_{\mathfrak{t}'(F)} J_{S'}(X',\alpha')J_{R'}^{S'}(X',\beta')dX'.$$

De même

$$j^S(\alpha,\beta^\sharp) = k^{S'}(\alpha',\beta')J^{S''}(\alpha'',\hat{\beta}'').$$

On déduit alors l'égalité cherchée $j^S(\alpha^\sharp,\beta) = j^S(\alpha,\beta^\sharp)$ du théorème 2.4.

Cela prouve l'égalité de l'énoncé pour les fonctions φ vérifiant l'hypothèse (H). Puisque les deux distributions $\varphi \mapsto \theta^\sharp(\varphi)$ et $\varphi \mapsto \theta(\varphi^\sharp)$ sont invariantes par conjugaison par $G_x(F)$, le lemme 2.5(ii) généralise leur égalité à toute fonction φ à support dans $\mathfrak{g}_{x,reg}(F)$. Pour obtenir l'égalité pour toute φ, il suffit de prouver que les deux distributions sont localement intégrables. C'est vrai pour la première d'après le lemme 5.6. Considérons la seconde. Fixons deux G-domaines $\Gamma' \subset \mathfrak{g}'(F)$ et $\Gamma'' \subset \mathfrak{g}''(F)$, compacts modulo conjugaison. D'après la conjecture de Howe (cf. 2.6(2)), on peut fixer une famille finie $(X''_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de $\omega''\cap\mathfrak{g}''_{reg}(F)$ et une famille finie $(\beta_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de $C_c^\infty(\Gamma'')$ de sorte que, pour tout $X''\in\omega''\cap\mathfrak{g}''_{reg}(F)$ et toute $\beta\in C_c^\infty(\Gamma'')$, on ait l'égalité

$$J_G(X'',\hat{\beta}) = \sum_{i=1,...,n} J_{G''}(X''_i,\hat{\beta})J_{G''}(X'',\hat{\beta}_i).$$

Soient $\alpha\in C_c^\infty(\Gamma')$ et $\beta\in C_c^\infty(\Gamma'')$. Posons

$$\gamma = \alpha\otimes(\beta - \sum_{i=1,...,n} J_{G''}(X''_i,\hat{\beta})\beta_i).$$

Alors $J_{G_x}(X,\gamma^\sharp) = 0$ pour tout $X\in\omega\cap\mathfrak{g}_{x,reg}(F)$. Puisque $\theta_{f,x,\omega}$ est à support dans ω, il en résulte que $\theta(\gamma^\sharp) = 0$. Donc

$$\theta(\alpha\otimes\hat{\beta}) = \sum_{i=1,...,n} J_{G''}(X''_i,\hat{\beta})\theta(\alpha\otimes\beta_i).$$

La fonction $\theta_{f,x,\omega}$ est localement intégrable. Il en résulte que la distribution $\alpha\mapsto\theta(\alpha\otimes\beta_i)$ l'est aussi. D'après [HCvD] théorèmes 13 et 15, la distribution $\beta\mapsto J_{G''}(X''_i,\hat{\beta})$ est aussi localement intégrable. Donc la distribution $\alpha\otimes\beta\mapsto\theta(\alpha\otimes\hat{\beta})$ est intégrable sur $\Gamma'\times\Gamma''$. Cela achève la démonstration. □

5.9 Le quasi-caractère associé à une fonction très cuspidale

Corollaire. *Soit $f\in C_c^\infty(G(F))$. Supposons f très cuspidale. Alors la fonction θ_f est un quasi-caractère.*

Preuve. Soit $x\in G_{ss}(F)$. On applique la proposition précédente au cas $G' = \{1\}$, $G'' = G_x$. On obtient que la transformée de Fourier de $\theta_{f,x,\omega}$ est la fonction $\theta^\sharp_{f,x,\omega}$, que l'on peut d'ailleurs plutôt noter $\hat{\theta}_{f,x,\omega}$. Le support de cette fonction est compact modulo conjugaison. D'après le théorème 4.2, $\theta_{f,x,\omega}$ est donc un quasi-caractère sur $\mathfrak{g}_x(F)$. Alors θ_f coïncide au voisinage de x avec un quasi-caractère. Cela étant vrai pour tout $x\in G_{ss}(F)$, la conclusion s'ensuit. □

6 Fonctions très cuspidales sur les algèbres de Lie

6.1 Premières propriétés

La définition des fonctions très cuspidales s'adapte aux fonctions sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(F)$. Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. On dit qu'elle est très cuspidale si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MU$ de G et tout $X \in \mathfrak{m}(F)$, on a l'égalité

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{u}(F)} f(X+N)dN = 0.$$

Ou encore si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MU$ de G et tout $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on a l'égalité

$$\int_{U(F)} f(u^{-1}Xu)du = 0.$$

Les propriétés énoncées en 5.1 et 5.2 restent vraies. Il y a une propriété supplémentaire : si f est très cuspidale, $\hat{f}$ l'est aussi. En effet, notons $f_U(X)$ l'intégrale (1). On vérifie que $(\hat{f})_U = (f_U)\hat{}$ et l'assertion s'ensuit.

Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, supposons f très cuspidale. On définit une fonction θ_f sur $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ par

$$\theta_f(X) = (-1)^{a_{M(X)}-a_G}\nu(G_X)^{-1}D^G(X)^{-1/2}J_{M(X)}(X,f),$$

où $M(X)$ est le commutant de A_{G_X} dans G. Elle a des propriétés similaires à celles énoncées au lemme 5.3.

Lemme. *Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ une fonction très cuspidale.*

(i) La fonction $\theta_{\hat{f}}$ est la transformée de Fourier de θ_f.

(ii) La fonction θ_f est un quasi-caractère.

Preuve. La démonstration de la proposition 5.8 se simplifie grandement. En effet, fixons un Lévi minimal M_0 de G et un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M_0. Pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on a simplement

$$(2) \qquad J(\hat{\varphi}, f) = \int_{\mathfrak{g}(F)} \hat{\varphi}(X)\theta_f(X)dX.$$

L'assertion (i) s'ensuit en appliquant le théorème 2.4. Pour prouver (2), soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $T \in \mathcal{T}_{ell}(M)$ et $X \in \mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Parce que $f_Q = 0$ pour tout sous-groupe parabolique propre Q de G, on a

$$J_M(X, \hat{\varphi}, f) = J_G(X, \hat{\varphi})J_M(X, f).$$

Mais alors $J(\hat{\varphi}, f)$ coïncide avec le membre de droite de (2) exprimé à l'aide de la formule de Weyl.

L'assertion (ii) résulte de (i) et du théorème 4.2. $\square$

6.2 Relèvement au groupe

Lemme. *Soient $x \in G_{ss}(F)$, ω un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_x(F))$. On suppose φ très cuspidale et à support dans ω. On suppose que θ_φ est invariant par $Z_G(x)(F)$ et que x est elliptique, c'est-à-dire que $A_{G_x} = A_G$. Alors il existe $f \in C_c^\infty(G(F))$ telle que f soit très cuspidale et $\theta_{f,x,\omega} = \theta_\varphi$.*

Preuve. Fixons un Lévi minimal R_{min} de $G_x(F)$ et un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à $\mathbf{R}_{min}$. Fixons un sous-groupe ouvert compact K' de K tel que φ soit invariante par conjugaison par $K' \cap Z_G(x)(F)$. Posons $\Sigma = \{k^{-1}xexp(X)k; k \in K', X \in \omega\}$. C'est un sous-ensemble ouvert et fermé de $G(F)$. Comme en 3.1, on peut définir une fonction f sur $G(F)$ par

$$f(g) = \begin{cases} 0, & \text{si } g \notin \Sigma, \\ \varphi(X), & \text{si } g = k^{-1}xexp(X)k, \text{ avec } k \in K',\ X \in \omega. \end{cases}$$

Montrons que f est très cuspidale. Soient $P = MU$ un sous-groupe parabolique propre de G et $m \in M(F) \cap G_{reg}(F)$. Posons

$$f(U,m) = \int_{U(F)} f(u^{-1}mu)du.$$

On veut prouver que $f(U,m) = 0$. C'est évident si $\{u^{-1}mu; u \in U(F)\} \cap \Sigma = \emptyset$. Supposons cette intersection non vide. On peut fixer $v \in U(F)$, $k \in K'$ et $X \in \omega$ tels que $v^{-1}mv = k^{-1}xexp(X)k$. Posons $g = vk^{-1}$, $P' = g^{-1}Pg$, $M' = g^{-1}Mg$, $U' = g^{-1}Ug$ et $m' = g^{-1}mg$. Grâce au changement de variable $u \mapsto uv$ et à l'invariance de f par K', on a l'égalité

$$f(U,m) = \int_{U(F)} f(kv^{-1}u^{-1}muvk^{-1})du,$$

puis

$$f(U,m) = \int_{U(F)} f(g^{-1}u^{-1}mug)du = \int_{U'(F)} f(u'^{-1}m'u')du' = f(U',m').$$

Cela nous ramène à la même question pour le sous-groupe parabolique P' et l'élément m' de $M'(F)$. Mais $m' = xexp(X)$. En oubliant les données P' et m', on peut donc supposer que $m = xexp(X)$, avec $X \in \omega$. Dans ce cas, on a $A_M \subset G_m \subset G_x$, donc $x \in M(F)$. De plus, puisque P est propre, on a $A_G \subsetneq A_M$. Puisque x est elliptique, on a aussi $A_{G_x} \subsetneq A_M \subset A_{M_x}$, donc $P_x = M_xU_x$ est un sous-groupe parabolique propre de G_x. Ecrivons

$$f(U,m) = \int_{U_x(F)\backslash U(F)} \int_{U_x(F)} f(v^{-1}u^{-1}muv)du\,dv.$$

On peut fixer $v \in U(F)$ et prouver que

$$\int_{U_x(F)} f(v^{-1}u^{-1}muv)du = 0.$$

De nouveau, c'est évident si $\{v^{-1}u^{-1}muv; u \in U_x(F)\} \cap \Sigma = \emptyset$. Supposons cette intersection non vide. Alors il existe $w \in U_x(F)$ et $k \in K'$ tels que $v^{-1}w^{-1}mwv \in k^{-1}xexp(\omega)k$. Puisque $m \in xexp(\omega)$, la condition 3.1(4) entraîne que $wvk^{-1} \in Z_G(x)(F)$.

Donc $v \in Z_G(x)(F)k$. Ecrivons $v = gk$, avec $g \in Z_G(x)(F)$. Pour $u \in U_x(F)$, on a $v^{-1}u^{-1}muv = k^{-1}xexp(g^{-1}u^{-1}Xug)k$. Donc

$$f(v^{-1}u^{-1}muv) = \varphi(g^{-1}u^{-1}Xug) = {}^g\varphi(u^{-1}Xu),$$

avec une définition évidente de ${}^g\varphi$. L'intégrale à calculer est égale à

$$\int_{U_x(F)} {}^g\varphi(u^{-1}Xu)du.$$

Elle est nulle parce que ${}^g\varphi$ est très cuspidale et P_x est propre.

Posons

$$c = [G_x(F)\backslash Z_G(x)(F)K'/K']mes(K')mes(G_x(F) \cap K')^{-1}.$$

On va prouver que $\theta_{f,x,\omega} = c\theta_\varphi$. En explicitant les définitions, on voit qu'il s'agit de prouver l'assertion suivante. Soit $X \in \omega \cap \mathfrak{g}_{x,reg}(F)$. Notons R le commutant de $A_{G_{x,X}}$ dans G_x. Alors on a l'égalité

$$(1) \qquad J_{\mathbf{R}}(xexp(X), f) = cD^G(x)^{1/2}J_R(X, \varphi).$$

On peut supposer que R contient R_{min}. Reprenons la preuve du lemme 5.7, où on prend pour K' le groupe introduit ci-dessus. Par un raisonnement fait plusieurs fois, ${}^gf_{x,\omega} = 0$ si $g \in G(F)$ et $g \notin Z_G(x)(F)K'$. On peut prendre pour ensemble Δ_0 un ensemble de représentants de $G_x(F)\backslash Z_G(x)(F)K'/K'$, inclus dans $Z_G(x)(F)$. Pour $\delta \in \Delta_0$, on a ${}^\delta f_{x,\omega} = {}^\delta\varphi$. L'hypothèse que φ est très cuspidale entraîne que pour $S \in \mathcal{L}(R_{min})$, $S \neq G_x$, la fonction f^S est nulle. Pour $S = G_x$, on a $\mathbf{S} = G$ parce que x est elliptique. Alors

$$f^{G_x} = mes(K')mes(G_x(F) \cap K')^{-1} \sum_{\delta \in \Delta_0} {}^\delta\varphi.$$

D'après l'hypothèse d'invariance de θ_φ par $Z_G(x)(F)$, on a

$$J_R(X, {}^\delta\varphi) = J_R(X, \varphi),$$

pour tout $\delta \in \Delta_0$, et l'égalité (1) résulte du (i) du lemme 5.7. $\square$

6.3 Support des distributions associées aux fonctions très cuspidales

Lemme. *(i) Soient θ un quasi-caractère de $\mathfrak{g}(F)$) et ω un G-domaine dans $\mathfrak{g}(F)$ compact modulo conjugaison. On suppose la transformée de Fourier de θ à support compact modulo conjugaison. Alors il existe une famille finie $(X_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ et une famille finie $(c_i)_{i=1,...,n}$ de nombres complexes telles que, pour tout $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on ait l'égalité*

$$\theta(Y) = \sum_{i=1,...,n} c_i\hat{j}(X_i, Y).$$

(ii) Soient $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ et ω un G-domaine dans $\mathfrak{g}(F)$ compact modulo conjugaison. Alors il existe une fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telle que, pour tout $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on ait l'égalité

$$\theta_f(Y) = \hat{j}(X, Y).$$

(iii) Soient ω un G-domaine dans $\mathfrak{g}(F)$ compact modulo conjugaison et $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})$. Il existe une fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)$, très cuspidale, telle que, pour tout $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on ait l'égalité

$$\theta_f(Y) = \hat{j}(\mathcal{O}, Y).$$

(iv) Pour tout $Y \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, il existe une fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telle que $\theta_f(Y) \neq 0$.

Preuve. Soit θ comme en (i). Soit Ω un G-domaine de $\mathfrak{g}(F)$, compact modulo conjugaison et contenant le support de $\hat{\theta}$. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$, on a, avec les notations de 2.6(2) ,

$$\theta(\varphi) = \sum_{i=1,\ldots,n} J_G(X_i, \hat{\varphi})\theta(f_i).$$

Autrement dit

$$\int_{\mathfrak{g}(F)} \theta(Y)\varphi(Y)dY = \int_{\mathfrak{g}(F)} \sum_{i=1,\ldots,n} \theta(f_i)\hat{j}(X_i, Y)\varphi(Y)dY.$$

L'assertion (i) s'ensuit.

Fixons un Lévi minimal M_{min} de G. Soit $f' \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, supposons f' très cuspidale. Pour toute $\varphi \in \mathfrak{g}(F)$, on a l'égalité :

$$\int_{\mathfrak{g}(F)} \theta_{\hat{f}'}(Y)\varphi(Y)dY = \int_{\mathfrak{g}(F)} \theta_{f'}(X)\hat{\varphi}(X)dX$$

$$(1) \qquad = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W^G|^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}_{ell}(M)} |W(M,T)|^{-1} \int_{\mathfrak{t}(F)} \theta_{f'}(X) J_G(X, \hat{\varphi}) D^G(X)^{1/2} dX.$$

Soient X et ω comme en (ii). On ne perd rien à supposer qu'il existe $M \in \mathcal{L}(M_{min})$ et $T \in \mathcal{T}_{ell}(M)$ de sorte que $X \in \mathfrak{t}(F)$. La formule 2.6(3) montre qu'il existe un voisinage ω'_X de X dans $\mathfrak{g}(F)$ tel que, pour tout $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, la fonction $X' \mapsto \hat{j}(X', Y)$ soit constante dans ω'_X. Supposons

(2) il existe $f' \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, très cuspidale, telle que $\theta_{f'}(X) \neq 0$.

Fixons une telle fonction. On peut trouver un voisinage ω_X de X dans $\mathfrak{t}(F)$ tel que

- ω_X est ouvert et compact ;
- la fonction $X' \mapsto \theta_{f'}(X') D^G(X')^{1/2}$ soit constante dans ω_X ;
- pour $w \in Norm_{M(F)}(T)$ tel que $w \notin T(F)$, $w^{-1}\omega_X w \cap \omega_X = \emptyset$.

Remplaçons f' par son produit avec la fonction caractéristique du G-domaine ω_X^G. La formule (1) devient

$$\int_{\mathfrak{g}(F)} \theta_{\hat{f}'}(Y)\varphi(Y)dY = \theta_{f'}(X) D^G(X)^{1/2} \int_{\omega_X} J_G(X', \hat{\varphi})dX'$$

$$= \theta_{f'}(X) D^G(X)^{1/2} \int_{\omega_X} \int_{\mathfrak{g}(F)} \hat{j}(X', Y)\varphi(Y)dY\, dX'.$$

La double intégrale est bien sûr absolument convergente. On en déduit l'égalité

$$(3) \qquad \theta_{\hat{f}'}(Y) = \theta_{f'}(X) D^G(X)^{1/2} \int_{\omega_X} \hat{j}(X', Y)dX'$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Imposons de plus la condition $\omega_X \subset \omega'_X$. Alors l'égalité (3) devient

$$\theta_{\hat{f}'}(Y) = \theta_{f'}(X) D^G(X)^{1/2} mes(\omega_X) \hat{j}(X, Y)$$

pour tout $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. En posant

$$f = \theta_{f'}(X)^{-1} D^G(X)^{-1/2} mes(\omega_X)^{-1} \hat{f}',$$

on obtient (ii), sous l'hypothèse (2).

Soit $Y \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Appliquons 2.6(4) : on peut fixer un G-domaine Ω de $\mathfrak{g}(F)$ tel que

$$(4) \qquad \hat{j}(X, Y) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})} \Gamma_{\mathcal{O}}(X) \hat{j}(\mathcal{O}, Y)$$

pour tout $X \in \Omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. On peut évidemment supposer $\lambda\Omega \subset \Omega$ pour tout $\lambda \in F^\times$ tel que $|\lambda|_F \leq 1$. Soit $X \in \Omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$ tel que X soit elliptique. Alors l'hypothèse (2) est vérifiée car toute fonction à support régulier elliptique est très cuspidale. On peut donc trouver une fonction f_X très cuspidale telle que $\theta_{f_X}(Y) = \hat{j}(X, Y)$. Soit $\lambda \in F^{\times 2}$ tel que $|\lambda|_F \leq 1$. Remplaçons X par λX. En utilisant (4) et les formules de 2.6, on a

$$\theta_{f_{\lambda X}}(Y) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})} |\lambda|_F^{(\delta(G) - dim(\mathcal{O}))/2} \Gamma_{\mathcal{O}}(X) \hat{j}(\mathcal{O}, Y).$$

En prenant une combinaison linéaire convenable des fonctions $f_{\lambda X}$, on peut séparer les orbites selon leurs dimensions. On peut en particulier isoler l'orbite $\{0\}$ et trouver une fonction f très cuspidale telle que

$$\theta_f(Y) = \Gamma_{\{0\}}(X) \hat{j}(\{0\}, Y).$$

La fonction $\hat{j}(\{0\}, .)$ est constante de valeur 1. D'après Harish-Chandra ([HCDS] lemme 9.6), le germe de Shalika $\Gamma_{\{0\}}$ ne s'annule pas sur l'ensemble des points elliptiques réguliers. Donc $\theta_f(Y) \neq 0$, ce qui démontre (iv).

On peut maintenant achever la démonstration de (ii) : d'après (iv), l'hypothèse (2) est vérifiée pour tout point $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$.

Soit ω un G-domaine de $\mathfrak{g}(F)$ compact modulo conjugaison. Choisissons Ω tel que (4) soit vérifiée pour tous $X \in \Omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Grâce à (ii), pour tout $X \in \Omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$,on peut trouver une fonction f_X très cuspidale telle que $\theta_{f_X}(Y) = \hat{j}(X, Y)$ pour tout $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. On sait que les germes de Shalika sont linéairement indépendants ([HCDS] lemme 9.5). Etant homogènes, leurs restrictions à Ω le sont aussi. En utilisant (4), on voit que, pour $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})$, une combinaison linéaire convenable f de fonctions f_X va vérifier $\theta_f(Y) = \hat{j}(\mathcal{O}, Y)$ pour tout $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Cela prouve (iii). $\square$

6.4 Quasi-caractères à support compact modulo conjugaison

Proposition. *Soit θ un quasi-caractère de $\mathfrak{g}(F)$ à support compact modulo conjugaison. Alors il existe une fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ très cuspidale telle que $\theta = \theta_f$.*

Preuve. On démontre la proposition par récurrence sur $dim(G)$. On suppose qu'elle est vraie pour tout groupe de dimension strictement inférieure à $dim(G)$. Soit $X \in \mathfrak{g}_{ss}(F)$. On va prouver

(1) il existe un G-domaine ω dans $\mathfrak{g}(F)$ et une fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ tels que $X \in \omega$ et $\theta(Y) = \theta_f(Y)$ pour tout $Y \in \omega$.

Autrement dit, il existe une fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telle que θ_f ait le même développement que θ au voisinage de X. Si $X = 0$, cela résulte du lemme 6.3(iii). Si X est central, cela résulte du cas $X = 0$ par translation. Supposons X non central, donc $dim(G_X) < dim(G)$. Supposons d'abord X elliptique. La notions de bon voisinage s'adapte au cas de l'algèbre de Lie. Soit ω_X un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_X(F)$. Soit θ_X la fonction sur $\mathfrak{g}_X(F)$ qui est nulle hors de $X+\omega_X$ et qui coïncide avec θ sur $X+\omega_X$. Alors θ_X est un quasi-caractère de $\mathfrak{g}_X(F)$ à support compact modulo conjugaison. Appliquant l'hypothèse de récurrence, on peut fixer une fonction très cuspidale $f_X \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_X(F))$ telle que $\theta_{f_X} = \theta_X$. On peut reprendre la démonstration du lemme 6.2 et montrer qu'il existe une fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telle que θ_f coïncide avec θ_{f_X} dans $X + \omega_X$ (remarquons que la condition d'invariance par $Z_G(x)(F)$ imposée en 6.2 disparaît car le commutant d'un élément semi-simple d'une algèbre de Lie est toujours connexe). En posant $\omega = (X + \omega_X)^G$, f et ω satisfont (1). Supposons maintenant X non elliptique. Notons M le commutant de A_{G_X} dans G. On a $X \in \mathfrak{m}(F)$ et $G_X \subset M$. Soit ω_X un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_X(F)$. Posons

$$\omega_M = (X + \omega_X)^M,\ \omega_G = (X + \omega_X)^G.$$

Les ensembles ω_M et $\omega_G \cap \mathfrak{m}(F)$ sont des M-domaines dans $\mathfrak{m}(F)$, compacts modulo conjugaison. Notons θ_M la fonction sur $\mathfrak{m}(F)$ qui est nulle hors de ω_M et coïncide avec θ sur ω_M. C'est un quasi-caractère de $\mathfrak{m}(F)$, à support compact modulo conjugaison. En appliquant l'hypothèse de récurrence et le (i) du lemme 6.3, on peut fixer des familles finies $(X_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de $\mathfrak{m}_{reg}(F)$ et $(c_i)_{i=1,...,n}$ de nombres complexes de sorte que

$$\theta_M(Y) = \sum_{i=1,...,n} c_i \hat{j}^M(X_i, Y)$$

pour tout $Y \in \omega_G \cap \mathfrak{m}_{reg}(F)$. La preuve du (i) du lemme 6.3 montre que l'on peut aussi bien remplacer chaque X_i par tout élément suffisamment proche. On peut donc supposer $X_i \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. La fonction

$$Y \mapsto D^G(Y)^{1/2} D^M(Y)^{-1/2}$$

est constante sur $X + \omega_X$. Notons c sa valeur. Montrons que

$$(2) \qquad \theta(Y) = \sum_{i=1,...,n} c c_i \hat{j}^G(X_i, Y)$$

pour tout $Y \in (X+\omega_X) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. D'après 2.6(5), le membre de droite ci-dessus est égal à

$$\sum_{Y' \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1,...,n} c c_i \hat{j}^M(X_i, Y') D^G(Y)^{-1/2} D^M(Y')^{1/2},$$

où $\mathcal{Y}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $M(F)$ dans l'ensemble des éléments de $\mathfrak{m}(F)$ conjugués à Y par un élément de $G(F)$. Cet ensemble $\mathcal{Y}$ est contenu dans $\omega_G \cap \mathfrak{m}(F)$. La somme ci-dessus vaut donc

$$\sum_{Y' \in \mathcal{Y}} c\theta_M(Y') D^G(Y)^{-1/2} D^M(Y')^{1/2}.$$

On peut supposer $Y \in \mathcal{Y}$ et le terme indexé par Y est égal à $\theta(Y)$. Soit $Y' \in \mathcal{Y}$, $Y' \neq Y$. Soit $g \in G(F)$ tel que $gYg^{-1} = Y'$. Cet élément n'appartient pas à $M(F)$. Si $Y' \in \omega_M$, il existe $m \in M(F)$ tel que $mgY(mg)^{-1} \in X + \omega_X$. Alors $mg \in G_X(F)$ puisque ω_X est un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_X(F)$. Puisque $G_X \subset M$, on en déduit $g \in M(F)$, contradiction. Donc $Y' \notin \omega_M$ et $\theta_M(Y') = 0$. Cela démontre (2).

D'après le lemme 6.3(ii), il existe une fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telle que $\theta_f(Y)$ coïncide avec le membre de droite de (2) dans ω_G. Alors $\theta_f(Y) = \theta(Y)$ pour $Y \in \omega_G$, ce qui achève la preuve de (1).

La preuve de la proposition est maintenant élémentaire. Pour tout $X \in \mathfrak{g}_{ss}(F)$, on fixe ω et f vérifiant (1) et on les note plutôt ω_X et f_X. On fixe un sous-ensemble compact $\Gamma \subset \mathfrak{g}(F)$ tel que $Supp(\theta) \subset \Gamma^G$. On a

$$\Gamma \subset \mathfrak{g}(F) \subset \bigcup_{X \in \mathfrak{g}_{ss}(F)} \omega_X.$$

On peut donc choisir une famille finie $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ d'éléments de $\mathfrak{g}_{ss}(F)$ telle que

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1,\dots n} \omega_{X_i}.$$

Pour tout i, notons Δ_i le complémentaire dans $\mathfrak{g}(F)$ de $\bigcup_{j=1,\dots,i-1} \omega_{X_i}$, φ_i la fonction caractéristique de $\omega_{X_i} \cap \Delta_i$ et posons$f_i = f_{X_i}\varphi_i$. Alors f_i est très cuspidale et on a l'égalité $\theta = \sum_{i=1,\dots,n} \theta_{f_i}$. $\square$

7 Enoncé du théorème principal

7.1 Groupes orthogonaux

Soit V un espace vectoriel sur F de dimension finie d, muni d'une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée q (on dira parfois que V est un espace quadratique,la forme q étant sous-entendue). Pour $v \in V$, on pose

$$q(v) = \frac{1}{2}q(v,v).$$

On appelle système hyperbolique dans V une famille $(v_i)_{i=\pm 1,\dots,\pm n}$ d'éléments de V telle que $q(v_i, v_j) = \delta_{i,-j}$ pour tous i, j, où $\delta_{i,-j}$ est le symbole de Kronecker. On dit que q est hyperbolique si et seulement s'il existe un système hyperbolique dans V qui soit une base de V. On peut décomposer V (de façon non unique) en somme orthogonale de deux sous-espaces V_{hyp} et V_{an} de sorte que la restriction de q à V_{hyp} soit hyperbolique et la restriction q_{an} de q à V_{an} soit anisotrope. La classe d'équivalence de q_{an} est uniquement définie, on l'appelle le noyau anisotrope de q et on note $d_{an}(V)$ son rang, c'est-à-dire la dimension de V_{an}. Evidemment, $d_{an}(V) \equiv d \ mod\ 2$.

On introduit le groupe orthogonal $O(V)$ de (V, q) et son sous-groupe spécial orthogonal $SO(V)$. Notons-les ici G^+ et G, ainsi qu'on le fera souvent dans la suite. Le groupe $G^+(F)$ agit sur V, on note cette action $(g, v) \mapsto gv$. Le groupe G est déployé sur F si $d_{an}(V) = 0$ ou 1, quasi-déployé et non déployé si $d_{an}(V) = 2$ et non quasi-déployé si $d_{an}(V) = 3$ ou 4. On définit la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}(F)$

$$< X, Y >= \frac{1}{2}trace(XY),$$

la trace étant la forme linéaire usuelle sur $End(V)$. C'est cette forme que l'on utilise pour normaliser les constructions de 1.2.

Si W est un sous-espace non dégénéré de V, le groupe $H = SO(W)$ se plonge naturellement dans G : un élément de H agit par l'identité sur l'orthogonal de W. De même, $\mathfrak{h}$ se plonge dans $\mathfrak{g}$.

Soient $v', v'' \in V$. Définissons $c_{v',v''} \in End(V)$ par

$$c_{v',v''}(v) = q(v, v')v'' - q(v, v'')v'.$$

On vérifie que $c_{v',v''}$ appartient à $\mathfrak{g}(F)$ et que cette algèbre est engendrée en tant qu'espace vectoriel par de tels éléments.

On peut classifier les orbites unipotentes régulières de $\mathfrak{g}(F)$. Il n'y en a pas si $d_{an}(V) \geq 3$. Il y en a une seule si $d_{an}(V) = 1$ ou si $d \leq 2$ et on la note $\mathcal{O}_{reg}$. Supposons $d \geq 4$ et $d_{an}(V) = 0$ ou 2. Introduisons le sous-ensemble $\mathcal{N}^V$ suivant :

- si $d_{an}(V) = 0$, $\mathcal{N}^V = F^\times/F^{\times 2}$;

- si $d_{an}(V) = 2$, $\mathcal{N}^V$ est le sous-ensemble des éléments de $F^\times/F^{\times 2}$ qui sont représentés par q_{an}.

Soit $\nu \in \mathcal{N}^V$, dont on fixe un relèvement dans $F^\times$. On peut décomposer V en somme orthogonale $V = D \oplus W$, où D est une droite et la restriction de q à W a pour noyau anisotrope la forme $x \mapsto \nu x^2$ de dimension 1. Notons $H = SO(W)$. Il y a une unique orbite nilpotente régulière dans $\mathfrak{h}(F)$. Soit N un élément de cette orbite, que l'on identifie à un élément de $\mathfrak{g}(F)$. On note $\mathcal{O}_\nu$ la $G(F)$-orbite de N. Elle ne dépend pas des choix et l'application $\nu \mapsto \mathcal{O}_\nu$ est une bijection de $\mathcal{N}^V$ sur l'ensemble des orbites nilpotentes régulières de $\mathfrak{g}(F)$.

Considérons une décomposition orthogonale $V = Z \oplus V_{an}$. Supposons la restriction de q à V_{an} anisotrope et la restriction de q à Z hyperbolique. Fixons une base hyperbolique $(v_i)_{i=\pm 1,\dots \pm n}$ de Z. Si $V_{an} \neq \{0\}$, soit $c \in \mathbb{Z}$ tel qu'il existe $v \in V_{an}$ pour lequel $val_F(q(v)) = c$. Si $V_{an} = \{0\}$, soit c un élément quelconque de $\mathbb{Z}$. Notons R_{an} l'ensemble des $v \in V_{an}$ tels que $val_F(q(v)) \geq c$. C'est un $\mathfrak{o}_F$-réseau de V_{an}. Notons R_Z le $\mathfrak{o}_F$-réseau de Z engendré par les éléments v_i pour $i = 1, ..., n$ et par les $\varpi_F^c v_{-i}$ pour $i = 1, ..., n$. Posons $R = R_Z \oplus R_{an}$. Quand on fait varier la décomposition orthogonale, la base hyperbolique et l'entier c, le réseau R parcourt un certain ensemble de $\mathfrak{o}_F$-réseaux de V. Par définition, c'est l'ensemble des réseaux spéciaux. Pour un tel réseau R spécial, notons K le stabilisateur de R dans $G(F)$. C'est un sous-groupe compact spécial de $G(F)$. Inversement, si K est un sous-groupe compact spécial de $G(F)$, il est le stabilisateur d'un réseau spécial R (qui n'est pas unique).

Pour tout $\mathfrak{o}_F$-réseau R de V, on définit une fonction val_R sur V, à valeurs dans $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ par $val_R(v) = sup\{i \in \mathbb{Z}; v \in \varpi_F^i R\}$.

7.2 La situation

On conserve les données et notations du paragraphe précédent. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $2r+1 \leq d$. On suppose donnée une décomposition orthogonale $V = W \oplus D \oplus Z$, où D est une droite et Z un espace hyperbolique de dimension $2r$. On note q_W la restriction de q à W et $d_W = d - 2r - 1$ la dimension de W. On pose $V_0 = W \oplus D$. On note H, resp. G_0, le groupe spécial orthogonal de W, resp. V_0, et H^+ le groupe orthogonal de W. On identifie H^+ à un sous-groupe de G : un élément $h \in H^+$ s'identifie à l'élément de G qui agit par h sur W et par $det(h)$ sur $D \oplus Z$. On fixe une base v_0 de D et un système hyperbolique maximal $(v_i)_{i=\pm 1,\dots,\pm r}$ de Z. On note Z_+, resp. Z_-, le sous-espace de Z engendré par les

v_i, $i=1,...,r$, resp. par les v_{-i}. On note A le sous-tore maximal de $SO(Z)$ qui conserve chaque droite Fv_i. Pour $a \in A(F)$ et $i=1,...,r$, on note $a_i \in F^\times$ la valeur propre de a sur v_i, c'est-à-dire que $av_i = a_iv_i$. On note P le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$Fv_r \subset Fv_r \oplus Fv_{r-1} \subset ... \subset Fv_r \oplus ... \oplus Fv_1$$

de V. On note U le radical unipotent de P et M sa composante de Lévi qui contient A. On a $M = AG_0$. Remarquons que $A_M = A$, sauf dans le cas où V_0 est hyperbolique de dimension 2, auquel cas $A_M = M$. Fixons une famille $(\xi_i)_{i=0,...,r-1}$ d'éléments de $F^\times$. On définit une fonction ξ sur $U(F)$ par

$$\xi(u) = \psi(\sum_{i=0,...,r-1} \xi_i q(uv_i, v_{-i-1})).$$

On vérifie que c'est un caractère de $U(F)$ invariant par conjugaison par le sous-groupe $H^+(F)$ de $M(F)$.

On fixe un réseau spécial R_0 de V_0. On peut choisir un réseau R_Z de Z ayant une base formée de vecteurs proportionnels aux v_i, de sorte que le réseau $R = R_0 \oplus R_Z$ de V soit spécial. On note K_0, resp. K, le stabilisateur de R_0 dans $G_0(F)$, resp. de R dans $G(F)$. Ce sont des sous-groupes compacts spéciaux de $G_0(F)$, resp. $G(F)$. Le groupe K est en bonne position relativement à M. On a $K \cap M(F) = (K \cap A(F))K_0$ et $K \cap A(F)$ est le plus grand sous-groupe compact de $A(F)$. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on définit une fonction κ_N sur $G(F)$ de la façon suivante. Elle est invariante à droite par K, à gauche par $U(F)$. Sa restriction à $M(F)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des ag_0, avec $a \in A(F)$, $g_0 \in G_0(F)$, tels que $|val_F(a_i)| \leq N$ pour tout $i = 1,...,r$ et $val_{R_0}(g_0^{-1}v_0) \geq -N$. La fonction κ_N est invariante à gauche par le sous-groupe $(K \cap A(F))H^+(F)$ de $M(F)$. L'image de son support dans $U(F)H(F)\backslash G(F)$ est compacte. Plus précisément

(1) il existe $c > 0$ tel que, pour tout entier $N \geq 1$ et tout $g \in G(F)$ pour lequel $\kappa_N(g) = 1$, il existe $g' \in G(F)$ tel que $g \in U(F)H(F)g'$ et $\sigma(g') \leq cN$.

On peut écrire $g = uag_0k$, avec $u \in U(F)$, $a \in A(F)$, $g_0 \in G_0(F)$ et $k \in K$. Les bornes sur les valuations des coordonnées de a entraînent $\sigma(a) \leq cN$, pour c convenable. Un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme III.5 de [W2] montre qu'il existe $c' > 0$ tel que, pour tout $N \geq 1$ et tout $v \in \varpi_F^{-N}R_0$ tel que $q(v) = \nu_0 = q(v_0)$, il existe $y \in G_0(F)$ tel que $y^{-1}v_0 = v$ et $\sigma(y) \leq c'N$. Appliquons cela à $v = g_0^{-1}v_0$. Alors g_0y^{-1} appartient à $H(F)$. On a $g = ug_0y^{-1}g'$, avec $g' = ayk$ et ce dernier élément satisfait la majoration requise.

7.3 Les ingrédients de la formule intégrale

On définit une fonction Δ sur $H_{ss}(F)$ par

$$\Delta(t) = |det((1-t)_{|W/W''(t)})|_F,$$

où $W''(t)$ est le noyau de $1-t$ agissant dans W.

Notons $\underline{\mathcal{T}}$ l'ensemble des sous-tores T de H, en général non maximaux, pour lesquels il existe une décomposition orthogonale $W = W' \oplus W''$ de sorte que les conditions (1) à (4) ci-dessous soient vérifiées. On note H' le groupe spécial orthogonal de W' et on pose $V'' = W'' \oplus D \oplus Z$.

(1) $A_T = \{1\}$.

(2) $dim(W')$ est pair.

(3) T est inclus dans H' et c'en est un sous-tore maximal.

(4) Si d est pair, $d_{an}(W'') = 1$; si d est impair, $d_{an}(V'') = 1$.

Evidemment, W' et W'' sont déterminés par T : W'' est l'intersection des noyaux de $t-1$ agissant sur W, pour $t \in T$.

Pour $T \in \underline{\mathcal{T}}$, on pose

$$W(H,T) = Norm_{H(F)}(T)/Z_{H(F)}(T).$$

On note $T_\natural$ le sous-ensemble des $t \in T$ tels que les valeurs propres de l'action de t dans W' soient toutes distinctes. C'est un ouvert de Zariski, non vide. Notons $H' = G'$, resp. H'', G'', les groupes spéciaux orthogonaux de W', resp. W'', V'' et H'^+ le groupe orthogonal de W'. Pour $t \in T_\natural$, t est un élément semi-simple régulier dans H' et même dans H'^+ en ce sens que son commutant dans H'^+ est réduit à T. Alors $Z_H(t) = TH''$, $Z_G(t) = TG''$. En particulier, les orbites nilpotentes de $\mathfrak{h}_t(F)$, resp. $\mathfrak{g}_t(F)$ sont les mêmes que celles de $\mathfrak{h}''(F)$, resp. $\mathfrak{g}''(F)$.

Soient θ, resp. τ, un quasi-caractère de $H(F)$, resp. $G(F)$. Soit $T \in \underline{\mathcal{T}}$, pour lequel on adopte les notations ci-dessus. Soit $t \in T_\natural(F)$. Supposons d pair. Alors $dim(W'')$ est impair et l'hypothèse (4) dit que H'' est déployé. Donc $\mathfrak{h}''(F)$ possède une unique orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}_{reg}$. On pose $c_\theta(t) = c_{\theta,\mathcal{O}_{reg}}(t)$. La dimension $dim(V'')$ est paire, nécessairement non nulle. Si elle est égale à 2, $\mathfrak{g}''(F)$ possède une unique orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}_{reg}$ et on pose $c_\tau(t) = c_{\tau,\mathcal{O}_{reg}}(t)$. Supposons $dim(V'') \geq 4$. Notons $q_{W'',an}$ le noyau anisotrope de la restriction de q à W'' et q_D la restriction de q à D. Notons aussi $\nu_0 = q(v_0)$. La forme $q_{W'',an}$ est de rang 1. Par construction, la restriction de q à V'' a même noyau anisotrope que $q_{W'',an} \oplus q_D$. Elle est donc de rang 0 ou 2 et G'' est quasi-déployé. Puisque $q_{W'',an} \oplus q_D$ représente ν_0, on a $\nu_0 \in \mathcal{N}^{V''}$ et l'orbite $\mathcal{O}_{\nu_0}$ de $\mathfrak{g}''(F)$ est définie. On pose $c_\tau(t) = c_{\tau,\mathcal{O}_{\nu_0}}(t)$. Supposons maintenant d impair. Alors $dim(V'')$ est impair et l'hypothèse (4) dit que G'' est déployé. De façon analogue à ci-dessus, on pose $c_\tau(t) = c_{\tau,\mathcal{O}_{reg}}(t)$. La dimension de W'' est paire. Si elle est inférieure ou égale à 2, on pose encore $c_\theta(t) = c_{\theta,\mathcal{O}_{reg}}(t)$. Supposons $dim(W'') \geq 4$. Avec les mêmes notations que ci-dessus, la restriction de q à V'' a encore même noyau anisotrope que $q_{W'',an} \oplus q_D$. Si $d_{an}(W'')$ était égal à 4, le noyau anisotrope de $q_{W'',an} \oplus q_D$ serait de rang 3, contrairement à (4). Donc $d_{an}(W'') = 0$ ou 2. On a $-\nu_0 \in \mathcal{N}^{W''}$: c'est évident si $d_{an}(W'') = 0$; si $d_{an}(W'') = 2$, cela résulte du fait que $q_{W'',an} \oplus q_D$ n'est pas anisotrope puisque $d_{an}(V'') = 1$. Donc l'orbite $\mathcal{O}_{-\nu_0}$ de $\mathfrak{h}''(F)$ est définie. On pose $c_\theta(t) = c_{\theta,\mathcal{O}_{-\nu_0}}(t)$.

Proposition. *(i) Les fonctions c_θ et c_τ sont localement constantes sur $T_\natural(F)$.*

(ii) La fonction $t \mapsto c_\theta(t)c_\tau(t)D^H(t)\Delta(t)^r$ est localement intégrable sur $T(F)$.

La preuve est donnée dans les quatre paragraphes suivants. Le tore $T \in \underline{\mathcal{T}}$ est fixé pour ces paragraphes.

7.4 Fonctions localement intégrables sur un élément de $\underline{\mathcal{T}}$

Pour $t \in T(F)$, notons $E''(t)$ le noyau de $t-1$ dans W' et $E'(t)$ son orthogonal dans W'. On note $J'(t)$, resp. $J''(t)$ le groupe spécial orthogonal de $E'(t)$, resp. $E''(t)$, $J'(t)_t$ la composante neutre du commutant de t dans $J'(t)$ et $\mathfrak{z}_t$ le centre de l'algèbre de Lie

$\mathfrak{j}'(t)_t$. Le groupe H'_t préserve nécessairement les espaces propres de t, donc est inclus dans $J'(t)J''(t)$. Puisque $J''(t)$ est évidemment inclus dans ce commutant H'_t, on a l'égalité

$$H'_t = J'(t)_t J''(t).$$

On aura besoin des résultats suivants.

(1) $\mathfrak{z}_t$ est inclus dans le centre de $\mathfrak{h}_t$ et dans le centre de $\mathfrak{g}_t$.

(2) Il existe un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{t}(F)$ sur lequel l'exponentielle est définie et tel que, pour $X \in \omega$, on a $\mathfrak{z}_t \subset \mathfrak{z}_{texp(X)}$, avec égalité si et seulement si $X \in \mathfrak{z}_t(F)$.

Preuve. Le noyau de $t-1$ dans W est $E''(t) \oplus W''$ et son orthogonal dans W est $E'(t)$. On en déduit comme ci-dessus que H_t est le produit de $J'(t)_t$ et du groupe spécial orthogonal de $E''(t) \oplus W''$.Donc le centre de $\mathfrak{h}_t$ est le produit de $\mathfrak{z}_t$ et du centre de l'algèbre de Lie du second groupe. Cela prouve que $\mathfrak{z}_t$ est inclus dans le centre de $\mathfrak{h}_t$. Un raisonnement analogue vaut en remplaçant $\mathfrak{h}_t$ par $\mathfrak{g}_t$.

Considérons un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{t}(F)$ sur lequel l'exponentielle est définie et tel que $H'_{texp(X)} \subset H'_t$ pour tout $X \in \omega$. Soit $X \in \omega$. Puisque X commute à t, il préserve les espaces propres de t, donc préserve $E'(t)$ et $E''(t)$. Notons X' et X'' les restrictions de X à chacun de ces deux espaces et posons $\tilde{t} = texp(X)$. Le groupe $H'_{\tilde{t}}$ est le commutant de X dans H'_t. Donc $H'_{\tilde{t}}$ est le produit du commutant $J'(t)_{t,X'}$ de X' dans $J'(t)_t$ et du commutant $J''(t)_{X''}$ de X'' dans $J''(t)$. En choisissant ω assez petit, on peut imposer que toutes les valeurs propres de $\tilde{t}$ dans $E'(t)$ soient différentes de 1. Alors $E''(\tilde{t}) \subset E''(t)$. Le groupe $J'(\tilde{t})_{\tilde{t}}$ est le sous-groupe des éléments de $H'_{\tilde{t}}$ qui agissent trivialement sur $E''(\tilde{t})$. Ce sous-groupe contient certainement $J'(t)_{t,X'}$ et est donc le produit de ce groupe et d'un certain sous-groupe de $J''(t)_{X''}$, que l'on note $\tilde{J}$. Donc $\mathfrak{z}_{\tilde{t}}$ est le produit du centre de $\mathfrak{j}'(t)_{t,X'}$ et du centre de $\tilde{\mathfrak{j}}$. L'algèbre $\mathfrak{j}'(t)_{t,X'}$ est le commutant dans $\mathfrak{j}'(t)_t$ de l'élément semi-simple X' de cette algèbre. Sur une extension de F, c'est donc une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{j}'(t)_t$ et son centre contient le centre de cette algèbre, c'est-à-dire contient $\mathfrak{z}_t$. Cela démontre l'inclusion $\mathfrak{z}_t \subset \mathfrak{z}_{\tilde{t}}$. Supposons qu'il y a égalité. Une sous-algèbre de Lévi étant le commutant de son centre, cela entraîne que $\mathfrak{j}'(t)_{t,X'} = \mathfrak{j}'(t)_t$. Donc $X' \in \mathfrak{z}_t$. De plus, il est clair que X'' appartient au centre de $\tilde{\mathfrak{j}}$, donc à $\mathfrak{z}_{\tilde{t}} = \mathfrak{z}_t$. Mais tout élément de $\mathfrak{z}_t$ agit trivialement sur $E''(t)$, donc $X'' = 0$. Alors $X = X'$ appartient à $\mathfrak{z}_t$. La réciproque est aisée. Cela prouve (2). $\square$

Pour un espace vectoriel E sur F, de dimension finie, et pour $i \in \mathbb{Z}$, on note $C_i(E)$ l'espace des fonctions $\varphi : E \to \mathbb{C}$ telles que

$$\varphi(\lambda e) = |\lambda|_F^i \varphi(e)$$

pour tout $e \in E$ et tout $\lambda \in F^{\times 2}$. On note $C_{\geq i}(E)$ l'espace des combinaisons linéaires d'éléments $C_j(E)$ pour $j \geq i$. Remarquons que, si $E = \{0\}$, on a $C_{\geq i}(E) = \mathbb{C}$ si $i \leq 0$, $C_{\geq i}(E) = \{0\}$ si $i > 0$.

Soit $\delta : T(F) \to \mathbb{Z}$ une fonction. On note $C_{\geq \delta}(T)$ l'espace des fonctions f définies presque partout sur $T(F)$ vérifiant la condition suivante. Soit $t \in T(F)$. Alors il existe un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{t}(F)$, sur lequel l'exponentielle est définie, et il existe une fonction $\varphi \in C_{\geq \delta(t)}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$ tels que l'on ait l'égalité

$$f(texp(X)) = \varphi(\bar{X})$$

presque partout pour $X \in \omega$, où $\bar{X}$ désigne la projection de X dans $\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F)$.Il revient au même de demander qu'il existe un supplémentaire $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{t}$, une fonction $\varphi \in$

$C_{\geq\delta(t)}(\mathfrak{s}(F))$ et des voisinages ω_z de 0 dans $\mathfrak{z}(F)$ et ω_s de 0 dans $\mathfrak{s}(F)$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$(3) \qquad f(texp(X_z+X_s))=\varphi(X_s)$$

presque partout pour $X_z\in\omega_z$ et $X_s\in\omega_s$.

Lemme. *Supposons $\delta(t)=inf(dim(\mathfrak{z}_t)-dim(\mathfrak{t})+1,0)$ pour tout $t\in T(F)$. Alors tout élément de $C_{\geq\delta}(T)$ est localement intégrable sur $T(F)$.*

Preuve. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $T_n=\{t\in T; dim(\mathfrak{z}_t)\geq dim(\mathfrak{t})-n\}$. Cet ensemble est un ouvert de Zariski. On va prouver par récurrence

$(4)_n$ tout élément de $C_{\geq\delta}(T)$ est localement intégrable sur $T_n(F)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Si $n>0$, on suppose $(4)_{n'}$ vraie pour tout $n'<n$. Soit $f\in C_{\geq\delta}(T)$. Pour prouver $(4)_n$, il suffit de fixer $t\in T(F)$ tel que $dim(\mathfrak{z}_t)=dim(\mathfrak{t})-n$ et de prouver que f est intégrable dans un voisinage de t. Si $n=0$, on a $\mathfrak{z}_t=\mathfrak{t}$ et f est localement constante au voisinage de t. L'assertion s'ensuit. Supposons $n>0$. Fixons comme avant l'énoncé un espace $\mathfrak{s}$, une fonction $\varphi\in C_{\geq\delta(t)}(\mathfrak{s}(F))$ et des voisinages ω_z et ω_s de sorte que l'on ait l'égalité (3). On suppose aussi que ω_z et ω_s sont ouverts et compacts et que le voisinage $\omega=\omega_z\times\omega_s$ vérifie (2). On suppose enfin que l'exponentielle de ω sur son image préserve les mesures. Ecrivons $\varphi=\sum_{i\geq\delta(t)}\varphi_i$, où $\varphi_i\in C_i(\mathfrak{s}(F))$ et $\varphi_i=0$ sauf pour un nombre fini d'indices. On peut choisir une base $(e_j)_{j=1,...,m}$ de $\mathfrak{s}(F)$ de sorte que le réseau engendré par cette base soit inclus dans ω_s. On ne perd rien à supposer que ω_s est égal à ce réseau.

Pour $i\geq\delta(t)$, définissons une fonction f_i sur $T(F)$ de la façon suivante. Elle est nulle hors de $texp(\omega)$. Pour $X_z\in\omega_z$ et $X_s\in\omega_s$, on pose $f_i(texp(X_z+X_s))=\varphi_i(X_s)$. Montrons que

$$(5) \qquad f_i\in C_{\geq\delta}(T).$$

Pour $\lambda\in F^{\times 2}$ tel que $|\lambda|_F\leq 1$, définissons une fonction $f[\lambda]$ sur $T(F)$ de la façon suivante. Elle est nulle hors de $texp(\omega)$. Pour $X\in\omega$, on pose $f[\lambda](texp(X))=f(texp(\lambda X))$. On a $f[\lambda]=\sum_{i\geq\delta(t)}|\lambda|_F^i f_i$. Par interpolation, chaque f_i est combinaison linéaire de fonctions $f[\lambda]$. Il suffit donc de fixer λ et de prouver que $f[\lambda]$ appartient à $C_{\geq\delta}(T)$. On fixe $X\in\omega$, on pose $t'=texp(X)$ et on doit étudier le comportement de la fonction $Y\mapsto f[\lambda](t'exp(Y))$ au voisinage de 0. Posons $t''=texp(\lambda X)$ et introduisons la fonction $\varphi''\in C_{\geq\delta(t'')}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_{t''})$ telle que $f(t''exp(Y))=\varphi''(\bar{Y})$ pour Y assez proche de 0. On a alors

$$(6) \qquad f[\lambda](t'exp(Y))=\varphi''(\lambda\bar{Y})=\varphi''^{\lambda}(\bar{Y})$$

pour Y assez proche de 0. La fonction φ''^{λ} appartient évidemment à $C_{\geq\delta(t'')}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_{t''})$. De plus, la preuve de (2) montre que $\mathfrak{z}_{t'}=\mathfrak{z}_{t''}$, d'où aussi $\delta(t')=\delta(t'')$. Alors l'égalité (6) est le développement requis pour que $f[\lambda]$ appartienne à $C_{\geq\delta}(T)$. Cela prouve (5).

Notons Ω_s l'ensemble des éléments de ω_s dont les coordonnées $(\lambda_j)_{j=1,...,m}$ dans la base $(e_j)_{j=1,...,m}$ vérifient la condition $inf\{val_F(\lambda_j); j=1,...,m\}=0$ ou 1. C'est un sous-ensemble ouvert et compact de $\mathfrak{s}(F)$. L'ensemble ω est réunion disjointe de $\omega_z\times\{0\}$, qui est de mesure nulle, et des ensembles $\omega_z\times\varpi_F^{2k}\Omega_s$, pour $k\in\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$. Puisque Ω_s ne contient pas 0, tout élément $X\in\omega_z\times\varpi_F^{2k}\Omega_s$ appartient à ω mais pas à $\mathfrak{z}_t(F)$. D'après (2), on a donc $\mathfrak{z}_t\subsetneq\mathfrak{z}_{texp(X)}$. Il en résulte que $texp(X)\in\bigcup_{n'<n}T_{n'}(F)$. D'après l'hypothèse de récurrence et (5), toute fonction f_i est intégrable sur $texp(\omega_z+\varpi_F^{2k}\Omega_s)$. La fonction f coïncide sur cet ensemble avec $\sum_{i\geq\delta(t)}f_i$ et est donc aussi intégrable. Pour

prouver que f est intégrable sur $texp(\omega)$, il reste à prouver que la série

$$(7) \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{texp(\omega_z+\varpi_F^{2k}\Omega_s)} |f(t')|dt'$$

est convergente. Elle est majorée par

$$\sum_{i\geq\delta(t)} mes(\omega_z) \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\varpi_F^{2k}\Omega_s} |\varphi_i(X)|dX.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\Omega_s} |\varphi_i(\varpi_F^{2k}X)|q^{-2kdim(\mathfrak{s})}dX$$

ou encore

$$q^{-2k(i+dim(\mathfrak{s}))}\int_{\Omega_s} |\varphi_i(X)|dX.$$

On a

$$i + dim(\mathfrak{s}) \geq \delta(t) + dim(\mathfrak{t}) - dim(\mathfrak{z}_t) \geq 1.$$

Donc la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q^{-2k(i+dim(\mathfrak{s}))}$$

est convergente et aussi la série (7). Cela achève la démonstration. $\square$

7.5 Les fonctions déterminants

On définit une fonction

$$\begin{array}{cccc} \delta_0 : & T(F) & \to & \mathbb{Z} \\ & t & \mapsto & \delta(H_t) - \delta(H'') + rdim(E''(t)) \end{array}$$

où les notations sont celles introduites dans le paragraphe précédent.

Lemme. *La fonction $D^H\Delta^r$ appartient à $C_{\geq\delta_0}(T)$.*

Preuve. Soient $t \in T(F)$ et $X \in \mathfrak{t}(F)$. On note X', resp. X'' la restriction de X à $E'(t)$, resp. $E''(t)$. On suppose $texp(X) \in T_\natural(F)$. Si X est assez proche de 0, on a les égalités

$$D^H(texp(X)) = D^H(t)D^{H_t}(X), \ \Delta(texp(X)) = |det((1-t)_{|E'(t)})|_F|det(X''_{|E''(t)})|_F.$$

La fonction D^{H_t} est invariante par translations par le centre de $\mathfrak{h}_t(F)$, donc aussi par $\mathfrak{z}_t(F)$ d'après le (1) du paragraphe précédent. La seconde fonction est aussi invariante par translations par $\mathfrak{z}_t(F)$, ainsi que l'est toute fonction de X ne dépendant que de X''. Cette seconde fonction est homogène de degré $dim(E''(t))$. On a l'égalité

$$D^{H_t}(X) = lim_{Y\in\mathfrak{h}_{t,X}(F),Y\to 0}D^{H_t}(X+Y)D^{H_{t,X}}(Y)^{-1}.$$

On a $H_{t,X} = TH''$. Sur les éléments réguliers de $\mathfrak{h}_t(F)$, D^{H_t} est homogène de degré $\delta(H_t)$. De même, sur les éléments réguliers de $\mathfrak{h}_{t,X}(F)$, $D^{H_{t,X}}$ est homogène de degré $\delta(H_{t,X}) = \delta(H'')$. Il en résulte que, sur un ouvert dense de $\mathfrak{t}(F)$, D^{H_t} est homogène de degré $\delta(H_t) - \delta(H'')$. Le résultat s'ensuit. $\square$

7.6 La fonction c_τ

On définit une fonction $\delta_{G,T} : T(F) \to \mathbb{Z}$ par les formules suivantes, pour $t \in T(F)$:
- si d est impair et $E''(t) \neq \{0\}$, $\delta_{G,T}(t) = \frac{1}{2}(\delta(G'') - \delta(G_t) + 2)$;
- si d est pair, ou si d est impair et $E''(t) = \{0\}$, $\delta_{G,T}(t) = \frac{1}{2}(\delta(G'') - \delta(G_t))$.

Lemme. *La fonction c_τ appartient à $C_{\geq \delta_{G,T}}(T)$.*

Preuve. Fixons $t \in T(F)$ et un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_t(F)$. Posons $\underline{\tau} = \tau_{t,\omega}$, cf. 4.3. C'est un quasi-caractère sur $\mathfrak{g}_t(F)$. Pour $X \in \omega \cap \mathfrak{t}(F)$ tel que $texp(X) \in T_\natural(F)$, on a l'égalité

$$c_\tau(texp(X)) = c_{\underline{\tau},\mathcal{O}}(X)$$

où $\mathcal{O}$ est une certaine orbite nilpotente régulière appartenant à $Nil(\mathfrak{g}_{t,X}) = Nil(\mathfrak{g}'')$. Il s'agit donc d'étudier la fonction $c_{\underline{\tau},\mathcal{O}}$ sur un ouvert dense de $\mathfrak{t}(F)$, au voisinage de 0. On peut généraliser la question à un quasi-caractère quelconque $\underline{\tau}$ de $\mathfrak{g}_t(F)$. On peut restreindre ω et supposer que $\underline{\tau}$ est développable dans ω. En utilisant le lemme 6.3(iii), on peut fixer une orbite $\mathcal{O}_t \in Nil(\mathfrak{g}_t)$ et supposer que $\underline{\tau}(Y) = \hat{j}(\mathcal{O}_t, Y)$ presque partout pour $Y \in \omega$. Cette fonction est localement invariante par translations par le centre de $\mathfrak{g}_t(F)$, donc aussi par $\mathfrak{z}_t(F)$ d'après 7.4(1). La fonction $c_{\underline{\tau},\mathcal{O}}$ sur $\mathfrak{t}(F)$ l'est donc aussi. Soit $\lambda \in F^{\times 2}$. D'après 4.2(2), le quasi-caractère $\underline{\tau}^\lambda$ coïncide avec $|\lambda|_F^{-dim(\mathcal{O}_t)/2}\underline{\tau}$ au voisinage de 0. La même formule nous dit alors que la fonction $c_{\underline{\tau},\mathcal{O}}$ sur $\mathfrak{t}(F)$ est homogène de degré $(dim(\mathcal{O}) - dim(\mathcal{O}_t))/2$. On a $dim(\mathcal{O}_t) \leq \delta(G_t)$. Puisque $\mathcal{O}$ est régulière, on a $dim(\mathcal{O}) = \delta(G'')$. Si d est pair, ou si d est impair et $E''(t) = \{0\}$, le degré précédent est supérieur ou égal à $\delta_{G,T}(t)$ et cela achève la démonstration. Supposons d impair et $E''(t) \neq \{0\}$. Si $\mathcal{O}_t$ n'est pas régulière, on a $dim(\mathcal{O}_t) \leq \delta(G_t) - 2$ et on conclut encore. Supposons $\mathcal{O}_t$ régulière. Le tore T est un sous-tore maximal de $H'_t = J'(t)_t J''(t)$ et se décompose donc en $T = T'T''$, où T' est un sous-tore maximal de $J'(t)_t$ et T'' un sous-tore maximal de $J''(t)$. L'hypothèse $A_T = \{1\}$ entraîne $A_{T''} = \{1\}$ et l'hypothèse $E''(t) \neq \{0\}$ entraîne $T'' \neq \{1\}$. Notons $\tilde{G}$ le groupe spécial orthogonal de $E''(t) \oplus V''$. On a $T'' \subset J''(t) \subset \tilde{G}$. Comme on l'a vu dans la preuve de 7.4(1), on a $G_t = J'(t)_t\tilde{G}$. L'orbite $\mathcal{O}_t$ se décompose en la somme d'une orbite nilpotente dans $\mathfrak{j}'(t)_t(F)$ et d'une orbite nilpotente $\tilde{\mathcal{O}}$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}(F)$. Ces deux orbites sont régulières. Cela entraîne que $\tilde{G}$ est quasi-déployé. Or $dim(E''(t) \oplus V'')$ est impair, donc $\tilde{G}$ est déployé. Donc $\tilde{\mathfrak{g}}(F)$ possède une unique orbite nilpotente régulière, à savoir $\tilde{\mathcal{O}}$, qui est induite à partir de l'orbite $\{0\}$ d'une sous-algèbre de Lévi minimale, c'est-à-dire de l'algèbre de Lie d'un tore déployé maximal. Cela entraîne que la fonction $\hat{j}(\tilde{\mathcal{O}}, .)$ est à support dans l'ensemble des éléments qui appartiennent à une sous-algèbre de Borel. Les propriétés de T'' montrent qu'un élément de $\mathfrak{t}''(F)$ en position générale possède un voisinage dans $\tilde{\mathfrak{g}}(F)$ dont aucun élément n'appartient à une telle algèbre. Donc $\hat{j}(\tilde{\mathcal{O}}, .)$ s'annule au voisinage de presque tout élément de $\mathfrak{t}''(F)$. Il en résulte que $\underline{\tau}$ s'annule au voisinage de presque tout élément de $\mathfrak{t}(F)$. A fortiori, la fonction $c_{\underline{\tau},\mathcal{O}}$ est nulle sur $\mathfrak{t}(F)$. Cela achève la démonstration. $\square$

7.7 Preuve de la proposition 7.3

Evidemment, un lemme analogue au lemme 7.6 vaut si l'on remplace G par H et $\delta_{G,T}$ par une fonction $\delta_{H,T}$ définie de façon similaire (l'entier d_W remplace d). Il résulte tout d'abord de ces lemmes que les fonctions c_θ et c_τ sont localement constantes sur $T_\natural(F)$. Evidemment, si δ_i, $i = 1, 2, 3$ sont trois fonctions sur $T(F)$ telles que $\delta_1 + \delta_2 \geq \delta_3$, on a

$f_1f_2 \in C_{\geq \delta_3}(T)$ pour toutes $f_1 \in C_{\geq \delta_1}(T)$ et $f_2 \in C_{\geq \delta_2}(T)$. En vertu des lemmes 7.4, 7.5 et 7.6, pour démontrer le (ii) de la proposition, il suffit de prouver que

$$(1) \qquad \delta_0(t) + \delta_{G,T}(t) + \delta_{H,T}(t) \geq inf(dim(\mathfrak{z}_t) - dim(\mathfrak{t}) + 1, 0)$$

pour tout $t \in T(F)$. Posons $e = dim(E''(t))$. Puisque d ou d_W est impair, les définitions entraînent que le membre de gauche est égal à

$\frac{1}{2}(\delta(G'') - \delta(G_t) - \delta(H'') + \delta(H_t)) + re$, si $e = 0$;

$\frac{1}{2}(\delta(G'') - \delta(G_t) - \delta(H'') + \delta(H_t)) + 1 + re$, si $e > 0$.

On a déjà dit que G_t était le produit de $J'(t)_t$ et du groupe spécial orthogonal $\tilde{G}$ de $E''(t) \oplus V''$. De même, H_t est le produit de $J'(t)_t$ et du groupe spécial orthogonal $\tilde{H}$ de $E''(t) \oplus W''$. On peut remplacer $-\delta(G_t) + \delta(H_t)$ par $-\delta(\tilde{G}) + \delta(\tilde{H})$ dans les formules précédentes. Il est facile de calculer

$$(2) \qquad \delta(G) = \begin{cases} d(d-2)/2, & \text{si } d \text{ est pair,} \\ (d-1)^2/2, & \text{si } d \text{ est impair.} \end{cases}$$

On calcule de même $\delta(G'')$, $\delta(H'')$, $\delta(\tilde{G})$ et $\delta(\tilde{H})$ en remplaçant d par $d'' + 1 + 2r$, d'', $d'' + 1 + 2r + e$, $d'' + e$, où $d'' = dim(W'')$. On obtient que le membre de gauche de (1) est supérieur ou égal à

$$\begin{cases} 0, & \text{si } e = 0; \\ -e/2 + 1, & \text{si } e > 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas, il est clairement supérieur au membre de droite de (1). Supposons $e > 0$. L'algèbre $\mathfrak{z}_t$ est celle d'un sous-tore de $J'(t)$, donc de dimension inférieure ou égale à $dim(E'(t))/2$, qui est égale à $dim(\mathfrak{t}) - e/2$. Le membre de droite de (1) est donc inférieur ou égal à $-e/2 + 1$, donc au membre de gauche. Cela achève la preuve. □

7.8 Le théorème

Soient θ un quasi-caractère sur $H(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. Pour $T \in \underline{\mathcal{T}}$, on définit la fonction c_{θ_f} sur $T_\natural(F)$ et on la note simplement c_f. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{T}$ des classes de conjugaison par $H(F)$ dans $\underline{\mathcal{T}}$. Posons

$$I(\theta, f) = \sum_{T \in \mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \nu(T) \int_{T(F)} c_\theta(t) c_f(t) D^H(t) \Delta(t)^r dt.$$

D'après la proposition 7.3, cette expression est absolument convergente.

Pour $g \in G(F)$, on définit une fonction ${}^g f^\xi$ sur $H(F)$ par

$${}^g f^\xi(x) = \int_{U(F)} f(g^{-1}xug)\xi(u)du.$$

Elle appartient à $C_c^\infty(H(F))$. On pose

$$I(\theta, f, g) = \int_{H(F)} \theta(x) {}^g f^\xi(x) dx,$$

puis, pour un entier $N \in \mathbb{N}$,

$$I_N(\theta, f) = \int_{U(F)H(F)\backslash G(F)} I(\theta, f, g) \kappa_N(g) dg.$$

Ces intégrales sont à supports compacts.

Théorème. *Pour tout quasi-caractère θ sur $H(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité*

$$lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f) = I(\theta, f).$$

Ce théorème sera démontré en 12.3. Contentons-nous ici de la remarque facile suivante. Supposons $d_W \geq 1$. Soit $y \in H^+(F)$ $y \notin H(F)$, que l'on identifie comme on l'a dit en 7.2 à un élément de $G(F)$. Posons $\theta^+ = (\theta + {}^y\theta)/2$. Par de simples changements de variables, on vérifie les égalités

$$I(\theta^+, f) = I(\theta, f),\ I_N(\theta^+, f) = I_N(\theta, f).$$

On peut donc remplacer θ par θ^+ pour démontrer le théorème. Autrement dit, on peut supposer θ invariant par conjugaison par $H^+(F)$.

7.9 Le théorème pour les algèbres de Lie

Soient θ un quasi-caractère sur $\mathfrak{h}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Les définitions posées pour les groupes dans les paragraphes précédents se descendent aux algèbres de Lie. Ainsi, on a défini en 7.2 un caractère ξ de $U(F)$. Il s'en déduit un caractère de $\mathfrak{u}(F)$, défini par la même formule qu'en 7.2 et que l'on note encore ξ. On définit une fonction f^ξ sur $\mathfrak{h}(F)$ par

$$f^\xi(Y) = \int_{\mathfrak{u}(F)} f(Y+N)\xi(N)dN.$$

Pour $g \in G(F)$, on pose

$$I(\theta, f, g) = \int_{\mathfrak{h}(F)} \theta(Y)^g f^\xi(Y)dY,$$

puis, pour un entier $N \in \mathbb{N}$,

$$I_N(\theta, f) = \int_{U(F)H(F)\backslash G(F)} I(\theta, f, g)\kappa_N(g)dg.$$

On définit la fonction Δ sur $\mathfrak{h}(F)$ par

$$\Delta(Y) = |det(Y|W/W''(Y))|_F,$$

où $W''(Y)$ est le noyau de Y agissant dans W. Pour $T \in \mathcal{T}$, on note $\mathfrak{t}_\natural$ le sous-ensemble des $X \in \mathfrak{t}$ tels que les valeurs propres de l'action de X dans W' soient toutes distinctes, où W' est comme en 7.3. Supposons f très cuspidale. On définit les fonctions c_θ et $c_f = c_{\theta_f}$ sur $\mathfrak{t}_\natural(F)$. On pose

$$I(\theta, f) = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1}\nu(T)\int_{\mathfrak{t}(F)} c_\theta(Y)c_f(Y)D^H(Y)\Delta(Y)^r dY.$$

Une analogue de la proposition 7.3 entraîne l'absolue convergence de cette expression.

Théorème. *Pour tout quasi-caractère θ sur $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on a l'égalité*

$$lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f) = I(\theta, f).$$

Ce théorème sera démontré en 12.3.

8 Localisation

8.1 Un cas trivial

On fixe pour toute la section un quasi-caractère θ sur $H(F)$, invariant par conjugaison par $H^+(F)$, et une fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$. Soit $x \in G_{ss}(F)$. Notons V'' le noyau de $x - 1$ agissant dans V. Supposons que x n'est conjugué à aucun élément de $H(F)$. Par le théorème de Witt, cette hypothèse équivaut à dire que V'' ne contient aucun sous-espace non dégénéré isomorphe (comme espace quadratique) à $D \oplus Z$. Soit ω un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$, vérifiant la condition $(7)_\rho$ de 3.1, où ρ est la représentation de G dans V. Pour $X \in \omega$, le noyau de $xexp(X) - 1$ est contenu dans V'' et vérifie a fortiori la même condition que V''. Donc $xexp(X)$ n'est conjugué à aucun élément de $H(F)$. Posons $\Omega = (xexp(\omega))^G$. Alors $\Omega \cap H(F) = \emptyset$. Supposons f à support dans Ω. Pour tout $t \in H_{ss}(F)$, le complémentaire de Ω dans $G(F)$ est un voisinage de t invariant par conjugaison par $G(F)$ et sur lequel f est nulle. Donc θ_f y est nul aussi et le développement de θ_f au voisinage de t est nul. Il en résulte que $I(\theta, f) = 0$. D'autre part, tout élément de $U(F)H(F)$ a pour partie semi-simple un élément conjugué à un élément de $H(F)$. Il en résulte que ${}^g f^\xi = 0$ pour tout $g \in G(F)$, donc $I_N(\theta, f) = 0$. Alors l'égalité du théorème est triviale.

8.2 Localisation de $I_N(\theta, f)$

Soit $x \in H_{ss}(F)$. On note W'', resp. V_0'', V'', le noyau de $x-1$ agissant dans W, resp. V_0, resp. V. On a $V_0'' = W'' \oplus D$, $V'' = W'' \oplus D \oplus Z$. On note W' l'orthogonal de W'' dans W. On note $H' = G'$, resp. H'', G_0'', G'', les groupes spéciaux orthogonaux de W', resp. W'', V_0'', V''. On a les égalités $H_x = H'_x H''$, $G_x = G'_x G''$. On fixe un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$, auquel on impose la condition (8) de 3.1, c'est-à-dire $\omega = \omega' \times \omega''$, où $\omega' \subset \mathfrak{g}'_x(F)$, $\omega'' \subset \mathfrak{g}''(F)$. On pose $\Omega = (xexp(\omega))^G$. On suppose

Hypothèse. *Le support de f est contenu dans Ω.*

La situation ci-dessus, les notations et cette hypothèse seront conservées jusqu'en 10.9.

On définit le quasi-caractère $\theta_{x,\omega}$ de $\mathfrak{g}_x(F)$, cf. 4.3, et, pour $g \in G(F)$, la fonction ${}^g f_{x,\omega}$ sur $\mathfrak{g}_x(F)$, cf. 5.4. Pour $g \in G(F)$, on définit une fonction ${}^g f^\xi_{x,\omega}$ sur $\mathfrak{h}_x(F)$ par

$${}^g f^\xi_{x,\omega}(X) = \int_{\mathfrak{u}_x(F)} {}^g f_{x,\omega}(X + N)\xi(N)dN.$$

Remarquons que x appartient à $M(F)$ et que l'on a l'inclusion $\mathfrak{h}_x \subset \mathfrak{m}_x$. Posons

$$I_{x,\omega}(\theta, f, g) = \int_{\mathfrak{h}_x(F)} \theta_{x,\omega}(X)^g f^{\xi}_{x,\omega}(X)dX,$$

puis

$$I_{x,\omega,N}(\theta, f) = \int_{U_x(F)H_x(F)\backslash G(F)} I_{x,\omega}(\theta, f, g)\kappa_N(g)dg.$$

Cette intégrale a un sens : la fonction $g \mapsto I_{x,\omega}(\theta, f, g)$ est invariante à gauche par $U_x(F)H_x(F)$. Elle est à support compact. En effet, d'après 3.1(5), il existe un sous-ensemble compact $\Gamma \subset G(F)$ tel que ${}^g f_{x,\omega}$ est nulle pour $g \in G(F), g \notin G_x(F)\Gamma$. D'autre part, on vérifie que, pour tout $\gamma \in G(F)$, la fonction $g \mapsto \kappa_N(g\gamma)$ sur $G_x(F)$ a un support d'image compacte dans $U_x(F)H_x(F)\backslash G_x(F)$. L'assertion en résulte.

Posons

$$C(x) = |H^+(F)/H(F)||Z_{H^+}(x)(F)/H_x(F)|^{-1}\Delta(x)^r.$$

Lemme. *On a l'égalité*

$$I_N(\theta, f) = C(x)I_{x,\omega,N}(\theta, f).$$

Preuve. Pour tout groupe réductif connexe L, fixons un ensemble de représentants $\mathcal{T}(L)$ des classes de conjugaison par $L(F)$ dans l'ensemble des sous-tores maximaux de L. Soit $g \in G(F)$. D'après la formule de Weyl, on a

$$(1) \qquad I(\theta, f, g) = \sum_{T \in \mathcal{T}(H)} |W(H, T)|^{-1} \int_{T(F)} \theta(t)J_H(t, {}^g f^{\xi})D^H(t)^{1/2}dt.$$

Pour deux sous-tores (pas forcément maximaux) T et T' de H, notons $W^+(T, T')$ l'ensemble des isomorphismes de T sur T' induits par la conjugaison par un élément de $H^+(F)$. On va prouver les assertions suivantes.

(2) Soient $T \in \mathcal{T}(H)$ et $t \in T(F) \cap H_{reg}(F)$. Alors $J_H(t, {}^g f^{\xi}) = 0$ si t n'appartient pas à

$$\bigcup_{T_1 \in \mathcal{T}(H_x)} \bigcup_{w \in W^+(T_1,T)} w(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega)).$$

(3) Soit $T \in \mathcal{T}(H)$ et, pour $i = 1, 2$, soient $T_i \in \mathcal{T}(H_x)$ et $w_i \in W^+(T_i, T)$. Alors les ensembles $w_1(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega))$ et $w_2(xexp(\mathfrak{t}_2(F) \cap \omega))$ sont disjoints ou confondus.

(4) Soient $T \in \mathcal{T}(H)$, $T_1 \in \mathcal{T}(H_x)$ et $w_1 \in W^+(T_1, T)$. Le nombre des couples (T_2, w_2) tels que $T_2 \in \mathcal{T}(H_x)$, $w_2 \in W^+(T_2, T)$ et $w_2(xexp(\mathfrak{t}_2(F) \cap \omega)) = w_1(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega))$ est égal à

$$|W(H_x, T_1)||Z_{H^+}(x)(F)/H_x(F)||Z_{H^+}(T_1)(F)/T_1(F)|^{-1}.$$

Soient T et t comme en (2). Supposons $J_H(t, {}^g f^{\xi}) \neq 0$. Alors il existe $u \in U(F)$ tel que la classe de conjugaison par $G(F)$ de tu coupe le support de f. Elle coupe donc aussi $xexp(\omega)$. La partie semi-simple de tu est conjuguée à t et la partie semi-simple d'un élément de $xexp(\omega)$ reste dans cet ensemble. Donc la classe de conjugaison par $G(F)$ de t coupe $xexp(\omega)$. Soient $X \in \omega$ et $y \in G(F)$ tels que $yty^{-1} = xexp(X)$. Le noyau de $t - 1$ agissant dans V contient $D \oplus Z$. D'après l'hypothèse $(7)_\rho$ de 3.1, celui de $xexp(X) - 1$ est contenu dans W''. Donc W'' contient $y(D \oplus Z)$. Mais il contient aussi $D \oplus Z$. Ces deux espaces $D \oplus Z$ et $y(D \oplus Z)$ sont isomorphes et non dégénérés, en tant qu'espaces quadratiques. D'après le théorème de Witt, on peut trouver $y'' \in G''(F)$ tel que $y''y(D \oplus Z) = D \oplus Z$. On a $G'' \subset G_x$. Quitte à remplacer y par $y''y$ et X par $y''Xy''^{-1}$, on est ramené au cas où y conserve $D \oplus Z$. Dans ce cas, puisque t agit trivialement sur $D \oplus Z$, $xexp(X)$ agit trivialement lui aussi, donc $X \in \mathfrak{h}_x(F)$. Quitte à multiplier encore y à gauche par un élément de $H_x(F)$, on peut supposer que $X \in \mathfrak{t}_1(F)$ pour un élément $T_1 \in \mathcal{T}(H_x)$. L'élément y conserve W. Notons h sa restriction à cet espace. Alors $h \in H^+(F)$ et $hth^{-1} = xexp(X)$. Nécessairement, la conjugaison par h envoie le commutant de t dans H sur celui de $xexp(X)$. Mais t est régulier dans H, donc ces commutants sont T et T_1. Si on note w l'élément de $W^+(T_1, T)$ induit par la conjugaison par y^{-1}, on a alors $t \in w(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega))$ ce qui prouve (2).

Passons à la preuve de (3). Pour $i = 1, 2$ soit $y_i \in H^+(F)$ tel que w_i soit induit par la conjugaison par y_i. On identifie y_i à un élément de $G(F)$. Posons $y = y_2^{-1}y_1$. Supposons que les ensembles $w_1(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega))$ et $w_2(xexp(\mathfrak{t}_2(F) \cap \omega))$ ne sont pas disjoints. Alors $y(xexp(\omega))y^{-1} \cap (xexp(\omega)) \neq \emptyset$. D'après 3.1(4), y appartient à $Z_G(x)(F)$. D'après 3.1(1), la conjugaison par y conserve ω. D'autre part, d'après la définition de y, cette conjugaison envoie T_1 sur T_2, donc aussi $\mathfrak{t}_1$ sur $\mathfrak{t}_2$. Elle envoie alors $xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega)$ sur $xexp(\mathfrak{t}_2(F) \cap \omega)$ et les ensembles $w_1(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega))$ et $w_2(xexp(\mathfrak{t}_2(F) \cap \omega))$ sont confondus. Cela prouve (3).

Soient T, T_1 et w_1 comme en (4). Posons

$$\mathcal{Y} = \{y \in Z_{H^+}(x)(F); yT_1y^{-1} \in \mathcal{T}(H_x)\}/Z_{H^+}(T_1)(F).$$

La preuve de (3) montre que l'application $y \mapsto (T_2 = yT_1y^{-1}, w_2 = w_1 ad(y^{-1}))$ est une surjection de $\mathcal{Y}$ sur l'ensemble des couples (T_2, w_2) dont on veut calculer le nombre d'éléments. Cette application est aussi injective, le nombre à calculer est donc $|\mathcal{Y}|$. On vérifie que l'application naturelle

$$\mathcal{Y} \to H_x(F)\backslash Z_{H^+}(x)(F)/Z_{H^+}(T_1)(F)$$

est surjective et que toutes ses fibres ont pour nombre d'éléments $|W(H_x, T_1)|$. Enfin, parce que $H_x(F)$ est un sous-groupe distingué de $Z_{H^+}(x)(F)$ et que $Z_{H^+}(T_1) \cap H_x = T_1$, on a

$$|H_x(F)\backslash Z_{H^+}(x)(F)/Z_{H^+}(T_1)(F)| = |Z_{H^+}(x)(F)/H_x(F)||Z_{H^+}(T_1)(F)/T_1(F)|^{-1}.$$

Cela prouve (4).

Ces trois propriétés permettent de transformer l'expression (1) de la façon suivante

$$I(\theta, f, g) = \sum_{T_1 \in \mathcal{T}(H_x)} \sum_{T \in \mathcal{T}(H)} \sum_{w_1 \in W^+(T_1, T)} |W(H, T)|^{-1} w(T_1)$$

$$\int_{\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega} \theta(w_1(xexp(X))) J_H(w_1(xexp(X)), {}^g f^\xi) D^H(w_1(xexp(X)))^{1/2} dX,$$

où

$$w(T_1) = |W(H_x, T_1)|^{-1} |Z_{H^+}(x)(F)/H_x(F)|^{-1} |Z_{H^+}(T_1)(F)/T_1(F)|.$$

On a $D^H(w_1(xexp(X))) = D^H(xexp(X))$. On a $\theta(w_1(xexp(X))) = \theta(xexp(X))$ puisqu'on a supposé θ invariant par $H^+(F)$. Si w_1 était induit par la conjugaison par un élément de $H(F)$, on aurait aussi $J_H(w_1(xexp(X)), {}^g f^\xi) = J_H(xexp(X), {}^g f^\xi)$, et w_1 disparaîtrait de la formule ci-dessus. En général, on a seulement $J_H(w_1(xexp(X)), {}^g f^\xi) =$

$J_H(xexp(X), {}^{yg}f^\xi)$, où $y \in H^+(F)$ dépend de w_1. Mais ce terme y disparaît par changement de variables quand on calcule $I_N(\theta, f)$. Ces arguments conduisent à l'égalité

$$(5) \qquad I_N(\theta, f) = \int_{U(F)H(F)\backslash G(F)} \sum_{T_1 \in \mathcal{T}(H_x)} w'(T_1)$$

$$\int_{\mathfrak{t}_1(F)\cap\omega} \theta(xexp(X)) J_H(xexp(X), {}^g f^\xi) D^H(xexp(X))^{1/2} dX \kappa_N(g) dg,$$

où

$$w'(T_1) = w(T_1) \sum_{T \in \mathcal{T}(H)} |W^+(T_1, T)||W(H,T)|^{-1}.$$

Soit $T_1 \in \mathcal{T}(H_x)$. Remarquons que $W(H,T)$ a même nombre d'éléments que $W(H,T_1)$ pour tout T tel que $W^+(T_1,T)$ est non vide. On a donc

$$w'(T_1) = w(T_1)|W(H,T_1)^{-1}||\mathcal{Y}_{T_1}|,$$

où

$$\mathcal{Y}_{T_1} = \{(T, w_1); T \in \mathcal{T}(H), w_1 \in W^+(T_1, T)\}.$$

Posons

$$\mathcal{Y}'_{T_1} = \{y \in H^+(F)/Z_{H^+}(T_1)(F); yT_1y^{-1} \in \mathcal{T}(H)\}.$$

L'application $y \mapsto (T = yT_1y^{-1}, w_1 = ad(y))$ est une bijection de $\mathcal{Y}'_{T_1}$ sur $\mathcal{Y}_{T_1}$. L'application naturelle

$$\mathcal{Y}'_{T_1} \to H(F)\backslash H^+(F)/Z_{H^+}(T_1)(F)$$

est surjective et toutes ses fibres ont pour nombre d'éléments $|W(H,T_1)|$. Enfin, parce que H est un sous-groupe distingué de H^+ et $Z_{H^+}(T_1) \cap H = T_1$, on a l'égalité

$$|H(F)\backslash H^+(F)/Z_{H^+}(T_1)(F)| = |H^+(F)/H(F)||Z_{H^+}(T_1)(F)/T_1(F)|^{-1}.$$

Cela conduit à l'égalité

$$w'(T_1) = |H^+(F)/H(F)||Z_{H^+}(x)(F)/H_x(F)|^{-1}|W(H_x,T_1)|^{-1}.$$

Pour $X \in \omega \cap \mathfrak{h}_{x,reg}(F)$ et $g \in G(F)$, on a

$$J_H(xexp(X), {}^g f^\xi) = D^H(xexp(X))^{1/2} \int_{H_x(F)\backslash H(F)} \int_{T_1(F)\backslash H_x(F)} {}^{yg}f^\xi(xexp(h^{-1}Xh)) dh\, dy.$$

D'autre part, on a $D^H(xexp(X)) = D^H(x)D^{H_x}(X)$. Ces égalités transforment la formule (5) en

$$(6) \qquad I_N(\theta, f) = C'(x) \int_{U(F)H_x(F)\backslash G(F)} \Phi(g)\kappa_N(g) dg,$$

où

$$C'(x) = |H^+(F)/H(F)||Z_{H^+}(x)(F)/H_x(F)|^{-1} D^H(x)$$

et

$$\Phi(g) = \sum_{T_1 \in \mathcal{T}(H_x)} |W(H_x, T_1)^{-1} \int_{\mathfrak{t}_1(F)\cap\omega} \theta(xexp(X)) \int_{T_1(F)\backslash H_x(F)} {}^g f^\xi(xexp(h^{-1}Xh)) dh\, D^{H_x}(X) dX.$$

Définissons une fonction φ_g sur $\mathfrak{h}_x(F)$ par

$$\varphi_g(X) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & \text{si } X \notin \omega, \\ \theta(xexp(X))^g f^\xi(xexp(X)), & \text{si } X \in \omega. \end{array} \right.$$

D'après la formule de Weyl,

$$\Phi(g) = \int_{\mathfrak{h}_x(F)} \varphi_g(X) dX.$$

Soient $X \in \omega \cap \mathfrak{h}_{x,reg}(F)$ et $g \in G(F)$. On a

$$\begin{aligned} {}^g f^\xi(xexp(X)) &= \int_{U(F)} {}^g f(xexp(X)u)\xi(u)du \\ &= \int_{U_x(F)\backslash U(F)} \int_{U_x(F)} {}^g f(xexp(X)uv)\xi(uv)du\, dv. \end{aligned}$$

Pour $u \in U_x(F)$, l'application $v \mapsto (xexp(X)u)^{-1}v^{-1}xexp(X)uv$ est une bijection de $U_x(F)\backslash U(F)$ sur lui-même. Grâce à l'hypothèse $(7)_\rho$ de 3.1, son jacobien est égal à la valeur absolue du déterminant de $1-ad(x)^{-1}$ agissant sur $\mathfrak{u}(F)/\mathfrak{u}_x(F)$. Remarquons que, avec les notations de 7.1 et 7.2, l'application

$$\begin{array}{ccc} W' \otimes Z_+ & \to & \mathfrak{u}(F) \\ (w', z) & \mapsto & c_{w',z} \end{array}$$

est une bijection de $W' \otimes Z_+$ sur un supplémentaire de $\mathfrak{u}_x(F)$ dans $\mathfrak{u}(F)$. Le jacobien ci-dessus est donc égal à $\Delta(x)^r$. D'autre part, on a

$$\xi((xexp(X)u)^{-1}v^{-1}xexp(X)uv) = 1.$$

Cela conduit à l'égalité

$$\begin{aligned} {}^g f^\xi(xexp(X)) &= \Delta(x)^r \int_{U_x(F)\backslash U(F)} \int_{U_x(F)} {}^g f(v^{-1}xexp(X)uv)\xi(u)du\, dv \\ &= \Delta(x)^r \int_{U_x(F)\backslash U(F)} \int_{U_x(F)} {}^{vg} f(xexp(X)u)\xi(u)du\, dv. \end{aligned}$$

Grâce à la condition (6) de 3.1, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{u}_x(F) & \to & U_x(F) \\ N & \mapsto & exp(-X)exp(X+N) \end{array}$$

est bijective et préserve les mesures. On a $\xi(exp(-X)exp(X+N)) = \xi(N)$. On a donc aussi

$${}^g f^\xi(xexp(X)) = \Delta(x)^r \int_{U_x(F)\backslash U(F)} \int_{\mathfrak{u}_x(F)} {}^{vg} f(xexp(X+N))\xi(N)dN\, dv.$$

Remarquons que la partie semi-simple de $X+N$ est conjuguée à X par un élément de $G_x(F)$, donc $X+N \in \omega$ et ${}^{vg} f(xexp(X+N)) = {}^{vg} f_{x,\omega}(X+N)$. Alors

$${}^g f^\xi(xexp(X)) = \Delta(x)^r \int_{U_x(F)\backslash U(F)} {}^{vg} f^\xi_{x,\omega}(X)dv.$$

Par ailleurs, on a $\theta(xexp(X)) = \theta_{x,\omega}(X)$. Donc

$$\varphi_g(X) = \Delta(x)^r \theta_{x,\omega}(X) \int_{U_x(F)\backslash U(F)} {}^{vg}f^{\xi}_{x,\omega}(X)dv.$$

Cette égalité reste vraie si $X \notin \omega$ puisque les deux membres sont nuls. Alors on reconnaît

$$\Phi(g) = \Delta(x)^r \int_{U_x(F)\backslash U(F)} I_{x,\omega}(\theta, f, vg)dv.$$

En remarquant que $C'(x)\Delta(x)^r = C(x)$, la formule (6) devient

$$I_N(\theta, f) = C(x) \int_{U_x(F)H_x(F)\backslash G(F)} I_{x,\omega}(\theta, f, g)\kappa_N(g)dg$$

$$= C(x)I_{x,\omega,N}(\theta, f). \square$$

8.3 Localisation de $I(\theta, f)$

Modifions les notations de 7.3 : pour $T \in \underline{\mathcal{T}}$, on note maintenant W'_T, W''_T et V''_T les espaces que l'on avait notés W', W'' et V'' dans ce paragraphe. On note $\underline{\mathcal{T}}_x$ le sous-ensemble des $T \in \underline{\mathcal{T}}$ tels que $T \subset H_x$ et $W' \subset W'_T$. Remarquons que ces conditions impliquent que T se décompose en $T'T''$ où T' est un sous-tore maximal de H' et T'' est un sous-tore de H''. On a $x \in T'$. Pour $T \in \underline{\mathcal{T}}_x$, on a $xexp(X) \in T_\natural(F)$ pour tout $X \in \mathfrak{t}_\natural(F) \cap \omega$. On définit des fonctions $c_{\theta,x,\omega}$ et $c_{f,x,\omega}$ presque partout sur $\mathfrak{t}(F)$. Elles sont nulles hors de $\mathfrak{t}(F) \cap \omega$. Pour $X \in \mathfrak{t}_\natural(F) \cap \omega$,

$$c_{\theta,x,\omega}(X) = c_\theta(xexp(X)),\ c_{f,x,\omega}(X) = c_f(xexp(X)).$$

En fait, les fonctions $\theta_{x,\omega}$ et $\theta_{f,x,\omega}$ sont des quasi-caractères et les fonctions ci-dessus sont associées à ces quasi-caractères comme en 7.9. On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{T}_x$ des classes de conjugaison par $H_x(F)$ dans $\underline{\mathcal{T}}_x$. Enfin, on définit une fonction Δ'' sur $\mathfrak{h}_x(F)$ par

$$\Delta''(X) = |det(X|W''/W''(X))|_F,$$

où $W''(X)$ est le noyau de X agissant dans W''. Posons

$$I_{x,\omega}(\theta, f) = \sum_{T\in\mathcal{T}_x} |W(H_x, T)|^{-1}\nu(T) \int_{\mathfrak{t}(F)} c_{\theta,x,\omega}(X)c_{f,x,\omega}(X)D^{H_x}(X)\Delta''(X)^r dX.$$

On pourrait montrer que cette intégrale est absolument convergente de la même façon qu'en 7.3. Cela va aussi résulter de la preuve suivante.

Lemme. *On a l'égalité* $I(\theta, f) = C(x)I_{x,\omega}(\theta, f)$.

Preuve. On a les propriétés suivantes.

(1) Soient $T \in \mathcal{T}$ et $t \in T_\natural(F)$. Alors $c_f(t) = 0$ si t n'appartient pas à

$$\bigcup_{T_1\in\mathcal{T}_x} \bigcup_{w\in W^+(T_1,T)} w(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega)).$$

(2) Soit $T \in \mathcal{T}$ et, pour $i = 1, 2$, soient $T_i \in \mathcal{T}_x$ et $w_i \in W^+(T_i, T)$. Alors les ensembles $w_1(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega))$ et $w_2(xexp(\mathfrak{t}_2(F) \cap \omega))$ sont disjoints ou confondus.

(3) Soient $T \in \mathcal{T}$, $T_1 \in \mathcal{T}_x$ et $w_1 \in W^+(T_1, T)$. Le nombre des couples (T_2, w_2) tels que $T_2 \in \mathcal{T}_x$, $w_2 \in W^+(T_2, T)$ et $w_2(xexp(\mathfrak{t}_2(F) \cap \omega)) = w_1(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega))$ est égal à

$$|W(H_x, T_1)||Z_{H^+}(x)(F)/H_x(F)||Z_{H^+}(T_1)(F)/Z_{H_x}(T_1)(F)|^{-1}.$$

Soient T et t comme en (1). Supposons $c_f(t) \neq 0$. Alors θ_f n'est nulle dans aucun voisinage de t. Le support de θ_f est inclus dans la clôture de $(Supp(f))^G$, donc dans Ω. Donc $t \in \Omega$ et on peut fixer $y \in G(F)$ et $X \in \omega$ tels que $yty^{-1} = xexp(X)$. Puisque $t \in T_\natural(F)$, le noyau de $t - 1$ agissant dans V est V''_T. Grâce à la condition $(7)_\rho$ de 3.1, le noyau de $xexp(X) - 1$ est contenu dans V''. Donc $y(V''_T) \subset V''$. Comme dans la preuve de 8.2(2), on peut alors modifier y et X de telle sorte que y conserve $D \oplus Z$. Cela entraîne que $xexp(X)$ agit sur cet espace par l'identité, donc $X \in \mathfrak{h}_x(F)$. L'élément y conserve W. Notons h sa restriction à cet espace, qui appartient à $H^+(F)$. Posons $T_1 = hTh^{-1}$. On a $T \subset H_t$, donc $T_1 \subset H_{xexp(X)} \subset H_x$. De plus, puisque $y(V''_T) \subset V''$, on a $W' \subset h(W'_T)$. Mais alors le tore T_1 appartient à $\underline{\mathcal{T}}_x$. Quitte à multiplier h à gauche par un élément de $H_x(F)$, on peut supposer $T_1 \in \mathcal{T}_x$. En notant $w \in W^+(T_1, T)$ l'isomorphisme induit par la conjugaison par h^{-1}, on a $t \in w(xexp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega))$, ce qui prouve (1).

Les assertions (2) et (3) se prouvent comme (3) et (4) de 8.2. Remarquons toutefois que le quotient $Z_{H^+}(T_1)(F)/Z_{H_x}(T_1)(F)$ figurant dans (3) est fini car, puisque $x \in T_1(F)$, le groupe $Z_{H^+}(T_1)$ est contenu dans $Z_{H^+}(x)$. On laisse les détails au lecteur.

Les trois assertions précédentes permettent d'écrire

$$I(\theta, f) = \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_x} \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{w_1 \in W^+(T_1, T)} w(T_1)|W(H, T)|^{-1}\nu(T)$$

$$\int_{\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega} c_\theta(w_1(xexp(X)))c_f(w_1(xexp(X)))D^H(w_1(xexp(X)))\Delta(xexp(X))^r dX,$$

où $w(T_1)$ est l'inverse du nombre de couples calculé en (3). Tous les termes contenant w_1 sont invariants par $H^+(F)$ et le w_1 disparaît. On a aussi $\nu(T) = \nu(T_1)$ et $|W(H, T)| = |W(H, T_1)$ si $W^+(T_1, T)$ n'est pas vide. On a les égalités $c_\theta(xexp(X)) = c_{\theta,x,\omega}(X)$, $c_f(xexp(X)) = c_{f,x,\omega}(X)$ et, grâce aux hypothèses (7) et $(7)_\rho$ de 3.1,

$$D^H(xexp(X))\Delta(xexp(X))^r = D^H(x)D^{H_x}(X)\Delta(x)^r\Delta''(X)^r.$$

On obtient

$$(4) \qquad I(\theta, f) = D^H(x)\Delta(x)^r \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_x} w'(T_1)\nu(T_1) \int_{\mathfrak{t}_1(F)} c_{\theta,x,\omega}(X)c_{f,x,\omega}(X)D^{H_x}(X)\Delta''(X)^r dX,$$

où

$$w'(T_1) = w(T_1)|W(H, T_1)|^{-1}|\{(T, w_1); T \in \mathcal{T}, w_1 \in W^+(T_1, T)\}|.$$

On calcule ce terme comme dans la preuve du lemme 8.2. On obtient

$$D^H(x)\Delta(x)^r w'(T_1) = C(x)|W(H_x, T_1)|^{-1}.$$

Alors la formule (4) devient celle de l'énoncé. $\square$

9 Utilisation de la transformation de Fourier

9.1 Position du problème

Comme on l'a dit, on conserve la situation de 8.2. Posons $U'' = U \cap G''$. Remarquons que $U'' = U_x$. Soient θ'' un quasi-caractère de $\mathfrak{h}''(F)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}''(F))$. Appliquant les définitions de 7.9 où l'on remplace les espaces V et W par V'' et W'', on définit une fonction φ^ξ sur $\mathfrak{h}''(F)$ et, pour $g \in G''(F)$, une intégrale $I(\theta'', \varphi, g)$. Remarquons que, si le support de φ est contenu dans ω'', celui de φ^ξ est contenu dans $\omega'' \cap \mathfrak{h}''(F)$. Soit $S \in \mathfrak{h}''(F)$. On suppose que S est régulier et que le noyau de S agissant dans W'' est de dimension au plus 1. On suppose que, pour toute $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{h}''(F))$ à support dans $\omega'' \cap \mathfrak{h}''(F)$, on a l'égalité

$$\theta''(\phi) = J_{H''}(S, \hat{\phi}).$$

Soit enfin $\kappa'' \in C_c^\infty(U''(F)H''(F)\backslash G''(F))$. Généralisant la définition de 7.8, on pose

$$I_{\kappa''}(\theta'', \varphi) = \int_{U''(F)H''(F)\backslash G''(F)} I(\theta'', \varphi, g)\kappa''(g)dg.$$

Cette intégrale est à support compact. Le but de la section est d'exprimer $I_{\kappa''}(\theta'', \varphi)$ à l'aide de la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ de φ, quand φ est à support dans ω''.

9.2 Première transformation

Soit Ξ l'élément de $\mathfrak{g}''(F)$ qui annule W'' et vérifie $\Xi v_{i+1} = \xi_i v_i$ pour tout $i = 0, ..., r-1$. Remarquons que l'on a $\Xi v_0 = -2\nu_0\xi_0 e_{-1}$, où $\nu_0 = q(v_0)$, $\Xi v_{-i} = -\xi_i v_{-i-1}$ pour $i = 1, ..., r-1$ et $\Xi v_{-r} = 0$. On a aussi $\xi(N) =< \Xi, N >$ pour tout $N \in \mathfrak{u}''(F)$.

Posons $\Lambda_0 = \{c(v_0, v); v \in W''\}$. Cet espace est l'orthogonal de $\mathfrak{h}''(F)$ dans $\mathfrak{g}_0''(F)$. La forme bilinéaire $< ., . >$ est non dégénérée sur Λ_0. Posons $\Sigma = \mathfrak{a}(F) \oplus \Lambda_0 \oplus \mathfrak{u}''(F)$. On munit les deux premiers espaces de la mesure autoduale. On a implicitement fixé une mesure sur $U''(F)$ dans le paragraphe précédent, dont le choix n'importe pas. On en déduit une mesure sur $\mathfrak{u}''(F)$, puis sur Σ.

Lemme. *Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}''(F))$ et tout $Y \in \mathfrak{h}''(F)$, on a l'égalité*

$$(\varphi^\xi)\hat{}(Y) = \int_\Sigma \hat{\varphi}(\Xi + Y + X)dX.$$

Preuve. Introduisons le groupe unipotent $\bar{\mathfrak{u}}''$ opposé à $\mathfrak{u}''$. Les espaces $\bar{\mathfrak{u}}''(F)$ et $\mathfrak{u}''(F)$ sont en dualité. La mesure sur le second espace se dualise en une mesure sur le premier et la transformation de Fourier échange $C_c^\infty(\mathfrak{u}''(F))$ et $C_c^\infty(\bar{\mathfrak{u}}''(F))$. On a l'égalité

$$\mathfrak{g}'' = \bar{\mathfrak{u}}'' \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'' \oplus \Lambda_0 \oplus \mathfrak{u}''.$$

Par linéarité, on peut supposer que

$$\varphi = \varphi_{\bar{\mathfrak{u}}''(F)} \otimes \varphi_{\mathfrak{a}(F)} \otimes \varphi_{\mathfrak{h}''(F)} \otimes \varphi_{\Lambda_0} \otimes \varphi_{\mathfrak{u}''(F)},$$

où, pour chaque espace E figurant en indice, $\varphi_E \in C_c^\infty(E)$. On a

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_{\mathfrak{u}''(F)} \otimes \hat{\varphi}_{\mathfrak{a}(F)} \otimes \hat{\varphi}_{\mathfrak{h}''(F)} \otimes \hat{\varphi}_{\Lambda_0} \otimes \hat{\varphi}_{\bar{\mathfrak{u}}''(F)}.$$

Pour $Y\in\mathfrak{h}''(F)$, on calcule

$$\varphi^{\xi}(Y)=\varphi_{\bar{\mathfrak{u}}''(F)}(0)\varphi_{\mathfrak{a}(F)}(0)\varphi_{\mathfrak{h}''(F)}(Y)\varphi_{\Lambda_0}(0)\hat{\varphi}_{\mathfrak{u}''(F)}(\Xi),$$

$$(\varphi^{\xi})\hat{}(Y)=\varphi_{\bar{\mathfrak{u}}''(F)}(0)\varphi_{\mathfrak{a}(F)}(0)\hat{\varphi}_{\mathfrak{h}''(F)}(Y)\varphi_{\Lambda_0}(0)\hat{\varphi}_{\mathfrak{u}''(F)}(\Xi),$$

$$\int_{\Sigma}\hat{\varphi}(\Xi+Y+X)dX=\hat{\varphi}_{\mathfrak{u}''(F)}(\Xi)\hat{\varphi}_{\mathfrak{h}''(F)}(Y)\int_{\Sigma}\hat{\varphi}_{\mathfrak{a}(F)}\otimes\hat{\varphi}_{\Lambda_0}\otimes\hat{\varphi}_{\bar{\mathfrak{u}}''(F)}(X)dX,$$

$$=\hat{\varphi}_{\mathfrak{u}''(F)}(\Xi)\hat{\varphi}_{\mathfrak{h}''(F)}(Y)\varphi_{\mathfrak{a}(F)}(0)\varphi_{\Lambda_0}(0)\varphi_{\bar{\mathfrak{u}}''(F)}(0).$$

Le lemme résulte de la comparaison des égalités ci-dessus. □

9.3 Description de l'espace affine $\Xi+S+\Sigma$

Notons $\Lambda_{\mathfrak{u}''}$ le sous-espace de $\mathfrak{u}''(F)$ engendré par les éléments $c(v_i,v_{i+1})$ pour $i=0,...,r-1$. Si d est impair ou si $r=0$, on pose $\Lambda=\Lambda_0\oplus\Lambda_{\mathfrak{u}''}$. Supposons d pair, donc $dim(W'')$ impair. Alors S, agissant dans W'', a un noyau de dimension 1. On fixe un élément non nul w_S de ce noyau et on note W''_S son orthogonal dans W''. Supposons de plus $r>0$. On pose

$$\Lambda_{0,S}=\{c(v_0,v);v\in W''_S\},$$

$$\Lambda=\Lambda_{0,S}\oplus Fc(w_S,v_r)\oplus\Lambda_{\mathfrak{u}''}.$$

Dans les deux cas, Λ est un sous-espace de Σ. Puisque Σ et Λ sont des espaces vectoriels sur F,on peut les considérer comme les ensembles de points sur F de variétés sur $\bar{F}$ que, dans ce paragraphe, on note encore Σ et Λ.

Lemme. *L'espace affine $\Xi+S+\Sigma$ est stable par conjugaison par U''. L'application*

$$\begin{array}{ccc}U''\times(\Xi+S+\Lambda) & \to & \Xi+S+\Sigma\\ (u,X) & \mapsto & u^{-1}Xu\end{array}$$

est un isomorphisme de variétés algébriques.

Preuve. L'annulateur de Σ dans $\mathfrak{g}''$ est l'espace $\mathfrak{h}''\oplus\mathfrak{u}''$. Pour prouver la première assertion, il suffit de prouver que, pour $u\in U''$, $X\in\Sigma$ et $Y\in\mathfrak{h}''\oplus\mathfrak{u}''$, on a l'égalité

$$trace(u(\Xi+S+X)u^{-1}Y)=trace((\Xi+S)Y),$$

ou encore

$$trace((\Xi+S+X)u^{-1}Yu)=trace((\Xi+S)Y).$$

Posons $u^{-1}Yu=Y+N$. On a $N\in\mathfrak{u}''$ et

$$trace(u(\Xi+S+X)u^{-1}Y)=trace((\Xi+S)Y)+trace(\Xi N)+trace(XY)+trace((S+X)N).$$

Les deux derniers termes sont nuls : ce sont des traces d'éléments de $\mathfrak{u}''$. Il faut montrer que $trace(\Xi N)=0$, ou encore $\xi(N)=0$. Il suffit pour cela de prouver que $q(Nv_i,v_{-i-1})=0$ pour $i=0,...,r-1$. Mais $u-1$ et Y appartiennent à l'algèbre de Lie du radical unipotent du sous-groupe parabolique de $GL(V'')$ qui conserve le drapeau

$$Fv_r\subset Fv_r\oplus Fv_{r-1}\subset...\subset Fv_r\oplus...\oplus F_{v_0}.$$

Donc Nv_i appartient au sous-espace engendré par les v_j pour $j \geq i+2$. Donc $q(Nv_i, v_{-i-1}) = 0$, ce qui prouve la première assertion de l'énoncé.

Si $r = 0$, on a $\Lambda = \Sigma$, $U'' = \{1\}$ et la seconde assertion est tautologique. Supposons $r > 0$. Introduisons le sous-groupe parabolique P_2 de G'' qui conserve le sous-espace totalement isotrope Z_+, sa composante de Lévi M_2 qui conserve Z_+ et Z_- et son radical unipotent U_2. Le groupe M_2 s'identifie à $GL(Z_+) \times G''_0$. Notons U_4 le centre de U_2. Les groupes U_4 et U_2/U_4 sont abéliens. Par l'application $(v, v') \mapsto exp(c(v, v'))$, ils s'identifient respectivement à $\bigwedge^2(Z_+)$ et $Hom(V''_0, Z_+)$. Ce dernier espace se décompose en $Hom(W'', Z^+) \oplus Hom(D, Z^+)$. On note U_3 le sous-groupe de U_2 tel que U_3/U_4 s'identifie à $Hom(W'', Z_+)$ et U_D celui tel que U_D/U_4 s'identifie à $Hom(D, Z_+)$. On pose $U_1 = U''$, $U_5 = \{1\}$. Remarquons que l'on a les inclusions $U_2 \subset U'' \subset P_2$. On a donc la chaîne de sous-groupes

$$U_5 \subset U_4 \subset U_3 \subset U_2 \subset U_1,$$

et chacun de ces sous-groupes est distingué dans U_1. Posons $\mathfrak{r} = \{c(v_{-1}, v); v \in Z_+\}$. C'est un sous-espace de $\mathfrak{u}''$. Définissons les espaces

$$\Sigma_1 = \Sigma = \mathfrak{a} \oplus \Lambda_0 \oplus \mathfrak{u}_1;$$

$$\Sigma_2 = \Lambda_0 \oplus \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{u}_2;$$

$$\Sigma_3 = \Lambda_0 \oplus \mathfrak{u}_2;$$

$$\Sigma_4 = \begin{cases} \Lambda_0 \oplus \mathfrak{u}_D, & \text{si } d \text{ est impair,} \\ \Lambda_{0,S} \oplus \bar{F}c(w_S, v_r) \oplus \mathfrak{u}_D, & \text{si } d \text{ est pair;} \end{cases}$$

$$\Sigma_5 = \Lambda.$$

On a les inclusions

$$\Sigma_5 \subset \Sigma_4 \subset \Sigma_3 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma_1.$$

Pour $i = 2, ..., 4$, Σ_i est l'ensemble des éléments $X \in \Sigma_{i-1}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) si $i = 2$, $Xv_j = 0$ pour $j = 2, ..., r$;

(2) si $i = 3$, $Xv_1 = 0$;

(3) si $i = 4$ et d est impair, $X(W'') \subset Z_+ \oplus D$; si $i = 4$ et d est pair, $X(W''_S) \subset Z_+ \oplus D$ et $X(w_S) \in \bar{F}v_r$.

On a

(4) pour $i = 1, 2, 3$, les ensembles Σ_i et $S + \Sigma_i$ sont stables par conjugaison par U_1 ; pour $i = 4, 5$, les ensembles Σ_i et $S + \Sigma_i$ sont stables par conjugaison par U_4 ; l'ensemble Σ_4 est stable par conjugaison par U_2.

Posons $M'' = M \cap G''$. En général, si E est un sous-ensemble de $\mathfrak{m}''$, $E \oplus \mathfrak{u}_1$ est invariant par conjugaison par U_1. Si E est un sous-ensemble de $\mathfrak{g}''_0$, $E \oplus \mathfrak{u}_2$ est stable par conjugaison par U_1. Si E est un sous-ensemble de $\mathfrak{g}''_0 \oplus \mathfrak{u}_1$, E est stable par conjugaison par U_4. On en déduit que Σ_1, $S + \Sigma_1$, Σ_3 et $S + \Sigma_3$ sont stables par conjugaison par U_1, et Σ_4, $S + \Sigma_4$, Σ_5 et $S + \Sigma_5$ sont stables par conjugaison par U_4. On a $\Sigma_2 = \Sigma_3 \oplus \mathfrak{r}$. L'ensemble Σ_3 est stable par conjugaison par U_1. Pour prouver que Σ_2 l'est aussi, il suffit de prouver que, pour $u \in U_1$ et $X \in \mathfrak{r}$, on a $u^{-1}Xu \in \Sigma_2$. Il est clair que cet élément appartient à $\mathfrak{u}_1$, donc à Σ_1. On doit montrer qu'il vérifie la condition (1). C'est clair puisque u conserve le sous-espace de base $(v_j)_{j=2,...,r}$ tandis que X annule ce sous-espace. Le même raisonnement s'applique à l'ensemble $S + \Sigma_2$. Soient $u \in U_2$ et $X \in \Sigma_4$. Puisque Σ_3 est stable par conjugaison par U_1, on $u^{-1}Xu \in \Sigma_3$. Pour prouver que cet élément appartient à Σ_4, on doit montrer qu'il vérifie (3). Soit $w \in W''$. On a $uw \in w+Z_+$, puis $Xuw = Xw$ car X annule Z_+. On a $Xw \in Z_+ \oplus D$ car $X \in \Sigma_4$. Or u^{-1} conserve cet espace, donc $u^{-1}Xuw \in Z_+ \oplus D$. Si d est pair, on a $Xw_S \in \bar{F}v_r$ et u^{-1} conserve cette droite, donc aussi $u^{-1}Xuw_S \in \bar{F}v_r$. Cela prouve (4).

On va montrer

(5) pour $i = 1, ..., 4$, l'ensemble $\Xi + S + \Sigma_i$ est stable par conjugaison par U_i.

Pour $i = 1$, c'est la première assertion de l'énoncé. Supposons $i \geq 2$. On sait déjà par (4) que $S+\Sigma_i$ est stable par conjugaison par U_i. On doit donc prouver que, pour $u \in U_i$, on a $(u^{-1}\Xi u-\Xi) \in \Sigma_i$. En raisonnant par récurrence sur i, on peut supposer que l'on a en tout cas $(u^{-1}\Xi u-\Xi) \in \Sigma_{i-1}$ (pour $i = 2$, cette hypothèse résulte de la première assertion de l'énoncé). On doit montrer que cet élément vérifie les conditions (1), resp. (2), (3), si $i = 2$, resp. $i = 3, 4$. Supposons $i = 2$. Soit $j = 2, ..., r$. On a $uv_j = v_j$ et $u^{-1}v_{j-1} = v_{j-1}$ par définition de U_2. On a aussi $\Xi v_j = \xi_{j-1}v_{j-1}$ et on déduit l'égalité $(u^{-1}\Xi u - \Xi)v_j = 0$ que l'on cherchait à prouver. Supposons $i = 3$. On a $uv_1 = v_1$, $\Xi v_1 = \xi_0 v_0$, $u^{-1}v_0 = v_0$ par définition de U_3, d'où encore l'assertion. Supposons $i = 4$. Pour $w \in W''$, on a $uw = w$ et $\Xi w = 0$. Donc $(u^{-1}\Xi u - \Xi)w = 0$ et $u^{-1}\Xi u$ vérifie la condition requise. Cela démontre (5).

Grâce à (5), pour $i = 1, ..., 4$, on peut former le quotient $U_i \times_{U_{i+1}} \Sigma_{i+1}$ de $U_i \times \Sigma_{i+1}$ par la relation d'équivalence $(u, X) \equiv (u', X')$ si et seulement s'il existe $v \in U_{i+1}$ tel que $(u', X') = (uv, v^{-1}Xv)$. On va montrer que

(6) l'application

$$\begin{array}{ccc} U_i \times (\Xi + S + \Sigma_{i+1}) & \to & \Xi + S + \Sigma_i \\ (u, X) & \mapsto & u^{-1}Xu \end{array}$$

se descend en un isomorphisme de $U_i \times_{U_{i+1}} \Sigma_{i+1}$ sur $\Xi + S + \Sigma_i$.

Supposons $i = 1$. Posons $U_B = U_1 \cap M_2$. Ce groupe s'identifie au radical unipotent du sous-groupe de Borel B de $GL(Z_+)$ qui conserve le drapeau

$$Fv_r \subset Fv_r \oplus Fv_{r-1} \subset ... \subset Fv_r \oplus ... \oplus Fv_1.$$

L'application produit de $U_B \times U_2$ sur U_1 est un isomorphisme. Il suffit de prouver que l'application

$$\begin{array}{ccc} U_B \times (\Xi + S + \Sigma_2) & \to & \Xi + S + \Sigma_1 \\ (u, X) & \mapsto & u^{-1}Xu \end{array}$$

est un isomorphisme. On a $\Sigma_1 = \mathfrak{b} \oplus \Sigma_3$, $\Sigma_2 = \mathfrak{r} \oplus \Sigma_3$ et $\mathfrak{r}$ est le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{b}$ dont seuls les termes de la dernière colonne sont non nuls. Définissons $\underline{\Xi} \in \mathfrak{g}''$ par $\underline{\Xi}v_j = \xi_{j-1}v_{j-1}$ pour $j = 2, ..., r$, $\underline{\Xi}v_1 = 0$ et $\underline{\Xi}$ annule V''_0. On a $\underline{\Xi} \in End(Z_+) \subset \mathfrak{m}_2$. Pour $u \in U_B$, l'image de $u-1$ est contenu dans le sous-espace de V'' engendré par les vecteurs v_j pour $j = 2, ..., r$ et v_{-j} pour $j = 1, ..., r-1$. L'élément $\Xi - \underline{\Xi}$ annule cet espace. Son image est contenue dans le plan engendré par v_0 et v_{-1}, lequel est annulé par $u^{-1} - 1$. On en déduit que $u^{-1}\Xi u - \Xi = u^{-1}\underline{\Xi}u - \underline{\Xi}$. On est ramené à prouver que l'application

$$\begin{array}{ccc} U_B \times (\underline{\Xi} + \mathfrak{r}) & \to & \underline{\Xi} + \mathfrak{b} \\ (u, X) & \mapsto & u^{-1}Xu \end{array}$$

est un isomorphisme. Tout se passe dans $End(Z_+)$. L'assertion est bien connue et se prouve en filtrant U_B de la façon habituelle.

Supposons $i = 2$. L'application

$$\begin{array}{ccc} Hom(D, Z_+) \times U_3 & \to & U_2 \\ (Y, u) & \mapsto & exp(Y)u \end{array}$$

est un isomorphisme. On est ramené à prouver que l'application

$$\begin{array}{ccc} Hom(D, Z_+) \times (\Xi + S + \Sigma_3) & \to & \Xi + S + \Sigma_2 \\ (Y, X) & \mapsto & exp(-Y)Xexp(Y) \end{array}$$

est un isomorphisme. D'après (4), $S+\Sigma_3$ est stable par conjugaison par $exp(Y)$ pour tout $Y \in Hom(D, Z_+)$. Cela nous ramène à prouver que l'application de $Hom(D, Z_+)$ dans $\mathfrak{r} = \Sigma_2/\Sigma_3$ qui, à $Y \in Hom(D, Z_+)$, associe l'image dans Σ_2/Σ_3 de $exp(-Y)\Xi exp(Y) - \Xi$, est un isomorphisme. L'espace $\mathfrak{r}$ s'identifie à Z_+ par $X \mapsto Xv_1$. Il s'agit donc de montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} Hom(D, Z_+) & \to & Z_+ \\ Y & \mapsto & (exp(-Y)\Xi exp(Y) - \Xi)v_1 \end{array}$$

est un isomorphisme. On a $exp(Y)v_1 = v_1$, $\Xi v_1 = \xi_0 v_0$, $exp(-Y)v_0 = -Yv_0 + v_0$. L'application est donc $Y \mapsto -Yv_0$, qui est bien un isomorphisme.

Supposons $i = 3$. L'application

$$\begin{array}{ccc} Hom(W'', Z_+) \times U_4 & \to & U_3 \\ (Y, u) & \mapsto & exp(Y)u \end{array}$$

est un isomorphisme. D'après (4), l'ensemble Σ_4 est invariant par conjugaison par U_2. Comme dans le cas $i = 2$, on est ramené à prouver que l'application de $Hom(W'', Z_+)$ dans Σ_3/Σ_4 qui, à $Y \in Hom(W'', Z_+)$ associe l'image dans Σ_3/Σ_4 de $exp(-Y)(\Xi + S)exp(Y) - \Xi - S$, est un isomorphisme. Supposons d impair. Notons $proj_{Z_+}$ la projection de V'' sur Z_+ de noyau $V_0'' \oplus Z_-$. Alors Σ_3/Σ_4 s'identifie à $Hom(W'', Z_+)$ par l'application qui à $X \in \Sigma_3$ associe la restriction à W'' de $proj_{Z_+} \circ X$. Soit $w \in W''$. On a $exp(Y)w = w + Yw$, $Sexp(Y)w = Sw$, $exp(-Y)Sexp(Y)w = Sw - YSw$, $\Xi w = 0$, $\Xi exp(Y)w = \Xi Yw$. Ce dernier élément appartient à l'espace $Z_{+,0}$ de base $(v_j)_{j=0,\dots,r-1}$. Puisque Y annule $Z_{+,0}$, on a $exp(-Y)\Xi Yw = \Xi Yw$. Donc

$$proj_{Z_+}((exp(-Y)(\Xi + S)exp(Y) - \Xi - S)w) = proj_{Z_+}(\Xi Yw - YSw).$$

On a introduit ci-dessus un élément $\underline{\Xi}$. On a $proj_{Z_+} \circ \Xi = \underline{\Xi}$ sur Z_+. La formule ci-dessus devient

$$proj_{Z_+}((exp(-Y)(\Xi + S)exp(Y) - \Xi - S)w) = (\underline{\Xi}Y - YS)w,$$

et on est ramené à prouver que l'application $Y \mapsto \underline{\Xi}Y - YS$ de $Hom(W'', Z_+)$ dans lui-même est un isomorphisme. Pour $k = 0, ..., r$, introduisons le sous-espace Z_+^k de Z_+ de base $(v_j)_{j=1,\dots,k}$. L'espace $Hom(W'', Z_+)$ est filtré par les $Hom(W'', Z_+^k)$. L'application précédente respecte cette filtration et l'application du gradué qui s'en déduit est la même que celle déduite de $Y \mapsto YS$. Cette dernière est un isomorphisme puisque les valeurs propres de S agissant dans W'' sont non nulles. Supposons maintenant d pair. Notons $proj_{Z_{+,0}}$ la projection de V'' sur $Z_{+,0}$ de noyau $Fv_r \oplus W'' \oplus Z_-$. Alors Σ_3/Σ_4 s'identifie à $Hom(W''_S, Z_+) \oplus Hom(\bar{F}w_S, Z_{+,0})$ par l'application qui, à $X \in \Sigma_3$ associe la somme de la restriction à W''_S de $proj_{Z_+} \circ X$ et de la restriction à Fw_S de $proj_{Z_{+,0}} \circ X$. Soit $Y \in Hom(W'', Z_+)$, que l'on décompose en $Y = Y_1 + Y_2$ avec $Y_1 \in Hom(W''_S, Z_+)$ et $Y_2 \in Hom(\bar{F}w_S, Z_+)$. On vérifie comme ci-dessus que l'image de $exp(-Y)(\Xi+S)exp(Y) - \Xi - S$ dans Σ_3/Σ_4 est la somme de la restriction à W''_S de $\underline{\Xi}Y_1 - Y_1S$ et de $\underline{\Xi}Y_2$. Parce que les valeurs propres de S dans W''_S sont non nulles, l'application $Y_1 \mapsto \underline{\Xi}Y_1 - Y_1$ est un isomorphisme pour la même raison que ci-dessus. L'application $Y_2 \mapsto \Xi Y_1$ est un isomorphisme car Ξ se restreint en un isomorphisme de Z_+ sur $Z_{+,0}$.

Supposons $i = 4$. Grâce à (4), on est encore ramené à prouver que l'application de $\mathfrak{u}_4$ dans Σ_4/Σ_5 qui, à $Y \in \mathfrak{u}_4$, associe l'image de $exp(-Y)\Xi exp(Y)$ dans Σ_4/Σ_5, est un isomorphisme. L'espace $\mathfrak{u}_4$, resp. $\mathfrak{u}_D$, $\Lambda_{\mathfrak{u}''}$, a pour base les $c(v_j, v_k)$ pour $1 \leq j < k \leq r$, resp. pour $0 \leq j < k \leq r$, pour $0 \leq j < k = j+1 \leq r$. L'injection de $\mathfrak{u}_D$ dans Σ_4 se quotiente en un isomorphisme de $\mathfrak{u}_D/\Lambda_{\mathfrak{u}''}$ sur Σ_4/Σ_5. Un calcul simple montre que l'application qui nous intéresse s'identifie à l'application $\tau : \mathfrak{u}_4 \to \mathfrak{u}_D/\Lambda_{\mathfrak{u}''}$ ainsi définie : pour $1 \leq j < k \leq r$, $\tau(c(v_j, v_k))$ est l'image dans $\mathfrak{u}_D/\Lambda_{\mathfrak{u}''}$ de $c(v_j, v_{k-1}) - c(v_{j-1}, v_k)$. Pour $l \in \{0, ..., r\}$ notons E_l le sous-espace de $\mathfrak{u}_D$ engendré par les $c(v_j, v_k$ tels que $0 \leq j < k \leq l + j \leq r$. L'espace $\mathfrak{u}_D/\Lambda_{\mathfrak{u}''}$ est filtré par les espaces E_l/E_1. L'espace $\mathfrak{u}_4$ est filtré par les espaces $E_{l-1} \cap \mathfrak{u}_4$. On vérifie que τ est compatible avec ces filtrations et que l'application graduée qui s'en déduit est un isomorphisme. Cela achève la preuve de (6).

En appliquant (6) successivement pour $i = 1, ..., 4$, on obtient la seconde assertion de l'énoncé. $\square$

9.4 Polynôme caractéristique

On introduit un système hyperbolique maximal $(w_{\pm j})_{j=1,...,m}$ de $W'' \otimes_F \bar{F}$ formé de vecteurs propres pour S. On note s_j la valeur propre de S sur w_j, pour $j > 0$. Si d est impair, resp. pair, $(w_{\pm j})_{j=1,...,m}$ est une base de $W'' \otimes_F \bar{F}$, resp. $W''_S \otimes_F \bar{F}$. Si d est pair, on pose $\nu_S = q(w_S)$. On introduit des coordonnées sur Λ en écrivant un élément $X \in \Lambda$ sous la forme suivante :

- si d est impair,

$$X = c(v_0, \sum_{j=\pm 1,...,\pm m} z_j w_j) + \sum_{i=0,...r-1} \lambda_i c(v_i, v_{i+1});$$

-si d est pair et $r > 0$,

$$X = c(v_0, \sum_{j=\pm 1,...,\pm m} z_j w_j) + z_0 c(w_S, v_r) + \sum_{i=0,...r-1} \lambda_i c(v_i, v_{i+1});$$

- si d est pair et $r = 0$,

$$X = c(v_0, z_0 w_S + \sum_{j=\pm 1,...,\pm m} z_j w_j).$$

Notons R_S le polynôme caractéristique de S agissant dans W''. On a donc

$$R_S(T) = \begin{cases} \prod_{j=1,...,m}(T^2 - s_j^2), & \text{si } d \text{ est impair,} \\ T\prod_{j=1,...,m}(T^2 - s_j^2), & \text{si } d \text{ est pair.} \end{cases}$$

Pour $X \in \mathfrak{g}''$, on note P_X le polynôme caractéristique de X agissant dans V''.

Lemme. *Soit $X \in \Lambda$, auquel on associe des coordonnées comme ci-dessus. On a les égalités suivantes :*

- si d est impair,

$$P_{\Xi+S+X}(T) = T^{2r+1}R_S(T) + \sum_{j=1,...,m} 4\nu_0 z_j z_{-j} \frac{R_S(T)T^{2r+1}}{T^2 - s_j^2}$$

$$+\sum_{i=0,\dots,r-1}(-1)^{i+1}4\nu_0 R_S(T)T^{2r-1-2i}\lambda_i\xi_i\prod_{i'=0,\dots,i-1}\xi_{i'}^2;$$

- si d est pair et $r>0$,

$$P_{\Xi+S+X}(T)=T^{2r+1}R_S(T)+\sum_{j=1,\dots,m}4\nu_0 z_j z_{-j}\frac{R_S(T)T^{2r+1}}{T^2-s_j^2}$$

$$+(-1)^r 4\nu_S\nu_0 z_0^2\frac{R_S(T)}{T}(\prod_{i=0,\dots,r-1}\xi_i^2)+\sum_{i=0,\dots,r-1}(-1)^{i+1}4\nu_0 R_S(T)T^{2r-1-2i}\lambda_i\xi_i\prod_{i'=0,\dots,i-1}\xi_{i'}^2;$$

- si d est pair et $r=0$,

$$P_{\Xi+S+X}(T)=TR_S(T)+\sum_{j=1,\dots,m}4\nu_0 z_j z_{-j}\frac{R_S(T)T}{T^2-s_j^2}+4\nu_S\nu_0 z_0^2\frac{R_S(T)}{T}.$$

Preuve. On écrit l'élément $\Xi+S+X$ comme une matrice. Les méthodes usuelles de développement selon les lignes ou les colonnes permettent d'exprimer son déterminant comme une somme de termes aisés à calculer et d'un déterminant analogue à celui de départ mais associé à des valeurs de r ou m strictement inférieures. En raisonnant par récurrence, on obtient l'assertion. On renonce à rédiger davantage la preuve. Indiquons simplement la forme de la matrice dans deux exemples.

Supposons $m=2$, $r=2$ et d est impair. On choisit pour base ordonnée de V'' la famille $v_2, v_1, w_2, w_1, v_0, w_{-1}, w_{-2}, v_{-1}, v_{-2}$. Dans cette base, la matrice de $\Xi+S+X$ est

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\
\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 2\nu_0\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1\\
0 & 0 & s_2 & 0 & 2\nu_0 z_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & s_1 & 2\nu_0 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \xi_0 & -z_{-2} & -z_{-1} & 0 & -z_1 & -z_2 & -\lambda_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu_0 z_{-1} & -s_1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu_0 z_{-2} & 0 & -s_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -2\nu_0\xi_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_1 & 0
\end{pmatrix}$$

Supposons $m=2$, $r=2$ et d est pair. On choisit pour base ordonnée de V'' la famille $v_2, v_1, w_2, w_1, w_S, v_0, w_{-1}, w_{-2}, v_{-1}, v_{-2}$. Dans cette base, la matrice de $\Xi+S+X$ est

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu_S z_0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\
\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu_0\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1\\
0 & 0 & s_2 & 0 & 0 & 2\nu_0 z_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & s_1 & 0 & 2\nu_0 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_0\\
0 & \xi_0 & -z_{-2} & -z_{-1} & 0 & 0 & -z_1 & -z_2 & -\lambda_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu_0 z_{-1} & -s_1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu_0 z_{-2} & 0 & -s_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\nu_0\xi_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_1 & 0
\end{pmatrix}$$

□

Remarquons que les termes $z_j z_{-j}$, λ_i et z_0^2 dans le cas où d est pair sont déterminés par $P_{\Xi+S+X}$. On a en particulier

$$(1) \qquad z_j z_{-j} = \frac{P_{\Xi+S+X}(s_j)}{4\nu_0 s_j^{1+2r} R_{S,j}(s_j)}$$

pour $j = 1, ...m$, où $R_{S,j}(T) = \frac{R_S(T)}{T^2 - s_j^2}$,

$$(2) \qquad z_0^2 = \begin{cases} \frac{P_{\Xi+S+X}(0)}{(-1)^r 4\nu_S \nu_0 R_{S,0}(0) \prod_{i=0,...,r-1} \xi_i^2}, & \text{si } r > 0, \\ \frac{P_{\Xi+S+X}(0)}{4\nu_S \nu_0 R_{S,0}(0)}, & , \text{ si } r = 0, \end{cases}$$

où $R_{S,0}(T) = \frac{R_S(T)}{T}$. Posons $d'' = dim(V'')$ et notons $Pol_{d''}$ l'espace des polynômes de degré d'', à coefficients dans F, de coefficient dominant égal à 1 et ne contenant que des puissances de l'indéterminée T de même parité que d''. C'est exactement l'espace des polynômes caractéristiques des éléments de $\mathfrak{g}''(F)$. Introduisons le sous-ensemble $Pol_{d''}^S$ formés des polynômes P tels que

P est le polynôme caractéristique d'un élément de $Y \in \mathfrak{g}''_{reg}(F)$;

$P(s_j) \neq 0$ pour tout $j = 1, ..., m$ et $P(0) \neq 0$ si d est pair.

C'est un ouvert de Zariski non vide de $Pol_{d''}$. Notons Λ^S le sous-ensemble des $X \in \Lambda$ tels que $\Xi + S + X \in \mathfrak{g}''_{reg}(F)$, $z_j \neq 0$ pour tout $j \in \{\pm 1, ..., \pm m\}$ et de plus, si d est pair, $z_0 \neq 0$. C'est exactement l'image réciproque de $Pol_{d''}^S$ dans Λ par l'application $X \mapsto P_{\Xi+S+X}$. Donc Λ^S est un ouvert de Zariski non vide de Λ. Les formules du lemme montrent que l'application précédente restreinte à Λ^S est une application F-analytique surjective et partout submersive de Λ^S sur $Pol_{d''}^S$.

9.5 Orbites dans $\Xi + S + \Lambda$

Notons Σ^S le sous-ensemble de Σ tel que l'image de $U''(F) \times (\Xi + S + \Lambda^S)$ par l'isomorphisme du lemme 9.3 soit $\Xi + S + \Sigma^S$

Lemme. *Le groupe $H''_S(F)U''(F)$ agit par conjugaison dans $\Xi+S+\Sigma^S$ et cette action est libre. Deux éléments de $\Xi + S + \Sigma^S$ sont conjugués par un élément de G'' si et seulement s'ils le sont par un élément de $H''_S(F)U''(F)$.*

Preuve. Soient $Y \in \Xi + S + \Sigma^S$ et $g \in H''_S(F)U''(F)$ tels que $g^{-1}Yg = Y$. Par définition de Σ^S, on peut écrire $Y = u^{-1}Y'u$, avec $u \in U''(F)$ et $Y' \in \Xi + S + \Lambda^S$. Alors $ug^{-1}u^{-1}Y'ugu^{-1} = Y'$. Quitte à remplacer Y par Y' et g par ugu^{-1}, on est ramené au cas où $Y \in \Xi + S + \Lambda^S$. On peut écrire $g = tu$, avec $t \in H''_S(F)$ et $u \in U''(F)$. La conjugaison par t fixe $\Xi+S$ et conserve Λ. Plus précisément, introduisons des coordonnées sur Λ comme en 9.4. L'élément t agit par homothétie sur chaque droite $\bar{F}w_j$, pour $j = \pm 1, ... \pm m$. Pour $j > 0$, on note t_j la valeur propre associée. Alors la conjugaison par t laisse inchangées les coordonnées λ_i et z_0 dans le cas où d est pair. Elle agit sur les coordonnées restantes par

$$(1) \qquad (z_r, ..., z_1, z_{-1}, ..., z_{-r}) \mapsto (t_r z_r, ..., t_1 z_1, t_1^{-1} z_{-1}, ..., t_r^{-1} z_{-r}).$$

Posons $Y' = t^{-1}Yt$. Alors Y et Y' sont deux éléments de $\Xi+S+\Lambda$ qui sont conjugués par l'élément $u \in U''(F)$. Le lemme 9.3 entraîne que $u = 1$ et $Y = Y'$. Ecrivons $Y = \Xi+S+X$, avec $X \in \Lambda^S$. Les coordonnées z_j de X sont toutes non nulles et la formule ci-dessus montre que X ne peut être fixé par t que si tous les t_j valent 1, autrement dit $t = 1$. Donc $g = tu = 1$ et cela démontre la première assertion de l'énoncé.

Comme ci-dessus, on peut remplacer dans la seconde assertion l'ensemble $\Xi + S + \Sigma^S$ par $\Xi + S + \Lambda^S$. Soient $X, \underline{X} \in \Lambda^S$, notons comme en 9.4 les coordonnées de X et notons par des lettres soulignées celles de $\underline{X}$. Supposons $\Xi + S + X$ et $\Xi + S + \underline{X}$ conjugués par un élément de G''. Alors $P_{\Xi+S+X} = P_{\Xi+S+\underline{X}}$. D'après les remarques du paragraphe précédent, on a $z_j z_{-j} = \underline{z}_j \underline{z}_{-j}$ pour tout $j = 1, ..., m$, $\lambda_i = \underline{\lambda}_i$ pour tout $i = 0, ..., r-1$ et $z_0^2 = \underline{z}_0^2$ si d est pair. Supposons d'abord d impair. La formule (1) ci-dessus montre qu'il existe un unique $t \in H''_S(\bar{F})$ tel que $t^{-1}Xt = \underline{X}$. L'unicité de t et le fait que X et $\underline{X}$ sont tous deux définis sur F entraînent que $t \in H''_S(F)$. Alors $\Xi + S + X$ et $\Xi + S + \underline{X}$ sont conjugués par un élément de $H''_S(F)$, ce que l'on voulait démontrer. Supposons maintenant d pair. On trouve comme dans le cas d impair un unique élément $t \in H''_S(F)$ tel que $t^{-1}Xt = \underline{X}$ ou $\underline{X}'$, ce dernier élément ayant les mêmes coordonnées que $\underline{X}$, à l'exception de $\underline{z}_0$ qui est changé en $-\underline{z}_0$. On a alors soit $t^{-1}(\Xi + S + X)t = \Xi + S + \underline{X}$, soit $t^{-1}(\Xi + S + X)t = \Xi + S + \underline{X}'$. Il suffit pour conclure de prouver que cette deuxième possibilité ne se produit pas. Considérons l'élément δ du groupe orthogonal $G''^+(F)$ qui agit par multiplication par -1 sur la droite Fw_S et qui fixe tout élément de l'orthogonal de cette droite. On vérifie que $\delta^{-1}(\Xi + S + \underline{X})\delta = \Xi + S + \underline{X}'$. On sait par hypothèse que $\Xi + S + X$ est conjugué à $\Xi + S + \underline{X}$ par un élément de G''. S'il était conjugué par t à $\Xi + S + \underline{X}'$, les deux éléments $\Xi + S + \underline{X}$ et $\Xi + S + \underline{X}'$ seraient conjugués par un élément de G'' et l'ensemble $\delta G''$ couperait le centralisateur de $\Xi + S + \underline{X}$ dans G''^+. Or ce centralisateur est contenu dans G'' parce que $\Xi + S + \underline{X}$ est régulier et n'a pas de valeur propre nulle (cela parce que son polynôme caractéristique n'est pas nul en 0). Puisque $\delta \notin G''$, on obtient une contradiction qui achève la preuve. $\square$

9.6 Mesures autoduales

Considérons l'application

$$\mathfrak{g}''_{reg}(F) \to \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}(G'')} (\mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}''_{reg}(F))/W(G'', T)$$

qui, à un élément de $\mathfrak{g}''_{reg}(F)$, associe l'unique élément de l'ensemble d'arrivée qui lui est conjugué par un élément de $G''(F)$. Elle est analytique. Pour tout sous-tore maximal T de G'', on note $\mathfrak{t}(F)^S$ le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{t}(F)$ qui sont conjugués à un élément de $\Xi + S + \Sigma^S$ par un élément de $G(F)$. L'application précédente se restreint en une application analytique

$$(1) \qquad \Xi + S + \Sigma^S \to \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}(G'')} \mathfrak{t}(F)^S / W(G'', T).$$

Elle est surjective. Si on note $(\Xi + S + \Sigma^S)/H''_S(F)U''(F)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $H''_S(F)U''(F)$ dans $\Xi + S + \Sigma^S$, le lemme précédent montre qu'elle se quotiente en une bijection

$$(2) \qquad (\Xi + S + \Sigma^S)/H''_S(F)U''(F) \to \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}(G'')} \mathfrak{t}(F)^S / W(G'', T).$$

On munit l'ensemble de départ de la mesure quotient des mesures déjà fixées sur $\Xi+S+\Sigma^S$ et $H''_S(F)U''(F)$. Les remarques de la fin du paragraphe 9.4 montrent que l'application (1) est partout submersive. La mesure sur l'ensemble de départ de (2) s'identifie donc à une mesure régulière sur l'ensemble d'arrivée. Pour tout $T \in \mathcal{T}(G'')$, l'ensemble $\mathfrak{t}(F)^S$ est ainsi muni d'une mesure que l'on note $d_\Sigma Y$. Rappelons que l'on note simplement dY la mesure autoduale.

Lemme. *Pour tout $T \in \mathcal{T}(G'')$, on a l'égalité $d_\Sigma Y = D^{H''}(S)^{-1/2}D^{G''}(Y)^{1/2}dY$ en tout point $Y \in \mathfrak{t}(F)^S$.*

Preuve. Fixons $T \in \mathcal{T}(G'')$. Un objet tel que $\mathfrak{t}(F)^S$ ou $\mathfrak{t}(F)^S/W(G'',T)$ n'a pas de structure algébrique naturelle. Commençons par algébriser la situation. On considère Σ^S comme une variété algébrique (un ouvert d'un espace vectoriel). Notons $\bar{W}(G'',T) = Norm_{G''}(T)/T$, introduisons l'ensemble $\mathfrak{t}^S$ des éléments de $\mathfrak{t}$ qui sont conjugués à un élément de $\Xi + S + \Sigma^S$ puis le quotient $\mathfrak{t}/\bar{W}(G'',T)$. Ce sont des variétés algébriques. Il y a une application algébrique

$$(3) \qquad \tau : \Xi + S + \Sigma^S \to \mathfrak{t}^S/\bar{W}(G'',T)$$

qui se quotiente en un isomorphisme

$$(4) \qquad (\Xi + S + \Sigma^S)/H''_S U'' \to \mathfrak{t}^S/\bar{W}(G'',T).$$

La structure algébrique sur $\mathfrak{t}^S/\bar{W}(G'',T)$ détermine une structure analytique sur $(\mathfrak{t}^S/\bar{W}(G'',T))(F)$. Il y a une application naturelle

$$\iota : \mathfrak{t}(F)^S \to (\mathfrak{t}^S/\bar{W}(G'',T))(F),$$

qui est localement un isomorphisme de variétés analytiques. Cela va nous permettre de remplacer l'application (2) par son avatar algébrique (4).

Rappelons que, une fois le corps F muni de la mesure autoduale, pour toute variété algébrique lisse $\mathcal{X}$ définie sur F, une forme différentielle δ sur $\mathcal{X}$, définie sur F et de degré maximal, définit une mesure $|\delta|_F$ sur $\mathcal{X}(F)$. Plus généralement, ne supposons plus δ définie sur F. Il existe une fonction algébrique α sur $\mathcal{X}$, non nulle et telle que $\alpha\delta$ soit définie sur F. Etendons la valeur absolue de F à $\bar{F}$. On définit une mesure $|\delta|_F$ sur $\mathcal{X}(F)$ par

$$|\delta|_F = |\alpha|_F^{-1}|\alpha\delta|_F.$$

Cela ne dépend pas du choix de α.En particulier, soit E un sous-F-espace de $\mathfrak{g}''(F)$ sur lequel la forme $< .,. >$ est non dégénérée. Fixons une base $(e_k)_{k=1,...l}$ de E sur F, notons Q la matrice $l \times l$ telle que $Q_{k,k'} =< e_k, e_{k'} >$ et écrivons tout élément de E sous la forme $e = \sum_{k=1,...,l} x_k e_k$. Définissons la forme différentielle $\delta = \bigwedge_{k=1,...,l} dx_k$. On vérifie que la mesure autoduale sur E est

$$(5) \qquad |det(Q)|_F^{-1/2}|\delta|_F.$$

Supposons maintenant que $(e_k)_{k=1,...,l}$ est une base de $E \otimes_F \bar{F}$. La forme différentielle $\delta = \bigwedge_{k=1,...,l} dx_k$ n'est pas, en général, définie sur F mais il existe $\alpha \in \bar{F}^\times$ tel que $\alpha\delta$ le soit et on peut définir $|\delta|_F$ comme plus haut. Un simple calcul de changement de bases montre que la mesure autoduale sur E est encore donnée par la formule (5).

Choisissons des formes linéaires $Y \mapsto y_k$, $k = 1, ..., l$, sur $\mathfrak{t}$ de sorte que, pour un élément $Y \in \mathfrak{t}$ en position générale, l'action de Y dans V'' ait pour valeurs propres non nulles $(\pm y_k)_{k=1,...,l}$. Avec des notations évidentes, on a l'égalité

$$< Y, Y' >= \frac{1}{2}trace(YY') = \sum_{k=1,...,l} y_k y'_k.$$

Définissons la forme différentielle $\delta_{\mathfrak{t}}$ sur $\mathfrak{t}$ par $\delta_{\mathfrak{t}} = \bigwedge_{k=1,...,l} dy_k$. La formule (5) montre que la mesure autoduale sur $\mathfrak{t}(F)$ est $|\delta_{\mathfrak{t}}|_F$. Fixons un sous-ensemble positif de l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}''$. Pour $Y \in \mathfrak{t}$, posons

$$d^{G''}(Y) = \prod_{\alpha>0} \alpha(Y),$$

le produit étant pris sur cet ensemble de racines. On vérifie que la forme différentielle $d^{G''}\delta_{\mathfrak{t}}$ se descend en une forme différentielle sur $\mathfrak{t}/\bar{W}(G'', T)$, que l'on note $\delta_{\mathfrak{t}/W}$. Evidemment, la mesure autoduale sur $\mathfrak{t}(F)$ est

$$(6) \qquad dY = |d^{G''}(Y)|_F^{-1} |\iota^*(\delta_{\mathfrak{t}/W})(Y)|_F = D^{G''}(Y)^{-1/2} |\iota^*(\delta_{\mathfrak{t}/W})(Y)|_F.$$

Introduisons comme en 9.4 un système hyperbolique maximal $(w_{\pm j})_{j=1,...,m}$ de $W'' \otimes_F \bar{F}$ formé de vecteurs propres pour S, donc aussi pour H''_S. Pour $t \in H''_S$ et $j = 1, ..., m$, notons t_j la valeur propre de t sur w_j. Définissons $\delta_{H''_S} = (\prod_{j=1,...,m} t_j)^{-1} \bigwedge_{j=1,...,m} dt_j$. La formule (5), remontée au groupe par l'exponentielle, montre que $|\delta_{H''_S}|_F$ est la mesure que nous avons fixée sur $H''_S(F)$. Fixons une base de $\mathfrak{u}''(F)$ sur F et prenons pour $\delta_{\mathfrak{u}''}$ le produit, dans un ordre fixé, des différentielles des coordonnées relativement à cette base. On a implicitement fixé une mesure sur $\mathfrak{u}''(F)$, mais notre problème est insensible au choix de cette mesure. On peut donc supposer que cette mesure est $|\delta_{\mathfrak{u}''}|_F$. Via l'exponentielle, $\delta_{\mathfrak{u}''}$ définit une forme différentielle $\delta_{U''}$ sur U'' et la mesure de Haar sur $U''(F)$ n'est autre que $|\delta_{U''}|_F$. Introduisons des coordonnées sur Λ_0 (qui est vu ici comme une variété algébrique sur F) en écrivant tout élément X de cet ensemble sous la forme

- si d est impair, $X = c(v_0, \sum_{j=\pm 1,...,\pm m} z_j w_j)$;
- si d est pair, $X = c(v_0, z_0 w_S + \sum_{j=\pm 1,...,\pm m} z_j w_j)$.

Remarquons que l'éventuel terme z_0 n'est pas le même qu'en 9.4. Puisqu'on a ici étendu les scalaires, on peut supposer $q(v_0) = 1$ et, si d est pair, $q(w_S) = -1$. On vérifie alors que

$$< X, X' >= \frac{1}{2}trace(XX') = [z_0 z'_0] - \sum_{\pm 1,...,\pm m} z_j z'_{-j},$$

où, ici comme dans la suite, on indique symboliquement entre crochets les termes qui n'existent que dans le cas d pair. On pose

$$\delta_{\Lambda_0} = \bigwedge_{j=[0],\pm 1,...,\pm m} dz_j.$$

D'après (5), $|\delta_{\Lambda_0}|_F$ est la mesure autoduale sur Λ_0. Notons $(a_i)_{i=1,...,r}$ les valeurs propres sur les vecteurs $(v_i)_{i=1,...,r}$ d'un élément de $\mathfrak{a}$. Définissons $\delta_{\mathfrak{a}} = \bigwedge_{i=1,...,r} da_i$. D'après (5), $|\delta_{\mathfrak{a}}|_F$ est la mesure autoduale sur $\mathfrak{a}_F$. Rappelons que $\Sigma = \mathfrak{a} \oplus \Lambda_0 \oplus \mathfrak{u}''$. On définit la forme différentielle $\underline{\delta}$ sur $\Xi + S + \Sigma^S$ qui, via la translation par $\Xi + S$, correspond à la forme différentielle $\delta_{\mathfrak{a}} \wedge \delta_{\Lambda_0} \wedge \delta_{\mathfrak{u}''}$ sur Σ^S. Alors $|\underline{\delta}|_F$ est la mesure que nous avons fixée sur $\Xi + S + \Sigma^S$. On vérifie que $\underline{\delta}$ est invariante par conjugaison par $H''_S U''$. Il y a alors une forme différentielle $\bar{\delta}$ sur le quotient $(\Xi + S + \Sigma^S)/H''_S U''$ de sorte que, via le choix de sections locales, on ait l'égalité $\underline{\delta} = \delta_{H''_S} \wedge \delta_{U''} \wedge \bar{\delta}$. Par (4), $\bar{\delta}$ correspond à une forme $\beta\delta_{\mathfrak{t}/W}$ sur $\mathfrak{t}/\bar{W}(G'', T)$, où β est une fonction algébrique sur cette variété. Remontons β en une fonction sur $\mathfrak{t}$. En tenant compte de (6), on voit que l'on a l'égalité

$$(7) \qquad d_\Sigma(Y) = D^{G''}(Y)^{1/2} |\beta(Y)|_F dY$$

pour tout $Y \in \mathfrak{t}(F)^S$.

Il s'agit de calculer la fonction β. Supposons d'abord $r = 0$. Dans ce cas $\Xi = 0$ et $U'' = \{1\}$. Introduisons le sous-ensemble Λ_1 des éléments $X \in \Lambda_0$ écrits comme plus haut, tels que $z_{-j} = 1$ pour $j = 1, ..., m$. L'action $(t, S + X) \mapsto S + X' = t(S + X)t^{-1}$ de H''_S sur $S + \Sigma$ s'écrit, avec les systèmes de coordonnées que l'on a introduits,

$$((t_j)_{j=1,...,m}, (z_j)_{j=[0],\pm1,...,\pm m}) \mapsto (z'_j)_{j=[0],\pm1,...,\pm m},$$

où $z'_j = t_j z_j$ et $z'_{-j} = t_j^{-1} z_{-j}$ pour $j = 1, ..., m$, et $z'_0 = z_0$ dans le cas d pair. De cette action se déduit un isomorphisme de $H''_S \times S + \Lambda_1$ sur l'ensemble des $S + X \in S + \Lambda_0$ dont toutes les coordonnées z_{-j} sont non nulles, lequel contient $S + \Sigma^S$. On peut identifier $(S + \Sigma^S)/H''_S$ avec un ouvert dense de Λ_1 et on vérifie que, modulo cette identification, $\bar{\delta} = \wedge_{j=[0],1,...,m} dz_j$. Soient $X \in \Lambda_1$ de coordonnées $(z_j)_{j=[0],1,...,m}$ et $Y \in \mathfrak{t}$ de coordonnées $(y_k)_{k=1,...,l}$. On suppose que l'image de $S + X$ par (4) est l'image de Y dans $\mathfrak{t}/\bar{W}(G'', T)$. Supposons pour fixer les idées d pair. On a $l = m + 1$ et

$$P_{S+X}(T) = P_Y(T) = \prod_{k=1,...,l} (T^2 - y_k^2).$$

Les formules 9.4(1) et 9.4(2) deviennent

$$z_j = \frac{\prod_{k=1,...,l}(s_j^2 - y_k^2)}{2s_j^2 \prod_{j'=1,...,m; j' \neq j}(s_j^2 - s_{j'}^2)}$$

pour $j \neq 0$ et

$$z_0^2 = \frac{\prod_{k=1,...,l} y_k^2}{\prod_{k=1,...,m} s_j^2}.$$

Cette dernière relation signifie qu'il existe $\epsilon \in \{\pm1\}$ tel que

$$z_0 = \epsilon \frac{\prod_{k=1,...,l} y_k}{\prod_{k=1,...,m} s_j}.$$

En dérivant de façon usuelle, on obtient

$$dz_j = -s_j^{-2} \prod_{j'=1,...,m; j' \neq j} (s_j^2 - s_{j'}^2)^{-1} \sum_{k=1,...,l} A_{j,k} dy_k$$

pour $j \neq 0$ et

$$dz_0 = \epsilon \prod_{k=1,...,m} s_j^{-1} \sum_{k=1,...,l} A_{0,k} dy_k,$$

où

$$A_{j,k} = \begin{cases} y_k \prod_{k'=1,...,l; k' \neq k}(s_j^2 - y_{k'}^2), & \text{si } j \neq 0, \\ \prod_{k'=1,...,l; k' \neq k} y_{k'}, & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\bigwedge_{j=0,...,m} dz_j = (-1)^m \epsilon \prod_{j=1,...,m} s_j^{-3} \prod_{j,j'=1,...,m; j\neq j'} (s_j^2 - s_{j'}^2)^{-1} det(A) \bigwedge_{k=1,...,l} dy_k,$$

où A est la matrice carrée de coefficients $A_{j,k}$. Posons $s_0 = 0$ et

$$B_{j,k} = \prod_{k'=1,...,l; k'\neq k} (s_j^2 - y_{k'}^2).$$

On a

$$A_{j,k} = \begin{cases} y_k B_{j,k}, & \text{si } j \neq 0, \\ (-1)^m y_k (\prod_{k'=1,...,l} y_{k'}^{-1}) B_{0,k}, & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

Donc $det(A) = (-1)^m det(B)$. On laisse au lecteur le calcul élémentaire du déterminant de B, qui vaut

$$det(B) = (-1)^{l(l-1)/2} \prod_{0\leq j<j'\leq m} (s_j^2 - s_{j'}^2) \prod_{1\leq k<k'\leq l} (y_k^2 - y_{k'}^2)$$

$$= (-1)^{m+l(l-1)/2} \prod_{j=1,...,m} s_j^2 \prod_{1\leq j<j'\leq m} (s_j^2 - s_{j'}^2) \prod_{1\leq k<k'\leq l} (y_k^2 - y_{k'}^2).$$

D'où

$$(8) \qquad \bigwedge_{j=0,...,m} dz_j = \epsilon' d^{H''}(S)^{-1} \prod_{1\leq k<k'\leq l} (y_k^2 - y_{k'}^2) \bigwedge_{k=1,...,l} dy_k,$$

où $\epsilon' = \pm 1$ et

$$d^{H''}(S) = \prod_{j=1,...,m} s_j \prod_{1\leq j'<j\leq m} (s_j^2 - s_{j'}^2).$$

Remarquons que le produit intervenant dans (8) est égal à $\pm d^{G''}(Y)$. Alors (8) devient

$$\bar{\delta}(S+X) = \epsilon'' d^{H''}(S)^{-1} \delta_{\mathfrak{t}/W}(Y),$$

avec $\epsilon'' = \pm\epsilon$, d'où $\beta(Y) = \epsilon'' d^{H''}(S)^{-1}$. Puisque $|d^{H''}(S)|_F = D^{H''}(S)^{1/2}$, la formule (7) devient celle de l'énoncé.

Passons au cas où $r \neq 0$. Quitte à conjuguer T par un élément de G'', on peut supposer $A \subset T$. On a alors $T = AT_0$ où T_0 est un sous-tore maximal de G''_0. On peut supposer que les coordonnées que l'on a introduites sur $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}$ sont compatibles. Précisément, soit $Y \in \mathfrak{t}$, écrivons $Y = Y_{\mathfrak{a}} + Y_0$, avec $Y_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$ et $Y_0 \in \mathfrak{t}_0$, et introduisons les coordonnées $(y_k)_{k=1,...,l}$ de Y et $(a_i)_{i=1,...,r}$ de $Y_{\mathfrak{a}}$. On peut supposer $a_i = y_i$ pour tout $i = 1, ..., r$. En se plaçant dans G''_0, on définit la variété $\mathfrak{t}_0/\bar{W}(G''_0, T_0)$ munie de sa forme différentielle $\delta_{\mathfrak{t}_0/W}$, la forme différentielle $\bar{\delta}_0$ sur $(S+\Lambda_0)/H''_S$ et la fonction β_0 telle que l'application

$$(S+\Lambda_0)/H''_S \to \mathfrak{t}_0/W$$

identifie $\bar{\delta}_0$ à $\beta_0 \delta_{\mathfrak{t}_0/W}$, du moins sur un ouvert dense. Le calcul précédent s'applique : β_0 est constante, de valeur $\epsilon_0 d^{H''}(S)^{-1}$, où $\epsilon_0 \in \{\pm 1\}$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
U'' \times (\Xi + S + \mathfrak{a} + \Lambda_0) & \xrightarrow{f_1} & \Xi + S + \Sigma \\
f_2 \downarrow & & \downarrow \\
(S+\Lambda_0) \times \mathfrak{a} & \to & (\Xi + S + \Sigma)/U'' \\
\downarrow & & \downarrow \\
(S+\Lambda_0)/H''_S \times \mathfrak{a} & \to & (\Xi + S + \Sigma)/U''H''_S \\
f_3 \downarrow & & \downarrow \\
(\mathfrak{t}_0/\bar{W}(G''_0, T_0)) \times \mathfrak{a} & \xrightarrow{f_4} & \mathfrak{t}/\bar{W}(G'', T)
\end{array}$$

où $f_1(u'', \Xi + S + X_{\mathfrak{a}} + X_{\Lambda_0}) = u''^{-1}(\Xi + S + X_{\mathfrak{a}} + X_{\Lambda_0})u''$ et $f_2(u'', \Xi + S + X_{\mathfrak{a}} + X_{\Lambda_0}) = (S + X_{\Lambda_0}, X_{\mathfrak{a}})$, les autres applications étant évidentes. Ce diagramme est commutatif. Pour le voir, soient $u'' \in U''$, $X_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$ et $X_{\Lambda_0} \in \Lambda_0$. Soit $Y_0 \in \mathfrak{t}_0$ tel que la partie semi-simple de $S + X_{\Lambda_0}$ soit conjuguée à Y_0 par un élément de G''_0. Soit $Y \in \mathfrak{t}$ tel que la partie semi-simple de $\Xi + S + X_{\mathfrak{a}} + X_{\Lambda_0}$ soit conjuguée à Y par un élément de G''. L'image de $(u'', \Xi+S+X_{\mathfrak{a}}+X_{\Lambda_0})$ par le chemin sud-ouest du diagramme est l'image de $Y_0 + X_{\mathfrak{a}}$ dans $\mathfrak{t}/\bar{W}(G'', T)$. Son image par le chemin nord-est est l'image de Y dans cet ensemble. Mais $S + X_{\mathfrak{a}} + X_{\Lambda_0}$ appartient à $\mathfrak{m}''$ tandis que Ξ appartient à $\bar{\mathfrak{u}}''$. Alors les parties semi-simples de $\Xi + S + X_{\mathfrak{a}} + X_{\Lambda_0}$ et de $S + X_{\mathfrak{a}} + X_{\Lambda_0}$ sont conjuguées par un élément de G''. Donc Y est conjugué à $Y_0 + X_{\mathfrak{a}}$ et ces deux éléments ont même image dans $\mathfrak{t}/\bar{W}(G'', T)$. Cela démontre la commutativité du diagramme. Ce raisonnement et le lemme 9.5 montrent que les flèches horizontales du diagramme sont des isomorphismes locaux, au moins si l'on se restreint à des ouverts denses de chaque variété, ce que l'on fait, ici et dans la suite. Du diagramme se déduit une application

$$(U'' \times (\Xi + S + \mathfrak{a} + \Lambda_0))/U''H''_S \xrightarrow{g} \mathfrak{t}/\bar{W}(G'', T),$$

qui est toujours un isomorphisme local. Munissons $\Xi + S + \mathfrak{a} + \Lambda_0 \simeq \mathfrak{a} + \Lambda_0$ de la différentielle $\boldsymbol{\delta} = \delta_{\mathfrak{a}} \wedge \delta_{\Lambda_0}$. On en déduit une forme différentielle $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ sur l'espace de départ de g. Calculons $g^*(\delta_{\mathfrak{t}/W})$ en utilisant le chemin sud-ouest du diagramme. D'après les définitions, $f_4^*(\delta_{\mathfrak{t}/W}) = \pm d^{G''}(d^{G''_0})^{-1}\delta_{\mathfrak{t}_0/W} \wedge \delta_{\mathfrak{a}}$. Puis $f_3^* f_4^*(\delta_{\mathfrak{t}/W}) = \pm\beta_0^{-1} d^{G''}(d^{G''_0})^{-1}\bar{\delta}_0 \wedge \delta_{\mathfrak{a}}$. Les deux applications verticales restantes identifient $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ à $\bar{\delta}_0 \wedge \delta_{\mathfrak{a}}$ et on obtient

$$(9) \qquad g^*(\delta_{\mathfrak{t}/W}) = \pm\beta_0^{-1} d^{G''}(d^{G''_0})^{-1}\bar{\boldsymbol{\delta}}.$$

Utilisons le chemin nord-est. Par la suite d'applications verticales, $\delta_{\mathfrak{t}/W}$ se relève en la forme $\beta^{-1}\underline{\delta}$ sur $\Xi + S + \Sigma$). Soit γ la fonction telle que $f_1^*(\underline{\delta}) = \gamma\delta_{U''} \wedge \boldsymbol{\delta}$. Alors

$$(10) \qquad g^*(\delta_{\mathfrak{t}/W}) = \pm\gamma\beta^{-1}\bar{\boldsymbol{\delta}}.$$

Soient $X_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$ et $X_{\Lambda_0} \in \Lambda_0$. Posons $X = S + X_{\mathfrak{a}} + X_{\Lambda_0}$. La différentielle de f_1 au point $(1, \Xi + X)$ se calcule aisément. C'est l'application

$$(11) \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{u}'' \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{f}_o) & \to & \Sigma = \mathfrak{a} + \mathfrak{f}_o + \mathfrak{u}'' \\ (N, X'_{\mathfrak{a}} + X'_{\Lambda_0}) & \mapsto & X'_{\mathfrak{a}} + X'_{\Lambda_0} - [N, \Xi + X] \end{array}$$

Parce que X appartient à $\mathfrak{m}''$ et Ξ à $\bar{\mathfrak{u}}''$, on peut trouver une base de $\mathfrak{u}''$ telle que l'application $N \mapsto [N, X]$ soit diagonale, tandis que l'application composée de $N \mapsto [N, \Xi]$ et de la projection sur $\mathfrak{u}''$ soit nilpotente supérieure. Le déterminant de l'application (11), c'est-à-dire $\gamma(X)$, est donc le même que celui de l'application $N \mapsto [N, X]$ de $\mathfrak{u}''$ dans lui-même. Celui-ci est égal à $\pm d^{G''}(X) d^{G''_0}(X)^{-1}$. En reportant cette valeur dans (10) et en comparant avec (9), on obtient $\beta = \pm\beta_0 = \pm\epsilon_0 d^{H''}(S)^{-1}$. Comme dans le cas $r = 0$, la formule (7) devient celle de l'énoncé. □

9.7 Sections locales

L'application (1) de 9.6 est analytique. Le lemme 9.3 et la preuve du lemme 9.5 montrent qu'elle est partout submersive. Pour tout $T \in \mathcal{T}(G'')$, on peut donc fixer une application localement analytique

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t}(F)^S & \to & \Xi + S + \Sigma^S \\ Y & \mapsto & Y_\Sigma \end{array}$$

de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Xi + S + \Sigma^S & \to & \mathfrak{t}(F)^S/W(G'',T) \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & \mathfrak{t}(F)^S & \end{array}$$

soit commutatif. Il existe une application $Y \mapsto \gamma_Y$ de $\mathfrak{t}(F)^S$ dans $T(F)\backslash G''(F)$, localement analytique, de sorte que $Y_\Sigma = \gamma_Y^{-1} Y \gamma_Y$. Mais l'application $G''(F) \to T(F)\backslash G''(F)$ admet elle-même des sections localement analytiques. On peut donc supposer que l'application $Y \mapsto \gamma_Y$ est localement analytique à valeurs dans $G''(F)$.

On va montrer

(1) soit ω_T un sous-ensemble compact de $\mathfrak{t}(F)$; on peut choisir l'application $Y \mapsto Y_\Sigma$ telle que l'image de $\mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$ soit contenue dans un sous-ensemble compact de $\Xi + S + \Lambda$.

D'après le lemme 9.3, on peut supposer que $Y_\Sigma \in \Xi + S + \Lambda^S$ pour tout $Y \in \mathfrak{t}(F)^S$. Soit $Y \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$, posons $Y_\Sigma = \Xi + S + X$ et introduisons les coordonnées de X comme en 9.4. Les coordonnées λ_i sont linéaires en les coefficients du polynôme caractéristique $P_Y(T)$, et sont donc bornées. De même, l'éventuelle coordonnée z_0 et les produits $z_j z_{-j}$, pour $j = 1, ..., m$, sont bornés. Montrons que l'on peut supposer chaque $z_{\pm j}$ borné. Considérons d'abord deux cas particuliers. Dans le premier, on suppose qu'il existe une extension F_1 de F de degré m et une extension quadratique F_2 de F_1 telle que $H''_S(F)$ soit le noyau de la norme de $F_2^\times$ dans $F_1^\times$. Dans ce cas, on peut identifier W'' à F_2 et l'action de $H''_S(F)$ sur W'' à la multiplication. Posons $w = \sum_{j=\pm 1, \ldots, \pm m} z_j w_j \in W'' = F_2$. En normalisant convenablement les vecteurs w_j, les coordonnées $z_{\pm j}$ sont les images de w par les différents plongements de F_2 dans $\bar{F}$. Alors ces coordonnées ont toutes la même valeur absolue. Puisque les produits $z_j z_{-j}$ sont bornés, chaque terme $z_{\pm j}$ l'est aussi. Dans le deuxième cas particulier, on considère une extension F_1 comme ci-dessus et on suppose que $H_S(F) = F_1^\times$. Dans ce cas, on peut identifier W'' à $F_1 \oplus F_1$ et l'action de $H''_S(F)$ sur W'' à l'application $(h, w_+ \oplus w_-) \mapsto h w_+ \oplus h^{-1} w_-$. Définissons w comme ci-dessus. On peut supposer que ses deux composantes w_+ et w_- sont respectivement égales à $\sum_{j=1,\ldots,m} z_j w_j$ et $\sum_{j=1,\ldots,m} z_{-j} w_{-j}$. Parce que X appartient à Λ^S, w_- est un élément non nul de F_1. Posons $h = w_- \in H''_S(F)$. On peut remplacer w par hw. Pour cet élément, les coordonnées z_{-j} sont toutes égales à 1 et on conclut encore que les autres coordonnées z_j sont bornées. Dans le cas général, on peut décomposer W'' en somme directe de sous-espaces et décomposer conformément H''_S en produit de tores de sorte que chaque composante soit de l'un des deux cas particuliers que l'on vient de considérer. On en déduit la propriété requise.

Supposons (1) vérifiée. En appliquant 2.3(1), on voit que l'on peut choisir l'application $Y \mapsto \gamma_Y$ de sorte qu'il existe $c > 0$ tels que

$$(2) \qquad \sigma(\gamma_Y) \leq c(1 + |log\, D^{G''}(Y)|)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$.

9.8 Calcul de $I_{\kappa''}(\theta'', \varphi)$

Revenons à la situation de 9.1 et supposons que φ est à support dans ω''. Soit $g \in G''(F)$. D'après l'hypothèse sur θ'', on a

$$I(\theta'', \varphi, g) = J_{H''}(S, ((^g\varphi)^\xi)\check{}\,) = D^{H''}(S)^{1/2} \int_{H''_S(F)\backslash H''(F)} ((^g\varphi)^\xi)\check{}\,(h^{-1}Sh)dh.$$

En utilisant le lemme 9.2, on obtient

$$I(\theta'',\varphi,g)=D^{H''}(S)^{1/2}\int_{H''_S(F)\backslash H''(F)}\int_{\Sigma}({}^g\varphi)\hat{}(\Xi+h^{-1}Sh+X)dX\,dh,$$

puis

$$(1)\qquad I_{\kappa''}(\theta'',\varphi)=D^{H''}(S)^{1/2}\int_{H''(F)U''(F)\backslash G''(F)}\int_{H''_S(F)\backslash H''(F)}$$
$$\int_{\Sigma}({}^g\varphi)\hat{}(\Xi+h^{-1}Sh+X)dX\,dh\kappa''(g)dg.$$

Remarquons que cette expression est absolument convergente : les trois intégrales sont à support compact. On transforme cette expression en

$$I_{\kappa''}(\theta'',\varphi)=D^{H''}(S)^{1/2}\int_{H''(F)U''(F)\backslash G''(F)}\int_{H''_S(F)\backslash H''(F)}\int_{\Sigma}({}^{hg}\varphi)\hat{}(\Xi+S+X)dX\,dh\kappa''(g)dg$$

$$=D^{H''}(S)^{1/2}\int_{H''_S(F)U''(F)\backslash G''(F)}\int_{\Sigma}({}^g\varphi)\hat{}(\Xi+S+X)dX\kappa''(g)dg.$$

Le lemme 9.6 nous permet de remplacer l'intégrale intérieure par

$$\sum_{T\in\mathcal{T}(G'')}|W(G'',T)|^{-1}\int_{H''_S(F)U''(F)}\int_{\mathfrak{t}(F)^S}({}^g\varphi)\hat{}(y^{-1}\gamma_Y^{-1}Y\gamma_Y y)D^{H''}(S)^{-1/2}D^{G''}(Y)^{1/2}dY\,dy$$

$$=\sum_{T\in\mathcal{T}(G'')}|W(G'',T)|^{-1}\int_{H''_S(F)U''(F)}\int_{\mathfrak{t}(F)^S}({}^{\gamma_Y yg}\varphi)\hat{}(Y)D^{H''}(S)^{-1/2}D^{G''}(Y)^{1/2}dY\,dy.$$

Un simple changement de variables conduit alors à l'égalité

$$I_{\kappa''}(\theta'',\varphi)=\sum_{T\in\mathcal{T}(G'')}|W(G'',T)|^{-1}\int_{\mathfrak{t}(F)^S}\int_{G''(F)}\hat{\varphi}(g^{-1}Yg)\kappa''(\gamma_Y^{-1}g)dgD^{G''}(Y)^{1/2}dY.$$

Pour $T\in\mathcal{T}(G'')$ et $Y\in\mathfrak{t}(F)^S$, définissons une fonction κ''_Y sur $G''(F)$ par

$$\kappa''_Y(g)=\nu(A_T)\int_{A_T(F)}\kappa''(\gamma_Y^{-1}ag)da.$$

Remarquons que cette expression ne dépend pas du choix de l'application $Y\mapsto\gamma_Y$: tout autre choix remplace γ_Y par $\gamma_Y y$, avec $y\in H''_S(F)U''(F)$, mais κ'' est invariante à gauche par ce groupe. On obtient :

$$(2)\qquad I_{\kappa''}(\theta'',\varphi)=\sum_{T\in\mathcal{T}(G'')}\nu(A_T)^{-1}|W(G'',T)|^{-1}$$
$$\int_{\mathfrak{t}(F)^S}\int_{A_T(F)\backslash G''(F)}\hat{\varphi}(g^{-1}Yg)\kappa''_Y(g)dgD^{G''}(Y)^{1/2}dY.$$

Les transformations que l'on a effectuées sont justifiées par la convergence absolue de l'expression (1) de départ.

10 Calcul de la limite $lim_{N\to\infty}I_{x,\omega,N}(\theta,f)$

10.1 Convergence d'une première expression

On se place dans la situation de 8.2. D'après la proposition 6.4 et le lemme 6.3(i), on peut fixer une famille finie $(Y_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de $\mathfrak{h}_{x,reg}(F)$ et une famille finie $(c_i)_{i=1,...,n}$ de nombres complexes de sorte que

$$\theta_{x,\omega}(X)=\sum_{i=1,...,n}c_i\hat{j}^{H_x}(Y_i,X)$$

pour tout $X\in\omega\cap\mathfrak{h}_{x,reg}(F)$. Formulons cette propriété différemment, en utilisant les notations introduites en 5.4 : pour $X\in\mathfrak{g}_x(F)$, on note $X=X'+X''$ la décomposition de X en somme d'un élément $X'\in\mathfrak{g}'_x(F)$ et d'un élément $X''\in\mathfrak{g}''(F)$. Il existe alors une famille finie $\mathcal{S}$ d'éléments de $\mathfrak{h}''_{reg}(F)$ et une famille finie $(\hat{j}_S)_{S\in\mathcal{S}}$ de fonctions définies presque partout sur $\mathfrak{h}'_x(F)$ de sorte que

$$\theta_{x,\omega}(X)=\sum_{S\in\mathcal{S}}\hat{j}_S(X')\hat{j}^{H''}(S,X'')$$

pour tout $X\in\omega\cap\mathfrak{h}_{x,reg}(F)$. Les éléments S sont les différentes projections Y''_i. La preuve du lemme 6.3(i) nous autorise à remplacer les Y_i par des éléments assez voisins. On peut donc supposer que le noyau de chaque S agissant dans W'' est de dimension au plus 1. Les fonctions $\hat{j}_S$ sont combinaisons linéaires de fonctions $X'\mapsto\hat{j}^{H'_x}(Y'_i,X')$ et héritent donc de leurs propriétés.

Rappelons que, par construction, on a l'égalité $H'_x=G'_x$. Pour $g\in G(F)$, on a

$$I_{x,\omega}(\theta,f,g)=\int_{\mathfrak{g}'_x(F)\times\mathfrak{h}''(F)}\theta_{x,\omega}(X)^g f^{\xi}_{x,\omega}(X)dX.$$

En utilisant la formule de Weyl pour l'intégrale sur $\mathfrak{g}'_x(F)$, on obtient

$$I_{x,\omega}(\theta,f,g)=\sum_{S\in\mathcal{S}}\sum_{T'\in\mathcal{T}(G'_x)}|W(G'_x,T')|^{-1}\int_{\mathfrak{t}'(F)}\hat{j}_S(X')D^{G'_x}(X')$$

$$\int_{T'(F)\backslash G'_x(F)}\int_{\mathfrak{h}''(F)}\hat{j}^{H''}(S,X'')^g f^{\xi}_{x,\omega}(g'^{-1}X'g'+X'')dX''\,dg'\,dX'.$$

D'où

$$I_{x,\omega,N}(\theta,f)=\sum_{S\in\mathcal{S}}\sum_{T'\in\mathcal{T}(G'_x)}|W(G'_x,T')|^{-1}\int_{\mathfrak{t}'(F)}\hat{j}_S(X')D^{G'_x}(X')$$

$$\int_{T'(F)H''(F)U_x(F)\backslash G(F)}\int_{\mathfrak{h}''(F)}\hat{j}^{H''}(S,X'')^g f^{\xi}_{x,\omega}(X'+X'')dX''\kappa_N(g)dg\,dX'.$$

On peut écrire les deux dernières intégrales ci-dessus sous la forme

$$\int_{T'(F)G''(F)\backslash G(F)}\int_{H''(F)U_x(F)\backslash G''(F)}\int_{\mathfrak{h}''(F)}\hat{j}^{H''}(S,X'')^{g''g}f^{\xi}_{x,\omega}(X'+X'')dX''\kappa_N(g''g)dg''\,dg.$$

Les deux intégrales intérieures sont égales à $I_{\kappa''}(\theta'', \varphi)$, où $\theta''(X'') = \hat{j}^{H''}(S, X'')$, $\varphi(X'') = {}^g f_{x,\omega}(X' + X'')$ et $\kappa''(g'') = \kappa_N(g''g)$. Utilisons la formule 9.8(2) qui calcule cette expression. La fonction $\hat{\varphi}$ qui y intervient est égale à ${}^g f^\sharp_{x,\omega}$, avec la notation de 5.4. Quelques remises en ordre conduisent alors à l'égalité

(1) $$I_{x,\omega,N}(\theta, f) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \sum_{T\in\mathcal{T}(G_x)} \nu(A_{T''})^{-1}|W(G_x, T)|^{-1} \int_{\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S} \hat{j}_S(X')D^{G'_x}(X')D^{G''}(X'')^{1/2}$$

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X' + X'')\kappa_{N,X''}(g)dg\, dX''\, dX',$$

où

$$\kappa_{N,X''}(g) = \nu(A_{T''}) \int_{A_{T''}(F)} \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} ag)da.$$

Ces manipulations formelles sont justifiées par le lemme ci-dessous. Pour tout $S \in \mathcal{S}$ et tout $T \in \mathcal{T}(G_x)$, fixons une famille finie $\mathcal{Q}_{S,T}$ de polynômes non nuls sur $\mathfrak{t}(F)$. Pour tout $\epsilon > 0$, notons $\mathfrak{t}(F)[S; \leq \epsilon]$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{t}(F)$ pour lesquels il existe $Q \in \mathcal{Q}_{S,T}$ tel que $|Q(X)|_F \leq \epsilon$, et notons $\mathfrak{t}(F)[S; > \epsilon]$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{t}(F)$ pour lesquels $|Q(X)|_F > \epsilon$ pour tout $Q \in \mathcal{Q}_{S,T}$. Notons $I_{N,\leq\epsilon}$, resp. $I_{N,>\epsilon}$, l'expression obtenue à partir de l'expression (1) en remplaçant les intégrales sur $\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S$ par les intégrales sur $(\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S) \cap \mathfrak{t}(F)[S; \leq \epsilon]$, resp. $(\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S) \cap \mathfrak{t}(F)[S; > \epsilon]$. On a évidemment l'égalité

$$I_{x,\omega,N}(\theta, f) = I_{N,\leq\epsilon} + I_{N,>\epsilon}.$$

Notons enfin $|I|_{x,\omega,N}(\theta, f)$ et $|I|_{N,\leq\epsilon}$ les expressions obtenues en remplaçant dans $I_{x,\omega,N}(\theta, f)$ (ou plus exactement dans l'expression (1)) et $I_{N,\leq\epsilon}$ toutes les fonctions par leurs valeurs absolues.

Lemme. *(i) Il existe $k \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tel que $|I|_{x,\omega,N}(\theta, f) \leq cN^k$ pour tout $N \geq 1$.*

(ii) Il existe un entier $b \geq 1$ et $c > 0$ tel que $|I|_{N,\leq N^{-b}} \leq cN^{-1}$ pour tout $N \geq 1$.

Preuve. Soit $S \in \mathcal{S}$. Notons $(\pm s_j)_{j=1,\dots,m}$ les valeurs propres non nulles de l'action de S sur W''. Pour $X'' \in \mathfrak{g}''(F)$, posons

$$Q_S(X'') = \begin{cases} \prod_{j=1,\dots,m} s_j^{-1}P_{X''}(s_j), & \text{si } d \text{ est impair} \\ \prod_{j=1,\dots,m} P_{X''}(s_j), & \text{si } d \text{ est pair.} \end{cases}$$

Certainement, Q_S est un polynôme non nul sur l'algèbre de Lie de tout sous-tore maximal de G''. Soient $T \in \mathcal{T}(G_x)$ et $\omega_{T''}$ un sous-ensemble compact de $\mathfrak{t}''(F)$. On va montrer

(2) il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que

$$\kappa_{N,X''}(g) \leq cN^k\sigma(g)^k(1 + |log|Q_S(X'')|_F|)^k(1 + |log\, D^{G''}(X'')|)^k$$

pour tout $X'' \in \mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_{T''}$, tout $g \in G(F)$ et tout $N \geq 1$.

Commençons par déduire l'énoncé de (2). On peut fixer $S \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{T}(G_x)$ et considérer l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S} |\hat{j}_S(X')|D^{G'_x}(X')D^{G''}(X'')^{1/2}$$

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} |{}^g f^\sharp_{x,\omega}(X'+X'')|\kappa_{N,X''}(g)dg\,dX''\,dX'.$$

Introduisons une notation imprécise mais commode. Soient deux nombres a et b dépendant de variables, ici N, g, X' et X''. On écrit $a << b$ pour dire qu'il existe $c > 0$ tel que, quelles que soient ces variables, on ait $a \leq cb$. D'après la définition de $\hat{j}_S$ et un résultat de Harish-Chandra ([HCvD] théorème 13), on a $|\hat{j}_S(X')| << D^{G'_x}(X')^{-1/2}$. D'après 3.1(5), on peut fixer un sous-ensemble compact $\Gamma \subset G(F)$ tel que ${}^g f^\sharp_{x,\omega} = 0$ si $g \notin G_x(F)\Gamma$. On peut donc fixer $\gamma \in \Gamma$ et remplacer l'intégrale sur $T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)$ par celle sur $T'(F)A_{T''}(F)\backslash G_x(F)\gamma$. On peut majorer $|{}^\gamma f^\sharp_{x,\omega}|$ par une combinaison linéaire de fonction $f' \otimes f''$ où $f' \in C_c^\infty(\mathfrak{g}'_x(F))$, $f'' \in C_c^\infty(\mathfrak{g}''(F))$ et f' et f'' sont à valeurs positives ou nulles. On est ramené à majorer

$$\int_{\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S} D^{G'_x}(X')^{1/2} D^{G''}(X'')^{1/2} \int_{T'(F)\backslash G'_x(F)}$$

$$\int_{A_{T''}(F)\backslash G''(F)} f'(g'^{-1}X'g')f''(g''^{-1}X''g'')\kappa_{N,X''}(g'g''\gamma)dg''\,dg'\,dX''\,dX'.$$

On peut fixer un sous-ensemble compact $\omega_{T''} \subset \mathfrak{t}''(F)$ tel que, pour tout g'', la fonction $X'' \mapsto f''(g''^{-1}X''g'')$ sur $\mathfrak{t}''(F)$ soit à support dans $\omega_{T''}$. Grâce à 2.3(1), on peut supposer que les g'' intervenant dans l'intégrale vérifient $\sigma(g'') << 1 + |log\, D^{G''}(X'')|$. Puisque $G'_x = H'_x \subset H$, on a $\kappa_{N,X''}(g'g''\gamma) = \kappa_{N,X''}(g''\gamma)$. En appliquant (2), on obtient $\kappa_{N,X''}(g'g''\gamma) << N^k\varphi(X'')$ où

$$\varphi(X'') = (1 + |log|Q_S(X'')|_F|)^k(1 + |log\, D^{G''}(X'')|)^{2k}.$$

L'expression à majorer devient

$$N^k \int_{\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S} D^{G'_x}(X')^{1/2} D^{G''}(X'')^{1/2} \int_{T'(F)\backslash G'_x(F)}$$

$$\int_{A_{T''}(F)\backslash G''(F)} f'(g'^{-1}X'g')f''(g''^{-1}X''g'')\varphi(X'')dg''\,dg'\,dX''\,dX'.$$

Elle est majorée par

$$N^k \int_{\mathfrak{t}(F)} J_{G_x}(X'+X'', f'\otimes f'')\varphi(X'')dX''\,dX'.$$

D'après Harish-Chandra, l'intégrale orbitale est bornée. Elle est aussi à support compact, ce qui nous conduit à majorer

$$N^k \int_{\omega_T} \varphi(X'')dX''\,dX',$$

où ω_T est un sous-ensemble compact de $\mathfrak{t}(F)$. Le lemme 2.4 nous dit que l'intégrale est convergente, ce qui entraîne la majoration du (i) de l'énoncé. Pour le (ii), on est de même conduit à majorer

$$N^k \int_{\omega_T\cap\mathfrak{t}(F)[S;\leq N^{-b}]} \varphi(X'')dX''\,dX'.$$

D'après l'inégalité de Schwartz, il suffit de majorer

$$N^k(\int_{\omega_T\cap\mathfrak{t}(F)[S;\leq N^{-b}]}dX)^{1/2}(\int_{\omega_T}\varphi(X'')^2dX''\,dX')^{1/2}.$$

Le dernier terme se majore comme ci-dessus. Pour $\epsilon>0$, on a

$$\int_{\omega_T\cap\mathfrak{t}(F)[S;\leq\epsilon]}dX\leq\sum_{Q\in\mathcal{Q}_{S,T}}mes(\{X\in\omega_T;|Q(X)|_F\leq\epsilon\}).$$

D'après [A5], lemme 7.1, il existe un réel $r>0$ tel que chacun de ces termes soit $<<\epsilon^r$. On en déduit une majoration

$$|I|_{N,\leq N^{-b}}<<N^{k-rb/2}.$$

En prenant $b>2(k+1)/r$, on obtient le (ii) de l'énoncé.

Prouvons (2). Remplaçons V par V'' dans les définitions de 7.2. On fixe un réseau spécial R'' de V'' de même que l'on a fixé R, on note K'' son stabilisateur dans $G''(F)$ et on définit une fonction κ''_N sur $G''(F)$. Posons

$$\kappa''_{N,X''}(1)=\nu(A_{T''})\int_{A_{T''}(F)}\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a)da.$$

On va montrer

(3) il existe un entier $k\in\mathbb{N}$ et $c>0$ tels que

$$\kappa''_{N,X''}(1)\leq cN^k(1+|log(|Q_S(X'')|_F)|)^k(1+|log\,D^{G''}(X'')|)^k$$

pour tout $X''\in\mathfrak{t}''(F)^S\cap\omega_{T''}$ et tout $N\geq1$.

Déduisons d'abord (2) de (3). Pour un réel $r>0$, posons $\kappa''_r=\kappa''_{N(r)}$, où $N(r)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à r. On a

(4) il existe $c>0$ tel que $\kappa_N(g''g)\leq\kappa''_{N+c\sigma(g)}(g'')$ pour tous $g\in G(F)$, $g''\in G''(F)$.

Ecrivons $g''=m''u''k''$, avec $m''\in M''(F)$, $u''\in U''(F)$, $k''\in K''$, puis $k''g=muk$, avec $m\in M(F)$, $u\in U(F)$, $k\in K$. On a $\kappa_N(g''g)=\kappa_N(m''m)$. Supposons ce terme non nul (donc égal à 1), décomposons m'' et m en $m''=a''g''_0$ et $m=ag_0$, où $a'',a\in A(F)$, $g''_0\in G''_0(F)$ et $g_0\in G_0(F)$. Alors $|val_F(a''_ia_i)|\leq N$ pour tout $i=1,...,r$ et $g_0^{-1}{g''_0}^{-1}v_0\in\varpi_F^{-N}R_0$. On a $\sigma(m)<<\sigma(g)$. Donc $|val_F(a_i)|<<\sigma(g)$ pour tout $i=1,...,r$ et $\sigma(g_0)<<\sigma(g)$. On en déduit d'abord qu'il existe $c_1>0$ tel que $|val_F(a''_i)|\leq N+c_1\sigma(g)$ pour tout $i=1,...,r$. Il existe $c_2>0$ tel que $g_0R_0\subset\varpi_F^{-N(c_2\sigma(g_0))}R_0$. Il existe $c_3\in\mathbb{N}$ tel que $R_0\cap V''\subset\varpi_F^{-c_3}R''_0$. Alors ${g''_0}^{-1}v_0\in\varpi_F^{-N'}R''_0$, où $N'\leq N+c_4\sigma(g)$, pour $c_4>0$ convenable. En prenant $c>c_1,c_4$, on voit que g'' vérifie les conditions requises pour que $\kappa''_{N+c\sigma(g)}(g'')=1$. Cela prouve (4).

En utilisant (4), on a

$$\kappa_{N,X''}(g)=\nu(A_{T''})\int_{A(T'')(F)}\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag)da$$

$$\leq\nu(A_{T''})\int_{A(T'')(F)}\kappa''_{N+c\sigma(g)}(\gamma_{X''}^{-1}a)da\leq\kappa''_{N+c\sigma(g),X''}(1).$$

La majoration (3) entraîne alors (2).

Prouvons maintenant (3). On suppose vérifiées les conditions (1) et (2) de 9.7 pour le compact $\omega_{T''}$. Soit $a \in A_{T''}(F)$ tel que $\kappa''_N(\gamma_{X''}^{-1}a) = 1$. Grâce à 7.2(1), on peut écrire $\gamma_{X''}^{-1}a = vhy$, avec $v \in U''(F)$, $h \in H''(F)$, $y \in G''(F)$ et $\sigma(y) \leq cN$. On a

$$(5) \qquad yX''y^{-1} = h^{-1}v^{-1}X''_\Sigma vh,$$

où $X''_\Sigma = \gamma_{X''}^{-1}X''\gamma_{X''}$. La condition imposée à y implique que $\sigma(yX''y^{-1}) << N$ (cf. 1.1 pour la définition de la fonction σ sur $\mathfrak{g}''(F)$). On a $h^{-1}v^{-1}X''_\Sigma vh \in \Xi + h^{-1}Sh + \Sigma$ et $h^{-1}Sh \in \mathfrak{h}''(F)$. Or $\mathfrak{h}''(F)$ et Σ sont en somme directe. Alors (5) entraîne que $\sigma(h^{-1}Sh) << N$. Donc il existe un entier $k > 0$ tel que $\sigma(h^{-1}\varpi_F^{kN}Sh) << 1$. En appliquant 2.3(1), on peut écrire $h = tz$, avec $t \in H''_S(F)$, $z \in H''(F)$ et

$$\sigma(z) << (1 + |log\, D^{H''}(\varpi_F^{kN}S)|) << N.$$

On peut récrire $vhy = tug$, avec $u \in U''(F)$ et $g = zy$, donc $\sigma(g) << N$. L'égalité (5) se récrit $gX''g^{-1} = u^{-1}Yu$, où $Y = t^{-1}X''_\Sigma t$. On a $\sigma(gX''g^{-1}) << N$. D'après la condition (1) de 9.7, Y appartient à $\Xi + S + \Lambda$. Le lemme 9.3 nous dit que u et Y dépendent algébriquement de $u^{-1}Yu$. Donc $\sigma(u) << N$ et $\sigma(Y) << N$. Posons $X''_\Sigma = \Xi + S + X$, $Y = \Xi + S + X^*$, introduisons les coordonnées de X et X^* comme en 9.4 (on affecte celles de X^* d'un exposant *) et, pour tout $j = 1, ..., m$, notons t_j la valeur propre de t sur w_j. On a $z_j^* = t_j^{-1}z_j$ et $z_{-j}^* = t_jz_{-j}$ pour tout $j = 1, ..., m$. La condition (1) de 9.7 et celle ci-dessus portant sur Y nous disent qu'il existe $c > 0$ tel que

$$val_F(z_j^*) \geq -cN,\ val_F(z_{-j}^*) \geq -cN,\ val_F(z_j) \geq -c,\ val_F(z_{-j}) \geq -c$$

pour tout j. On en déduit

$$|val_F(t_j)| \leq c(N+1) + val_F(z_jz_{-j}) \leq c(N + 2m - 1) + val_F(\prod_{j'=1,\ldots,m} z_{j'}z_{-j'}).$$

La formule 9.4(1) montre qu'il existe $c' > 0$ tel que le dernier terme soit majoré par $c'(1 + |log|Q_S(X'')|_F|)$. On en déduit $\sigma(t) << N + |log|Q_S(X'')|_F|$. Alors

$$\sigma(\gamma_{X''}^{-1}a) = \sigma(tug) << N + |log|Q_S(X'')|_F|.$$

En appliquant 9.7(2), on en déduit

$$\sigma(a) << N + |log(|Q_S(X'')|_F)| + |log\, D^{G''}(X'')|.$$

Le terme $\kappa''_{N,X''}(1)$ est borné par la mesure de l'ensemble des a vérifiant cette condition. Il est facile de montrer que, pour tout réel $r \geq 1$,

$$mes(\{a \in A_{T''}(F); \sigma(a) \leq r\}) << r^k,$$

où $k = dim(A_{T''})$. On en déduit

$$\kappa''_{N,X''}(1) << N^k(1 + |log|Q_S(X'')|_F|)^k(1 + |log\, D^{G''}(X'')|)^k,$$

ce qui prouve (3) et achève la démonstration. □

Pour tout $S \in \mathcal{S}$ et tout $T \in \mathcal{T}(G_x)$, on note $\mathcal{Q}_{S,T}$ la famille des trois polynômes sur $\mathfrak{t}(F)$ suivants

$$X \mapsto det(ad(X')_{|\mathfrak{g}'_x/\mathfrak{t}'}),\ X \mapsto det(ad(X'')_{|\mathfrak{g}''/\mathfrak{t}''}),\ X'' \mapsto Q_S(X'')$$

où Q_S a été défini ci-dessus. Appliqué à ces données, le (ii) du lemme nous fournit un entier b que l'on fixe. On pose

$$I^*_{x,\omega,N}(\theta,f)=I_{N,>N^{-b}}.$$

Le lemme entraîne que

$$lim_{N\to\infty}(I_{x,\omega,N}(\theta,f)-I^*_{x,\omega,N}(\theta,f))=0.$$

10.2 Commutant d'un tore

On fixe $T\in\mathcal{T}(G_x)$. Notons $M_\natural$ le commutant de $A_{T''}$ dans G. C'est un Lévi de G, qui contient G'. Notons V''_2 l'intersection des noyaux des actions de a dans V'', pour $a\in A_{T''}$.

Lemme. *On a l'égalité $A_{T''}=A_{M_\natural}$ sauf dans le cas où les conditions suivantes sont satisfaites : d est pair, W' est hyperbolique et de dimension 2, $V''_2=\{0\}$. Dans ce cas, on a $A_{M_\natural}=T'A_{T''}$.*

Preuve. Posons $V_2=W'\oplus V''_2$, notons V_1 son orthogonal dans V et G_1, resp. G_2 les groupes spéciaux orthogonaux de V_1, resp. V_2. L'espace V_2 est l'intersection des noyaux des actions de a dans V, pour $a\in A_{T''}$. Donc $M_\natural$ conserve V_2. Par conséquent, $M_\natural$ conserve aussi V_1, donc $M_\natural\subset G_2\times G_1$. Puisque $A_{T''}$ agit trivialement dans V_2, on a $A_{T''}\subset G_1$. Donc $M_\natural=G_2\times M_{1,\natural}$, où $M_{1,\natural}$ est le commutant de $A_{T''}$ dans G_1, puis $A_{M_\natural}=A_{G_2}\times A_{M_{1,\natural}}$. On a $V_1\subset V''$, donc $G_1\subset G''$. D'autre part T'' commute à $A_{T''}$, donc $T''\subset M_\natural$, donc $A_{M_\natural}$ commute à T''. Alors $A_{M_{1,\natural}}$ est contenu dans le commutant de T'' dans G''. Puisque T'' est un sous-tore maximal de G'', ce commutant est égal à T''. Donc $A_{M_{1,\natural}}\subset T''$, ce qui entraîne $A_{M_{1,\natural}}\subset A_{T''}$. L'inclusion opposée est immédiate puisque $A_{T''}$ est évidemment un tore déployé central dans $M_{1,\natural}$. Donc $A_{M_{1,\natural}}=A_{T''}$. On a $A_{G_2}=\{1\}$ sauf dans le cas où V_2 est hyperbolique de dimension 2. Supposons cette condition vérifiée. Puisque G_1 contient un sous-tore $A_{T''}$ qui agit sans point fixe non nul dans V, $dim(V_1)$ est paire et d aussi. Si $W'=\{0\}$, on a $G=G''$ et T'' est un tore maximal de G. Le même raisonnement que ci-dessus montre que $A_{M_\natural}\subset A_{T''}$ contrairement à l'hypothèse $A_{G_2}\neq\{1\}$. Donc $W'\neq\{0\}$. Puisque $dim(W')$ est paire et $V_2=W'\oplus V''_2$, on a $W'=V_2$ et $V''_2=\{0\}$. Inversement, si W' est hyperbolique de dimension 2 et $V''_2=\{0\}$, on a $G_2=G'$ et ce groupe est un tore déployé. Puisque T' est un sous-tore maximal de G', on a $T'=G'=A_{G_2}$ et la conclusion du lemme s'ensuit. □

10.3 Définitions combinatoires

Appelons cas exceptionnel celui de l'énoncé précédent. Supposons tout d'abord que l'on n'est pas dans ce cas et rappelons quelques définitions d'Arthur. Soit $\mathcal{Y}=(Y_{P_\natural})_{P_\natural\in\mathcal{P}(M_\natural)}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}_{M_\natural}$, $(G,M_\natural)$-orthogonale et positive. Pour $Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M_\natural)$, on note $\zeta\mapsto\sigma^Q_{M_\natural}(\zeta,\mathcal{Y})$ la fonction caractéristique dans $\mathcal{A}_{M_\natural}$ de la somme de $\mathcal{A}_L$ et de l'enveloppe convexe de la famille $(Y_{P_\natural})_{P_\natural\in\mathcal{P}(M_\natural);P_\natural\subset Q}$. On note τ_Q la fonction caractéristique dans $\mathcal{A}_{M_\natural}$ de la somme $\mathcal{A}^L_{M_\natural}+\mathcal{A}^+_Q$. Rappelons que $\mathcal{A}^+_Q$ est la chambre positive ouverte de $\mathcal{A}_L$ associée à Q. On a

(1) la fonction
$$\zeta \mapsto \sigma_{M_\natural}^Q(\zeta, \mathcal{Y})\tau_Q(\zeta - Y_Q)$$
sur $\mathcal{A}_{M_\natural}$ est la fonction caractéristique de la somme de $\mathcal{A}_Q^+$ et de l'enveloppe convexe de la famille $(Y_{P_\natural})_{P_\natural \in \mathcal{P}(M_\natural); P_\natural \subset Q}$;

$$(2) \qquad \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_\natural)} \sigma_{M_\natural}^Q(\zeta, \mathcal{Y})\tau_Q(\zeta - Y_Q) = 1$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{A}_{M_\natural}$.

L'assertion (1) est immédiate et (2) est l'assertion 3.9 de [A3].

Considérons maintenant le cas exceptionnel. Alors $\mathcal{A}_{M_\natural} = \mathcal{A}_{T'} \oplus \mathcal{A}_{T''}$ et $\mathcal{A}_{T'}$ est une droite. Conformément à cette décomposition, on définit la projection $\zeta \mapsto \zeta_{T''}$ de $\mathcal{A}_{M_\natural}$ sur $\mathcal{A}_{T''}$. On note $\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$ l'ensemble des $Q \in \mathcal{F}(M_\natural)$ tels que $\mathcal{A}_Q^+ \cap \mathcal{A}_{T''} \neq \emptyset$. On note $\tilde{\mathcal{P}}(M_\natural) = \mathcal{P}(M_\natural) \cap \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$. Pour $Q = LU_Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$, on note $\zeta \mapsto \tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(\zeta, \mathcal{Y})$ la fonction caractéristique dans $\mathcal{A}_{T''}$ de la somme de $\mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}_{T''}$ et de l'enveloppe convexe de la famille $(Y_{P_\natural, T''})_{P_\natural \in \tilde{\mathcal{P}}(M_\natural); P_\natural \subset Q}$. On note $\tilde{\tau}_Q$ la fonction caractéristique dans $\mathcal{A}_{T''}$ de la somme $(\mathcal{A}_{T''} \cap \mathcal{A}_{M_\natural}^L) + (\mathcal{A}_{T''} \cap \mathcal{A}_Q^+)$. On a encore

(3) la fonction
$$\zeta \mapsto \tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(\zeta, \mathcal{Y})\tilde{\tau}_Q(\zeta - Y_{Q,T''})$$
sur $\mathcal{A}_{T''}$ est la fonction caractéristique de la somme de $\mathcal{A}_{T''} \cap \mathcal{A}_Q^+$ et de l'enveloppe convexe de la famille $(Y_{P_\natural, T''})_{P_\natural \in \tilde{\mathcal{P}}(M_\natural); P_\natural \subset Q}$;

$$(4) \qquad \sum_{Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)} \tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(\zeta, \mathcal{Y})\tilde{\tau}_Q(\zeta - Y_{Q,T''}) = 1$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{A}_{T''}$.

Pour démontrer ces propriétés et à des fins ultérieures, introduisons un espace $\tilde{V}$ somme directe de V'' et d'une droite $\tilde{D}$, muni de la somme orthogonale $\tilde{q}$ de la restriction de q à V'' et d'une forme quadratique non dégénérée sur $\tilde{D}$. On note $\tilde{G}$ son groupe spécial orthogonal. Le tore T'' est inclus dans G'', donc dans $\tilde{G}$. Notons $\tilde{M}$ son commutant dans $\tilde{G}$. Le lemme 10.2 s'applique à $\tilde{G}$ et montre que $A_{T''} = A_{\tilde{M}}$.

Lemme. *(i) Il existe une unique bijection $Q = LU_Q \mapsto \tilde{Q} = \tilde{L}U_{\tilde{Q}}$ de $\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$ sur $\mathcal{F}(\tilde{M})$ telle que, pour tout $Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$, on ait $\mathcal{A}_{T''} \cap \mathcal{A}_{M_\natural}^L = \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$, $\mathcal{A}_{T''} \cap \mathcal{A}_L = \mathcal{A}_{\tilde{L}}$ et $\mathcal{A}_{T''} \cap \mathcal{A}_Q^+ = \mathcal{A}_{\tilde{Q}}^+$. Cette bijection conserve la relation d'inclusion et envoie $\tilde{\mathcal{P}}(M_\natural)$ sur $\mathcal{P}(\tilde{M})$.*

(ii) Pour $Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$, posons $Y_{\tilde{Q}} = Y_{Q,T''}$. La famille $\tilde{\mathcal{Y}} = (Y_{\tilde{P}})_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$ est $(\tilde{G}, \tilde{M})$-orthogonale et positive. Pour tout $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{M})$, $Y_{\tilde{Q}}$ est associé à cette famille comme en 2.1.

(iii) Pour tout $Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$ et tout $\zeta \in \mathcal{A}_{T''} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on a les égalités $\tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(\zeta, \mathcal{Y}) = \sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{Q}}(\zeta, \tilde{\mathcal{Y}})$ et $\tilde{\tau}_Q(\zeta) = \tau_{\tilde{Q}}(\zeta)$.

Preuve. Les conditions imposées à $A_{T''}$ impliquent que V'' est hyperbolique et qu'il existe un système hyperbolique maximal $(e_k)_{k=\pm 2,...,\pm d/2}$ dans V'' et une suite d'entiers $(d_i)_{i=2,...,l}$ vérifiant les propriétés suivantes. On a $d_i \geq 1$ pour tout i et $1+d_2+...+d_l = d/2$. Pour $\epsilon = \pm 1$ et $i = 2, ..., l$, notons $E_{\epsilon i}$ le sous-espace de V'' engendré par les $e_{\epsilon k}$ pour

$1+d_2+...+d_{i-1}<k\leq 1+d_2+...+d_i$. Alors $A_{T''}$ est le sous-groupe des éléments de G'' qui conservent chaque $E_{\pm i}$ et y agissent par homothétie. Fixons une base hyperbolique $\{e_1,e_{-1}\}$ de W'. Notons $E_{\pm 1}$ la droite portée par $e_{\pm 1}$. Posons $I=\{\pm 1,...,\pm l\}$. Alors $A_{M_\natural}$ est le sous-groupe des éléments de G qui conservent chaque E_i pour $i\in I$ et y agissent par homothétie. L'espace $\mathcal{A}_{M_\natural}$ est celui des familles $\zeta=(\zeta_i)_{i\in I}$ de nombres réels telles que $\zeta_{-i}=-\zeta_i$ pour tout i. L'espace $\mathcal{A}_{T''}$ est le sous-espace des ζ tels que $\zeta_1=\zeta_{-1}=0$, ou encore, en posant $\tilde{I}=\{\pm 2,...,\pm l\}$, $\mathcal{A}_{T''}$ est l'espace des familles $\zeta=(\zeta_i)_{i\in\tilde{I}}$ de nombres réels telles que $\zeta_{-i}=-\zeta_i$ pour tout i.

On décrit l'ensemble $\mathcal{F}(\tilde{M})$ de la façon habituelle suivante. Notons $\Phi(\tilde{M})$ l'ensemble des applications $\varphi:\tilde{I}\to\{0,\pm 1,...,\pm j_\varphi\}$, où j_φ est un élément quelconque de $\mathbb{N}$, telles que $\varphi(-i)=-\varphi(i)$ pour tout i et $\varphi^{-1}(j)\neq\emptyset$ pour tout $j=\pm 1,...,\pm j_\varphi$. Pour une telle φ et pour $j\in\{1,...,j_\varphi\}$, on pose $E_{\varphi,j}=\oplus_{\varphi^{-1}(j)}E_i$. On note $\tilde{Q}_\varphi=\tilde{L}_\varphi\tilde{U}_\varphi$ le sous-groupe parabolique de $\tilde{G}$ formé des éléments qui conservent le drapeau

$$E_{\varphi,j_\varphi}\subset E_{\varphi,j_\varphi}\oplus E_{\varphi,j_\varphi-1}\subset...\subset E_{\varphi,j_\varphi}\oplus...\oplus E_{\varphi,1}.$$

Alors $\varphi\mapsto\tilde{Q}_\varphi$ est une bijection de $\Phi(\tilde{M})$ sur $\mathcal{F}(\tilde{M})$. L'espace $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_\varphi}$ est formé des $\zeta=(\zeta_i)_{i\in\tilde{I}}$ tels que, pour tout $j\in\{\pm 1,...,\pm j_{max}\}$, $\sum_{i\in\varphi^{-1}(j)}\zeta_i=0$. L'espace $\mathcal{A}_{\tilde{L}_\varphi}$ est formé des $\zeta=(\zeta_i)_{i\in\tilde{I}}$ tels que, pour tout $j\in\{0,\pm 1,...,\pm j_{max}\}$, ζ_i est constant pour $i\in\varphi^{-1}(j)$. Notons $\zeta_{\varphi,j}$ cette valeur constante. Alors $\mathcal{A}_{\tilde{Q}_\varphi}^+$ est formé des $\zeta\in\mathcal{A}_{\tilde{L}_\varphi}$ tels que

$$\zeta_{\varphi,j_\varphi}>...>\zeta_{\varphi,1}>0.$$

On décrit l'ensemble $\mathcal{F}(M_\natural)$ de façon analogue. On définit $\Phi(M_\natural)$ en remplaçant $\tilde{I}$ par I dans la définition de $\Phi(\tilde{M})$. Pour $\varphi\in\Phi(M_\natural)$, on définit de même un sous-groupe parabolique $Q_\varphi=L_\varphi U_\varphi$ de G. L'application $\varphi\mapsto Q_\varphi$ est une surjection de $\Phi(M_\natural)$ sur $\mathcal{F}(M_\natural)$. Les fibres ont 1 ou 3 éléments. Une fibre a 3 éléments si et seulement si elle contient un élément φ_0 pour lequel $\varphi_0^{-1}(0)$ a deux éléments $\{i_h,-i_h\}$ et $dim(E_{i_h})=1$. Alors les deux autres éléments de la fibre sont les applications φ_1 et φ_{-1} ainsi définies. Pour $\epsilon=\pm 1$, $\varphi_\epsilon(i_h)=\epsilon$, $\varphi_\epsilon(-i_h)=-\epsilon$. Pour $i\in I\setminus\{i_h,-i_h\}$, si $\varphi_0(i)=\pm j$, avec $j\in\{1,...,j_{\varphi_0}\}$, on a $\varphi_\epsilon(i)=\pm(j+1)$. Si φ appartient à une fibre à 1 élément, les espaces $\mathcal{A}_{M_\natural}^{L_\varphi}$, $\mathcal{A}_{L_\varphi}$ et l'ensemble $\mathcal{A}_{Q_\varphi}^+$ se décrivent comme ci-dessus, en remplaçant $\tilde{I}$ par I. Si φ est l'un des éléments $\varphi_{\pm 1}$ d'une fibre à 3 éléments, les espaces $\mathcal{A}_{M_\natural}^{L_\varphi}$ et $\mathcal{A}_{L_\varphi}$ se décrivent de même. L'ensemble $\mathcal{A}_{Q_\varphi}^+$ est formé des $\zeta\in\mathcal{A}_{\tilde{L}_\varphi}$ tels que

$$\zeta_{\varphi,j_\varphi}>...>\zeta_{\varphi,2},\ \zeta_{\varphi,2}+\zeta_{\varphi,1}>0,\ \zeta_{\varphi,2}-\zeta_{\varphi,1}>0.$$

Le sous-groupe parabolique Q_φ appartient à $\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$ si et seulement si l'ensemble $\mathcal{A}_{Q_\varphi}^+$ contient un élément de $\mathcal{A}_{T''}$, c'est-à-dire un élément ζ pour lequel $\zeta_1=\zeta_{-1}=0$. La description ci-dessus montre que, si φ appartient à une fibre à 1 élément, cette condition équivaut à $\varphi(1)=\varphi(-1)=0$. Si φ est un élément $\varphi_{\pm 1}$ d'une fibre à 3 éléments, elle équivaut à $\varphi(1),\varphi(-1)\in\{\pm 1\}$. Il revient au même de dire que, si φ est l'élément φ_0 d'une fibre à 3 éléments, la condition équivaut à $\varphi(1)=\varphi(-1)=0$. Notons $\tilde{\Phi}(M_\natural)$ le sous-ensemble des $\varphi\in\Phi(M_\natural)$ tels que $\varphi(1)=\varphi(-1)=0$. Alors l'application $\varphi\mapsto Q_\varphi$ se restreint en une bijection de $\tilde{\Phi}(M_\natural)$ sur $\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$. L'application qui à φ associe sa restriction à $\tilde{I}$ est une bijection de $\tilde{\Phi}(M_\natural)$ sur $\Phi(\tilde{M})$. Elle paramètre une bijection de $\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$ sur $\mathcal{F}(\tilde{M})$. En utilisant les descriptions ci-dessus, on vérifie qu'elle possède toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé et c'est bien sûr la seule possible. $\square$

Grâce à ce lemme, les propriétés (3) et (4) ne sont autres que (1) et (2) pour le groupe $\tilde{G}$.

Dans le cas non exceptionnel, on pourra affecter d'un ˜ les notations afin de les unifier avec celles du cas exceptionnel. Par exemple, on notera $\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural) = \mathcal{F}(M_\natural)$ et, pour un élément Q de cet ensemble, on notera $\tilde{\tau}_Q = \tau_Q$. De même, on notera dans ce cas $\zeta \mapsto \zeta_{T''}$ l'application identité de $\mathcal{A}_{M_\natural}$.

10.4 Changement de fonction de troncature

On fixe $S \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{T}(G_x)$. On utilise les notations de 10.2 et 10.3. Fixons un Lévi minimal M_{min} de G contenu dans $M_\natural$ et contenant $A_{M_\natural}$. On fixe un sous-groupe compact spécial K_{min} de $G(F)$ en bonne position relativement à M_{min}. Il nous sert à définir les fonctions H_Q sur $G(F)$ pour $Q \in \mathcal{F}(M_{min})$. Fixons $P_{min} = M_{min}U_{min} \in \mathcal{P}(M_{min})$ et notons Δ_{min} l'ensemble des racines simples de $A_{M_{min}}$ dans $\mathfrak{u}_{min}$. Soit $Y_{P_{min}} \in \mathcal{A}^+_{P_{min}}$. Pour tout $P' \in \mathcal{P}(M_{min})$, il y a un unique $w \in W(G, M_{min})$ tel que $wP_{min}w^{-1} = P'$. On pose $Y_{P'} = wY_{P_{min}}$. La famille $(Y_{P'})_{P' \in \mathcal{P}(M_{min})}$ est (G, M_{min})-orthogonale et positive. Pour $g \in G(F)$, définissons la famille $\mathcal{Y}(g) = (Y(g)_Q)_{Q \in \mathcal{P}(M_\natural)}$ par

$$Y(g)_Q = Y_Q - H_{\bar{Q}}(g).$$

Il est clair qu'il existe $c_1 > 0$ tel que

(1) pour tout $g \in G(F)$ tel que $\sigma(g) < c_1 inf\{\alpha(Y_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}$, la famille $\mathcal{Y}(g)$ est $(G, M_\natural)$-orthogonale et positive ; de plus $Y(g)_Q \in \mathcal{A}^+_Q$ pour tout $Q \in \mathcal{F}(M_\natural)$.

On fixe un tel c_1. Remarquons que, pour $m \in M_\natural(F)$, la famille $\mathcal{Y}(mg)$ se déduit de $\mathcal{Y}(g)$ par translations. Il en résulte que la famille $\mathcal{Y}(g)$ est $(G, M_\natural)$-orthogonale et positive pour tout

$$g \in M_\natural(F)\{g' \in G(F); \sigma(g') < c_1 inf\{\alpha(Y_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}\}.$$

Pour un tel g, on pose

$$\tilde{v}(g) = \nu(A_{T''}) \int_{A_{T''}(F)} \tilde{\sigma}^G_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Y}(g))da.$$

On a défini en 2.3 la fonction σ_T. Montrons que

(2) il existe $c_2 > 0$ et un sous-ensemble compact ω_T de $\mathfrak{t}(F)$ tels que les propriétés suivantes soient vérifiées ; soient $g \in G(F)$ et $X \in \mathfrak{t}(F)[S; > N^{-b}] \cap (\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S)$ tels que ${}^g f^\sharp_{x,\omega}(X) \neq 0$; alors $X \in \omega_T$ et $\sigma_T(g) < c_2 log(N)$.

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 10.1. Les éléments X' et X'' restent dans des sous-ensembles compacts de $\mathfrak{t}'(F)$ et $\mathfrak{t}''(F)$, ces sous-ensembles compacts, ainsi que les suivants étant bien sûr indépendants de X et g. On peut écrire $g = g'g''\gamma$, où γ appartient à un sous-ensemble compact de $G(F)$, $g' \in G'_x(F)$ et $g'' \in G''(F)$ sont tels que $g'^{-1}X'g'$ et $g''^{-1}X''g''$ appartiennent à des sous-ensembles compacts de $\mathfrak{g}'_x(F)$ et $\mathfrak{g}''(F)$. D'après 2.3(1), quitte à multiplier g à gauche par un élément de $T(F)$, on a

$$\sigma(g) << (1 + |log\, D^{G'_x}(X')|)(1 + |log\, D^{G''}(X'')|).$$

Pour $X \in \mathfrak{t}(F)[S; > N^{-b}]$, on a

$$|log\, D^{G'_x}(X')| << log(N),\ |log\, D^{G''}(X'')| << log(N).$$

Donc $\sigma(g) << log(N)$ et l'assertion s'ensuit. $\square$

On fixe de tels ω_T et c_2 et on suppose désormais

$$c_2 log(N) < c_1 inf\{\alpha(Y_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}.$$

Puisque $T \subset M_\natural$, $\tilde{v}(g)$ est défini pour tout g satisfaisant la condition de (2). Le membre de droite de l'égalité de la proposition ci-dessous est donc bien défini.

Proposition. *Il existe $c > 0$ et un entier $N_0 \geq 1$ tels que, si $N \geq N_0$ et*

$$clog(N) < inf\{\alpha(Y_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\},$$

on ait l'égalité

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\kappa_{N,X''}(g)dg = \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\tilde{v}(g)dg$$

pour tout $X \in \mathfrak{t}(F)[S; > N^{-b}] \cap (\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S)$.

Preuve. Soit $Z_{P_{min}} \in \mathcal{A}^+_{P_{min}}$. En remplaçant $Y_{P_{min}}$ par cet élément, on construit une famille $\mathcal{Z}(g)$ pour tout $g \in G(F)$. On impose

$$(3) \qquad c_2 log(N) < c_1 inf\{\alpha(Z_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}.$$

Soit $g \in G(F)$ tel que $\sigma_T(g) < c_2 log(N)$. Pour $a \in A_{T''}$, on a l'égalité

$$\sum_{Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)} \tilde{\sigma}^Q_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Z}(g))\tilde{\tau}_Q(H_{M_\natural}(a) - Z(g)_{Q,T''}) = 1,$$

cf. 10.3(4). En se rappelant la définition ci-dessus de $\tilde{v}(g)$, on peut écrire

$$\tilde{v}(g) = \nu(A_{T''}) \sum_{Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)} \tilde{v}(Q, g),$$

où

$$\tilde{v}(Q, g) = \int_{A_{T''}(F)} \tilde{\sigma}^G_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Y}(g))\tilde{\sigma}^Q_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Z}(g))\tilde{\tau}_Q(H_{M_\natural}(a) - Z(g)_{Q,T''})da.$$

De même, soit $X \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S$. On a

$$\kappa_{N,X''}(g) = \nu(A_{T''}) \sum_{Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)} \kappa_{N,X''}(Q, g),$$

où

$$\kappa_{N,X''}(Q, g) = \int_{A_{T''}(F)} \kappa(\gamma^{-1}_{X''} a g)\tilde{\sigma}^Q_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Z}(g))\tilde{\tau}_Q(H_{M_\natural}(a) - Z(g)_{Q,T''})da.$$

On a

(4) les fonctions $g \mapsto \tilde{v}(Q, g)$ et $g \mapsto \kappa_{N,X''}(Q, g)$ sont invariantes à gauche par $T'(F)A_{T''}(F)$.

Soit $t \in T'(F)A_{T''}(F)$. On a $H_{P'}(tg) = H_{M_\natural}(t)+H_{P'}(g)$ pour tout $P' \in \mathcal{P}(M_\natural)$. Supposons $t \in A_{T''}(F)$. Alors remplacer g par tg dans la définition de $\tilde{v}(Q,g)$ ou de $\kappa_{N,X''}(Q,g)$ revient à changer la variable d'intégration a en at. Cela ne change pas l'intégrale. Soit maintenant $t \in T'(F)$. On a $T' \subset H$, donc $\kappa(\gamma_{X''}^{-1}atg) = \kappa(\gamma_{X''}^{-1}ag)$ pour tout a. On a $T' \subset G_2 \subset M_\natural$, avec la notation de la preuve du lemme 10.2. Si l'on n'est pas dans le cas exceptionnel, G_2 est semi-simple et $H_{M_\natural}(t) = 0$. On ne change donc rien en remplaçant g par tg. Si l'on est dans le cas exceptionnel, ce ne sont pas les termes $H_{P'}(g)$ qui interviennent dans les définitions, mais leurs projections $H_{P'}(g)_{T''}$. Or $H_{M_\natural}(t)_{T''} = 0$ et, de nouveau, remplacer g par tg ne change rien. Cela prouve (4).

Soit $X \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S$. Grâce à (4), on peut écrire

$$(5) \qquad \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\kappa_{N,X''}(g)dg = \nu(A_{T''}) \sum_{Q\in\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)} I(Q,X),$$

$$(6) \qquad \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\tilde{v}(g)dg = \nu(A_{T''}) \sum_{Q\in\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)} J(Q,X),$$

où

$$I(Q,X) = \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\kappa_{N,X''}(Q,g)dg,$$

$$J(Q,X) = \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\tilde{v}(Q,g)dg.$$

Considérons d'abord les termes indexés par $Q = G$. Supposons

$$(7) \qquad sup\{\alpha(Z_{min}); \alpha \in \Delta_{min}\} \leq \left\{ \begin{array}{c} inf\{\alpha(Y_{min}); \alpha \in \Delta_{min}\}, \\ log(N)^2. \end{array}\right.$$

Fixons un sous-ensemble compact $\omega_{T''}$ de $\mathfrak{t}''(F)$ tel que $X'' \in \omega_{T''}$ pour tout $X \in \omega_T$. L'ensemble $\mathfrak{t}(F)[S; > N^{-b}]$ a été défini comme celui des $X \in \mathfrak{t}(F)$ tels que X' et X'' satisfassent certaines minorations. On définit $\mathfrak{t}''(F)^S[> N^{-b}]$ comme celui des $X'' \in \mathfrak{t}''(F)^S$ vérifiant celles de ces minorations qui portent sur X''. On a

(8) il existe un entier $N_1 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_1$, pour tout $g \in G(F)$ tel que $\sigma_T(g) \leq c_2 log(N)$ et tout $X'' \in \omega_{T''} \cap \mathfrak{t}''(F)^S[> N^{-b}]$, on ait l'égalité $\kappa_{N,X''}(G,g) = \tilde{v}(G,g)$.

Il suffit de prouver que pour tout $a \in A_{T''}(F)$ tel que $\tilde{\sigma}^G_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Z}(g)) = 1$, on a l'égalité $\tilde{\sigma}^G_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Y}(g)) = \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag)$. La première inégalité de (5) entraîne que l'enveloppe convexe de la famille $(Z(g)_{P',T''})_{P'\in\tilde{\mathcal{P}}(M_\natural)}$ est incluse dans celle de la famille $(Y(g)_{P',T''})_{P'\in\tilde{\mathcal{P}}(M_\natural)}$. Alors l'hypothèse $\tilde{\sigma}^G_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Z}(g)) = 1$ entraîne $\tilde{\sigma}^G_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Y}(g)) = 1$. Munissons $\mathcal{A}_{M_\natural}$ d'une norme $|.|$. La deuxième inégalité de (5) et l'hypothèse sur g entraînent une majoration $|Z(g)_{P'}| << log(N)^2$ pour tout $P' \in \mathcal{P}(M_\natural)$. L'hypothèse $\tilde{\sigma}^G_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Z}(g)) = 1$ entraîne alors $\sigma(a) << log(N)^2$. D'après 9.7(2), on a $\sigma(\gamma_{X''}) << 1 + |log\, D^{G''}(X'')|$. Puisque $X'' \in \mathfrak{t}''(F)^S[> N^{-b}]$, cela entraîne $\sigma(\gamma_{X''}) << log(N)$. D'où $\sigma(\gamma_{X''}^{-1}ag) << log(N)^2$. Mais on voit facilement qu'il existe $c_3 > 0$ tel que, pour tout $g' \in G(F)$ tel que $\sigma(g') < c_3 N$, on a $\kappa_N(g') = 1$. Si N est assez grand, on a $\sigma(\gamma_{X''}^{-1}ag) < c_3 N$, donc $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag) = 1$. Cela prouve (8).

De (2) et (8) résulte l'égalité

$$(9) \qquad I(G,X) = J(G,X)$$

pour tout $N \geq N_1$ et tout $X \in \mathfrak{t}(F)[S; > N^{-b}] \cap (\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S)$.

Soit maintenant $Q = LU_Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$ avec $Q \neq G$. On décompose les intégrales

$$I(Q, X) = \int_{K_{min}} \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash L(F)} \int_{U_{\bar{Q}}(F)} {}^{\bar{u}lk}f^\sharp_{x,\omega}(X)\kappa_{N,X''}(Q, \bar{u}lk)d\bar{u}\delta_Q(l)dl\, dk,$$

$$J(Q, X) = \int_{K_{min}} \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash L(F)} \int_{U_{\bar{Q}}(F)} {}^{\bar{u}lk}f^\sharp_{x,\omega}(X)\tilde{v}(Q, \bar{u}lk)d\bar{u}\delta_Q(l)dl\, dk.$$

Nous montrerons aux paragraphes 10.5 et 10.8 les propriétés suivantes.

(10) Soient $g \in G(F)$ et $\bar{u} \in U_{\bar{Q}}(F)$ tels que $\sigma(g), \sigma(\bar{u}g) < c_1 inf\{\alpha(Z_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}$. Alors on a l'égalité $\tilde{v}(Q, \bar{u}g) = \tilde{v}(Q, g)$.

(11) Soit $c_4 > 0$. Il existe $c_5 > 0$ tel que si $c_5 log(N) < inf\{\alpha(Z_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}$, les conditions suivantes soient vérifiées. Soient $X'' \in \omega_{T''} \cap \mathfrak{t}''(F)^S[> N^{-b}]$, $g \in G(F)$ et $\bar{u} \in U_{\bar{Q}}(F)$. Supposons $\sigma(g), \sigma(\bar{u}), \sigma(\bar{u}g) < c_4 log(N)$. Alors on a l'égalité $\kappa_{N,X''}(Q, \bar{u}g) = \kappa_{N,X''}(Q, g)$;

Admettons ces propriétés. Montrons

(12) il existe $c_5 > 0$ tel que, si $c_5 log(N) < inf\{\alpha(Z_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}$, on a les égalités $I(Q, X) = J(Q, X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{t}(F)[S; > N^{-b}] \cap (\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S)$.

Grâce à (2), on peut supposer $X \in \omega_T$. Considérons l'intégrale $I(Q, X)$. D'après (2), on peut limiter l'intégrale sur $T'(F)A_{T''}(F)\backslash L(F)$ aux éléments l pour lesquels il existe $\bar{u} \in U_{\bar{Q}}(F)$ et $k \in K_{min}$ tels que $\sigma_T(\bar{u}lk) < c_2 log(N)$. Un tel l est représenté par un élément de $L(F)$ tel que $\sigma(l) < c_6 log(N)$, pour une constante c_6 convenable. Il existe $c_7 > 0$ tel que, pour l vérifiant l'inégalité précédente, pour $k \in K_{min}$ et pour $\bar{u} \in U_{\bar{Q}}(F)$, l'inégalité $\sigma(\bar{u}lk) < c_2 log(N)$ entraîne $\sigma(\bar{u}) < c_7 log(N)$. Soit $c_4 = c_2 + c_7$ et prenons pour c_5 le nombre issu de (11). Fixons $k \in K_{min}$ et $l \in L(F)$ tel que $\sigma(l) < c_6 log(N)$. On a alors

$${}^{\bar{u}lk}f^\sharp_{x,\omega}(X)\kappa_{N,X''}(Q, \bar{u}lk) = {}^{\bar{u}lk}f^\sharp_{x,\omega}(X)\kappa_{N,X''}(Q, lk)$$

pour tout $\bar{u} \in U_{\bar{Q}}(F)$. En effet, si $\sigma(\bar{u}lk) \geq c_2 log(N)$, les deux termes sont nuls d'après (2). Si $\sigma(\bar{u}lk) < c_2 log(N)$, on a aussi $\sigma(\bar{u}) < c_7 log(N)$, puis $\sigma(lk) < c_4 log(N)$. La relation (11) s'applique à $g = lk$ et u. Donc $\kappa_{N,X''}(Q, \bar{u}lk) = \kappa_{N,X''}(Q, lk)$ et l'égalité affirmée s'ensuit. Il résulte de cette égalité que, dans $I(Q, X)$, l'intégrale intérieure est simplement

$$\int_{U_{\bar{Q}}(F)} {}^{\bar{u}lk}f^\sharp_{x,\omega}(X)d\bar{u}.$$

Or cette intégrale est nulle d'après le lemme 5.5(i), puisque $Q \neq G$. Donc $I(Q, X) = 0$. On prouve de même que $J(Q, X) = 0$.

Le terme $Z_{P_{min}}$ est un terme auxiliaire. Il est clair qu'il existe $c > 0$ et un entier $N_2 \geq 1$ tels que, si $N \geq N_2$ et

$$clog(N) < inf\{\alpha(Y_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\},$$

on peut choisir $Z_{P_{min}}$ satisfaisant les hypothèses (3) et (7) et celle de la relation (12). Si on suppose de plus $N \geq N_1$, les conclusions de (9) et (12) s'appliquent. Alors les égalités (5) et (6) entraînent la conclusion de l'énoncé. $\square$

10.5 Preuve de la propriété 10.4(10)

Soient g et $\bar{u}$ comme dans cette relation. Rappelons que

$$\tilde{v}(Q,g) = \int_{A_{T''}(F)} \tilde{\sigma}_{M_\natural}^G(H_{M_\natural}(a),\mathcal{Y}(g))\tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(H_{M_\natural}(a),\mathcal{Z}(g))\tilde{\tau}_Q(H_{M_\natural}(a)-Z(g)_{Q,T''})da.$$

Les fonctions $\zeta \mapsto \tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(\zeta,\mathcal{Y}(g))$ et $\zeta \mapsto \tilde{\tau}_Q(\zeta - Z(g)_{Q,T''})$ ne dépendent de g que par l'intermédiaire des termes $H_{\bar{P}'}(g)$ pour des sous-groupes paraboliques $P' \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$ tels que $P' \subset Q$. Elles ne changent donc pas quand on remplace g par $\bar{u}g$. On peut alors fixer $a \in A_{T''}(F)$ tel que

$$\tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(H_{M_\natural}(a),\mathcal{Z}(g))\tilde{\tau}_Q(H_{M_\natural}(a)-Z(g)_{Q,T''}) \neq 0$$

et prouver que

$$(1) \qquad \tilde{\sigma}_{M_\natural}^G(H_{M_\natural}(a),\mathcal{Y}(g)) = \tilde{\sigma}_{M_\natural}^G(H_{M_\natural}(a),\mathcal{Y}(\bar{u}g)).$$

Supposons que l'on n'est pas dans le cas exceptionnel. Tout sous-groupe parabolique $P' \in \mathcal{P}(M_\natural)$ tel que $P' \subset Q$ détermine une chambre $\mathcal{A}_{P'}^{L,+}$ dans $\mathcal{A}^L$. Posons $\zeta = H_{M_\natural}(a)$, fixons un tel P' de sorte que $proj_{M_\natural}^L(\zeta) \in Cl(\mathcal{A}_{P'}^{L,+})$, où, pour tout sous-ensemble E de $\mathcal{A}_{M_\natural}$, $Cl(E)$ désigne sa clôture. Montrons que

(2) $\zeta \in Cl(\mathcal{A}_{P'}^+)$.

D'après 10.3(1), l'hypothèse sur a signifie que ζ est la somme d'un élément $\zeta' \in \mathcal{A}_Q^+$ et d'un élément ζ'' dans l'enveloppe convexe des $Z(g)_{P''}$, pour $P'' \in \mathcal{P}(M_\natural)$ tel que $P'' \subset Q$. Soit α une racine de $A_{M_\natural}$ dans $\mathfrak{g}$, positive pour P'. Si α intervient dans $\mathfrak{u}_Q$, α est positive pour tous les P'' ci-dessus. Or $Z(g)_{P''} \in \mathcal{A}_{P''}^+$ d'après 10.4(1), donc $\alpha(Z(g)_{P''}) > 0$. Il en résulte que $\alpha(\zeta'') > 0$. On a aussi $\alpha(\zeta') > 0$, donc $\alpha(\zeta) > 0$. Si maintenant α intervient dans $\mathfrak{u}_{P'} \cap \mathfrak{l}$, on a $\alpha(\zeta) = \alpha(proj_{M_\natural}^L(\zeta)) \geq 0$ d'après le choix de P'. Cela prouve (2).

D'après [A3] lemme 3.1, pour $\zeta \in Cl(\mathcal{A}_{P'}^+)$, la condition $\tilde{\sigma}_{M_\natural}^G(\zeta,\mathcal{Y}(g)) = 1$ équivaut à certaines inégalités portant sur $\zeta - Y(g)_{P'}$. Cette condition ne dépend de g que par l'intermédiaire de $H_{\bar{P}'}(g)$. Comme ci-dessus, elle est donc insensible au changement de g en $\bar{u}g$. Cela démontre (1).

Dans le cas exceptionnel, on utilise le lemme 10.3 pour interpréter nos fonctions comme leurs analogues pour le groupe $\tilde{G}$. dans ce groupe, on peut faire le même raisonnement que ci-dessus et on obtient la même conclusion. $\square$

10.6 Calcul d'un polynôme

On aura besoin du lemme ci-dessous. Soient $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos, l un entier tel que $l \geq 1$ et $R = R(T)$ un polynôme en une indeterminée, à coefficients dans $\mathbb{F}$, de degré $l-1$ et de coefficient dominant 1. Introduisons le polynôme en $l+1$ indéterminées

$$Q = Q(T,S_1,...,S_l) = \prod_{j=1,...,l}(T-S_j),$$

et la fraction rationnelle

$$P = P(T,S_1,...,S_l) = 1 + \sum_{j=1,...,l} \frac{(T+S_j)R(S_j)}{(T-S_j)\prod_{j'=1,...,l;j'\neq j}(S_j-S_{j'})}.$$

Lemme. *On a l'égalité*

$$P(T,S_1,...,S_l)=\frac{2TR(T)}{Q(T,S_1,...,S_l)}.$$

Preuve. Introduisons le polynôme

$$\Delta=\Delta(S_1,...,S_l)=\prod_{j,j'=1,...,l;j<j'}(S_j-S_{j'}).$$

Par réduction au même dénominateur,

$$P=\frac{P_\flat}{\Delta Q}$$

où

$$P_\flat=P_\flat(T,S_1,...,S_l)=\Delta Q+$$
$$\sum_{j=1,...,l}(-1)^{j-1}(T+S_j)R(S_j)\prod_{j'=1,...,l;j'\neq j}(T-S_{j'})\prod_{j',j''=1,...,l;j'<j'';j',j''\neq j}(S_{j'}-S_{j''}).$$

La fraction rationnelle P est symétrique en les S_j. Alors le polynôme $P_\flat$ est antisymétrique et donc divisible par Δ : il existe un polynôme $P_\natural=P_\natural(T,S_1,...,S_l)$ tel que $P_\flat=P_\natural\Delta$. Le polynôme $P_\flat$ est de degré au plus l en T. Le coefficient de T^l est

$$\Delta+\sum_{j=1,...,l}(-1)^{j-1}R(S_j)\prod_{j',j''=1,...,l;j'<j'';j',j''\neq j}(S_{j'}-S_{j''}).$$

Ce polynôme en les S_j est divisible par Δ. Or son degré total est inférieur ou égal à celui de Δ. Il est donc proportionnel à Δ. On calcule le coefficient de proportionnalité en calculant le coefficient de $S_1^{l-1}S_2^{l-2}...S_{l-1}$. On obtient que ce coefficient est 2. On en déduit que le polynôme $P_\natural$ est de degré l en T et que son coefficient dominant est 2. Pour $T=S_j$, on calcule

$$P_\flat(S_j,S_1,...,S_l)=2S_jR(S_j)\Delta.$$

Donc

$$P_\natural(S_j,S_1,...,S_l)=2S_jR(S_j).$$

Alors $P_\natural(T,S_1,...,S_j)$ et $2TR(T)$ sont des polynômes de degré l en T, de même coefficient dominant, et prenant les mêmes valeurs aux l points $T=S_j$. Ils sont donc égaux. On obtient $P_\flat=2TR(T)\Delta$ et la formule de l'énoncé s'ensuit. $\square$

10.7 Réseaux spéciaux et extension de corps de base

Pour ce paragraphe, on oublie les définitions de l'espace Z et du réseau R. Pour toute extension finie F' de F, on note $V_{F'}=V\otimes_F F'$. La forme q se prolonge en une forme F'-bilinéaire $q_{F'}$ sur $V_{F'}$. Si R est un $\mathfrak{o}_F$-réseau de V, on note $R_{F'}=R\otimes_{\mathfrak{o}_F}\mathfrak{o}_{F'}$. Soient R un $\mathfrak{o}_F$-réseau de V et R' un $\mathfrak{o}_{F'}$-réseau de $V_{F'}$. Notons K, resp. K', le stabilisateur de R dans $G(F)$, resp. de R' dans $G(F')$. Disons que R et R' sont compatibles s'ils vérifient les deux conditions

(1) $R'\cap V=R$;

(2) $K' \cap G(F) = K$.

Remarquons que la première condition entraîne $K' \cap G(F) \subset K$: un élément de $K' \cap G(F)$ conserve R' et V, donc aussi leur intersection R. On peut aussi bien remplacer (2) par

(2') $K \subset K'$.

Lemme. *Soit R un réseau spécial de V. Il existe une extension finie E de F telle que, pour toute extension finie F' de E, il existe un réseau spécial R' de $V_{F'}$ qui soit compatible avec R.*

Preuve. On imagine qu'il y a une démonstration immobilière générale. Donnons une démonstration d'algèbre linéaire élémentaire. On a la propriété évidente

(3) soient F' une extension finie de F, F'' une extension finie de F', R' un réseau de $V_{F'}$ et R'' un réseau de $V_{F''}$; supposons R' compatible avec R et R'' compatible avec R' ; alors R'' est compatible avec R.

On a d'autre part

(4) si $d_{an}(V) \leq 1$, le lemme est vérifié pour $E = F$.

En effet, pour toute extension finie F' de F, le réseau $R_{F'}$ est compatible avec R. Si $d_{an}(V) \leq 1$, $R_{F'}$ est spécial, d'où (4).

A l'aide de ces deux propriétés, un raisonnement par récurrence descendante sur $d_{an}(V)$ montre qu'il suffit de prouver l'assertion suivante

(5) si $d_{an}(V) \geq 2$, il existe une extension finie F' de F et un réseau spécial R' de $V_{F'}$ tels que $d_{an}(V_{F'}) < d_{an}(V)$ et R' soit compatible avec R.

On choisit comme en 7.1 une décomposition orthogonale $V = Z \oplus V_{an}$, un entier c tel qu'il existe $v \in V_{an}$ de sorte que $val_F(q(v)) = c$, et une base hyperbolique $(v_i)_{i=\pm 1,...,\pm n}$ de sorte que R soit la somme du réseau R_{an} formé des éléments $v \in V_{an}$ tels que $val_F(q(v)) \geq c$ et du réseau R_Z engendré par les v_i et les $\varpi_F^c v_{-i}$ pour $i = 1, ..., n$. Supposons $d_{an}(V) = 2$. Il existe une extension quadratique E de F et un élément $\lambda \in F^\times$ tel que $val_F(\lambda) = c$, de sorte que l'on puisse identifier V_{an} à E et la restriction q_{an} de q à V_{an} à la forme quadratique $(v, v') \mapsto \lambda Trace_{E/F}(\tau(v)v')$, où τ l'élément non trivial de $Gal(E/F)$. L'espace $V_{an,E}$ s'identifie à un espace de dimension 2 sur E, muni d'une base (w_+, w_-), et $q_{an,E}$ à la forme

$$(x_+w_+ + x_-w_-, y_+w_+ + y_-w_-) = \lambda(x_+y_- + x_-y_+).$$

L'espace V_{an} est formé des $x_+w_+ + x_-w_- \in V_{an,E}$ tels que $x_- = \tau(x_+)$. Posons $v_{n+1} = w_+$, $v_{-n-1} = \lambda^{-1}w_-$. Alors $(v_i)_{i=\pm 1,...,\pm(n+1)}$ est une base hyperbolique de V_E. Notons R' le $\mathfrak{o}_E$-réseau de V_E engendré par les v_i et les $\varpi_F^c v_{-i}$ pour $i = 1, ..., n+1$. Il est spécial. Montrons que R' est compatible avec R. Remarquons que R' est la somme de $R_{Z,E}$ et du réseau R'_{an} engendré par w_+ et w_-. Pour prouver que $R' \cap V = R$, il suffit de prouver que $R'_{an} \cap V_{an} = R_{an}$. Le réseau $R'_{an} \cap V_{an}$, resp. R_{an}, est formé des $xw_+ + \tau(x)w_-$, avec $x \in E$, tels que $x \in \mathfrak{o}_E$, resp. $val_F(x\tau(x)) \geq 0$. Ces deux dernières conditions sont équivalentes, d'où l'assertion. Montrons que $K \subset K'$. Soit $k \in K$. Il suffit de prouver que, pour tout élément v de la base de R', on a $kv \in R'$. Si $v = v_i$ ou $\varpi_F^c v_{-i}$ avec $i = 1, ..., n$, on a $v \in R$, donc $kv \in R \subset R'$. On peut remplacer les deux éléments de base restants par w_+ et w_-. Ecrivons

$$kw_+ = x_+w_+ + x_-w_- + \sum_{i=1,...,n} (x_iv_i + \varpi_F^c x_{-i}v_{-i}),$$

$$kw_+ = y_+w_+ + y_-w_- + \sum_{i=1,...,n}(y_iv_i + \varpi_F^c y_{-i}v_{-i}).$$

Soit $i = 1, ..., n$. On a $\varpi_F^c x_{-i} = q_E(kw_+, v_i) = q_E(w_+, k^{-1}v_i)$. On a déjà prouvé que $k^{-1}v_i$ appartenait à R', donc $q_E(w_+, k^{-1}v_i) \in \varpi_F^c\mathfrak{o}_E$, puis $x_{-i} \in \mathfrak{o}_E$. De même x_i, y_{-i} et y_i appartiennent à $\mathfrak{o}_E$. On a $q_E(w_+) = 0$, donc $q_E(kw_+) = 0$, ce qui s'écrit

$$\lambda x_+x_- + \sum_{i=1,...,n} \varpi_F^c x_ix_{-i} = 0.$$

D'après ce que l'on vient de démontrer, cela entraîne $x_+x_- \in \mathfrak{o}_E$. De même, $y_+y_- \in \mathfrak{o}_E$. L'automorphisme galoisien τ de E induit un automorphisme antilinéaire de V_E que l'on note aussi τ. On a $\tau(v_{\pm i}) = v_{\pm i}$ pour $i = 1, ..., n$, $\tau(w_+) = w_-$ et $\tau(w_-) = w_+$. Puisque $k \in G(F)$, il commute à τ, donc $kw_- = \tau(kw_+)$, d'où $y_- = \tau(x_+)$ et $y_+ = \tau(x_-)$. On a $q_E(w_+, w_-) = \lambda$, donc $q_E(kw_+, kw_-) = \lambda$, ce qui s'écrit

$$\lambda(x_+\tau(x_+) + x_-\tau(x_-)) + \varpi_F^c \sum_{i=1,...,n}(x_iy_{-i} + x_{-i}y_-) = \lambda.$$

Cela entraîne $x_+\tau(x_+) + x_-\tau(x_-) \in \mathfrak{o}_E$. Si par exemple $x_+ \not\in \mathfrak{o}_E$, cette relation implique que x_- n'appartient pas non plus à $\mathfrak{o}_E$. Alors, la relation $x_+x_- \in \mathfrak{o}_E$ n'est pas vérifiée, contrairement à ce que l'on a déjà prouvé. Cette contradiction prouve que $x_+ \in \mathfrak{o}_E$. De même, x_-, y_+ et y_- appartiennent à $\mathfrak{o}_E$. Alors kw_+ et kw_- appartiennent à R' comme on le voulait. Cela prouve (4) sous l'hypothèse $d_{an}(V) = 2$.

Supposons $d_{an}(V) = 3$. Soit E l'extension quadratique non ramifiée de F et τ l'élément non trivial de $Gal(E/F)$. On peut identifier V_{an} à $E \oplus F$ et q_{an} à une forme

$$(w \oplus z, w' \oplus z') \mapsto \lambda\mu Trace_{E/F}(\tau(w)w') + 2\lambda\nu zz',$$

où $\lambda, \mu, \nu \in F^\times$, $val_F(\lambda) = c$ et, ou bien $\mu = 1$ et $val_F(\nu) = 1$, ou bien $\nu = 1$ et $val_F(\mu) = 1$. Le réseau R_{an} s'identifie à $\mathfrak{o}_E \oplus \mathfrak{o}_F$. L'espace $V_{an,E}$ s'identifie à un espace de dimension 3 sur E muni d'une base (w_+, w_-, w_0) de sorte que la forme $q_{an,E}$ s'écrive

$$q(x_+w_+ + x_-w_- + x_0w_0, y_+w_+ + y_-w_- + y_0w_0) = \lambda\mu(x_+y_- + x_-y_+) + 2\lambda\nu x_0y_0.$$

Parce que E est non ramifiée sur F, $R_{an,E}$ s'identifie au $\mathfrak{o}_E$-réseau engendré par les éléments de base. Posons $v_{n+1} = w_+$, $v_{-n-1} = \lambda^{-1}\mu^{-1}w_-$. La famille $(v_i)_{i=\pm1,...,\pm(n+1)}$ est un système hyperbolique maximal de V_E et w_0 est une base de son orthogonal. Le réseau R_E est engendré sur $\mathfrak{o}_E$ par les v_i et les $\varpi_F^c v_{-i}$ pour $i = 1, ..., n$, les éléments v_{n+1} et w_0 et l'élément $\varpi_F^c v_{-n-1}$, resp. $\varpi_F^{c+1}v_{-n-1}$, si $\mu = 1$, resp. $\nu = 1$. Il est compatible avec R mais n'est pas spécial (dans le cas où $\mu = 1$, la droite Fw_0 ne représente aucun élément de valuation c). Néanmoins, grâce à (3), il suffit de trouver une extension F' de E et un réseau spécial R' de $V_{F'}$ qui soit compatible à R_E. Introduisons une racine carrée z de $\mu\nu$, soit $F' = E(z)$ et R' le réseau de $V_{F'}$ engendré par les v_i et les $\varpi_F^c v_{-i}$ pour $i = 1, ..., n$ et par

- v_{n+1}, $\varpi_F^c v_{-n-1}$ et $z^{-1}w_0$ si $\mu = 1$;
- $z^{-1}v_{n+1}$, $\varpi_F^c zv_{-n-1}$ et w_0 si $\nu = 1$.

Ce réseau est spécial. Il est clair que $R' \cap V_E = R_E$. Notons K_E le stabilisateur de R_E dans $G(E)$ et K' celui de R' dans $G(F')$. Il reste à prouver que $K_E \subset K'$. Introduisons le réseau $R_{F'}$, qui est aussi égal à $(R_E)_{F'}$, et son dual $R^*_{F'} = \{v \in V_{F'}; \forall w \in R_{F'}, q_{F'}(v, w) \in \mathfrak{o}_{F'}\}$. On vérifie que

$$R' = z^{-1}R_{F'} \cap \varpi_F^c R^*_{F'} \cap \{v \in V_{F'}; val_{F'}(q_{F'}(v)) \geq val_{F'}(\lambda)\}.$$

Un élément de K_E stabilise forcément $R_{F'}$, donc aussi son dual, et il stabilise aussi le dernier ensemble ci-dessus. Donc il stabilise R' et appartient à K'. Cela prouve (4) sous l'hypothèse $d_{an}(V) = 3$.

Supposons enfin $d_{an}(V) = 4$. Avec les mêmes notations que dans le cas précédent, on peut identifier V_{an} à $E \oplus E$ et q_{an} à la forme

$$(w_1 \oplus w_2, w'_1 \oplus w'_2) = \lambda Trace_{E/F}(\tau(w_1)w'_1) + \varpi_F \lambda Trace_{E/F}(\tau(w_2)w'_2).$$

Introduisons une racine carrée z de ϖ_F, posons $F' = E(z)$. On vérifie comme dans le cas précédent que le réseau $R' = z^{-1}R_{F'} \cap \lambda R^*_{F'}$ de $V_{F'}$ satisfait les conditions de (4). Cela achève la preuve. $\square$

Revenons au réseau R que l'on a fixé en 7.2. On lui a imposé d'être somme d'un réseau de V_0 et d'un réseau de Z engendré par des éléments proportionnels aux éléments v_i pour $i = \pm 1, ..., \pm r$. La preuve du lemme montre que l'on peut imposer aux réseaux R' de l'énoncé de vérifier les mêmes conditions.

10.8 Preuve de la relation 10.4(11)

On va élargir les hypothèses sur la fonction $X'' \mapsto \gamma_{X''}$. Celles que l'on impose dans ce paragraphe sont

(1) il existe un sous-ensemble compact Ω de $\Xi + S + \Sigma$ tel que $X''_\Sigma = \gamma_{X''}^{-1} X'' \gamma_{X''} \in \Omega$ pour tout $X'' \in \omega_{T''} \cap \mathfrak{t}''(F)^S$;

(2) il existe $c_1 > 0$ tel que $\sigma(\gamma_{X''}) < c_1 log(N)$ pour tout $X'' \in \omega_{T''} \cap \mathfrak{t}''(F)^S[> N^{-b}]$.

La fonction que nous avons utilisée jusque-là vérifie ces hypothèses : (1) résulte de 9.7(1) et on a vu dans la preuve de 10.4(8) que 9.7(2) entraînait (2).

Soit $Q = LU_Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$. On note Σ_Q^+ l'ensemble des racines de $A_{M_\natural}$ dans $\mathfrak{u}_Q$.

Lemme. *Soit $c > 0$. Il existe $c' > 0$ tel que la propriété suivante soit vérifiée. Soient $a \in A_{T''}(F)$, $g \in G(F)$, $\bar{u} \in U_{\bar{Q}}(F)$ et $X \in \omega_{T''} \cap \mathfrak{t}''(F)^S[> N^{-b}]$. On suppose $\sigma(g)$, $\sigma(\bar{u})$, $\sigma(\bar{u}g) < c log(N)$ et $\alpha(H_{M_\natural}(a)) > c' log(N)$ pour tout $\alpha \in \Sigma_Q^+$. Alors on a l'égalité $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} a \bar{u} g) = \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} a g)$.*

Preuve. Soient E une extension finie de F vérifiant la condition du lemme précédent et F' une extension finie de E. Fixons un réseau R' de $V_{F'}$ vérifiant la conclusion de ce lemme. Comme on l'a dit, on peut supposer qu'il vérifie des propriétés analogues à celles que l'on a imposées à R. A l'aide de ce réseau, on construit la fonction $\kappa_N^{F'}$ sur $G(F')$ analogue à κ_N. On vérifie que la restriction à $G(F)$ de la fonction $\kappa^{F'}_{Nval_{F'}(\varpi_F)}$ est égale à κ_N. Le lemme se déduit alors du même lemme où le corps des scalaires a été étendu à F'. On va maintenant oublier ces constructions, en retenant que l'on a le droit d'étendre le corps F. En particulier, on peut supposer les tores T et H''_S déployés.

Dans tout ce qui suit, les éléments X'' sont implicitement supposés appartenir à $\omega_{T''} \cap \mathfrak{t}''(F)^S$. Montrons que l'on peut changer de fonction $X'' \mapsto \gamma_{X''}$. Considérons une fonction $X'' \mapsto \gamma_{X''}$ soumise aux conditions (1) et (2) ci-dessus, et notons ici $X'' \mapsto \underline{\gamma}_{X''}$ la fonction initiale, soumise aux conditions de 9.7. On pose $X''_\Sigma = \gamma_{X''}^{-1} X'' \gamma_{X''}$ et $\underline{X''}_\Sigma = \underline{\gamma}_{X''}^{-1} X'' \underline{\gamma}_{X''}$. D'après le lemme 9.5, pour tout $X'' \in \mathfrak{t}''(F)^S$, il y a d'uniques éléments $u(X'') \in U''(F)$ et $t(X'') \in H''_S(F)$ tels que $X''_\Sigma = u(X'')^{-1} t(X'')^{-1} \underline{X''}_\Sigma t(X'') u(X'')$. On a $t(X'')^{-1} \underline{X''}_\Sigma t(X'') \in \Xi + S + \Lambda$. D'après le lemme 9.3, les coefficients de $u(X'')$ et $t(X'')^{-1} \underline{X''}_\Sigma t(X'')$ sont polynomiaux en ceux de X''_Σ. Ce dernier terme reste dans un compact, donc $u(X'')$ et $t(X'')^{-1}\underline{X''}_\Sigma t(X'')$ sont bornés. Reprenons la preuve du lemme 10.1, précisément celle de l'assertion (3). On voit que le fait que $t(X'')^{-1}\underline{X''}_\Sigma t(X'')$ soit borné entraîne une majoration $\sigma(t(X'')) << 1+|log|Q_S(X'')|_F|$. Pour $X''\in\mathfrak{t}''(F)^S[> N^{-b}]$, on a donc $\sigma(t(X'')) << log(N)$. Puisque les images de X'' par les conjugaisons par $\gamma_{X''}$ et par $\underline{\gamma}_{X''}t(X'')u(X'')$ sont égales, il existe $y(X'')\in T''(F)$ tel que $\gamma_{X''}= y(X'')\underline{\gamma}_{X''}t(X'')u(X'')$. Les majorations (2) pour nos deux fonctions et celles que nous venons de démontrer impliquent $\sigma(y(X'')) << log(N)$ pour $X\in\mathfrak{t}(F)[S;> N^{-b}]$. Soient c, a, g, $\bar{u}$ et X'' comme dans le lemme. Puisque κ_N est invariante à gauche par $U(F)H(F)$, on a

$$\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g)=\kappa_N(\underline{\gamma}_{X''}^{-1}a\bar{u}'g'),$$

$$\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag)=\kappa_N(\underline{\gamma}_{X''}^{-1}ag'),$$

où $g'=y(X'')^{-1}g$, $\bar{u}'=y(X'')^{-1}\bar{u}y(X'')$. Il existe $\underline{c}>0$ (indépendant des variables) tel que $\sigma(g')$, $\sigma(\bar{u}')\,\sigma(u'g')<\underline{c}log(N)$. Supposons le lemme démontré pour la fonction $X''\mapsto\underline{\gamma}_{X''}$. A $\underline{c}$, ce lemme associe une constante $\underline{c}'$. Les égalités ci-dessus montrent que, pour la fonction $X''\mapsto\gamma_{X''}$, la conclusion du lemme est valide pour la constante $c'=\underline{c}'$. Le même calcul s'applique dans l'autre sens : la validité du lemme pour la fonction $X''\mapsto\gamma_{X''}$ entraîne sa validité pour la fonction $X''\mapsto\underline{\gamma}_{X''}$.

Démontrons maintenant le lemme dans le cas où $r=0$. Comme en 9.4, on introduit des coordonnées en posant

$$X''_\Sigma=S+c(v_0,[z_0w_S]+\sum_{j=\pm1,...,\pm m}z_jw_j),$$

où, comme en 9.6, les termes entre crochets n'existent que si d est pair. Le tore T'' étant déployé, on peut introduire un système hyperbolique maximal $(\epsilon_{\pm k})_{k=1,...,l}$ de V''_0 formé de vecteurs propres pour T''. On note x_k la valeur propre de X'' sur ϵ_k. Soit $k=1,...,l$, posons

$$\gamma_{X''}^{-1}\epsilon_k=Y(2\nu_0)^{-1}v_0+[y_0w_S]+\sum_{j=\pm1,...\pm m}y_jw_j,$$

$$\gamma_{X''}^{-1}\epsilon_{-k}=Y'(2\nu_0)^{-1}v_0+[y'_0w_S]+\sum_{j=\pm1,...\pm m}y'_jw_j.$$

Ces éléments sont vecteurs propres de X''_Σ, de valeurs propres x_k et $-x_{-k}$. Cela se traduit par les égalités

$$s_jy_j+z_jY=x_ky_j,\ -s_jy_{-j}+z_{-j}Y=x_ky_{-j},\ [z_0Y=x_ky_0],$$

$$s_jy'_j+z_jY'=-x_ky'_j,\ -s_jy'_{-j}+z_{-j}Y'=-x_ky'_{-j},\ [z_0Y'=-x_ky'_0],$$

où $j=1,...,m$ et les s_j sont les valeurs propres de S. Supposons $X\in\mathfrak{t}(F)[S;> N^{-b}]$ Alors $Q_S(X'')\neq0$, a fortiori $x_k\pm s_j\neq0$ pour tous j,k et les égalités ci-dessus impliquent

$$y_j=\frac{z_jY}{x_k-s_j},\ y_{-j}=\frac{z_{-j}Y}{x_k+s_j}\ [y_0=\frac{z_0Y}{x_k}],$$

$$y'_j=\frac{z_jY'}{-x_k-s_j},\ y'_{-j}=\frac{z_{-j}Y'}{-x_k+s_j}\ [y'_0=\frac{z_0Y'}{-x_k}],$$

On a d'autre part l'égalité $q(\gamma_{X''}^{-1}\epsilon_k,\gamma_{X''}^{-1}\epsilon_{-k})=1$. Les formules précédentes traduisent cette égalité par $YY'P(X'')=2\nu_0$, où

$$P(X'')=1-[4\nu_0\nu_S\frac{z_0^2}{x_k^2}]-2\nu_0\sum_{j=1,...,m}z_jz_{-j}(\frac{1}{(x_k-s_j)^2}+\frac{1}{(x_k+s_j)^2}).$$

En utilisant les égalités 9.4(1) et (2), on obtient

$$P(X'')=1+[\frac{\prod_{k'=1,...,l;k'\neq k}x_{k'}^2}{\prod_{j=1,...,m}s_j^2}]-\sum_{j=1,...,m}\frac{(x_k^2+s_j^2)\prod_{k'=1,...,l;k'\neq k}(s_j^2-x_{k'}^2)}{(s_j^2-x_k^2)[s_j^2]\prod_{j'=1,...,m;j'\neq j}(s_j^2-s_{j'}^2)}.$$

Cette expression est calculée par le lemme 10.6. En effet, si d est impair, on a $l=m$. On prend pour polynôme $R(T)=\prod_{k'=1,...,l;k'\neq k}(T-x_{k'}^2)$ et on remplace les indéterminées T, S_1, ...,S_l de 10.6 par x_k^2, s_1^2,...,s_m^2. Si d est pair, on a $l=m+1$. On prend le même polynôme $R(T)$ et on remplace les indéterminées par x_k^2, 0, s_1^2,...,s_m^2. Le lemme 10.6 conduit ainsi à l'égalité

$$(3)\qquad YY'=2\nu_0\frac{R_1(X'')}{R_2(X'')},$$

où

$$(4)\qquad R_1(X'')=\prod_{j=1,...,m}(s_j^2-x_k^2),$$

$$R_2(X'')=\begin{cases}-2x_k^2\prod_{k'=1,...,l;k'\neq k}(x_{k'}^2-x_k^2), & \text{si } d \text{ est impair},\\ 2\prod_{k'=1,...,l;k'\neq k}(x_{k'}^2-x_k^2), & \text{si } d \text{ est pair}.\end{cases}$$

Rappelons que

$$Q_S(X'')=\prod_{j=1,...,m;k'=1,...,l}(s_j^2-x_{k'}^2).$$

On peut donc aussi écrire $YY'Q(X'')=Q_S(X'')$, où Q est un polynôme sur $\mathfrak{t}''(F)$. Puisque X'' reste dans un compact, $val_F(Q(X''))$ est minoré, donc $val_F(YY')<<val_F(Q_S(X''))$. Supposons $X''\in\mathfrak{t}''(F)^S[>N^{-b}]$. Alors $val_F(Q_S(X''))<<log(N)$. On a aussi $\sigma(\gamma_{X''})<<log(N)$, donc $val_F(Y),val_F(Y')>>-log(N)$. On en déduit

$$val_F(Y),val_F(Y')<<log(N).$$

Remarquons que $Y=q(\gamma_{X''}^{-1}\epsilon_k,v_0)=q(\epsilon_k,\gamma_{X''}v_0)$ et de même $Y'=q(\epsilon_{-k},\gamma_{X''}v_0)$. Cela démontre que

(5) on a $val_F(q(\epsilon_{\pm k},\gamma_{X''}v_0))<<log(N)$ pour tout $k=1,...,l$ et tout $X\in\omega_{T''}\cap\mathfrak{t}''(F)^S[>N^{-b}]$.

Considérons l'ensemble E_N des $a\in A_{T''}(F)$ tels qu'il existe $g\in G(F)$ et $X''\in\omega_{T''}\cap\mathfrak{t}''(F)^S[>N^{-b}]$ de sorte que $\sigma(g)<c\,log(N)$ et $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag)=1$. Puisque T'' est déployé, on a $A_{T''}=T''$ et tout $a\in A_{T''}(F)$ est déterminé par ses valeurs propres a_k sur les vecteurs ϵ_k. Montrons que

(6) on peut fixer $c_2>0$ tel que

(i) $val_R(g^{-1}v)-val_R(v)>-c_2log(N)$ pour tout $v\in V$, $v\neq 0$, et tout $g\in G(F)$ tel que $\sigma(g)<c\,log(N)$;

(ii) $val_R(\gamma_{X''}v_0)>-c_2log(N)$ pour tout $X''\in\omega_{T''}\cap\mathfrak{t}''(F)^S[>N^{-b}]$;

(iii) $val_R(a^{-1}v)-val_R(v)>-N-c_2log(N)$ pour tout $v\in V$, $v\neq 0$, et tout $a\in E_N$.

Les deux premières majorations sont aisées. Montrons la troisième. Soient $a\in E_N$, g tel que $\sigma(g)<c\,log(N)$ et $X''\in\omega_{T''}\cap\mathfrak{t}''(F)^S[>N^{-b}]$ tels que $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag)=1$.

Cette condition signifie que $val_R(g^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}v_0) \geq -N$. Grâce à (6)(i), elle entraîne $val_R(a^{-1}\gamma_{X''}v_0) + N >> -log(N)$. Donc

$$val_F(q(a^{-1}\gamma_{X''}v_0, \epsilon_{\pm k})) + N >> -log(N)$$

pour tout k. On a

$$q(a^{-1}\gamma_{X''}v_0, \epsilon_{\pm k}) = q(\gamma_{X''}v_0, a\epsilon_{\pm k}) = a_k^{\pm 1}q(\gamma_{X''}v_0, \epsilon_{\pm k}).$$

La majoration précédente et (5) entraînent

$$\pm val_F(a_k) + N >> -log(N),$$

et on en déduit la majoration (6)(iii).

Enfin

(7) il existe $c' > 0$ vérifiant la propriété suivante ; pour tout $a \in A_{T''}(F)$ tel que $\alpha(H_{M_\natural}(a)) > c'log(N)$ pour tout $\alpha \in \Sigma_Q^+$, pour tout $\bar{u} \in U_{\bar{Q}}(F)$ tel que $\sigma(\bar{u}) < c\,log(N)$ et tout $v \in V$, $v \neq 0$, on a $val_R(a\bar{u}a^{-1}v - v) > 3c_2log(N)$.

En effet, les valuations des coefficients de $\bar{u} - 1$, disons dans une base de R, sont minorés par $-c_3log(N)$, pour une constante c_3 convenable. On en déduit que les valuations des coeffients de $a\bar{u}a^{-1} - 1$ sont minorés par $-c_3log(N) + inf\{\alpha(H_{M_\natural}(a)); \alpha \in \Sigma_Q^+\}$. L'assertion s'ensuit.

La constante c' étant maintenant fixée, soient a, g, $\bar{u}$ et X'' comme dans l'énoncé. Si $a \notin E_N$, on a $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag) = 0$. Supposons $a \in E_N$. D'après la définition de κ_N, pour prouver l'égalité $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag)$, il suffit de prouver que $val_R(v) \geq -N$, où

$$v = g^{-1}\bar{u}^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}v_0 - g^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}v_0.$$

On pose $v_1 = gv$, $v_2 = av_1$, $v_3 = \gamma_{X''}v_0$. On a $v_2 = a\bar{u}^{-1}a^{-1}v_3 - v_3$ et

$$val_R(v) = val_R(v) - val_R(v_1) + val_R(v_1) - val_R(v_2) + val_R(v_2) - val_R(v_3) + val_R(v_3).$$

Les minorations (6) et (7) entraînent la minoration $val_R(v) \geq -N$ cherchée.

Passons au cas général où on ne suppose plus $r = 0$. On peut fixer un élément $P_\natural = M_\natural U_\natural \in \tilde{\mathcal{P}}(M_\natural)$ et se borner à considérer des $a \in A_{T''}(F)$ tels que $H_{M_\natural}(a) \in Cl(\mathcal{A}_{P_\natural}^+)$. Si $P_\natural$ n'est pas inclus dans Q, l'assertion à prouver est vide car il n'y a pas de tels a pour lesquels $\alpha(H_{M_\natural}(a)) > 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_Q^+$. On suppose donc $P_\natural \subset Q$. Montrons que

(8) il existe $\delta \in G''(F)$ tel que $\delta P_\natural \delta^{-1} \subset \bar{P}$ et $A \subset \delta A_{T''}\delta^{-1}$.

Puisque $A \subset G''$ et $A_{T''} = T''$ est un sous-tore maximal de G'', on peut en tout cas trouver $\delta \in G''(F)$ tel que $\delta^{-1}A\delta \subset A_{T''}$. On a alors $\delta^{-1}\bar{P}\delta \in \mathcal{F}(M_\natural)$. Supposons que l'on n'est pas dans le cas exceptionnel. Fixons un élément $P' \in \mathcal{P}(M_\natural)$ tel que $P' \subset \delta^{-1}\bar{P}\delta$. Le Lévi $M_\natural$ a une forme particulière : il est produit d'un groupe spécial orthogonal et de groupes $GL(1)$. On sait qu'alors deux éléments de $\mathcal{P}(M_\natural)$ sont conjugués par un élément de $Norm_{G(F)}(M_\natural)$. Si d est impair ou si $W' = \{0\}$, l'application naturelle

$$Norm_{G''(F)}(A_{T''}) \to Norm_{G(F)}(M_\natural)/M_\natural(F)$$

est surjective. Donc $P_\natural$ et P' sont conjugués par un élément de $Norm_{G''(F)}(A_{T''})$. Quitte à multiplier δ à droite par un élément de cet ensemble, on peut supposer $P' = P_\natural$ et la conclusion de (6) est vérifiée. Supposons d pair et $W' \neq \{0\}$. Fixons $w' \in W'$ tel que $q(w') \neq 0$. Identifions G''^+ à un sous-groupe de G en faisant agir un élément $g \in G''^+$

par $det(g)$ sur Fw' et par l'identité sur l'orthogonal de w' dans W'. Alors l'application naturelle
$$Norm_{G''^+(F)}(A_{T''}) \to Norm_{G(F)}(M_\natural)/M_\natural(F)$$
est surjective, donc $P_\natural = g^{-1}P'g$ pour un élément $g \in Norm_{G''^+(F)}(A_{T''})$. Si $g \in G''(F)$, on conclut comme ci-dessus. Sinon, on remarque que A n'est pas un sous-tore maximal de G'', car A fixe le vecteur $v_0 \in V''$. L'inclusion $\delta^{-1}A\delta \subset A_{T''}$ est stricte et on voit qu'il existe un élément $y \in Norm_{G''^+(F)}(A_{T''})$ tel que $det(y) = -1$ et la conjugaison par y fixe tout point de $\delta^{-1}A\delta$. Cette conjugaison conserve donc P' et on peut remplacer g par yg, ce qui nous ramène au cas précédent.

Dans le cas exceptionnel, on vérifie que $\delta^{-1}\bar{P}\delta$ appartient à $\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$. On remplace dans la preuve ci-dessus les ensembles $\mathcal{P}(M_\natural)$ et $Norm_{G(F)}(M_\natural)$ par $\tilde{\mathcal{P}}(M_\natural)$ et $Norm_{G(F)}(A_{T''})$. En utilisant le lemme 10.3, on voit que le raisonnement reste valable. Cela prouve (8).

Soient δ vérifiant (8) et a, g, $\bar{u}$ et X'' comme dans l'énoncé. On a
$$\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = \kappa_N(\underline{\gamma}_{\underline{X}''}^{-1}\underline{a}\underline{\bar{u}}\underline{g}),$$
où $\underline{X}'' = \delta X''\delta^{-1}$, $\underline{\gamma}_{\underline{X}''} = \delta\gamma_{X''}$, $\underline{a} = \delta a\delta^{-1}$, $\underline{\bar{u}} = \delta\bar{u}\delta^{-1}$, $\underline{g} = \delta g$. On remarque que ces termes vérifient les mêmes hypothèses que les termes de départ (avec une autre constante c), mais avec le tore T'' et le sous-groupe parabolique $P_\natural$ remplacés par $\delta T''\delta^{-1}$ et $\delta P_\natural\delta^{-1}$. Cela nous ramène à démontrer le lemme pour ces nouveaux termes.

On va plutôt oublier ces constructions, mais supposer que nos objets de départ vérifient les mêmes hypothèses que ceux que l'on vient de construire. C'est-à-dire que l'on suppose désormais $P_\natural \subset \bar{P}$ et $A \subset A_{T''}$. Le tore T'' se décompose en $T'' = AT''_0$, où T''_0 est un sous-tore maximal de G''_0. En travaillant dans ce groupe G''_0, on définit l'ensemble $\mathfrak{t}''_0(F)^S$ et une fonction $X''_0 \mapsto \gamma_{0,X''_0} \in G''_0(F)$ sur cet ensemble, vérifiant les analogues de (1) et (2). Pour $X'' \in \mathfrak{t}''(F)^S$, écrivons $X'' = X''_a + X''_0$, avec $X''_a \in \mathfrak{a}(F)$ et $X''_0 \in \mathfrak{t}''_0(F)$. On vérifie que $X''_0 \in \mathfrak{t}''_0(F)^S$. Posons $X''_\Sigma = \Xi + X''_a + \gamma_{0,X''_0}^{-1}X''_0\gamma_{0,X''_0}$. On a $X''_\Sigma \in \Xi + S + \Sigma$ et, comme dans la preuve du lemme 9.6, on montre que X''_Σ est conjugué à X'' par un élément de $G''(F)$. D'autre part, considérons l'élément $\gamma_{0,X''_0}\Xi\gamma_{0,X''_0}^{-1}$. Il appartient à $\bar{\mathfrak{u}}(F)$. Puisque X'' est un élément régulier de $\mathfrak{m}''(F)$, il existe $v_{X''} \in \bar{U}(F)$ tel que $\gamma_{0,X''_0}\Xi\gamma_{0,X''_0}^{-1} = v_{X''}^{-1}X''v_{X''}$. Cet élément $v_{X''}$ est unique. Ainsi qu'il est bien connu, ses coefficients sont des fractions rationnelles en les coefficients de $\gamma_{0,X''_0}\Xi\gamma_{0,X''_0}^{-1}$ et X'' et les dénominateurs de ces fractions rationnelles divisent le polynôme $det(X''|\mathfrak{g}''/\mathfrak{t}'')$. Pour $X'' \in \omega_{T''} \cap \mathfrak{t}''(F)^S[> N^{-b}]$, on a donc une majoration $\sigma(v_{X''}) << log(N)$. Posons $\gamma_{X''} = v_{X''}\gamma_{0,X''_0}$. On a alors $\gamma_{X''}^{-1}X''\gamma_{X''} = X''_\Sigma$ et on voit que l'application $X'' \mapsto \gamma_{X''}$ vérifie les propriétés (1) et (2). On peut travailler avec cette application. On a $v_{X''} \in U_\natural(F)$. Décomposons cet élément en $v_{X''} = n_{X''}\nu_{X''}$, avec $n_{X''} \in U_\natural(F) \cap L(F)$ et $\nu_{X''} \in U_Q(F)$. Soient a, X'', g et $\bar{u}$ comme dans l'énoncé. On a $\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g = \gamma_{0,X''_0}^{-1}a\bar{u}'g'k)$, où $\bar{u}' = (a^{-1}n_{X''}a)^{-1}\bar{u}(a^{-1}n_{X''}a)$, $g' = a^{-1}n_{X''}^{-1}ag$, $k = g^{-1}\bar{u}^{-1}a^{-1}\nu_{X''}a\bar{u}g$. Puisque $\nu_{X''} \in U_Q(F)$ et ainsi qu'on l'a vu au cours de la preuve du cas $r = 0$, on peut fixer $c_4 > 0$ tel que la condition $inf\{\alpha(H_{M_\natural}(a)); \alpha \in \Sigma_Q^+\} > c_4 log(N)$ entraîne que les valuations des coefficients de $k - 1$ soient $>> log(N)$. On impose cette condition sur a. Alors $k \in K$. La conjugaison par a^{-1} contracte $U_\natural(F)$, donc $\sigma(a^{-1}n_{X''}a) << log(N)$ et aussi $\sigma(\bar{u}') << log(N)$, $\sigma(g') << log(N)$. On a donc $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = \kappa_N(\gamma_{0,X''_0}^{-1}a\bar{u}'g')$ et de même $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag) = \kappa_N(\gamma_{0,X''_0}^{-1}ag')$, où les éléments $\bar{u}'$ et g' vérifient des conditions analogues à celles de départ. Soient $\bar{u}_0 \in U_{\bar{Q}}(F) \cap G_0(F)$ tel que $\bar{u}' \in (U_{\bar{Q}}(F) \cap U(F))\bar{u}_0$, $y' \in A(F)$ et

$g_0 \in G_0(F)$ tels que $g' \in U(F)y'g_0K$ et enfin $y \in A(F)$ et $a_0 \in A_{T''_0}(F)$ tels que $a = ya_0$. Alors $\gamma_{0,X''_0}^{-1}a\bar{u}'g' \in U(F)yy'\gamma_{0,X''_0}^{-1}a_0\bar{u}_0g_0K$, donc

$$\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = \kappa_N(\gamma_{0,X''_0}^{-1}a\bar{u}'g') = \kappa_N(yy'\gamma_{0,X''_0}^{-1}a_0\bar{u}_0g_0).$$

De même

$$\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag) = \kappa_N(\gamma_{0,X''_0}^{-1}ag') = \kappa_N(yy'\gamma_{0,X''_0}^{-1}a_0g_0).$$

Par définition de κ_N, ces expressions se récrivent

$$\kappa_{A,N}(yy')\kappa_{0,N}(\gamma_{0,X''_0}^{-1}a_0\bar{u}_0g_0), \text{ resp. } \kappa_{A,N}(yy')\kappa_{0,N}(\gamma_{0,X''_0}^{-1}a_0g_0),$$

où $\kappa_{A,N}$ est une certaine fonction sur $A(F)$ et $\kappa_{0,N}$ est l'analogue de κ_N pour le groupe G_0. Mais les données affectées d'un indice 0 vérifient des conditions similaires à celles de départ. Cela nous ramène au cas du groupe G_0, autrement dit au cas $r = 0$ que nous avons déjà traité. Cela achève la démonstration. $\square$

Démontrons 10.4(11). Soit $c_4 > 0$. On impose à $Z_{P_{min}}$ la minoration $c_4log(N) < c_1inf\{\alpha(Z_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}$ pour que tous les termes ci-dessous soient définis. Comme en 10.5, pour g et $\bar{u}$ comme en 10.4(11), la fonction

$$\zeta \mapsto \tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(\zeta, \mathcal{Z}(g))\tilde{\tau}_Q(\zeta - Z(g)_{Q,T''})$$

est insensible au changement de g en $\bar{u}g$. Alors

$$\kappa_{N,X''}(Q,\bar{u}g) - \kappa_{N,X''}(Q,g) = \int_{A_{T''}(F)} \tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Z}(g))\tilde{\tau}_Q(H_{M_\natural}(a) - Z(g)_{Q,T''})$$
$$(\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) - \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag))da.$$

Il nous suffit que la condition $c_5log(N) < inf\{\alpha(Z_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}$ entraîne la propriété suivante. Soit $a \in A_{T''}(F)$ tel que

$$(9) \qquad \tilde{\sigma}_{M_\natural}^Q(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Z}(g))\tilde{\tau}_Q(H_{M_\natural}(a) - Z(g)_{Q,T''}) \neq 0.$$

Alors $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag)$. Prenons $c = c_4$ dans le lemme précédent. On en déduit une constante c'. Le même calcul qu'en 10.5 montre que (9) implique

$$inf\{\alpha(H_{M_\natural}(a)); \alpha \in \Sigma_Q^+\} - inf\{\alpha(Z_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\} >> -log(N).$$

Il existe donc $c_5 > 0$ (et $c_5 > c_4/c_1$) tel que la condition $c_5log(N) < inf\{\alpha(Z_{P_{min}}); \alpha \in \Delta_{min}\}$ entraîne $inf\{\alpha(H_{M_\natural}(a)); \alpha \in \Sigma_Q^+\} > c'log(N)$. Alors l'égalité cherchée est la conclusion du lemme ci-dessus. $\square$

10.9 Apparition des intégrales orbitales pondérées

On fixe $S \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{T}(G_x)$. Soit N_0 l'entier déterminé par la proposition 10.4.

Proposition. *Pour tout $N \geq N_0$ et tout $X \in \mathfrak{t}(F)[S; > N^{-b}] \cap (\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S)$, on a les égalités*

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f_{x,\omega}^\sharp(X)\kappa_{N,X''}(g)dg = 0$$

si $A_{T'} \neq \{1\}$;

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\kappa_{N,X''}(g)dg = \nu(T')\nu(A_{T''})\theta^\sharp_{f,x,\omega}(X)$$

si $A_{T'} = \{0\}$.

Preuve. En 10.4, on avait fixé $Y_{P_{min}}$ et construit une fonction $g \mapsto \tilde{v}(g)$. Il convient maintenant de la noter plus précisément $g \mapsto \tilde{v}(g, Y_{P_{min}})$. Soit $X \in \mathfrak{t}(F)[S; > N^{-b}] \cap (\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S)$. Dans les intégrales ci-dessus, on peut remplacer $\kappa_{N,X''}(g)$ par $\tilde{v}(g, Y_{P_{min}})$, pourvu que $Y_{P_{min}}$ vérifie la minoration de la proposition 10.4. Supposons que l'on n'est pas dans le cas exceptionnel. Alors $\tilde{v}(g, Y_{P_{min}})$ est la fonction introduite par Arthur dans [A3] p.30 : avec les notations de cette référence, c'est $v_{M_\natural}(1, g, Y_{P_{min}})$ (il n'y a pas de $\nu(A_{T''})$ dans la définition d'Arthur, car sa mesure sur $A_{T''}(F)$ n'est pas la même que la nôtre). Remarquons que les intégrales de l'énoncé sont à support compact. On peut faire tendre $Y_{P_{min}}$ vers l'infini. Alors $\tilde{v}(g, Y_{P_{min}})$ est calculé en [A3] p.46 : pour $Y_{P_{min}}$ dans un réseau convenable $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{M_{min}}$, c'est une somme de fonctions $Y_{P_{min}} \mapsto q_\zeta(Y_{P_{min}})exp(\zeta(Y_{P_{min}}))$, où q_ζ est un polynôme et $\zeta \in Hom(\mathcal{R}, 2\pi i\mathbb{Q}/2\pi i\mathbb{Z})$. De telles fonctions sont linéairement indépendantes. Puisque l'expression que l'on calcule est indépendante de $Y_{P_{min}}$, on peut aussi bien remplacer $\tilde{v}(g, Y_{P_{min}})$ par $q_0(0)$. Avec les notations d'Arthur, on a

$$q_0(0) = \tilde{v}_{M_\natural}(1, g) = (-1)^{a_{M_\natural}} \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_\natural)} c'_Q v^Q_{M_\natural}(g),$$

cf. [A3] (6.6) et p.92. Les c'_Q sont des constantes et on a $c'_G = 1$. On a obtenu l'égalité

$$(1) \qquad \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\kappa_{N,X''}(g)dg = (-1)^{a_{M_\natural}} \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_\natural)} c'_Q I(Q),$$

où

$$I(Q) = \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X) v^Q_{M_\natural}(g)dg.$$

Pour $Q = LU_Q \neq G$, on décompose l'intégrale en produit d'intégrales sur $T'(F)A_{T''}(F)\backslash L(F)$, K_{min} et $U_Q(F)$. On voit apparaître une intégrale

$$\int_{U_Q(F)} {}^{ulk} f^\sharp_{x,\omega}(X)du.$$

Or cette intégrale est nulle d'après le lemme 5.5(i). Donc $I(Q) = 0$. Pour $Q = G$, on peut remplacer l'intégration sur $T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)$ par l'intégration sur $T(F)\backslash G(F)$, à condition de multiplier par $mes(T(F)/T'(F)A_{T''}(F))$. On obtient

$$I(G) = mes(T(F)/T'(F)A_{T''}(F))D^{G_x}(X)^{-1/2} J^\sharp_{M_\natural,x,\omega}(X, f)$$

avec la notation de 5.4. Si $A_{T'} \neq \{1\}$, on a $A_{M_\natural} = A_{T''} \subsetneq A_{G_{x,X}} = A_{T'}A_{T''}$. Donc $J^\sharp_{M_\natural,x,\omega}(X, f) = 0$ d'après le lemme 5.5(ii). Supposons $A_{T'} = \{1\}$. Alors $M_\natural$ est le Lévi noté $\mathbf{M}(X)$ en 5.6 et, en appliquant les définitions de ce paragraphe, on obtient

$$I(G) = (-1)^{a_{M_\natural}} \nu(T) mes(T(F)/T'(F)A_{T''}(F))\theta^\sharp_{f,x,\omega}(X).$$

On vérifie que $\nu(T)mes(T(F)/T'(F)A_{T''}(F)) = \nu(T')\nu(A_{T''})$ et la formule (1) devient celle de l'énoncé.

Supposons maintenant que l'on est dans le cas exceptionnel. Alors $T' = G'$ est un tore déployé de dimension 1 et on peut supposer $T' \subset M_{min}$. Il faut remarquer que les fonctions d'Arthur que nous avons utilisées ci-dessus ne dépendent de g et $Y_{P_{min}}$ que par l'intermédiaire des familles de points $(H_{P_\natural}(g))_{P_\natural\in\mathcal{P}(M_\natural)}$ et $(Y_{P_\natural})_{P_\natural\in\mathcal{P}(M_\natural)}$. On peut en fait associer de telles fonctions à deux familles $(G, M_\natural)$-orthogonales de points de $\mathcal{A}_{M_\natural}$, la seconde étant "assez positive". Introduisons le groupe $\tilde{G}$ de 10.3 et rappelons que le lemme de ce paragraphe nous permet d'identifier $\tilde{\mathcal{P}}(M_\natural)$ et $\tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$ à $\mathcal{P}(\tilde{M})$ et $\mathcal{F}(\tilde{M})$. En remplaçant G par $\tilde{G}$, $M_\natural$ par $\tilde{M}$, la famille $(H_{P_\natural}(g))_{P_\natural\in\mathcal{P}(M_\natural)}$ par $(H_{P_\natural}(g)_{T''})_{P_\natural\in\tilde{\mathcal{P}}(M_\natural)}$ et la famille $(Y_{P_\natural})_{P_\natural\in\mathcal{P}(M_\natural)}$ par $(Y_{P_\natural,T''})_{P_\natural\in\tilde{\mathcal{P}}(M_\natural)}$, on remplace la fonction $v_{M_\natural}(1, g, Y_{P_{min}})$ utilisée ci-dessus par une autre fonction, notons-la $v_{\tilde{M}}(1, g, Y_{P_{min}})$. Elle est égale à notre fonction $\tilde{v}(g, Y_{P_{min}})$. Les calculs d'Arthur restent valables pour cette fonction ainsi que les arguments ci-dessus. On obtient la formule (1) modifiée de la façon suivante : la somme est limitée aux $Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$; les fonctions $v^Q_{M_\natural}(g)$ sont remplacées par des fonctions, notons-les $v^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(g)$ Ce terme est la constante associée à la $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille de points $(H_{P_\natural}(g)_{T''})_{P_\natural\in\tilde{\mathcal{P}}(M_\natural); P_\natural\subset Q}$. Le sous-espace $\mathcal{A}_{T''}$ de $\mathcal{A}_{M_\natural}$ vérifie les conditions de [A2] paragraphe 7. Pour $Q = LU_Q \in \tilde{\mathcal{F}}(M_\natural)$, on peut appliquer le corollaire 7.2 de [A2] et on obtient une égalité

$$v^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(g) = \sum_{L'\in\mathcal{F}^L(M_\natural)} d(L')v^{Q'}_{M_\natural}(g).$$

Comme en 2.2(3), Q' est un élément de $\mathcal{P}(L')$. La constante $d(L')$ est non nulle si et seulement si on a l'égalité

$$\mathcal{A}^L_{M_\natural} = proj^L_{M_\natural}(\mathcal{A}_{T''}) \oplus \mathcal{A}^L_{L'}.$$

Les L' qui interviennent sont tous différents de G : c'est évident si $Q \neq G$ puisque $L' \subset L$; si $Q = G$, cela résulte de l'égalité ci-dessus et du fait que $\mathcal{A}_{T''}$ est strictement inclus dans $\mathcal{A}_{M_\natural}$. Le même argument que dans le cas non exceptionnel montre alors que tous les termes de la formule (1) sont nuls. $\square$

10.10 La proposition principale

Si $A_{G'_x} = \{1\}$, posons

$$(1) \qquad J_{x,\omega}(\theta, f) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \sum_{T=T'T''\in\mathcal{T}_{ell}(G'_x)\times\mathcal{T}(G'')} \nu(T')|W(G_x, T)|^{-1}$$

$$\int_{\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S} \hat{j}_S(X')D^{G'_x}(X')D^{G''}(X'')^{1/2}\theta^\sharp_{f,x,\omega}(X)dX.$$

Si $A_{G'_x} \neq \{1\}$, posons

$$J_{x,\omega}(\theta, f) = 0.$$

Proposition. *(i) L'expression (1) est absolument convergente.*

(ii) On a l'égalité

$$lim_{N\to\infty} I_{x,\omega,N}(\theta, f) = J_{x,\omega}(\theta, f).$$

Preuve. Les intégrales de l'expression (1) sont à support compact. D'après le lemme 5.4(iii), on a une majoration

$$D^{G_x}(X)^{1/2}|\theta^\sharp_{f,x,\omega}(X)| << (1+|log(D^{G_x}(X))|)^k.$$

D'après [HCvD] théorème 13, la fonction

$$X' \mapsto D^{G'_x}(X')^{1/2}|\hat{j}_S(X')|$$

est bornée. Le lemme 2.4 entraîne le (i) de l'énoncé.

Pour le (ii), on utilise la dernière formule de 10.1 qui nous ramène à prouver que $lim_{N\to\infty}I^*_{x,\omega,N}(\theta,f) = J_{x,\omega}(\theta,f)$. Le terme $I^*_{x,\omega,N}(\theta,f)$ est défini par la formule 10.4(1) où on limite les intégrales en X aux ensembles $\mathfrak{t}(F)[S;> N^{-b}]\cap(\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S)$. Pour N assez grand, la proposition précédente nous permet de remplacer les intégrales intérieures de cette expression par

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } A_{T'}\neq\{1\};\\ \nu(T')\nu(A_{T''})\theta^\sharp_{f,x,\omega}(X) \text{ si } A_{T'}=\{1\}.\end{array}\right.$$

Si $A_{G'_x}\neq\{1\}$, il n'y a aucun T' tel que $A_{T'}=\{1\}$ donc $I^*_{x,\omega,N}(\theta,f)=0$. Supposons $A_{G'_x}=\{1\}$. Alors $I^*_{x,\omega,N}(\theta,f)$ est égale à l'expression obtenue à partir de (1) ci-dessus en limitant les intégrales aux ensembles $\mathfrak{t}(F)[S;> N^{-b}]\cap(\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S)$. Quand N tend vers l'infini, cette expression tend vers $J_{x,\omega}(\theta,f)$. $\square$

11 Etude au voisinage de l'origine

11.1 Enoncé de la proposition

Considérons l'hypothèse

Hypothèse. *Pour tout quasi-caractère θ sur $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ dont le support ne contient aucun élément nilpotent, on a l'égalité*

$$lim_{N\to\infty}I_N(\theta,f)=I(\theta,f).$$

Le but de la section est de prouver l'assertion suivante.

Proposition. *Sous cette hypothèse, on a l'égalité*

$$lim_{N\to\infty}I_N(\theta,f)=I(\theta,f).$$

pour tout quasi-caractère θ sur $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$.

11.2 Calcul de $lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f)$

Soient θ un quasi-caractère sur $\mathfrak{h}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ une fonction très cuspidale. On peut fixer un ensemble fini $\mathcal{S}$ d'éléments de $\mathfrak{h}_{reg}(F)$ et une famille finie $(c_S)_{S\in\mathcal{S}}$ de nombres complexes de sorte que

$$\theta(Y) = \sum_{S\in\mathcal{S}} c_S \hat{j}^H(S, Y)$$

pour tout $Y \in Supp(f)^G \cap \mathfrak{h}(F)$. On peut supposer que le noyau de l'action de chaque S agissant sur W est de dimension au plus 1. Pour tout $T \in \mathcal{T}(G)$, on définit l'ensemble $\mathfrak{t}(F)^S$ en appliquant la définition de 9.6 au cas où $V'' = V$. On pose

$$J(\theta, f) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \sum_{T\in\mathcal{T}(G)} c_S |W(G,T)|^{-1} \int_{\mathfrak{t}(F)^S} D^G(X)^{1/2} \hat{\theta}_f(X) dX.$$

On a noté $\hat{\theta}_f$ la transformée de Fourier de θ_f, cf. lemme 6.1. A priori, $J(\theta, f)$ dépend des choix des familles $\mathcal{S}$ et $(c_S)_{S\in\mathcal{S}}$. Le lemme suivant montre que ce n'est pas le cas.

Lemme. *(i) Cette expression est absolument convergente.*
(ii) On a l'égalité $lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f) = J(\theta, f)$.

Preuve. Cet énoncé n'est qu'une version relative aux algèbres de Lie de la proposition 10.10 . On peut arguer qu'une démonstration analogue à celle de cette proposition s'applique. Comme nous aurons besoin plus loin de la construction qui suit, expliquons plutôt comment on peut déduire le lemme de cette proposition. Soit $\omega \subset \mathfrak{g}(F)$ un bon voisinage de 0 (au sens de 3.1 appliqué au cas $x = 1$). Supposons d'abord $Supp(f) \subset \omega$. Posons $\theta_\omega = \theta \mathbf{1}_{\omega\cap\mathfrak{h}(F)}$. On a $I_N(\theta, f) = I_N(\theta_\omega, f)$. Par l'exponentielle, on relève θ_ω et f en des fonctions $\boldsymbol{\theta}_\omega$ sur $H(F)$ et $\mathbf{f}$ sur $G(F)$, à support dans $exp(\omega \cap \mathfrak{h}(F))$, resp. $exp(\omega)$. On a l'égalité $I_N(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{f}) = I_N(\theta, f)$. On peut appliquer la proposition 10.10 aux fonctions $\boldsymbol{\theta}$ et $\mathbf{f}$ et au point $x = 1$. Donc $lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f) = J_{1,\omega}(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{f})$. Dans cette dernière expression figure une fonction $\theta^\sharp_{\mathbf{f},x,\omega}$ qui n'est autre que $\hat{\theta}_f$. En effet, d'après la proposition 5.8, $\theta^\sharp_{\mathbf{f},x,\omega}$ est la transformée de Fourier partielle de $\theta_{\mathbf{f},x,\omega} = \theta_f$. Mais, pour $x = 1$, on a $V'' = V$ et la transformation de Fourier partielle est simplement la transformée de Fourier. Alors $J_{1,\omega}(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{f})$ coïncide avec $J(\theta, f)$, ce qui prouve le lemme sous l'hypothèse $Supp(f) \subset \omega$.

En général, rappelons-nous que l'on a fixé au départ une famille $(\xi_i)_{i=0,\dots,r-1}$ d'éléments de $F^\times$, dont dépendent le caractère ξ et nos constructions. Soit $\lambda \in F^\times$. A la famille $(\lambda\xi_i)_{i=0,\dots,r-1}$ est associée un caractère ξ'. Il convient d'affecter d'indices ξ, resp. ξ', les objets construits à l'aide du caractère ξ, resp. ξ'. Posons $\theta' = \theta^\lambda$ et $f' = f^\lambda$. Comparons les termes $I_{\xi,N}(\theta, f)$ et $J_\xi(\theta, f)$ avec leurs analogues $I_{\xi',N}(\theta', f')$ et $J_{\xi'}(\theta', f')$. Pour $Y \in \mathfrak{h}(F)$, on a

$$f'^{\xi'}(Y) = |\lambda|_F^{-dim(U)} f^\xi(\lambda Y).$$

On en déduit

$$(1) \qquad I_{\xi',N}(\theta', f') = |\lambda|_F^{-dim(U)-dim(H)} I_{\xi,N}(\theta, f).$$

Grâce à 2.6(1), on a

$$\theta'(Y) = \sum_{S\in\mathcal{S}} c_S \hat{j}^H(S, \lambda Y) = \sum_{S\in\mathcal{S}} |\lambda|_F^{-\delta(H)/2} c_S \hat{j}^H(\lambda S, Y)$$

pour tout $Y \in Supp(f')^G \cap \mathfrak{h}(F)$. Pour définir $J_{\xi'}(\theta', f')$, on peut donc prendre pour famille $\mathcal{S}'$ la famille $(\lambda S)_{S\in\mathcal{S}}$ et pour constantes les $c_{\lambda S} = |\lambda|_F^{-\delta(H)/2} c_S$. Soient $T \in \mathcal{T}(G)$ et $S \in \mathcal{S}$. On vérifie que, quand on remplace ξ par ξ' et S par λS, l'ensemble $\mathfrak{t}(F)^S$ est remplacé par $\lambda\mathfrak{t}(F)^S$. Donc

$$J_{\xi'}(\theta', f') = \sum_{S\in\mathcal{S}} \sum_{T\in\mathcal{T}(G)} c_S |\lambda|_F^{-\delta(H)/2} |W(G,T)|^{-1} \int_{\lambda\mathfrak{t}(F)^S} D^G(X)^{1/2} \hat{\theta}_{f'}(X) dX.$$

On a $\hat{f}'(X) = |\lambda|_F^{-dim(G)} \hat{f}(\lambda^{-1}X)$, donc $\hat{\theta}_{f'}(X) = |\lambda|_F^{-dim(G)} \hat{\theta}_f(\lambda^{-1}X)$ grâce au lemme 6.1. On a aussi $D^G(\lambda X)^{1/2} = |\lambda|_F^{\delta(G)/2} D^G(X)^{1/2}$. Par changement de variable, on obtient

$$(2) \qquad J_{\xi'}(\theta', f') = |\lambda|^{-dim(G)+dim(T)+\delta(G)/2-\delta(H)/2} J_\xi(\theta, f).$$

On a

$$-dim(G) + dim(T) + \delta(G)/2 = -\delta(G)/2 = -dim(U) - \delta(G_0)/2.$$

A l'aide de 7.7(2), on vérifie que $\delta(G_0) + \delta(H) = 2dim(H)$ et l'égalité précédente devient

$$J_{\xi'}(\theta', f') = |\lambda|_F^{-dim(U)-dim(H)} J_\xi(\theta, f).$$

En comparant avec (1), on voit que la relation $lim_{N\to\infty} I_{\xi,N}(\theta, f) = J_\xi(\theta, f)$ est équivalente à $lim_{N\to\infty} I_{\xi',N}(\theta', f') = J_{\xi'}(\theta', f')$. Prenons λ tel que $Supp(f') \subset \omega$. Alors la deuxième relation a déjà été démontrée (la démonstration est insensible au changement de ξ en ξ'). La première s'en déduit, ce qui achève la preuve. $\square$

11.3 Une première expression du terme d'erreur

Dans ce paragraphe, on suppose vérifiée l'hypothèse du paragraphe 11.1. Considérons l'application

$$(\theta, f) \mapsto E(\theta, f) = lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f) - I(\theta, f) = J(\theta, f) - I(\theta, f),$$

définie sur l'espace des couples (θ, f) formés d'un quasi-caractère θ sur $\mathfrak{h}(F)$ et d'une fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Elle est bilinéaire.

Lemme. *L'application E est combinaison linéaire des applications $(\theta, f) \mapsto c_{\theta,\mathcal{O}^H} c_{\theta_f,\mathcal{O}}$, où $\mathcal{O}^H$, resp. $\mathcal{O}$, parcourt l'ensemble des orbites nilpotentes régulières de $\mathfrak{h}(F)$, resp. $\mathfrak{g}(F)$.*

Preuve. On commence par prouver

(1) on a $E(\theta, f) = 0$ si $c_{\theta,\mathcal{O}^H} = 0$ pour tout $\mathcal{O}^H \in Nil(\mathfrak{h}(F))$ ou si $c_{\theta_f,\mathcal{O}} = 0$ pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))$.

Supposons $c_{\theta_f,\mathcal{O}} = 0$ pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))$. On peut alors fixer un G-domaine ω dans $\mathfrak{g}(F)$, compact modulo conjugaison et contenant 0, tel que $\theta_f(X) = 0$ pour tout $X \in \omega$. Posons $f' = f\mathbf{1}_\omega$ et $f'' = f - f'$. Ces fonctions sont très cuspidales. Le support de f'' ne contient pas de nilpotent donc $E(\theta, f'') = 0$ d'après l'hypothèse de 11.1. On a $\theta_{f'} = 0$ donc aussi $\hat{\theta}_{f'} = 0$. Des définitions résultent les égalités $J(\theta, f') = 0 = I(\theta, f')$. D'où $E(\theta, f') = 0$, puis $E(\theta, f) = 0$. Supposons maintenant $c_{\theta,\mathcal{O}^H} = 0$ pour tout $\mathcal{O}^H \in Nil(\mathfrak{h}(F))$. On peut fixer un G-domaine ω dans $\mathfrak{g}(F)$, compact modulo conjugaison et contenant 0, tel que $\theta(X) = 0$ pour tout $X \in \omega \cap \mathfrak{h}(F)$. Définissons f' et f'' comme précédemment. Puisque θ est nul sur $Supp(f')^G \cap \mathfrak{h}(F)$, il résulte des définitions que $J(\theta, f') = 0 = I(\theta, f')$. On conclut comme précédemment. Cela prouve (1).

Soit $\lambda \in F^{\times 2}$, posons $\theta' = \theta^\lambda$, $f' = f^\lambda$. On a $\theta_{f'} = (\theta_f)^\lambda$. Pour $\mathcal{O}^H \in Nil(\mathfrak{h}(F))$ et $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))$, on a l'égalité

$$(2) \qquad c_{\theta',\mathcal{O}^H} c_{\theta_{f'},\mathcal{O}} = |\lambda|^{-dim(\mathcal{O}^H)/2-dim(\mathcal{O})/2} c_{\theta,\mathcal{O}^H} c_{\theta_f,\mathcal{O}}$$

d'après 4.2(2).

Montrons que

(3) $E(\theta', f') = |\lambda|_F^{-\delta(G)/2-\delta(H)/2} E(\theta, f)$.

Reportons-nous à l'égalité 11.2(2). Il y figure un terme $J_{\xi'}(\theta', f')$. En fait, il est égal à $J_\xi(\theta', f')$. En effet, ce terme ne dépend de ξ que par la définition des ensembles $\mathfrak{t}(F)^S$, pour $T \in \mathcal{T}(G)$ et $S \in \mathcal{S}'$ (l'ensemble associé à θ'). Cet ensemble est celui des éléments de $\mathfrak{t}(F)$ vérifiant certaines conditions de régularité et conjugués à un élément de $\Xi + S + \Sigma$, si le caractère utilisé est ξ, à un élément de $\lambda\Xi + S + \Sigma$, si le caractère utilisé est ξ'. Or, soit $a \in A(F)$ tel que $a_i = \lambda^{-i}$ pour tout $i = 1, ..., r$. Alors $a(\Xi + S + \Sigma)a^{-1} = \lambda\Xi + S + \Sigma$. Donc l'ensemble $\mathfrak{t}(F)^S$ est insensible au changement de ξ en ξ'. L'égalité 11.2(2) nous dit alors que

$$(4) \qquad J(\theta', f') = |\lambda|_F^{-\delta(G)/2-\delta(H)/2} J(\theta, f).$$

Soit $T \in \mathcal{T}$. Introduisons comme en 7.3 la décomposition $W = W' \oplus W''$ relative à T et les notations afférentes. Soit $X \in \mathfrak{t}_\natural(F)$. D'après 4.2(2), on a les égalités

$$c_{\theta'}(X) = |\lambda|_F^{-\delta(H'')/2} c_\theta(\lambda X),\ c_{f'}(X) = |\lambda|_F^{-\delta(G'')/2} c_f(\lambda X).$$

On calcule comme en 7.5

$$D^H(\lambda^{-1}X) = |\lambda|_F^{\delta(H'')-\delta(H)} D^H(X),\ \Delta(\lambda^{-1}X) = |\lambda|_F^{-dim(W')}\Delta(X).$$

Par changement de variable, on obtient

$$\int_{\mathfrak{t}(F)} c_{\theta'}(X)c_{f'}(X)D^H(X)\Delta(X)^r dX = |\lambda|_F^b \int_{\mathfrak{t}(F)} c_\theta(X)c_f(X)D^H(X)\Delta(X)^r dX,$$

où

$$b = -\delta(G'')/2 - dim(T) + \delta(H'')/2 - \delta(H) - rdim(W').$$

En utilisant 7.7(2), on vérifie que $b = -\delta(G)/2 - \delta(H)/2$. De l'égalité précédente résulte alors l'égalité

$$I(\theta', f') = |\lambda|^{-\delta(G)/2-\delta(H)/2} I(\theta, f).$$

Jointe à (4), cette égalité démontre (3).

La relation (1) entraîne que la forme bilinéaire E est combinaison linéaire des applications $(\theta, f) \mapsto c_{\theta,\mathcal{O}^H} c_{\theta_f,\mathcal{O}}$, où $\mathcal{O}^H$, resp. $\mathcal{O}$, parcourt $Nil(\mathfrak{h}(F))$, resp. $Nil(\mathfrak{g}(F))$. Les relations (2) et (3) nous disent que E, ainsi que toutes ces applications, sont homogènes pour la transformation $(\theta, f) \mapsto (\theta^\lambda, f^\lambda)$. Il en résulte que E est combinaison linéaire de celles des applications ci-dessus qui sont de même degré que E. On a toujours $dim(\mathcal{O}^H) \leq \delta(H)$, $dim(\mathcal{O}) \leq \delta(G)$. L'égalité $dim(\mathcal{O}^H) + dim(\mathcal{O}) = \delta(H) + \delta(G)$ est donc équivalente à la réunion des deux égalités $dim(\mathcal{O}^H) = \delta(H)$ et $dim(\mathcal{O}) = \delta(G)$. Celles-ci sont vérifiées si et seulement si $\mathcal{O}^H$ et $\mathcal{O}$ sont régulières. $\square$

11.4 Calcul de germes de Shalika

Dans ce paragraphe, on suppose G quasi-déployé. Soient B un sous-groupe de Borel de G et T_{qd} un sous-tore maximal de B. Soit X_{qd} un élément de $\mathfrak{t}_{qd}(F)\cap\mathfrak{g}_{reg}(F)$.

Supposons d pair et $d\geq 4$. Pour toute extension quadratique E de F, notons τ_E l'élément non trivial de $Gal(E/F)$ et χ_E le caractère quadratique de $F^\times$ associé à E. Si $d_{an}(V)=0$ (ou encore, si G est déployé), on note χ_V le caractère trivial de $F^\times$ et on pose $\eta=1$. Si $d_{an}(V)=2$, il y a une extension quadratique E de F et un élément $\eta\in F^\times$ tel que le noyau anisotrope de q soit la forme $\eta Norm_{E/F}$. L'élément η n'est pas unique, on le fixe. On pose $\chi_V=\chi_E$. Soient F_1 et F_2 deux extensions quadratiques de F telles que $\chi_{F_1}\chi_{F_2}=\chi_V$. Pour $i=1,2$, soient $a_i\in F_i^\times$ tel que $\tau_{F_i}(a_i)=-a_i$. On suppose $a_1\neq\pm a_2$. Soit $c\in F^\times$ tel que $\chi_V(\eta c Norm_{F_1/F}(a_1))=1$. On peut identifier V, comme espace quadratique, à la somme orthogonale $F_1\oplus F_2\oplus\tilde{Z}$, où F_1 est muni de la forme $cNorm_{F_1/F}$, F_2 est muni de la forme $-cNorm_{F_2/F}$ et $\tilde{Z}$ est un espace hyperbolique de dimension $d-4$. Fixons une telle identification et un sous-tore déployé maximal $\tilde{T}$ du groupe spécial orthogonal de $\tilde{Z}$. Pour $\tilde{S}\in\tilde{\mathfrak{t}}(F)$, considérons l'élément $X_{F_1}\in\mathfrak{g}(F)$ qui agit par multiplication par a_1, resp. a_2, sur F_1, resp. F_2, et par $\tilde{S}$ sur $\tilde{Z}$. Les éléments a_1 et a_2 étant fixés, on peut choisir $\tilde{S}$ tel que X_{F_1} soit régulier. On fixe un tel $\tilde{S}$. Les éléments a_1, a_2 et $\tilde{S}$ étant fixés, on peut faire varier c. La classe de conjugaison de X_{F_1} ne dépend que de $\chi_{F_1}(c)$. On note $X_{F_1}^+$ l'élément correspondant à un $c=c^+$ tel que $\chi_{F_1}(c^+)=\chi_{F_1}(\eta)\chi_{F_1}(Norm_{F_1/F}(a_1)-Norm_{F_2/F}(a_2))$ et $X_{F_1}^-$ celui qui correspond à un $c=c^-$ tel que $\chi_{F_1}(c^-)=-\chi_{F_1}(c^+)$.

On se rappelle que l'on a classifié les orbites nilpotentes régulières en 7.1.

Lemme. *Soit $\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}(F))$.*

(i) On a les égalités

$$\Gamma_{\mathcal{O}}(X_{qd})=\begin{cases}0, & \text{si } \mathcal{O} \text{ n'est pas régulière ;}\\ 1, & \text{si } \mathcal{O} \text{ est régulière.}\end{cases}$$

(ii) Supposons d pair et $d\geq 4$. On a les égalités

$$\Gamma_{\mathcal{O}}(X_{F_1}^+)-\Gamma_{\mathcal{O}}(X_{F_1}^-)=\begin{cases}0, & \text{si } \mathcal{O} \text{ n'est pas régulière;}\\ \chi_{F_1}(\nu\eta), & \text{si } \mathcal{O}=\mathcal{O}_\nu \text{ avec } \nu\in\mathcal{N}^V.\end{cases}$$

Preuve. Le tore T_{qd} est un Lévi de G et la distribution $f\mapsto J_G(X_{qd},f)$ est induite de la distribution $f\mapsto f(X_{qd})$ sur $\mathfrak{t}_{qd}(F)$. On a évidemment $\Gamma_{\{0\}}^{T_{qd}}(X_{qd})=1$. Alors $\Gamma_{\mathcal{O}}(X_{qd})$ est non nul si et seulement si $\mathcal{O}$ intervient dans l'orbite induite de l'orbite $\{0\}$ de $\mathfrak{t}_{qd}(F)$. Cette condition équivaut à ce que $\mathcal{O}$ soit régulière. On en déduit la première égalité de (i).

Supposons d pair et $d\geq 4$ et reprenons les constructions qui précèdent l'énoncé. Notons G_1 le groupe spécial orthogonal de $F_1\oplus\tilde{Z}$ et G_2 celui de F_2. Ils sont quasi-déployés. Pour $i=1,2$, on fixe un sous-tore maximal $T_{i,qd}$ de G_i inclus dans un sous-groupe de Borel (on a $T_{2,qd}=G_2$). Le groupe $G_1\times G_2$ est un groupe endoscopique de G. La distribution

$$f\mapsto J_G(X_{F_1}^+,f)-J_G(X_{F_1}^-,f)$$

est le transfert endoscopique d'une distribution

$$(f_1,f_2)\mapsto J_{G_1}(X_1,f_1)J_{G_2}(X_2,f_2)$$

sur $\mathfrak{g}_1(F) \times \mathfrak{g}_2(F)$, où, pour $i = 1, 2$, X_j est un certain élément de $\mathfrak{t}_{j,qd}(F)$. Il en résulte que le développement en germes de la première distribution s'obtient en transférant celui de la seconde distribution. Comme on vient de le voir, ce dernier ne contient que des orbites nilpotentes régulières de $\mathfrak{g}_1(F) \times \mathfrak{g}_2(F)$. Le transfert endoscopique d'une intégrale nilpotente régulière est combinaison linéaire de telles intégrales. On en déduit la première égalité de (ii).

Il ne reste plus qu'à calculer des germes relatifs à des orbites nilpotentes régulières. Ceux-ci ont été calculés par Shelstad ([S]). Il faut d'abord voir que les mesures utilisées par Shelstad sont compatibles avec les nôtres. Shelstad suppose les mesures sur les tores maximaux "algébiques" au sens suivant. On fixe une forme différentielle $\delta_{T_{qd}}$ de degré maximal sur T_{qd}, invariante par translations, et un réel $\lambda > 0$. Pour sous-tore maximal T de G, l'isomorphisme $T \simeq T_{qd}$ sur $\bar{F}$ permet de transférer $\delta_{T_{qd}}$ en une forme différentielle δ_T sur T. On prend alors pour mesure sur $T(F)$ la mesure $\lambda|\delta_T|_F$, cf. 9.6 pour la notation. Mais on a vu dans la preuve du lemme 9.6 que nos mesures autoduales s'obtenaient par ce procédé, pour $\delta_{T_{qd}}$ et λ convenables. Soit $\mathcal{O}$ une orbite nilpotente régulière. La mesure sur $\mathcal{O}$ utilisée par Shelstad est définie de la façon suivante. Soit $N \in \mathcal{O}$. Considérons une suite $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ telle que $lim_{j\to\infty}Y_j = N$. Alors, l'espace tangent $Tang_{Y_j}$ en Y_j à la classe de conjugaison de Y_j tend, en un sens que l'on va préciser, vers l'espace tangent $Tang_N$ en N à $\mathcal{O}$. Notons $T_j = G_{Y_j}$. L'espace $Tang_{Y_j}$ est égal à $\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{t}_j(F)$, sur lequel on a une mesure m_j. Alors les mesures $D^G(Y_j)^{1/2}m_j$ tendent vers une mesure m_N sur $Tang_N$. La mesure sur $\mathcal{O}$ est celle qui, en N, coïncide infinitésimalement avec m_N. Fixons un supplémentaire $\mathfrak{r}$ du noyau de $ad(N)$ dans $\mathfrak{g}(F)$. Pour j assez grand, $\mathfrak{r}$ est encore un supplémentaire de $\mathfrak{t}_j(F)$ dans $\mathfrak{g}(F)$ et on peut identifier $Tang_{Y_j} = Tang_N = \mathfrak{r}$. Soit $\mathfrak{l}_j$ l'orthogonal de $\mathfrak{t}_j$ dans $\mathfrak{g}$. On a aussi $Tang_{Y_j} \simeq \mathfrak{l}_j(F)$. Modulo cette identification, la mesure m_j est la mesure autoduale associée à la forme quadratique $(Y, Z) \mapsto \frac{1}{2}trace(YZ)$ sur $\mathfrak{l}_j(F)$. Mais le jacobien de $ad(Y_j)$ agissant dans $\mathfrak{l}(F)$ est $D^G(Y_j)$. Donc $D^G(Y_j)^{1/2}m_j$ est aussi la mesure associée à la forme symplectique $(Y, Z) \mapsto \frac{1}{2}trace([Y_j, Y]Z)$ sur $\mathfrak{l}_j(F)$. La même formule définit une forme antisymétrique sur tout $\mathfrak{g}(F)$, de noyau $\mathfrak{t}_j(F)$. On peut donc remplacer $\mathfrak{l}_j(F)$ par $\mathfrak{r}$ et la mesure $D^G(Y_j)^{1/2}m_j$ est la mesure associée à la forme symplectique $(Y, Z) \mapsto \frac{1}{2}trace([Y_j, Y]Z)$ sur $\mathfrak{r}$. Quand Y_j tend vers N, cette forme tend vers $(Y, Z) \mapsto \frac{1}{2}trace([N, Y]Z)$ et $D^G(Y_j)^{1/2}m_j$ tend vers la mesure associée à cette forme. Mais c'est précisément la façon dont nous avons défini notre mesure sur $\mathcal{O}$ en 1.2.

Cela étant, Shelstad montre qu'un germe $\Gamma_{\mathcal{O}}(S)$ associé à une orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}$ vaut 1 ou 0, selon qu'un certain invariant est égal ou non à 1. Pour l'élément X_{qd}, il est facile de voir que l'invariant est 1 et on en déduit la seconde égalité de (i). Considérons la situation de (ii). Pour un signe $\zeta = \pm$, notons T^ζ le sous-tore maximal de G tel que $X^\zeta_{F_1} \in \mathfrak{t}^\zeta(F)$. Soient $\nu \in \mathcal{N}^V$ et $N \in \mathcal{O}_\nu$. Shelstad note l'invariant $inv(X^\zeta_{F_1})inv(T^\zeta)/inv_{T^\zeta}(N)$. Tous ces éléments appartiennent au groupe de cohomologie $H^1(T^\zeta) = H^1(Gal(\bar{F}/F), T^\zeta)$. On a ici $H^1(T^\zeta) = \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$. Les invariants dépendent du choix d'un épinglage. On effectue ce choix comme en [W3] X.3 en prenant pour élément η de cette référence notre élément η multiplié par $2(-1)^{d/2-1}$. Dans le lemme X.7 de [W3], nous avons calculé le produit $inv(X^\zeta_{F_1})inv(T^\zeta)$. On a

$$(1) \qquad inv(X^\zeta_{F_1})inv(T^\zeta) =$$

$$(\chi_{F_1}(2(-1)^{d/2-1}\eta(c^\zeta)^{-1}a_1^{-1}P'(a_1)), \chi_{F_2}(2(-1)^{d/2}\eta(c^\zeta)^{-1}a_2^{-1}P'(a_2))),$$

où P est le polynôme caractéristique de X_{F_1} agissant dans V et P' est le polynôme dérivé. Notons $(\pm\tilde{s}_j)_{j=3,\dots,d/2}$ les valeurs propres de l'action de $\tilde{S}$ dans $\tilde{Z}$. Elles appartiennent à

$F^\times$ puisque $\tilde{T}$ est déployé. On a

$$P(T) = (T^2 + Norm_{F_1/F}(a_1))(T^2 + Norm_{F_2/F}(a_2)) \prod_{j=3,\dots,d/2} (T^2 - \tilde{s}_j^2).$$

Donc

$$a_1^{-1}P'(a_1) = 2(-Norm_{F_1/F}(a_1) + Norm_{F_2/F}(a_2)) \prod_{j=3,\dots,d/2} (-Norm_{F_1/F}(a_1) - \tilde{s}_j^2)$$

$$= 2(-1)^{d/2-1}(Norm_{F_1/F}(a_1) - Norm_{F_2/F}(a_2)) \prod_{j=3,\dots,d/2} (Norm_{F_1/F}(a_1) + \tilde{s}_j^2).$$

On a $\tilde{s}_j^2 + Norm_{F_1/F}(a_1) = Norm_{F_1/F}(\tilde{s}_j + a_1)$, donc $\chi_{F_1}(\tilde{s}_j^2 + Norm_{F_1/F}(a_1)) = 1$. Un calcul similaire vaut en échangeant les rôles de F_1 et F_2. La formule (1) se simplifie en

$$inv(X_{F_1}^\zeta)inv(T^\zeta) =$$

$$(\chi_{F_1}(\eta(c^\zeta)^{-1}(Norm_{F_1/F}(a_1) - Norm_{F_2/F}(a_2))), \chi_{F_2}(\eta(c^\zeta)^{-1}(Norm_{F_1/F}(a_1) - Norm_{F_2/F}(a_2))).$$

D'après la définition de c^ζ, on obtient

$$inv(X_{F_1}^\zeta)inv(T^\zeta) = (\zeta, \zeta),$$

où on identifie ζ à un élément de $\{\pm 1\}$. L'épinglage détermine un élément nilpotent régulier N^* : avec les notations de [W3] page 313, $N^* = \sum_{j=1,\dots,d/2} X_{\alpha_j}$. Notons ν^* l'élément de $\mathcal{N}^V$ tel que $N^* \in \mathcal{O}_{\nu^*}$. On définit un cocycle d_N de $Gal(\bar{F}/F)$ dans T^ζ de la façon suivante. Si $\nu = \nu^*$, $d_N = 1$. Si $\nu \neq \nu^*$, on pose $E_N = F(\sqrt{\nu/\nu^*})$. Alors, pour $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$, on a $d_N(\sigma) = 1$ si $\sigma \in Gal(\bar{F}/E_N)$ et $d_N(\sigma) = -1$ sinon. L'invariant $inv_{T^\zeta}(N)$ est l'image dans $H^1(T)$ du cocycle d_N. On calcule cette image

$$inv_{T^\zeta}(N) = (\chi_{F_1}(\nu/\nu^*), \chi_{F_2}(\nu/\nu^*)).$$

En fait, on a forcément $\chi_V(\nu/\nu^*) = 1$, donc

$$inv_{T^\zeta}(N) = \chi_{F_1}(\nu/\nu^*), \chi_{F_1}(\nu/\nu^*)).$$

L'élément N^* laisse stable l'hyperplan engendré par $e_1, \dots, e_{d/2-1}, e_{d/2}+e_{d/2+1}, e_{d/2+2}, \dots, e_d$, avec les notations de [W]. Le noyau anisotrope de la restriction de la forme q à cet hyperplan est la restriction de q à la droite portée par $e_{d/2}+e_{d/2+1}$. Or $q(e_{d/2}+e_{d/2+1}) = \eta$, donc $\nu^* = \eta$. Finalement

$$inv(X_{F_1}^\zeta)inv(T^\zeta)/inv_{T^\zeta}(N) = (\zeta\chi_{F_1}(\nu\eta), \zeta\chi_{F_1}(\nu\eta)).$$

D'après Shelstad, on a donc

$$\Gamma_{\mathcal{O}_\nu}(X_{F_1}^\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \chi_{F_1}(\nu\eta) = \zeta, \\ 0, & \text{si } \chi_{F_1}(\nu\eta) = -\zeta. \end{cases}$$

Cela entraîne la seconde égalité du (ii) de l'énoncé. $\square$

11.5 Preuve de la proposition 11.1 dans le cas d impair

On suppose vérifiée l'hypothèse du paragraphe 11.1 et on suppose d impair. On veut prouver $E(\theta, f) = 0$ pour tout quasi-caractère θ sur $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Si G n'est pas déployé ou si H n'est pas quasi-déployé, l'une des algèbres de Lie de ces groupes n'a pas d'élément nilpotent régulier et la conclusion résulte du lemme 11.3. Supposons G déployé et H quasi-déployé. Le même lemme nous dit que, si $d_W \leq 2$, resp. $d_W \geq 4$, il existe un nombre complexe c_{reg}, resp. une famille de nombres complexes $(c_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}^W}$, de sorte que

$$E(\theta, f) = \begin{cases} c_{reg} c_{\theta, \mathcal{O}^H_{reg}} c_{\theta_f, \mathcal{O}_{reg}}, & \text{si } d_W \leq 2, \\ \sum_{\nu \in \mathcal{N}^W} c_\nu c_{\theta, \mathcal{O}^H_\nu} c_{\theta_f, \mathcal{O}_{reg}}, & \text{si } d_W \geq 4, \end{cases}$$

pour tous θ, f (on a introduit des exposants H pour préciser la notation). Les constantes sont uniquement déterminées d'après le lemme 6.3(iii).

Soient $T \in \mathcal{T}(G)$ et $X \in \mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. D'après 6.3(3), on peut construire un voisinage ω_X de X dans $\mathfrak{t}(F)$ et une fonction très cuspidale $f[X] \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) pour $T' \in \mathcal{T}(G)$ et $T' \neq T$, la restriction de $\hat{\theta}_{f[X]}$ à $\mathfrak{t}'(F)$ est nulle ;

(2) pour toute fonction localement intégrable φ sur $\mathfrak{t}(F)$, invariante par $W(G, T_d)$,

$$\int_{\mathfrak{t}(F)} \varphi(X') D^G(X')^{1/2} \hat{\theta}_{f[X]}(X') dX' = mes(\omega_X)^{-1} \int_{\omega_X} \varphi(X') dX';$$

(3) pour tout $Y \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$,

$$\theta_{f[X]}(Y) = mes(\omega_X)^{-1} \int_{\omega_X} \hat{j}^G(X', Y) dX'$$

(avec les notations de 6.3(3), $f[X] = \theta_{f'}(X)^{-1} D^G(X)^{-1/2} mes(\omega_X)^{-1} \hat{f}'$). Au voisinage de 0, l'égalité (3) se simplifie en

$$\theta_{f[X]}(Y) = \hat{j}^G(X, Y) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})} \Gamma_{\mathcal{O}}(X) \hat{j}^G(\mathcal{O}, Y).$$

Donc

$$(4) \qquad c_{\theta_{f[X]}, \mathcal{O}} = \Gamma_{\mathcal{O}}(X)$$

pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})$. Notons T_d l'unique tore déployé dans $\mathcal{T}(G)$ et fixons $X_d \in \mathfrak{t}_d(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. On fixe ω_{X_d} et $f[X_d]$ comme ci-dessus et on pose $f = f[X_d]$. Grâce à (4) et au lemme 11.4(i), on a $c_{\theta_f, \mathcal{O}_{reg}} = 1$. Fixons un G-domaine ω dans $\mathfrak{g}(F)$, compact modulo conjugaison, contenant 0 et $Supp(f)$. Soit $S \in \mathfrak{h}_{reg}(F)$. On suppose que l'action de S dans W est de noyau nul. D'après le lemme 6.3(ii), on peut choisir un quasi-caractère $\theta[S]$ sur $\mathfrak{h}(F)$ tel que $\theta[S](Y) = \hat{j}^H(S, Y)$ pour tout $Y \in \omega$. Comme ci-dessus, on a $c_{\theta[S], \mathcal{O}^H} = \Gamma_{\mathcal{O}^H}(S)$ pour tout $\mathcal{O}^H \in Nil(\mathfrak{h})$. Remplaçons G et V par H et W dans les définitions de 11.4. On définit dans $\mathfrak{h}(F)$ un élément X_{qd} et, si $d_W \geq 4$, des éléments $X^{\pm}_{F_1}$.

Si $d_W \leq 2$, posons $\theta = \theta[X_{qd}]$. On pose aussi $\mathcal{S} = \{X_{qd}\}$ et $c_{X_{qd}} = 1$. On a $c_{\theta, \mathcal{O}^H_{reg}} = 1$, donc $c_{reg} = E(\theta, f)$.

Supposons $d_W \geq 4$ et fixons $\nu \in \mathcal{N}^W$. Si H est déployé, notons $\mathcal{F}^V$ l'ensemble des extensions quadratiques de F. Si H n'est pas déployé, soient E et η comme en 11.4. Les extensions quadratiques de F distinctes de E vont par paire : à F_1 est associé F_2 tel que $\chi_{F_1}\chi_{F_2} = \chi_E$. On fixe un sous-ensemble $\mathcal{F}_V$ qui contient un élément de chaque paire. Remarquons que, dans les deux cas, on a l'égalité

$$|\mathcal{N}^V| = 1 + |\mathcal{F}^V|.$$

Posons

$$\theta = |\mathcal{N}^V|^{-1}(\theta[X_{qd}] + \sum_{F_1\in\mathcal{F}^V} \chi_{F_1}(\nu\eta)(\theta[X^+_{F_1}] - \theta[X^-_{F_1}])).$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments S tels que $\theta[S]$ intervienne dans ces formules et, pour $S \in \mathcal{S}$, c_S le coefficient dont $\theta[S]$ y est affecté. Le lemme 11.4 entraîne que, pour $\nu' \in \mathcal{N}^W$, on a l'égalité

$$c_{\theta,\mathcal{O}^H_{\nu'}} = \delta_{\nu,\nu'},$$

où ce dernier terme est le symbole de Kronecker. Donc $c_\nu = E(\theta, f)$.

Pour $X \in \omega_{X_d}$, la distribution $\varphi \mapsto J_G(X, \hat{\varphi})$ est induite d'une distribution sur $\mathfrak{t}_d(F)$. Cela entraîne que la fonction $Y \mapsto \hat{j}^G(X, Y)$ est à support dans l'ensemble des éléments appartenant à une sous-algèbre de Borel de G. D'après (3), c'est aussi le cas de la fonction θ_f. Comme dans la preuve du lemme 7.6, cela entraîne que, si T est un élément de $\mathcal{T}$ différent du tore $\{1\}$, la fonction c_f est nulle sur $\mathfrak{t}(F)$. Donc $I(\theta, f)$ se réduit à la contribution de l'unique tore $T = \{1\} \in \mathcal{T}$. Par définition, celle-ci est $c_{\theta,\mathcal{O}^H_{reg}} c_{\theta_f,\mathcal{O}_{reg}}$ si $d_W \leq 2$, $c_{\theta,\mathcal{O}^H_{-\nu_0}} c_{\theta_f,\mathcal{O}_{reg}}$ si $d_W \geq 4$. Avec les calculs ci-dessus, on obtient

$$I(\theta, f) = \begin{cases} 1, & \text{si } d_W \leq 2, \\ \delta_{\nu,-\nu_0}, & \text{si } d_W \geq 4. \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ et la famille $(c_S)_{S\in\mathcal{S}}$ permettent de calculer $J(\theta, f)$, cf. 5.2. Pour tout $S \in \mathcal{S}$, posons

$$m(S) = mes(\omega_X)^{-1} mes(\omega_X \cap \mathfrak{t}_d(F)^S).$$

En utilisant les propriétés (1) et (2), on obtient

$$(5) \qquad J(\theta, f) = \sum_{S\in\mathcal{S}} c_S m(S).$$

Soit $S \in \mathcal{S}$. On utilise les définitions et notations de 9.4, appliquées au cas $V'' = V$. Soit $X \in \mathfrak{t}_d(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. On a

(6) $X \in \mathfrak{t}_d(F)^S$ si et seulement s'il existe une famille $(z_{\pm j})_{j=1,\ldots,d_W/2}$ d'éléments de $\bar{F}^\times$ telle que

$$\begin{cases} z_j z_{-j} = \frac{P_X(s_j)}{4\nu_0 s_j^{1+2r} R_{S,j}(s_j)} \text{ pour tout } j = 1, ..., d_W/2; \\ \sum_{j=\pm 1,\ldots\pm d_W/2} z_j w_j \in W. \end{cases}$$

En effet, X appartient à $\mathfrak{t}_d(F)^S$ si et seulement s'il est conjugué par un élément de $G(F)$ à un élément de $\Xi + S + \Lambda^S$. Il n'y a pas d'indiscernabilité pour le tore déployé T_d. La condition équivaut donc à ce qu'il existe $Y \in \Xi + S + \Lambda^S$ tel que l'on ait l'égalité des polynômes caractéristiques $P_X = P_Y$. Cela équivaut à ce qu'il existe une famille $(\lambda_i)_{i=0,\ldots,r-1}$ d'éléments de F et une famille $(z_{\pm j})_{j=1,\ldots,d_W/2}$ d'éléments de $\bar{F}^\times$ telles que, d'une part, le polynôme P_X soit égal à celui figurant dans l'énoncé du lemme 9.4, d'autre part, l'élément $\sum_{j=\pm 1,\ldots\pm d_W/2} z_j w_j$ appartienne à W. D'après 9.4(1), les conditions sur les z_j sont celles de (6). Les λ_i sont ensuite déterminés par un système inversible d'équations linéaires à coefficients dans F. Cela prouve (6).

La condition (6) impose que $P_X(s_j)\neq 0$ pour tout j. On suppose cette condition vérifiée. Il existe

- une décomposition de W en somme directe

$$\oplus_{j=1,...,h}F_j\oplus \tilde{Z},$$

où $h\leq 2$ et les F_j sont des extensions quadratiques de F ;

- des éléments $c_j\in F^{\times}$, pour $j=1,...,h$, de sorte que q_W soit la somme directe orthogonale des formes $c_jNorm_{F_j/F}$ sur F_j et d'une forme hyperbolique sur $\tilde{Z}$;

- des éléments $a_j\in F_j^{\times}$, pour $j=1,...,h$ tels que $\tau_{F_j}(a_j)=-a_j$ et un élément $\tilde{S}$ appartenant à l'algèbre de Lie d'un sous-tore déployé maximal du groupe spécial orthogonal de $\tilde{Z}$, de sorte que S agisse par multiplication par a_j dans F_j et par $\tilde{S}$ dans $\tilde{Z}$.

Pour $j=1,...,h$, soit (e_j,e_{-j}) la base de $F_j\otimes_F\bar{F}$ telle que tout élément $x\in F_j$ soit égal à $xe_j+\tau_{F_j}(x)e_{-j}$. Elle est définie sur F_j et on a l'égalité $\tau_{F_j}(e_j)=e_{-j}$. On a l'égalité $q(e_j,e_{-j})=c_j$. On peut donc supposer que $w_j=e_j$, $w_{-j}=c_j^{-1}e_{-j}$ pour $j=1,...,h$ et $(w_j)_{j=\pm(h+1),...,\pm d_W/2}$ est une base hyperbolique de $\tilde{Z}$. On a $s_j=a_j$ pour $j\leq h$. La condition (6) se décompose en $d/2$ conditions $(6)_j$ portant sur les couples (z_j,z_{-j}). Pour $j>h$, on satisfait $(6)_j$ en prenant $z_{-j}=1$ et z_j égal au membre de droite de la première relation de (6). Pour $j\leq h$, la seconde relation de (6) équivaut à $z_j\in F_j^{\times}$ et $\tau_{F_j}(z_j)=c_j^{-1}z_{-j}$. La condition $(6)_j$ équivaut donc à

$$\chi_{F_j}(\frac{P_X(a_j)}{c_j\nu_0a_j^{1+2r}R_{S,j}(a_j)})=1.$$

On a

$$R_{S,j}(a_j)=\prod_{j'=1,...,d_W/2;j'\neq j}(a_j^2-s_{j'}^2)=(-1)^{d_W/2-1}(\prod_{j'=1,...,h;j'\neq j}(Norm_{F_j/F}(a_j)-Norm_{F_{j'}/F}(a_{j'})))$$

$$\prod_{j'=h+1,...,d_W/2}(s_{j'}^2-a_j^2).$$

Notons $(\pm x_k)_{k=1,...,(d-1)/2}$ les valeurs propres non nulles de X. On a

$$P_X(a_j)=a_j\prod_{k=1,...,(d-1)/2}(a_j^2-x_k^2)=(-1)^{(d-1)/2}a_j\prod_{k=1,...,(d-1)/2}(x_k^2-a_j^2).$$

Pour $j'=h+1,...,d_W/2$, $s_{j'}$ appartient à $F^{\times}$, donc $s_{j'}^2-a_j^2$ est la norme d'un élément de $F_j^{\times}$. De même, pour tout $k=1,...,(d-1)/2$, $x_k^2-a_j^2$ est une norme. Enfin $(-1)^ra_j^{2r}$ est aussi une norme. Ces termes disparaissent de notre calcul et la condition $(6)_j$ équivaut à

$$(7)\qquad \chi_{F_j}(-c_j\nu_0\prod_{j'=1,...,h;j'\neq j}(Norm_{F_j/F}(a_j)-Norm_{F_{j'}/F}(a_{j'})))=1.$$

Cette relation est indépendante de X. On a imposé à X des conditions de non nullité qui sont vérifiées sur un ouvert dont le complémentaire est de mesure nulle. Cela démontre que $m(S)=1$ si la condition (7) est vérifiée pour tout $j=1,...,h$, $m(S)=0$ sinon.

Supposons H déployé et $S=X_{qd}$. Alors $h=0$, donc $m(S)=1$. Supposons H non déployé et $S=X_{qd}$. Alors $h=1$, $F_1=E$ et $c_1=\eta$ avec les notations de 11.4 appliquées à W. Le noyau anisotrope de q est le même que celui de la forme quadratique sur $E\oplus D$

$$e\oplus xv_0\mapsto \eta Norm_{E/F}(e)+\nu_0x^2.$$

Puisqu'on a supposé G déployé, cette forme n'est pas anisotrope donc $-\eta\nu_0$ est la norme d'un élément de $E^\times$. La condition (7) est vérifiée et $m(S)=1$. Supposons maintenant $d_W \geq 4$ et $S = X^{\zeta}_{F_1}$, où $\zeta = \pm$, $F_1 \in \mathcal{F}^V$. Alors $h=2$, et les termes F_1, F_2, a_1 et a_2 coïncident avec ceux de 11.4. On a $c_1 = c^{\zeta}$ et $c_2 = -c^{\zeta}$. D'après la définition de ces termes, la condition (7) équivaut à $\chi_{F_1}(-\eta\nu_0) = \zeta$ pour $j=1$, resp. $\chi_{F_2}(-\eta\nu_0)=\zeta$ pour $j=2$. Mais le calcul ci-dessus montre que $\chi_V(-\eta\nu_0)=1$. Les conditions pour $j=1$ et $j=2$ sont donc équivalentes. On obtient que $m(S)=1$ si $\chi_{F_1}(-\eta\nu_0)=\zeta$, $m(S)=0$ sinon. Reportons ces valeurs de $m(S)$ dans l'égalité (5). Dans le cas $d_W \leq 2$, on obtient immédiatement la formule ci-dessous. Dans le cas $d_W \geq 4$, celle-ci résulte d'une inversion de Fourier sur le groupe $F^\times/F^{\times 2}$ si H est déployé, sur le groupe $Norm_{E/F}(E^\times)/F^{\times 2}$ sinon. La formule est

$$J(\theta,f) = \begin{cases} 1, & \text{si } d_W \leq 2, \\ \delta_{\nu,-\nu_0}, & \text{si } d_W \geq 4. \end{cases}$$

Alors $J(\theta,f) = I(\theta,f)$ et $E(\theta,f)=0$. Donc $c_{reg}=0$ dans le cas $d_W \leq 2$ et $c_\nu = 0$ dans le cas $d_W \geq 4$. Mais alors l'application bilinéaire E est identiquement nulle, ce que l'on voulait démontrer.

11.6 Preuve de la proposition 11.1 dans le cas d pair

On suppose vérifiée l'hypothèse du paragraphe 11.1 et on suppose d pair. Eliminons le cas $d=2$. Dans ce cas, G est un tore de dimension 1. Il résulte des définitions que

$$J(\theta,f) = \theta(0)\int_{\mathfrak{g}(F)} \hat{f}(X)dX$$

et

$$I(\theta,f) = \theta(0)f(0).$$

Ces deux expressions sont égales par inversion de Fourier. On suppose maintenant $d \geq 4$. En imitant ce que l'on a fait au paragraphe précédent, on peut supposer G quasi-déployé et H déployé. Il existe une unique famille de nombres complexes $(c_\nu)_{\nu\in\mathcal{N}^V}$ de sorte que

$$E(\theta,f) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}^V} c_\nu c_{\theta,\mathcal{O}^H_{reg}} c_{\theta_f,\mathcal{O}_\nu}$$

pour tous θ, f. Fixons $\nu \in \mathcal{N}^V$. On introduit des éléments X_{qd} et $X^{\pm}_{F_1}$ de $\mathfrak{g}(F)$ comme en 11.4. Soit X un de ces éléments. On peut supposer qu'il appartient à un tore appartenant à $\mathcal{T}(G)$, que l'on note T_X. On introduit un voisinage ω_X de X dans $\mathfrak{t}_X(F)$ et une fonction $f[X]$ vérifiant les conditions (1), (2) et (3) de 11.5. On pose

$$f = |\mathcal{N}^V|^{-1}(f[X_{qd}] + \sum_{F_1\in\mathcal{F}^V} \chi_{F_1}(\nu\eta)(f[X^+_{F_1}] - f[X^-_{F_1}])).$$

Les notations sont celles introduites dans le paragraphe 11.5, l'extension E étant maintenant associée à V et non plus à W. On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des éléments X tels que $f[X]$ apparaisse dans ces formules et, pour $X \in \mathcal{X}$, c_X le coefficient dont il est affecté. On fixe un G-domaine ω dans $\mathfrak{g}(F)$, compact modulo conjugaison, contenant 0 et $Supp(f)$. Notons T_d l'unique tore déployé dans $\mathcal{T}(H)$et fixons un élément $S \in \mathfrak{t}_d(F)\cap\mathfrak{h}_{reg}(F)$. On choisit un quasi-caractère θ sur $\mathfrak{h}(F)$ tel que $\theta(Y) = \hat{j}^H(S,Y)$ pour tout $Y \in \omega\cap\mathfrak{h}_{reg}(F)$.

Pour $T \in \mathcal{T}$, $T \neq \{1\}$, la fonction c_f est nulle hors de ω tandis que c_θ est nulle sur $\mathfrak{t}(F) \cap \omega$ pour la même raison que c_f l'était en 11.5. Donc $c_\theta c_f$ est nulle sur $\mathfrak{t}(F)$. Comme en 11.5, on calcule alors

$$I(\theta, f) = \delta_{\nu,\nu_0}.$$

Pour $X \in \mathcal{X}$, on pose

$$m(X) = mes(\omega_X)^{-1} mes(\omega_X \cap \mathfrak{t}_X(F)^S).$$

On a

$$(1) \qquad J(\theta, f) = \sum_{X \in \mathcal{X}} c_X m(X),$$

et on est ramené à calculer ces termes $m(X)$.

On utilise les définitions et notations de 9.4 appliqées au cas $W'' = W$. Puisque T_d est déployé, on peut supposer que les vecteurs $w_{\pm j}$ appartiennent à W. Soit $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Supposons $P_X(s_j) \neq 0$ pour tout $j = 1, ..., m$ et $P_X(0) \neq 0$. Soit $X_1, ..., X_l$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable de X. Montrons que

(2) il existe un unique $i \in \{1, ..., l\}$ tel que X_i soit conjugué à un élément de $\Xi + S + \Sigma^S$ par un élément de $G(F)$.

La forme bilinéaire $(v, v') \mapsto q(v, Xv')$ est symplectique. Son déterminant est donc un carré dans $F^\times$. Ce déterminant est $det(q)det(X)$. On a $det(X) = P_X(0)$ et $det(q) = (-1)^{d/2-1} 4\nu_0\nu_S$. On a $R_{S,0}(0) = (-1)^m \prod_{j=1,...,m} s_j^2$ et $m = (d_W - 1)/2$. On en déduit que

$$(3) \qquad \frac{P_X(0)}{(-1)^r \nu_S \nu_0 R_{S,0}(0)} \in F^{\times 2}.$$

On peut choisir des coordonnées $(\lambda_i)_{i=1,...,r}$, $(z_{\pm j})_{j=1,...,m}$ et z_0, avec $\lambda_i \in F$ et $z_j \in F^\times$ pour $j = 0, \pm 1, ..., \pm m$, de sorte que P_X soit le polynôme du lemme 3.4. En effet, on pose $z_{-j} = 1$ pour $j = 1, ..., m$ et, grâce à (3), on peut choisir les z_j, pour $j = 0, ..., m$, de sorte que les égalités 9.4(1) et 9.4(2) soient vérifiées. Ensuite, les λ_i sont déterminés par un système inversible d'équations linéaires à coefficients dans F. Cela montre qu'il existe $Y \in \Xi + S + \Lambda^S$ tel que $P_Y = P_X$. Un tel Y est conjugué à X par un élément de G^+. Comme on l'a dit dans la preuve du lemme 9.5, quitte à changer z_0 en $-z_0$, on peut assurer que Y est conjugué à X par un élément de G. Donc Y appartient à la classe de conjugaison stable de X et est conjugué à l'un des X_i par un élément de $G(F)$. L'unicité de cet élément X_i est assurée par le lemme 9.5 : deux éléments de $\Xi + S + \Sigma^S$ ne peuvent être conjugués par un élément de G que s'ils le sont par un élément de $G(F)$. D'où (2).

On a choisi un élément S. On peut supposer que les hypothèses de non-nullité imposées ci-dessus à X sont vérifiées pour tout élément de $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \omega_X$. Pour $X \in \omega_{X_{qd}}$, la classe de conjugaison stable de X se réduit à sa classe de conjugaison par $G(F)$. Donc $X \in \mathfrak{t}_{X_{qd}}(F)^S$, puis $m(X_{qd}) = 1$. Soit $F_1 \in \mathcal{F}^V$. Pour $\zeta = \pm$, posons $X^\zeta = X^\zeta_{F_1}$. Alors X^+ et X^- sont stablement conjugués et ces deux éléments sont un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans leur classe de conjugaison stable. L'assertion (3) nous dit qu'il y a un unique ζ tel que X^ζ appartienne à $\mathfrak{t}_{X^\zeta}(F)^S$. Notons $\boldsymbol{\zeta}$ cet ζ. On va le déterminer. Dans ce qui suit, on fixe F_1 et $\zeta = \pm$, on pose $X = X^\zeta$. Comme dans le paragraphe précédent (en changeant W en V), on décompose V en somme directe orthogonale

$$V = F_1 \oplus F_2 \oplus \tilde{Z}$$

et, pour $j=1,2$, on introduit la base (e_j,e_{-j}) de F_j.

Supposons d'abord $d_W\geq 3$ et $r=0$. Pour $j=1,2$, posons $\epsilon_j=e_j$ et $\epsilon_{-j}=c_j^{-1}e_{-j}$. Choisissons une base hyperbolique $(\epsilon_{\pm k})_{k=3,...,d/2}$ de $\tilde{Z}$. Supposons $\zeta=\boldsymbol{\zeta}$ et choisissons un élément $\gamma\in G(F)$ tel que $\gamma^{-1}X\gamma\in S+\Lambda^S$. Pour $k=1,...,d/2$, on a étudié dans la preuve de 10.8 les coordonnées de $\gamma^{-1}\epsilon_{\pm k}$ dans la base $\{v_0,w_S,w_{\pm 1},...,w_{\pm m}\}$ de V. En notant $Y_{\pm k}$ sa coordonnée sur v_0, les formules 10.8(3) et 10.8(4) nous disent que

$$Y_kY_{-k}=\nu_0\frac{\prod_{j=1,...,m}(s_j^2-x_k^2)}{\prod_{k'=1,...,d/2;k'\neq k}(x_{k'}^2-x_k^2)}.$$

Appliquons cela à $k=1$. On a $\tau_{F_1}(\epsilon_1)=c^{\boldsymbol{\zeta}}\epsilon_{-1}$, donc aussi $\tau_{F_1}(\gamma^{-1}\epsilon_1)=c^{\boldsymbol{\zeta}}\gamma^{-1}\epsilon_{-1}$ puis $\tau_{F_1}(Y_1)=c^{\boldsymbol{\zeta}}Y_{-1}$. Alors $\chi_{F_1}(c^{\boldsymbol{\zeta}}Y_1Y_{-1})=1$. On a $x_1=a_1$ et on déjà utilisé plusieurs fois que $y^2-a_1^2$ était la norme d'un élément de F_1^{-1} pour tout $y\in F$. On déduit de la formule ci-dessus que

$$\chi_{F_1}(Y_1Y_{-1})=\chi_{F_1}(\nu_0(x_2^2-x_1^2))=\chi_{F_1}(\nu_0(Norm_{F_1/F}(a_1)-Norm_{F_2/F}(a_2))).$$

D'après la définition de $c^{\boldsymbol{\zeta}}$, on en déduit $\boldsymbol{\zeta}=\chi_{F_1}(\eta\nu_0)$.

Passons au cas $d_W\geq 3$ et $r>0$. On peut supposer que $Z\subset\tilde{Z}$ et que $\epsilon_{\pm k}=v_{\pm(k+r-d/2)}$ pour $k=d/2+1-r,...,d/2$. On peut écrire $X=X_0+X_a$, avec $X_0\in\mathfrak{g}_0(F)$ et $X_a\in\mathfrak{a}(F)$. L'élément X_0 vérifie les mêmes conditions que X, relativement à l'espace V_0. Supposons $\zeta=\chi_{F_1}(\eta\nu_0)$. On vient de voir que X_0 est conjugué à un élément de $S+\Sigma_{0,\flat}$ par un élément de $G_0(F)$. Par un argument que l'on a déjà utilisé plusieurs fois, X est conjugué à un élément de $\Xi+S+\Sigma^S$ par un élément de $G(F)$. Donc $\boldsymbol{\zeta}=\zeta=\chi_{F_1}(\eta\nu_0)$.

Considérons enfin le cas $d_W=1$. Dans ce cas, $S=0$, Ξ est un élément nilpotent régulier et $\Xi+\Lambda$ est une section de Kostant relative à cet élément. D'après [Kot] théorème 5.1, si X est conjugué à un élément de $\Xi+\Lambda$ par un élément de $G(F)$, on a l'égalité

$$inv(X)inv(T_X)=inv_T(\Xi),$$

avec les notations de 11.4. L'élément Ξ laisse stable l'hyperplan $D\oplus Z$. Le noyau anisotrope de la restriction de q à cet hyperplan est la restriction de q à D. Donc $\Xi\in\mathcal{O}_{\nu_0}$. L'égalité ci-dessus jointe à 11.4(2) entraîne $\boldsymbol{\zeta}=\chi_{F_1}(\eta\nu_0)$.

Le raisonnement ci-dessus s'étend à tout élément de $\omega_{X^+}\cup\omega_{X^-}$. En effet, tout élément de cet ensemble est du même type que $X^\pm$, avec des valeurs propres différentes. On obtient alors

$$m(X^\zeta)=\begin{cases}1, & \text{si } \zeta=\chi_{F_1}(\eta\nu_0),\\ 0, & \text{si } \zeta=-\chi_{F_1}(\eta\nu_0).\end{cases}$$

En reportant ces valeurs dans l'égalité (1), on obtient $J(\theta,f)=\delta_{\nu,\nu_0}$. Donc $J(\theta,f)=I(\theta,f)$ et $E(\theta,f)=0$. Comme dans le paragraphe précédent, cela implique que E est identiquement nulle. $\square$

12 Preuve des théorèmes 7.8 et 7.9

12.1 Du groupe à l'algèbre de Lie

Considérons les assertions suivantes

$(th)_G$. *Pour tout quasi-caractère θ sur $H(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité $lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f) = I(\theta, f)$.*

$(th')_G$. *Pour tout quasi-caractère θ sur $H(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$, dont le support ne contient pas d'élément unipotent, on a l'égalité $lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f) = I(\theta, f)$.*

$(\mathfrak{th})_{\mathfrak{g}}$. *Pour tout quasi-caractère θ sur $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on a l'égalité $lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f) = I(\theta, f)$.*

$(\mathfrak{th}')_{\mathfrak{g}}$. *Pour tout quasi-caractère θ sur $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, dont le support ne contient pas d'élément nilpotent, on a l'égalité $lim_{N\to\infty} I_N(\theta, f) = I(\theta, f)$.*

Lemme. *L'assertion $(th)_G$ entraîne $(\mathfrak{th})_{\mathfrak{g}}$. L'assertion $(th')_G$ entraîne $(\mathfrak{th}')_{\mathfrak{g}}$.*

Preuve. Supposons vérifiée $(th)_G$. Soient θ un quasi-caractère sur $\mathfrak{h}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ une fonction très cuspidale. On veut montrer que $E(\theta, f) = 0$, avec la notation de 11.3. Dans la preuve de ce paragraphe, on a vu que E était homogène pour la transformation $(\theta, f) \mapsto (\theta^\lambda, f^\lambda)$. Cela permet de supposer que le support de f est contenu dans un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$. Comme dans la preuve du lemme 11.2, on introduit un quasi-caractère $\boldsymbol{\theta}_\omega$ sur $H(F)$ et une fonction $\mathbf{f} \in C_c^\infty(G(F))$ très cuspidale. On vérifie que $J(\theta, f) = J_{1,\omega}(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{f})$ et $I(\theta, f) = I_{1,\omega}(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{f})$. D'après les lemmes 8.2 et 8.3 et la proposition 10.9, on a $J_{1,\omega}(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{f}) = lim_{N\to\infty} I_N(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{f})$, $I_{1,\omega}(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{f}) = I(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{f})$. D'après $(th)_G$, ces deux termes sont égaux. La conclusion $E(\theta, f) = 0$ s'ensuit.

La preuve de la seconde assertion est identique : si le support de f ne contient pas d'élément nilpotent, celui de $\mathbf{f}$ ne contient pas d'élément unipotent. $\square$

12.2 La récurrence

On va raisonner par récurrence sur d. Considérons des données V'', W'', d'' analogues à V, W, d (avec le même r). Pour ces données, il y a une assertion $(th)_{G''}$ analogue à $(th)_G$. Considérons l'assertion

$(th)_{<d}$. *L'assertion $(th)_{G''}$ est vérifiée si $d'' < d$.*

Lemme. *L'assertion $(th)_{<d}$ entraîne $(th')_G$. Les assertions $(th)_{<d}$ et $(\mathfrak{th})_{\mathfrak{g}}$ entraînent $(th)_G$.*

Preuve. Supposons vérifiée $(th)_{<d}$, soient θ un quasi-caractère sur $G(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale, dont le support ne contient pas d'élément uni-

potent. Soient $x \in G_{ss}(F)$ et ω_x un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$. Posons $\Omega_x = (xexp(\omega_x))^G$. On impose à ω_x les conditions suivantes. Si $x = 1$, on suppose que $\Omega_1 \cap Supp(f) = \emptyset$ (c'est loisible d'après l'hypothèse sur f). Si x n'est conjugué à aucun élément de $H_{ss}(F)$, on impose à ω_x les conditions de 8.1. Si x est conjugué à un élément de $H_{ss}(F)$, on fixe un tel élément x', on choisit un bon voisinage $\omega_{x'}$ de 0 dans $\mathfrak{g}_{x'}(F)$ vérifiant les conditions de 8.2 et on définit ω_x comme l'image par conjugaison de $\omega_{x'}$. Le même procédé qu'à la fin de la preuve de la proposition 6.4 permet de choisir un sous-ensemble fini $\mathcal{X} \subset G_{ss}(F)$ et de décomposer f en somme finie $f = \sum_{x \in \mathcal{X}} f_x$, de sorte que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, f_x soit le produit de f et de la fonction caractéristique d'un G-domaine inclus dans Ω_x. Par linéarité, on peut aussi bien fixer $x \in \mathcal{X}$ et supposer $f = f_x$. Si $x = 1$, cette fonction est nulle d'après le choix de ω_1. L'assertion à prouver est triviale. D'après 8.1, c'est aussi le cas si x n'est conjugué à aucun élément de $H(F)$. Supposons que $x \neq 1$ et x est conjugué à un élément de $H(F)$. On peut aussi bien supposer $x \in H_{ss}(F)$. Les lemmes 8.2 et 8.3 nous ramènent à prouver l'égalité

$$(1) \qquad lim_{N\to\infty} I_{x,\omega,N}(\theta, f) = I_{x,\omega}(\theta, f).$$

On utilise les notations des sections 8 à 10. Si $A_{G'_x} \neq \{1\}$, le membre de gauche est nul d'après la proposition 10.9. L'ensemble $\underline{\mathcal{T}}_x$ est vide et le membre de droite est nul lui-aussi. Supposons $A_{G'_x} = \{1\}$. En 10.1, on a décomposé $\theta_{x,\omega}$ en une somme finie

$$\theta_{x,\omega}(X) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \hat{j}_S(X')\hat{j}^{H''}(S, X'')$$

pour $X \in \omega \cap \mathfrak{h}(F)$. On peut aussi bien écrire

$$\theta_{x,\omega}(X) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \theta'_S(X')\theta''_S(X'')$$

pour tout $X \in \mathfrak{h}_x(F)$, où $\theta'_S(X') = \mathbf{1}_{\omega'}\hat{j}_S(X')$ et $\theta''_S(X'') = \mathbf{1}_{\omega''\cap\mathfrak{h}''(F)}\hat{j}^{H''}(S, X'')$. Remarquons que θ'_S, resp. θ''_S, est un quasi-caractère sur $\mathfrak{g}'_x(F) = \mathfrak{h}'_x(F)$, resp. $\mathfrak{h}''(F)$, à support compact modulo conjugaison. On peut de même décomposer $\theta_{f,x,\omega}$ en somme

$$\theta_{f,x,\omega}(X) = \sum_{b \in B} \theta'_{f,b}(X')\theta''_{f,b}(X'')$$

où B est un ensemble fini d'indices et, pour tout $b \in B$, $\theta'_{f,b}$, resp. $\theta''_{f,b}$, est un quasi-caractère sur $\mathfrak{g}'_x(F)$, resp. $\mathfrak{g}''(F)$, à support compact modulo conjugaison. D'après la proposition 6.4, pour tout $b \in B$, on peut choisir une fonction $f''_b \in C_c^\infty(\mathfrak{g}''(F))$, très cuspidale et telle que $\theta''_{f,b} = \theta_{f''_b}$. En comparant les formules de 7.9 et 8.3, on obtient l'égalité

$$I_{x,\omega}(\theta, f) = \sum_{S \in \mathcal{S}, b \in B} I'(S, b) I(\theta''_S, f''_b)$$

où

$$I'(S, b) = \sum_{T' \in \mathcal{T}_{ell}(G'_x)} |W(G'_x, T')|^{-1}\nu(T') \int_{\mathfrak{t}'(F)} \theta'_S(X')\theta'_{f,b}(X')D^{G'_x}(X')dX'.$$

De même, en comparant les formules de 10.9 et 11.2, on obtient

$$J_{x,\omega}(\theta, f) = \sum_{S \in \mathcal{S}, b \in B} I'(S, b) J(\theta''_S, f''_b).$$

Puisque $x \neq 1$, on a $dim(W'') < d$. L'assertion $(th)_{<d}$ et le lemme 12.1 entraînent que $(\mathfrak{th})_{\mathfrak{g}''}$ est vérifiée. Donc $J(\theta''_S, f''_b) = I(\theta''_S, f''_b)$ grâce au lemme 11.2. Alors les formules ci-dessus et la proposition 10.9 impliquent l'égalité (1) qu'il fallait prouver.

La seconde assertion de l'énoncé se démontre de même. On ne peut plus éliminer le point $x = 1$. Mais, pour ce point, l'égalité $J(\theta''_S, f''_b) = I(\theta''_S, f''_b)$ provient de l'assertion $(\mathfrak{th})_{\mathfrak{g}}$ que l'on suppose vérifiée. $\square$

12.3 Finale

Pour prouver le théorème 7.8, et aussi le théorème 7.9 d'après le lemme 12.1, il suffit de prouver que l'assertion $(th)_{<d}$ entraîne $(th)_G$. Or $(th)_{<d}$ entraîne $(th')_G$ (lemme 12.2), qui entraîne $(\mathfrak{th}')_{\mathfrak{g}}$ (lemme 12.1). Cette dernière assertion entraîne $(\mathfrak{th})_{\mathfrak{g}}$: c'est une reformulation de la proposition 11.1. Jointe à $(th)_{<d}$, cette dernière assertion entraîne $(th)_G$ (lemme 12.2). Cela achève la preuve.

13 Un cas de la version faible de la conjecture locale de Gross-Prasad

13.1 Définition des multiplicités

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. Une représentation de $G(F)$ est un couple (π, E_π), où E_π est l'espace de la représentation (pour nous, un espace vectoriel complexe), et π un homomorphisme de $G(F)$ dans $GL_{\mathbb{C}}(E_\pi)$. On oubliera souvent l'un des termes en la notant simplement π ou E_π. On notera aussi une classe d'isomorphie de représentations comme une représentation dans cette classe. On note $\check{\pi}$ la représentation contragrédiente de π. On note $Irr(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles de $G(F)$ et $Temp(G)$ le sous-ensemble des représentations qui sont aussi tempérées. A tout élément $\pi \in Irr(G)$ est associé un caractère θ_π, que l'on peut considérer comme une distribution sur $G(F)$ ou comme une fonction définie presque partout. Dans cette dernière interprétation, θ_π est un quasi-caractère sur $G(F)$ d'après un théorème de Harish-Chandra ([HCDS] théorème 16.2).

Considérons la situation de 7.2, soient $(\pi, E_\pi) \in Irr(G)$ et $(\sigma, E_\sigma) \in Irr(H)$. Notons $Hom_{H,\xi}(\pi, \sigma)$ l'espace des applications linéaires $\varphi : E_\pi \to E_\sigma$ telles que

$$\varphi(\pi(hu)e) = \xi(u)\sigma(h)\varphi(e)$$

pour tous $h \in H(F)$, $u \in U(F)$, $e \in E_\pi$. Cet espace dépend des constantes ξ_i qui nous ont permis de définir ξ, mais de façon inessentielle. En effet, si on associe un caractère ξ' à d'autres constantes, on vérifie qu'il existe $a \in A(F)$ tel que l'application $\varphi \mapsto \varphi \circ \pi(a)$ soit un isomorphisme de $Hom_{H,\xi}(\pi, \sigma)$ sur $Hom_{H,\xi'}(\pi, \sigma)$. Tout ce qui suit est donc essentiellement indépendant des constantes ξ_i.

On a

$$(1) \qquad dim_{\mathbb{C}}(Hom_{H,\xi}(\pi, \sigma)) \leq 1.$$

Si $r = 0$, c'est le théorème 1' de [AGRS]. Ce résultat est généralisé à tout r dans [GGP] corollaire 20.4 (pour les groupes unitaires, mais la preuve est la même pour les groupes spéciaux orthogonaux). On pose

$$m(\sigma,\pi)=dim_{\mathbb{C}}(Hom_{H,\xi}(\pi,\sigma)).$$

Soit $T\in\mathcal{T}$. En appliquant les définitions de 7.3 aux quasi-caractères $\theta=\theta_{\check{\sigma}}$ et $\tau=\theta_{\pi}$, on définit les fonctions $c_{\theta_{\check{\sigma}}}$ et $c_{\theta_{\pi}}$ sur $T(F)$, que l'on note simplement $c_{\check{\sigma}}$ et c_{π}. On pose

$$m_{geom}(\sigma,\pi)=\sum_{T\in\mathcal{T}}|W(H,T)|^{-1}\nu(T)\int_{T(F)}c_{\check{\sigma}}(t)c_{\pi}(t)D^H(t)\Delta(t)^r dt.$$

Cette expression est absolument convergente d'après la proposition 7.3.

Proposition. *Supposons $\pi\in Irr(G)$, $\sigma\in Irr(H)$ et π supercuspidale. Alors on a l'égalité $m(\sigma,\pi)=m_{geom}(\sigma,\pi)$.*

Preuve. Si V est hyperbolique de dimension 2, on vérifie directement que les deux termes de l'égalité valent 1. On exclut ce cas. Introduisons les représentations de $G(F)$: $\boldsymbol{\rho}=Ind_{H(F)U(F)}^{G(F)}(\sigma\otimes\bar{\xi})$ et $\rho=ind_{H(F)U(F)}^{G(F)}(\check{\sigma}\otimes\xi)$. La première est l'induite lisse de la représentation $\sigma\otimes\bar{\xi}$ de $H(F)U(F)$, où $\bar{\xi}$ est le conjugué complexe de ξ, la seconde est l'induite à supports compacts de la représentation $\check{\sigma}\otimes\xi$. Par réciprocité de Frobenius pour la première égalité et d'après un résultat standard pour la seconde, on a

$$Hom_{H,\bar{\xi}}(\pi,\sigma)=Hom_{G(F)}(\pi,\boldsymbol{\rho})=Hom_{G(F)}(\rho,\check{\pi}).$$

Puisque $\check{\pi}$ est supercuspidale et le centre de $G(F)$ est fini, la théorie de Bernstein nous dit que ρ se décompose en somme d'une représentation τ dont aucun sous-quotient n'est isomorphe à $\check{\pi}$ et d'un certain nombre de facteurs tous isomorphes à $\check{\pi}$. Le nombre de ces facteurs est précisément $m(\sigma,\pi)$. Soit f un coefficient de π. On a l'égalité

$$trace(\check{\pi}(f)|E_{\check{\pi}})=f(1)d(\pi)^{-1}$$

où $d(\pi)$ est le degré formel de π. L'opérateur $\tau(f)$ est nul. Donc $\rho(f)$ est de rang fini et

$$(2)\qquad trace(\rho(f))=m(\sigma,\pi)f(1)d(\pi)^{-1}.$$

Montrons que, si N est un entier assez grand,

$$(3)\qquad trace(\rho(f))=I_N(\theta_{\check{\sigma}},f).$$

Fixons un sous-groupe ouvert compact $K'\subset K$ tel que f soit biinvariante par K'. Notons Ω_N le support de la fonction κ_N et $E_{\rho,N}$ le sous-espace de E_{ρ} formé des fonctions à support dans Ω_N. Selon l'usage, notons $E_{\rho,N}^{K'}$ le sous-espace des éléments invariants par l'action de K'. Puisque l'image de $\rho(f)$ est de dimension finie, elle est contenue dans $E_{\rho,N}^{K'}$ si N est assez grand. Alors $trace(\rho(f))$ est la trace de la restriction de $\rho(f)$ à $E_{\rho,N}^{K'}$. Fixons un ensemble de représentants Γ_N des doubles classes $H(F)U(F)\backslash\Omega_N/K'$. Notons Γ'_N le sous-ensemble des $\gamma\in\Gamma_N$ tels que ξ soit trivial sur $\gamma K'\gamma^{-1}\cap U(F)$. Pour $\gamma\in\Gamma_N$, posons $K^H[\gamma]=\gamma K'\gamma^{-1}\cap H(F)$ et fixons une base $\mathcal{B}[\gamma]$ de l'espace $E_{\sigma}^{K^H[\gamma]}$. Notons $\{\check{b};b\in\mathcal{B}[\gamma]\}$ la base duale de $E_{\check{\sigma}}^{K^H[\gamma]}$. Pour $\gamma\in\Gamma'_N$ et $b\in\mathcal{B}[\gamma]$, il existe un unique élément $\varphi[b,\gamma]\in E_{\rho}$, à support dans $H(F)U(F)\gamma K'$, invariant à droite par K' et tel que $\varphi[b,\gamma](\gamma)=\check{b}$. L'ensemble $\{\varphi[b,\gamma];\gamma\in\Gamma'_N, b\in\mathcal{B}[\gamma]\}$ est une base de $E_{\rho,N}^{K'}$. Alors, la trace de $\rho(f)$ agissant dans $E_{\rho,N}^{K'}$ est

$$\sum_{\gamma\in\Gamma'_N, b\in\mathcal{B}[\gamma]} <(\rho(f)\varphi[b,\gamma])(\gamma),b> .$$

On a

$$<(\rho(f)\varphi[b,\gamma])(\gamma),b>=\int_{G(F)}<\varphi[b,\gamma](\gamma g),b>f(g)dg$$

$$=mes(H(F)U(F)\backslash H(F)U(F)\gamma K')\int_{H(F)U(F)}<\check{\sigma}(h)\check{b},b>\xi(u)f(\gamma^{-1}hu\gamma)du\,dh$$

$$=mes(H(F)U(F)\backslash H(F)U(F)\gamma K')\int_{H(F)}<\check{\sigma}(h)\check{b},b>{}^{\gamma}f^{\xi}(h)dh.$$

La somme sur $b\in\mathcal{B}[\gamma]$ de cette intégrale est $trace(\check{\sigma}({}^{\gamma}f^{\xi}))$, ou encore $I(\theta_{\check{\sigma}},f,\gamma)$. On vérifie que ce terme est nul pour $\gamma\in\Gamma_N$, $\gamma\notin\Gamma'_N$ et on obtient

$$trace(\rho(f))=\sum_{\gamma\in\Gamma_N} mes(H(F)U(F)\backslash H(F)U(F)\gamma K')I(\theta_{\check{\sigma}},f,\gamma)$$

$$=\int_{H(F)U(F)\backslash G(F)} I(\theta_{\check{\sigma}},f,g)\kappa_N(g)dg,$$

d'où (3).

La fonction f est très cuspidale. On calcule son quasi-caractère associé

$$(4)\qquad \theta_f=f(1)d(\pi)^{-1}\theta_\pi.$$

En effet, cela résulte de notre définition 5.3 de θ_f et de [A6] théorème p.3 (il y a un problème de passage à la contragrédiente dans ce théorème).

Grâce à (3) et au théorème 7.8, on a $trace(\rho(f))=I(\theta_{\check{\sigma}},f)$. Grâce à (4), $I(\theta_{\check{\sigma}},f)=f(1)d(\pi)^{-1}m_{geom}(\sigma,\pi)$. Alors la proposition résulte de (2). $\square$

13.2 Les L-paquets

Considérons de nouveau la situation de 7.2. On suppose désormais que G et H sont quasi-déployés, autrement dit que $d_{an}(V)\leq 2$, $d_{an}(W)\leq 2$. On affecte les notations d'un indice i : V_i, W_i, G_i, H_i etc...

A équivalence près, il existe au plus un couple (V',q') analogue à (V_i,q_i), tel que $dim(V')=d$, le discriminant de q' soit égal à celui de q_i, mais (V',q') ne soit pas équivalent à (V_i,q_i). Un tel couple vérifie $d_{an}(V')+d_{an}(V_i)=4$. Le couple (V',q') existe si et seulement si $d+d_{an}(V_i)\geq 4$. S'il existe, on le note (V_a,q_a) et on introduit pour ce couple les mêmes objets que pour (V_i,q_i), affectés d'un indice a. On introduit de même un couple (W_a,q_{W_a}), s'il existe, c'est-à-dire si $d_{W_i}+d_{an}(W_i)\geq 4$. Quand ces deux couples existent, on a l'égalité $V_a=W_a\oplus D$ et q_a est la somme orthogonale de q_{W_a} et de la forme déjà fixée sur D.

Remarque. Les indices i et a signifient "isotrope" et "anisotrope", les données affectées de l'indice i ayant tendance à être "plus isotropes" que celles affectées de l'indice a. Précisément, on a $d_{an}(V_i)+d_{an}(W_i)<d_{an}(V_a)+d_{an}(W_a)$.

Pour simplifier, si le couple (V_a, q_a), resp. (W_a, q_{W_a}), n'existe pas, on pose $Temp(G_a) = \emptyset$, resp. $Temp(H_a) = \emptyset$. Selon une conjecture due essentiellement à Langlands, les ensembles de représentations $Temp(G_i)$ et $Temp(G_a)$ se décomposent en réunions disjointes de L-paquets, qui possèdent les propriétés (1), (2) et (3) ci-dessous.

(1) Soit Π un L-paquet de $Temp(G_i)$ ou $Temp(G_a)$. L'ensemble Π est fini. Posons $\theta_\Pi = \sum_{\pi\in\Pi}\theta_\pi$. Alors θ_Π est une distribution stable.

(2) Il existe une application qui, à un L-paquet dans $Temp(G_a)$, associe un L-paquet dans $Temp(G_i)$, et satisfait les conditions suivantes. Elle est injective. Soient Π_a un L-paquet dans $Temp(G_a)$ et Π_i son image. Alors $(-1)^d\theta_{\Pi_a}$ est le transfert à $G_a(F)$ de la distribution θ_{Π_i} sur $G_i(F)$. Soit Π_i un L-paquet dans $Temp(G_i)$ qui n'est pas dans l'image de l'application. Alors le transfert à $G_a(F)$ de θ_{Π_i} est nul (si le groupe G_a existe).

Remarque. Le signe $(-1)^d$ s'interprète comme $(-1)^{rang_F(G_a)-rang_F(G_i)}$, où $rang_F(G_a)$, resp. $rang_F(G_i)$, est la dimension d'un sous-tore déployé maximal de G_a, resp. G_i.

On sait définir la notion de modèle de Whittaker d'une représentation dans $Irr(G_i)$. Plus précisément, une telle notion est associée à chaque orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}_i(F)$. Soient $\mathcal{O}$ une telle orbite et $\bar{N} \in \mathcal{O}$. On peut compléter $\bar{N}$ en un $\mathfrak{sl}_2$-triplet qui détermine un sous-tore maximal T et un sous-groupe de Borel B de G_i de sorte que $T \subset B$ et $\bar{N} \in \bar{\mathfrak{b}}(F)$. Notons U_B le radical unipotent de B et définissons une fonction $\xi_{\bar{N}}$ sur $U_B(F)$ par $\xi_{\bar{N}}(exp(N)) = \psi(<\bar{N}, N>)$. C'est un caractère. Pour $\pi \in Irr(G_i)$, on dit que π admet un modèle de Whittaker relatif à $\mathcal{O}$ s'il existe une forme linéaire l sur E_π, non nulle et telle que $l(\pi(u)e) = \xi_{\bar{N}}(u)l(e)$ pour tous $u \in U_B(F)$, $e \in E_\pi$. La dernière propriété des L-paquets est

(3) pour tout L-paquet Π dans $Temp(G_i)$ et toute orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}_i(F)$, il existe un et un seul élément de Π qui admet un modèle de Whittaker relatif à $\mathcal{O}$.

Remarques. La propriété (1) pour le groupe G_i est annoncée par Arthur. Il n'y a guère de doute que, dans un avenir proche, les travaux d'Arthur démontreront également cette propriété pour le groupe G_a et la propriété (2). Konno a montré que des résultats également annoncés par Arthur entraînaient la propriété (3) ([Konno] théorème 3.4). Signalons que cette propriété (3) est une conjecture de Shahidi.

Dans la suite de l'article, on admet l'existence de L-paquets possédant ces propriétés. Bien évidemment, on les admet aussi pour les groupes H_i et H_a (l'entier d étant changé en d_W).

13.3 Un résultat en direction de la conjecture locale de Gross-Prasad

Soient Π_i un L-paquet dans $Temp(G_i)$ et Σ_i un L-paquet dans $Temp(H_i)$. Si Π_i est dans l'image de l'application 13.2(2), on note Π_a le L-paquet dans $Temp(G_a)$ dont il est l'image. Sinon, on pose $\Pi_a = \emptyset$. On définit de même Σ_a. Pour $(\sigma, \pi) \in (\Sigma_i\times\Pi_i)\cup(\Sigma_a\times\Pi_a)$, on définit la multiplicité $m(\sigma, \pi)$.

Théorème. *Supposons que tout élément de* $\Pi_i \cup \Pi_a$ *soit supercuspidal. Alors il existe un unique couple* $(\sigma, \pi) \in (\Sigma_i \times \Pi_i) \cup (\Sigma_a \times \Pi_a)$ *tel que* $m(\sigma, \pi) = 1$.

Sous les hypothèses indiquées, c'est une partie de la conjecture 6.9 de [GP]. La démonstration sera donnée au paragraphe 13.6.

13.4 Calcul de fonctions $\hat{j}$

On considère la situation du paragraphe 11.4 dont on reprend les notations. On reprend aussi la notation $\mathcal{F}_V$ introduite en 11.5. Dans le cas où d est pair et $d \geq 4$, on a défini des éléments $X^{\pm}_{F_1}$. On pose $\epsilon_{F_1} = \chi_{F_1}(-Norm_{F_2/F}(a_2))$. En fait, ce terme ne dépend pas de a_2 puisque l'image de $Norm_{F_2/F}(a_2)$ dans $F^{\times}/F^{\times 2}$ est uniquement déterminée. On note T_{F_1} le commutant de $X^{+}_{F_1}$ dans G.

Lemme. *(i) Supposons d impair ou $d \leq 2$. On a l'égalité*

$$\hat{j}(\mathcal{O}_{reg}, X_{qd}) = |W^G| D^G(X_{qd})^{-1/2}.$$

(ii) Supposons d pair, $d \geq 4$. Soit $\nu \in \mathcal{N}^V$. On a l'égalité

$$\hat{j}(\mathcal{O}_{\nu}, X_{qd}) = |\mathcal{N}^V|^{-1} |W^G| D^G(X_{qd})^{-1/2}.$$

Pour $F_1 \in \mathcal{F}^V$, on a l'égalité

$$\hat{j}(\mathcal{O}_{\nu}, X^{+}_{F_1}) = -\hat{j}(\mathcal{O}_{\nu}, X^{-}_{F_1}) = \epsilon_{F_1} \chi_{F_1}(\nu\eta) \frac{|W(G, T_{F_1})|}{2|\mathcal{N}^V|} D^G(X^{+}_{F_1})^{-1/2}.$$

Preuve. Supposons d impair ou $d \leq 2$. D'après 2.6(4) et le lemme 11.4, on a l'égalité

$$\hat{j}(\mathcal{O}_{reg}, X_{qd}) = \hat{j}(\lambda X_{qd}, X_{qd})$$

pour tout $\lambda \in F^{\times 2}$ assez voisin de 0. Le commutant T_{qd} de X_{qd} dans G est un Lévi minimal. La formule 2.6(5) exprime $\hat{j}^G(\lambda X_{qd}, X_{qd})$ à l'aide de la fonction $\hat{j}^{T_{qd}}$. Mais, pour tout tore T, la fonction $(X, Y) \mapsto \hat{j}^T(X, Y)$ est constante de valeur 1, ainsi qu'il résulte de sa définition. D'autre part, un élément de $\mathfrak{t}_{qd}(F)$ est conjugué à X_{qd} par un élément de $G(F)$ si et seulement s'il l'est par un élément de $Norm_{G(F)}(T_{qd})$. Il y a $|W^G|$ tels éléments. Alors, la formule 2.6(5) conduit à l'égalité du (i) de l'énoncé.

Dans la situation du (ii), notons $\mathcal{X}$ l'ensemble formé des éléments X_{qd} et $X^{\pm}_{F_1}$, pour $F_1 \in \mathcal{F}^V$. La formule 2.6(4) et le lemme 11.4 entraînent que pour $\lambda \in F^{\times 2}$ assez voisin de 0, on a l'égalité

$$(1) \qquad \hat{j}(\mathcal{O}_{\nu}, Y) = |\mathcal{N}^V|^{-1}(\hat{j}(\lambda X_{qd}, Y) + \sum_{F_1 \in \mathcal{F}^V} \chi_{F_1}(\nu\eta)(\hat{j}(\lambda X^{+}_{F_1}, Y) - \hat{j}(\lambda X^{-}_{F_1}, Y)))$$

pour tout $Y \in \mathcal{X}$. Fixons un tel λ.

Comme ci-dessus, on a

$$\hat{j}(\lambda X_{qd}, X_{qd}) = |W^G| D^G(X_{qd})^{-1/2}.$$

D'autre part, pour $F_1 \in \mathcal{F}^V$, l'élément $X^{\pm}_{F_1}$ n'est conjugué à aucun élément de $\mathfrak{t}_{qd}(F)$ et la formule 2.6(5) entraîne

$$\hat{j}(\lambda X_{qd}, X^{\pm}_{F_1}) = 0.$$

Soit $F_1 \in \mathcal{F}^V$. Il nous faut calculer $\hat{j}(\lambda X^+_{F_1}, Y) - \hat{j}(\lambda X^-_{F_1}, Y)$ pour $Y \in \mathcal{X}$. On va d'abord supposer $d = 4$. Pour $j = 1, 2$, notons G_i le groupe spécial orthogonal de F_j muni de la forme $Norm_{F_j/F}$. C'est un tore de dimension 1. Le groupe $G' = G_1 \times G_2$ est un groupe endoscopique elliptique de G. La classe de conjugaison stable de $X^{\pm}_{F_1}$ dans $\mathfrak{g}(F)$ est l'image de la classe de conjugaison stable d'un élément $X' \in \mathfrak{g}'(F)$, cette dernière classe se réduisant à $\{X'\}$ puisque G' est un tore. On peut normaliser le facteur de transfert $\Delta_{G,G'}$ de sorte que $\Delta_{G,G'}(X', X^{\zeta}_{F_1}) = \zeta$ pour $\zeta = \pm = \pm 1$. Grâce à Ngo Bao Chau, la conjecture 1.2 de [W4] est maintenant démontrée. La fonction $\hat{i}^G(X, Y)$ de [W4] est égale à $\hat{j}^G(X, Y) D^G(Y)^{1/2}$. La fonction $\hat{i}^{G'}$ est constante de valeur 1 puisque G' est un tore. Avec les notations de cette référence, on a donc l'égalité

$$\gamma_\psi(\mathfrak{g})(\hat{j}^G(\lambda X^+_{F_1}, Y) - \hat{j}^G(\lambda X^-_{F_1}, Y)) D^G(Y)^{1/2} = \gamma_\psi(\mathfrak{g}') \sum_{Z \in \mathfrak{g}'(F)} \Delta_{G,G'}(Z, Y)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. La classe de conjugaison stable de l'élément X_{qd} n'est l'image d'aucun élément de $\mathfrak{g}'(F)$. Il n'y a donc aucun Z pour lequel $\Delta_{G,G'}(Z, X_{qd}) \neq 0$. On obtient

$$\hat{j}^G(\lambda X^+_{F_1}, X_{qd}) - \hat{j}^G(\lambda X^-_{F_1}, X_{qd}) = 0.$$

Soit $F'_1 \in \mathcal{F}^V$. Si $F'_1 \neq F_1$, la classe de conjugaison stable d'un élément $X^{\zeta}_{F'_1}$, pour $\zeta = \pm$, n'est l'image d'aucun élément de $\mathfrak{g}'(F)$ et on obtient de même

$$\hat{j}^G(\lambda X^+_{F_1}, X^{\zeta}_{F'_1}) - \hat{j}^G(\lambda X^-_{F_1}, X^{\zeta}_{F'_1}) = 0.$$

Si $F_1 \neq F_2$, la classe de conjugaison stable de $X^{\zeta}_{F_1}$ est l'image d'un unique élément de $\mathfrak{g}'(F)$, à savoir X' et on connaît la valeur $\Delta_{G,G'}(X', X^{\zeta}_{F_1}) = \zeta$ (en identifiant ζ à un élément de $\{\pm 1\}$). Si $F_1 = F_2$, la classe de conjugaison stable de $X^{\zeta}_{F_1}$ est l'image de deux éléments de $\mathfrak{g}'(F)$: X' et l'élément X'' obtenu en échangeant les deux facteurs de X'. Un argument général nous dit que, parce que G est quasi-déployé, le facteur de transfert est insensible à l'action d'un automorphisme du groupe endoscopique G'. Donc $\Delta_{G,G'}(X'', X^{\zeta}_{F_1}) = \Delta_{G,G'}(X', X^{\zeta}_{F_1}) = \zeta$. On obtient

$$\hat{j}^G(\lambda X^+_{F_1}, X^{\zeta}_{F_1}) - \hat{j}^G(\lambda X^-_{F_1}, X^{\zeta}_{F_1}) = \zeta(1 + \delta_{F_1,F_2}) \gamma_\psi(\mathfrak{g}') \gamma_\psi(\mathfrak{g})^{-1} D^G(X^{\pm}_{F_1})^{-1/2}.$$

Remarquons que $D^G(X^+_{F_1}) = D^G(X^-_{F_1})$. Si $F_1 \neq F_2$, le groupe $W(G, T_{F_1})$ a deux éléments : l'action de l'élément non trivial de ce groupe envoie $X^{\zeta}_{F_1}$ sur un élément analogue où les valeurs propres a_1 et a_2 sont changées en $-a_1$ et $-a_2$. Si $F_1 = F_2$, le groupe $W(G, T_{F_1})$ a 4 éléments : on peut de plus permuter les deux facteurs. Donc

$$1 + \delta_{F_1,F_2} = \frac{|W(G, T_{F_1})|}{2}.$$

Il reste à calculer les facteurs γ_ψ. Ces facteurs sont les "constantes de Weil" associées à ψ et aux formes quadratiques $(X, Y) \mapsto trace(XY)/2$ sur $\mathfrak{g}(F)$ et $\mathfrak{g}'(F)$. Fixons $\xi_1, \xi_2 \in F^\times$ tels que $F_j = F(\sqrt{\xi_j})$ pour $j = 1, 2$. Si G est déployé, posons $\xi = 1$. Si G n'est pas déployé, soit $\xi \in F^\times$ tel que $E = F(\sqrt{\xi})$. La forme quadratique sur $\mathfrak{g}(F)$ a même noyau anisotrope que la forme $x^2 + \xi y^2$ de dimension 2. La forme quadratique sur $\mathfrak{g}'(F)$ est équivalente à la forme $\xi_1 x^2 + \xi_2 y^2$. Ces deux formes ont même déterminant. Elles sont équivalentes si et seulement si $\chi_{F_1}(\xi_2) = 1$, ou, ce qui revient au même, si $\epsilon_{F_1} = 1$. On en déduit l'égalité

$$\gamma_\psi(\mathfrak{g}') \gamma_\psi(\mathfrak{g})^{-1} = \epsilon_{F_1},$$

puis

$$(2) \qquad \hat{j}^G(\lambda X^+_{F_1}, X^\zeta_{F_1}) - \hat{j}^G(\lambda X^-_{F_1}, X^\zeta_{F_1}) = \zeta\epsilon_{F_1}\frac{|W(G,T_{F_1})|}{2}D^G(X^+_{F_1})^{-1/2}.$$

Remarque. Le calcul serait le même si l'on remplaçait $X^\zeta_{F_1}$ par un élément similaire, mais de valeurs propres différentes. Par exemple si l'on remplaçait $X^\zeta_{F_1}$ par un conjugué par un élément du groupe $G^+(F)$.

Levons l'hypothèse $d = 4$. Dans la construction de 11.4 des éléments $X^\pm_{F_1}$, on a fixé un espace hyperbolique $\tilde{Z}$ et un sous-tore déployé maximal $\tilde{T}$ du groupe spécial orthogonal de cet espace. Notons M le commutant de $\tilde{T}$ dans G. On a $M = \tilde{T}G'$, où G' est le groupe spécial orthogonal de l'espace quadratique $F_1 \oplus F_2$ de dimension 4. Soit $X \in \mathcal{X}$ et Y un élément de $\mathfrak{m}(F)$ conjugué à X par un élément de $G(F)$. Il est clair que $Y = Y_{\tilde{T}} + Y'$, où $Y_{\tilde{T}} \in \tilde{\mathfrak{t}}(F)$ et Y' est un élément de $\mathfrak{g}'(F)$ construit de la même façon que X, éventuellement conjugué par un élément du groupe $G'^+(F)$. Comme on l'a dit ci-dessus, la fonction $\hat{j}^{\tilde{T}}$ est constante de valeur 1. La formule 2.6(4) et nos résultats ci-dessus appliqués au groupe G' conduisent à l'égalité

$$\hat{j}^G(\lambda X^+_{F_1}, X) - \hat{j}^G(\lambda X^-_{F_1}, X) = 0$$

pour $X \in \mathcal{X}$, $X \neq X^\pm_{F_1}$. Pour $X = X^\pm_{F_1}$, on doit calculer le nombre de classes de conjugaison par $M(F)$ contenues dans l'intersection de $\mathfrak{m}(F)$ et de la classe de conjugaison par $G(F)$ de X. Parce que X est elliptique dans $\mathfrak{m}(F)$, tout élément $g \in G(F)$ tel que $gXg^{-1} \in \mathfrak{m}(F)$ normalise M. Le nombre cherché est donc le nombre d'éléments du groupe $Norm_{G(F)}(M)/M(F)$. On vérifie que tout élément de ce quotient a un représentant dans $Norm_{G(F)}(T_{F_1})$. Le nombre cherché est donc $|W(G,T_{F_1})||W(M,T_{F_1})|^{-1}$. Le deuxième facteur est l'inverse de celui qui apparaît dans l'égalité (2) appliquée au groupe G'. On obtient alors la même égalité (2) pour notre groupe G.

On a maintenant calculé tous les termes intervenant dans la formule (1). Cette formule conduit à l'égalité du (ii) de l'énoncé. $\square$

13.5 Classes de conjugaison stable de tores

Dans ce paragraphe, on travaille soit avec l'une des séries de données V_i, W_i, G_i etc.. ou V_a, W_a, G_a etc..., soit avec les deux. Dans le premier cas, pour simplifier, on note $\flat$ l'indice i ou a. On a défini l'ensemble $\underline{\mathcal{T}}_\flat$ en 7.3. A $T \in \underline{\mathcal{T}}_\flat$, on a associé des espaces $W'_\flat$ etc... et des groupes $H'_\flat$ etc... On précise la notation en les notant plutôt $W'_{\flat,T}$, $H'_{\flat,T}$ etc... Pour $T \in \underline{\mathcal{T}}_\flat$, on introduit le groupe de cohomologie $H^1(T) = H^1(Gal(\bar{F}/F), T)$. Puisque $A_T = \{1\}$, ce groupe est un produit de facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et il est non trivial si $T \neq \{1\}$. On pose

$$h(T) = \left\{ \begin{array}{cl} |H^1(T)|/2, & \text{si } T \neq \{1\}, \\ 1, & \text{si } T = \{1\}. \end{array} \right.$$

On introduit le groupe $\bar{W}(H_\flat, T) = Norm_{H_\flat}(T)/Z_{H_\flat}(T)$. Le groupe de Galois $Gal(\bar{F}/F)$ agit sur $\bar{W}(H_\flat, T)$, on note $\bar{W}_F(H_\flat, T)$ le sous-groupe des points fixes.

Fixons un isomorphisme $\Phi : W_a \otimes_F \bar{F} \to W_i \otimes_F \bar{F}$ tel que $q_{W_i}(\Phi(w), \Phi(w')) = q_{W_a}(w, w')$ pour tous $w, w' \in W_a \otimes_F \bar{F}$. Pour $h \in H_a$, notons $\phi(h) = \Phi \circ h \circ \Phi^{-1}$. C'est un élément de H_i et l'isomorphisme ϕ ainsi défini de H_a sur H_i est un torseur intérieur.

Soient $T, T' \in \underline{\mathcal{T}}_a \cup \underline{\mathcal{T}}_i$. On dit que T et T' sont stablement conjugués si et seulement si l'une des conditions suivantes (1) ou (2) est vérifiée.

(1) Il existe un indice $\flat$ tel que $T, T' \in \underline{\mathcal{T}}_\flat$. Il existe $h \in H_\flat$ tel que $hTh^{-1} = T'$ et l'homomorphisme $t \mapsto hth^{-1}$ de T sur T' est défini sur F.

(2) Quitte à échanger T et T', on a $T \in \underline{\mathcal{T}}_a$ et $T' \in \underline{\mathcal{T}}_i$. Il existe $h \in H_i$ de sorte que $h\phi(T_a)h^{-1} = T_i$ et l'homomorphisme $t \mapsto h\phi(t)h^{-1}$ de T_a sur T_i est défini sur F.

On note $T \sim_{st} T'$ cette relation. On vérifie que c'est une relation d'équivalence.

Lemme. *(i) Soient T et T' deux éléments de $\underline{\mathcal{T}}_a \cup \underline{\mathcal{T}}_i$ stablement conjugués. Dans la situation de (1), l'espace quadratique $W'_{\flat,T}$, resp. $W''_{\flat,T}$, est isomorphe à $W'_{\flat,T'}$, resp. $W''_{\flat,T'}$ et on peut choisir h vérifiant (1) de sorte que la restriction de h à $W''_{\flat,T}$ soit un isomorphisme défini sur F de $W''_{\flat,T}$ sur $W''_{\flat,T'}$. Dans la situation de (2), les espaces quadratiques $W''_{a,T}$ et $W''_{i,T'}$ sont isomorphes et on peut choisir h vérifiant (1) de sorte que la restriction de $h \circ \Phi$ à $W''_{a,T}$ soit un isomorphisme défini sur F de $W''_{a,T}$ sur $W''_{i,T'}$.*

(ii) Soit $T \in \underline{\mathcal{T}}_\flat$. On a l'égalité

$$\sum_{T' \in \underline{\mathcal{T}}_\flat; T' \sim_{st} T} |W(H_\flat, T')|^{-1} = h(T)|\bar{W}_F(H_\flat, T)|^{-1}.$$

Les nombres $h(T)$ et $|\bar{W}_F(H_\flat, T)|$ ne dépendent que de la classe de conjugaison stable de T.

(iii) Toute classe de conjugaison stable dans $\underline{\mathcal{T}}_a \cup \underline{\mathcal{T}}_i$ coupe $\underline{\mathcal{T}}_i$. La seule classe de conjugaison stable qui ne coupe pas $\underline{\mathcal{T}}_a$ est la classe réduite au tore $\{1\} \in \underline{\mathcal{T}}_i$.

Preuve. Soient T et T' deux éléments de $\underline{\mathcal{T}}_\flat$ stablement conjugués et h vérifiant (1). Supposons $d_{W_\flat}$ impair. On a $h(W''_{\flat,T} \otimes_F \bar{F}) = W''_{\flat,T'} \otimes_F \bar{F}$. Notons $h'' : W''_{\flat,T} \otimes_F \bar{F} \to W''_{\flat,T'} \otimes_F \bar{F}$ la restriction de h. L'application $\phi'' : x \mapsto h''xh''^{-1}$ est un isomorphisme de $H''_{\flat,T}$ sur $H'_{\flat,T}$. Ces deux groupes étant quasi-déployés, on peut fixer dans chacun d'eux un sous-groupe de Borel, un sous-tore maximal de ce groupe et un épinglage, ces données étant définies sur F. Quitte à multiplier h'' à droite par un élément de $H''_{\flat,T}$, ce qui est loisible, on peut supposer que ϕ'' envoie ces données du groupe $H''_{\flat,T}$ sur celles du groupe $H''_{\flat,T'}$. Soit $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$. La condition (1) entraîne que $\sigma(h)^{-1}h$ appartient au commutant de T dans $H_\flat$, c'est-à-dire à $T \times H''_{\flat,T}$. Donc $\sigma(h'')^{-1}h'' \in H''_{\flat,T}$. Cet élément conserve le sous-groupe de Borel, le tore maximal et l'épinglage de $H''_{\flat,T}$. Donc il appartient au centre de $H''_{\flat,T}$, qui est réduit à $\{1\}$ puisque $dim(W''_\flat)$ est impaire. Donc h'' est défini sur F et c'est un isomorphisme de $W''_{\flat,T}$ sur $W''_{\flat,T'}$. Supposons $d_{W_\flat}$ pair. On considère h comme un élément de G et on remplace les espaces $W''_{\flat,T}$ et $W''_{\flat,T'}$ par $V''_{\flat,T}$ et $V''_{\flat,T'}$ dans le raisonnement précédent. On conclut de même que ces deux derniers espaces sont isomorphes. Puisque $W''_{\flat,T}$ et $W''_{\flat,T'}$ sont les orthogonaux dans ces espaces de l'espace commun $D \oplus Z$, ils sont eux-aussi isomorphes. De même, maintenant que l'on a prouvé que $W''_{\flat,T}$ et $W''_{\flat,T'}$ étaient isomorphes, $W'_{\flat,T}$ et $W'_{\flat,T'}$ le sont aussi. On peut remplacer h par un élément qui a même restriction à $W'_{\flat,T} \otimes_F \bar{F}$ et qui est un isomorphisme défini sur F de $W''_{\flat,T}$ sur $W''_{\flat,T'}$ (on peut choisir ce dernier tel que h soit dans $H_\flat$ et non seulement dans $H_\flat^+$). Un tel h vérifie encore (1) et la condition du (i) de l'énoncé.

Soient $T \in \underline{\mathcal{T}}_a$ et $T' \in \underline{\mathcal{T}}_i$ deux éléments stablement conjugués et h vérifiant (2). Dans le cas d_{W_i} impair, le même raisonnement s'applique en remplaçant l'application h'' par la restriction de $h \circ \Phi$ à $W''_{a,T} \otimes_F \bar{F}$ et ϕ'' par la restriction à $H''_{a,T}$ de $x \mapsto h\phi(x)h^{-1}$. Dans le cas d_{W_i} pair, on étend Φ en un isomorphisme de $V_a \otimes_F \bar{F}$ sur $V_i \otimes_F \bar{F}$ qui est l'identité sur $D \oplus Z$. On en déduit un prolongement de ϕ en un torseur intérieur de G_a sur G_i. On remplace alors h'' par la restriction de $h \circ \Phi$ à $V''_{a,T} \otimes_F \bar{F}$ et ϕ'' par la restriction à $G''_{a,T}$ de $x \mapsto h\phi(x)h^{-1}$. Cela prouve (i)

Soit $T \in \underline{\mathcal{T}}_\flat$. Notons $\mathcal{H}_T$ l'ensemble des $h \in H_\flat$ tels que $\sigma(h)^{-1}h \in T$ pour tout $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$. On vient de voir que, pour tout élément $T' \in \underline{\mathcal{T}}_\flat$ stablement conjugué à T, il existait $h \in \mathcal{H}_T$ tel que $hTh^{-1} = T'$. Inversement, pour $h \in \mathcal{H}_T$, le tore $T' = hTh^{-1}$ est défini sur F. La restriction de h à $W''_{\flat,T}$ est définie sur F et le tore T' appartient à $\underline{\mathcal{T}}_\flat$: on a $W''_{\flat,T'} = h(W''_{\flat,T})$ et $W'_{\flat,T'}$ est l'orthogonal de cet espace dans $W_\flat$. A tout $h \in \mathcal{H}_T$, associons l'unique élément $T_h \in \mathcal{T}_\flat$ tel que hTh^{-1} soit conjugué à T_h par un élément de $H_\flat(F)$. L'application $h \mapsto T_h$ se quotiente en une surjection de $H_\flat(F)\backslash\mathcal{H}_T/T$ sur l'ensemble des $T' \in \mathcal{T}_\flat$ tels que $T' \sim_{st} T$. Pour $h \in H_\flat(F)\backslash\mathcal{H}_T/T$, notons $n(h)$ le nombre d'éléments de la fibre de cette application au-dessus de T_h. Le membre de gauche de l'égalité du (ii) de l'énoncé est égal à

$$\sum_{h \in H_\flat(F)\backslash\mathcal{H}_T/T} n(h)^{-1}|W(H_\flat, T_h)|^{-1}.$$

Soit $h \in H_\flat(F)\backslash\mathcal{H}_T/T$, que l'on relève en un élément de $\mathcal{H}_T$ tel que $hTh^{-1} = T_h$. Notons $\mathcal{H}_{h,T}$ l'ensemble des $x \in \mathcal{H}_T$ tels que $xTx^{-1} = T_h$. L'entier $n(h)$ est le nombre d'éléments de l'image de $\mathcal{H}_{h,T}$ dans $H_\flat(F)\backslash\mathcal{H}_T/T$. On vérifie que $\mathcal{H}_{h,T} = h(\mathcal{H}_T \cap Norm_{H_\flat}(T))$. Donc $n(h)$ est le nombre d'éléments de l'image de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_T \cap Norm_{H_\flat}(T) & \to & H_\flat(F)\backslash\mathcal{H}_T/T \\ n & \mapsto & H_\flat(F)hnT. \end{array}$$

On vérifie que cette application se quotiente en une bijection de $Norm_{H_\flat(F)}(T_h)\backslash(\mathcal{H}_T \cap Norm_{H_\flat}(T))/TH''_{\flat,T}(F)$ sur son image. Le groupe $TH''_{\flat,T}(F)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{H}_T \cap Norm_{H_\flat}(T)$ et son intersection avec $Norm_{H_\flat(F)}(T_h)$ est $Z_{H_\flat(F)}(T_h)$. Donc $n(h) = n_1|W(H_\flat, T_h)|^{-1}$, où n_1 est le nombre d'éléments de $(\mathcal{H}_T \cap Norm_{H_\flat}(T))/TH''_{\flat,T}(F)$. Le membre de gauche de l'égalité du (ii) de l'énoncé est donc égal à $n_2 n_1^{-1}$, où n_2 est le nombre d'éléments de $H_\flat(F)\backslash\mathcal{H}_T/T$. On vérifie que l'application qui, à $h \in \mathcal{H}_T$, associe le cocycle $\sigma \mapsto \sigma(h)^{-1}h$, se quotiente en une bijection de $H_\flat(F)\backslash\mathcal{H}_T/T$ sur le noyau de l'application $H^1(T) \to H^1(H_\flat)$. On sait bien que ce noyau a $h(T)$ éléments. Donc $n_2 = h(T)$. Considérons l'application naturelle

$$(3) \qquad (\mathcal{H}_T \cap Norm_{H_\flat}(T))/TH''_{\flat,T}(F) \to \bar{W}(H_\flat, T).$$

On vérifie qu'elle est injective et que son image est contenue dans $\bar{W}_F(H_\flat, T)$. Inversement, soit $n \in Norm_{H_\flat}(T)$ dont l'image dans $\bar{W}(H_\flat, T)$ appartient à $\bar{W}_F(H_\flat, T)$. Tout élément de $Norm_{H_\flat}(T)$ conserve les espaces $W'_{\flat,T} \otimes_F \bar{F}$ et $W'_{\flat,T} \otimes_F \bar{F}$. Notons n' et n'' les restrictions de n à ces espaces. Choisissons $n''_0 \in H''^{+}_{\flat,T}(F)$ de même déterminant que n''. Considérons l'élément $n_0 \in H_\flat$ de restriction n' à $W'_{\flat,T} \otimes_F \bar{F}$ et de restriction n''_0 à $W''_{\flat,T} \otimes_F \bar{F}$. Il appartient à $Norm_{H_\flat}(T)$ et a même image que n dans $\bar{W}(H_\flat, T)$. Puisque cette image appartient à $\bar{W}_F(H_\flat, T)$, on a $\sigma(n_0)^{-1}n_0 \in T \times H''_{\flat,T}$ pour tout $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$. Par construction, la restriction de $\sigma(n_0)^{-1}n_0$ à $W''_{\flat,T} \otimes_F \bar{F}$ est l'identité. Donc cet élément appartient à T et n_0 appartient à $\mathcal{H}_T \cap Norm_{H_\flat}(T)$. L'image de l'injection (3) est donc égale à $\bar{W}_F(H_\flat, T)$ et n_1 est le nombre d'éléments de cet ensemble. Cela prouve l'égalité du (ii) de l'énoncé.

Deux tores T et T' stablement conjugués sont isomorphes sur F, donc $h(T) = h(T')$. Dans la situation de (2), on vérifie que l'application $n \mapsto h\phi(n)h^{-1}$ est un isomorphisme de $\bar{W}_F(H_a, T)$ sur $\bar{W}_F(H_i, T')$ d'où l'égalité du nombre d'éléments de ces ensembles. Un résultat analogue vaut dans la situation de (1). Cela prouve (ii).

Soit $T \in \underline{\mathcal{T}}_a$. Puisqu'au moins l'un des groupes H_a ou G_a n'est pas quasi-déployé, on a $W'_{a,T} \neq \{0\}$. Cet espace est de dimension paire. S'il est de dimension 2, on a $T = H'_{a,T}$ et, puisque $A_T = \{1\}$, $W'_{a,T}$ n'est pas hyperbolique. Il existe donc un espace quadratique, notons-le $W'_{i,T}$, qui a même dimension que $W'_{a,T}$, dont la forme quadratique a même déterminant que celle de $W'_{a,T}$, mais qui n'est pas isomorphe à $W'_{a,T}$. Il est clair que la somme orthogonale $W'_{i,T} \oplus W''_{a,T}$ est isomorphe à W_i. Puisque T est un sous-tore maximal elliptique de $H'_{a,T}$, on peut le transférer en un sous-tore maximal elliptique T' du groupe spécial orthogonal $H'_{i,T}$ de l'espace $W'_{i,T}$. Par l'isomorphisme précédent, T' devient un sous-tore de H_i. Ce tore T' appartient à $\underline{\mathcal{T}}_i$ et est stablement conjugué à T. Donc la classe de conjugaison stable de T coupe $\underline{\mathcal{T}}_i$. Si $T \in \underline{\mathcal{T}}_i$ et $T \neq \{1\}$, un raisonnement analogue montre que la classe de conjugaison stable de T coupe $\underline{\mathcal{T}}_a$. Par contre, si $T = \{1\}$, sa classe de conjugaison stable se réduit à T lui-même. Le seul sous-tore de H_a qui pourrait lui correspondre est le sous-tore $\{1\}$ de H_i. Mais celui-ci n'appartient pas à $\underline{\mathcal{T}}_a$ puisque l'un des groupes H_a ou G_a n'est pas quasi-déployé. $\square$

13.6 Démonstration du théorème 13.3

Pour un indice $\flat = i$ ou a, considérons la somme

$$m(\Sigma_\flat, \Pi_\flat) = \sum_{\sigma \in \Sigma_\flat, \pi \in \Pi_\flat} m(\sigma, \pi).$$

D'après l'hypothèse du théorème, toutes les représentations π qui interviennent sont supercuspidales. D'après la proposition 13.1,on peut remplacer les multiplicités $m(\sigma, \pi)$ par $m_{geom}(\sigma, \pi)$. On obtient

$$(1) \qquad m(\Sigma_\flat, \Pi_\flat) = \sum_{T \in \mathcal{T}_\flat} |W(H_\flat, T)|^{-1} \nu(T) \int_{T(F)} c_{\check{\Sigma}_\flat}(t) c_{\Pi_\flat}(t) D^H(t) \Delta(t)^r dt,$$

où

$$c_{\Pi_\flat}(t) = \sum_{\pi \in \Pi_\flat} c_\pi(t),$$

et $c_{\check{\Sigma}_\flat}(t)$ est défini de façon analogue. Fixons $T \in \mathcal{T}_\flat$, introduisons les espaces W''_T et V''_T et les groupes $H''_{\flat,T}$ et $G''_{\flat,T}$ qui lui sont associés. Pour $\pi \in \Pi_\flat$, $t \in T_\sharp(F)$ et $X \in \mathfrak{g}''_{\flat,T,reg}(F)$, avec X assez proche de 0, on a un développement

$$\theta_\pi(texp(X)) D^{G''_{\flat,T}}(X)^{1/2} = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}''_{\flat,T})} c_{\theta_\pi, \mathcal{O}}(t) \hat{j}^{G''_{\flat,T}}(\mathcal{O}, X) D^{G''_{\flat,T}}(X)^{1/2}.$$

Le terme $c_\pi(t)$ est égal à $c_{\theta_\pi, \mathcal{O}_{reg}}(t)$ si d est impair ou si $dim(V''_{\flat,T}) \leq 2$, à $c_{\theta_\pi, \mathcal{O}_{\nu_0}}(t)$ si d est pair et $dim(V''_{\flat,T}) \geq 4$. Remplaçons X par λX, avec $\lambda \in F^{\times 2}$ et faisons tendre λ vers 0. D'après 2.6(1), la fonction

$$\lambda \mapsto \hat{j}^{G''_{\flat,T}}(\mathcal{O}, \lambda X) D^{G''_{\flat,T}}(\lambda X)^{1/2}$$

tend vers 0 si $\mathcal{O}$ n'est pas régulière. Supposons d'abord d impair ou $dim(V''_{\flat,T}) \leq 2$. Choisissons pour X un élément de la forme X_{qd}. D'après le lemme 13.4, la fonction ci-dessus est constante de valeur $|W^{G''_{\flat,T}})|$ pour $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{reg}$. On obtient

$$c_\pi(t) = |W^{G''_{\flat,T}})|^{-1} lim_{\lambda\to 0}\theta_\pi(texp(\lambda X_{qd}))D^{G''_{\flat,T}}(\lambda X_{qd})^{1/2}.$$

Si maintenant d est pair et $dim(V''_{\flat,T}) \geq 4$, on introduit dans l'algèbre $\mathfrak{g}''_{\flat,T}(F)$ des éléments $X^{\pm}_{F_1}$. Le lemme 13.4 conduit alors à l'égalité

$$c_\pi(t) = lim_{\lambda\to 0}(|W^{G''_{\flat,T}})|^{-1}\theta_\pi(texp(\lambda X_{qd}))D^{G''_{\flat,T}}(\lambda X_{qd})^{1/2}$$

$$+ \sum_{F_1 \in \mathcal{F}^{V''_{\flat,T}}} |W(G''_{\flat,T}, T_{F_1})|^{-1}\epsilon_{F_1}\chi_{F_1}(\nu_0\eta)(\theta_\pi(texp(\lambda X^+_{F_1}))-\theta_\pi(texp(\lambda X^-_{F_1})))D^{G''_{\flat,T}}(\lambda X_{F_1})^{1/2}.$$

Pour calculer $c_{\Pi_\flat}(t)$, on somme ces expressions sur $\pi \in \Pi_\flat$. Cela revient à remplacer les caractères θ_π par $\theta_{\Pi_\flat}$. Dans le cas où d est pair et $dim(V''_{\flat,T}) \geq 4$, on remarque que, pour $F_1 \in \mathcal{F}^{V''_{\flat,T}}$, les points $texp(\lambda X^+_{F_1})$ et $texp(\lambda X^-_{F_1})$ sont stablement conjugués. Or $\theta_{\Pi_\flat}$ est une distribution stable. Donc

$$\theta_{\Pi_\flat}(texp(\lambda X^+_{F_1})) - \theta_{\Pi_\flat}(texp(\lambda X^-_{F_1})) = 0.$$

En tout cas, on obtient l'égalité

$$(2) \qquad c_{\Pi_\flat}(t) = |W^{G''_{\flat,T}})|^{-1} lim_{\lambda\to 0}\theta_{\Pi_\flat}(texp(\lambda X_{qd}))D^{G''_{\flat,T}}(\lambda X_{qd})^{1/2}.$$

Soit $T' \in \mathcal{T}_\flat$ stablement conjugué à T. D'après le lemme 13.5(i), on peut choisir un élément $h \in H$ vérifiant la condition 13.5(1) et tel que sa restriction à $V''_{\flat,T}$ soit un isomorphisme défini sur F de cet espace sur $V''_{\flat,T'}$. La conjugaison par h identifie T à T', $V''_{\flat,T}$ à $V''_{\flat,T'}$ et $G''_{\flat,T}$ à $G''_{\flat,T'}$. Soit $t' = hth^{-1}$. Posons $X'_{qd} = hX_{qd}h^{-1}$. C'est un élément de $\mathfrak{g}''_{\flat,T'}(F)$ qui a les mêmes propriétés que X_{qd}. On peut calculer $c_{\Pi_\flat}(t')$ en remplaçant t par t' et X_{qd} par X'_{qd} dans la formule (2). Mais les éléments $texp(\lambda X_{qd})$ et $t'exp(\lambda X'_{qd})$ sont stablement conjugués. Puisque $\theta_{\Pi_\flat}$ est stable, cette fonction prend la même valeur en ces deux éléments et on en déduit $c_{\Pi_\flat}(t) = c_{\Pi_\flat}(t')$. On démontre de même l'égalité $c_{\check{\Sigma}_\flat}(t) = c_{\check{\Sigma}_\flat}(t)$. On a aussi $D^H(t)\Delta(t)^r = D^H(t')\Delta(t)^r$. Alors l'intégrale indexée par T' dans la formule (1) a la même valeur que celle indexée par T.

Notons $\mathcal{T}_{\flat,st}$ un sous-ensemble de représentants dans $\mathcal{T}_\flat$ des classes de conjugaison stable coupant $\underline{\mathcal{T}}_\flat$. Alors

$$m(\Sigma_\flat, \Pi_\flat) = \sum_{T \in \mathcal{T}_{\flat,st}} m(T)\nu(T) \int_{T(F)} c_{\check{\Sigma}_\flat}(t)c_{\Pi_\flat}(t)D^H(t)\Delta(t)^r dt,$$

où

$$m(T) = \sum_{T' \in \mathcal{T}_\flat; T' \sim_{st} T} |W(H_\flat, T')|^{-1}.$$

Le lemme 13.5(iii) définit une injection $\mathcal{T}_{a,st} \to \mathcal{T}_{i,st}$. Soient $T_a \in \mathcal{T}_{a,st}$ et $T_i \in \mathcal{T}_{i,st}$ son image. Choisissons $h \in H_i$ vérifiant la condition 13.5(2) et tel que la restriction de $h \circ \Phi$ à W''_{a,T_a} soit définie sur F (lemme 13.5(i)). Soit $t \in T_{a,\sharp}(F)$, posons $t' = h\phi(t)h^{-1}$. Un argument similaire à celui ci-dessus montre que

$$c_{\Pi_a}(t) = (-1)^d c_{\Pi_i}(t'),\ c_{\check{\Sigma}_a}(t) = (-1)^{d_W} c_{\check{\Sigma}_i}(t').$$

Les signes proviennent de la relation 13.2(2). Leur produit est -1. On a aussi $m(T_a) = m(T_i)$ d'après le lemme 13.5(ii) et, bien sûr, $D^{H_a}(t)\Delta(t)^r = D^{H_i}(t')\Delta(t')^r$. Alors la contribution de T_a à $m(\Sigma_a, \Pi_a)$ est l'opposée de celle de T_i à $m(\Sigma_i, \Pi_i)$. La somme $m(\Sigma_a, \Pi_a) + m(\Sigma_i, \Pi_i)$ se réduit donc à la contribution de l'unique classe de conjugaison stable qui ne coupe pas $\mathcal{T}_{a,st}$, c'est-à-dire à la contribution du tore $\{1\}$ de $\mathcal{T}_i$. On obtient

$$(3) \qquad m(\Sigma_a, \Pi_a) + m(\Sigma_i, \Pi_i) = c_{\check{\Sigma}_i}(1) c_{\Pi_i}(1).$$

Rappelons un résultat de Rodier ([R] théorème p.161 et remarque 2 p.162). Soient π une représentation admissible irréductible de $G_i(F)$ et $\mathcal{O}$ une orbite nilpotente régulière de $\mathfrak{g}_i(F)$. Alors $c_{\theta_\pi, \mathcal{O}}(1)$ vaut 1 si π possède un modèle de Whittaker relatif à $\mathcal{O}$ et 0 sinon. On a

$$c_{\Pi_i}(1) = \sum_{\pi \in \Pi_i} c_{\theta_\pi, \mathcal{O}}(1),$$

où $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{reg}$ ou $\mathcal{O}_{\nu_0}$ selon le cas. Le résultat ci-dessus et la propriété 13.2(3) entraînent que cette somme ne contient qu'un terme non nul, qui vaut 1. Donc $c_{\Pi_i}(1)) = 1$ et, de même, $c_{\check{\Sigma}_i} = 1$. Le membre de gauche de (3) est la somme des $m(\sigma, \pi)$ pour $(\sigma, \pi) \in (\Sigma_i \times \Pi_i) \cup (\Sigma_a \times \Pi_a)$. Puisqu'elle vaut 1, il y a un unique couple (σ, π) pour lequel $m(\sigma, \pi) = 1$. $\square$

Bibliographie

[AGRS] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, G. Schiffmann : *Multiplicity one theorems*, prépublication 2007

[A1] J. Arthur : *The trace formula in invariant form*, Annals of Math. 114 (1981), p.1-74

[A2] .... : *The invariant trace formula I. Local theory*, J. AMS 1 (1988), p.323-383

[A3] .... : *A local trace formula*, Publ. Math. IHES 73 (1991), p.5-96

[A4] .... : *On the transfer of distributions : weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 99 (1999), p.209-283

[A5] .... : *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 56 (1988), p.223-293

[A6] .... : *The characters of supercuspidal representations as weighted orbital integrals*, Proc. Indian Acad. Sci . 97 (1987), p.3-19

[GGP] W. T. Gan, B. Gross, D. Prasad : *Symplectic local root numbers, central critical L-values and restriction problems in the representation theory of classical groups*, prépublication 2008

[GP] B. Gross, D. Prasad : *On irreducible representations of $SO_{2n+1} \times SO_{2m}$*, Can. J. Math. 46 (1994), p.930-950

[HCDS] Harish-Chandra : *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, notes par S. DeBacker et P. Sally, University Lecture series 16, AMS (1999)

[HCvD] .... : *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, notes par G. van Dijk, Springer Lecture Notes 162 (1970)

[Konno] T. Konno : *Twisted endoscopy implies the generic packet conjecture*, Israël J. of Math. 129 (2002), p.253-289

[Kot] R. Kottwitz : *Transfer factors for Lie algebras*, Representation Th. 3 (1999), p.127-138

[R] F. Rodier : *Modèle de Whittaker et caractères de représentations*, in Non commutative harmonic analysis, J. Carmona, J. Dixmier, M. Vergne ed. Springer LN 466 (1981), p.151-171

[W1] J.-L. Waldspurger : *Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie p-adiques*, J. f. reine u. ang. Math. 465 (1995), p.41-99

[W2] .... : *Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique,* $p \neq 2$, in Festschrift in honor of I.I. Piatetski-Shapiro, S. Gelbart, R. Howe, P. Sarnak ed., the Weizmann science press of Israël (1990)

[W3] .... : *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque 269 (2001)

[W4] .... : *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Mathematica 105 (1997), p.153-236

Institut de mathématiques de Jussieu- CNRS
175 rue du Chevaleret
75013 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr