Fronts d'onde des représentations tempérées et de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$

J.-L. Waldspurger

21 mai 2018

Abstract Let G be a special orthogonal group $SO(2n+1)$ defined over a p-adic field F. Let π be an admissible irreducible representation of $G(F)$ which is tempered and of unipotent reduction. We prove that π has a wave front set. In some particular cases, for instance if π is of the discrete series, we give a method to compute this wave front set.

Introduction

Soit F un corps local non archimédien et de caractéristique nulle et soit $n \geq 1$ un entier. On suppose $p > 6n+4$, où p est la caractéristique résiduelle de F. Le groupe spécial orthogonal $SO(2n+1)$ a deux formes possibles définies sur F. Une forme déployée que nous notons G_{iso} et une forme non quasi-déployée, qui est une forme intérieure du précédent et que nous notons G_{an}. Soit $\sharp = iso$ ou an et soit π une représentation admissible irréductible de $G_\sharp(F)$ dans un espace complexe E. Pour tout sous-groupe parahorique K de $G_\sharp(F)$, notons K^u son radical pro-p-unipotent et E^{K^u} le sous-espace des éléments de E fixés par K^u. De π se déduit une représentation de K/K^u dans E^{K^u}. Le groupe K/K^u s'identifie au groupe des points sur le corps résiduel $\mathbb{F}_q$ de F d'un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbb{F}_q$. Lusztig a défini la notion de représentation unipotente d'un tel groupe. On dit que π est de réduction unipotente si et seulement s'il existe K comme ci-dessus de sorte que E^{K^u} soit non nul et que la représentation de K/K^u dans E^{K^u} soit unipotente.

Soit π une représentation admissible irréductible de $G_\sharp(F)$. Notons $\mathfrak{g}_\sharp$ l'algèbre de Lie de $G_\sharp$. D'après Harish-Chandra, dans un voisinage de l'origine dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$, le caractère de π, descendu par l'exponentielle à $\mathfrak{g}_\sharp(F)$, est combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes. Fixons une clôture algébrique $\bar{F}$ de F et notons $\bar{\mathcal{N}}(\pi)$ l'ensemble des orbites nilpotentes $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ dans $\mathfrak{g}_\sharp(\bar{F})$ qui vérifient la condition suivante : il existe une orbite nilpotente $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$, qui est incluse dans $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ et qui intervient avec un coefficient non nul dans le développement du caractère de π. On dit que π admet un front d'onde si $\bar{\mathcal{N}}(\pi)$ admet un plus grand élément (pour l'ordre usuel sur les orbites nilpotentes). Si c'est le cas, on appelle ce plus grand élément le front d'onde de π. Le théorème principal de l'article est le suivant.

Théorème. *Soit $\sharp = iso$ ou an. Alors toute représentation admissible irréductible de $G_\sharp(F)$, qui est tempérée et de réduction unipotente, admet un front d'onde.*

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}^{symp}(2N)$ l'ensemble des partitions symplectiques de $2N$ (une partition est dite symplectique si tout entier impair y intervient avec une multiplicité paire). Pour une telle partition λ, notons $Jord^{bp}(\lambda)$ l'ensemble (sans multiplicités) des entiers pairs strictement positifs qui interviennent dans λ. Notons $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2N)$ l'ensemble des couples (λ,ϵ) où $\lambda\in\mathcal{P}^{symp}(2N)$ et $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord^{bp}(\lambda)}$. Notons $\mathfrak{Irr}_{quad}(2n)$ l'ensemble des quadruplets $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$ pour lesquels il existe deux entiers n^+ et n^- de sorte que $n^++n^-=n$, $(\lambda^+,\epsilon^+)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)$ et $(\lambda^-,\epsilon^-)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^-)$. A un tel quadruplet $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$, on peut associer un indice $\sharp=iso$ ou an et une représentation admissible irréductible $\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$ de $G_\sharp(F)$, qui est tempérée et de réduction unipotente. L'indice $\sharp$ est déterminé par une formule simple rappelée en 1.5. Indiquons brièvement quel est le paramètre de Langlands de cette représentation. Notons W_F le groupe de Weil de F et $W_{DF}=W_F\times SL(2,\mathbb{C})$ le groupe de Weil-Deligne. Un paramètre de Langlands est un couple (ρ,χ), où ρ est un homomorphisme de W_{DF} dans $Sp(2n;\mathbb{C})$ et χ est un caractère du groupe des composantes connexes du commutant dans $Sp(2n;\mathbb{C})$ de l'image de ρ. Dans le cas d'une représentation $\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$, la restriction de ρ à W_F est la somme directe de $2n^+$ fois le caractère trivial et de $2n^-$ fois l'unique caractère non ramifié d'ordre 2. Le commutant de l'image de cette restriction est un groupe $Sp(2n^+;\mathbb{C})\times Sp(2n^-;\mathbb{C})$. Les classes de conjugaison d'éléments unipotents dans ce groupe sont paramétrées par $\mathcal{P}^{symp}(2n^+)\times\mathcal{P}^{symp}(2n^-)$. La restriction de ρ à $SL(2;\mathbb{C})$ prend ses valeurs dans ce groupe et l'image d'un unipotent non trivial de $SL(2;\mathbb{C})$ est paramétré par (λ^+,λ^-). On voit que le groupe des composantes connexes du commutant dans $Sp(2n;\mathbb{C})$ de l'image de ρ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord^{bp}(\lambda^+)}\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord^{bp}(\lambda^-)}$. Le couple (ϵ^+,ϵ^-) s'identifie à un caractère de ce groupe, qui n'est autre que le caractère χ du couple (ρ,χ).

On note $\mathfrak{Irr}_{quad}^{bp}(2n)$ le sous ensemble des $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)\in\mathfrak{Irr}_{quad}(2n)$ tels que tous les termes de λ^+ et λ^- soient pairs. On a prouvé en [9] 3.4 que, pour démontrer le théorème, il suffisait de prouver que, pour tout $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)\in\mathfrak{Irr}_{quad}^{bp}(2n)$, la représentation $\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$ admettait un front d'onde (cela résulte d'un argument trivial d'induction).

Pour une représentation $\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$, où $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)\in\mathfrak{Irr}_{quad}^{bp}(2n)$, on a un résultat un peu plus précis. Dans [10], on a étudié une certaine représentation d'un groupe de Weyl définie par Lusztig. En supposant, comme c'est ici le cas, que tous les termes de λ^+ sont pairs, on a associé à $(\lambda^+,\epsilon^+)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)$ un autre couple $(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min})\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)$ (voir ci-dessous). De même, à $(\lambda^-,\epsilon^-)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)$, on associe un autre couple $(\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min})\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^-)$. Introduisons la réunion usuelle de $\lambda^{+,min}$ et $\lambda^{-,min}$, que l'on note $\lambda^{+,min}\cup\lambda^{-,min}$. C'est une partition symplectique de $2n$. Notons $\mathcal{P}^{orth}(2n+1)$ l'ensemble des partitions orthogonales de $2n+1$ (une partition est orthogonale si et seulement si tout entier pair strictement positif y intervient avec multiplicité paire). On sait bien que l'ensemble $\mathcal{P}^{orth}(2n+1)$ paramètre les orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_\sharp(\bar{F})$. Un front d'onde est donc paramétré par un élément de cet ensemble. D'autre part, à la suite de Spaltenstein, on définit une "dualité" $d:\mathcal{P}^{symp}(2n)\to\mathcal{P}^{orth}(2n+1)$, cf. 2.6 (elle n'est ni injective, ni surjective, son image est le sous-ensemble des partitions "spéciales" dans $\mathcal{P}^{orth}(2n+1)$).

Théorème. *Soit $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)\in\mathfrak{Irr}_{quad}^{bp}(2n)$. Alors la représentation $\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$ admet un front d'onde. Celui-ci est paramétré par la partition $d(\lambda^{+,min}\cup\lambda^{-,min})$.*

La preuve de ce théorème reprend celle de [9]. Posons $\pi=\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$. L'existence d'un front d'onde pour π se lit sur le caractère de cette représentation. Celui-ci se calcule en fonction des représentations des différents groupes finis K/K^u dans E^{K^u}, avec les notations du premier paragraphe ci-dessus (en vérité, le groupe fini est $K^\dagger/K^u$, où $K^\dagger$ est le normalisateur de K dans $G_\sharp(F)$). La construction de la représentation π (qui est due à Lusztig) permet d'expliciter ces représentations de groupes finis. On les décrit à l'aide de représentations de groupes de Weyl W_m de type B_m ou C_m. Une vieille combinatoire tirée de [6] permet alors de traduire l'existence d'un front d'onde et son calcul en un problème concernant exclusivement des représentations de tels groupes W_m, cf. 1.4. Les objets cruciaux qui interviennent ici sont les représentations $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}$ et $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}$ définies par Lusztig (ce ne sont pas ses notations) auxquelles on a fait allusion ci-dessus. Elles ne sont pas irréductibles en général et on connaît peu de choses sur leur décomposition en représentations irréductibles. On sait toutefois que, disons dans la décomposition de $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}$, il y a un élément "minimal" qui est la représentation $\rho_{\lambda^+,\epsilon^+}$ associée à (λ^+,ϵ^+) par la correspondance de Springer généralisée. Dans [9], cela nous a suffi pour traiter non pas la représentation π, mais son image par l'involution d'Aubert-Zelevinsky. Le point nouveau est le résultat de [10] qui affirme (sous l'hypothèse que tous les termes de λ^+ sont pairs) que la décomposition de $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}$ admet aussi un élément "maximal" pour un ordre convenable (cf. 4.1 pour un énoncé précis). C'est $\rho_{\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min}}\otimes sgn$, où sgn est le caractère signature. Cette propriété nous permet de conclure.

Les paragraphes 1 à 3 sont surtout consacrés à des rappels de résultats antérieurs. On a amélioré certains d'entre eux quand c'était nécessaire. Le théorème ci-dessus est démontré au paragraphe 4. Dans le paragraphe 5, nous indiquons comment se calculent les partitions $\lambda^{+,min}$ et $\lambda^{-,min}$ (en fait leurs transposées) et nous donnons quelques exemples de fronts d'onde.

Je remercie A.-M. Aubert de m'avoir indiqué une référence utile.

1 Rappel pas très bref des résultats de [9]

1.1 Partitions, notations

Soit $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_r)$ une suite finie de nombres réels. Notons $t(\lambda)$ le plus grand entier $j\in\{1,...,r\}$ tel que $\lambda_j\neq 0$. On identifie deux suites λ et λ' si $t(\lambda)=t(\lambda')$ et $\lambda_j=\lambda'_j$ pour tout $j\leq t(\lambda)$. Soit λ une telle suite et soit $k\in\mathbb{N}$. Quitte à adjoindre à λ des termes nuls, on peut écrire $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_r)$ avec $r\geq k$. On pose $S_k(\lambda)=\lambda_1+...+\lambda_k$. Evidemment, $S_k(\lambda)$ ne dépend plus de k dès que $k\geq t(\lambda)$. On pose $S(\lambda)=S_{t(\lambda)}(\lambda)$. On définit la somme $\lambda+\lambda'$ de deux suites λ et λ' : $(\lambda+\lambda')_j=\lambda_j+\lambda'_j$ pour tout $j\geq 1$.

Une partition est une suite finie décroissante d'entiers positifs ou nuls. On identifie comme ci-dessus deux partitions qui ne diffèrent que par des termes nuls. Pour une partition $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_r)$ et pour un entier $i\geq 1$, on note $mult_\lambda(i)$ le nombre d'indices j tels que $\lambda_j=i$. On note $Jord(\lambda)$ l'ensemble des $i\geq 1$ tels que $mult_\lambda(i)>0$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(N)$ l'ensemble des partitions λ telles que $S(\lambda)=N$ et on note $\mathcal{P}_2(N)$ l'ensemble des couples (α,β) de partitions telles que $S(\alpha)+S(\beta)=N$. On ordonne les éléments de $\mathcal{P}(N)$ de la façon usuelle : $\lambda\leq\lambda'$ si et seulement si $S_k(\lambda)\leq S_k(\lambda')$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. On définit la réunion $\lambda\cup\lambda'$ de deux partitions λ et λ' : pour tout entier $i\geq 1$, $mult_{\lambda\cup\lambda'}(i)=mult_\lambda(i)+mult_{\lambda'}(i)$.

Soit λ une partition. Pour tout $i\in\mathbb{N}$, on note $J(i)$ l'ensemble des $j\geq 1$ tels que $\lambda_j=i$. Si $i=0$, on considère que $J(0)$ est l'intervalle infini $\{t(\lambda)+1,...\}$. Pour $i\in Jord(\lambda)$, $J(i)$ est non vide. On note $j_{min}(i)$, resp. $j_{max}(i)$, le plus petit, resp. grand, élément de $J(i)$. On pose $j_{min}(0)=t(\lambda)+1$.

On note W_N le groupe de Weyl d'un système de racines de type B_N ou C_N, avec la convention $W_0 = \{1\}$. On note sgn le caractère signature usuel de W_N et sgn_{CD} le caractère dont le noyau est le sous-groupe W_N^D d'un système de racines de type D_N. Les représentations irréductibles de W_N sont paramétrées par $\mathcal{P}_2(N)$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N)$, on note $\rho(\alpha, \beta)$ la représentation paramétrée par (α, β). Les représentations irréductibles de W_N^D sont presque paramétrées par le quotient de $\mathcal{P}_2(N)$ par la relation d'équivalence $(\alpha, \beta) \equiv (\beta, \alpha)$. "Presque" parce qu'un couple de la forme (α, α) paramètre deux représentations irréductibles.

Pour tout ensemble E, on note $\mathbb{C}[E]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base E. Pour tout groupe fini W, on note $\hat{W}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de W. En identifiant une représentation à son caractère, $\mathbb{C}[\hat{W}]$ est aussi l'espace des fonctions de W dans $\mathbb{C}$ qui sont invariantes par conjugaison.

1.2 L'espace $\mathcal{R}$

On fixe pour tout l'article un entier $n \geq 1$. On note Γ l'ensemble des quadruplets $\gamma = (r', r'', N^+, N^-)$ tels que

$$r' \in \mathbb{N},\ r'' \in \mathbb{Z},\ N^+ \in \mathbb{N},\ N^- \in \mathbb{N},\ r'^2 + r' + N^+ + r''^2 + N^- = n.$$

Pour un tel γ, on pose $\mathcal{R}(\gamma) = \mathbb{C}[\hat{W}_{N^+}] \otimes \mathbb{C}[\hat{W}_{N^-}]$. On pose

$$\mathcal{R} = \oplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{R}(\gamma).$$

On définit un endomorphisme $\varphi \mapsto sgn \otimes \varphi$ de $\mathcal{R}$ de la façon suivante. Il respecte chaque sous-espace $\mathcal{R}(\gamma)$. Pour γ comme ci-dessus, pour $\rho^+ \in \hat{W}_{N^+}$ et $\rho^- \in \hat{W}_{N^-}$, on pose $sgn \otimes (\rho^+ \otimes \rho^-) = (\rho^+ \otimes sgn, \rho^- \otimes sgn)$.

On a défini en [7] 1.10 un endomorphisme $\rho\iota$. Puisqu'il est essentiel à nos constructions, rappelons sa définition. Soit $\gamma = (r', r'', N^+, N^-) \in \Gamma$ et $\varphi \in \mathcal{R}(\gamma)$. Posons $N = N^+ + N^-$. L'élément $\rho\iota(\varphi)$ appartient à

$$\oplus_{N_1, N_2 \in \mathbb{N}, N_1 + N_2 = N} \mathcal{R}(r', (-1)^{r'} r'', N_1, N_2).$$

Soit $\delta = (r', (-1)^{r'} r'', N_1, N_2) \in \Gamma$. Décrivons la composante $\rho\iota(\varphi)_\delta$ de $\rho\iota(\varphi)$ dans $\mathcal{R}(\delta)$.

On définit un quadruplet d'entiers $\mathbf{a} = (a_1^+, a_1^-, a_2^+, a_2^-)$ par les formules suivantes :

$\mathbf{a} = (0, 0, 0, 1)$ si $0 < r'' \leq r'$ ou si $r'' = 0$ et r' est pair ;

$\mathbf{a} = (0, 0, 1, 0)$ si $-r' \leq r'' < 0$ ou si $r'' = 0$ et r' est impair ;

$\mathbf{a} = (0, 1, 0, 0)$ si $r' < r''$;

$\mathbf{a} = (1, 0, 0, 0)$ si $r'' < -r'$.

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des quadruplets $\mathbf{N} = (N_1^+, N_1^-, N_2^+, N_2^-)$ d'entiers positifs ou nuls tels que

$$N^+ = N_1^+ + N_2^+,\ N^- = N_1^- + N_2^-,\ N_1 = N_1^+ + N_1^-,\ N_2 = N_2^+ + N_2^-.$$

Pour un tel quadruplet, posons $W_{\mathbf{N}} = W_{N_1^+} \times W_{N_1^-} \times W_{N_2^+} \times W_{N_2^-}$. Ce groupe se plonge de façon évidente dans $W_{N_1} \times W_{N_2}$, resp. $W_{N^+} \times W_{N^-}$, et ces plongements sont bien définis à conjugaison près. On a donc des foncteurs de restriction $res_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N^+} \times W_{N^-}}$ et d'induction

$ind_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N_1}\times W_{N_2}}$. On note $sgn_{CD}^{\mathbf{a}}$ le caractère de $W_{\mathbf{N}}$ qui est le produit tensoriel des caractères $sgn_{CD}^{a_1^+}$, $sgn_{CD}^{a_1^-}$, $sgn_{CD}^{a_2^+}$, $sgn_{CD}^{a_2^-}$ sur chacun des facteurs de $W_{\mathbf{N}}$. Alors

$$\rho\iota(\varphi)_\delta = \sum_{\mathbf{N}\in\mathcal{N}} ind_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N_1}\times W_{N_2}} \left(sgn_{CD}^{\mathbf{a}} \otimes res_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N^+}\times W_{N^-}}(\varphi)\right).$$

1.3 Correspondance de Springer généralisée

Soit $N\in\mathbb{N}$. On a défini l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2N)$ dans l'introduction. La correspondance de Springer généralisée dans le cas symplectique est une bijection de $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2N)$ sur l'ensemble des couples (k,ρ) où

$k\in\mathbb{N}$ et $k(k+1)\leq 2N$;

$\rho\in\hat{W}_{N-k(k+1)/2}$.

Pour $(\lambda,\epsilon)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2N)$, on note $(k_{\lambda,\epsilon},\rho_{\lambda,\epsilon})$ le couple qui lui correspond et on pose $N_{\lambda,\epsilon}=N-k_{\lambda,\epsilon}(k_{\lambda,\epsilon}+1)/2$. Rappelons comment on calcule $k_{\lambda,\epsilon}$. On note $i_1>...>i_t$ les entiers $i\in Jord^{bp}(\lambda)$ tels que $mult_\lambda(i)$ soit impair. On pose

$$M=|\{h=1,...,t; h \text{ est pair et } \epsilon_{i_h}=-1\}|-|\{h=1,...,t; h \text{ est impair et } \epsilon_{i_h}=-1\}|.$$

Alors, d'après [6] XI.3, on a

(1) $k_{\lambda,\epsilon}=2M$ si $M\geq 0$, $k_{\lambda,\epsilon}=-2M-1$ si $M<0$.

On définit une autre représentation $\boldsymbol{\rho}_{\lambda,\epsilon}$ du même groupe $W_{N_{\lambda,\epsilon}}$, cf. [7] 5.1. En gros, $\rho_{\lambda,\epsilon}$ est l'action de $W_{N_{\lambda,\epsilon}}$ sur un sous-espace déterminé par ϵ de l'espace de cohomologie de plus haut degré d'une certaine variété algébrique, tandis que $\boldsymbol{\rho}_{\lambda,\epsilon}$ est l'action de $W_{N_{\lambda,\epsilon}}$ sur un sous-espace analogue de la somme de tous les espaces de cohomologie de cette variété.

Soit $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)\in\mathfrak{Irr}_{quad}(2n)$. Pour $\zeta=\pm$, posons $2n^\zeta=S(\lambda^\zeta)$, $k^\zeta=k_{\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta}$, $N^\zeta=n^\zeta-k^\zeta(k^\zeta+1)/2$. On définit des entiers $r'\in\mathbb{N}$, $r''\in\mathbb{Z}$ par les formules suivantes

si $k^+\equiv k^-\ mod\ 2\mathbb{Z}$, $r'=\frac{k^++k^-}{2}$, $r''=\frac{k^+-k^-}{2}$;

si $k^+\not\equiv k^-\ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $k^+>k^-$, $r'=\frac{k^+-k^--1}{2}$, $r''=\frac{k^++k^-+1}{2}$;

si $k^+\not\equiv k^-\ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $k^+<k^-$, $r'=\frac{k^--k^+-1}{2}$, $r''=-\frac{k^++k^-+1}{2}$.

Le quadruplet $\gamma=(r',r'',N^+,N^-)$ appartient à Γ. Puisque $\mathcal{R}(\gamma)=\mathbb{C}[\hat{W}_{N^+}]\otimes\mathbb{C}[\hat{W}_{N^-}]$, on peut identifier $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}$ à un élément de $\mathcal{R}(\gamma)$, a fortiori à un élément de $\mathcal{R}$. Dans la suite $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}$ désignera cet élément.

Pour $M\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}^{orth}(M)$ l'ensemble des partitions orthogonales de M. Pour une telle partition λ, on note $Jord^{bp}(\lambda)$ l'ensemble des entiers impairs $i\geq 1$ tels que $mult_\lambda(i)>0$. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(M)$ l'ensemble des couples (λ,ϵ) où $\lambda\in\mathcal{P}^{orth}(M)$ et $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord^{bp}(\lambda)}/\{\pm1\}$, le groupe $\{\pm1\}$ s'envoyant diagonalement dans $\{\pm1\}^{Jord^{bp}(\lambda)}$.

Soit $N\in\mathbb{N}$. La correspondance de Springer généralisée dans le cas orthogonal impair est une bijection de $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2N+1)$ sur l'ensemble des couples (k,ρ) tels que

$k\in\mathbb{N}$, k est impair et $k^2\leq 2N+1$;

$\rho\in\hat{W}_{N-(k^2-1)/2}$.

On note $(k_{\lambda,\epsilon},\rho_{\lambda,\epsilon})$ le couple associé à $(\lambda,\epsilon)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2N+1)$. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2N+1)_{k=1}$ le sous-ensemble des $(\lambda,\epsilon)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2N+1)$ tels que $k_{\lambda,\epsilon}=1$.

La correspondance de Springer généralisée dans le cas orthogonal pair est une bijection entre $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2N)$ et l'ensemble des couples (k,ρ) tels que

$k\in\mathbb{N}$, k est pair et $k^2\leq 2N$;

si $k>0$, $\rho\in \hat{W}_{N-k^2/2}$;

si $k=0$, ρ est une classe d'équivalence dans $\hat{W}_{N-k^2/2}$, deux représentations irréductibles ρ' et ρ'' étant ici équivalentes si et seulement si $\rho'=\rho''$ ou $\rho'=\rho''\otimes sgn_{CD}$.

On note $(k_{\lambda,\epsilon},\rho_{\lambda,\epsilon})$ le couple associé à $(\lambda,\epsilon)\in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2N)$. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2N)_{k=0}$ le sous-ensemble des $(\lambda,\epsilon)\in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2N)$ tels que $k_{\lambda,\epsilon}=0$. Quand $k_{\lambda,\epsilon}=0$, $\rho_{\lambda,\epsilon}$ n'est qu'une classe d'équivalence comme on vient de le dire. Autrement dit, $\rho_{\lambda,\epsilon}$ est paramétrée par un couple $(\alpha,\beta)\in\mathcal{P}_2(N)$ à l'ordre près. Si $\alpha=\beta$, on pose $\rho^+_{\lambda,\epsilon}=\rho^-_{\lambda,\epsilon}=\rho(\alpha,\beta)$. Si $\alpha\neq\beta$, on choisit α et β de sorte que $\alpha>\beta$ pour l'ordre lexicographique. On pose $\rho^+_{\lambda,\epsilon}=\rho(\alpha,\beta)$ et $\rho^-_{\lambda,\epsilon}=\rho(\beta,\alpha)$.

1.4 Caractérisation du front d'onde

On a introduit les groupes G_{iso} et G_{an}. Pour $\sharp=iso$ ou an, on note $Irr_{tunip,\sharp}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations admissibles irréductibles de $G_\sharp(F)$ qui sont tempérées et de réduction unipotente. On note Irr_{tunip} la réunion disjointe de $Irr_{tunip,iso}$ et $Irr_{tunip,an}$. On a défini en [8] 1.5 un espace $\mathcal{R}^{par}$ et une application linéaire $Rep:\mathbb{C}[Irr_{tunip}]\to\mathcal{R}^{par}$. A la suite de Lusztig, on a défini en [5] 3.16 deux isomorphismes $Rep:\mathcal{R}\to\mathcal{R}^{par}$ et $k:\mathcal{R}\to\mathcal{R}^{par}$. On note $\mathcal{F}$ l'automorphisme de $\mathcal{R}$ tel que $Rep\circ\mathcal{F}=k$. C'est une involution sur le calcul de laquelle nous reviendrons en 2.5. Pour $\pi\in Irr_{tunip}$, on note κ_π l'élément de $\mathcal{R}$ tel que $k(\kappa_\pi)=Res(\pi)$. Soient $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ et $\rho_1\in\hat{W}_{n_1}$, $\rho_2\in\hat{W}_{n_2}$. Le quadruplet $\gamma=(0,0,n_1,n_2)$ appartient à Γ et on a $\mathcal{R}(\gamma)=\mathbb{C}[\hat{W}_{n_1}]\otimes\mathbb{C}[\hat{W}_{n_2}]$. Notons $\kappa_\pi(\gamma)$ la composante de κ_π dans $\mathcal{R}(\gamma)$. C'est une combinaison linéaire de représentations irréductibles avec des coefficients complexes. On note $m_\pi(\rho_1,\rho_2)$ le coefficient de $\rho_1\otimes\rho_2$ dans cette combinaison linéaire.

On pose $sgn_{iso}=1$, $sgn_{an}=-1$. Soit $\sharp=iso$ ou an, soit $\pi\in Irr_{tunip,\sharp}$, soient $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ tels que $n_1+n_2=n$ et soient $(\mu_1,\eta_1)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2n_1+1)_{k=1}$ et $(\mu_2,\eta_2)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2n_2)_{k=0}$. Comme cas particulier de la définition ci-dessus, pour $\zeta=\pm$, on définit les "multiplicités" $m_\pi(\rho_{\mu_1,\eta_1}\otimes sgn,\rho^\zeta_{\mu_2,\eta_2}\otimes sgn)$. On pose

$$M_\pi(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)=m_\pi(\rho_{\mu_1,\eta_1}\otimes sgn,\rho^+_{\mu_2,\eta_2}\otimes sgn)+sgn_\sharp m_\pi(\rho_{\mu_1,\eta_1}\otimes sgn,\rho^-_{\mu_2,\eta_2}\otimes sgn).$$

Proposition. *Soient $\sharp=iso$ ou an, $\pi\in Irr_{tunip,\sharp}$ et $\mu\in\mathcal{P}^{orth}(2n+1)$. Alors π admet un front d'onde paramétré par μ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) Soient $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ tels que $n_1+n_2=n$ et $n_2\geq 1$ si $\sharp=an$. Soient $(\mu_1,\eta_1)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2n_1+1)_{k=1}$ et $(\mu_2,\eta_2)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2n_2)_{k=0}$. Supposons $M_\pi(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\neq 0$. Alors $\mu_1\cup\mu_2\leq\mu$.

(ii) Il existe $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ tels que $n_1+n_2=n$ et $n_2\geq 1$ si $\sharp=an$ et il existe $(\mu_1,\eta_1)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2n_1+1)_{k=1}$ et $(\mu_2,\eta_2)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{orth}}(2n_2)_{k=0}$ tels que $M_\pi(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\neq 0$ et $\mu_1\cup\mu_2=\mu$.

Cf. [9] 3.7. Les notations de cette référence étaient légèrement différente, les multiplicités étaient dans certains cas divisées par 2 mais cela ne change évidemment pas l'énoncé. D'autre part, dans [9], la représentation π était d'une forme particulière, mais cela n'était utilisé que pour décrire explicitement la fonction κ_π dans le paragraphe 3.8 de loc. cit., cela n'intervient pas à ce point.

1.5 Les représentations $\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$

Soit $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-) \in \mathfrak{Irr}_{quad}(2n)$. En utilisant une construction de Lusztig, on a défini en [8] 1.3 la représentation $\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$. Sa paramétrisation de Langlands a été rappelée rapidement dans l'introduction. C'est une représentation admissible, irréductible et tempérée de $G_\sharp(F)$, où l'indice $\sharp$ est déterminé par la formule

$$(1) \qquad sgn_\sharp = (\prod_{i\in Jord^{bp}(\lambda^+)} \epsilon^+(i)^{mult_{\lambda^+}(i)})(\prod_{i\in Jord^{bp}(\lambda^-)} \epsilon^-(i)^{mult_{\lambda^-}(i)}),$$

cf. 1.3 pour la définition de $sgn_\sharp$. Notons D l'involution de Aubert-Zelevinski. Elle permute les représentations admissibles irréductibles de $G_\sharp(F)$. On a l'égalité

(2) $Res\circ D(\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)) = Rep\circ\rho\iota(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-})$,
cf. [8] proposition 1.11.

L'espace $\mathcal{R}^{par}$ est somme directe finie d'espaces vectoriels ayant pour base les classes d'équivalence de représentations irréductibles et unipotentes de groupes finis de la forme $SO(2n'+1;\mathbb{F}_q)\times O(2n'';\mathbb{F}_q)$, avec des notations compréhensibles. Chacun de ces espaces est muni d'involutions du même type que D. L'espace $\mathcal{R}^{par}$ est ainsi muni d'une involution D^{par} et on a prouvé en [8] 1.7 l'égalité $Res\circ D = D^{par}\circ Res$. Montrons que l'on a aussi

(3) $D^{par}\circ Rep(\varphi) = Rep(sgn\otimes\varphi)$ pour tout $\varphi\in\mathcal{R}$.

Preuve. Fixons $\gamma=(r',r'',N_1,N_2)\in\Gamma$, $\rho_1\in\hat{W}_{N_1}$, $\rho_2\in\hat{W}_{N_2}$ et considérons l'élément $\varphi=\rho_1\otimes\rho_2\in\mathcal{R}(\gamma)$. D'après Lusztig, le couple (r',ρ_1) paramètre une représentation irréductible π_1 d'un groupe fini $SO(2n_1+1,\mathbb{F}_q)$, où $n_1=N_1+r'^2+r'$ et $\mathbb{F}_q$ est le corps résiduel de F. De même, le couple (r'',ρ_2) paramètre une représentation irréductible π_2 d'un groupe fini $SO(2n_2,\mathbb{F}_q)$, où $n_2=N_2+r''^2$ (c'est la forme déployée du groupe si r'' est pair, non déployée si r'' est impair). Le terme $Rep(\varphi)$ n'est autre que $\pi_1\otimes\pi_2$. On définit usuellement une involution du groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de tels groupes finis (cf. [1] 8.2 dans le cas d'un groupe connexe et [2] 3.10 dans le cas non connexe). C'est une somme alternée de composés de foncteurs de restriction et d'induction. D'après notre définition de [8] 1.7, $D^{par}(\pi_1\otimes\pi_2)$ est le produit tensoriel des images de π_1 et π_2 par ces involutions multipliées par des signes de sorte que ces images soient des représentations irréductibles. D'autre part, pour tout $m\in\mathbb{N}$, on définit une involution D_{W_m} de $\mathbb{C}[\hat{W}_m]$ par une formule analogue : c'est une somme alternée de composés de foncteurs de restriction et d'induction, cf. [3] corollaire 1. Les paramétrages $(r',\rho_1)\mapsto\pi_1$ et $(r'',\rho_2)\mapsto\pi_2$ étant compatibles en un sens plus ou moins évident aux foncteurs de restriction et d'induction, $D^{par}(\pi_1\otimes\pi_2)$ est égal à l'image par Rep de $\pm D_{W_{N_1}}(\rho_1)\otimes D_{W_{N_2}}(\rho_2)$, le signe étant choisi de sorte que ce terme soit le produit tensoriel de deux représentations irréductibles. D'après [3] corollaire 1, on a $D_{W_m}(\rho)=\pm\rho\otimes sgn$ pour tout $m\in\mathbb{N}$ et tout $\rho\in\hat{W}_m$. Donc $D^{par}(\pi_1\otimes\pi_2)$ est égal à l'image par Rep de $(\rho_1\otimes sgn)\otimes(\rho_2\otimes sgn)$, c'est-à-dire de $sgn\otimes\varphi$. Cela prouve (3).

Il est clair d'après sa définition que l'endomorphisme $\rho\iota$ commute à la tensorisation $\varphi\mapsto sgn\otimes\varphi$. Alors la formule (2) se transforme en

$$Res\circ\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-) = Rep\circ\rho\iota((\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes sgn)\otimes(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}\otimes sgn)).$$

En utilisant l'égalité $Rep=k\circ\mathcal{F}$, on obtient finalement l'égalité

$$(4) \qquad \kappa_{\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)} = \mathcal{F}\circ\rho\iota((\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes sgn)\otimes(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}\otimes sgn)).$$

2 Symboles, partitions spéciales, dualité

2.1 Symboles

Pour un couple $\Lambda = (X, Y)$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, on définit le rang $rg(\Lambda)$ et le défaut $def(\Lambda)$ par

$$rg(\Lambda) = S(X) + S(Y) - [(|X| + |Y| - 1)^2/4],$$

où [.] désigne la partie entière,

$$def(\Lambda) = sup(|X| - |Y|, |Y| - |X|).$$

On définit une relation d'équivalence entre couples de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, engendrée par $(X, Y) \sim (X', Y')$, où

$$X' = \{x + 1; x \in X\} \cup \{0\},\ Y' = \{y + 1, y \in Y\} \cup \{0\}.$$

Le rang et le défaut sont constants sur toute classe d'équivalence. On appelle symbole de défaut impair une classe d'équivalence de couples $\Lambda = (X, Y)$ tels que $|X| > |Y|$ et $def(\Lambda)$ est impair. On appelle symbole de défaut pair une classe d'équivalence de couples $\Lambda = (X, Y)$ tels que $def(\Lambda)$ est pair (dans le cas pair, on n'impose pas $|X| \geq |Y|$).

Soit $m \in \mathbb{N}$. On note $S_{m,imp}$ l'ensemble des classes d'équivalence de symboles de défaut impair et de rang m. Pour $\Lambda \in S_{m,imp}$, on pose $r(\Lambda) = (def(\Lambda) - 1)/2$. On note $S_{m,pair}$ l'ensemble des classes d'équivalence de symbole de défaut pair et de rang m. Pour $\Lambda = (X, Y) \in S_{m,pair}$, on pose $r(\Lambda) = (|X| - |Y|)/2$. On a $def(\Lambda) = 2|r(\Lambda)|$.

Remarque. La définition que l'on utilise ici des symboles de défaut pair est différente de celle de [9] 1.2 où l'on avait identifié les couples (X, Y) et (Y, X).

Notons $\Sigma_{m,imp}$ l'ensemble des triplets (r, α, β) où $r \in \mathbb{N}$, α et β sont des partitions et $r^2 + r + S(\alpha) + S(\beta) = m$. Remarquons que, puisque les couples de partitions (α, β) vérifiant la relation précédente paramètrent les représentations irréductibles de W_{m-r^2-r}, on peut identifier $\Sigma_{m,imp}$ à l'ensemble des couples (r, ρ), où $r \in \mathbb{N}$ vérifie $r^2 + r \leq m$ et $\rho \in \hat{W}_{m-r^2-r}$. On définit une application $symb : \Sigma_{m,imp} \to S_{m,imp}$ de la façon suivante. Soit $(r, \alpha, \beta) \in \Sigma_{m,imp}$. On suppose que β a a termes pour un entier $a \geq 0$ et que α en a $a + 2r + 1$. On pose $X = \alpha + \{a + 2r, a + 2r - 1, ..., 0\}$, $Y = \beta + \{a - 1, a - 2, ..., 0\}$, $\Lambda = (X, Y)$. Alors, $symb(r, \alpha, \beta) = \Lambda$. Remarquons que $r = r(\Lambda)$. L'application $symb$ ainsi définie est une bijection de $\Sigma_{m,imp}$ sur $S_{m,imp}$.

Notons $\Sigma_{m,pair}$ l'ensemble des triplets (r, α, β) où $r \in \mathbb{Z}$, α et β sont des partitions et $r^2 + S(\alpha) + S(\beta) = m$. On peut identifier $\Sigma_{m,pair}$ à l'ensemble des couples (r, ρ), où $r \in \mathbb{Z}$ vérifie $r^2 \leq m$ et $\rho \in \hat{W}_{m-r^2}$. On définit une application $symb : \Sigma_{m,pair} \to S_{m,pair}$ de la façon suivante. Soit $(r, \alpha, \beta) \in \Sigma_{m,pair}$. On suppose que β a a termes et que α en a $a + 2|r|$. Si $r \geq 0$, on pose $X = \alpha + \{a + 2r - 1, a + 2r - 2, ..., 0\}$, $Y = \beta + \{a - 1, a - 2, ..., 0\}$. Si $r < 0$, on pose $X = \beta + \{a - 1, a - 2, ..., 0\}$, $Y = \alpha + \{a + 2|r| - 1, a - 2|r| - 2, ..., 0\}$. On pose $\Lambda = (X, Y)$. Alors $symb(r, \alpha, \beta) = \Lambda$. Remarquons que $r = r(\Lambda)$. L'application $symb$ ainsi définie est une bijection de $\Sigma_{m,pair}$ sur $S_{m,pair}$.

Posons

$$\mathcal{S} = \oplus_{n'+n''=n} \mathbb{C}[S_{n',imp}] \otimes \mathbb{C}[S_{n'',pair}].$$

D'après la construction de 1.2, l'espace $\mathcal{R}$ s'identifie à

$$\oplus_{n'+n''=n}\mathbb{C}[\Sigma_{n',imp}]\otimes\mathbb{C}[\Sigma_{n'',pair}].$$

Des bijections *symb* ci-dessus se déduisent donc un isomorphisme encore noté *symb* : $\mathcal{R}\to\mathcal{S}$.

2.2 Partitions spéciales, cas symplectique

Soit $m\in\mathbb{N}$. Une partition symplectique $\lambda\in\mathcal{P}^{symp}(2m)$ est dite spéciale si λ_{2j-1} et λ_{2j} sont de même parité pour tout $j\geq 1$. On note $\mathcal{P}^{symp,sp}(2m)$ le sous-ensemble des partitions spéciales. Soit λ une telle partition spéciale. Considérons l'ensemble des éléments $i\in Jord^{bp}(\lambda)$ tels que $mult_\lambda(i)$ soit impair. S'il a un nombre pair d'éléments, on les note $i_1>i_2>...>i_t$. S'il a un nombre impair d'éléments, on les note $i_1>i_2>...>i_{t-1}$ et on pose $i_t=0$. Ainsi, t est toujours pair. On appelle intervalle de λ un sous-ensemble de $Jord(\lambda)\cup\{0\}$ de l'une des formes suivantes

$\{i\in Jord(\lambda)\cup\{0\};i_{2h-1}\geq i\geq i_{2h}\}$ pour $h=1,...,t/2$;

$\{i\}$ pour $i\in Jord^{bp}(\lambda)\cup\{0\}$ tel qu'il n'existe pas de $h=1,...,t/2$ de sorte que $i_{2h-1}\geq i\geq i_{2h}$.

Parce que λ est spéciale, on voit que les intervalles sont formés d'entiers pairs. On note $\tilde{Int}(\lambda)$ l'ensemble de ces intervalles. Il est ordonné de façon naturelle : $\Delta>\Delta'$ si et seulement si $i>i'$ pour tous $i\in\Delta$ et $i'\in\Delta'$. L'élément minimal est celui qui contient 0, on le note Δ_{min} et on pose $Int(\lambda)=\tilde{Int}(\lambda)-\{\Delta_{min}\}$. Pour $\Delta\in\tilde{Int}(\lambda)$, on note $J(\Delta)$ l'ensemble des $j\geq 1$ tels que $\lambda_j\in\Delta$. C'est un intervalle de $\mathbb{N}$, qui est infini dans le cas $\Delta=\Delta_{min}$. On note $j_{min}(\Delta)$ le plus petit élément de $J(\Delta)$ et, si $\Delta\neq\Delta_{min}$, on note $j_{max}(\Delta)$ le plus grand élément de $J(\Delta)$. On vérifie que

$\{j_{min}(\Delta);\Delta\in\tilde{Int}(\lambda)\}$ est l'ensemble des $j\geq 1$ tels que j soit impair, λ_j soit pair et $\lambda_{j-1}>\lambda_j$, avec la convention $\lambda_0=\infty$;

$\{j_{max}(\Delta);\Delta\in Int(\lambda)\}$ est l'ensemble des $j\geq 1$ tels que j soit pair, λ_j soit pair et $\lambda_j>\lambda_{j+1}$.

Par la correspondance de Springer, on associe à $(\lambda,1)$ une représentation irréductible de W_m. Elle est paramétrée par un couple $(\alpha(\lambda),\beta(\lambda))$. On note $(X(\lambda),Y(\lambda))\in S_{m,imp}$ l'image de $(0,\alpha(\lambda),\beta(\lambda))$ par l'application *symb*. C'est un symbole spécial, c'est-à-dire que $|X(\lambda)|=|Y(\lambda)|+1$ et, si on note $X(\lambda)=(x_1>...>x_{a+1})$, $Y(\lambda)=(y_1>...>y_a)$, on a $x_1\geq y_1\geq x_2\geq y_2\geq...\geq x_a\geq y_a\geq x_{a+1}$. On appelle famille de λ l'ensemble des symboles $(X,Y)\in S_{m,imp}$ tels que, quitte à remplacer (X,Y) et $(X(\lambda),Y(\lambda))$ par des symboles équivalents, on ait

(1) $X\cup Y=X(\lambda)\cup Y(\lambda)$, $X\cap Y=X(\lambda)\cap Y(\lambda)$.

On note $Fam(\lambda)$ la famille de λ. On montre que $S_{m,imp}$ est la réunion disjointe des $Fam(\lambda)$ quand λ décrit l'ensemble $\mathcal{P}^{symp,sp}(2m)$.

Soit $\lambda\in\mathcal{P}^{symp,sp}(2m)$. On montre qu'il y a une unique bijection croissante $\Delta\mapsto x_\Delta$ de $\tilde{Int}(\lambda)$ sur $X(\lambda)-(X(\lambda)\cap Y(\lambda))$ et une unique bijection croissante $\Delta\mapsto y_\Delta$ de $Int(\lambda)$ sur $Y(\lambda)-(X(\lambda)\cap Y(\lambda))$. A un symbole $\Lambda=(X,Y)\in Fam(\lambda)$, on associe deux éléments $\tau\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\tilde{Int}(\lambda)}$ et $\delta\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda)}$ par les formules suivantes. On suppose les symboles choisis de sorte que (1) soit vérifié. Alors, pour $\Delta\in\tilde{Int}(\lambda)$, resp. $\Delta\in Int(\lambda)$, on pose

$$\tau(\Delta)=|\{\Delta'\in\tilde{Int}(\lambda);\Delta'\geq\Delta,\ x_{\Delta'}\in Y\}|$$
$$+|\{\Delta'\in Int(\lambda);\Delta'>\Delta,\ y_{\Delta'}\in X\}|$$

$$+r(\Lambda)\ mod\ 2\mathbb{Z};$$

resp.

$$\delta(\Delta) = |\{\Delta' \in Int(\lambda); \Delta' \geq \Delta,\ x_{\Delta'} \in Y\}|$$
$$+|\{\Delta' \in Int(\lambda); \Delta' \geq \Delta,\ y_{\Delta'} \in X\}|\ mod\ 2\mathbb{Z}.$$

Par cette construction, la famille $Fam(\lambda)$ s'identifie à l'ensemble des couples $(\tau,\delta) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\tilde{Int}(\lambda)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda)}$ tels que $\tau(\Delta_{min}) = 0$. On note $\mathcal{F}am(\lambda)$ cet ensemble. Pour (τ,δ) dans cet ensemble, provenant du symbole Λ, on pose $r(\tau,\delta) = r(\Lambda)$.

2.3 Partitions spéciales, cas orthogonal impair

Soit $m \in \mathbb{N}$. Une partition orthogonale $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2m+1)$ est dite spéciale si λ_{2j} et λ_{2j+1} sont de même parité pour tout $j \geq 1$. Il en résulte que λ_1 est impair. On note $\mathcal{P}^{orth,sp}(2m+1)$ le sous-ensemble des partitions spéciales. Soit λ une telle partition spéciale. Les constructions du paragraphe précédent s'appliquent. Par la correspondance de Springer, on associe à $(\lambda, 1)$ une représentation irréductible de W_m, puis un symbole appartenant à $S_{m,imp}$. Il est spécial. On définit la famille de λ, que l'on note $Fam(\lambda)$. On montre que $S_{m,imp}$ est la réunion disjointe des $Fam(\lambda)$ quand λ décrit l'ensemble $\mathcal{P}^{orth,sp}(2m+1)$.

Remarquons que la conjonction des propriétés énoncées ici et dans le paragraphe précédent entraîne qu'il y a une bijection entre $\mathcal{P}^{symp,sp}(2m)$ et $\mathcal{P}^{orth,sp}(2m+1)$: $\lambda \in \mathcal{P}^{symp,sp}(2m)$ correspond à $\mu \in \mathcal{P}^{orth,sp}(2m+1)$ si et seulement si $Fam(\lambda) = Fam(\mu)$. En fait, nous utiliserons une autre bijection, la "dualité", cf. 2.6.

2.4 Partitions spéciales, cas orthogonal pair

Soit $m \in \mathbb{N}$. Une partition orthogonale $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2m)$ est dite spéciale si λ_{2j-1} et λ_{2j} sont de même parité pour tout $j \geq 1$. On note $\mathcal{P}^{orth,sp}(2m)$ le sous-ensemble des partitions spéciales. Soit λ une telle partition spéciale. Considérons l'ensemble des éléments $i \in Jord^{bp}(\lambda)$ tels que $mult_\lambda(i)$ soit impair. On les note $i_1 > i_2 > ... > i_t$. L'entier t est forcément pair. On appelle intervalle de λ un sous-ensemble de $Jord(\lambda)$ de l'une des formes suivantes

$\{i \in Jord(\lambda); i_{2h-1} \geq i \geq i_{2h}\}$ pour $h = 1, ..., t/2$;

$\{i\}$ pour $i \in Jord^{bp}(\lambda)$ tel qu'il n'existe pas de $h = 1, ..., t/2$ de sorte que $i_{2h-1} \geq i \geq i_{2h}$.

Parce que λ est spéciale, on voit que les intervalles sont formés d'entiers impairs. On note $Int(\lambda)$ l'ensemble de ces intervalles. Comme dans le cas symplectique, il est ordonné de façon naturelle. Pour $\Delta \in Int(\lambda)$, on definit $J(\Delta)$, $j_{min}(\Delta)$ et $j_{max}(\Delta)$ comme dans le cas symplectique. On vérifie que

$\{j_{min}(\Delta); \Delta \in Int(\lambda)\}$ est l'ensemble des $j \geq 1$ tels que j soit impair, λ_j soit impair et $\lambda_{j-1} > \lambda_j$, avec la convention $\lambda_0 = \infty$;

$\{j_{max}(\Delta); \Delta \in Int(\lambda)\}$ est l'ensemble des $j \geq 1$ tels que j soit pair, λ_j soit impair et $\lambda_j > \lambda_{j+1}$.

Par la correspondance de Springer, on associe à $(\lambda, 1)$ une représentation irréductible de W_m^D. Elle est paramétrée par un couple $(\alpha(\lambda), \beta(\lambda))$, qui n'est déterminé qu'à l'ordre près. On impose que $\alpha(\lambda) \geq \beta(\lambda)$ pour l'ordre lexicographique (s'il existe j tel que

$\alpha(\lambda)_j \neq \beta(\lambda)_j$, on a $\alpha(\lambda)_j > \beta(\lambda)_j$ pour le plus petit de ces entiers j). On note $(X(\lambda), Y(\lambda)) \in S_{m,pair}$ l'image de $(0, \alpha(\lambda), \beta(\lambda))$ par l'application *symb*. C'est un symbole spécial, c'est-à-dire que $|X(\lambda)| = |Y(\lambda)|$ et, si on note $X(\lambda) = (x_1 > ... > x_a)$, $Y(\lambda) = (y_1 > ... > y_a)$, on a $x_1 \geq y_1 \geq x_2 \geq y_2 \geq ... \geq x_a \geq y_a$. On appelle famille de λ l'ensemble des symboles $(X, Y) \in S_{m,pair}$ tels que, quitte à remplacer (X, Y) et $(X(\lambda), Y(\lambda))$ par des symboles équivalents, on ait

(1) $X \cup Y = X(\lambda) \cup Y(\lambda)$, $X \cap Y = X(\lambda) \cap Y(\lambda)$.

On note $Fam(\lambda)$ la famille de λ. On montre que $S_{m,pair}$ est la réunion disjointe des familles $Fam(\lambda)$ quand λ décrit l'ensemble $\mathcal{P}^{orth,sp}(2m)$.

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{orth,sp}(\lambda)$. On montre qu'il y a une unique bijection croissante $\Delta \mapsto x_\Delta$ de $Int(\lambda)$ sur $X(\lambda) - (X(\lambda) \cap Y(\lambda))$ et une unique bijection croissante $\Delta \mapsto y_\Delta$ de $Int(\lambda)$ sur $Y(\lambda) - (X(\lambda) \cap Y(\lambda))$. A un symbole $\Lambda = (X, Y) \in Fam(\lambda)$, on associe deux éléments $\tau, \delta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda)}$ par les mêmes formules qu'en 2.2 (à ceci près qu'un $\tilde{Int}(\lambda)$ figurant dans ces dernières est remplacé par $Int(\lambda)$). Par cette construction, la famille $Fam(\lambda)$ s'identifie à l'ensemble des couples $(\tau, \delta) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda)}$. On note $\mathcal{F}am(\lambda)$ cet ensemble. Pour (τ, δ) dans cet ensemble, provenant du symbole Λ, on pose $r(\tau, \delta) = r(\Lambda)$. Si $Int(\lambda) \neq \emptyset$, on note Δ_{min} son plus petit élément et on vérifie que

(2) $\delta(\Delta_{min}) \equiv r(\tau, \delta)$ mod $2\mathbb{Z}$;

si $Int(\lambda) = \emptyset$, $\mathcal{F}am(\lambda)$ a un unique élément $(\emptyset, \emptyset)$ et on a $r(\emptyset, \emptyset) = 0$.

2.5 L'involution de Lusztig

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathcal{P}^{symp,sp}(2m)$. On note $\Lambda(\lambda) = (X(\lambda), Y(\lambda))$ le symbole spécial associé à λ. On représente tout élément de la famille de λ par un symbole $\Lambda = (X, Y)$ vérifiant la condition 2.2(1). Soient $\Lambda = (X, Y)$, $\Lambda' = (X', Y')$ deux éléments de $Fam(\lambda)$. On pose

$$< \Lambda, \Lambda' >= r(\Lambda) + r(\Lambda') + |X \cap X' \cap Y(\lambda)| + |Y \cap Y' \cap X(\lambda)| \ mod\ 2\mathbb{Z}.$$

Cela définit une application :

$$< .,. >: Fam(\lambda) \times Fam(\lambda) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On définit un automorphisme $\mathcal{F}$ de l'espace $\mathbb{C}[Fam(\lambda)]$ par la formule

$$\mathcal{F}(\Lambda) = |Fam(\lambda)|^{-1/2} \sum_{\Lambda' \in Fam(\lambda)} (-1)^{<\Lambda, \Lambda'>} \Lambda',$$

les symboles étant ici identifiés aux éléments de base de $\mathbb{C}[Fam(\lambda)]$. On vérifie qu'il est involutif. D'après ce que l'on a dit en 2.2, l'espace $\mathbb{C}[S_{m,imp}]$ est somme directe des sous-espaces $\mathbb{C}[Fam(\lambda)]$ quand λ décrit $\mathcal{P}^{symp,sp}(2m)$. On note $\mathcal{F}$ l'automorphisme de $\mathbb{C}[S_{m,imp}]$ qui est la somme directe des automorphismes de ces sous-espaces que l'on vient de construire.

Pour $\lambda \in \mathcal{P}^{orth,sp}(2m)$, on définit exactement de la même façon un automorphisme $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}[Fam(\lambda)]$. Puis, par somme directe, on en déduit un automorphisme de $\mathbb{C}[S_{m,pair}]$.

Dans le cas orthogonal pair, on dispose d'une involution σ de $Fam(\lambda)$: si $\Lambda = (X, Y)$, $\sigma(\Lambda) = (Y, X)$. Pour $\Lambda, \Lambda' \in Fam(\lambda)$, on vérifie la formule

(1) $< \sigma(\Lambda), \Lambda' >\equiv r(\Lambda') + < \Lambda, \Lambda' >$ mod $2\mathbb{Z}$.

Rappelons que

$$\mathcal{S} = \oplus_{n',n''\in\mathbb{N},n'+n''=n}\mathbb{C}[S_{n',imp}] \otimes \mathbb{C}[S_{n'',pair}].$$

On a défini des automorphismes $\mathcal{F}$ de chacun des espaces qui interviennent ici. Par produit tensoriel et sommation, on en déduit un automorphisme $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$. On a défini en 2.1 un isomorphisme $symb : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$. Par celui-ci, on transporte l'automorphisme $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ en un automorphisme $\mathcal{F}$ de $\mathcal{R}$. C'est l'automorphisme de Lusztig introduit en 1.4.

2.6 Dualité

Soit $m \in \mathbb{N}$. On a introduit en 2.1 l'ensemble $\Sigma_{m,imp}$, que l'on voit ici comme un ensemble de couples (r,ρ), où $\rho \in \hat{W}_{m-r^2-r}$. On définit une involution de cet ensemble par $(r,\rho) \mapsto (r, \rho\otimes sgn)$. Transportons-la en une involution de $S_{m,imp}$ par la bijection $symb$. On note d l'involution obtenue. Elle se calcule ainsi. Soit $\Lambda = (X,Y) \in S_{m,imp}$. Fixons un entier a plus grand que tous les termes de X et Y. Posons

$$X' = \{a,...,0\} - \{a-y; y\in Y\},\ Y' = \{a,...,0\} - \{a-x; x\in X\}.$$

Alors $d(\Lambda) = (X',Y')$. Cette formule montre que d conserve la décomposition en familles, c'est-à-dire que si Λ et Λ' sont dans une même famille, alors $d(\Lambda)$ et $d(\Lambda')$ sont aussi dans une même famille. On définit une application appelée dualité $d : \mathcal{P}^{symp,sp}(2m) \to \mathcal{P}^{orth,sp}(2m+1)$ ou $d : \mathcal{P}^{orth,sp}(2m+1) \to \mathcal{P}^{symp,sp}(2m)$ par la condition $Fam(d(\lambda)) = d(Fam(\lambda))$. Les deux applications sont inverses l'une de l'autre.

Ces dualités s'étendent en des applications $d : \mathcal{P}^{symp}(2m) \to \mathcal{P}^{orth,sp}(2m+1)$ ou $d : \mathcal{P}^{orth}(2m+1) \to \mathcal{P}^{symp,sp}(2m)$. Rappelons la définition de la première, celle de la seconde étant similaire. Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2m)$. La correspondance de Springer associe au couple $(\lambda, 1) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2m)$ une représentation $\rho_{\lambda,1}$ de W_m. Le couple $(0,\rho)$ appartient à $\Sigma_{m,imp}$. Il existe une unique partition symplectique spéciale, que l'on note $sp(\lambda)$, dont la famille contient le symbole $symb(0,\rho)$. En fait, on montre que $sp(\lambda)$ est la plus petite partition symplectique spéciale λ' telle que $\lambda \leq \lambda'$. On pose $d(\lambda) = d(sp(\lambda))$. Cette dualité est décroissante : $\lambda \leq \lambda'$ entraîne $d(\lambda') \leq d(\lambda)$.

On peut remplacer $\Sigma_{m,imp}$ par $\Sigma_{m,pair}$ dans la construction ci-dessus. On obtient une dualité d qui est une involution de $\mathcal{P}^{orth,sp}(2m)$. Celle-ci s'étend en une application $d : \mathcal{P}^{orth}(2m) \to \mathcal{P}^{orth,sp}(2m)$, qui est décroissante.

2.7 Calcul de $d(\lambda)$

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2m)$. Pour $i \in Jord(\lambda)\cup\{0\}$, notons $J(i)$ l'ensemble des indices $j \geq 1$ tels que $\lambda_j = i$. C'est un intervalle de $\mathbb{N}-\{0\}$, infini si $i=0$. On note$j_{min}(i)$ son plus petit élément et, si $i \neq 0$, $j_{max}(i)$ son plus grand élément. Considérons l'ensemble des éléments i de $Jord^{bp}(\lambda)$ tels que $mult_\lambda(i)$ soit impaire. Comme en 2.2, si cet ensemble a un nombre pair d'éléments, on les note $i_1 > ... > i_t$. S'il a un nombre impair d'éléments, on les note $i_1 > ... > i_{t-1}$ et on pose $i_t = 0$. Pour $h = 1,...t$, on vérifie que

$j_{min}(i_h) \equiv h \ mod\ 2\mathbb{Z}$ et, si $i_h \neq 0$, $j_{max}(i_h) \equiv h\ mod\ 2\mathbb{Z}$.

Considérons les éléments de $Jord(\lambda)\cup\{0\}$ qui n'interviennent pas dans la suite $i_1,...,i_t$, c'est-à-dire les $i \in Jord(\lambda)$ tels que $mult_\lambda(i)$ soit pair et aussi 0 dans le cas où $i_t \neq 0$. Notons $\mathcal{J}(\lambda)$ cet ensemble. On décompose $\mathcal{J}(\lambda)$ en union disjointe

$\mathcal{J}'(\lambda) \sqcup \mathcal{J}''(\lambda)$: $\mathcal{J}''(\lambda)$ est l'ensemble des $i \in \mathcal{J}(\lambda)$ tels qu'il existe $h = 1, ...t/2$ de sorte que $i_{2h-1} > i > i_{2h}$; $\mathcal{J}'(\lambda)$ est son complémentaire. On vérifie que

pour $i \in \mathcal{J}'(\lambda)$, $j_{min}(i)$ est impair et, si $i \neq 0$, $j_{max}(i)$ est pair ;

pour $i \in \mathcal{J}''(\lambda)$, $j_{min}(i)$ est pair et, si $i \neq 0$, $j_{max}(i)$ est impair.

Notons

$P^+(\lambda)$ l'ensemble des entiers impairs $j \geq 1$ tels que λ_j est pair et $\lambda_{j-1} > \lambda_j$, avec la convention $\lambda_0 = \infty$;

$P^-(\lambda)$ l'ensemble des entiers pairs $j \geq 2$ tels que λ_j est pair et $\lambda_j > \lambda_{j+1}$;

$Q^+(\lambda)$ l'ensemble des entiers pairs $j \geq 2$ tels que λ_j est impair et $\lambda_{j-1} > \lambda_j$;

$Q^-(\lambda)$ l'ensemble des entiers impairs $j \geq 1$ tels que λ_j est impair et $\lambda_j > \lambda_{j+1}$.

Ces ensembles sont disjoints. A l'aide des propriétés précédentes, on voit que

$P^+(\lambda)$ est l'ensemble des $j_{min}(i)$ pour $i = i_h$ avec h impair, ou pour un élément pair $i \in \mathcal{J}'(\lambda)$;

$P^-(\lambda)$ est l'ensemble des $j_{max}(i)$ pour $i = i_h$ avec h pair et $i_h \neq 0$ ou pour un élément pair non nul $i \in \mathcal{J}'(\lambda)$;

$Q^+(\lambda)$ est l'ensemble des $j_{min}(i)$ pour un élément impair $i \in \mathcal{J}''(\lambda)$;

$Q^-(\lambda)$ est l'ensemble des $j_{max}(i)$ pour un élément impair $i \in \mathcal{J}''(\lambda)$.

Ces ensembles sont disjoints. Les éléments de $P^+(\lambda) \cup P^-(\lambda)$ apparaissent presque tous par paires. Un élément de $P^+(\lambda)$ de la forme $j_{min}(i)$ pour $i = i_h$ avec h impair est suivi de l'élément $j_{max}(i_{h+1}) \in P^-(\lambda)$ sauf si $i_{h+1} = 0$. Un élément de $P^+(\lambda)$ de la forme $j_{min}(i)$ pour un élément pair $i \in \mathcal{J}'(\lambda)$ est suivi de l'élément $j_{max}(i) \in P^-(\lambda)$ sauf si $i = 0$. Le plus petit élément de $P^+(\lambda)$ est $j_{min}(i_{t-1})$ si $i_t = 0$ ou $j_{min}(0)$ si $i_t \neq 0$. Il n'est suivi d'aucun élément de $P^-(\lambda)$. Il en résulte que $|P^+\lambda)| = |P^-(\lambda)| + 1$ et que, si on note ces ensembles

$$P^+(\lambda) = \{p_1^+ < ... < p_{a+1}^+\},\ P^-(\lambda) = \{p_1^- < ... < p_a^-\},$$

on a les relations

$$p_1^+ < p_1^- < p_2^+ < p_2^- < ... < p_a^+ < p_a^- < p_{a+1}^+.$$

On voit de même que $|Q^+(\lambda)| = |Q^-(\lambda)|$ et que, si on note ces ensembles

$$Q^+(\lambda) = \{q_1^+ < ... < q_b^+\},\ Q^-(\lambda) = \{q_1^- < ... < q_b^-\},$$

on a les relations

$$q_1^+ < q_1^- < q_2^+ < q_2^- < ... < q_b^+ < q_b^-.$$

Remarquons que, pour $j \in Q^+(\lambda)$, on a $\lambda_j = \lambda_{j+1}$. En effet, λ_j est impair, donc $mult_\lambda(\lambda_j)$ est pair. Mais on a aussi $\lambda_{j-1} > \lambda_j$, d'où l'égalité cherchée. De même, pour $j \in Q^-(\lambda)$, on a $j \geq 2$ et $\lambda_{j-1} = \lambda_j$.

Définissons deux suites de nombres $\zeta(\lambda) = (\zeta(\lambda)_1, \zeta(\lambda)_2, ...)$ et $s(\lambda) = (s(\lambda)_1, s(\lambda)_2, ...)$ par les égalités

$$\zeta(\lambda)_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in P^+(\lambda), \\ -1, & \text{si } j \in P^-(\lambda), \\ 0, & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

$$s(\lambda)_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in Q^+(\lambda), \\ -1, & \text{si } j \in Q^-(\lambda), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme. *(i) On a l'égalité* $sp(\lambda) = \lambda + s(\lambda)$ *;*

(ii) On a l'égalité ${}^t d(\lambda) = \lambda + \zeta(\lambda)$.

Preuve. Posons $\nu = \lambda + s(\lambda)$. Montrons que ν est une partition, c'est-à-dire que $\nu_j \geq \nu_{j+1}$ pour tout $j \geq 1$. Puisque le couple (ν_j, ν_{j+1}) s'obtient en ajoutant à $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$ un couple qui appartient à $\{-1,0,1\} \times \{-1,0,1\}$ et puisque $\lambda_j \geq \lambda_{j+1}$, la conclusion est claire sauf si le couple ajouté est $(-1,0)$, $(0,1)$ ou $(-1,1)$. Le premier cas se produit seulement si $j \in Q^-(\lambda)$. Dans ce cas on a $\lambda_j > \lambda_{j+1}$ par définition de $Q^-(\lambda)$ et alors $\lambda_j - 1 \geq \lambda_{j+1}$. Le deuxième cas se produit seulement si $j+1 \in Q^+(\lambda)$. Dans ce cas, on a encore $\lambda_j > \lambda_{j+1}$ par définition de $Q^+(\lambda)$ et alors $\lambda_j \geq \lambda_{j+1} + 1$. Le dernier cas se produit quand $j \in Q^-(\lambda)$ et $j+1 \in Q^+(\lambda)$. On a encore $\lambda_j > \lambda_{j+1}$ De plus, λ_j et λ_{j+1} sont tous deux impairs. Donc $\lambda_j \geq \lambda_{j+1} + 2$. Alors $\lambda_j - 1 \geq \lambda_{j+1} + 1$.

L'égalité des nombres d'éléments de $Q^+(\lambda)$ et de $Q^-(\lambda)$ et la définition de $s(\lambda)$ entraînent que $S(\nu) = 2n$. Une partition μ de $2n$ est symplectique et spéciale si et seulement si, pour tout entier $j \geq 1$ impair, μ_j et μ_{j+1} sont de même parité et si, lorsque ces nombres sont impairs, ils sont égaux. Cela équivaut à : pour tout $j \geq 1$ impair, si μ_j ou μ_{j+1} est impair, alors $\mu_j = \mu_{j+1}$. Montrons que ν vérifie cette condition. Soit un entier $j \geq 1$ impair, supposons ν_j impair. L'entier j n'appartient pas à $Q^+(\lambda)$ car il est impair. Il n'appartient pas à $Q^-(\lambda)$: sinon λ_j serait impair et $\nu_j = \lambda_j - 1$ serait pair. Donc $s(\lambda)_j = 0$ et $\nu_j = \lambda_j$. Puisque j est impair, que $\lambda_j = \nu_j$ est impair et que $j \notin Q^-(\lambda)$, on a $\lambda_j = \lambda_{j+1}$. Cette égalité entraîne que $j+1$ n'appartient pas à $Q^+(\lambda)$. Il n'appartient pas non plus à $Q^-(\lambda)$ car $j+1$ est pair. Donc $s(\lambda)_{j+1} = 0$, $\nu_{j+1} = \lambda_{j+1}$ et on conclut $\nu_j = \nu_{j+1}$. Une preuve analogue montre que, si ν_{j+1} est impair, on a $\nu_j = \nu_{j+1}$. Donc ν est symplectique et spéciale.

Soit $j \geq 1$. Par construction et d'après la description des ensembles $Q^+(\lambda)$ et $Q^-(\lambda)$, $S_j(\nu) = S_j(\lambda)$ sauf s'il existe un élément impair $i \in \mathcal{J}''(\lambda)$ tel que $j_{min}(i) \leq j < j_{max}(i)$. S'il existe un tel i, on a $S_j(\nu) = S_j(\lambda) + 1$. Cela montre que $\lambda \leq \nu$. Soit $\mu \in \mathcal{P}^{symp,sp}(2n)$ telle que $\lambda \leq \mu$. On a $S_j(\lambda) \leq S_j(\mu)$. Cela entraîne

(1) $S_j(\nu) \leq S_j(\mu)$,

sauf s'il existe i comme ci-dessus. Supposons qu'il existe un tel i et notons simplement $j^+ = j_{min}(i)$, $j^- = j_{max}(i)$. On a $j^+ \in Q^+(\lambda)$ et $j^- \in Q^-(\lambda)$. Par définition de $j_{min}(i)$, on a $\lambda_{j^+-1} > \lambda_{j^+}$. Les entiers $\lambda_1, ..., \lambda_{j^+-1}$ sont tous les entiers strictement supérieurs à $\lambda_{j^+} = i$ qui interviennent dans λ, comptés avec leurs multiplicités. Puisque λ est symplectique, l'entier $S_{j^+-1}(\lambda)$ est pair. Puisque $j^+ \in Q^+(\lambda)$, j^+ est pair et on sait que i est impair. Donc $S_{j^+}(\lambda) = S_{j^+-1}(\lambda) + i$ est impair et aussi $S_{j^+}(\lambda) + j^+$. Puisque $\lambda_{j'} = i$ est impair pour $j' \in \{j^+, ..., j\}$, on voit que $S_j(\lambda) + j$ est aussi impair. Supposons j pair. Alors $S_j(\lambda)$ est impair. Or le fait que μ soit spéciale entraîne que $S_j(\mu)$ est pair. L'inégalité $S_j(\lambda) \leq S_j(\mu)$ est alors stricte et on conclut $S_j(\nu) = S_j(\lambda) + 1 \leq S_j(\mu)$. Supposons j impair. On sait que j^+ est pair et que j^- est impair par définition des ensembles $Q^+(\lambda)$ et $Q^-(\lambda)$. Les hypothèses $j \in \{j^+, ..., j^- - 1\}$ et j impair entraînent alors que $j-1 \in \{j^+, ..., j^- - 1\}$ et $j, j+1 \in \{j^+ + 1 ..., j^- - 1\}$. L'égalité (1) est démontrée pour $j-1$ et pour $j+1$ puisque ces entiers sont pairs. D'où

$$S_{j-1}(\nu) \leq S_{j-1}(\mu) \text{ et } S_{j+1}(\nu) \leq S_{j+1}(\mu).$$

De plus, puisque j et $j+1$ appartiennent tous deux à $\{j^+ + 1 ..., j^- - 1\}$, on a $\nu_j = i = \nu_{j+1}$. La seconde inégalité ci-dessus se récrit

$$S_{j-1}(\nu) + 2i \leq S_{j-1}(\mu) + \mu_j + \mu_{j+1}.$$

On additionne cette inégalité avec la première inégalité ci-dessus et on obtient

$$S_{j-1}(\nu)+i\leq S_{j-1}(\mu)+(\mu_j+\mu_{j+1})/2.$$

Evidemment, $(\mu_j+\mu_{j+1})/2\leq\mu_j$, d'où

$$S_{j-1}(\nu)+i\leq S_{j-1}(\mu)+\mu_j.$$

Le membre de gauche est $S_j(\nu)$, celui de droite $S_j(\mu)$. Cela achève de démontrer (1).

L'inégalité (1) signifie que $\nu\leq\mu$. On a ainsi démontré que ν était la plus petite partition symplectique spéciale μ telle que $\lambda\leq\mu$. Cette propriété caractérise $sp(\lambda)$, ce qui démontre le (i) de l'énoncé.

Prouvons maintenant que

(2) $\zeta(\lambda)=\zeta(\nu)+s(\lambda)$.

Par définition de ces suites, cela équivaut aux égalités

(3) $P^+(\nu)=P^+(\lambda)\cup Q^-(\lambda)$, $P^-(\nu)=P^-(\lambda)\cup Q^+(\lambda)$.

La première égalité concerne des indices $j\geq 1$ impairs. Soit un tel j. Supposons d'abord $j\in P^+(\lambda)$. On a $\nu_j=\lambda_j$ et ce terme est pair. On a de plus $\lambda_{j-1}>\lambda_j$. Si $j=1$, on a trivialement $\nu_{j-1}>\nu_j$ et on conclut $j\in P^+(\nu)$. Supposons $j\geq 2$. Certainement, $j-1\not\in Q^-(\lambda)$ puisque $j-1$ est pair. Donc $\nu_{j-1}\geq\lambda_{j-1}$, d'où $\nu_{j-1}>\nu_j$. Alors j appartient à $P^+(\nu)$. Supposons maintenant $j\in Q^-(\lambda)$. Alors $\nu_j=\lambda_j-1$ et λ_j est impair, donc ν_j est pair. Comme on l'a vu, l'hypothèse $j\in Q^-(\lambda)$ entraîne $\lambda_{j-1}=\lambda_j$. Comme ci-dessus, $j-1$ n'appartient pas à $Q^-(\lambda)$ donc $\nu_{j-1}\geq\lambda_{j-1}=\lambda_j>\nu_j$. D'où $j\in P^+(\nu)$. Supposons enfin que $j\in P^+(\nu)$. En particulier ν_j est pair. Si λ_j est impair, on a nécessairement $s(\lambda)_j\neq 0$ et, puisque j est impair, j appartient à $Q^-(\lambda)$. Supposons λ_j pair. Alors $s(\lambda)_j$ est pair donc nul. Si $j=1$, on a trivialement $\lambda_{j-1}>\lambda_j$ et j appartient à $P^+(\lambda)$. Supposons $j\geq 2$. Puisque $j\in P^+(\nu)$, on a $\nu_{j-1}>\nu_j$, autrement dit $\lambda_{j-1}+s(\lambda)_{j-1}>\lambda_j$. On n'a pas $j-1\in Q^+(\lambda)$ car cette relation entraîne que $\lambda_{j-1}=\lambda_j$ est impair contrairement à l'hypothèse. Donc $s(\lambda)_{j-1}\leq 0$. L'inégalité $\lambda_{j-1}+s(\lambda)_{j-1}>\lambda_j$ entraîne alors $\lambda_{j-1}>\lambda_j$, donc $j\in P^+(\lambda)$. Cela démontre la première égalité de (3). La seconde se démontre de façon analogue. Cela prouve (3), d'où (2).

Dans le cas où λ est spéciale, on a défini l'ensemble d'intervalles $\tilde{Int}(\lambda)$. On voit que $P^+(\lambda)$ est l'ensemble des $j_{min}(\Delta)$ quand Δ décrit $\tilde{Int}(\lambda)$ et que $P^-(\lambda)$ est l'ensemble des $j_{max}(\Delta)$ pour $\Delta\in Int(\lambda)$. Alors $\zeta(\lambda)$ est la suite que l'on a définie en [9] 1.6. On a démontré dans cette référence l'égalité ${}^td(\lambda)=\lambda+\zeta(\lambda)$. Supprimons l'hypothèse que λ est spéciale. Par définition, $d(\lambda)=d(sp(\lambda))$. D'où

$${}^td(\lambda)={}^td(sp(\lambda))=sp(\lambda)+\zeta(sp(\lambda)).$$

Puisque $sp(\lambda)=\nu=\lambda+s(\lambda)$, l'égalité (2) entraîne la deuxième assertion de l'énoncé. □

Soit maintenant $\lambda\in\mathcal{P}^{orth}(2m)$. On définit $P^+(\lambda)$ et $P^-(\lambda)$ en échangeant les conditions de parité sur les λ_j. C'est-à-dire

$P^+(\lambda)$ l'ensemble des entiers impairs $j\geq 1$ tels que λ_j est impair et $\lambda_{j-1}>\lambda_j$, avec la convention $\lambda_0=\infty$;

$P^-(\lambda)$ l'ensemble des entiers pairs $j\geq 2$ tels que λ_j est impair et $\lambda_j>\lambda_{j+1}$.

Dans ce cas, on a $|P^+(\lambda)|=|P^-(\lambda)|$. On définit la suite ζ comme plus haut. Nous aurons besoin de l'analogue du (ii) du lemme ci-dessus, mais seulement dans le cas où λ est spéciale. C'est-à-dire

(4) si $\lambda\in\mathcal{P}^{orth,sp}(2m)$, on a ${}^td(\lambda)=\lambda+\zeta(\lambda)$.

Cf. [9] 1.7.

3 Induction endoscopique

3.1 L'induite endoscopique de deux partitions spéciales

Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$ et soient $\lambda_1 \in \mathcal{P}^{symp,sp}(2n_1)$ et $\lambda_2 \in \mathcal{P}^{orth,sp}(2n_2)$. Pour un indice $j \geq 1$, on dit que $\lambda_{1,j}$, resp. $\lambda_{2,j}$, est de bonne parité si $\lambda_{1,j}$ est pair, resp. $\lambda_{2,j}$ est impair. Notons

J^+ l'ensemble des $j \geq 1$ tels que j soit impair, $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ soient de bonne parité et il existe $d = 1, 2$ de sorte que $\lambda_{d,j-1} > \lambda_{d,j}$ (avec toujours la convention $\lambda_{d,0} = \infty$) ;

J^- l'ensemble des $j \geq 1$ tels que j soit pair, $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ soient de bonne parité et il existe $d = 1, 2$ de sorte que $\lambda_{d,j} > \lambda_{d,j+1}$.

On vérifie que $|J^+| = |J^-|$ et que, si on note $j_1^+ < ... < j_a^+$ les éléments de J^+ et $j_1^- < ... < j_a^-$ ceux de J^-, on a $j_1^+ < j_1^- < j_2^+ < ... < j_a^+ < j_a^-$. On définit une suite $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...)$ de nombres entiers par $\xi_j = 1$ si $j \in J^+$, $\xi_j = -1$ si $j \in J^-$ et $\xi_j = 0$ si $j \notin J^+ \cup J^-$. On pose

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \xi.$$

C'est une partition symplectique de $2n$, appelée l'induite endoscopique de λ_1 et λ_2.

Pour unifier les notations, on pose $\tilde{Int}(\lambda_2) = Int(\lambda_2)$. Pour $d = 1, 2$, posons $J_{d,min} = \{j_{min}(\Delta); \Delta \in \tilde{Int}(\lambda_d)\}$, $J_{d,max} = \{j_{max}(\Delta); \Delta \in Int(\lambda_d)\}$. On note $\mathcal{J}^+ = J_{1,min} \cap J_{2,min}$, $\mathcal{J}^- = J_{1,max} \cap J_{2,max}$,

$$\mathcal{J} = J_{1,min} \cup J_{2,min} \cup J_{1,max} \cup J_{2,max} \cup \{\infty\}.$$

Appelons intervalle relatif d'indices un sous-ensemble de $\mathbb{N} - \{0\}$ de l'une des formes suivantes

(1) $\{j\}$ pour $j \in \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$;

(2) $\{j, ..., j'\}$ où j et j' sont deux éléments consécutifs de $\mathcal{J}$ tels qu'il existe un unique $d = 1, 2$ de sorte que $\{j, ..., j'\} \subset J(\Delta)$ pour un $\Delta \in \tilde{Int}(\lambda_d)$.

Pour un intervalle relatif d'indices J, on pose $D(J) = \{\lambda_j; j \in J\}$. On appelle intervalle de λ relatif à (λ_1, λ_2) un sous-ensemble de $Jord(\lambda) \cup \{0\}$ de la forme $D(J)$. On note $\tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ l'ensemble de ces intervalles relatifs. On montre qu'ils sont disjoints, formés de nombres pairs et que $\tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ est une partition de $Jord^{bp}(\lambda) \cup \{0\}$. Pour un intervalle relatif D, on note $J(D)$ l'intervalle relatif d'indices J tel que $D = D(J)$. Les intervalles relatifs sont ordonnés de façon naturelle : $D > D'$ si et seulement si $i > i'$ pour tous $i \in D$, $i' \in D'$. L'intervalle minimal est celui qui contient 0, on le note D_{min} et on pose $Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) = \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) - \{D_{min}\}$. Pour $D \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, on note $j_{min}(D)$, resp. $j_{max}(D)$, le plus petit, resp. grand, élément de $J(D)$ (on considère que $j_{max}(D_{min}) = \infty$).

Montrons que

(3) pour tout $j \in \mathcal{J}$, il existe un unique intervalle relatif D tel que $j \in \{j_{min}(D), j_{max}(D)\}$.

Preuve. L'unicité est claire puisque, quand D parcourt $\tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, les $J(D)$ sont disjoints. Pour $j = \infty$, on a $j = j_{max}(D_{min})$. Soit $j \in \mathcal{J}$ différent de ∞. Supposons par exemple j pair, le cas j impair étant similaire. La définition de $\mathcal{J}$ et cette hypothèse de parité impose qu'il existe $d = 1, 2$ et $\Delta_d \in Int(\lambda_d)$ de sorte que $j = j_{max}(\Delta_d)$. Pour fixer la notation, on suppose qu'il en est ainsi pour $d = 1$. L'ensemble des $j' \in \mathcal{J}$ tels que $j' < j$ n'est pas vide : il contient $j_{min}(\Delta_1)$. Notons j^- le plus grand de ces éléments. On a donc $j_{min}(\Delta_1) \leq j^-$ et $\{j^-, ..., j\}$ est contenu dans $J(\Delta_1)$. Si $\{j^-, ..., j\}$ n'est contenu dans $J(\Delta_2)$ pour aucun $\Delta_2 \in \tilde{Int}(\lambda_2)$, il existe par définition des intervalles relatifs un tel intervalle D tel que $J(D) = \{j^-, ..., j\}$ et on a $j = j_{max}(D)$. Supposons qu'il existe un $\Delta_2 \in \tilde{Int}(\lambda_2)$ de sorte que $\{j^-,...,j\} \subset J(\Delta_2)$. Si $j = j_{max}(\Delta_2)$, alors, par définition des intervalles relatifs, il existe un tel intervalle D tel que $\{j\} = J(D)$ et on conclut. Supposons $j < j_{max}(\Delta_2)$. On note j^+ le plus petit élément de $\mathcal{J}$ qui soit strictement supérieur à j. Comme précédemment, on a $j^+ \leq j_{max}(\Delta_2)$, d'où $\{j,...,j^+\} \subset J(\Delta_2)$. S'il existait $\Delta'_1 \in \tilde{Int}(\lambda_1)$ vérifiant $\{j,...,j^+\} \subset J(\Delta'_1)$, on aurait $\Delta'_1 = \Delta_1$ puisque $j \in J(\Delta_1)$ et aussi $j_{max}(\Delta'_1) \geq j^+ > j$. Cela contredit l'hypothèse $j = j_{max}(\Delta_1)$. Un tel Δ'_1 n'existe donc pas et, par définition des intervalles relatifs, il existe un tel intervalle D tel que $J(D) = \{j,...,j^+\}$. Alors $j = j_{min}(D)$. $\square$

On définit une fonction $\chi_{\lambda_1,\lambda_2} : \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de la façon suivante. Soit $D \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. Si $|J(D)| = 1$, $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(D) = 0$. Si $|J(D)| \geq 2$, $J(D)$ est de la forme (2) ci-dessus et cette relation nous fournit un indice $d \in \{1,2\}$. On note $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(D)$ l'image de d dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Remarquons que l'on a $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(D_{min}) = 0$.

On définit l'ensemble $P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ formé des $j_{min}(D)$ qui sont impairs, pour $D \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}$ et l'ensemble $P^-_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ formé des $j_{max}(D)$ qui sont pairs, pour $D \in Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. On définit une suite $\zeta_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) = (\zeta_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)_1, \zeta_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)_2, ...)$ par $\zeta_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)_j = 1$ si $j \in P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, $\zeta_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)_j = -1$ si $j \in P^-_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, $\zeta_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)_j = 0$ si $j \notin P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) \cup P^-_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$.

Lemme. *On a l'égalité* $\zeta(\lambda_1) + \zeta(\lambda_2) = \zeta_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) + \xi$.

Preuve. Restreignons-nous d'abord à l'ensemble des $j \geq 1$ impairs. Alors les fonctions ci-dessus sont les fonctions caractéristiques des ensembles $P^+(\lambda_1)$, $P^+(\lambda_2)$, $P_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ et J^+. Il s'agit donc de prouver les égalités

(4) $P^+(\lambda_1) \cup P^+(\lambda_2) = P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) \cup J^+$;

(5) $P^+(\lambda_1) \cap P^+(\lambda_2) = P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) \cap J^+$.

Rappelons que, puisque λ_d est spéciale pour $d = 1,2$, $P^+(\lambda_d)$ est l'ensemble des $j_{min}(\Delta_d)$ pour $\Delta_d \in Int(\lambda_d)$. Considérons un j appartenant à l'ensemble de gauche de (4). Pour fixer la notation, supposons $j \in P^+(\lambda_1)$. Alors $j = j_{min}(\Delta_1)$ pour un $\Delta_1 \in Int(\lambda_1)$, en particulier j appartient à l'ensemble $\mathcal{J}$. Si $\lambda_{2,j}$ est impair, j appartient à J^+ par définition de cet ensemble. Supposons $\lambda_{2,j}$ pair. Soit j^+ le plus petit élément du sous-ensemble des éléments de l'ensemble $\mathcal{J}$ qui sont strictement supérieurs à j. Ce sous-ensemble contenant $j_{max}(\Delta_1)$ (ou il convient ici de considérer que $j_{max}(\Delta_{1,min}) = \infty$), j^+ existe et on a $j^+ \leq j_{max}(\Delta_1)$. L'ensemble $\{j,...,j^+\}$ est contenu dans $J(\Delta_1)$ mais, puisque $\lambda_{2,j}$ est de mauvaise parité, il n'existe pas de $\Delta_2 \in Int(\lambda_2)$ tel que $\{j,...,j^+\}$ soit contenu dans $J(\Delta_2)$. Par définition $\{j,...,j^+\}$ est alors égal à $J(D)$ pour un intervalle relatif D et on a $j = j_{min}(D)$. Donc $j \in P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. Inversement, considérons un j qui appartient à l'ensemble de droite de (4). Si $j \in J^+$, il est par définition de la forme $j_{min}(\Delta_d)$ pour un $d = 1,2$ et un $\Delta_d \in Int(\lambda_d)$. C'est-à-dire $j \in P^+(\lambda_d)$. Supposons $j \in P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. Alors $j = j_{min}(D)$ pour un $D \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. Par définition des intervalles relatifs, j appartient à $\mathcal{J}$. Puisque j est impair, j est forcément de la forme $j_{min}(\Delta_d)$ pour un $d = 1,2$ et un $\Delta_d \in \tilde{Int}(\lambda_d)$. C'est-à-dire $j \in P^+(\lambda_d)$. Cela prouve (4).

Soit $j \in P^+(\lambda_1) \cap P^+(\lambda_2)$. Alors, pour $d = 1,2$, j est de la forme $j_{min}(\Delta_d)$ pour un $\Delta_d \in Int(\lambda_d)$. En particulier, $\lambda_{d,j}$ est de la bonne parité. Par définition de J^+, on a $j \in J^+$. Cela implique que λ_j est pair. Donc il existe un intervalle relatif $D \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ tel que $j \in J(D)$. Si $j = 1$, on a forcément $j = j_{min}(D)$ et $j \in P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. Supposons $j \geq 2$. Pour $d = 1,2$, l'hypothèse $j = j_{min}(\Delta_d)$ implique que $\{j-1,j\}$ n'est contenu dans $J(\Delta'_d)$ pour aucun $\Delta'_d \in Int(\lambda_d)$. Par définition des intervalles relatifs, $\{j-1,j\}$ n'est donc contenu dans $J(D')$ pour aucun $D' \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. En particulier $j-1 \notin J(D)$, d'où $j = j_{min}(D)$ et $j \in P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. Inversement, soit $j \in P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) \cap J^+$. Par définition de J^+, $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ sont de bonne parité et il existe $d = 1, 2$ et $\Delta_d \in Int(\lambda_d)$ de sorte que $j = j_{min}(\Delta_d)$. Pour fixer la notation, on suppose que ce d est égal à 1. Donc $j \in P^+(\lambda_1)$. L'hypothèse que $\lambda_{2,j}$ est de bonne parité implique qu'il existe $\Delta_2 \in Int(\lambda_2)$ de sorte que $j \in J(\Delta_2)$. Supposons d'abord que tous les éléments de $\mathcal{J}$ soient supérieurs ou égaux à j. Dans ce cas, $j = j_{min}(\Delta_2)$ et $j \in P^+(\lambda_2)$. Supposons maintenant qu'il existe des éléments de $\mathcal{J}$ strictement inférieurs à j, notons j^- le plus grand d'entre eux. L'hypothèse $j \in P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ signifie que $j = j_{min}(D)$ pour un intervalle relatif D. Donc $\{j^-, ..., j\}$ n'est de la forme $J(D')$ pour aucun $D' \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. Les entiers j^- et j sont deux éléments consécutifs de $\mathcal{J}$. Ces deux propriétés et la définition des intervalles relatifs entraînent que le nombre de d pour lesquels il existe $\Delta'_d \in Int(\lambda_d)$ tel que $\{j^-, ..., j\} \subset J(\Delta'_d)$ est pair. Pour $d = 1$, il n'existe pas de tel Δ'_1 car $j = j_{min}(\Delta_1)$. Donc il n'existe pas non plus de tel Δ'_2. En particulier $\{j^-, ..., j\} \not\subset J(\Delta_2)$. Puisque $\{j_{min}(\Delta_2), ..., j\} \subset J(\Delta_2)$, cela entraîne $j^- < j_{min}(\Delta_2)$, et, puisque $j_{min}(\Delta_2) \in \mathcal{J}$, la définition de j^- entraîne $j \leq j_{min}(\Delta_2)$, d'où forcément $j = j_{min}(\Delta_2)$. Donc $j \in P^+(\lambda_2)$. Cela prouve (5).

Un raisonnement analogue vaut en se restreignant à l'ensemble des entiers pairs $j \geq 2$. Cela prouve le lemme. $\square$

On dit que λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ si et seulement si $\tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ est la partition la plus fine de $Jord^{bp}(\lambda) \cup \{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si tout intervalle relatif est réduit à un seul élément. Dans ce cas, $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est définie sur $Jord^{bp}(\lambda) \cup \{0\}$ et on a $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$.

3.2 Une proposition d'existence

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$. Fixons une fonction $\chi : Jord^{bp}(\lambda) \cup \{0\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ telle que $\chi(i) = 0$ pour tout $i \in Jord^{bp}(\lambda)$ tel que $mult_\lambda(i) = 1$ et telle que $\chi(0) = 0$.

Proposition. *Il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$ et il existe $\lambda_1 \in \mathcal{P}^{symp,sp}(2n_1)$ et $\lambda_2 \in \mathcal{P}^{orth,sp}(2n_2)$ tels que*

(i) λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ ;

(ii) $d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) = d(\lambda)$;

(iii) $\chi_{\lambda_1,\lambda_2} = \chi$.

La preuve est identique à celle de [9] 1.11. On la refait car, dans cette référence, on avait bêtement supposé que tous les termes de λ étaient pairs. On utilise les notations de 2.7.

Preuve. Notons $\mathfrak{J}^+$ l'ensemble des $j \geq 1$ tels que j soit impair, λ_j soit pair et $\lambda_j > \lambda_{j+1}$. Notons $\mathfrak{J}^-$ l'ensemble des $j \geq 2$ tels que j et λ_j soient pairs et $\lambda_{j-1} > \lambda_j$. On voit que $\mathfrak{J}^+$ est l'ensemble des $j_{max}(i)$ pour $i = i_h$ avec h impair ou pour $i \in \mathcal{J}''(\lambda) \cap Jord^{bp}(\lambda)$. De même, $\mathfrak{J}^-$ est l'ensemble des $j_{min}(i)$ pour $i = i_h$ avec h pair ou pour $i \in \mathcal{J}''(\lambda) \cap Jord^{bp}(\lambda)$. On en déduit que $\mathfrak{J}^+$ et $\mathfrak{J}^-$ ont le même nombre d'éléments et que, si on note $\mathfrak{J}^+ = \{j_1^+ < ... < j_c^+\}$ et $\mathfrak{J}^- = \{j_1^- < ... < j_c^-\}$, on a

$$j_1^+ < j_1^- < j_2^+ < j_2^- < .... < j_c^+ < j_c^-.$$

On note $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, ...)$ la suite de nombres définie par $\mathfrak{r}_j = 1$ si $j \in \mathfrak{J}^+$, $\mathfrak{r}_j = -1$ si $j \in \mathfrak{J}^-$ et $\mathfrak{r}_j = 0$ si $j \notin \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$.

Soit $d \in \{1, 2\}$. Pour $j \geq 1$, disons que j et $j+1$ sont d-liés si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(1)(a) $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ est pair et $\chi(\lambda_j) = d+1$ (c'est-à-dire $\chi(\lambda_j) \equiv d+1 \; mod \; 2\mathbb{Z}$) ;

(1)(b) $j \in \mathfrak{J}^+$;

(1)(c) $j+1 \in \mathfrak{J}^-$;

(1)(d) λ_j et λ_{j+1} sont impairs et $\lambda_j \in \mathcal{J}''(\lambda)$.

Remarquons que cette dernière condition équivaut à

(1)(d') λ_j et λ_{j+1} sont impairs et $\lambda_{j+1} \in \mathcal{J}''(\lambda)$.

En effet, si (1)(d) est vérifiée, on a $i_h > \lambda_j > i_{h+1}$ pour un h impair. Alors $i_h > \lambda_{j+1} \geq i_{h+1}$. Mais $\lambda_{j+1} \neq i_{h+1}$ puisque λ_{j+1} est impair et i_{h+1} est pair. Donc $i_h > \lambda_{j+1} > i_{h+1}$ et $\lambda_{j+1} \in \mathcal{J}''(\lambda)$. La réciproque est similaire.

Pour deux entiers $1 \leq j \leq j'$, disons qu'ils sont d-liés si et seulement si k et $k+1$ sont d-liés pour tout $k = j, ..., j'-1$. C'est une relation d'équivalence et les classes sont des intervalles de $\mathbb{N} - \{0\}$, éventuellement infinis. On note $\tilde{\mathfrak{Int}}_d$ l'ensemble des classes d'équivalence ayant au moins deux éléments. Pour $\mathfrak{I} \in \tilde{\mathfrak{Int}}_d$, on note $j_{min}(\mathfrak{I})$, resp. $j_{max}(\mathfrak{I})$, le plus petit, resp. grand, élément de $\mathfrak{I}$ (avec $j_{max}(\mathfrak{I}) = \infty$ si $\mathfrak{I}$ est infini). Pour $d = 1, 2$ définissons une fonction $p_d : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $p_d(j) = 1$ s'il existe $\mathfrak{I} \in \tilde{\mathfrak{Int}}_d$ tel que $j \in \mathfrak{I}$, $p_d(j) = 0$ sinon. Montrons que

(2) l'ensemble $\tilde{\mathfrak{Int}}_d$ est fini ; il contient un élément infini si et seulement si $d = 1$; on note $\mathfrak{Int}_1$ l'ensemble $\tilde{\mathfrak{Int}}_1$ privé de cet élément infini et on pose $\mathfrak{Int}_2 = \tilde{\mathfrak{Int}}_2$;

(3) pour $\mathfrak{I} \in \tilde{\mathfrak{Int}}_d$, $j_{min}(\mathfrak{I})$ est impair et $j_{max}(\mathfrak{I})$ est pair ou infini ;

(4) pour $j \geq 1$, on a

$$p_1(j) + p_2(j) = \begin{cases} 2, & si \; j \in \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-; \\ 1, & si \; \lambda_j \; est \; pair \; et \; j \notin \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-; \\ 0, & si \; \lambda_j \; est \; impair \; et \; \lambda_j \in \mathcal{J}'(\lambda); \\ 2, & si \; \lambda_j \; est \; impair \; et \; \lambda_j \in \mathcal{J}''(\lambda); \end{cases}$$

(5) $\mathfrak{J}^+$ est égal à l'ensemble des $j \geq 1$ tels que $p_1(j) = p_2(j) = 1$ et qu'il existe $d = 1, 2$ et un élément de $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ de sorte que $j = j_{min}(\mathfrak{I})$;

(6) $\mathfrak{J}^-$ est égal à l'ensemble des $j \geq 1$ tels que $p_1(j) = p_2(j) = 1$ et qu'il existe $d = 1, 2$ et un élément de $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ de sorte que $j = j_{max}(\mathfrak{I})$.

Soit $t(\lambda)$ le plus grand entier l tel que $\lambda_l > 0$. Parce que $\chi(0) = 0$, on voit que, pour $j > t(\lambda)$, j et $j+1$ sont 1-liés mais pas 2-liés. Donc $\{t(\lambda)+1, ...\}$ est contenu dans un intervalle infini $\mathfrak{I}_{1,min} \in \tilde{\mathfrak{Int}}_1$ tandis que, pour $j \geq t(\lambda)+2$, $\{j\}$ est une classe d'équivalence pour la 2-liaison et j n'est pas contenu dans un élément de $\mathfrak{Int}_2$. Cela prouve (2).

Soit $\mathfrak{I} \in \tilde{\mathfrak{Int}}_d$. On pose simplement $j = j_{min}(\mathfrak{I})$. Montrons que j est impair. C'est évident si $j = 1$. On suppose $j \geq 2$. Par définition, j et $j+1$ sont d-liés tandis que $j-1$ et j ne le sont pas. Si (1)(b) ou (1)(c) est vérifiée, j est trivialement impair. Supposons vérifiée (1)(a). On n'a pas $\lambda_{j-1} = \lambda_j$: sinon ces entiers seraient pairs, on aurait $\chi(\lambda_{j-1}) = \chi(\lambda_j) = d+1$ et $j-1$ et j vérifieraient l'analogue de (1)(a) et seraient d-liés. Donc $\lambda_{j-1} > \lambda_j$. Alors j est impair ou appartient à $\mathfrak{J}^-$. Or cette dernière relation est exclue car elle entraîne que $j-1$ et j vérifient l'analogue de (1)(c) et sont d-liés. Donc j est impair. Supposons maintenant que (1)(d) soit vérifiée. Supposons d'abord que λ_{j-1} est impair. Alors $j-1$ et j vérifient l'analogue de (1)(d') et sont d-liés, ce qui n'est pas le cas. Donc λ_{j-1} est pair et $\lambda_{j-1} > \lambda_j$. Alors $j-1$ est pair ou $j-1 \in \mathfrak{J}^+$. Or cette dernière relation est exclue car elle entraîne que $j-1$ et j vérifient l'analogue de (1)(b) et sont d-liés. Donc $j-1$ est pair et j est impair. Cela montre que $j_{min}(\mathfrak{I})$ est impair. Une preuve analogue montre que $j_{max}(\mathfrak{I})$ est pair s'il n'est pas infini. Cela prouve (3).

Soit $j \in \mathfrak{J}^+$. Alors (1)(b) est vérifié et j et $j+1$ sont d-liés pour $d=1,2$. Donc $p_1(j)=p_2(j)=1$. Soit maintenant $j \in \mathfrak{J}^-$. Alors j est pair donc différent de 1. L'analogue de (1)(c) pour le couple $(j-1,j)$ est vérifiée et $j-1$ et j sont d-liés pour $d=1,2$. Donc $p_1(j)=p_2(j)=1$. Supposons maintenant λ_j pair mais $j \notin \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$. Supposons par exemple j impair, le cas où j est pair se traitant de façon analogue. Puisque $j \notin \mathfrak{J}^+$, on a $\lambda_j = \lambda_{j+1}$. Les entiers j et $j+1$ sont d-liés pour l'unique d tel que $\chi(\lambda_j) = d+1$. Pour ce d, $p_d(j)=1$. Soit d' l'autre élément de $\{1,2\}$. On doit prouver que j n'appartient à aucun élément de $\tilde{\mathfrak{Int}}_{d'}$. On vient de voir que j et $j+1$ ne sont pas d'-liés. Si j appartenait à un élément $\mathfrak{I}' \in \tilde{\mathfrak{Int}}_{d'}$, cet intervalle serait fini et j serait égal à $j_{max}(\mathfrak{I}')$. Mais alors j serait pair d'après (3), contrairement à l'hypothèse. Supposons maintenant λ_j impair, j impair et $\lambda_j \in \mathcal{J}'(\lambda)$. Cette dernière condition implique d'après 2.7 que $j_{max}(\lambda_j)$ est pair, donc $j < j_{max}(\lambda_j)$, donc $\lambda_{j+1} = \lambda_j$. Pour $d=1,2$, les conditions (1)(a), (1)(b) et (1)(c) ne sont pas vérifiées : elles imposent que λ_j ou λ_{j+1} est pair. La condition (1)(d) ne l'est pas puisque $\lambda_j \in \mathcal{J}'(\lambda)$. Donc j et $j+1$ ne sont pas d-liés. Si $j=1$, j n'appartient donc à aucun élément de $\tilde{\mathfrak{Int}}_d$. Si $j>1$, les analogues des conditions (1)(a) et (1)(c) pour le couple $(j-1,j)$ ne sont pas vérifiées : elles imposent que λ_j est pair. L'analogue de (1)(b) n'est pas vérifiée : elle impose $j-1$ impair donc j pair. L'analogue de (1)(d') n'est pas vérifiée puisque $\lambda_j \in \mathcal{J}'(\lambda)$. Donc $j-1$ et j ne sont pas d-liés. Donc $p_d(j)=0$. Supposons maintenant λ_j impair, j pair et $j \in \mathcal{J}'(\lambda)$. Cette dernière condition implique d'après 2.7 que $j_{min}(\lambda_j)$ est impair, donc $j_{min}(\lambda_j) < j$, donc $\lambda_{j-1} = \lambda_j$. Des arguments analogues à ceux ci-dessus montrent que, pour $d=1,2$, $p_d(j)=0$. Supposons enfin que λ_j est impair et que $j \in \mathcal{J}''(\lambda)$. Puisque $mult_\lambda(\lambda_j)$ est paire, on a $\lambda_{j-1}=\lambda_j$ ou $\lambda_{j+1}=\lambda_j$. Dans le premier cas, $j-1$ et j vérifient l'analogue de (1)(d') et sont d-liés pour tout d. Dans le deuxième cas, j et $j+1$ vérifient (1)(d) et sont d-liés pour tout d. Donc $p_d(j)=1$ pour tout d. Cela démontre (4).

Soit $j \in \mathfrak{J}^+$. D'après (4), on a $p_1(j)=p_2(j)=1$, c'est-à-dire que, pour tout d, il existe $\mathfrak{I}_d \in \tilde{\mathfrak{Int}}_d$ tel que $j \in \mathfrak{I}_d$. Si $j=1$, on a forcément $j = j_{min}(\mathfrak{I}_d)$ pour tout d. Supposons $j>1$. On veut montrer que $j=j_{min}(\mathfrak{I}_d)$ pour au moins un d, autrement dit que $j-1$ et j ne sont pas d-liés pour au moins un d. Les analogues pour de couple $(j-1,j)$ des conditions (1)(b) et (1)(c) ne sont pas vérifiées : elles impliquent que j est pair, alors que j est impair puisque $j \in \mathfrak{J}^+$. L'analogue de (1)(d) n'est pas vérifiée, puisque λ_j est pair. Donc $j-1$ et j ne sont d-liés que si l'analogue de (1)(a) est vérifiée. Mais cette analogue ne peut être vérifiée que pour un unique d. Cela démontre que $\mathfrak{J}^+$ est contenu dans l'ensemble décrit en (5). Inversement, soit $j \geq 1$, supposons que $p_1(j)=p_2(j)=1$ et qu'il existe $d=1,2$ et un élément de $\mathfrak{I} \in \tilde{\mathfrak{Int}}_d$ de sorte que $j=j_{min}(\mathfrak{I})$. Autrement dit, ou bien $j=1$, ou bien il existe d tel que $j-1$ et j ne sont pas d-liés. D'après (3), j est impair. D'après (4), on a soit $j \in \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$, soit λ_j est impair et $\lambda_j \in \mathcal{J}''(\lambda)$. Dans le premier cas, l'imparité de j entraîne $j \in \mathfrak{J}^+$, ce que l'on veut prouver. Supposons donc que λ_j est impair et $\lambda_j \in \mathcal{J}''(\lambda)$. D'après 2.7, cette condition entraîne que $j_{min}(\lambda_j)$ est pair, donc $j_{min}(\lambda_j) < j$ et $\lambda_{j-1} = \lambda_j$. Alors $j-1$ et j vérifient l'analogue de (1)(d') et sont d-liés. Cela contredit l'hypothèse. On a ainsi prouvé (5). La preuve de (6) est similaire.

La relation (3) entraîne

(7) $p_d(j) = p_d(j+1)$ si j est impair.

La définition de $\mathfrak{r}$ et l'assertion (4) entraînent

(8) $\mathfrak{r}_j \equiv p_1(j) + p_2(j) + 1 + \lambda_j \ mod\ 2\mathbb{Z}$.

On va montrer qu'il existe des suites d'entiers positifs ou nuls λ_1 et λ_2 vérifiant les conditions suivantes, pour tout $j \geq 1$:

(9) $\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} + \mathfrak{r}_j = \lambda_j$;

(10) pour $d = 1, 2$, $\lambda_{d,j} \equiv d + p_d(j)\ mod\ 2\mathbb{Z}$;

(11) pour $d = 1, 2$, on a

(a) $\lambda_{d,j} = \lambda_{d,j+1}$ si j est pair, $p_d(j) = 1$ et il n'existe pas de $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $j = j_{max}(\mathfrak{I})$ ou si j est impair et $p_d(j) = 0$;

(b) $\lambda_{d,j} > \lambda_{d,j+1}$ si j est pair et il existe $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $j = j_{max}(\mathfrak{I})$ (la condition que j est pair est redondante d'après (3)) ;

(c) $\lambda_{d,j} \geq \lambda_{d,j+1}$ si j est impair et $p_d(j) = 1$ ou si j est pair et $p_d(j) = 0$.

On raisonne par récurrence descendante sur j. Pour $j \geq t(\lambda) + 2$, on pose $\lambda_{1,j} = \lambda_{2,j} = 0$. On a vu dans la preuve de (2) que j était contenu dans $\mathfrak{I}_{1,min}$ mais dans aucun élément de $\mathfrak{Int}_2$. Donc $p_1(j) = 1$ et $p_2(j) = 0$. De plus, j n'appartient pas à $\mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$ donc $\mathfrak{r}_j = 0$. On voit alors que toutes les conditions ci-dessus sont vérifiées.

On fixe j et on suppose que l'on a fixé des termes $\lambda_{1,j'}$, $\lambda_{2,j'}$ pour $j' > j$ de sorte que les conditions ci-dessus soient vérifiées pour ces j'. Pour $d = 1, 2$, on pose $\lambda_{d,j} = \lambda_{d,j+1} + e_d$, avec $e_d \in \mathbb{Z}$. Les conditions ci-dessus se traduisent en termes de ces entiers e_d. L'analogue de (9) étant vérifiée pour $j + 1$, cette condition (9) se traduit par

(12) $e_1 + e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j$.

De même, la condition (10) se traduit par

(13) $e_d \equiv p_d(j) + p_d(j + 1)\ mod\ 2\mathbb{Z}$.

Remarquons que, si (12) est vérifiée, la relation (8) entraîne

$e_1 + e_2 \equiv p_1(j) + p_1(j + 1) + p_2(j) + p_2(j + 1)\ mod\ 2\mathbb{Z}$.

Donc (13) est vérifiée pour un d si et seulement si elle l'est pour les deux d.

La condition (11) se traduit par $e_d = 0$ dans le cas (a), $e_d > 0$ dans le cas (b) et $e_d \geq 0$ dans le cas (c). Remarquons que, dans le cas (a), la condition $e_d = 0$ est compatible avec (13), autrement dit $p_d(j) = p_d(j+1)$. En effet, si j est impair, cette relation est toujours vraie d'après (5). Si j est pair, la condition (11)(a) impose que j et $j+1$ sont d-liés donc $p_d(j) = p_d(j + 1) = 1$.

Supposons la condition (11)(a) vérifiée pour un d, disons pour $d = 1$. On n'a pas le choix pour e_1 : on pose $e_1 = 0$. La condition (12) impose $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j$. Comme on vient de le dire, la condition (13) est vérifiée pour $d = 1$. Elle l'est donc aussi pour $d = 2$. Il reste à vérifier les conditions provenant de (11) pour $d = 2$.

Supposons j impair. Supposons d'abord que la condition (11)(a) soit vérifiée pour $d = 2$, auquel cas on doit vérifier que $e_2 = 0$. La condition (11)(a) pour j impair est que $p_d(j) = 0$. Cette condition est vérifiée pour $d = 1, 2$. D'après (4), λ_j est impair et $\lambda_j \in \mathcal{J}'(\lambda)$. D'après 2.7, $j_{max}(\lambda_j)$ est pair, donc $j < j_{max}(\lambda_j)$ et $\lambda_j = \lambda_{j+1}$. Evidemment, $j, j + 1 \not\in \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$, donc $\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_{j+1} = 0$. Alors $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j = 0$. La condition (11)(b) n'est pas vérifiée pour $d = 2$ puisque j est impair. Supposons la condition (11)(c) vérifiée pour $d = 2$. On doit alors prouver que $e_2 \geq 0$. Puisque j est impair, cette condition est que $p_2(j) = 1$. On a aussi $p_1(j) = 0$ puisque (11)(a) est vérifiée pour $d = 1$. D'après (7), on a aussi $p_1(j + 1) = 0$ et $p_2(j + 1) = 1$. Alors, d'après (4), ni j, ni $j + 1$ n'appartiennent à $\mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$. Donc $\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_{j+1} = 0$. Donc $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 0$.

Supposons plutôt j pair. Supposons d'abord que la condition (11)(a) soit vérifiée pour $d = 2$, auquel cas on doit vérifier que $e_2 = 0$. Pour j pair, la condition (11)(a) pour d est que $p_d(j) = 1$ et qu'il n'existe pas de $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $j = j_{max}(\mathfrak{I})$. Cette condition est vérifiée pour $d = 1, 2$. D'après (4), on a soit $j \in \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$, soit λ_j est impair et $\lambda_j \in \mathcal{J}''(\lambda)$. Dans le premier cas, la parité de j impose $j \in \mathfrak{J}^-$. Mais alors la relation (6) implique l'existence de d et de $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ tels que $j = j_{max}(\mathfrak{I})$, contrairement aux hypothèses. Supposons donc que λ_j soit impair et que $\lambda_j \in \mathcal{J}''(\lambda)$. D'après 2.7, $j_{max}(\lambda_j)$ est impair, donc $j < j_{max}(\lambda_j)$ et $\lambda_j = \lambda_{j+1}$. Evidemment, $j, j+1 \notin \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$, donc $\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_{j+1} = 0$. Alors $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j = 0$. Supposons maintenant vérifiée la condition (11)(b) pour $d = 2$. On doit prouver que $e_2 > 0$. La condition est que $p_2(j) = 1$ et qu'il existe $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_2$ tel que $j = j_{max}(\mathfrak{I})$. On a aussi $p_1(j) = 1$ puisque (11)(a) est vérifiée pour $d = 1$. D'après (6), on a $j \in \mathfrak{J}^-$. Cela entraîne $\mathfrak{r}_j = -1$. Puisque $j+1$ est impair, on a $j+1 \notin \mathfrak{J}^-$ donc $\mathfrak{r}_{j+1} \leq 0$. Alors $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j \geq \lambda_j - \lambda_{j+1} + 1 > 0$. Supposons enfin vérifiée la condition (11)(c) pour $d = 2$, autrement dit $p_2(j) = 0$. On doit vérifier que $e_2 \geq 0$. Puisque $p_1(j) = 1$, on a λ_j pair et $j \notin \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$ d'après (4). Le même raisonnement que dans le cas j impair s'applique et on conclut $e_2 \geq 0$.

On peut maintenant supposer que la condition (11)(a) n'est vérifiée pour aucun d. Supposons la condition (11)(b) vérifiée pour $d = 1$. On choisit pour e_1 le plus petit entier strictement positif vérifiant la relation (13). On a $e_1 = 1$ ou 2. La condition résultant de (11)(b) pour $d = 1$ est $e_1 > 0$, elle est vérifiée. On pose $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j - e_1$. Comme précédemment, il reste seulement à prouver que e_2 vérifie les conditions résultant de (11) pour $d = 2$. On a exclu la condition (11)(a). Supposons que la condition (11)(b) soit vérifiée pour $d = 2$. On doit montrer que $e_2 > 0$. Les conditions (11)(b) sont vérifiées pour $d = 1, 2$, c'est-à-dire que j est pair et qu'il existe $\mathfrak{I}_d \in \mathfrak{Int}_d$ de sorte que $j = j_{max}(\mathfrak{I}_d)$. Autrement dit, $p_d(j) = 1$ mais j et $j+1$ ne sont pas d-liés. D'après (6), on a $j \in \mathfrak{J}^-$, donc λ_j est pair. Si $\lambda_{j+1} = \lambda_j$, j et $j+1$ vérifient (1)(a) pour un d et sont d-liés contrairement à l'hypothèse. Donc $\lambda_j > \lambda_{j+1}$. Puisque $j \in \mathfrak{J}^-$, on a aussi $\mathfrak{r}_j = -1$. Le nombre $j+1$ est impair donc n'appartient pas à $\mathfrak{J}^-$, d'où $\mathfrak{r}_{j+1} \geq 0$. On voit alors que $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j - e_1$ est strictement positif sauf si les trois conditions suivantes sont vérifiées : $\lambda_j = \lambda_{j+1} + 1$, $\mathfrak{r}_{j+1} = 0$ et $e_1 = 2$. Supposons ces conditions vérifiées. Puisque $p_1(j) = 1$ et $e_1 = 2$, la condition (13) pour $d = 1$, qui est vérifiée par définition de e_1, implique $p_1(j+1) = 1$. Puisque $\lambda_j = \lambda_{j+1} + 1$, λ_{j+1} est impair. Puisque $\mathfrak{r}_{j+1} = 0$, la relation (8) implique que $p_2(j+1) = 1$. Alors, pour $d = 1, 2$, $j+1$ appartient à un élément $\mathfrak{I}'_d \in \mathfrak{Int}_d$. Puisque j et $j+1$ ne sont pas d-liés, on a forcément $j+1 = j_{min}(\mathfrak{I}'_d)$. D'après (5), cela entraîne $j+1 \in \mathfrak{J}^+$. Donc $\mathfrak{r}_{j+1} = 1$ contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction conclut. Supposons maintenant que la condition (11)(c) soit vérifiée pour $d = 2$. On doit montrer que $e_2 \geq 0$. On a toujours la condition (11)(b) pour $d = 1$, c'est-à-dire que j est pair, que $p_1(j) = 1$ mais que j et $j+1$ ne sont pas 1-liés. La condition (11)(c) pour $d = 2$ dit que $p_2(j) = 0$. Alors j et $j+1$ ne sont pas non plus 2-liés. D'autre part, la relation (4) entraîne que λ_j est pair et que $j \notin \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$. D'où $\mathfrak{r}_j = 0$. On ne peut pas avoir $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ sinon la relation (1)(a) serait vérifiée pour un d et j et $j+1$ seraient d-liés, ce qui n'est pas le cas. On n'a pas $j+1 \in \mathfrak{J}^-$ puisque $j+1$ est impair. Donc $\mathfrak{r}_{j+1} \geq 0$. On voit alors que $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j - e_1$ est positif ou nul sauf si les mêmes conditions que ci-dessus sont vérifiées : $\lambda_j = \lambda_{j+1} + 1$, $\mathfrak{r}_{j+1} = 0$ et $e_1 = 2$. Ces conditions sont exclues par le même raisonnement que ci-dessus. D'où $e_2 \geq 0$.

Il nous reste à traiter le cas où (11)(c) est vérifiée pour $d = 1, 2$. On choisit pour e_1 le plus petit entier positif ou nul vérifiant la relation (13). On a $e_1 = 0$ ou 1. La condition résultant de (11)(c) pour $d = 1$ est $e_1 \geq 0$, elle est vérifiée. On pose $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j - e_1$. Comme précédemment, il reste seulement à prouver que e_2 vérifie la condition résultant de (11)(c) pour $d = 2$, c'est-à-dire $e_2 \geq 0$.

Supposons d'abord j impair. Les conditions (11)(c) pour $d = 1, 2$ disent que $p_1(j) = p_2(j) = 1$. D'après (7), on a aussi $p_1(j+1) = p_2(j+1) = 1$. La relation (13) pour $d = 1$

implique $e_1 = 0$. Si ni j, ni $j+1$ n'appartiennent à $\mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$, on a $\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_{j+1} = 0$ et $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 0$. Si un seul des éléments j et $j+1$ appartiennent à $\mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$, on a par parité $j \in \mathfrak{J}^+$ et $j+1 \notin \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$, ou $j+1 \in \mathfrak{J}^-$ et $j \notin \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$. Alors $\mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j = -1$. Mais l'hypothèse $j \in \mathfrak{J}^+$ ou $j+1 \in \mathfrak{J}^-$ implique $\lambda_j > \lambda_{j+1}$. Alors $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} - 1 \geq 0$. Enfin supposons que j et $j+1$ appartiennent tous deux à $\mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$. La parité impose $j \in \mathfrak{J}^+$ et $j+1 \in \mathfrak{J}^-$. Alors $\mathfrak{r}_{j+1} - \mathfrak{r}_j = -2$. Mais les hypothèses $j \in \mathfrak{J}^+$ et $j+1 \in \mathfrak{J}^-$ imposent non seulement $\lambda_j > \lambda_{j+1}$ mais aussi que λ_j et λ_{j+1} sont pairs. Donc $\lambda_j \geq \lambda_{j+1} + 2$. Alors $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} - 2 \geq 0$.

Supposons maintenant j pair. Les conditions (11)(c) pour $d = 1, 2$ disent que $p_1(j) = p_2(j) = 0$. D'après (4), λ_j est impair donc $\mathfrak{r}_j = 0$. On n'a pas $j+1 \in \mathfrak{J}^-$ puisque $j+1$ est impair. Donc $\mathfrak{r}_{j+1} \geq 0$. On voit alors que $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{r}_{j+1} - e_1$ est positif ou nul sauf si les trois conditions suivantes sont vérifiées : $\lambda_j = \lambda_{j+1}$, $\mathfrak{r}_{j+1} = 0$ et $e_1 = 1$. Supposons ces conditions vérifiées. D'après (13) pour $d = 1$, on a $p_1(j+1) = 1$. Puisque $\lambda_j = \lambda_{j+1}$, λ_{j+1} est impair. L'égalité $\mathfrak{r}_{j+1} = 0$ et la relation (8) entraînent alors $p_2(j+1) = 1$. Pour $d = 1, 2$, $j+1$ appartient donc à un élément $\mathfrak{J}_d \in \tilde{\mathfrak{Jnt}}_d$. Puisque $p_d(j) = 0$, j et $j+1$ ne sont pas d-liés, donc $j+1 = j_{min}(\mathfrak{J}_d)$. Mais alors, (5) nous dit que $j+1$ appartient à $\mathfrak{J}^+$, donc $\mathfrak{r}_{j+1} = 1$ contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction conclut. Cela achève la preuve de l'existence de nos suites λ_1 et λ_2.

Fixons donc de telles suites λ_1 et λ_2. La condition (11) entraîne que ce sont des partitions, c'est-à-dire qu'elles sont décroissantes. Montrons que

(14) il existe des entiers positifs ou nuls n_1 et n_2 tels que $n_1 + n_2 = n$, que λ_1 appartienne à $\mathcal{P}^{symp,sp}(2n_1)$ et que λ_2 appartienne à $\mathcal{P}^{orth,sp}(2n_2)$.

Si les deux dernières conditions sont vérifiées, on a forcément $n_1 + n_2 = n$. En effet, la relation (9) implique que $S(\lambda_1) + S(\lambda_2) + S(\mathfrak{r}) = S(\lambda)$ et on a $S(\mathfrak{r}) = 0$. Pour prouver les deux dernières conditions, on doit prouver que, pour $d = 1, 2$ et $k \geq 1$, les termes $\lambda_{d,2k-1}$ et $\lambda_{d,2k}$ sont de même parité et que, quand cette parité est celle de d, on a $\lambda_{d,2k-1} = \lambda_{d,2k}$. La première condition résulte de (10) et (7). Si $\lambda_{d,2k-1} \equiv d \; mod \; 2\mathbb{Z}$, la condition (10) impose $p_d(2k-1) = 0$. Alors les conditions de (11)(a) sont vérifiées pour $j = 2k-1$, d'où $\lambda_{d,2k-1} = \lambda_{d,2k}$. Cela prouve (14).

Grâce à (14), on définit comme en 3.1 les ensembles d'intervalles $\tilde{Int}(\lambda_1)$, $\tilde{Int}(\lambda_2)$, les ensembles J^+ et J^- et la fonction ξ. Montrons que

(15) on a $\{J(\Delta); \Delta \in \tilde{Int}(\lambda_d)\} = \tilde{\mathfrak{Jnt}}_d$ pour $d = 1, 2$; on a $J^+ = \mathfrak{J}^+$, $J^- = \mathfrak{J}^-$ et $\xi = \mathfrak{r}$.

Soit $d = 1, 2$. La réunion des $J(\Delta)$ quand Δ décrit $\tilde{Int}(\lambda_d)$ est l'ensemble des $j \geq 1$ tels que $\lambda_{d,j}$ soit de bonne parité. D'après (10), c'est l'ensemble des $j \geq 1$ tels que $p_d(j) = 1$. Cet ensemble d'indices est donc découpé de deux façons en intervalles : les $J(\Delta)$ pour $\Delta \in \tilde{Int}(\lambda_d)$ et les $\mathfrak{J} \in \tilde{\mathfrak{Jnt}}_d$. Pour prouver que ces découpages coïncident, il suffit de prouver que les ensembles d'éléments maximaux de ces intervalles coïncident (en admettant ici que l'élément maximal d'un intervalle infini est ∞). C'est-à-dire qu'il suffit de prouver l'égalité

$$\{j_{max}(\Delta); \Delta \in \tilde{Int}(\lambda_d)\} = \{j_{max}(\mathfrak{J}); \mathfrak{J} \in \tilde{\mathfrak{Jnt}}_d\}.$$

L'infini intervient dans les deux ensembles pour $d = 1$ et n'intervient dans aucun d'eux pour $d = 2$ (d'après (2) pour l'ensemble de droite). On élimine ces termes. Pour $j \geq 1$, j n'intervient dans ces ensembles que si j est pair (d'après (3) pour celui de droite) et $\lambda_{d,j} \equiv d+1 \; mod \; 2\mathbb{Z}$ autrement dit $p_d(j) = 1$. Supposons ces conditions vérifiées. Alors j intervient dans l'ensemble de gauche si et seulement si $\lambda_{d,j} > \lambda_{d,j+1}$. Si j intervient dans l'ensemble de droite, la condition (11)(b) est vérifiée et l'inégalité précédente l'est aussi. Si j n'intervient pas dans l'ensemble de droite, la condition (11)(a) est vérifiée et l'inégalité précédente ne l'est pas. Cela démontre l'égalité de ces ensembles, d'où la première assertion de (15).

Par définition, J^+ est l'ensemble des $j \geq 1$ pour lesquels $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ sont de bonne parité et il existe $\Delta \in \tilde{Int}(\lambda_1) \cup \tilde{Int}(\lambda_2)$ tel que $j = j_{min}(\Delta)$. En utilisant ce que l'on vient de démontrer, il suffit d'appliquer (5) pour conclure $J^+ = \mathfrak{J}^+$. On prouve de même que $J^- = \mathfrak{J}^-$. Alors $\xi = \mathfrak{x}$ par définition de ces fonctions. Cela prouve (15).

On a $Ind(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2 + \xi$ par définition, d'où $Ind(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda$ d'après (15) et (9). Montrons que

(16) λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ.

Il s'agit de prouver que tout intervalle relatif est réduit à un seul élément. Soit D un intervalle relatif. Si $J(D)$ est réduit à un seul élément, D aussi. Supposons que $J(D)$ a au moins deux éléments. Par définition, il existe un unique $d = 1, 2$ pour lequel il existe $\Delta_d \in Int(\lambda_d)$ de sorte que $J(D) \subset J(\Delta_d)$. Pour fixer la notation, on suppose $d = 1$. Cela entraîne : pour $j, j+1 \in J(D)$, il n'existe pas de $\Delta_2 \in Int(\lambda_2)$ tel que $\{j, j+1\} \subset J(\Delta_2)$. En effet, les extrémités $j_{min}(D)$ et $j_{max}(D)$ sont par définition des éléments consécutifs de l'ensemble $\mathcal{J}$ de 3.1. Un Δ_2 comme ci-dessus vérifierait donc $j_{min}(\Delta_2) \leq j_{min}(D)$ et $j_{max}(D) \leq j_{max}(\Delta_2)$, donc $J(D) \subset J(\Delta_2)$, ce qui est exclu. On traduit d'après (15) : il existe $\mathfrak{J}_1 \in \tilde{\mathfrak{Int}}_1$ tel que $J(D) \subset \mathfrak{J}_1$ et, pour $j, j+1 \in J(D)$, j et $j+1$ ne sont pas 2-liés. Soient $j, j+1 \in J(D)$. Les indices $j, j+1$ n'étant pas 2-liés, ils ne vérifient pas les conditions (1)(b), (1)(c) et (1)(d) (cette dernière étant de toute façon exclue puisque λ_j et λ_{j+1} sont pairs par définition des intervalles relatifs). Puisque j et $j+1$ sont 1-liés, ils vérifient forcément la condition (1)(a) pour $d = 1$. Donc $\lambda_j = \lambda_{j+1}$. Cela étant vrai pour tout couple $\{j, j+1\} \subset J(D)$, λ_j est constant pour $j \in J(D)$. Autrement dit, D est réduit à un seul élément.

Montrons que

(17) $\chi_{\lambda_1,\lambda_2} = \chi$.

On a $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$ par définition et $\chi(0) = 0$ par hypothèse. Soit $i \in Jord^{bp}(\lambda)$. Si $mult_\lambda(i) = 1$, $\chi_{\lambda_1;\lambda_2}(i) = 0$ par définition et $\chi(i) = 0$ par hypothèse. Supposons $mult_\lambda(i) \geq 2$. Comme dans la preuve de (16), il existe un unique $d = 1, 2$ de sorte qu'il existe $\Delta_d \in \tilde{Int}(\lambda_d)$ tel que $J(i) \subset J(\Delta_d)$. On a $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(i) = d+1$ par définition. Toujours comme dans la preuve de (16), pour $j, j+1 \in J(i)$, la condition (1)(a) est vérifiée pour ce d. Alors $\chi(i) = d + 1$. D'où (17).

Montrons que

(18) $\zeta(\lambda_1) + \zeta(\lambda_2) = \zeta(\lambda) + \xi$.

On a défini en 3.1 les ensembles $P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ et $P^-_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ et la suite $\zeta_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. Puisque λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ, on a les égalités $P^+_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) = P^+(\lambda)$, $P^-_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) = P^-(\lambda)$. Donc $\zeta_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) = \zeta(\lambda)$. Alors le lemme 3.1 implique (18).

L'égalité (18) entraîne

$$\lambda_1 + \zeta(\lambda_1) + \lambda_2 + \zeta(\lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2 + \xi + \zeta(\lambda) = \lambda + \zeta(\lambda).$$

Le lemme 2.7 et l'assertion 2.7(4) transforment cette égalité en

$${}^t d(\lambda_1) + {}^t d(\lambda_2) = {}^t d(\lambda),$$

d'où $d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) = d(\lambda)$. Cela achève la démonstration. $\square$

3.3 Les fonctions τ^ζ, δ^ζ

Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$ et soient $\lambda_1 \in \mathcal{P}^{symp,sp}(2n_1)$ et $\lambda_2 \in \mathcal{P}^{orth,sp}(2n_2)$. Soit λ l'induite endoscopique de λ_1 et λ_2. On considère de plus des éléments $\iota_1 = (\tau_1, \delta_1) \in \mathcal{F}am(\lambda_1)$ et $\iota_2 = (\tau_2, \delta_2) \in \mathcal{F}am(\lambda_2)$. On pose $r_1 = r(\tau_1, \delta_1)$, $r_2 = r(\tau_2, \delta_2)$.

Pour $d = 1, 2$ et $\Delta \in \tilde{Int}(\lambda_d)$, on note Δ^+ le plus petit $\Delta' \in Int(\lambda_d)$ tel que $\Delta' > \Delta$, pour peu qu'il existe un tel Δ' (sinon, Δ^+ n'existe pas). Pour $D \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, on définit D^+ de façon similaire.

Pour $D \in Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ et pour $d = 1, 2$, considérons l'ensemble des $\Delta \in \tilde{Int}(\lambda_d)$ tels que $j_{max}(D) \leq j_{max}(\Delta)$ (ici, on pose par convention $j_{max}(\Delta_{1,min}) = \infty$ où $\Delta_{1,min}$ est le plus petit élément de $\tilde{Int}(\lambda_1)$). Si cet ensemble est non vide (ce qui est le cas si $d = 1$ par la convention que l'on vient de poser), on note $\Delta_d(D)$ son plus grand élément. On pose $\Delta_1(D_{min}) = \Delta_{1,min}$ tandis que $\Delta_2(D_{min})$ n'existe pas. Si $\Delta_2(D)$ n'existe pas et si $Int(\lambda_2)$ n'est pas vide, on note $\Delta_2(D)^+$ le plus petit élément de $Int(\lambda_2)$ (si $Int(\lambda_2)$ est vide, $\Delta_2(D)$ et $\Delta_2(D)^+$ n'existent pas).

Pour $\zeta = \pm$, on définit une fonction $\delta^\zeta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)}$ par les formules ci-dessous. Soit $D \in Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. On pose $\Delta_d = \Delta_d(D)$ pour $d = 1, 2$. Ce terme existe toujours dans chaque cas ci-dessous. Par contre, Δ_d^+ n'existe pas toujours. Dans ce cas, on considère que $\delta_d(\Delta_d^+) = 0$. On écrit les formules comme des égalités, en fait, il s'agit de congruences modulo $2\mathbb{Z}$. On pose

si $j_{max}(D) \in J^+$, $\delta^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + r_1 + r_2 + 1$, $\delta^-(D) = \delta^+(D) + 1$;
si $j_{max}(D) \in J^-$, $\delta^+(D) = \delta^-(D) = \delta_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2)$;
si $j_{max}(D) \notin J^+ \cup J^-$ et $J(D) \subset J(\Delta_1)$, $\delta^+(D) = \delta^-(D) = \delta_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+)$;
si $j_{max}(D) \notin J^+ \cup J^-$ et $J(D) \subset J(\Delta_2)$, $\delta^+(D) = \delta^-(D) = \delta_1(\Delta_1^+) + \delta_2(\Delta_2)$.

Avec les mêmes notations, on définit une fonction $\tau^\zeta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)}$ par

si $|J(D)| \geq 2$ et $J(D) \subset J(\Delta_1)$, $\tau^+(D) = \tau^-(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + r_2$;
si $|J(D)| \geq 2$ et $J(D) \subset J(\Delta_2)$, $\tau^+(D) = \delta_1(\Delta_1^+) + \tau_2(\Delta_2) + r_1$, $\tau^-(D) = \tau^+(D) + 1$;
si $|J(D)| = 1$ et $j_{min}(D) = j_{max}(D) \in J^+$, $\tau^+(D) = \tau^-(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + r_2$;
si $|J(D)| = 1$ et $j_{min}(D) = j_{max}(D) \in J^-$, $\tau^+(D) = \tau^-(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2) + r_2$.

Tous ces cas sont exclusifs l'un de l'autre. On a évidemment

(1) $\delta^-(D) = \delta^+(D) + 1$ si et seulement si $j_{max}(D) \in J^+$; $\tau^-(D) = \tau^+(D) + 1$ si et seulement si $|J(D)| \geq 2$ et $J(D) \subset J(\Delta_2)$.

On a aussi

(2) $\tau^+(D_{min}) = \tau^-(D_{min}) = 0$.

En effet, $J(D_{min})$ est infini. Il ne peut qu'être contenu dans $J(\Delta_{1,min})$. Donc $\tau^+(D_{min}) = \tau^-(D_{min}) = \tau_1(\Delta_1(D_{min})) + \delta_2(\Delta_2(D_{min})^+) + r_2$. On a $\Delta_1(D_{min}) = \Delta_{1,min}$ et $\Delta_2(D_{min})$ n'existe pas. On a $\tau_1(\Delta_{1,min}) = 0$. D'après 2.3(2) et nos conventions, $\delta_2(\Delta_2(D_{min})^+) = r_2$. D'où (2).

Pour $\zeta = \pm$, posons

$$C^\zeta = \sum_{D \in Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)} (1 - (-1)^{\tau^\zeta(D)})((-1)^{\delta^\zeta(D)} - (-1)^{\delta^\zeta(D^+)}).$$

Ici encore, on considère que $\delta^\zeta(D^+) = 1$ si D^+ n'existe pas. On a

$$(3) \qquad C^\zeta = \begin{cases} 2(r_1 + \zeta r_2), & si\ r_1 + r_2 \text{ est pair,} \\ -2(r_1 + \zeta r_2 + 1), & si\ r_1 + r_2 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cela résulte de [6] XI.24, à ceci près que les hypothèses de cette référence étaient plus restrictives que les nôtres. On renvoie pour ce problème aux explications que l'on donnera après la proposition du paragraphe suivant.

3.4 Le résultat de [6]

Les données sont les mêmes que dans le paragraphe précédent. Pour $d = 1, 2$, le couple $\iota_d = (\tau_d, \delta_d)$ provient d'un symbole Λ_d dans la famille de λ_d. On note (r_d, ρ_d) l'élément de $\Sigma_{n_1,imp}$ si $d = 1$, $\Sigma_{n_2,pair}$ si $d = 2$, tel que $symb(r_d, \rho_d) = \Lambda_d$. On pose $N_1 = n_1 - r_1^2 - r_1$, $N_2 = n_2 - r_2^2$. On fixe un élément $\zeta \in \{\pm 1\}$, que l'on considérera souvent comme un simple signe $\pm$. Si $\zeta = 1$, on pose $h^+ = r_1 + |r_2|$, $h^- = sup(r_1 - |r_2|, |r_2| - r_1 - 1)$. Si $\zeta = -1$, on pose $h^+ = sup(r_1 - |r_2|, |r_2| - r_1 - 1)$, $h^- = r_1 + |r_2|$. On vérifie que $h^+(h^+ + 1)/2 + h^-(h^- + 1)/2 = r_1^2 + r_1 + r_2^2$. On fixe des entiers $n^+, n^- \in \mathbb{N}$ tels que $n^+ + n^- = n$, $n^+ \geq h^+(h^+ + 1)/2$, $n^- \geq h^-(h^- + 1)/2$ et on pose $N^+ = n^+ - h^+(h^+ + 1)/2$, $N^- = n^- - h^-(h^- + 1)/2$. On a $N^+ + N^- = N_1 + N_2$. On définit un quadruplet d'entiers $\mathbf{a} = (a_1^+, a_1^-, a_2^+, a_2^-)$ par les formules suivantes

$\mathbf{a} = (0, 0, 0, 1)$ si $\zeta = 1$ et $r_1 \geq |r_2|$;

$\mathbf{a} = (0, 0, 1, 0)$ si $\zeta = -1$ et $r_1 \geq |r_2|$;

$\mathbf{a} = (0, 1, 0, 0)$ si $\zeta = 1$ et $r_1 < |r_2|$;

$\mathbf{a} = (1, 0, 0, 0)$ si $\zeta = -1$ et $r_1 < |r_2|$.

Avec les mêmes notations qu'en 1.2, on définit une représentation $\Pi^\zeta(\iota_1, \iota_2)$ de $W_{N^+} \times W_{N^-}$ par la formule

$$\Pi^\zeta(\iota_1, \iota_2) = \oplus_{\mathbf{N} \in \mathcal{N}} ind_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N^+} \times W_{N^-}} (sgn_{CD}^{\mathbf{a}} \otimes res_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N_1} \times W_{N_2}} (\rho_1 \otimes \rho_2)).$$

On note $\mathcal{I}^\zeta(\iota_1, \iota_2)$ l'ensemble des quadruplets $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2n^+) \times \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2n^-)$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) $k_{\lambda^+,\epsilon} = h^+$, $k_{\lambda^-,\epsilon^-} = h^-$;

(2) la représentation $\rho_{\lambda^+,\epsilon^+} \otimes \rho_{\lambda^-,\epsilon^-}$ de $W_{N^+} \times W_{N^-}$ intervient dans $\Pi^\zeta(\iota_1, \iota_2)$ avec une multiplicité strictement positive.

Pour poser la définition suivante, on a besoin d'introduire deux notations. Pour $D \in Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, notons $i_{min}(D)$ le plus petit élément de D. On a $i_{min}(D) \geq 1$ puisque $D \neq D_{min}$. Pour toute partition μ, on pose $mult_\mu(\geq D) = \sum_{i \in \mathbb{N}, i \geq i_{min}(D)} mult_\mu(i)$. D'autre part, on pose $\nu = 1$ si $r_2 \geq 0$, $\nu = -1$ si $r_2 < 0$.

On note $\mathcal{I}^{\zeta,max}(\iota_1, \iota_2)$ l'ensemble des quadruplets $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2n^+) \times \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2n^-)$ vérifiant les conditions suivantes :

(3) $\lambda^+ \cup \lambda^- = \lambda$;

(4) pour tout $D \in Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, on a

$$mult_{\lambda^+}(\geq D) \equiv \delta^{\zeta\nu}(D) \mod 2\mathbb{Z}, \text{ et } mult_{\lambda^-}(\geq D) \equiv \delta^{-\zeta\nu}(D) \mod 2\mathbb{Z};$$

(5) pour tout $D \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ et tout $i \in D$ tel que $i \neq 0$ et $mult_{\lambda^+}(i) > 0$, resp. $mult_{\lambda^-}(i) > 0$, on a

$$\epsilon_i^+ = (-1)^{\tau^{\zeta\nu}(D)}, \text{ resp. } \epsilon_i^- = (-1)^{\tau^{-\zeta\nu}(D)}.$$

Dans ces formules, on a évidemment identifié les signes $\pm$ des définitions de τ^+, τ^- etc... à des éléments de $\{\pm 1\}$. On a montré en [6] XI.29 remarque 4 que, sous l'hypothèse (3), les deux congruences de (4) étaient équivalentes.

Proposition. *(i) Soit* $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) \in \mathcal{I}^\zeta(\iota_1, \iota_2)$. *Alors* $\lambda^+ \cup \lambda^- \leq \lambda$.

(ii) L'ensemble $\mathcal{I}^{\zeta,max}(\iota_1, \iota_2)$ *est égal au sous-ensemble des* $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) \in \mathcal{I}^\zeta(\iota_1, \iota_2)$ *tels que* $\lambda^+ \cup \lambda^- = \lambda$. *Pour* $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) \in \mathcal{I}^{\zeta,max}(\iota_1, \iota_2)$, *la représentation* $\rho_{\lambda^+,\epsilon^+} \otimes \rho_{\lambda^-,\epsilon^-}$ *intervient avec multiplicité* 1 *dans* $\Pi^\zeta(\iota_1, \iota_2)$.

Cela résulte de [6] propositions XI.28 et XI.29, ainsi qu'on l'a expliqué dans la preuve de la proposition XII.7 de cette référence (voir aussi [9] propositions 1.12 et 1.13). A ceci près qu'alors, les hypothèses sur ι_2 étaient restrictives : on supposait que r_2 était pair et positif ou nul; dans le cas $r_2=0$, on supposait que le symbole (X,Y) correspondant à ι_2 vérifiait $X\geq Y$ pour l'ordre lexicographique. En fait, cette dernière hypothèse était utilisée dans d'autres passages de [6] mais pas dans les démonstrations des propositions utilisées. Pour traiter le cas où r_2 est impair et positif, il n'y a pas d'autre méthode que de reprendre la démonstration. C'est ce que l'on a fait mais elle est trop longue pour la récrire. Le cas où $r_2<0$ se déduit du cas $r_2>0$ de la façon suivante. On suppose donc $r_2<0$. On a dit que ι_2 correspondait à un symbole $\Lambda_2=(X_2,Y_2)$, puis à un couple (r_2,ρ_2). Inversement, on voit que $(-r_2,\rho_2)$ correspond au symbole $\Lambda'_2=(Y_2,X_2)$, puis à un élément $\iota'_2\in\mathcal{F}am(\lambda_2)$. Quand on remplace ι_2 par ι'_2 dans les constructions ci-dessus, la représentation $\Pi^\zeta(\iota_1,\iota_2)$ ne change pas. Donc la proposition ci-dessus étant vérifiée pour ι'_2, elle le restera pourvu que l'on ait les égalités $\mathcal{I}^\zeta(\iota_1,\iota_2)=\mathcal{I}^\zeta(\iota_1,\iota'_2)$ et $\mathcal{I}^{\zeta,max}(\iota_1,\iota_2)=\mathcal{I}^{\zeta,max}(\iota_1,\iota'_2)$. La première égalité est claire d'après (1) et (2). La deuxième ne l'est pas car les fonctions $\tau^\pm$ et $\delta^\pm$ dépendent de ι_2. Mais, puisqu'on passe de Λ_2 à Λ'_2 en permutant X_2 et Y_2, on voit sur les formules de 2.2 que changer ι_2 en ι'_2 ne change pas δ_2 et remplace τ_2 par τ_2+1. On voit ensuite sur les formules de 3.3 que cela échange les couples (τ^+,δ^+) et (τ^-,δ^-). Mais alors, parce qu'il figure dans les conditions (4) et (5) un signe terme ν, qui vaut 1 pour ι'_2 et -1 pour ι_2, on voit que ces conditions ne changent pas quand on remplace ι_2 par ι'_2. C'est ce qu'on voulait.

3.5 Réciproque de la construction des fonctions τ^ζ et δ^ζ

Soient $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ tels que $n_1+n_2=n$ et soient $\lambda_1\in\mathcal{P}^{symp,sp}(2n_1)$ et $\lambda_2\in\mathcal{P}^{orth,sp}(2n_2)$. Notons λ l'induite endoscopique de λ_1 et λ_2. Pour $\iota_1=(\tau_1,\delta_1)\in\mathcal{F}am(\lambda_1)$ et $\iota_2=(\tau_2,\delta_2)\in\mathcal{F}am(\lambda_2)$, on a construit en 3.3 des fonctions τ^ζ et δ^ζ pour $\zeta=\pm$. Dans ce paragraphe, il convient de les noter plus précisément $\tau^\zeta_{\iota_1,\iota_2}$ et $\delta^\zeta_{\iota_1,\iota_2}$. On note aussi $C^\zeta_{\iota_1,\iota_2}$ la somme définie en 3.3.

Soient $r_1\in\mathbb{N}$, $r_2\in\mathbb{Z}$ et, pour $\zeta=\pm$, soient $\tau^\zeta\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)}$ et $\delta^\zeta\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)}$. On pose

$$C^\zeta=\sum_{D\in Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)}(1-(-1)^{\tau^\zeta(D)})((-1)^{\delta^\zeta(D)}-(-1)^{\delta^\zeta(D^+)}).$$

On suppose que ces données vérifient les conditions

(1) $\delta^-(D)=\delta^+(D)+1$ si et seulement si $j_{max}(D)\in J^+$; $\tau^-(\delta)=\tau^+(D)+1$ si et seulement si $|J(D)|\geq 2$ et $J(D)\subset J(\Delta_2(D))$;

(2) $\tau^+(D_{min})=\tau^-(D_{min})=0$;

$$(3)\qquad C^\zeta=\begin{cases}2(r_1+\zeta r_2), & si\ r_1+r_2 \text{ est pair,}\\ -2(r_1+\zeta r_2+1), & si\ r_1+r_2 \text{ est impair.}\end{cases}$$

Lemme. *Sous ces hypothèses, il existe d'uniques $\iota_1=(\tau_1,\delta_1)\in\mathcal{F}am(\lambda_1)$ et $\iota_2=(\tau_2,\delta_2)\in\mathcal{F}am(\lambda_2)$ tels que, pour $\zeta=\pm$, on ait les égalités $\tau^\zeta=\tau^\zeta_{\iota_1,\iota_2}$ et $\delta^\zeta=\delta^\zeta_{\iota_1,\iota_2}$. De plus, on a $r_1=r(\tau_1,\delta_1)$ et $r_2=r(\tau_2,\delta_2)$.*

Preuve. S'il existe (τ_1,δ_1) et (τ_2,δ_2) vérifiant la première assertion de l'énoncé, les fonctions τ^ζ et δ^ζ sont données par les formules du paragraphe 3.3, où l'on remplace r_1 et r_2 par $r'_1=r(\tau_1,\delta_1)$ et $r'_2=r(\tau_2,\delta_2)$. Remarquons que ces formules ne dépendent que des images de r'_1 et r'_2 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note symboliquement $(X_{r'_1,r'_2})$ ces formules.

Commençons par prouver que, pour deux éléments donnés $r'_1,r'_2\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il existe d'uniques $(\tau_1,\delta_1)\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\tilde{Int}(\lambda_1)}\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda_1)}$, $(\tau_2,\delta_2)\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\tilde{Int}(\lambda_2)}\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda_2)}$ telles que les formules $(X_{r'_1,r'_2})$ soient vérifiées. Remarquons que l'on peut considérer uniquement les formules exprimant τ^+ et δ^+ : celles concernant τ^- et δ^- s'en déduisent d'après l'hypothèse (1).

Pour $D\in\tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ et pour $d=1,2$, notons $\mathfrak{T}_d(\geq D)$ l'ensemble des $\Delta_d\in\tilde{Int}(\lambda_d)$ tels que $j_{min}(\Delta_d)\leq j_{max}(D)$ (en convenant que $j_{max}(D_{min})=\infty$) et notons $\mathfrak{D}_d(\geq D)$ l'ensemble des $\Delta_d\in Int(\lambda_d)$ tels que $j_{max}(\Delta_d)\leq j_{max}(D)$. Remarquons que $\mathfrak{T}_d(\geq D_{min})=\tilde{Int}(\lambda_d)$ et $\mathfrak{D}_d(\geq D_{min})=Int(\lambda_d)$. Pour deux intervalles relatifs $D>D'$, il est clair que $\mathfrak{T}_d(\geq D)$ est inclus dans $\mathfrak{T}_d(\geq D')$ et que $\mathfrak{D}_d(\geq D)$ est inclus dans $\mathfrak{D}_d(\geq D')$. On pose

$$\mathfrak{T}_d(D)=\mathfrak{T}_d(\geq D)-\mathfrak{T}_d(\geq D^+),\ \mathfrak{D}_d(D)=\mathfrak{D}_d(\geq D)-\mathfrak{D}_d(\geq D^+),$$

avec la convention $\mathfrak{T}_d(\geq D^+)=\mathfrak{D}_d(\geq D^+)=\emptyset$ si D^+ n'existe pas, c'est-à-dire si D est l'intervalle relatif maximal. Cette définition entraîne :

(4) pour deux intervalles relatifs $D\neq D'$, on a $\mathfrak{T}_d(D)\cap\mathfrak{T}_d(D')=\emptyset$ et $\mathfrak{D}_d(D)\cap\mathfrak{D}_d(D')=\emptyset$.

Montrons que

(5) $\mathfrak{T}_d(D)$ est l'ensemble des $\Delta_d\in\tilde{Int}(\lambda_d)$ tels que $j_{min}(\Delta_d)\in\{j_{min}(D),j_{max}(D)\}$ et $\mathfrak{D}_d(D)$ est l'ensemble des $\Delta_d\in Int(\lambda_d)$ tels que $j_{max}(\Delta_d)\in\{j_{min}(D),j_{max}(D)\}$; ces ensembles ont au plus un élément.

Soit $\Delta_d\in\tilde{Int}(\lambda_d)$, supposons $j_{min}(\Delta_d)\in\{j_{min}(D),j_{max}(D)\}$. Alors $j_{min}(\Delta_d)\leq j_{max}(D)$ et Δ_d appartient à $\mathfrak{T}_d(\geq D)$. Si D est l'intervalle relatif maximal, cela entraîne $\Delta_d\in\mathfrak{T}_d(D)$. Sinon, on a $j_{max}(D^+)<j_{min}(D)\leq j_{min}(\Delta_d)$ donc Δ_d n'appartient pas à $\mathfrak{T}_d(\geq D^+)$. D'où $\Delta_d\in\mathfrak{T}_d(D)$. Réciproquement, supposons $\Delta_d\in\mathfrak{T}_d(D)$. L'entier $j_{min}(\Delta_d)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{J}$ de 3.1. D'après 3.1(3), il existe $D'\in\tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ tel que $j_{min}(\Delta_d)\in\{j_{min}(D'),j_{max}(D')\}$. D'après ce que l'on vient de prouver, on a $\Delta_d\in\mathfrak{T}_d(D')$. Alors (4) entraîne $D'=D$, donc $j_{min}(\Delta_d)\in\{j_{min}(D),j_{max}(D)\}$. Cela prouve la première assertion de (4). Supposons encore que $\Delta_d\in\mathfrak{T}_d(D)$ et considérons un intervalle $\Delta'_d\in\tilde{Int}(\lambda_d)$ distinct de Δ_d. Si $\Delta'_d>\Delta_d$, on a $j_{max}(\Delta'_d)<j_{min}(\Delta_d)\leq j_{max}(D)$. Le nombre $j_{max}(\Delta'_d)$ appartient à $\mathcal{J}$. Par définition des intervalles relatifs, $j_{min}(D)$ et $j_{max}(D)$ sont soit égaux, soit des éléments consécutifs de $\mathcal{J}$. Cela entraîne en tout cas l'inégalité $j_{max}(\Delta'_d)\leq j_{min}(D)$. Puisque $j_{min}(\Delta'_d)<j_{max}(\Delta'_d)$, on a donc $j_{min}(\Delta'_d)\not\in\{j_{min}(D),j_{max}(D)\}$, d'où $\Delta'_d\not\in\mathfrak{T}_d(D)$. Si maintenant $\Delta'_d<\Delta_d$, on a $j_{min}(D)\leq j_{min}(\Delta_d)<j_{max}(\Delta_d)$. Comme ci-dessus, on en déduit $j_{max}(D)\leq j_{max}(\Delta_d)$, puis $j_{max}(D)<j_{min}(\Delta'_d)$ et on conclut $\Delta'_d\not\in\mathfrak{T}_d(\geq D)$. Donc $\mathfrak{T}_d(D)$ a au plus un élément. Les assertions concernant $\mathfrak{D}_d(D)$ se démontrent de la même façon. Cela prouve (5).

On va montrer que, pour tout intervalle relatif D les formules $(X_{r'_1,r'_2})$ exprimant $\tau^+(D)$ et $\delta^+(D)$, d'une part ne font intervenir des $\tau_d(\Delta_d)$ que pour des $\Delta_d\in\mathfrak{T}_d(\geq D)$ et des $\delta_d(\Delta_d)$ que pour des $\Delta_d\in\mathfrak{D}_d(\geq D)$, d'autre part que, quand $\mathfrak{T}_d(D)$, resp. $\mathfrak{D}_d(D)$, est non vide, elles font intervenir $\tau_d(\Delta_d)$, resp. $\delta_d(\Delta_d)$, pour l'unique élément Δ_d de cet ensemble. On étudie les différents cas possibles, pour $D\in Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$. On suppose d'abord $D\neq D_{min}$. On pose simplement $\Delta_d=\Delta_d(D)$.

(a) Supposons que $|J(D)| = 1$ et que $j_{min}(D) = j_{max}(D) \in J^+$. Dans ce cas, on a $j_{max}(D) = j_{min}(\Delta_1) = j_{min}(\Delta_2)$. D'après (5), on a $\mathfrak{T}_1(D) = \{\Delta_1\}$, $\mathfrak{T}_2(D) = \{\Delta_2\}$. Si $\Delta'_1 \in \mathfrak{D}_1(D)$, on a $j_{max}(D) = j_{min}(D) \in J(\Delta'_1)$, donc $J(\Delta'_1) \cap J(\Delta_1) \neq \emptyset$, donc $\Delta'_1 = \Delta_1$. Or $j_{max}(\Delta_1) > j_{min}(\Delta_1) = j_{max}(D)$, donc $\Delta_1 \notin \mathfrak{D}_1(D)$. Donc $\mathfrak{D}_1(D) = \emptyset$ et, de même, $\mathfrak{D}_2(D) = \emptyset$. Par ailleurs, si Δ_2^+ existe, on a $j_{max}(\Delta_2^+) < j_{min}(\Delta_2) = j_{max}(D)$, donc $\Delta_2^+ \in \mathfrak{D}_2(\geq D)$. Enfin, les formules dans notre cas sont

$$\delta^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + r'_1 + r'_2 + 1,$$

$$\tau^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + r'_2.$$

On voit que les propriétés requises sont vérifiées.

(b) Supposons que $|J(D)| = 1$ et que $j_{min}(D) = j_{max}(D) \in J^-$. Ce cas est similaire au précédent. On a cette fois $j_{max}(D) = j_{max}(\Delta_1) = j_{max}(\Delta_2)$. On a $\mathfrak{T}_d(D) = \emptyset$ pour $d = 1, 2$, $\mathfrak{D}_1(D) = \{\Delta_1\}$, $\mathfrak{D}_2(D) = \{\Delta_2\}$ et $\Delta_1 \in \mathfrak{T}_1(\geq D)$. Les formules sont

$$\delta^+(D) = \delta_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2),$$

$$\tau^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2) + r'_2.$$

Les propriétés requises sont vérifiées.

(c) Supposons que $|J(D)| \geq 2$, que $J(D) \subset J(\Delta_1)$ et que $j_{min}(D)$ et $j_{max}(D)$ soient impairs. Puisque ces termes appartiennent à l'ensemble $\mathcal{J}$, l'imparité impose qu'ils sont de la forme $j_{min}(D) = j_{min}(\Delta'_{d'})$ et $j_{max}(D) = j_{min}(\Delta''_{d''})$ pour des entiers $d', d'' = 1, 2$ et des intervalles $\Delta'_{d'} \in \tilde{Int}(\lambda_{d'})$ et $\Delta''_{d''} \in \tilde{Int}(\lambda_{d''})$. Si $d' = 2$, puisque $j_{min}(D)$ et $j_{max}(D)$ sont des éléments consécutifs de $\mathcal{J}$, on a $j_{max}(D) \leq j_{max}(\Delta'_2)$, d'où $J(D) \subset J(\Delta'_2)$, ce qui est interdit par définition des intervalles et par l'hypothèse $J(D) \subset J(\Delta_1)$. Donc $d' = 1$ et forcément $\Delta'_1 = \Delta_1$, c'est-à-dire $j_{min}(D) = j_{min}(\Delta_1)$. Si $d'' = 1$, on a $J(\Delta''_1) \cap J(\Delta_1) \neq \emptyset$ donc $\Delta'_1 = \Delta_1$. Mais $j_{min}(\Delta_1) \leq j_{min}(D)$ par hypothèse, donc $j_{min}(\Delta_1)$ ne peut pas être égal à $j_{max}(D)$. Donc $d'' = 2$ et forcément $\Delta'_2 = \Delta_2$. C'est-à-dire $j_{max}(D) = j_{min}(\Delta_2)$. Alors $\mathfrak{T}_1(D) = \{\Delta_1\}$, $\mathfrak{T}_2(D) = \{\Delta_2\}$. Pour $d = 1, 2$ et $\Delta'_d \in Int(\lambda_d)$, on a $j_{max}(\Delta'_d) \neq j_{min}(D)$, $j_{max}(\Delta'_d) \neq j_{max}(D)$ par comparaison des parités. D'après (5), cela entraîne $\Delta'_d \notin \mathfrak{D}_d(D)$. Donc $\mathfrak{D}_1(D) = \mathfrak{D}_2(D) = \emptyset$. Si Δ_2^+ existe, on a $j_{max}(\Delta_2^+) < j_{min}(\Delta_2) = j_{max}(D)$, d'où $\Delta_2^+ \in \mathfrak{D}_2(\geq D)$. Enfin, l'égalité $j_{max}(D) = j_{min}(\Delta_2)$ et la relation $j_{max}(D) \in J(\Delta_1)$ entraînent $j_{max}(D) \in J^+$. Alors

$$\delta^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + r'_1 + r'_2 + 1,$$

$$\tau^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + r'_2.$$

Les propriétés requises sont vérifiées.

(d) Supposons que $|J(D)| \geq 2$, que $J(D) \subset J(\Delta_1)$, que $j_{min}(D)$ soit pair et que $j_{max}(D)$ soit impair. Comme en (c), on a $j_{max}(D) = j_{min}(\Delta_2)$. On a $j_{min}(D) = j_{max}(\Delta'_d)$ pour un $d = 1, 2$ et un $\Delta'_d \in Int(\lambda_d)$. Si $d = 1$, on a $J(\Delta'_1) \cap J(\Delta_1) \neq \emptyset$ donc $\Delta'_1 = \Delta_1$. Mais c'est impossible puisque $j_{max}(\Delta_1) \geq j_{max}(D) > j_{min}(D)$. Donc $d = 2$ et forcément $\Delta'_2 = \Delta_2^+$ (ce raisonnement montre que Δ_2^+ existe). D'où $j_{min}(D) = j_{max}(\Delta_2^+)$. On voit que $\mathfrak{T}_2(D) = \{\Delta_2\}$ et $\mathfrak{D}_2(D) = \{\Delta_2^+\}$. Pour $\Delta'_1 \in \tilde{Int}(\lambda_1)$, on ne peut avoir $j_{min}(\Delta'_1) \in J(D)$ ou $j_{max}(\Delta'_1) \in J(D)$ que si $\Delta'_1 = \Delta_1$. On sait que $j_{min}(\Delta_1) \leq j_{min}(D)$ et $j_{max}(D) \leq j_{max}(\Delta_1)$. Par comparaison des parités, ces inégalités sont strictes. Donc $j_{min}(\Delta_1)$ et $j_{max}(\Delta_1)$ n'appartiennent pas à $J(D)$ et, grâce à (5), on conclut $\mathfrak{T}_1(D) =$

$\mathfrak{D}_1(D) = \emptyset$. Enfin, l'inégalité $j_{min}(\Delta_1) \leq j_{max}(D)$ montre que $\Delta_1 \in \mathfrak{T}_1(\geq D)$. On a les mêmes formules que dans le cas (c) :

$$\delta^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + r'_1 + r'_2 + 1,$$

$$\tau^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + r'_2.$$

Les propriétés requises sont vérifiées.

(e) Supposons que $|J(D)| \geq 2$, que $J(D) \subset J(\Delta_1)$, que $j_{min}(D)$ soit impair et que $j_{max}(D)$ soit pair. Comme en (c), on a $j_{min}(D) = j_{min}(\Delta_1)$. Un raisonnement similaire à ceux ci-dessus montre que $j_{max}(D) = j_{max}(\Delta_1)$. Donc $\mathfrak{T}_1(D) = \mathfrak{D}_1(D) = \{\Delta_1\}$. Si Δ_2, resp. Δ_2^+, existe, on a a forcément $j_{max}(D) \leq j_{min}(\Delta_2)$ et $j_{max}(\Delta_2^+) \leq j_{min}(D)$. Ces inégalités sont strictes par comparaison des parités. Cela entraîne qu'il n'existe pas de $\Delta'_2 \in Int(\lambda_2)$ tel que $j_{min}(\Delta'_2)$ ou $j_{max}(\Delta'_2)$ appartiennent à $J(D)$. Donc $\mathfrak{T}_2(D) = \mathfrak{D}_2(D) = \emptyset$. Par contre, si Δ_2^+ existe, on a $\Delta_2^+ \in \mathfrak{D}_2(\geq D)$. Puisque $j_{max}(D)$ est pair, on a $j_{max}(D) \notin J^+$. On a alors

$$\delta^+(D) = \delta_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+),$$

$$\tau^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + r'_2.$$

Les propriétés requises sont vérifiées.

(f) Supposons que $|J(D)| \geq 2$, que $J(D) \subset J(\Delta_1)$ et que $j_{min}(D)$ et $j_{max}(D)$ soient pairs. En utilisant des résultats extraits de (d) et (e), on a $j_{min}(D) = j_{max}(\Delta_2^+)$ et $j_{max}(D) = j_{max}(\Delta_1)$. De plus, $j_{min}(\Delta_1) < j_{min}(D)$ et $j_{max}(D) < j_{min}(\Delta_2)$ si Δ_2 existe. Donc $\mathfrak{T}_1(D) = \mathfrak{T}_2(D) = \emptyset$, $\mathfrak{D}_1(D) = \{\Delta_1\}$ et $\mathfrak{D}_2(D) = \{\Delta_2^+\}$. On a encore $j_{max}(D) \notin J^+$. Puisque $j_{min}(\Delta_1) \leq j_{max}(D)$, on a $\Delta_1 \in \mathfrak{T}_1(\geq D)$. On a les mêmes relations que dans le cas (e) :

$$\delta^+(D) = \delta_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+),$$
$$\tau^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + r'_2.$$

On a des cas (g), (h), (i), (j) qui sont les symétriques de (c), (d), (e), (f) : on remplace la condition $J(D) \subset J(\Delta_1)$ par $J(D) \subset J(\Delta_2)$. Les formules que l'on obtient sont les exacts symétriques de celles obtenues dans les cas traités.

Comme on l'a dit, les formules ci-dessus supposaient $D \neq D_{min}$. Supposons maintenant $D = D_{min}$. On a $D_1 = D_{1,min}$, $J(D_{min}) \subset J(\Delta_{1,min})$ et D_2 n'existe pas.

(k) Supposons que $j_{min}(D_{min})$ soit impair. On a alors $j_{min}(D_{min}) = j_{min}(\Delta_{1,min})$ comme en (c). On en déduit $\mathfrak{T}_1(D_{min}) = \{\Delta_{1,min}\}$ mais $\mathfrak{D}_1(D_{min}) = \emptyset$ ($\Delta_{1,min}$ n'appartient pas à $\mathfrak{D}_1(D_{min})$ car, par définition, cet ensemble est un sous-ensemble de $Int(\lambda_1)$, lequel ne contient pas $\Delta_{1,min}$). Si $Int(\lambda_2) \neq \emptyset$, on a $j_{max}(\Delta_2^+) > j_{min}(D)$, donc $\mathfrak{T}_2(D_{min}) = \mathfrak{D}_2(D_{min}) = \emptyset$. Par contre, Δ_2^+ appartient à $\mathfrak{D}_2(\geq D_{min})$. L'unique formule est

$$\tau^+(D_{min}) = \tau_1(\Delta_{1,min}) + \delta_2(\Delta_2^+) + r'_2$$

et les propriétés requises sont vérifiées.

(l) Supposons que $j_{min}(D_{min})$ soit pair. Alors $j_{min}(D_{min}) = j_{max}(\Delta_2^+)$ comme en (d). On voit que $\mathfrak{T}_1(D_{min}) = \mathfrak{D}_1(D_{min}) = \mathfrak{T}_2(D_{min}) = \emptyset$ et $\mathfrak{D}_2(D_{min}) = \{\Delta_2^+\}$. On a aussi $\Delta_{1,min} \in \mathfrak{T}_1(\geq D_{min})$. La formule est la même que ci-dessus :

$$\tau^+(D_{min}) = \tau_1(\Delta_{1,min}) + \delta_2(\Delta_2^+) + r'_2$$

et les propriétés requises sont vérifiées.

On peut alors prouver par récurrence descendante l'assertion suivante : pour $D \in \tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, il existe pour $d = 1, 2$ d'uniques fonctions τ_d, resp. δ_d, définies sur $\mathfrak{T}_d(\geq D)$, resp. $\mathfrak{D}_d(\geq D)$, de sorte que les formules $(X_{r'_1,r'_2})$ soient vérifiées pour tout $D' \geq D$. En effet, soit $D \in Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, supposons que l'assertion ci-dessus soit vérifiée pour D^+ (la condition est vide si D est maximal). Les fonctions τ_d et δ_d sont donc uniquement définies sur $\mathfrak{T}_d(\geq D^+)$, resp. $\mathfrak{D}_d(\geq D^+)$. Il faut montrer que l'on peut définir d'une seule façon des termes $\tau_d(\Delta_d)$ pour $\Delta_d \in \mathfrak{T}_d(D)$ et $\delta_d(\Delta_d)$ pour $\Delta_d \in \mathfrak{D}_d(D)$ de sorte que les formules soient aussi vérifiées pour l'intervalle D. Par exemple, traitons le cas (a). Le terme $\delta_2(\Delta_2^+)$ est déjà défini. On doit définir $\tau_1(\Delta_1)$ et $\tau_2(\Delta_2)$ de sorte que

$$\delta^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + r'_1 + r'_2 + 1,$$

$$\tau^+(D) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + r'_2.$$

Il est clair que ces équations ont une solution et que celle-ci est unique. Les autres cas (b) à (l) sont similaires. L'assertion est donc démontrée par récurrence. Pour $D = D_{min}$, on obtient l'assertion voulue : pour deux éléments donnés $r'_1, r'_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il existe d'uniques $(\tau_1, \delta_1) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\tilde{Int}(\lambda_1)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda_1)}$, $(\tau_2, \delta_2) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda_2)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Int(\lambda_2)}$ tels que soient vérifiées les formules $(X_{r'_1,r'_2})$.

Ces paires (τ_1, δ_1) et (τ_2, δ_2) ne vérifient pas forcément les conditions imposées au début de la démonstration. Si (τ_2, δ_2) est bien un élément de $\mathcal{F}am(\lambda_2)$, (τ_1, δ_1) n'est pas forcément un élément de $\mathcal{F}am(\lambda_1)$: c'en est un si et seulement si $\tau_1(\Delta_{1,min}) = 0$. D'autre part, en admettant que cette condition soit vérifiée, nos paires vérifient les conditions requises si et seulement si $r'_1 \equiv r(\tau_1, \delta_1)\ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $r'_2 \equiv r(\tau_2, \delta_2)\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Pour démontrer la première assertion du lemme, il suffit de prouver que ces conditions sont vérifiées pour un seul couple (r'_1, r'_2).

Continuons avec un couple quelconque (r'_1, r'_2) et les paires (τ_1, δ_1) et (τ_2, δ_2) que l'on a construites ci-dessus. Posons $a = \tau_1(\Delta_{1,min})$. Définissons $\underline{\tau}_1$ par $\underline{\tau}_1(\Delta) = \tau_1(\Delta) + a$. Alors $(\underline{\tau}_1, \delta_1)$ appartient bien à $\mathcal{F}am(\lambda_1)$. On pose $\underline{r}_1 = r(\underline{\tau}_1, \delta_1)$, $\underline{r}_2 = r(\tau_2, \delta_2)$. Les conditions à vérifier sont

(6) $a = 0$, $\underline{r}_1 \equiv r'_1\ mod\ 2\mathbb{Z}$, $\underline{r}_2 \equiv r'_2\ mod\ 2\mathbb{Z}$.

Remarquons que la première condition est redondante avec la troisième. En effet, comme on l'a vu dans la preuve de 3.1(2), on a par construction

$$\tau^+(D_{min}) = \tau_1(\Delta_{1,min}) + \delta_2(\Delta_2(D_{min})^+) + r'_2.$$

On sait que $\delta_2(\Delta_2(D_{min})^+) = \underline{r}_2$, cf. 2.4(2). On a aussi $\tau^+(D_{min}) = 0$ par l'hypothèse (2), d'où $a + r'_2 + \underline{r}_2 \equiv 0\ mod\ 2\mathbb{Z}$.

Construisons les fonctions associées à $\underline{\iota}_1 = (\underline{\tau}_1, \delta_1)$ et $\underline{\iota}_2 = (\tau_2, \delta_2)$, que l'on note $\underline{\tau}^\zeta = \tau^\zeta_{\underline{\iota}_1,\underline{\iota}_2}$ et $\underline{\delta}^\zeta = \delta^\zeta_{\underline{\iota}_1,\underline{\iota}_2}$. Cela revient, dans la construction des fonctions τ^ζ et δ^ζ par les formules $(X_{r'_1,r'_2})$, à changer τ_1 en $\underline{\tau}_1$, r'_1 en $\underline{r}_1$ et r'_2 en $\underline{r}_2$. On remarque que les termes $\tau_1(\Delta_1)$ et r'_2 n'interviennent que par leur somme $\tau_1(\Delta_1) + r'_2$. Or, comme on vient de le voir, $\underline{\tau}_1(\Delta_1) + \underline{r}_2 = \tau_1(\Delta_1) + a + \underline{r}_2 = \tau_1(\Delta_1) + r'_2$. Changer τ_1 en $\underline{\tau}_1$ et r'_2 en $\underline{r}_2$ ne change donc pas les fonctions τ^ζ et δ^ζ. On remarque que r'_1 intervient exactement dans les expressions $\delta^\zeta(D)$ ou $\tau^\zeta(D)$ telles que $\delta^{-\zeta}(D) = \delta^\zeta(D) + 1$ ou $\tau^{-\zeta}(D) = \tau^\zeta(D) + 1$. Changer r'_1 en $\underline{r}_1$ change donc les fonctions τ^ζ et δ^ζ en multipliant éventuellement ζ par -1, en identifiant le signe ζ à un élément de $\{\pm 1\}$. Précisément, posons $u = (-1)^{r'_1 + \underline{r}_1}$. On obtient les égalités

$$\underline{\tau}^\zeta = \tau^{u\zeta},\ \underline{\delta}^\zeta = \delta^{u\zeta}.$$

En posant $\underline{C}^\zeta = C^\zeta_{\underline{t}_1,\underline{t}_2}$, ces égalités entraînent $\underline{C}^\zeta = C^{u\zeta}$. D'après 3.3(3), on a les égalités

$$\underline{C}^\zeta = \begin{cases} 2(\underline{r}_1 + \zeta\underline{r}_2), & si\ \underline{r}_1 + \underline{r}_2 \text{ est pair}, \\ -2(\underline{r}_1 + \zeta\underline{r}_2 + 1), & si\ \underline{r}_1 + \underline{r}_2 \text{ est impair}. \end{cases}$$

Par l'hypothèse (3), on a aussi

$$C^{u\zeta} = \begin{cases} 2(r_1 + u\zeta r_2), & si\ r_1 + r_2 \text{ est pair}, \\ -2(r_1 + u\zeta r_2 + 1), & si\ r_1 + r_2 \text{ est impair}. \end{cases}$$

L'égalité de ces deux expressions est équivalente aux égalités suivantes
si $\underline{r}_1 + \underline{r}_2$ et $r_1 + r_2$ sont pairs, $\underline{r}_1 + \zeta\underline{r}_2 = r_1 + u\zeta r_2$ pour $\zeta = \pm 1$;
si $\underline{r}_1 + \underline{r}_2$ est pair et $r_1 + r_2$ est impair, $\underline{r}_1 + \zeta\underline{r}_2 = -(r_1 + u\zeta r_2 + 1)$ pour $\zeta = \pm 1$;
si $\underline{r}_1 + \underline{r}_2$ est impair et $r_1 + r_2$ est pair, $-(\underline{r}_1 + \zeta\underline{r}_2 + 1) = r_1 + u\zeta r_2$ pour $\zeta = \pm 1$;
si $\underline{r}_1 + \underline{r}_2$ et $r_1 + r_2$ sont impairs, $-(\underline{r}_1 + \zeta\underline{r}_2 + 1) = -(r_1 + u\zeta r_2 + 1)$ pour $\zeta = \pm 1$.

En sommant en $\zeta = \pm 1$, le deuxième cas entraîne $\underline{r}_1 = -(r_1 + 1)$. C'est impossible puisque $\underline{r}_1$ et r_1 sont positifs ou nuls. Ce cas ne se produit donc pas. Le troisième cas non plus, pour la même raison. Cela montre que $\underline{r}_1 + \underline{r}_2$ et $r_1 + r_2$ sont de la même parité. Dans ce cas, les égalités ci-dessus entraînent $\underline{r}_1 = r_1$ et $\underline{r}_2 = ur_2$. Alors les conditions (6) sont vérifiées si et seulement si $r'_1 \equiv r_1\ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $r'_2 \equiv r_2\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Cela démontre la première assertion du lemme. Pour ce couple (r'_1, r'_2) ainsi déterminé, on vient de voir que $\underline{r}_1 = r_1$. On a aussi $u = (-1)^{r'_1 + \underline{r}_1} = 1$, donc $\underline{r}_2 = ur_2 = r_2$. Cela démontre la seconde assertion de l'énoncé. $\square$

4 Le front d'onde de $\pi(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$

4.1 Le résultat de [10]

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2m)$. On a introduit en 1.3 la représentation $\boldsymbol{\rho}_{\lambda,\epsilon}$ de $W_{N_{\lambda,\epsilon}}$. On sait qu'elle se décompose en

$$\boldsymbol{\rho}_{\lambda,\epsilon} = \oplus_{(\lambda',\epsilon')} mult(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon')\rho_{\lambda',\epsilon'},$$

où (λ', ϵ') parcourt les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2m)$ tels que $k_{\lambda',\epsilon'} = k_{\lambda,\epsilon}$ et les $mult(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon')$ sont des entiers positifs ou nuls. Le couple (λ, ϵ) est minimal dans cette décomposition, c'est-à-dire que l'on a
si $mult(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon') \neq 0$, alors $\lambda' > \lambda$ ou $(\lambda', \epsilon') = (\lambda, \epsilon)$.
De plus $mult(\lambda, \epsilon; \lambda, \epsilon) = 1$.

Pour tout couple $(\mu, \nu) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2m)$, notons $({}^s\mu, {}^s\nu)$ le couple tel que $k_{{}^s\mu,{}^s\nu} = k_{\mu,\nu}$ et $\rho_{{}^s\mu,{}^s\nu} = \rho_{\mu,\nu} \otimes sgn$.

Proposition. *Supposons que tous les termes de λ soient pairs. Alors il existe un unique couple $(\lambda^{min}, \epsilon^{min}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2m)$ vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $mult(\lambda, \epsilon; {}^s\lambda^{min}, {}^s\epsilon^{min}) = 1$;
(ii) pour tout élément $(\lambda', \epsilon') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2m)$ tel que $mult(\lambda, \epsilon; {}^s\lambda', {}^s\epsilon') \neq 0$, on a $\lambda^{min} < \lambda'$ ou $(\lambda', \epsilon') = (\lambda^{min}, \epsilon^{min})$.

Cf. [10] théorème 4.7.

4.2 Calcul de $M_\pi(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)$

On fixe désormais un quadruplet $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)\in\mathfrak{Irr}^{bp}_{quad}(2n)$. Rappelons que l'exposant bp signifie que tous les termes de λ^+ et λ^- sont pairs. On pose

$$\pi=\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$$

et on note $\sharp$ l'indice iso ou an tel que $\pi\in Irr_{tunip,\sharp}$.

Soient $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ tels que $n_1+n_2=n$. Soient $(\mu_1,\eta_1)\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{orth}}(2n_1+1)_{k=1}$ et $(\mu_2,\eta_2)\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{orth}}(2n_2)_{k=0}$. On a défini le nombre $M_\pi(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)$ en 1.4. On se propose de le calculer.

Le couple $(0,\rho_{\mu_1,\eta_1})$ appartient à $\Sigma_{n_1,imp}$ et son symbole appartient à $Fam(sp(\mu_1,\eta_1))$ pour une partition spéciale $sp(\mu_1,\eta_1)\in\mathcal{P}^{orth,sp}(2n_1+1)$. Posons $\lambda_1=d(sp(\mu_1,\eta_1))$. On a $\lambda_1\in\mathcal{P}^{symp,sp}(2n_1)$. Il résulte de 2.6 que le symbole Λ_1 de $(0,\rho_{\mu_1,\eta_1}\otimes sgn)$ appartient à $Fam(\lambda_1)$.

Pour $\xi=\pm$, le couple $(0,\rho^\xi_{\mu_2,\eta_2})$ appartient à $\Sigma_{n_2,pair}$ et son symbole appartient à $Fam(sp(\mu_2,\eta_2))$ pour une partition spéciale $sp(\mu_2,\eta_2)\in\mathcal{P}^{orth,sp}(2n_2)$. Celle-ci ne dépend pas du signe ξ : changer de signe revient à échanger les deux termes X et Y du symbole. Posons $\lambda_2=d(sp(\mu_2,\eta_2))$. On a $\lambda_2\in\mathcal{P}^{orth,sp}(2n_2)$. Le symbole Λ_2^ξ de $(0,\rho^\xi_{\mu_2,\eta_2}\otimes sgn)$ appartient à $Fam(\lambda_2)$.

Signalons que l'on a les inégalités

(1) $\mu_1\leq sp(\mu_1,\eta_1)$, $\mu_2\leq sp(\mu_2,\eta_2)$,

cf. [9] lemmes 1.4 et 1.5.

Posons $\gamma_0=(0,0,n_1,n_2)$. Par définition de la multiplicité $m_\pi(\rho_{\mu_1,\eta_1}\otimes sgn,\rho^\xi_{\mu_2,\eta_2}\otimes sgn)$ et d'après 1.5(4), cette multiplicité est celle de $(\rho_{\mu_1,\eta_1}\otimes sgn)\otimes(\rho^\xi_{\mu_2,\eta_2}\otimes sgn)$ dans la composante dans $\mathcal{R}(\gamma_0)$ de

$$\kappa_\pi=\mathcal{F}(\Pi),$$

où on a posé

$$\Pi=\rho\iota((\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes sgn)\otimes(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes sgn)).$$

En 1.3, on a associé à $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$ un élément $\gamma=(r',r'',N^+,N^-)\in\Gamma$ et identifié $(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes sgn)\otimes(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes sgn)$ à un élément de $\mathcal{R}(\gamma)$. On pose $r_1=r'$, $r_2=(-1)^{r'}r''$. Par construction de $\rho\iota$, l'élément Π n'a de composante non nulle que dans les composantes $\mathcal{R}(\gamma')$ pour γ' de la forme (r_1,r_2,N_1,N_2). Par définition de $\mathcal{F}$, pour un tel γ' et pour $\varphi\in\mathcal{R}(\gamma')$, l'élément $\mathcal{F}(\varphi)$ n'a de composante non nulle dans $\mathcal{R}(\gamma_0)$ que si $N_1+r_1^2+r_1=n_1$ et $N_2+r_2^2=n_2$. Cela entraîne

(2) si $n_1<r_1^2+r_1$ ou $n_2<r_2^2$, on a $M_\pi(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)=0$.

Supposons

(3) $n_1\geq r_1^2+r_1$ et $n_2\geq r_2^2$.

Posons $N_1=n_1-r_1^2-r_1$, $N_2=n_2-r_2^2$ et $\underline{\gamma}=(r_1,r_2,N_1,N_2)$. On peut se limiter à considérer la composante $\Pi_{\underline{\gamma}}$ de Π dans $\mathcal{R}(\underline{\gamma})$. Plus précisément, pour $d=1,2$, notons $\mathcal{F}am_{r_d}(\lambda_d)$ l'ensemble les $\iota_d=(\tau_d,\delta_d)\in\mathcal{F}am(\lambda_d)$ tels que $r(\tau_d,\delta_d)=r_d$. Pour de tels éléments, notons (r_d,ρ_{ι_d}) l'élément de $\Sigma_{n_1,imp}$ si $d=1$ et $\Sigma_{n_2,pair}$ si $d=2$ associé à ι_d. Posons $\Lambda_{\iota_d}=symb(r_d,\rho_{\iota_d})$. Notons $m(\Pi_{\underline{\gamma}},\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2})$ la multiplicité de $\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2}$ dans $\Pi_{\underline{\gamma}}$. Alors, par définition de $\mathcal{F}$, on a l'égalité

$$(4)\qquad m_\pi(\rho_{\mu_1,\eta_1}\otimes sgn,\rho^\xi_{\mu_2,\delta_2}\otimes sgn)=|Fam(\lambda_1)|^{-1/2}|Fam(\lambda_2)|^{-1/2}$$

$$\sum_{\iota_1\in\mathcal{F}am_{r_1}(\lambda_1),\iota_2\in\mathcal{F}am_{r_2}(\lambda_2)}(-1)^{<\Lambda_1,\Lambda_{\iota_1}>+<\Lambda_2^\xi,\Lambda_{\iota_2}>}m(\Pi_{\underline{\gamma}},\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2}).$$

Pour $\zeta=\pm$, on pose $n^\zeta=S(\lambda^\zeta)/2$, $k^\zeta=k_{\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta}$. Notons $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^\zeta)_{k^\zeta}$ l'ensemble des $(\lambda',\epsilon')\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^\zeta)$ tels que $k_{\lambda',\epsilon'}=k^\zeta$. On peut écrire

$$(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes sgn)\otimes(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes sgn)=$$

$$\sum_{(\lambda'^+,\epsilon'^+)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)_{k^+},(\lambda'^-,\epsilon'^-)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^-)_{k^-}} x(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-)\rho_{\lambda'^+,\epsilon'^+}\otimes\rho_{\lambda'^-,\epsilon'^-},$$

où les $x(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-)$ sont des multiplicités. Précisément, avec les notations de 4.1, on a

$$(5)\qquad x(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-)=mult(\lambda^+,\epsilon^+;{}^s\lambda'^+,{}^s\epsilon'^+)mult(\lambda^-,\epsilon^-;{}^s\lambda'^-,{}^s\epsilon'^-).$$

Pour $(\lambda'^+,\epsilon'^+)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)_{k^+}$ et $(\lambda'^-,\epsilon'^-)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^-)_{k^-}$, notons $\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-)$ la composante dans $\mathcal{R}(\underline{\gamma})$ de

$$\rho\iota(\rho_{\lambda'^+,\epsilon'^+}\otimes\rho_{\lambda'^-,\epsilon'^-}).$$

Pour $\iota_1\in\mathcal{F}am_{r_1}(\lambda_1)$ et $\iota_2\in\mathcal{F}am_{r_2}(\lambda_2)$, notons $m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-),\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2})$ la multiplicité de $\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2}$ dans $\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-)$. On a

$$m(\Pi_{\underline{\gamma}},\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2})=\sum_{(\lambda'^+,\epsilon'^+)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)_{k^+},(\lambda'^-,\epsilon'^-)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^-)_{k^-}} x(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-)$$

$$m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-),\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2}).$$

En vertu de la définition posée en 1.4, on déduit de (4) la formule finale

$$(6)\qquad M_\pi(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)=|Fam(\lambda_1)|^{-1/2}|Fam(\lambda_2)|^{-1/2}$$

$$\sum_{\iota_1\in\mathcal{F}am_{r_1}(\lambda_1),\iota_2\in\mathcal{F}am_{r_2}(\lambda_2)}(-1)^{<\Lambda_1,\Lambda_{\iota_1}>}\left((-1)^{<\Lambda_2^+,\Lambda_{\iota_2}>}+sgn_\sharp(-1)^{<\Lambda_2^-,\Lambda_{\iota_2}>}\right)$$

$$\sum_{(\lambda'^+,\epsilon'^+)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)_{k^+},(\lambda'^-,\epsilon'^-)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^-)_{k^-}} x(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-)m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-),\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2}).$$

4.3 Comparaison entre deux constructions

On conserve les notations du paragraphe précédent et on impose l'hypothèse (3) de ce paragraphe. Considérons des éléments $\iota_1\in\mathcal{F}am_{r_1}(\lambda_1)$, $\iota_2\in\mathcal{F}am_{r_2}(\lambda_2)$, $(\lambda'^+,\epsilon'^+)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)_{k^+}$, $(\lambda'^-,\epsilon'^-)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^-)_{k^-}$. On a défini la multiplicité

$$m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-),\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2}).$$

Un élément $\zeta\in\{\pm1\}$ étant fixé, on a associé en 3.4 à (r_1,r_2) un couple (h^+,h^-). En se reportant à la définition de 1.2 et en se rappelant que $(r_1,r_2)=(r',(-1)^{r'}r'')$, on vérifie cas par cas qu'il est égal à (k^+,k^-) pourvu que $\zeta=1$ si $k^+>k^-$, $\zeta=-1$ si $k^+<k^-$. Notons que $k^+>k^-$ équivaut à $(-1)^{r_1}r_2>0$ et $k^+<k^-$ équivaut à $(-1)^{r_1}r_2<0$. Si $k^+=k^-$, ce qui équivaut à $r_2=0$, ζ est indifférent, le couple (h^+,h^-) ne dépendant pas de ζ et étant égal à (k^+,k^-). On suppose que ζ vérifie ces conditions. On peut donc appliquer la construction de 3.4 aux entiers n^+ et n^-. On en déduit une représentation $\Pi^{\zeta}(\iota_1,\iota_2)$ de $W_{N^+}\otimes W_{N^-}$. On note $m(\Pi^{\zeta}(\iota_1,\iota_2),\rho_{\lambda'^+,\epsilon'^+}\otimes\rho_{\lambda'^-,\epsilon'^-})$ la multiplicité de $\rho_{\lambda'^+,\epsilon'^+}\otimes\rho_{\lambda'^-,\epsilon'^-}$ dans $\Pi^{\zeta}(\iota_1,\iota_2)$. Un jeu habituel avec les restrictions et inductions montre que cette multiplicité est égale à celle de $\rho_1\otimes\rho_2$ dans la représentation

$$\sum_{\mathbf{N}\in\mathcal{N}} ind_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N_1}\times W_{N_2}}\left(sgn_{CD}^{\mathbf{a}}\otimes res_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N^+}\times W_{N^-}}(\rho_{\lambda'^+,\epsilon'^+}\otimes\rho_{\lambda'^-,\epsilon'^-})\right),$$

où $\mathbf{a}$ est défini comme en 3.4. Un calcul cas par cas montre que ce $\mathbf{a}$ est le même qu'en 1.2, pouvu que, dans le cas $r_2=0$, on choisisse $\zeta=1$ si r_1 est pair, $\zeta=-1$ si r_1 est impair. Le signe ζ étant ainsi déterminé en tout cas, la représentation ci-dessus n'est autre que la composante dans $\mathcal{R}(\underline{\gamma})$ de

$$\rho\iota(\rho_{\lambda'^+,\epsilon'^+}\otimes\rho_{\lambda'^-,\epsilon'^-}).$$

On conclut

(1) $$m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-),\rho_1\otimes\rho_2)=m(\Pi^{\zeta}(\iota_1,\iota_2),\rho_{\lambda'^+,\epsilon'^+}\otimes\rho_{\lambda'^-,\epsilon'^-}).$$

Dans les formules 3.4 (4) et (5) intervient le signe $\zeta\nu$, ou $\nu=1$ si $r_2\geq 0$, $\nu=-1$ si $r_2<0$. Avec la définition de ζ ci-dessus, on a

(2) $\zeta\nu=(-1)^{r_1}$.

4.4 Démonstration du (i) de la proposition 1.4

On considère les données de 4.2 et on suppose $M_\pi(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\neq 0$. La relation 4.2(2) entraîne que l'hypothèse 4.2(3) est vérifiée. D'après 4.2(6), on peut fixer des éléments $\iota_1\in\mathcal{F}am_{r_1}(\lambda_1)$, $\iota_2\in\mathcal{F}am_{r_2}(\lambda_2)$, $(\lambda'^+,\epsilon'^+)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^+)_{k^+}$, $(\lambda'^-,\epsilon'^-)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n^-)_{k^-}$ vérifiant les conditions

(1) $x(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-)\neq 0$;

(2) $m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-),\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2})\neq 0$.

En vertu de la définition 4.2(5) de $x(\lambda'^+,\epsilon'^+,\lambda'^-,\epsilon'^-)$ et de la proposition 4.1, la relation (1) entraîne

(3) $\lambda^{+,min}\leq\lambda'^+$, $\lambda^{-,min}\leq\lambda'^-$.

Notons λ l'induite endoscopique de λ_1 et λ_2. En vertu de 4.3(1) et de la proposition 3.4(i), la relation (2) entraîne

(4) $\lambda'^+\cup\lambda'^-\leq\lambda$.

De ces deux inégalités, on déduit

$$\lambda^{+,min}\cup\lambda^{-,min}\leq\lambda.$$

Posons

$$\mu=d(\lambda^{+,min}\cup\lambda^{-,min}).$$

La dualité est une application décroissante. L'inégalité précédente entraîne $d(\lambda)\leq\mu$. D'après [9] proposition 1.9, on a aussi $d(\lambda_1)\cup d(\lambda_2)\leq d(\lambda)$, d'où $d(\lambda_1)\cup d(\lambda_2)\leq\mu$. Par construction, $d(\lambda_1)=sp(\mu_1,\eta_1)$, $d(\lambda_2)=sp(\mu_2,\eta_2)$. D'où $sp(\mu_1,\eta_1)\cup sp(\mu_2,\eta_2)\leq\mu$. En appliquant 4.2(1), on obtient

$$\mu_1\cup\mu_2\leq\mu.$$

C'est l'assertion (i) de la proposition 1.4.

4.5 Démonstration du (ii) de la proposition 1.4

La seule donnée est ici le quadruplet $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-) \in \mathfrak{Irr}_{quad}^{bp}(2n)$. On pose $\lambda = \lambda^{+,min} \cup \lambda^{-,min}$. Fixons une fonction $\chi : Jord^{bp}(\lambda) \cup \{0\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vérifiant les conditions suivantes :

$\chi(i) = 0$ pour tout $i \in Jord^{bp}(\lambda)$ tel que $mult_\lambda(i) = 1$;

$\chi(0) = 0$;

pour tout $i \in Jord^{bp}(\lambda)$ tel que $mult_{\lambda^{+,min}}(i) \geq 1$ et $mult_{\lambda^{-,min}}(i) \geq 1$ (ce qui implique $mult_\lambda(i) \geq 2$), $\chi(i) = 0$ si $\epsilon_i^{+,min} \neq \epsilon_i^{-,min}$ et $\chi(i) = 1$ si $\epsilon_i^{+,min} = \epsilon_i^{-,min}$;

pour tout $i \in Jord^{bp}(\lambda)$ tel que $mult_\lambda(i) \geq 2$ et que $mult_{\lambda^{+,min}}(i) = 0$ ou $mult_{\lambda^{-,min}}(i) = 0$, $\chi(i) = 1$.

On choisit n_1, n_2 et λ_1, λ_2 vérifiant les conditions de la proposition 3.2, pour ce choix de la fonction χ. C'est-à-dire que $\lambda_1 \in \mathcal{P}^{symp,sp}(2n_1)$, $\lambda_2 \in \mathcal{P}^{orth,sp}(2n_2)$, λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ, $d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) = d(\lambda) = \mu$ et $\chi_{\lambda_1,\lambda_2} = \chi$. On pose $\mu_1 = d(\lambda_1)$, $\mu_2 = d(\lambda_2)$. On a $\mu_1 \in \mathcal{P}^{orth,sp}(2n_1+1)$, $\mu_2 \in \mathcal{P}^{orth,sp}(2n_2)$, et

$$(1) \qquad \mu_1 \cup \mu_2 = \mu.$$

On définit r_1 et r_2 comme en 4.2 : $r_1 = r'$, $r_2 = (-1)^{r'} r''$, où r' et r'' sont définis en 1.3. Pour une partition ν et pour $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, posons $mult_\nu(\geq i) = \sum_{i' \geq i} mult_\nu(i')$. Posons $\eta = (-1)^{r'}$. Pour $\zeta = \pm$, on définit une fonction $\delta^\zeta : Jord^{bp}(\lambda) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par

$$\delta^\zeta(i) \equiv mult_{\lambda^{\zeta\eta,min}}(\geq i) \mod 2\mathbb{Z}.$$

On définit une fonction $\tau^\zeta : Jord^{bp}(\lambda) \cup \{0\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par

si $i \neq 0$ et $mult_{\lambda^{\zeta\eta,min}}(i) > 0$, $\epsilon_i^{\zeta\eta,min} = (-1)^{\tau^\zeta(i)}$;

si $i \neq 0$ et $mult_{\lambda^{\zeta\eta,min}}(i) = 0$ (auquel cas $mult_{\lambda^{-\zeta\eta,min}}(i) > 0$), $\epsilon_i^{-\zeta\eta,min} = (-1)^{\tau^\zeta(i)}$;

$\tau^\zeta(0) = 0$.

On peut considérer que ces fonctions sont définies sur $Int_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, resp. $\tilde{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$, puisque λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ. Montrons que

(2) ces fonctions vérifient les conditions de 3.5.

Preuve. Soit $i \in Jord^{bp}(\lambda)$. D'après la définition ci-dessus, $\delta^-(i) = \delta^+(i) + 1$ si et seulement si $mult_\lambda(\geq i)$ est impair. Remarquons que l'on a l'égalité $mult_\lambda(\geq i) = j_{max}(i)$. Si $j_{max}(i) \in J^+$, $j_{max}(i)$ est impair. Inversement, supposons $j_{max}(i)$ impair. Si $mult_\lambda(i) = 1$, $j_{max}(i)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$ de 3.1 par définition des intervalles relatifs. L'imparité impose $j_{max}(i) \in \mathcal{J}^+$. Or $\mathcal{J}^+ \subset J^+$ par définition, donc $j_{max}(i) \in J^+$. Supposons $mult_\lambda(i) \geq 2$. Par définition des intervalles relatifs, il existe $d = 1, 2$ et $\Delta_d \in \tilde{Int}(\lambda_d)$ de sorte que $J(i) = \{j_{min}(i), ..., j_{max}(i)\} \subset J(\Delta_d)$. Pour fixer la notation, supposons que $d = 1$, donc $J(i) \subset J(\Delta_1)$. Par définition des intervalles relatifs, $j_{max}(i)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{J}$ de 3.1. L'imparité impose alors qu'il existe $d = 1, 2$ et $\Delta'_d \in \tilde{Int}(\lambda_d)$ de sorte que $j_{max}(i) = j_{min}(\Delta'_d)$. Si $d = 1$, on a $j_{max}(i) \in J(\Delta_1) \cap J(\Delta'_1)$ donc $\Delta'_1 = \Delta_1$. Mais $j_{min}(\Delta_1) \leq j_{min}(i) < j_{max}(i)$, ce qui est contradictoire. Donc $d = 2$. Alors $j_{max}(i) = j_{min}(\Delta'_2)$. Puisque $j_{max}(i) \in J(\Delta_1)$, $\lambda_{1,j}$ est pair. Alors, par définition de J^+, on a $j_{max}(i) \in J^+$. Cela prouve que les fonctions δ^ζ vérifient la première condition de la relation 3.5(1).

Soit $i \in Jord^{bp}(\lambda)$. D'après la définition ci-dessus, $\tau^-(i) = \tau^+(i) + 1$ si et seulement si $mult_{\lambda^{+,min}}(i) > 0$, $mult_{\lambda^{-,min}}(i) > 0$ et $\epsilon_i^{+,min} \neq \epsilon_i^{-,min}$. D'après la définition de χ, ces conditions sont équivalentes à $mult_\lambda(i) \geq 2$ et $\chi(i) = 0$. La première condition équivaut à $|J(i)| \geq 2$. Sous cette condition, puisque $\chi = \chi_{\lambda_1,\lambda_2}$, la seconde condition équivaut à $J(i) \subset J(\Delta_2(i))$ avec la notation de 3.5(1). Cela achève de prouver cette condition 3.5(1).

La condition 3.5(2) est claire.

Notons $i_1 > ... > i_t$ les entiers pairs $i \geq 2$ tels que $mult_{\lambda^{+,min}}(i)$ soit impair. Pour $i \in Jord^{bp}(\lambda)$, on a $(-1)^{\delta^\eta(i)} - (-1)^{\delta^\eta(i^+)} \neq 0$ si et seulement si $\delta^\eta(i) \neq \delta^\eta(i^+)$. Par définition de δ^η, cela équivaut à ce que $mult_{\lambda^{+,min}}(i)$ soit impair, autrement dit à ce que $i = i_h$ pour un $h = 1, ..., t$. Pour un tel i_h, on a

$$(-1)^{\delta^\eta(i_h)} - (-1)^{\delta^\eta(i_h^+)} = 2(-1)^{\delta^\eta(i_h)} = 2(-1)^{mult_{\lambda^{+,min}}(\geq i)} = 2(-1)^h.$$

On a aussi

$$1 - (-1)^{\tau^\eta(i_h)} = 1 - \epsilon_{i_h}^{+,min} = \begin{cases} 0, & \text{si } \epsilon_{i_h}^{+,min} = 1, \\ 2, & \text{si } \epsilon_{i_h}^{+,min} = -1. \end{cases}$$

On en déduit

$$C^\eta = 4|\{h = 1, ..., t; h \text{ pair et } \epsilon_{i_h}^{+,min} = -1\}| - 4|\{h = 1, ..., t; h \text{ impair et } \epsilon_{i_h}^{+,min} = -1\}|.$$

En utilisant 1.3(1), on obtient

$$(3) \qquad C^\eta = \begin{cases} 2k^+, & \text{si } k^+ \text{ est pair}, \\ -2(k^+ + 1), & \text{si } k^+ \text{ est impair}. \end{cases}$$

On a une formule analogue pour $C^{-\eta}$, où k^+ est remplacé par k^-. En reprenant les définitions de r' et r'' donnée en 1.3, un calcul cas par cas montre que (3) équivaut à

$$C^\eta = \begin{cases} 2(r' + r''), & \text{si } r' + r'' \text{ est pair}, \\ -2(r' + r'' + 1), & \text{si } r' + r'' \text{ est impair}. \end{cases}$$

De même, l'égalité analogue de (3) pour $C^{-\eta}$ équivaut à

$$C^{-\eta} = \begin{cases} 2(r' - r''), & \text{si } r' + r'' \text{ est pair}, \\ -2(r' - r'' + 1), & \text{si } r' + r'' \text{ est impair}. \end{cases}$$

Par définition, $r' = r_1$ et $r'' = \eta r_2$. Alors les formules ci-dessus sont la condition 3.5(3). Cela prouve (2).

On peut appliquer le lemme 3.5. On note $\underline{\iota}_1$ et $\underline{\iota}_2$ les termes dont ce lemme affirme l'existence. Avec les notations de 4.2, ils appartiennent à $\mathcal{F}am_{r_1}(\lambda_1)$, resp. $\mathcal{F}am_{r_2}(\lambda_2)$. En conséquence, ces ensembles sont non vides. A fortiori, on a

(4) $r_1^2 + r_1 \leq n_1$, $r_2^2 \leq n_2$.

Appliquons maintenant le calcul de 4.2 aux couples $(\mu_1, 1) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{orth}}(2n_1 + 1)_{k=1}$ et $(\mu_2, 1) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{orth}}(2n_2)_{k=0}$ (les partitions μ_1 et μ_2 ont été définies ci-dessus avant (1)). On a évidemment $sp(\mu_1, 1) = \mu_1$ et $sp(\mu_2, 1) = \mu_2$. La condition (3) de ce paragraphe est vérifiée : c'est (4) ci-dessus. Dans la formule 4.2(6), on peut limiter les sommations aux quadruplets $(\lambda'^+, \epsilon'^+, \lambda'^-, \epsilon'^-)$ et aux couples (ι_1, ι_2) tels que $x(\lambda'^+, \epsilon'^+, \lambda'^-, \epsilon'^-) \neq 0$ et

$$m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda'^+, \epsilon'^+, \lambda'^-, \epsilon'^-), \rho_{\iota_1} \otimes \rho_{\iota_2}) \neq 0.$$

Comme en 4.4, on déduit de ces conditions les relations (3) et (4) de ce paragraphe :

$\lambda^{+,min} \leq \lambda'^+$, $\lambda^{-,min} \leq \lambda'^-$, $\lambda'^+ \cup \lambda'^- \leq \lambda$.

Mais ici $\lambda = \lambda^{+,min} \cup \lambda^{-,min}$ par définition. Les inégalités ci-dessus sont donc des égalités. D'après 4.1 et 4.2(5), les conditions $\lambda^{+,min} = \lambda'^+$, $\lambda^{-,min} = \lambda'^-$ et $x(\lambda'^+, \epsilon'^+, \lambda'^-, \epsilon'^-) \neq 0$ impliquent $(\lambda'^+, \epsilon'^+) = (\lambda^{+,min}, \epsilon^{+,min})$ et $(\lambda'^-, \epsilon'^-) = (\lambda^{-,min}, \epsilon^{-,min})$. Dans la somme

4.2(6), il ne reste que le quadruplet $(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min},\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min})$ et on sait d'après 4.1 que, pour celui-là, on a $x(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min},\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min})=1$.

Il ne reste aussi que les couples (ι_1,ι_2) tels que $m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min},\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min}),\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2})\neq 0$. Ou encore, d'après 4.3(1), tels que $m(\Pi^{\zeta}(\iota_1,\iota_2),\rho_{\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min}}\otimes\rho_{\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min}})\neq 0$, le signe ζ étant déterminé comme en 4.3. Cette condition équivaut à ce que $(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min},\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min})$ appartienne à l'ensemble $\mathcal{I}^{\zeta}(\iota_1,\iota_2)$ défini en 3.4. Puisque $\lambda^{+,min}\cup\lambda^{-,min}=\lambda$, la proposition 3.4(ii) nous dit qu'elle équivaut aussi à ce que $(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min},\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min})$ appartienne à $\mathcal{I}^{\zeta,max}(\iota_1,\iota_2)$. En outre, on a dans ce cas

$$m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min},\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min}),\rho_{\iota_1}\otimes\rho_{\iota_2})=1.$$

La condition $(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min},\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min})\in\mathcal{I}^{\zeta,max}(\iota_1,\iota_2)$ équivaut à ce que les formules (4) et (5) de 3.4 soient vérifiées, avec les modifications suivantes : les couples (λ^+,ϵ^+) et (λ^-,ϵ^-) de ce paragraphe sont remplacés par $(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min})$ et $(\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min})$; les fonctions δ^+, δ^-, τ^+ et τ^- sont remplacées par $\delta^+_{\iota_1,\iota_2}$ etc... La condition (4) détermine entièrement les fonctions $\delta^+_{\iota_1,\iota_2}$ et $\delta^-_{\iota_1,\iota_2}$. En se rappelant que le signe $\zeta\nu$ qui intervient vaut précisément η (cf. 4.3(2)), on voit que ces fonctions coïncident avec les fonctions δ^+ et δ^- construites ci-dessus. Les fonctions $\tau^+_{\iota_1,\iota_2}$ et $\tau^-_{\iota_1,\iota_2}$ ne sont pas à première vue entièrement déterminées par la relation (5) de 3.4. Toutefois, pour tout $i\in Jord^{bp}(\lambda)$, l'une au moins des valeurs $\tau^+_{\iota_1,\iota_2}(i)$ ou $\tau^-_{\iota_1,\iota_2}(i)$ est déterminée et coïncide avec la valeur de $\tau^+(i)$ ou $\tau^-(i)$. Puisque les couples (τ^+,τ^-) et $(\tau^+_{\iota_1,\iota_2},\tau^-_{\iota_1,\iota_2})$ vérifient tous deux la condition 3.5(1), cela suffit à conclure que ces deux couples sont égaux. Alors le lemme 3.5 nous dit que (ι_1,ι_2) est égal au couple $(\underline{\iota}_1,\underline{\iota}_2)$ introduit ci-dessus. Inversement, pour ce dernier couple, les conditions (4) et (5) de 3.4 sont bien vérifiées. Autrement dit, dans la somme 4.2(6), il ne reste plus que le couple $(\underline{\iota}_1,\underline{\iota}_2)$ et on a $m(\Pi_{\underline{\gamma}}(\lambda^{+,min},\epsilon^{+,min},\lambda^{-,min},\epsilon^{-,min}),\rho_{\underline{\iota}_1}\otimes\rho_{\underline{\iota}_2})=1$.

Cette formule 4.2(6) devient

$$(5)\qquad M_\pi(\mu_1,1;\mu_2,1)=|Fam(\lambda_1)|^{-1/2}|Fam(\lambda_2)|^{-1/2}(-1)^{<\Lambda_1,\Lambda_{\underline{\iota}_1}>}$$
$$\left((-1)^{<\Lambda_2^+,\Lambda_{\underline{\iota}_2}>}+sgn_\sharp(-1)^{<\Lambda_2^-,\Lambda_{\underline{\iota}_2}>}\right).$$

Rappelons que Λ_2^+ et Λ_2^- sont les symboles des couples $(0,\rho^+_{\mu_2,1}\otimes sgn)$ et $(0,\rho^-_{\mu_2,1}\otimes sgn)$. Ils se déduisent l'un de l'autre par permutation des deux termes X et Y de chaque symbole. D'après 2.5(1), on a donc

$$(6)\qquad (-1)^{<\Lambda_2^-,\Lambda_{\underline{\iota}_2}>}=(-1)^{r_2}(-1)^{<\Lambda_2^+,\Lambda_{\underline{\iota}_2}>}.$$

Considérons la formule 1.5(1). Notons $i_1>...>i_t$ les entiers pairs $i\geq 2$ tels que $mult_{\lambda^+}(i)$ soit impair. Le premier produit de la formule vaut $(-1)^{X^+}$, où

$$X^+=|\{h=1,...,t;\epsilon^+_{i_h}=-1\}.$$

On a

$$X^+\equiv|\{h=1,...,t;h\text{ pair et }\epsilon^+_{i_h}=-1\}|-|\{h=1,...,t;h\text{ impair et }\epsilon^+_{i_h}=-1\}|\ mod\ 2\mathbb{Z}.$$

D'après 1.3(1), le membre de droite vaut $k^+/2$ si k^+ est pair, $-(k^++1)/2$ si k^+ est impair. D'après le même calcul cas par cas qui a calculé C^η ci-dessus, c'est aussi $(r'+r'')/2$ si $r'+r''$ est pair, $-(r'+r''+1)/2$ si $r'+r''$ est impair. On obtient

$$(-1)^{X^+}=\begin{cases}(-1)^{(r'+r'')/2}, & \text{si } r'+r''\text{ est pair,}\\ (-1)^{(r'+r''+1)/2}, & \text{si } r'+r''\text{ est impair.}\end{cases}$$

Le deuxième facteur de 1.5(1) se calcule de même, r'' étant remplacé par $-r''$. Le produit de ces termes vaut $(-1)^{r''}$, ou encore $(-1)^{r_2}$. La formule 1.5(1) nous dit donc que

$$(7) \qquad sgn_\sharp = (-1)^{r_2}.$$

Grâce à (6) et (7), (5) se simplifie en

$$M_\pi(\mu_1, 1; \mu_2, 1) = 2|Fam(\lambda_1)|^{-1/2}|Fam(\lambda_2)|^{-1/2}(-1)^{<\Lambda_1,\Lambda_{\iota_1}>+<\Lambda_2^+,\Lambda_{\iota_2}>}.$$

Donc $M_\pi(\mu_1, 1; \mu_2, 1) \neq 0$. Alors, en vertu de (1), les couples $(\mu_1, 1)$ et $(\mu_2, 1)$ vérifient le (ii) de la proposition 1.4, à ceci près que l'on doit de plus prouver que $n_2 \geq 1$ si $\sharp = an$. Mais, si $\sharp = an$, (7) implique que r_2 est impair et (4) implique alors que $n_2 \geq 1$.

4.6 Conclusion

On a prouvé que μ vérifiait les conditions de la proposition 1.4. Celle-ci implique que μ est le front d'onde de $\pi(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$. Cela démontre le deuxième théorème de l'introduction. Comme on l'a dit dans celle-ci, le premier théorème s'en déduit grâce à [9] 3.4.

5 Sur le calcul effectif du front d'onde

5.1 Le couple $(\lambda^{max}, \epsilon^{max})$

Soit $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n)$, supposons que tous les termes de λ sont pairs. On lui associe un couple $(\lambda^{max}, \epsilon^{max}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n)$ par récurrence sur n, selon la construction qui suit et qui est extraite de [10] 5.1. On représente λ sous la forme d'une suite infinie $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$. On associe à ϵ une fonction encore notée ϵ sur l'ensemble d'indices $\mathbb{N}_{>0} = \mathbb{N} - \{0\}$ par $\epsilon(j) = \epsilon_{\lambda_j}$, avec la convention $\epsilon_0 = 1$. On note $\mathfrak{S}$ la réunion de $\{1\}$ et de l'ensemble des $j \geq 2$ tels que $\epsilon(j)(-1)^j \neq \epsilon(j-1)(-1)^{j-1}$. On note $s_1 = 1 < s_2 < ...$ les éléments de $\mathfrak{S}$. Pour $\zeta \in \{\pm 1\}$, notons $J^\zeta = \{j \in \mathbb{N}_{>0}; (-1)^{j+1}\epsilon(j) = \zeta\}$ et $\tilde{J}^\zeta = J^\zeta - (J^\zeta \cap \mathfrak{S})$. On pose

$$\lambda_1^{max} = (\sum_{s \in \mathfrak{S}} \lambda_s) - 2|\tilde{J}^{-\epsilon(1)}|.$$

On pose $n' = n - \lambda_1^{max}/2$. On note λ' la réunion des λ_j pour $j \in \tilde{J}^{\epsilon(1)}$ et des $\lambda_j + 2$ pour $j \in \tilde{J}^{-\epsilon(1)}$. Pour $i \in Jord^{bp}(\lambda')$, on a $i = \lambda_j$ ou $i = \lambda_j + 2$ pour un j comme ci-dessus. On note $h[j]$ le plus grand entier $h \geq 1$ tel que $s_h < j$ et on pose $\epsilon'_i = (-1)^{h[j]+1}\epsilon(j)$ (j n'est pas uniquement déterminé par i mais on montre que cette définition ne dépend pas du choix de j). On montre que $n' < n$ (si $n \neq 0$), que le couple (λ', ϵ') appartient à $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{symp}}(2n')$ et que tous les termes de λ' sont pairs. Par récurrence, on dispose d'un couple $(\lambda'^{max}, \epsilon'^{max})$. On pose $\lambda^{max} = \{\lambda_1^{max}\} \cup \lambda'^{max}$. On définit ϵ^{max} par $\epsilon^{max}_{\lambda_1^{max}} = \epsilon_{\lambda_1}$ et $\epsilon_i^{max} = \epsilon_i'^{max}$ pour $i \in Jord^{bp}(\lambda'^{max})$ (c'est possible, c'est-à-dire que, si λ_1^{max} appartient à $Jord^{bp}(\lambda'^{max})$, on a l'égalité $\epsilon_{\lambda_1} = \epsilon'^{max}_{\lambda_1^{max}}$). Cela définit le couple $(\lambda^{max}, \epsilon^{max})$. Les termes de λ^{max} sont pairs et λ_1^{max} est bien le plus grand terme de λ^{max}.

5.2 La partition ${}^t\lambda^{min}$

On conserve les mêmes hypothèses. On pose $k = k_{\lambda,\epsilon}$. On a $k_{\lambda^{max},\epsilon^{max}} = k$. On a rappelé en 1.3(1) comment se calculait l'entier k. On écrit $\lambda^{max} = (\lambda_1^{max}, ..., \lambda_{2R+1}^{max})$ avec $\lambda_{2R+1}^{max} = 0$. On note $j_1^+ < ... < j_N^+$ les $j = 1, ..., 2R+1$ tels que $\epsilon^{max}(j)(-1)^{j+1} = (-1)^k$ (en considérant comme dans le paragraphe précédent que ϵ^{max} se définit sur l'ensemble d'indices). On note $j_1^- < ... < j_N^-$ les $j = 1, ..., 2R+1$ tels que $\epsilon^{max}(j)(-1)^j = (-1)^k$. On vérifie que $N = R + [k/2] + 1$, $M = R - [k/2]$. Notons ν' la réunion disjointe des partitions suivantes :

$\{2R + 3u - k - 1 + \lambda_{j_u^+}^{max} - 2j_u^+; u = 1, ..., N\}$;

$\{2R + 3v + k + \lambda_{j_v^-}^{max} - 2j_v^-; v = 1, ..., M\}$;

$\{R + [(k-1)/2], R + [(k-1)/2] - 1, ..., 0\}$;

$\{R - [(k+3)/2], R - [(k+3)/2] - 1, ..., 0\}$.

On note $\nu' = (\nu'_1, ..., \nu'_{4R+1})$. Pour $j = 1, ..., 4R+1$, on pose $\nu_j = \nu'_j - 2R + [j/2]$. Cela définit une partition ν et on a l'égalité ${}^t\lambda^{min} = \nu$ (cette égalité se déduit de [10] 4.6 et 4.7).

5.3 Exemples

Soit $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) \in \mathfrak{Irr}_{quad}^{bp}(2n)$. Les formules des deux paragraphes précédents permettent de calculer les transposées des partitions $\lambda^{+,min}$ et $\lambda^{-,min}$. Le front d'onde de $\pi(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$ est $d(\lambda^{+,min} \cup \lambda^{-,min})$. Cette partition duale se calcule ainsi : on note ν la partition obtenue en ajoutant 1 au plus grand terme de ${}^t\lambda^{+,min} + {}^t\lambda^{-,min}$; alors $d(\lambda^{+,min} \cup \lambda^{-,min})$ est la plus grande partition orthogonale μ de $2n+1$ telle que $\mu \leq \nu$. Le moins que l'on puisse dire est que ce calcul n'est pas simple.

Signalons le cas particulier rassurant où $\epsilon^+ = 1$, c'est-à-dire $\epsilon_i^+ = 1$ pour tout $i \in Jord^{bp}(\lambda^+)$, et $\epsilon^- = 1$. Dans ce cas, on voit que $\lambda^{+,max} = (2n^+)$, $\epsilon_{2n^+}^{+,max} = 1$, $\lambda^{-,max} = (2n^-)$ et $\epsilon_{2n^-}^{-,max} = 1$. On a $k^+ = k^- = 0$. On calcule ${}^t\lambda^{+,min} = (2n^+)$, ${}^t\lambda^{-,min} = (2n^-)$, puis $d(\lambda^{+,min} \cup \lambda^{-,min}) = (2n+1)$. Autrement dit, notre représentation $\pi(\lambda^+, 1, \lambda^-, 1)$ admet un modèle de Whittaker usuel, ce qui est bien connu.

Un autre cas particulier est celui où, pour $\zeta = \pm$, $n^\pm$ est de la forme $h^\pm(h^\pm+1)$, λ^ζ est égal à $(2h^\zeta, 2h^\zeta - 2, ..., 2)$ et où ϵ^ζ est alterné, c'est-à-dire $\epsilon_{2i}^\zeta = (-1)^i$ pour $i = 1, ..., h^\zeta$. Dans ce cas, on vérifie que $\lambda^{\zeta,max} = \lambda^{\zeta,min} = \lambda^\zeta$. Le front d'onde de $\pi(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$ est alors $d(\lambda^+ \cup \lambda^-)$. On retrouve le résultat de [4] et [9] car notre représentation est ici cuspidale donc égale à son image par l'involution d'Aubert-Zelevinsky.

Donnons enfin comme exemple le calcul du front d'onde de $\pi(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$ dans le cas où λ^- est vide et où λ^+ a au plus trois termes non nuls. On pose simplement $\lambda = \lambda^+$, $\epsilon = \epsilon^+$, $\mu = d(\lambda^{min})$. On identifie ϵ au triplet $(\epsilon(1), \epsilon(2), \epsilon(3))$ que l'on note comme un triplet de signes $\pm$. Evidemment, certains triplets ne sont autorisés que sous certaines hypothèses sur λ : si $\epsilon(j) \neq \epsilon(j+1)$, on doit avoir $\lambda_j > \lambda_{j+1}$; si $\epsilon(j) = -$, on doit avoir $\lambda_j > 0$. On note de même ϵ^{max} comme une famille de signes. Les résultats sont les suivants :

ϵ	k	λ^{max}	ϵ^{max}	${}^t\lambda^{min}$
$(+,+,+)$	0	$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$	$(+)$	$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$
$(+,+,-)$	1	$(\lambda_1+\lambda_2-4,\lambda_3+2,2)$	$(+,+,-)$	$(\lambda_1+\lambda_2-2,\lambda_3,1,1)$
$(+,-,+)$	2	$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$	$(+,-,+)$	$(\lambda_1-2,\lambda_2,\lambda_3+1,1)$
$(+,-,-)$	0	$(\lambda_1+\lambda_3-2,\lambda_2,2)$	$(+,-,-)$	$(\lambda_1+\lambda_3-2,\lambda_2+2)$
$(-,+,+)$	1	$(\lambda_1+\lambda_3,\lambda_2)$	$(-,+)$	$(\lambda_1+\lambda_3-1,\lambda_2+1)$
$(-,+,-)$	3	$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$	$(-,+,-)$	$(\lambda_1-3,\lambda_2-1,\lambda_3,2,1,1)$
$(-,-,+)$	0	$(\lambda_1+\lambda_2-2,\lambda_3+2)$	$(-,-)$	$(\lambda_1+\lambda_2-1,\lambda_3+1)$
$(-,-,-)$	1	$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$	$(-)$	$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1,1)$

ϵ	μ
$(+,+,+)$	$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1)$
$(+,+,-)$	$(\lambda_1+\lambda_2-1,\lambda_3-1,1,1,1)$
$(+,-,+)$	$(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\lambda_3+1,1,1)$
$(+,-,-)$	$(\lambda_1+\lambda_3-1,\lambda_2+1,1)$
$(-,+,+)$	$(\lambda_1+\lambda_3-1,\lambda_2+1,1)$
$(-,+,-)$	$(\lambda_1-3,\lambda_2-1,\lambda_3+1,1,1,1,1)$
$(-,-,+)$	$(\lambda_1+\lambda_2-1,\lambda_3+1,1)$
$(-,-,-)$	$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1,1,1)$

Références

[1] R. Carter *Finite groups of Lie type*, Wiley-Interscience Publ. 1993

[2] F. Digne, J. Michel *Groupes réductifs non connexes*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup.**27** (1994), 345-406

[3] R. Howlett, G. Lehrer *Duality in the normalizer of a parabolic subgroup of a finite Coxeter group*, Bull. London Math. Soc. 14 (1982), pp. 133-136

[4] C. Moeglin *Représentations quadratiques unipotentes des groupes classiques p-adiques* , Duke Math. J. 84 (1996), pp. 267-332

[5] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger *Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$*, Invent. Math. 152 (2003), pp. 461-623

[6] J.-L. Waldspurger *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque 269 (2001)

[7] J.-L. Waldspurger *Représentations de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$, quelques conséquences d'un article de Lusztig*, in *Contributions to automorphic forms, geometry and number theory* H. Hida, D. Ramakrishnan, F. Shahidi ed. The Johns Hopkins University Press 2004, pp. 803-910

[8] J.-L. Waldspurger *Représentations de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$, I : une involution* prépublication 2016, à paraître au J. of Lie Th.

[9] J.-L. Waldspurger *Représentations de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$, III : exemples de fronts d'onde* prépublication 2016

[10] J.-L. Waldspurger *Propriétés de maximalité concernant une représentation définie par Lusztig* prépublication 2017

CNRS Institut de Mathématiques de Jussieu Paris Rive Gauche
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75252 Paris cedex 05
jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr