Le groupe GL_N tordu, sur un corps p-adique, 1ère partie

J.-L. Waldspurger

8 juillet 2005

Abstract. Let F be a non-archimedean local field of characteristic 0 and N be an even integer ≥ 2. Consider the following algebraic groups, both defined and split over F : $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_N$ and $\mathbf{H} = \mathbf{SO}(N+1)$. Let $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G} \rtimes \{1, \theta\}$, where $\theta^2 = 1$ and θ act on $\mathbf{G}$ as the non-trivial outer automorphism. It's a non-connected group. Let $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\theta$ the connected component that contains θ. The group $\mathbf{H}$ is an endoscopic group of $\mathbf{G}^+$. A conjecture predict that, to every L-packet Π^H of admissible, irreducible and tempered representations of $\mathbf{H}(F)$, we can associate an admissible and irreducible representation π^+ of $\mathbf{G}^+(F)$, so that the restriction to $\tilde{\mathbf{G}}(F)$ of the character of π^+ is an endoscopic transfer of the character of Π^H (i.e. the sum of the characters of the representations belonging to Π^H). This notion of transfer is equivalent to simple equalities that relies the characters of π^+ and Π^H. In the second part of this article, we give the construction that associate π^+ to Π^H and we prove the equalities satisfied by their characters. We consider only L-packets of discrete series representations of "unipotent reduction" (this property includes representations that contain non-zero vectors invariant by an Iwahori subgroup). Our result is conditional : we suppose a fundamental lemma for our pair $(\mathbf{G}^+, \mathbf{H})$. In the first part, we generalize for the group $\mathbf{G}^+$ certain results of harmonic analysis that are well known for connected groups. We also prove that the fundamental lemma for $(\mathbf{G}^+, \mathbf{H})$ implies a "non-standard" fundamental lemma relying the Lie algebras of the groups $\mathbf{SO}(N+1)$ and $\mathbf{Sp}(N)$.

Mots-clés : représentations des groupes p-adiques, groupes orthogonaux, transfert endoscopique

Classification AMS : 22 E 50, 22 E 35

Introduction

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle et N un entier ≥ 1. Notons $\mathbf{G}$ le groupe algébrique $\mathbf{GL}_N$ défini sur F, munissons-le de l'automorphisme $\boldsymbol{\theta}$ défini par $\boldsymbol{\theta}(g) = J{}^tg^{-1}J$, où :

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

On note $\mathbf{G}^+$ le groupe non connexe $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G} \rtimes \{1, \theta\}$ défini par les relations $\theta^2 = 1$ et $\theta g \theta^{-1} = \boldsymbol{\theta}(g)$ pour tout $g \in \mathbf{G}$. On note $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\theta$ la composante connexe non neutre de ce groupe. Supposons N pair, introduisons le groupe algébrique $\mathbf{H} = \mathbf{SO}(N+1)$ sur F, plus exactement la forme déployée de ce groupe spécial orthogonal impair. On pose $\tilde{G} = \tilde{\mathbf{G}}(F)$, $H = \mathbf{H}(F)$ etc... D'après [A1], paragraphe 9, $\mathbf{H}$ est un groupe endoscopique de $\mathbf{G}^+$, plus exactement c'est le groupe qui contrôle les distributions stablement invariantes sur $\tilde{G}$. Cela a la conséquence suivante. Soit Π^H un L-paquet de représentations admissibles irréductibles et tempérées de H. On doit pouvoir lui associer une représentation admissible irréductible tempérée π de G, invariante par l'automorphisme $\boldsymbol{\theta}$, de sorte que, pour un prolongement convenable π^+ de π en une représentation de G^+, $trace_{\tilde{G}}\pi$ soit un transfert de $trace\,\Pi^H$. On a noté ici $trace_{\tilde{G}}\pi$ la distribution sur $\tilde{G}$ restriction du caractère de π^+ et $trace\,\Pi^H$ la distribution sur H somme des caractères des éléments de Π^H. Limitons-nous aux représentations de H de la série discrète et de réduction unipotente (cette propriété généralise quelque peu le fait de posséder des invariants non nuls par un sous-groupe d'Iwahori). En supposant que la caractéristique résiduelle p de F est grande relativement à N, on a décrit dans [MW] les L-paquets de telles représentations de H. Le but de cet article est de décrire les représentations de G qui leur correspondent et de prouver la propriété de tranfert décrite ci-dessus. Nous le ferons dans la seconde partie de cet article, mais seulement en admettant la validité du lemme fondamental pour notre couple $(\tilde{G}, H)$, cf. ci-dessous.

Le but plus restreint de cette première partie est de prouver quelques propriétés préliminaires. Le groupe $\mathbf{G}^+$ n'étant pas connexe, on ne peut pas toujours utiliser de façon crédible un certain nombre d'articles dont la première phrase est "soit $\mathbf{G}$ un groupe connexe". La bonne façon de résoudre ce problème serait certainement de se placer dans un cadre général ("soit $\mathbf{G}^+$ un groupe connexe ou pas") et de démontrer dans ce cadre les propriétés dont nous avons besoin. Cela sera certainement fait dans l'avenir mais le nombre de pages à écrire est un peu décourageant. On se limite donc à notre groupe $\mathbf{G}^+$ particulier qui est beaucoup plus simple à traiter que le cas général, quoique évidemment moins intéressant.

On présente ici quatre résultats. D'abord, au paragraphe II, on étend à G^+ (en levant l'hypothèse que N est pair) la théorie des pseudo-coefficients telle qu'elle a été formulée par Schneider et Stuhler ([SS]) pour les groupes connexes. On montre ensuite, au paragraphe III, que le lemme fondamental pour notre couple $(\tilde{G}, H)$ entraîne une assertion que l'on peut appeler lemme fondamental non standard pour les algèbres de Lie des groupes symplectiques et orthogonaux impairs. Précisons. On considère notre groupe $\mathbf{G}^+$. Si N est pair, on pose comme ci-dessus $\mathbf{H} = \mathbf{SO}(N+1)$, on note $\mathbf{H'}$ le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(N)$. Si N est impair, on pose $\mathbf{H} = \mathbf{Sp}(N-1)$ et $\mathbf{H'} = \mathbf{SO}(N)$. Supposons p grand, fixons des sous-groupes compacts maximaux hyperspéciaux K^G de G et K^H de H. On suppose que $\boldsymbol{\theta}$ conserve K^G. Notons f_0^G, resp. f_0^H, la fonction caractéristique de $K^G\theta$ dans $\tilde{G}$, resp. K^H dans H. Il y a une correspondance entre classes de conjugaison stable semi-simples fortement régulières dans $\tilde{G}$ et dans H. Avec les notations usuelles, le lemme fondamental pour $(\tilde{G}, H)$ affirme l'égalité d'intégrales orbitales stables $J^{st}(g, f_0^G)) = J^{st}(h, f_0^H)$ pour tous les couples $(g, h) \in \tilde{G} \times H$ d'éléments semi-simples fortement réguliers dont les classes de conjugaison stable se correspondent (cela pourvu que les mesures soient convenablement normalisées). Notons $(Lemmefond)_{F,N}$ cette assertion. Considérons maintenant les algèbres de Lie $\mathfrak{h}$, resp. $\mathfrak{h}'$, de $\mathbf{H}$, resp. $\mathbf{H'}$. Notons $\mathfrak{f}_0^H$, resp. $\mathfrak{f}_0^{H'}$, la fonction caractéristique dans $\mathfrak{h}$, resp. $\mathfrak{h}'$, d'un "réseau hyperspécial" de $\mathfrak{h}$, resp. $\mathfrak{h}'$. Les groupes $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H'}$ ayant des tores déployés maximaux isomorphes, avec des groupes de Weyl isomorphes, il y a une correspondance, d'ailleurs bijective, entre classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples réguliers dans $\mathfrak{h}$ et dans $\mathfrak{h}'$. On peut alors considérer l'assertion (sous la même réserve concernant les mesures) :

$(\mathfrak{Lemmefond})_{F,[N/2]}$ *On a l'égalité* $J^{st}(X, \mathfrak{f}_0^H) = J^{st}(X', \mathfrak{f}_0^{H'})$ *pour tout couple* $(X, X') \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}'$ *d'éléments semi-simples réguliers dont les classes de conjugaison stable se correspondent.*

On montre que $(Lemmefond)_{F,N} \Rightarrow (\mathfrak{Lemmefond})_{F,[N/2]}$.

Remarques (a) Pour éviter une chausse-trape, l'assertion analogue à $(\mathfrak{Lemmefond})_{F,[N/2]}$, concernant les groupes H et H' au lieu de leurs algèbres de Lie, est fausse.

(b) On pourrait aisément montrer, mais nous ne le ferons pas, que :

$$(\forall N' \leq N, (\mathfrak{Lemmefond})_{F,[N'/2]}) \Rightarrow (Lemmefond)_{F,N}.$$

L'assertion $(\mathfrak{Lemmefond})_{F,[N/2]}$ a les mêmes conséquences que dans le cas endoscopique usuel concernant le transfert entre les algèbres de Lie $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$, cf. III.5.

Pour les groupes connexes, Arthur a développé la théorie des représentations elliptiques ([A2]). Au sens d'Arthur, il s'agit d'éléments du groupe de Grothendieck, c'est-à-dire des combinaisons linéaires finies à coefficients complexes de représentations irréductibles. Au paragraphe

IV, on développe une théorie analogue, à peu près triviale, pour le groupe G^+. On démontre également une proposition, essentiellement due à Herb ([H], preuve du théorème 3.2), qui sera cruciale pour la suite. Soit D une distribution sur $\tilde{G}$ invariante par conjugaison par G. Modulo quelques hypothèses, on peut écrire D comme une somme $D_{ell} + D_{ind}$, où D_{ell} est limite faible d'une suite de combinaisons linéaires de traces de représentations elliptiques et D_{ind} est limite faible d'une suite de combinaisons linéaires de traces de représentations induites à partir de sous-groupes paraboliques propres. La proposition affirme l'unicité de cette proposition. La preuve repose sur deux ingrédients : d'une part les représentations elliptiques sont supertempérées ; d'autre part, en suivant Labesse ([L1]), on peut construire des fonctions permettant de récupérer une distribution sur la composante de Lévi d'un sous-groupe parabolique à partir de sa distribution induite.

Les deux derniers paragraphes V et VI de l'article adaptent au groupe G^+ les résultats d'Arthur [A3]. Ces résultats peuvent se présenter ainsi, $\mathbf{G}$ étant pour Arthur un groupe connexe. Soit D une combinaison linéaire finie de traces de représentations elliptiques. Notons G_{ell} l'ouvert analytique des éléments semi-simples fortement réguliers et elliptiques de G. Supposons que la restriction de D à G_{ell} soit stable. Alors D est stable. De même, soit $\mathbf{H}$ un groupe endoscopique elliptique de $\mathbf{G}$ et admettons un certain nombre de lemmes fondamentaux. Soient D, resp. D^H, une combinaison linéaire finie de traces de représentations elliptiques de G, resp. H. Supposons D et D^H stables et supposons que la restriction de D à G_{ell} soit un transfert de la restriction de D^H à H_{ell}. Alors D est un transfert de D^H.

Nous démontrons les mêmes résultats pour notre groupe $\mathbf{G}^+$ et pour le groupe $\mathbf{H}$ décrit ci-dessus ($\mathbf{SO}(N+1)$ ou $\mathbf{Sp}(N-1)$). L'ensemble G_{ell} est évidemment remplacé par l'ensemble $\tilde{G}_{ell}$ des éléments semi-simples fortement réguliers elliptiques de $\tilde{G}$. Pour l'assertion de transfert, on a besoin du lemme fondamental. Précisément, on admet que, pour tout corps de nombres k et pour tout $N' \leq N$, de même parité que N, l'assertion $(Lemmefond)_{k_v,N'}$ est vérifiée pour presque toute place v de k. La démonstration est presque la même que celle d'Arthur et on ne la présentera que très schématiquement. La seule différence est la suivante. En un certain point de la démonstration, on a besoin de séparer les contributions des représentations elliptiques de celles des représentations induites. Arthur utilise pour cela la formule des traces locale et montre que les premières contributions sont "discrètes" tandis que les secondes sont "continues". Ne disposant pas de la formule de traces locale pour notre groupe G^+, on remplace cet argument par la proposition imitée de [H] prouvée au paragraphe IV.

Les résultats démontrés en V et VI nous permettrons dans la seconde partie de l'article de ne travailler qu'avec les éléments elliptiques de nos groupes.

I. Définitions générales

I.1. Groupes non connexes

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F, ϖ une uniformisante, $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel, q étant bien entendu le nombre d'éléments de ce corps, p la caractéristique de $\mathbb{F}_q$, $|.|$ la valeur absolue de F telle que $|\varpi| = q^{-1}$, val la valuation telle que $val(\varpi) = 1$.

Pour toute variété X analytique sur F, on note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions sur X, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact. Pour toute variété algébrique $\mathbf{X}$ définie sur F, on note $X = \mathbf{X}(F)$ l'ensemble de ses points sur F. Pour tout groupe G opérant sur un ensemble X et pour tout sous-ensemble Y de X, on note $Norm_G(Y)$ le normalisateur de Y dans X. Si Y est réduit à un point y, on note plutôt ce groupe $Z_G(y)$. Bien entendu, il y a une variante algébrique de ces définitions, si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique sur F agissant sur une variété $\mathbf{X}$ algébrique sur F. On note les algèbres de Lie des groupes algébriques par les lettres gothiques correspondantes : $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. La plupart du temps, on notera $(g, X) \mapsto gXg^{-1}$ l'action adjointe d'un groupe sur son algèbre de Lie.

Soient $\mathbf{G}^+$ un groupe réductif défini sur F et $\tilde{\mathbf{G}}$ une composante connexe de $\mathbf{G}^+$. On suppose $\tilde{G}$ non vide. On note $\mathbf{G}$ la composante neutre de $\mathbf{G}^+$ et on suppose que l'image naturelle de $\tilde{\mathbf{G}}$ dans $\mathbf{G}^+/\mathbf{G}$ engendre ce groupe fini. Soient $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{M}$ une composante de Lévi de $\mathbf{P}$, tous deux définis sur F. On note $\tilde{\mathbf{M}}$ l'ensemble des $g \in \tilde{\mathbf{G}}$ tels que $g\mathbf{M}g^{-1} = \mathbf{M}$ et $g\mathbf{P}g^{-1} = \mathbf{P}$. Si $\tilde{\mathbf{M}}$ est non vide, on dit que $\tilde{\mathbf{M}}$ est un Lévi de $\tilde{\mathbf{G}}$. On note $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$ l'ensemble des Lévi de $\tilde{\mathbf{G}}$. Pour un tel Lévi $\tilde{\mathbf{M}}$, on note $\mathbf{M}^+$ le sous-groupe qu'il engendre. Sa composante neutre est $\mathbf{M}$. On note $\mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$ l'ensemble des $\mathbf{P}$ vérifiant les conditions ci-dessus et, pour un tel $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^+$ le groupe engendré par $\mathbf{P}$ et $\mathbf{M}^+$.

On note $\tilde{G}_{ss}$ l'ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}$ et $\tilde{G}_{reg}$ le sous-ensemble des éléments fortement réguliers, c'est-à-dire les $g \in \tilde{G}$ tels que $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(g)$ est commutatif et la composante neutre $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(g)^0$ est un tore. Un élément $g \in \tilde{G}_{ss}$ est dit elliptique si $g\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(g)^0$ n'est contenu dans aucun Lévi propre de $\tilde{\mathbf{G}}$. On note $\tilde{G}_{ell}$ l'ensemble des éléments semi-simples fortement réguliers et elliptiques. On note $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{G}}}$ le plus grand tore déployé central dans $\mathbf{G}^+$. Pour $g \in \tilde{G}_{reg}$, on note $\mathbf{A}_g$ le plus grand tore déployé dans $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(g)$. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ et $g \in \tilde{G}_{reg}$, on définit l'intégrale orbitale :

$$J^G(g,f) = \Delta(g)^{1/2} \int_{A_g \backslash G} f(x^{-1}gx)dx,$$

une mesure de Haar étant fixée sur l'ensemble d'intégration. Le module $\Delta(g)$ est la valeur absolue du déterminant de $Ad(g) - 1$ agissant sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_G(g)$. On note $C_{cusp}(\tilde{G})$ le sous-espace des $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ telles que $J^G(g,f) = 0$ pour tout $g \in \tilde{G}_{reg} \setminus \tilde{G}_{ell}$.

On note $Rep(G^+)$ l'"ensemble" des représentations lisses de G^+ et $Rep_f(G^+)$ le sous-ensemble des représentations de longueur finie. Rappelons qu'une représentation est un couple (π, E), où E est un espace vectoriel complexe et π un homomorphisme de G^+ dans $GL(E)$. On oubliera souvent un terme du couple, en parlant de la représentation π où du G^+-module E. On note $R(G^+)$ le groupe de Grothendieck, tensorisé par $\mathbb{C}$, de $Rep_f(G^+)$. Une base de $R(G^+)$ est formée des représentations irréductibles. Fixons une racine de l'unité ζ dans $\mathbb{C}^\times$, d'ordre $|\mathbf{G}^+/\mathbf{G}|$. Notons $\boldsymbol{\zeta}$ le caractère de G^+ qui vaut ζ sur G. On note $R(\tilde{G})$ le quotient de $R(G^+)$ par le sous-espace engendré par les $\zeta\pi - \boldsymbol{\zeta} \otimes \pi$ pour $\pi \in R(G^+)$. Notons $D(\tilde{G})$ l'espace des formes linéaires sur $C_c^\infty(\tilde{G})$ invariantes par conjugaison par G. A tout élément π de $Rep_f(G^+)$ on associe la restriction $trace_{\tilde{G}}(\pi)$ de son caractère à $\tilde{G}$. On peut la considérer soit comme un élément de $D(\tilde{G})$, soit comme une fonction localement L^1 sur $\tilde{G}$, localement constante sur $\tilde{G}_{reg}$ (cf. [C], théorème 1). L'application $\pi \mapsto trace_{\tilde{G}}(\pi)$ se quotiente en des applications définies sur $R(G^+)$ puis $R(\tilde{G})$.

On note $\mathcal{Z}(G)$ le centre de Bernstein de G. Le groupe G^+ agit par conjugaison sur cette algèbre. On note $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ la sous-algèbre des invariants et $\Gamma(\tilde{G})$ l'ensemble des idempotents de $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. Cette algèbre agit sur toute représentation lisse de G^+ ainsi que sur $C_c^\infty(G^+)$. Les différents objets ci-dessus se décomposent de façon usuelle selon les éléments de $\Gamma(\tilde{G})$. Pour $\gamma \in \Gamma(\tilde{G})$, on définit ainsi le sous-ensemble $Rep_\gamma(G^+)$ de $Rep(G^+)$, le sous-espace $R_\gamma(\tilde{G})$ de $R(\tilde{G})$ etc...

Pour $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$ et $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$, on dispose du foncteur d'induction $Ind_{P^+}^{G^+} : Rep(M^+) \to Rep(G^+)$. On en déduit un homomorphisme $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} : R(\tilde{M}) \to R(\tilde{G})$, qui se prolonge sans difficulté en un homomorphisme $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} : D(\tilde{M}) \to D(\tilde{G})$. Remarquons que $Norm_G(\tilde{M})$ agit naturellement sur $D(\tilde{M})$ et que l'on a $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} \circ w = Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ pour tout $w \in Norm_G(\tilde{M})$.

Le cas qui nous intéressera est le suivant. On part de $\mathbf{G}$ connexe. On fixe un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_0$ défini sur F et minimal et une composante de Lévi $\mathbf{M}_0$ de $\mathbf{P}_0$ également définie sur F. Soit $\boldsymbol{\theta}$ un automorphisme de $\mathbf{G}$ d'ordre fini r, défini sur F, conservant $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{M}_0$. On pose $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G} \rtimes \{1, \theta, ..., \theta^{r-1}\}$, avec pour relations $\theta^r = 1$ et $\theta g \theta^{-1} = \boldsymbol{\theta}(g)$ pour $g \in \mathbf{G}$. La structure sur F est telle que $\theta \in G^+$. On prend alors $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\theta$. Un Lévi $\tilde{\mathbf{M}}$ est dit standard si $\mathbf{M}$ contient $\mathbf{M}_0$ et il existe $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$ tel que $\mathbf{P}$ contienne $\mathbf{P}_0$. Pour un tel Lévi standard, on a encore $\mathbf{M}^+ = \mathbf{M} \rtimes \{1, \theta, ..., \theta^{r-1}\}$. Si (π, E) est une représentation de G, on note $(\boldsymbol{\theta}(\pi), \boldsymbol{\theta}(E))$

la représentation définie ainsi : $\boldsymbol{\theta}(E) = E$, $\boldsymbol{\theta}(\pi)(g) = \pi(\boldsymbol{\theta}^{-1}(g))$ pour $g \in G$.

Il y a diverses variantes ou cas particuliers aux constructions ci-dessus. Bien sûr, si $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}$, on simplifie les notations en supprimant les symboles inutiles, par exemple les $\tilde{.}$. Si on supprime l'hypothèse que l'image de $\tilde{\mathbf{G}}$ engendre le groupe $\mathbf{G}^+/\mathbf{G}$, on définira les objets relatifs à $\tilde{\mathbf{G}}$ en remplaçant simplement $\mathbf{G}^+$ par son sous-groupe engendré par $\tilde{\mathbf{G}}$. On peut aussi considérer un sous-groupe Z du centre de G, normal dans G^+, et définir de façon évidente les ensembles $Rep(G^+/Z)$, $D(\tilde{G}/Z)$ etc...

I.2. Le groupe GL_N tordu

Soit N un entier ≥ 1. On note $\mathbf{G}_N$, ou simplement $\mathbf{G}$, le groupe algébrique $\mathbf{GL}_N$ sur F. Introduisons l'élément :

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & . & \\ & . & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

de G et l'automorphisme $\boldsymbol{\theta}$ de $\mathbf{G}$: $\boldsymbol{\theta}(g) = J{}^tg^{-1}J$. Il préserve le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur et son tore diagonal. On construit comme dans le paragraphe précédent $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G} \rtimes \{1, \theta\}$, avec $\theta^2 = 1$ et $\theta g \theta^{-1} = \boldsymbol{\theta}(g)$ pour $g \in \mathbf{G}$. On pose $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\theta$.

Fixons un espace vectoriel V_N, ou simplement V, sur F, de dimension N, muni d'une base $e_1, ..., e_N$, notons V^* son dual et $e_1^*, ..., e_N^*$ la base duale. Notons $\mathbf{Isom}(V, V^*)$ l'ensemble des isomorphismes de V sur V^*. On identifie $\mathbf{G}$ à $\mathbf{GL}(V)$ puis au sous-groupe des éléments de $\mathbf{GL}(V \oplus V^*)$ de la forme :

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^tg^{-1} \end{pmatrix}.$$

Identifions θ à l'élément :

$$\begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbf{G}^+$ s'identifie au sous-groupe de $\mathbf{GL}(V \oplus V^*)$ réunion de l'ensemble des éléments de la forme (1) et de celui des éléments de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t\sigma^{-1} \\ \sigma & 0 \end{pmatrix},$$

pour $\sigma \in \mathbf{Isom}(V, V^*)$. On peut aussi identifier $\tilde{\mathbf{G}}$ à $\mathbf{Isom}(V, V^*)$ et $\mathbf{G}^+$ à $\mathbf{G} \sqcup \mathbf{Isom}(V, V^*)$. Pou éviter les confusions, pour $\sigma \in \mathbf{Isom}(V, V^*)$, on note $\tilde{\sigma}$ l'élément correspondant de $\tilde{\mathbf{G}}$.

I.3 Classes de conjugaison d'éléments semi-simples

Il nous sera utile de disposer d'une description élémentaire des classes de conjugaison semi-simples de l'ensemble $\tilde{G}$ du paragraphe précédent. Explicitons cette description, qui relève de l'algèbre linéaire élémentaire. On note $\bar{F}$ la clôture algébrique du corps F et $Gal(\bar{F}/F)$ le groupe de Galois de $\bar{F}/F$. Considérons les données suivantes :

I est un ensemble fini, $I^* \subseteq I$ un sous-ensemble ;

pour $i \in I$, $a_i \in \bar{F}^\times$; si $i \notin I^*$, on pose $F_i' = F[a_i]$, $f_i = [F_i' : F]$, on suppose que a_i n'est pas conjugué à a_i^{-1} par le groupe de Galois $Gal(F_i'/F)$; si $i \in I^*$, on pose $F_i = F[a_i]$, on suppose que F_i est extension quadratique d'une sous-extension F_i' de F, on pose $f_i = [F_i'/F]$, on suppose que $a_i\tau_i(a_i) = 1$ où τ_i est l'unique élément non trivial de $Gal(F_i/F_i')$;

pour $i \in I$, d_i est un entier ≥ 1 ;

pour $i \in I^*$, V_i est un espace de dimension d_i sur F_i, muni d'une forme $q_i : V_i \times V_i \to F_i$, sesquilinéaire (c'est-à-dire que $q_i(zv, z'v') = \tau_i(z)z'q_i(v, v')$ pour $z, z' \in F_i$) non dégénérée et vérifiant la relation $q_i(v', v) = a_i\tau_i(q_i(v, v'))$;

V_+ est un espace vectoriel sur F muni d'une forme quadratique non dégénérée q_+ ; on note d_+ sa dimension ;

V_- est un espace vectoriel sur F muni d'une forme symplectque non dégénérée q_- ; on note d_- sa dimension.

Remarques. (1) Evidemment, l'espace V_i ne désigne pas ici l'analogue de $V = V_N$ quand on remplace N par i.

(2) Pour $i \in I$, fixons $b_i \in F_i^\times$ tel que $a_i b_i \tau(b_i)^{-1} = 1$. La condition de symétrie imposée à q_i équivaut à ce que $b_i q_i$ soit hermitienne. Il en résulte que le groupe d'isométries $\mathbf{U}(q_i)$ de la forme q_i est un groupe unitaire habituel.

Eventuellement, V_+ ou V_- peuvent être nuls. On suppose de plus :

$$N = d_+ + d_- + 2\sum_{i\in I} d_i f_i$$

pour $i, j \in I$ avec $i \neq j$, il n'y a pas d'isomorphisme F-linéaire de $F[a_i]$ sur $F[a_j]$ envoyant a_i sur a_j ou a_j^{-1}.

A ces données, on va associer une classe de conjugaison dans $\tilde{G}$. On note ci-dessous V_i^* le dual de V_i quand on considère celui-ci comme espace sur F et $Isom(V_i, V_i^*)$ l'ensemble des isomorphismes F-linéaires de V_i dans V_i^*. On note de même V_+^* etc...

Pour $i \in I \setminus I^*$, on pose $V_i' = F_i'^{d_i}$, $V_i'' = Hom_{F_i'}(V_i', F_i')$, $V_i = V_i' \oplus V_i''$. On définit $\sigma_i \in Isom(V_i, V_i^*)$ par l'égalité :

$$< x' + x'', \sigma_i(y' + y'') >= trace_{F_i'/F}(< x', y'' > +a_i < y', x'' >)$$

pour $x', y' \in V_i'$ et $x'', y'' \in V_i''$.

Pour $i \in I^*$, on définit $\sigma_i \in Isom(V_i, V_i^*)$ par l'égalité :

$$< x, \sigma_i(y) >= trace_{F_i/F}(q_i(x, y)).$$

Pour $\zeta = \pm$, on définit $\sigma_\zeta \in Isom(V_\zeta, V_\zeta^*)$ par l'égalité :

$$< x, \sigma_\zeta(y) >= q_\zeta(x, y).$$

En identifiant V à $V_+ \oplus V_- \oplus (\oplus_{i\in I} V_i)$, la collection $(\sigma_+, \sigma_-, (\sigma_i)_{i\in I})$ définit un élément $\sigma \in Isom(V, V^*)$. On en déduit un élément $s = \tilde{\sigma} \in \tilde{G}$. C'est un élément semi-simple dont la classe de conjugaison est bien déterminée.

Les modifications élémentaires suivantes ne changent pas la classe de conjugaison de s :

- changer I et I^* en d'autres ensembles de même nombre d'éléments ;
- remplacer a_i par un conjugué par un élément de $Gal(\bar{F}/F)$;
- remplacer a_i par a_i^{-1} ;
- remplacer les formes q_i, q_+ ou q_- par des formes équivalentes.

A ces modifications élémentaires près, on obtient ainsi une classification des classes de conjugaison d'éléments semi-simples de $\tilde{G}$

Le commutant $\mathbf{Z_G}(s)$ dans $\mathbf{G}$ de l'élément s construit ci-dessus est égal à :

$$\mathbf{O}(q_+) \times \mathbf{Sp}(q_-) \times (\prod_{i\in I\setminus I^*} \mathbf{GL}_{d_i/F_i'}) \times (\prod_{i\in I^*} \mathbf{U}(q_i)_{/F_i'})$$

où bien sûr $\mathbf{O}(Q_+)$, resp. $\mathbf{Sp}(q_-)$, est le groupe orthogonal, resp. symplectique, de q_+, resp. q_-, et, par exemple pour $i \in I^*$, $\mathbf{U}(q_i)_{/F_i'}$ est la restriction de F_i' à F du groupe des automorphismes sur F_i' de la forme q_i.

II. Pseudo-coefficients

II.1. La théorie de Schneider-Stuhler

La situation est celle de I.2. On note $z(\varpi)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux tous égaux à ϖ et Z_2 le sous-groupe discret de G engendré par $z(\varpi)^2$. On fixe une mesure de Haar sur G^+. On munit G^+/Z_2 de la mesure de la mesure de Haar quotient par la mesure de comptage sur Z_2. Remarquons que $z(\varpi)^2 = z(\varpi)\boldsymbol{\theta}(z(\varpi)^{-1})$. On en déduit que si π est une représentation lisse irréductible de G telle que $\boldsymbol{\theta}(\pi) \simeq \pi$, le caractère central de π est trivial sur $z(\varpi)^2$.

Notons Imm l'immeuble du groupe $\mathbf{PGL}_N$ sur F. C'est un ensemble muni d'une décomposition en facettes. Comme on le sait, les sommets de cet immeuble peuvent s'identifier aux réseaux de V (c'est-à-dire aux $\mathfrak{o}$-réseaux) modulo homothéties. Pour tout tel réseau L, on pose $L^* = \{v^* \in V^*; \forall v \in L, < v^*, v > \in \mathfrak{o}\}$. Le groupe G agit sur Imm et cette action se prolonge en une action naturelle de G^+. En particulier, pour $\sigma \in Isom(V, V^*)$, $\tilde{\sigma}$ envoie le sommet associé à un réseau L sur celui associé à $\sigma(L)^*$. Notons Φ l'ensemble des facettes de Imm. Pour $\phi \in \Phi$, notons $d(\phi)$ la dimension de ϕ, $K^+(\phi)$ le stabilisateur de ϕ dans G^+, $K(\phi)$ le sous-groupe des $g \in G \cap K^+(\phi)$ tels que $|det(g)| = 1$ et $K^u(\phi)$ le radical pro-p-unipotent de $K(\phi)$. Pour tout entier $e \in \mathbb{N}$, Schneider et Stuhler définissent un sous-groupe $K^e(\phi)$ de $K^u(\phi)$, distingué dans $K^+(\phi)$ (cf. [SS]). En particulier, pour $e = 0$, $K^0(\phi) = K^u(\phi)$. Ils définissent aussi une fonction ϵ_ϕ sur $K^+(\phi)$. Si $\phi_0, ..., \phi_k$ sont les sommets de Imm appartenant à la clôture de ϕ, tout élément $g \in K^+(\phi)$ définit une permutation de l'ensemble $\{\phi_0, ..., \phi_k\}$ et $\epsilon_\phi(g)$ est la signature de cette permutation.

Soit $e \in \mathbb{N}$. On note $Rep^e(G^+/Z_2)$ le sous-ensemble des représentations $(\pi^+, E) \in Rep(G^+/Z_2)$ pour lesquelles il existe un sommet ϕ de Imm tel que le G^+-module E soit engendré par son sous-espace $E^{K^e(\phi)}$ des invariants par $K^e(\phi)$. Soit (π^+, E) une telle représentation, de longueur finie. Pour tout $\phi \in \Phi$ et tout $g \in K^+(\phi)$, l'opérateur $\pi^+(g)$ conserve l'espace de dimension finie $E^{K^e(\phi)}$. Cela permet de définir une fonction $f_\phi^{\pi^+,e} \in C_c^\infty(G^+/Z_2)$ par :

$$f_\phi^{\pi^+,e}(g) = \begin{cases} \epsilon_\phi(g) trace(\pi^+(g)|E^{K^e(\phi)}), & si\ g \in K^+(\phi), \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Fixons un ensemble de représentants Φ/G^+ des orbites pour l'action de G^+ dans Φ. On pose :

$$f^{\pi^+,e} = \sum_{\phi \in \Phi/G^+} (-1)^{d(\phi)} mes(K^+(\phi)/Z_2)^{-1} f_\phi^{\pi^+,e}.$$

Rappelons enfin quelques définitions. Pour $\pi_1^+, \pi_2^+ \in Rep_f(G^+/Z_2)$ et tout entier $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $Ext^m(\pi_1^+, \pi_2^+)$. Il est de dimension finie, nul pour m assez grand. On pose :

$$EP(\pi_1^+, \pi_2^+) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m dim_{\mathbb{C}} Ext^m(\pi_1^+, \pi_2^+).$$

Pour l'énoncé du théorème ci-dessous, on modifie légèrement les définitions de I.1. Soient $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{M}$ une composante de Lévi de $\mathbf{P}$, tous deux définis sur F. On définit $\mathbf{M}^+$ comme en I.1. Notons $D(G^+/Z_2)$ l'espace des distributions sur G^+/Z_2 invariantes par conjugaison par G^+ et définissons de même $D(M^+/Z_2)$. Même si $\tilde{\mathbf{M}}$ est vide, on définit sans difficulté un homomorphisme d'induction $Ind_{M^+}^{G^+} : D(M^+/Z_2) \to D(G^+/Z_2)$. Par ailleurs, on pose $G_{ell}^+ = G_{ell} \cup \tilde{G}_{ell}$ et, pour $g \in G_{ell}^+$ et $f \in C_c^\infty(G^+/Z_2)$, on pose :

$$J^{G^+}(g, f) = \Delta(g)^{1/2} \int_{G^+/Z_2} f(x^{-1}gx)dx.$$

Théorème. *Soient* $e \in \mathbb{N}$ *et* $\pi^+ \in Rep_f^e(G^+/Z_2)$.

(i) Pour tout $\pi_0^+ \in Rep_f(G^+/Z_2)$, *on a l'égalité* $trace(\pi_0^+(\bar{f}^{\pi^+,e})) = EP(\pi^+, \pi_0^+)$.

(ii) Pour tout couple $(\mathbf{P}, \mathbf{M})$ *comme ci-dessus, avec* $\mathbf{P}$ *propre, et pour toute distribution* $D \in Ind_{M^+}^{G^+}(D(M^+/Z_2))$, *on a l'égalité* $D(f^{\pi^+,e}) = 0$.

(iii) Pour tout $g \in G^+_{ell}$, on a l'égalité trace $\pi^+(g) = \Delta(g)^{-1/2} J^{G^+}(g, f^{\pi^+,e})$.

Ce théorème est dû à Schneider et Stuhler ([SS] proposition III.4.1, lemme III.4.19 et théorème III.4.16). Ils supposent leur groupe connexe mais le résultat s'étend. En effet, le point essentiel de leur preuve est la construction d'une résolution projective de l'espace E de π^+. Mais considérons E comme un G-module et considérons la résolution projective $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ construite par Schneider et Stuhler. Les E_m sont a priori simplement des G-modules. En fait, la construction de Schneider et Stuhler est "canonique". Alors l'action de G sur chaque E_m se prolonge naturellement en une action de G^+ et les différentielles sont équivariantes pour ces actions. De plus, un G^+-module qui est projectif en tant que G-module l'est automatiquement comme G^+-module. Alors $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une résolution projective dans la catégorie $Rep(G^+/Z_2)$. Le théorème s'ensuit par les mêmes arguments que dans [SS]. $\square$

II.2 Pseudo-coefficients sur $\tilde{G}$

Notons $\tilde{\Phi}$ l'ensemble des $\phi \in \Phi$ tels que $K^+(\phi) \cap \tilde{G}$ soit non vide. Pour $\phi \in \tilde{\Phi}$, notons $C(\phi)$ l'ensemble des "composantes connexes" de $K^+(\phi) \cap \tilde{G}$, c'est-à-dire l'ensemble des orbites pour la multiplication par $K(\phi)$. Fixons un ensemble de représentants $\tilde{\Phi}/G$ des orbites pour l'action de G dans $\tilde{\Phi}$ et, pour tout $\phi \in \tilde{\Phi}$, un ensemble de représentants $C(\phi)/Z_2$ des orbites pour la multiplication par Z_2 dans $C(\phi)$.

Soient $e \in \mathbb{N}$ et $\pi^+ \in Rep^e_f(G^+/Z_2)$. Pour $\phi \in \tilde{\Phi}$, on a défini la fonction $f_\phi^{\pi^+,e}$. Pour $c \in C(\phi)$, on note $f_c^{\pi^+,e}$ la fonction égale à $f_\phi^{\pi^+,e}$ sur c et nulle hors de c. On pose :

$$\tilde{f}^{\pi^+,e} = 2 \sum_{\phi\in\tilde{\Phi}/G} (-1)^{d(\phi)} mes(K(\phi))^{-1} |C(\phi)/Z_2|^{-1} \sum_{c\in C(\phi)/Z_2} f_c^{\pi^+,e}.$$

Cette fonction est à support compact dans $\tilde{G}$. On revient dans l'énoncé suivant aux notations de I.1.

Corollaire. *Soient $e \in \mathbb{N}$ et $\pi^+ \in Rep^e_f(G^+/Z_2)$.*

(i) Soient $\gamma, \gamma_0 \in \Gamma(\tilde{G})$, avec $\gamma \neq \gamma_0$. Supposons $\pi^+ \in Rep_{f,\gamma}(G^+/Z_2)$ et soit $\pi_0^+ \in Rep_{f,\gamma_0}(G^+/Z_2)$. Alors trace$(\pi_0^+(\bar{\tilde{f}}^{\pi^+,e})) = 0$.

(ii) La fonction $\tilde{f}^{\pi^+,e}$ appartient à $C_{cusp}(\tilde{G})$.

(iii) Pour tout $g \in \tilde{G}_{ell}$, on a l'égalité trace$_{\tilde{G}}\pi^+(g) = \Delta(g)^{-1/2} J^G(g, \tilde{f}^{\pi^+,e})$.

Preuve. On part de la fonction $f^{\pi^+,e}$ définie en II.1. Fixons un ensemble de représentants Φ/G des orbites pour l'action de G dans Φ. Posons :

$$f_1 = \frac{1}{2} \sum_{\phi\in\Phi/G} (-1)^{d(\phi)} mes((K^+(\phi) \cap G)/Z_2)^{-1} f_\phi^{\pi^+,e}.$$

Il est immédiat que $D(f^{\pi^+,e}) = D(f_1)$ pour toute distribution $D \in D(G^+/Z_2)$. On peut donc remplacer $f^{\pi^+,e}$ par f_1 sans changer les conclusions du théorème II.1.

Notons f_2 la restriction de f_1 à $\tilde{G}$. Cette fonction vérifie encore le (ii) du théorème : si D vérifie l'hypothèse de ce (ii), la restriction de D à $\tilde{G}$ la vérifie aussi. Elle vérifie le (iii), pourvu que l'on se limite aux $g \in \tilde{G}_{ell}$. La propriété (i) est modifiée ainsi. Pour $\pi_0^+ \in Rep_f(G^+/Z_2)$, notons π_0 sa restriction à G. En se plaçant dans la catégorie $Rep(G/Z_2)$, on définit la caractéristique d'Euler-Poincaré $EP(\pi, \pi_0)$. On a alors :

$$trace(\pi_0^+(\bar{f}_2)) = EP(\pi^+, \pi_0^+) - \frac{1}{2} EP(\pi, \pi_0).$$

En effet, la théorie de Schneider-Stuhler construit une fonction $f^{\pi,e}$ telle que $trace(\pi_0(\bar{f}^{\pi,e})) = EP(\pi, \pi_0)$. Mais, au facteur $\frac{1}{2}$ près, $f^{\pi,e}$ n'est autre que la restriction de f_1 à G. Autrement dit, $f^{\pi,e} = 2(f_1 - f_2)$. On a alors $EP(\pi, \pi_0) = 2\,trace(\pi_0(\bar{f}_1 - \bar{f}_2)) = 2\,trace(\pi_0^+(\bar{f}_1 - \bar{f}_2))$ (puisque $f_1 - f_2$ est à support dans G), puis le résultat en appliquant le (i) du théorème.

Sans changer f_2, on peut remplacer dans la définition de f_1 l'ensemble Φ/G par $\tilde{\Phi}/G$. On vérifie alors que :

$$f_2(g) = \frac{1}{4}\sum_{z\in Z_2} \tilde{f}^{\pi^+,e}(gz)$$

pour tout $g \in \tilde{G}$. Pour $\pi_0^+ \in Rep_f(G^+/Z_2)$, on a l'égalité $\pi_0^+(\bar{f}_2) = \frac{1}{4}\pi_0^+(\bar{\tilde{f}}^{\pi^+,e})$, le premier terme étant défini par une intégrale sur $\tilde{G}/Z_2$ et le second par une intégrale sur $\tilde{G}$. Donc :

$$(1) \qquad trace(\pi_0^+(\bar{\tilde{f}}^{\pi^+,e})) = 4EP(\pi^+,\pi_0^+) - 2EP(\pi,\pi_0).$$

Sous les hypothèses du (i) du corollaire, les deux caractéristiques d'Euler-Poincaré sont nulles ([BW] théorème I.4.1) et ce (i) en résulte.

Remarquons que toute distribution sur $\tilde{G}$ invariante par conjugaison par G l'est par conjugaison par G^+, car le commutant de tout élément de $\tilde{G}$ dans G^+ coupe $\tilde{G}$. Toute telle distribution est invariante par multiplication par Z_2 : la multiplication par $z(\varpi)^2$ coïncide avec la conjugaison par $z(\varpi)$. Alors $D(\tilde{G})$ est isomorphe au sous-espace des éléments de $D(G^+/Z_2)$ à support dans $\tilde{G}/Z_2$. On déduit alors facilement de la propriété (ii) du théorème que pour tout Lévi propre $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$ et pour tout $D \in Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D(\tilde{M}))$, on a $D(\tilde{f}^{\pi^+,e}) = 0$. Cela entraîne que $\tilde{f}^{\pi^+,e}$ appartient à $C_{cusp}(\tilde{G})$.

Notons Z_1 le sous-groupe de G engendré par $z(\varpi)$. La formule reliant f_2 et $\tilde{f}^{\pi^+,e}$ peut se récrire :

$$f_2(g) = \frac{1}{4}\sum_{z\in Z_1} \tilde{f}^{\pi^+,e}(zgz^{-1}).$$

Soit $g \in \tilde{G}_{ell}$. Par définition :

$$\Delta(g)^{-1/2}J^{G^+}(g,f_2) = \int_{G^+/Z_2} f_2(x^{-1}gx)dx.$$

De ces deux formules, on déduit :

$$\Delta(g)^{-1/2}J^{G^+}(g,f_2) = \frac{1}{4}[Z_1 : Z_2]\int_{G^+} \tilde{f}^{\pi^+,e}(x^{-1}gx)dx = \frac{1}{2}\int_{G^+} \tilde{f}^{\pi^+,e}(x^{-1}gx)dx.$$

Toujours parce que le commutant de g coupe $\tilde{G}$, ceci n'est autre que $\int_G \tilde{f}^{\pi^+,e}(x^{-1}gx)dx$, i.e. $\Delta(g)^{-1/2}J^G(g,\tilde{f}^{\pi^+,e})$. Grâce au (iii) du théorème, on en déduit l'assertion (iii) du corollaire. □

III. A propos du lemme fondamental

III.1. Conjugaison stable

Soit $\mathbf{G}^+$ un groupe comme en I.1. On munit G^+ d'une mesure de Haar. Soit g un élément semi-simple de $\tilde{G}$. Posons $\mathbf{G}^g = \mathbf{Z_G}(g)$, notons $\mathbf{G}_g$ la composante neutre de $\mathbf{G}^g$, $\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$ le commutant de $\tilde{\mathbf{G}}$ dans $\mathbf{G}$ et $\mathbf{I}_g$ le sous-groupe de $\mathbf{G}^g$ engendré par $\mathbf{G}_g$ et $\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$. Soient g, g' deux éléments semi-simples de $\tilde{G}$. Suivant [L2], définition III.1.1, on dit que g et g' sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $x \in \mathbf{G}(\bar{F})$ tel que $xgx^{-1} = g'$ et, pour tout $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$, $\sigma(x^{-1})x \in \mathbf{I}_g(\bar{F})$. On note $\tilde{G}_{reg}/st$ l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{reg}$. Soient g et g' deux éléments de $\tilde{G}_{reg}$ stablement conjugués. Les groupes $\mathbf{G}_g$ et $\mathbf{G}_{g'}$ sont isomorphes, ainsi que leurs plus grands sous-tores déployés $\mathbf{A}_g$ et $\mathbf{A}_{g'}$. On munit A_g et $A_{g'}$ de mesures de Haar qui se correspondent par cet isomorphisme. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ et $g \in \tilde{G}_{reg}$, on pose :

$$J^{st}(g,f) = \sum_{g'\in E(g)} J^G(g',f),$$

où $E(g)$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par G dans la classe de conjugaison stable de g.

III.2. Groupes endoscopiques principaux de $\tilde{G}_N$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On fixe un espace vectoriel V_n^- sur F, de dimension $2n$, muni d'une forme symplectique q_n^-. On note $\mathbf{H}_n^-$ le groupe symplectique de (V_n^-, q_n^-). On fixe un espace vectoriel V_n^+ sur F, de dimension $2n+1$, muni d'une forme quadratique q_n^+, non dégénérée. On suppose le noyau anisotrope de cette forme de dimension 1, isomorphe à F muni de la forme quadratique x^2. On note H_n^+ le groupe spécial orthogonal de (V_n^+, q_n^+).

Soit N un entier ≥ 1. On considère le groupe $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}_N^+$ de I.2. Si N est pair, on pose $n = N/2$, $\epsilon = +$. Si N est impair, on pose $n = (N-1)/2$, $\epsilon = -$. Dans les deux cas, on pose $\mathbf{H} = \mathbf{H}_n^\epsilon$. D'après [KS], théorème 3.3A, il y a une application :

$$Norme : \tilde{G}_{reg}/st \to H_{reg}/st.$$

Elle se décrit ainsi. Soit $g \in \tilde{G}_{reg}$ et $\sigma \in Isom(V, V^*)$ tel que $g = \tilde{\sigma}$. Notons $\Lambda(g)$ l'ensemble des valeurs propres dans $\bar{F}$ de l'automorphisme ${}^t\sigma^{-1}\sigma$ de V. Parce que g est fortement régulier, ces valeurs propres sont toutes distinctes. Si N est impair, $\Lambda(g)$ contient 1. De même, soit $h \in H_{reg}$. Notons $\Lambda(h)$ l'ensemble des valeurs propres de h considéré comme un automorphisme de V_n^ϵ. Parce que h est fortement régulier, ces valeurs propres sont toutes distinctes. Si N est pair, $\Lambda(h)$ contient 1. Alors la norme de la classe de conjugaison stable de g est égale à la classe de conjugaison stable de h si et seulement si :

- si N est pair, $\Lambda(h) = \{-x; x \in \Lambda(g)\} \cup \{1\}$;
- si N est impair, $\Lambda(h) \cup \{1\} = \Lambda(g)$.

Remarque. Le signe $-$ du cas pair vient du fait que l'automorphisme $\boldsymbol{\theta}$ que nous considérons ne fixe pas d'épinglage dans ce cas.

L'application $Norme$ est bijective. Pour $g \in \tilde{G}_{reg}$ et $h \in H_{reg}$, on notera simplement $Norme(g) = h$ la relation : l'image par $Norme$ de la classe de conjugaison stable de g est la classe de conjugaison stable de h. S'il en est ainsi, les tores $\mathbf{A}_g$ et $\mathbf{A}_h$ sont isomorphes. On supposera que A_g et A_h sont munis de mesures de Haar qui se correspondent par cet isomorphisme. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ et $f^H \in C_c^\infty(H)$, on dit que f^H est un transfert de f si et seulement si $J^{st}(g, f) = J^{st}(h, f^H)$ pour tous $g \in \tilde{G}_{reg}$, $h \in H_{reg}$ tels que $Norme(g) = h$.

Notons L_0 le réseau de V engendré sur $\mathfrak{o}$ par les vecteurs $e_1, ..., e_N$. Notons K son stabilisateur dans G, posons $\tilde{K} = \{\tilde{\sigma}; \sigma \in Isom(V, V^*), \sigma(L_0) = L_0^*\}$. L'ensemble $K \cup \tilde{K}$ est un groupe. Notons f_0 la fonction caractéristique de $\tilde{K}$ dans $\tilde{G}$. Fixons un réseau L^ϵ de V_n^ϵ, autodual pour la forme q_n^ϵ. Notons K^H le sous-groupe des éléments de H qui conservent ce réseau et f_0^H sa fonction caractéristique. Supposons $p \neq 2$ et $p > N$. Dans notre situation, le lemme fondamental est l'assertion suivante :

$(Lemmefond)_{F,N}$ *Il existe un réel $c > 0$ tel que cf_0^H soit un transfert de f_0.*

Le réel c dépend des choix de mesures de Haar.

III.3. Endoscopie non standard

Soit n un entier ≥ 1. Considérons les algèbres de Lie $\mathfrak{h}_n^+$ et $\mathfrak{h}_n^-$. Diverses définitions que nous avons posées pour les groupes se transposent naturellement aux algèbres de Lie : éléments semi-simples réguliers, intégrales orbitales, intégrales orbitales stables etc... Nous utiliserons pour les algèbres de Lie des notations similaires à celles que nous utilisons pour les groupes.

On définit une bijection :

$$\mathfrak{h}_{n,reg}^+/st \simeq \mathfrak{h}_{n,reg}^-/st$$

comme dans le paragraphe précédent. Pour $\zeta = \pm$ et $X \in \mathfrak{h}_n^\zeta$, on note $\Lambda(X)$ l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme X de V_n^ζ. Pour $X^+ \in \mathfrak{h}_{n,reg}^+$ et $X^- \in \mathfrak{h}_{n,reg}^-$, les classes de conjugaison stable de X^+ et de X^- se correspondent par la bijection précédente si et seulement si $\Lambda(X^+) = \Lambda(X^-) \cup \{0\}$. On notera cette relation $X^+ \sim X^-$.

Pour $\mathfrak{f}^+ \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_n^+)$ et $\mathfrak{f}^- \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_n^-)$ on dit que $\mathfrak{f}^+$ est un transfert de $\mathfrak{f}^-$ (ou vice-versa) si et seulement si, pour tous $X^+ \in \mathfrak{h}_{n,reg}^+$ et $X^- \in \mathfrak{h}_{n,reg}^-$ tels que $X^+ \sim X^-$, on a l'égalité

$J^{st}(X^+, \mathfrak{f}^+) = J^{st}(X^-, \mathfrak{f}^-)$. Pour $\zeta = \pm$, fixons un réseau L^ζ de V_n^ζ, autodual pour la forme q_n^ζ. On note $\mathfrak{f}_0^\zeta$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $X \in \mathfrak{h}_n^\zeta$ tels que $X(L^\zeta) \subseteq L^\zeta$. Supposons $p \neq 2$ et $p > 2n+1$. Considérons l'assertion :

$(\mathfrak{Lemmefond})_{F,n}$ *Il existe un réel* $c > 0$ *tel* $c\mathfrak{f}_0^+$ *soit un transfert de* $\mathfrak{f}_0^-$.

Soit N un entier ≥ 2 et supposons que n est défini comme dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire $n = [N/2]$.

Lemme. *L'assertion* $(\mathfrak{Lemmefond})_{F,n}$ *résulte de* $(Lemmefond)_{F,N}$.

La preuve est donnée dans le paragraphe suivant.

III.4. Réduction du lemme fondamental non connexe

La situation est la même que ci-dessus. Pour simplifier, on abandonne certains indices n superflus. Pour $g \in \tilde{G}$, on dit que g est compact si et seulement si g^2 l'est, c'est-à-dire si l'ensemble de valeurs propres est formé d'éléments de $\bar{F}^\times$ de valeurs absolues 1. On dit que g est topologiquement semi-simple si et seulement si g^2 l'est, c'est-à-dire si g est semi-simple et $\Lambda(g)$ est formé de racines de l'unité d'ordre premier à p. Tout élément compact $g \in \tilde{G}$ s'écrit de façon unique comme produit $g = su$, où s et u commutent, s est un élément topologiquement semi-simple de $\tilde{G}$ et u est un élément topologiquement unipotent de G. En effet, il existe un entier $m \geq 1$ et premier à p tel que $(g^2)^m$ soit topologiquement unipotent. Il existe en unique élément u de G, topologiquement unipotent, tel que $u^{2m} = (g^2)^m$. On pose $s = gu^{-1}$ et on vérifie que le couple (s, u) est l'unique solution de notre problème.

Supposons N pair. Notons σ_0 l'élément de $Isom(V, V^*)$ defini par :

$$\sigma_0(e_i) = \begin{cases} -e^*_{N+1-i}, & pour\ i = 1, ..., n, \\ e_{N+1-i}, & pour\ i = n+1, ..., N. \end{cases}$$

La forme bilinéaire q' définie sur V par $q(v, v') =< v, \sigma_0(v') >$ est symplectique et L_0 est un réseau autodual pour cette forme. On peut donc identifier V_n^- à V de sorte que q_n^- s'identifie à q' et L_0 à L^-. Posons $s_0 = \tilde{\sigma}_0$. Alors s_0 est topologiquement semi-simple et $\mathbf{H}^-$ s'identifie au commutant de s_0 dans $\mathbf{G}$. Notons H_{tu}^- l'ensemble des éléments semi-simples fortement réguliers et topologiquement unipotents de H^-. Notons K^- le fixateur de L_0 dans H^- et f_0^- la fonction caractéristique de K^- dans H^-. Montrons que :

(1) pour tout $u \in H_{tu}^-$, on a l'égalité $J^{H^-}(u, f_0^-) = mes(K^-)mes(K)^{-1}J^G(s_0u, f_0)$.

On vérifie que les facteurs Δ introduits dans les définitions des deux termes sont égaux. On remarque aussi que $\mathbf{A}_u = \mathbf{A}_{s_0u}$, le premier terme étant relatif au groupe $\mathbf{H}^-$, le second à $\mathbf{G}$. Il s'agit alors de prouver l'égalité :

$$\{x \in G; x^{-1}s_0ux \in \tilde{K}\} = \{yk; y \in H^-, y^{-1}uy \in K^-, k \in K\}.$$

L'inclusion du membre de droite dans celui de gauche est évidente. Soit $x \in G$ tel que $x^{-1}s_0ux \in \tilde{K}$. En élevant au carré, on a $x^{-1}u^2x \in K$, car $s_0^2 = -1$. Puisque u est topologiquement unipotent, $x^{-1}ux$ appartient à la clôture du groupe engendré par $x^{-1}u^2x$. Donc $x^{-1}ux \in K$, puis $x^{-1}s_0x \in \tilde{K}$. Cette égalité se traduit par : le réseau $x(L_0)$ est autodual pour la forme q_n^-. Mais les réseaux autoduaux pour cette forme sont dans une même orbite pour l'action de H^-. On peut donc écrire $x = yk$ avec $k \in K$ et $y \in H^-$. La relation $x^{-1}ux \in K$ entraîne $y^{-1}uy \in K \cap H^- = K^-$, ce qui prouve l'assertion.

Soit $u \in H_{tu}^-$. Notons $E(u)$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison par H^- dans la classe de conjugaison stable de u. Montrons que :

(2) l'ensemble $\{s_0u'; u' \in E(u)\}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par G dans la classe de conjugaison stable de s_0u.

Il est clair que, pour $u', u'' \in H^-$, s_0u' et s_0u'' sont conjugués par G, resp. $\mathbf{G}(\bar{F})$, si et seulement si u' et u'' le sont par H^-, resp. $\mathbf{H}^-(\bar{F})$. La seule chose à vérifier est donc que si $g \in \tilde{G}$ est stablement conjugué à s_0u, il est conjugué par G à s_0u' pour un $u' \in H_{tu}^-$. Un tel élément est nécessairement compact. Décomposons-le en $g = s'u'$, avec s' topologiquement semi-simple et u' topologiquement unipotent. Soit σ' l'élément de $Isom(V,V^*)$ tel que $s'=\tilde{\sigma}'$. Les éléments s_0^2 et s'^2 sont conjugués par $\mathbf{G}(\bar{F})$. Puisque $s_0^2=-1$, on a aussi $s'^2=-1$. Cela signifie que la forme bilinéaire $q_{\sigma'}$ sur V définie par $q_{\sigma'}(v,v')=<v,\sigma'(v')>$ est symplectique. Toutes les formes symplectiques sur V étant équivalentes, $q_{\sigma'}$ est équivalente à q_n^-. Cela signifie que s' est conjugué à s_0 par un élément de G. Mais alors g est conjugué par G à un élément de la forme voulue.

Il résulte de (1) et (2) que, pour tout $u\in H_{tu}^-$, on a l'égalité :

$$J^{st}(u,f_0^-)=mes(K^-)mes(K)^{-1}J^{st}(s_0u,f_0).$$

Soient $X^+\in\mathfrak{h}_{reg}^+$, $X^-\in\mathfrak{h}_{reg}^-$, supposons $X^+\sim X^-$ et supposons d'abord que X^+ et X^- sont topologiquement nilpotents. Posons $u^-=\frac{1-X^-}{1+X^-}\in H^-$, $u^+=\left(\frac{1-X^+}{1+X^+}\right)^2\in H^+$. Alors u^-, resp. u^+, est un élément topologiquement unipotent de H^-, resp. H^+. On vérifie aisément les égalités :

$$J^{st}(X^-,\mathfrak{f}_0^-)=J^{st}(u^-,f_0^-),\ J^{st}(X^+,\mathfrak{f}_0^+)=J^{st}(u^+,f_0^+).$$

D'après ce que l'on vient de dire, on a aussi $J^{st}(X^-,\mathfrak{f}_0^-)=c'J^{st}(s_0u^-,f_0)$, où c' est indépendant de X^+ et X^-. Parce que $X^-\sim X^+$, on vérifie que $Norme(s_0u^-)=u^+$. Alors $(Lemmefond)_{F,N}$ nous dit que $J^{st}(s_0u^-,f_0)=c''J^{st}(u^+,f_0^+)$. On en déduit l'égalité :

$$(3)\qquad J^{st}(X^-,\mathfrak{f}_0^-)=cJ^{st}(X^+,\mathfrak{f}_0^+),$$

où c est indépendant de X^+ et X^-.

Il reste à généraliser cette égalité au cas où les éléments ne sont plus supposés topologiquement nilpotents. Si $\Lambda(X^-)$ contient un élément de $\bar{F}$ qui n'est pas entier, les deux membres sont évidemment nuls. Supposons $\Lambda(X^-)$ formé d'éléments entiers. On sait qu'alors les fonctions sur $\mathfrak{o}$:

$$\lambda\mapsto\left\{\begin{array}{l} J^{st}(\lambda^2X^-,\mathfrak{f}_0^-),\\ J^{st}(\lambda^2X^+,\mathfrak{f}_0^+)\end{array}\right.$$

sont toutes deux combinaisons linéaires de fonctions $\lambda\mapsto|\lambda|^i$, pour $i\in\mathbb{Z}$. Elles coïncident (à la constante c près) pour $|\lambda|<1$ car alors λX^+ et λX^- sont topologiquement nilpotents. Elles coïncident donc pour tout $\lambda\in\mathfrak{o}$, en particulier pour $\lambda=1$. Cela prouve (3) en général et donc l'assertion $(\mathfrak{Lemmefond})_{F,n}$.

Supposons maintenant N impair. A tout $\sigma\in Isom(V,V^*)$, associons la forme bilinéaire q_σ sur V définie par $q_\sigma(v,v')=<v,\sigma(v')>$. Considérons l'ensemble des σ tels que q_σ soit symétrique et non dégénérée. On sait que cet ensemble forme un nombre fini d'orbites pour l'action de G, de 8 orbites puisque $p\neq 2$. Fixons un ensemble de représentants $\{\sigma_1,...,\sigma_8\}$ de ces orbites. Comme il est loisible, on suppose que σ_1 et σ_2 sont de la forme suivante :

$$\sigma_1(e_i)=e_{N+1-i}^*,\ \sigma_2(e_i)=\left\{\begin{array}{ll} e_{N+1-i}^*, & si\ i\neq n+1,\\ \alpha e_{n+1}^*, & si\ i=n+1,\end{array}\right.$$

où α est un élément de $\mathfrak{o}^\times$ qui n'est pas un carré. Le réseau L_0 est autodual pour chacune des formes q_{σ_1} et q_{σ_2}. On peut identifier de deux façons l'espace V à V_n^+ de sorte que L_0 s'identifie à L^+, la première façon identifiant q_{σ_1} à q_n^+, la seconde identifiant q_{σ_2} à αq_n^+. Alors $\mathbf{H}^+$ s'identifie à la composante neutre du commutant dans $\mathbf{G}$ de s_1 ou s_2, avec des notations similaires à celles du cas N pair. Pour $u\in H^+$, on note s_1u, resp. s_2u, le produit de s_1, resp. s_2, avec l'élément du commutant de s_1, resp. s_2, auquel s'identifie u. On a alors l'analogue de (1) :

(4) pour tout $u\in H_{tu}^+$, on a l'égalité $J^{H^+}(u,f_0^+)=mes(K^+)mes(K)^{-1}J^G(s_1u,f_0)=mes(K^+)mes(K)^{-1}J^G(s_2u,f_0)$.

D'autre part, soient $i\in\{3,...,8\}$ et u un élément topologiquement unipotent de G commutant à s_i tel que s_iu appartienne à $\tilde{G}_{reg}$. On vérifie qu'aucun conjugué de s_iu n'appartient à $\tilde{K}$. On en déduit $J^G(s_iu,f_0)=0$. Soit $u\in H_{tu}^+$. On a l'analogue de (2) :

(5) un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de s_1u est formé de la réunion disjointe de $\{s_1u'; u' \in E(u)\}$, $\{s_2u'; u' \in E(u)\}$ et d'un ensemble fini d'éléments de la forme s_iu' vérifiant les propriétés ci-dessus pour $i \in \{3, ..., 8\}$.

On déduit des propriétés précédentes que, pour tout $u \in H^+_{tu}$, on a l'égalité :

$$J^{st}(u, f_0^+) = \frac{1}{2} mes(K^+) mes(K)^{-1} J^{st}(s_1u, f_0).$$

On poursuit alors la démonstration comme dans le cas N pair. Cela démontre le lemme III.3. $\square$

III.5. Commutation à la transformation de Fourier pour l'endoscopie non standard

Fixons un caractère continu non trivial ψ de F et un entier $n \geq 1$. On abandonne encore les indices n superflus. Pour $\zeta = \pm$, munissons $\mathfrak{h}^\zeta$ de la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto trace(XY)$, XY étant vu comme un endomorphisme de V_n^ζ. On définit la transformation de Fourier $\mathfrak{f} \mapsto \hat{\mathfrak{f}}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{h}^\zeta)$ par :

$$\hat{\mathfrak{f}}(X) = \int_{\mathfrak{h}^\zeta} \mathfrak{f}(Y)\psi(trace(XY))dY,$$

où dY est la mesure de Haar autoduale. On sait qu'il existe une fonction $\hat{i}^\zeta$ sur $\mathfrak{h}^\zeta_{reg} \times \mathfrak{h}^\zeta_{reg}$, localement constante, telle que :

$$J^{H^\zeta}(X, \hat{\mathfrak{f}}) = \int_{\mathfrak{h}^\zeta} \mathfrak{f}(Y)\hat{i}^\zeta(X, Y)\Delta(Y)^{-1/2}dY$$

pour tout $X \in \mathfrak{h}^\zeta_{reg}$. On a défini dans [W1] 1.1 la fonction :

$$D^\zeta(X, Y) = \gamma_\psi(\mathfrak{h}^\zeta) \sum_{X' \in E(X)} \hat{i}^\zeta(X', Y),$$

où, comme toujours, $E(X)$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par H^ζ dans la classe de conjugaison stable de X et $\gamma_\psi(\mathfrak{h}^\zeta)$ est une certaine constante.

On considère l'assertion :

$(\mathfrak{Lemmefond})_n$ *Pour tout corps de nombres k et presque toute place finie v de k, l'assertion $(\mathfrak{Lemmefond})_{k_v,n}$ est vérifiée.*

Proposition. *Supposons $(\mathfrak{Lemmefond})_n$ vérifié. Soient $X^+, Y^+ \in \mathfrak{h}^+_{reg}$, $X^-, Y^- \in \mathfrak{h}^-_{reg}$. Supposons $X^+ \sim X^-$, $Y^+ \sim Y^-$. Alors on a l'égalité $D^+(X^+, Y^+) = D^-(X^-, Y^-)$.*

Preuve. Dans [W1], on a prouvé une proposition analogue dans une situation où l'un des groupes $\mathbf{H}^+, \mathbf{H}^-$ était un groupe endoscopique de l'autre, sous une hypothèse analogue à $(\mathfrak{Lemmefond})_n$. Ici, ce n'est plus le cas mais on a une bonne correspondance entre classes de conjugaison stable. La même démonstration s'applique. Il y a toutefois un point technique à vérifier, nécessaire dans les constructions de [W1] paragraphe 8. On doit prouver l'égalité de l'énoncé si X^+, Y^+, X^-, Y^- sont assez loin de 0. Précisément, pour X^+, Y^+, X^-, Y^- fixés, on doit montrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que, si $\lambda \in F$ vérifie $val(\lambda) < m$, alors $D^+(X^+, \lambda Y^+) = D^-(X^-, \lambda Y^-)$. Notons $\mathbf{T}^+$, resp. $\mathbf{T}^-$, le commutant de Y^+ dans $\mathbf{H}^+$, resp. de Y^- dans $\mathbf{H}^-$. La proposition VIII.1 de [W2] montre l'existence de m tel que, pour $val(\lambda) < m$, on ait des égalités :

$$D^\zeta(X^\zeta, \lambda Y^\zeta) = \sum_{X_1 \in \mathfrak{t}^\zeta(X^\zeta)} c^\zeta(X_1, \lambda Y^\zeta)\psi(trace(\lambda X_1 Y^\zeta))$$

pour $\zeta = \pm$, où $\mathfrak{t}^\zeta(X^\zeta)$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{t}^\zeta$ stablement conjugués à X^ζ et $c^\zeta(X_1, \lambda Y^\zeta)$ est une constante explicite. Parce que $Y^+ \sim Y^-$, il y a un unique isomorphisme

$\varphi : \mathbf{T}^+ \to \mathbf{T}^-$, défini sur F et tel que $\varphi(Y^+) = Y^-$. On vérifie que, pour $Z^+ \in \mathfrak{t}^+$ et $Z^- = \varphi(Z^+)$ (en notant encore φ l'isomorphisme dérivé), on a $\Lambda(Z^+) = \Lambda(Z^-) \cup \{0\}$. On en déduit que $\varphi(\mathfrak{t}^+(X^+)) = \mathfrak{t}^-(X^-)$. En effet, pour $\zeta = \pm$, $\mathfrak{t}^\zeta(X^\zeta)$ est l'ensemble des $Z \in \mathfrak{t}^\zeta$ tels que $\Lambda(Z) = \Lambda(X^\zeta)$. Pour $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{t}^+$, on vérifie aussi l'égalité $trace(\varphi(Z_1)\varphi(Z_2)) = trace(Z_1Z_2)$, car $trace(ZZ) = \sum_{z\in\Lambda(Z)} z^2$ et $trace(\varphi(Z)\varphi(Z)) = \sum_{z\in\Lambda(\varphi(Z))} z^2$. Enfin, en se reportant aux définitions, on voit que $c^+(Z_1, Z_2) = c^-(\varphi(Z_1), \varphi(Z_2))$. L'égalité $D^+(X^+, \lambda Y^+) = D^-(X^-, \lambda Y^-)$ s'ensuit. $\square$

IV. Représentations elliptiques

IV.1. Quelques définitions générales

On considère un groupe $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G} \rtimes \{1, \theta, ..., \theta^{r-1}\}$ comme en I.1. On a déjà défini l'espace $C_{cusp}(\tilde{G})$ des $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ tels que $J^G(g, f) = 0$ pour tout $g \in \tilde{G}_{reg} \backslash \tilde{G}_{ell}$. On note $C_0(\tilde{G})$ le sous-espace des f tels que $J^G(g, f) = 0$ pour tout $g \in \tilde{G}_{reg}$. On pose $I_{cusp}(\tilde{G}) = C_{cusp}(\tilde{G})/C_0(\tilde{G})$. On note $f \mapsto f^G$ la projection naturelle de $C_{cusp}(\tilde{G})$ sur $I_{cusp}(\tilde{G})$. L'espace $I_{cusp}(\tilde{G})$ est muni d'un produit hermitien défini positif : pour $f_1, f_2 \in C_{cusp}(\tilde{G})$,

$$(f_1^G, f_2^G) = \int_{\tilde{G}_{ell}} J^G(g, \bar{f}_1) f_2(g) \Delta(g)^{-1/2} dg.$$

Notons $X^*(\tilde{\mathbf{G}})$ le groupe des caractères algébriques de $\mathbf{G}$, définis sur F et invariants par $\boldsymbol{\theta}$. Posons $\mathcal{X}_{nr}(\tilde{G}) = X^*(\tilde{\mathbf{G}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$. Pour $\chi \in X^*(\tilde{\mathbf{G}})$, l'homomorphisme $val \circ \chi : G \to \mathbb{Z}$ s'étend de façon unique en un homomorphisme de G^+ dans $\mathbb{Z}$, noté encore $val \circ \chi$. Alors tout élément de $\mathcal{X}_{nr}(\tilde{G})$ définit un caractère de G^+ : à $\chi \otimes z$, où $\chi \in X^*(\tilde{\mathbf{G}})$ et $z \in \mathbb{C}^\times$, on associe le caractère $g \mapsto z^{val\circ\chi(g)}$. On identifie ainsi $\mathcal{X}_{nr}(\tilde{G})$ à un groupe de caractères de G^+. Ce groupe agit naturellement sur les objets introduits en I.1 : $R(\tilde{G})$, $D(\tilde{G})$, $C_c^\infty(\tilde{G})$ etc...

On note $\mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$ le groupe des caractères de $A_{\tilde{G}}$, $\mathcal{X}_u(A_{\tilde{G}})$ le sous-groupe des caractères unitaires. L'application de restriction à $A_{\tilde{G}}$ définit un homomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{nr}(\tilde{G}) & \to & \mathcal{X}(A_{\tilde{G}}) \\ \mu & \mapsto & \mu_{|A_{\tilde{G}}} \end{array}$$

de noyau fini. Tout caractère de $A_{\tilde{G}}$ est produit d'un caractère unitaire et d'un élément de l'image de cet homomorphisme.

Pour $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$, les objets introduits en I.1 ont des variantes où l'on impose une condition de transformation par $A_{\tilde{G}}$ selon ξ. Ainsi, pour toute fonction f sur $\tilde{G}$ et tout $a \in A_{\tilde{G}}$, notons ${}^af$ la fonction $g \mapsto f(a^{-1}g)$. On note $C_\xi^\infty(\tilde{G})$ l'espace des fonctions f sur $\tilde{G}$, localement constantes, telles que ${}^af = \xi(a^{-1})f$ pour tout $a \in A_{\tilde{G}}$, et à support d'image compacte dans $A_{\tilde{G}}\backslash\tilde{G}$. On définit ses sous-espaces $C_{\xi,cusp}(\tilde{G})$, $C_{\xi,0}(\tilde{G})$ et le quotient $I_{\xi,cusp}(\tilde{G}) = C_{\xi,cusp}(\tilde{G})/C_{\xi,0}(\tilde{G})$. L'iintégration définit des surjections : $C_c^\infty(\tilde{G}) \to C_\xi^\infty(\tilde{G})$, $C_{cusp}(\tilde{G}) \to C_{\xi,cusp}(\tilde{G})$ etc... Pour $g \in \tilde{G}_{reg}$ et $f \in C_\xi^\infty(\tilde{G})$, on définit comme précédemment l'intégrale orbitale $J^G(g, f)$. On note $D_\xi(\tilde{G})$ le sous-espace des $D \in D(\tilde{G})$ tels que $D({}^af) = \xi(a)D(f)$ pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ et tout $a \in A_{\tilde{G}}$. Cet espace s'identifie à celui des formes linéaires sur $C_{\xi^{-1}}^\infty(\tilde{G})$ invariantes par conjugaison par G. On note $R_\xi(\tilde{G})$ le sous-espace des $\pi \in R(\tilde{G})$ tels que $trace_{\tilde{G}}\pi$ appartienne à $D_\xi(\tilde{G})$. On a l'égalité :

$$R(\tilde{G}) = \oplus_{\xi\in\mathcal{X}(A_{\tilde{G}})} R_\xi(\tilde{G}).$$

Dans le cas où ξ est unitaire, l'espace $I_{cusp,\xi}(\tilde{G})$ est muni d'un produit hermitien défini positif : pour $f_1, f_2 \in C_{cusp,\xi}(\tilde{G})$,

$$(f_1^G, f_2^G) = \int_{A_{\tilde{G}}\backslash\tilde{G}_{ell}} J^G(g, \bar{f}_1) f_2(g) \Delta(g)^{-1/2} dg.$$

On a déjà dit que l'algèbre de Bernstein $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ agissait sur les différents objets $R(\tilde{G})$, $C_c^\infty(\tilde{G})$ etc... Ceux-ci se décomposent de la façon usuelle selon les éléments de $\Gamma(\tilde{G})$, par exemple :

$$R(\tilde{G}) = \oplus_{\gamma\in\Gamma(\tilde{G})} R_\gamma(\tilde{G}).$$

Il n'est pas clair a priori que l'action de $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ sur $C_c^\infty(\tilde{G})$ préserve les sous-espaces $C_{cusp}(\tilde{G})$ et $C_0(\tilde{G})$. Cela résulte de l'interprétation suivante de ces sous-espaces : $C_0(\tilde{G})$ est le sous-espace des éléments de $C_c^\infty(\tilde{g})$ qui annulent $trace_{\tilde{G}}\pi$ pour tout $\pi \in R(\tilde{G})$; $C_{cusp}(\tilde{G})$ est le sous-espace des éléments de $C_c^\infty(\tilde{G})$ qui annulent $trace_{\tilde{G}}\pi$ pour tout $\pi \in Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(R(\tilde{M}))$, cela pour tout Lévi propre $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$. Ces interprétations résultent de [KR] théorème 1 et d'un argument de descente.

On pose :

$$R^\infty(\tilde{G}) = \prod_{\gamma\in\Gamma(\tilde{G})} R_\gamma(\tilde{G}).$$

On a évidemment $R(\tilde{G}) \subseteq R^\infty(\tilde{G})$. Pour $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, l'homomorphisme d'induction se prolonge en un homomorphisme $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} : R^\infty(\tilde{M}) \to R^\infty(\tilde{G})$. L'application $\pi \mapsto trace_{\tilde{G}}\pi$ se prolonge en un homomorphisme injectif de $R^\infty(\tilde{G})$ dans $D(\tilde{G})$. En effet, pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, il existe un sous-ensemble fini $\Gamma' \subset \Gamma(\tilde{G})$ tel que $trace_{\tilde{G}}\pi(f) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma(\tilde{G})\setminus\Gamma'$ et tout $\pi \in R_\gamma(\tilde{G})$.

Considérons une famille $(\pi_j)_{j\in J}$ de représentations lisses de longueur finie de G^+ et une famille $(c_j)_{j\in J}$ de nombres complexes. Supposons vérifiée la condition suivante : pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, il n'y a qu'un nombre fini de $j \in J$ pour lesquels π_j admet des vecteurs non nuls invariants par K. On peut alors définir l'élément $\sum_{j\in J} c_j trace_{\tilde{G}}\pi_j$ de $D(\tilde{G})$. Il appartient à l'image de $R^\infty(\tilde{G})$ dans $D(\tilde{G})$ et tout élément de cette image est ainsi obtenu pour des choix convenables des familles $(\pi_j)_{j\in J}$ et $(c_j)_{j\in J}$.

On peut marier les variantes introduites ci-dessus et définir, pour $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$ et $\gamma \in \Gamma(\tilde{G})$, les espaces $R_{\xi,\gamma}(\tilde{G}) = R_\xi(\tilde{G}) \cap R_\gamma(\tilde{G})$ etc... Pour tout $\gamma \in \Gamma(\tilde{G})$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- l'espace $R_\gamma(\tilde{G})$ est stable par l'action de $\mathcal{X}_{nr}(\tilde{G})$;

- l'ensemble des $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$ tels que $R_{\xi,\gamma}(\tilde{G}) \neq \{0\}$ est réduit à une unique orbite pour l'action de $\mathcal{X}_{nr}(\tilde{G})$.

IV.2. Fonctions de Labesse

Les constructions de ce paragraphe s'inspirent de celles de [L1], II.3, bien qu'elles n'y soient pas identiques. Soient $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$ et $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$. Au groupe $\mathbf{P}$ est associé un ensemble fini Δ_P de caractères de $\mathbf{A_M}$, l'ensemble des racines simples positives pour $\mathbf{P}$. Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{M})$. Pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, assez petit, il existe $\eta > 0$ de sorte que pour tout $a \in A_{\tilde{M}}$ vérifiant $|\alpha(a)| < \eta$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$, on puisse construire une fonction ${}^a f^K$ sur $\tilde{G}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) ${}^a f^K$ est invariante à droite par K ;

(2) si $g \in \tilde{G}_{reg}$ n'est pas conjugué à un élément du support de ${}^a f$, $J^G(g, {}^a f^K) = 0$;

(3) si $g \in \tilde{M}_{reg}$ appartient au support de ${}^a f$, $J^G(g, {}^a f^K) = J^M(g, {}^a f)$.

Remarquons que, sous les hypothèses de (3), g appartient à $\tilde{G}_{reg}$ pourvu que η soit assez petit.

Esquissons seulement la construction des ${}^a f^K$. On choisit un sous-groupe ouvert compact K' de G, possédant une décomposition de type Iwahori, tel que $K \subseteq K'$ et f soit invariante par $K' \cap M$. Pour $a \in A_{\tilde{M}}$, définissons une fonction f' sur $\tilde{G}$ de la façon suivante : elle est à support dans $\tilde{M}K'$; pour $m \in \tilde{M}$ et $k \in K'$, $f'(mk) = {}^a f(m) = f(a^{-1}m)$. On vérifie que, pourvu que $|\alpha(a)|$ soit assez petit pour tout $\alpha \in \Delta_P$, la fonction f' possède les propriétés (1) et (2) et il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que cf' possède la propriété (3). On pose ${}^a f^K = cf'$.

Des propriétés (2) et (3) résulte la propriété suivante. Soit d une fonction sur $\tilde{G}$, localement intégrable, localement constante sur $\tilde{G}_{reg}$ et invariante par conjugaison par G. Alors, sous les mêmes hypothèses concernant a et K, on a l'égalité :

$$(4)\qquad \int_{\tilde{G}} d(g)\,{}^a f^K(g)dg = \int_{\tilde{M}} d(m)\,{}^a f(m)\delta_P(m)^{-1/2}dm,$$

où δ_P est le module usuel (qui se définit aussi bien dans notre situation non connexe).

IV.3. Représentations quasi-supertempérées

Pour $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$ et $\delta, R \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \delta < 1$ et $0 < R$, on pose :

$$A_{\tilde{P}}(\delta, R) = \{a \in A_{\tilde{M}}; \forall \alpha \in \Delta_P, q^{-R} < |\alpha(a)| < q^{-\delta R}\ et\ \forall \chi \in X^*(\tilde{\mathbf{G}}), |\chi(a)| < q^{1/\delta}\}.$$

Soit $\pi \in R(\tilde{G})$. On dit que π est quasi-supertempérée si et seulement si, pour tout $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, avec $\tilde{\mathbf{M}} \neq \tilde{\mathbf{G}}$, tout sous-ensemble compact $C \subset \tilde{M}$, tous $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$, $\delta \in]0,1[$ et $\epsilon > 0$, il existe $R_0 > 0$ tel que, pour tous $R \geq R_0$, $a \in A_{\tilde{P}}(\delta, R)$ et $m \in C \cap \tilde{M}_{reg}$, on ait l'inégalité :

$$|trace_{\tilde{G}}\pi(am)| \leq \epsilon\delta_P(am)^{1/2}.$$

Remarquons que am appartient à $\tilde{G}_{reg}$ si R_0 est assez grand. Pour $\pi \in R(\tilde{G})$ et $\mu \in \mathcal{X}_{nr}(\tilde{G})$, π est quasi-supertempérée si et seulement si $\pi \otimes \mu$ l'est.

IV.4. Représentations elliptiques

On se place désormais dans l'une des situations suivantes :

(A) $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}$;

(B) $\mathbf{G}^+$ est le groupe $\mathbf{G}_N^+$ construit en I.1 pour un entier $N \geq 1$ ou, plus généralement, l'un de ses groupes de Lévi (c'est-à-dire $\tilde{\mathbf{G}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}}_N)$).

Un groupe du cas (B) se décrit concrètement ainsi : il y a un isomorphisme :

$$(1)\qquad \mathbf{G} = \mathbf{G}_{n_1} \times ... \times \mathbf{G}_{n_a} \times \mathbf{G}_{N_0} \times \mathbf{G}_{n_a} \times ... \times \mathbf{G}_{n_1},$$

et, pour $g = (g_1', ..., g_a', g_0, g_a'', ..., g_1'') \in \mathbf{G}$, on a :

$$\boldsymbol{\theta}(g) = (\boldsymbol{\theta}_{n_1}(g_1''), ..., \boldsymbol{\theta}_{n_a}(g_a''), \boldsymbol{\theta}_{n_0}(g_0), \boldsymbol{\theta}_{n_a}(g_a'), ..., \boldsymbol{\theta}_{n_1}(g_1')).$$

Dans le cas (A), Arthur a défini l'ensemble des représentations (virtuelles) elliptiques de G. Pour unifier les notations, on le note $Ell(\tilde{G})$. C'est un sous-ensemble linéairement indépendant de $R(\tilde{G})$. Dans le cas (B), notons d'abord $\widetilde{Temp}(G)$ l'ensemble des représentations admissibles irréductibles tempérées π de G qui se prolongent en une représentation de G^+, i.e. telles que $\boldsymbol{\theta}(\pi) = \pi$. Notons $\widetilde{Ell}(G)$ l'ensemble des $\pi \in \widetilde{Temp}(G)$ pour lesquelles il n'existe pas de couple $(\tilde{\mathbf{M}}, \sigma)$, où $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, $\tilde{\mathbf{M}} \neq \tilde{\mathbf{G}}$, $\sigma \in \widetilde{Temp}(M)$, tel que $\pi = Ind_M^G(\sigma)$. Si on écrit $\mathbf{G}$ sous la forme (1), une telle représentation π se décompose en $\pi_1' \otimes ... \otimes \pi_a' \otimes \pi_0 \otimes \pi_a'' \otimes ... \otimes \pi_1''$, toutes ces représentations étant irréductibles et :

- pour $i = 1, ..., a$, π_i' et π_i'' sont de la série discrète et $\pi_i'' = \boldsymbol{\theta}_{n_i}(\pi_i')$;

-il existe un sous-groupe de Lévi $\mathbf{L} = \mathbf{G}_{m_1} \times ... \times \mathbf{G}_{m_b}$ de $\mathbf{G}_{N_0}$ et une représentation admissible irréductible $\sigma = \sigma_1 \otimes ... \otimes \sigma_b$ de L de sorte que :

$\pi_0 = Ind_L^{G_{N_0}}(\sigma)$;

pour tout $j = 1, ..., b$, σ_j est de la série discrète et $\sigma_j = \boldsymbol{\theta}_{m_j}(\sigma_j)$;

pour tous $j, k = 1, ..., b$ avec $j \neq k$, σ_j n'est pas isomorphe à σ_k.

Pour tout $\pi \in \widetilde{Ell}(G)$, on choisit un prolongement de π à G^+, on note $Ell(\tilde{G})$ l'ensemble des images dans $R(\tilde{G})$ de ces prolongements. C'est un sous-ensemble linéairement indépendant dans $R(\tilde{G})$. En effet, l'homomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} R(G^+) & \to & R(G^+) \\ \pi & \mapsto & \pi - \boldsymbol{\zeta} \otimes \pi \end{array}$$

(ici $\zeta=-1$) se quotiente en un homomorphisme de $R(\tilde{G})$ dans $R(G^+)$. Par construction, l'image de $Ell(\tilde{G})$ par cet homomorphisme est linéairement indépendant dans $R(G^+)$.

Remarque. Cette définition simple de l'ensemble $Ell(\tilde{G})$ n'est valide que parce que la théorie des R-groupes est triviale pour les groupes linéaires.

Dans les deux cas (A) et (B), l'ensemble $Ell(\tilde{G})$ possède les propriétés ci-dessous :

(2) pour tout $\pi\in Ell(\tilde{G})$, il existe $\gamma\in\Gamma(\tilde{G})$ tel que $\pi\in R_\gamma(\tilde{G})$;

(3) pour tous $\gamma\in\Gamma(\tilde{G})$, $\xi\in\mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$, l'ensemble $R_{\xi,\gamma}(\tilde{G})\cap Ell(\tilde{G})$ est fini ;

(4) tout élément de $Ell(\tilde{G})$ est quasi-supertempéré.

Dans le cas (A), (4) est un résultat de Herb ([H], théorème 3.1). Indiquons brièvement la preuve dans le cas (B). Soit π un prolongement à G^+ d'un élément de $\widetilde{Ell}(G)$, soient $\tilde{\mathbf{M}}\in\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$ tel que $\tilde{\mathbf{M}}\neq\tilde{\mathbf{G}}$ et $\mathbf{P}\in\mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$. Introduisons le module de Jacquet normalisé π_P (normalisé signifie que l'on tord l'action naturelle par $\delta_P^{-1/2}$). C'est une représentation de M^+. Soient C un sous-ensemble compact de $\tilde{M}$ et $\delta\in]0,1[$. D'après la formule de Casselman, étendue par Rogawski au cas non connexe ([R], proposition 7.4), pour $R>0$ assez grand, on a l'égalité $trace_{\tilde{G}}\pi(am)=\delta_P(am)^{1/2}trace_{\tilde{M}}\pi_P(am)$ pour tout $m\in\tilde{M}_{reg}\cap C$ et tout $a\in A_{\tilde{P}}(\delta,R)$. Il suffit de considérer une représentation irréductible σ de M^+ intervenant dans π_P et de majorer $trace_{\tilde{M}}\sigma(am)$. On peut supposer que la restriction de σ à M est irréductible, i.e. $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{M}}(\sigma^0)=\sigma^0$, en notant σ^0 cette restriction. Sinon $trace_{\tilde{M}}\sigma=0$. Notons χ_{σ^0} le caractère de A_M par lequel ce groupe agit dans σ^0. La valeur absolue $|\chi_{\sigma^0}|$ s'écrit de façon unique sous la forme $|\chi_{\sigma^0}(a)|=\prod_{\alpha\in\Delta_P}|\alpha(a)|^{c_\alpha}$ pour des $c_\alpha\in\mathbb{R}$. Il suffit de prouver que $c_\alpha\geq 0$ pour tout α et $c_\alpha>0$ pour au moins un α. On écrit explicitement π comme on l'a fait plus haut, on calcule explicitement π_P (le calcul des modules de Jacquet d'induites de séries discrètes est facile pour les groupes linéaires), puis toutes les représentations irréductibles σ^0 de M intervenant dans π_P et telles que $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{M}}(\sigma^0)=\sigma^0$. On voit qu'elles vérifient la propriété requise. On laisse au lecteur ces calculs de modules de Jacquet. $\square$

On note $R_{ell}(\tilde{G})$ le sous-espace de $R(\tilde{G})$ engendré par les $\pi\otimes\mu$ où $\pi\in Ell(\tilde{G})$ et $\mu\in\mathcal{X}_{nr}(\tilde{G})$. On a l'égalité :

$$(5)\qquad R(\tilde{G})=\sum_{\tilde{\mathbf{M}}\in\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj}Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(R_{ell}(\tilde{M})^{Norm_G(\tilde{M})}),$$

où $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$ est l'ensemble des classes de conjugaison par G dans $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$ ou un ensemble de représentants de ces classes. C'est bien connu dans le cas (A) ([A2], paragraphe 3) et cela se déduit dans le cas (B) de la preuve du lemme 10.2 de [R].

Pour $\xi\in\mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$ ou $\gamma\in\Gamma(\tilde{G})$, on définit les variantes $Ell_\xi(\tilde{G})$, $R_{\xi,ell}(\tilde{G})$, $Ell_\gamma(\tilde{G})$, $R_{\gamma,ell}(\tilde{G})$ des objets définis ci-dessus. La décomposition (5) est compatible avec l'action de $\Gamma(\tilde{G})$. Précisément, pour $\tilde{\mathbf{M}}\in\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, il y a une application $\Gamma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}:\Gamma(\tilde{M})\to\Gamma(\tilde{G})$, à fibres finies, telle que, pour tout $\gamma\in\Gamma(\tilde{G})$, on ait l'égalité :

$$(6)\qquad R_\gamma(\tilde{G})=\sum_{\tilde{\mathbf{M}}\in\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj}Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\left(\left(\sum_{\gamma_M\in\Gamma(\tilde{M}),\Gamma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma_M)=\gamma}R_{\gamma_M,ell}(\tilde{M})\right)^{Norm_G(\tilde{M})}\right).$$

On pose :

$$R_{ell}^\infty(\tilde{G})=\prod_{\gamma\in\Gamma(\tilde{G})}R_{\gamma,ell}(\tilde{G}).$$

De l'égalité ci-dessus résulte l'égalité :

$$(7)\qquad R^\infty(\tilde{G})=\sum_{\tilde{\mathbf{M}}\in\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj}Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(R_{ell}^\infty(\tilde{M})^{Norm_G(\tilde{M})}).$$

IV.5. Représentations elliptiques et fonctions cuspidales

Notons $R_{Ind}(\tilde{G})$ la somme du membre de droite de IV.4(5) limitée aux $\tilde{\mathbf{M}} \neq \tilde{\mathbf{G}}$. On définit les variantes $R_{\xi,Ind}(\tilde{G})$ et $R_{\xi,\gamma,Ind}(\tilde{G})$ pour $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$ et $\gamma \in \Gamma(\tilde{G})$. Soit $\xi \in \mathcal{X}_u(A_{\tilde{G}})$. On dispose de la théorie des pseudo-coefficients ; cf. [A2], théorèmes 5.1 et 6.1, ou [SS], paragraphe III.4 dans le cas (A) ; dans le cas (B), on a développé cette théorie en II.2 pour le groupe $\mathbf{G}_N^+$; elle s'étend sans difficulté aux Lévi de ce groupe. Cette théorie affirme l'existence d'une application linéaire :

$$R_\xi(\tilde{G})/R_{\xi,Ind}(\tilde{G}) \xrightarrow{\phi} I_{\xi,cusp}(\tilde{G})$$

telle que, pour $\pi \in R_\xi(\tilde{G})$ et $f \in C_{\xi,cusp}(\tilde{G})$, on ait l'égalité $trace_{\tilde{G}}\pi(\bar{f}) = (f^G, \phi(\pi))$. De plus, pour $\gamma, \gamma' \in \Gamma(\tilde{G})$ avec $\gamma \neq \gamma'$ et pour $\pi \in R_{\xi,\gamma}(\tilde{G})$, $\pi' \in R_{\xi,\gamma'}(\tilde{G})$, on a $(\phi(\pi), \phi(\pi')) = 0$. Alors :

(1) l'application ϕ est un isomorphisme.

Preuve. On a l'égalité :

$$R_\xi(\tilde{G})/R_{\xi,Ind}(\tilde{G}) = \oplus_{\gamma\in\Gamma(\tilde{G})} R_{\xi,\gamma}(\tilde{G})/R_{\xi,\gamma,Ind}(\tilde{G}).$$

Chacun de ces sous-espaces est de dimension finie (d'après IV.4(6), l'application $R_{\xi,\gamma,ell}(\tilde{G}) \to R_{\xi,\gamma}(\tilde{G})/R_{\xi,\gamma,Ind}(\tilde{G})$ est surjective ; l'espace de départ est de dimension finie d'après IV.4(3)). Leurs images par ϕ sont deux à deux orthogonales. De l'application $(\pi, f) \mapsto trace_{\tilde{G}}\pi(\bar{f})$ se déduit un accouplement :

$$R_\xi(\tilde{G})/R_{\xi,Ind}(\tilde{G}) \times I_{\xi,cusp}(\tilde{G}) \to \mathbb{C},$$

d'où une application antilinéaire :

$$\psi : I_{\xi,cusp}(\tilde{G}) \to (R_\xi(\tilde{G})/R_{\xi,Ind}(\tilde{G}))^*$$

où $*$ désigne le dual. D'après le théorème de Paley-Wiener ([BDK], [R] et [KR] théorème 1), ψ est injective et a pour image :

$$\oplus_{\gamma\in\Gamma(\tilde{G})}(R_{\xi,\gamma}(\tilde{G})/R_{\xi,\gamma,Ind}(\tilde{G}))^*.$$

Alors ϕ est injective : un élément $\pi \in R_\xi(\tilde{G})/R_{\xi,Ind}(\tilde{G})$ tel que $\phi(\pi) = 0$ annule l'image de ψ. Pour tout $\gamma \in \Gamma(\tilde{G})$, l'application :

$$\psi \circ \phi : R_{\xi,\gamma}(\tilde{G})/R_{\xi,\gamma,Ind}(\tilde{G}) \to (R_{\xi,\gamma}(\tilde{G})/R_{\xi,\gamma,Ind}(\tilde{G}))^*$$

est injective, donc surjective puisque ces espaces sont de même dimension finie. Alors $\psi \circ \phi$ a même image que ψ. Donc ϕ est surjective puisque ψ est injective. $\square$

On démontrera au paragraphe suivant que la décomposition IV.4(7) est une décomposition en somme directe. Tirons-en dès maintenant les conséquences. Les décompositions IV.4(5) et (6) sont aussi en sommes directes. L'application $R_{\xi,ell}(\tilde{G}) \to R_\xi(\tilde{G})/R_{\xi,Ind}(\tilde{G})$ est un isomorphisme et l'application ϕ devient un isomorphisme :

$$R_{\xi,ell}(\tilde{G}) \xrightarrow{\phi} I_{\xi,cusp}(\tilde{G}).$$

Si E est un espace vectoriel complexe muni d'un produit hermitien défini positif, on appellera "bonne base" de E toute base $(e_j)_{j\in J}$ telle qu'il existe une base $(e_j^*)_{j\in J}$ de E de sorte que $(e_j, e_k^*) = \delta_{j,k}$ (symbole de Kronecker) pour tous $j, k \in J$. En particulier, si l'on fixe une décomposition de E en somme directe orthogonale de sous-espaces de dimension finie, toute base réunion de bases de ces sous-espaces est une bonne base.

Grâce à IV.4(2) et aux propriétés rappelées ci-dessus, la famille $(\phi(\pi))_{\pi\in Ell_\xi(\tilde{G})}$ est une bonne base de $I_{\xi,cusp}(\tilde{G})$.

Remarquons que, pour toute base B de $R_{\xi,ell}(\tilde{G})$ telle que $(\phi(b))_{b\in B}$ soit une bonne base de $I_{\xi,cusp}(\tilde{G})$, $R^{\infty}_{\xi,ell}(\tilde{G})$ s'identifie à $\mathbb{C}^B$, autrement dit tout élément π de $R^{\infty}_{\xi,ell}(\tilde{G})$ s'écrit formellement $\pi = \sum_{b\in B} x_b b$. Les coefficients x_b se calculent ainsi : on introduit une famille $(f_b)_{b\in B}$ d'éléments de $C_{\xi,cusp}(\tilde{G})$ telle que $(f^G_{b'}, \phi(b)) = \delta_{b,b'}$ pour tous $b, b' \in B$; alors $x_b = trace_{\tilde{G}}\pi(\bar{f}_b)$.

Plus généralement, pour tout $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$, décomposons ξ en $\xi_u\mu_{|A_{\tilde{G}}}$, où $\xi_u \in \mathcal{X}_u(A_{\tilde{G}})$ et $\mu \in \mathcal{X}_{nr}(\tilde{G})$. Fixons une base B_ξ de $R_{\xi,ell}(\tilde{G})$ telle que la famille $(\phi(b\otimes\mu^{-1}))_{b\in B_\xi}$ soit une bonne base de $I_{\xi_u,cusp}(\tilde{G})$. Cette propriété ne dépend d'ailleurs pas de la décomposition choisie de ξ. Soit $\pi \in R^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$. On peut écrire formellement :

$$\pi = \sum_{\xi\in\mathcal{X}(A_{\tilde{G}})} \sum_{b\in B_\xi} x_b b.$$

Alors :

(2) pour tous $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$ et tout $b \in B_\xi$, il existe $f \in C_{cusp}(\tilde{G})$ tel que, pour tout $a \in A_{\tilde{G}}$, on ait l'égalité $trace_{\tilde{G}}\pi({}^a f) = \xi(a)x_b$.

Preuve. Pour tout $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$, posons $\pi_\xi = \sum_{b\in B_\xi} x_b b$. Décomposons π et les π_ξ selon $\Gamma(\tilde{G})$. On a :

$$\pi = \sum_{\gamma\in\Gamma(\tilde{G})} \pi_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma(\tilde{G}),\xi\in\mathcal{X}(A_{\tilde{G}})} \pi_{\xi,\gamma}.$$

Puisque $\pi \in R^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$, on a $\pi_\gamma \in R_{\gamma,ell}(\tilde{G})$ pour tout γ. Il en résulte que, pour chaque γ, il n'y a qu'un nombre fini de ξ tels que $\pi_{\xi,\gamma} \neq 0$.

Fixons maintenant $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$ et $b \in B_\xi$. L'application (définie par intégration sur $A_{\tilde{G}}$) :

$$C_{cusp}(\tilde{G}) \to I_{\xi^{-1},cusp}(\tilde{G})$$

étant surjective et d'après les propriétés de B_ξ, on peut fixer $f_0 \in C_{cusp}(\tilde{G})$ tel que $trace_{\tilde{G}}b(f_0) = 1$ et $trace_{\tilde{G}}b'(f_0) = 0$ pour tout $b' \in B_\xi$, $b' \neq b$. Les fonctions ${}^a f_0$, pour $a \in A_{\tilde{G}}$, sont invariantes par un sous-groupe ouvert compact de G indépendant de a. Elles annulent $R_\gamma(\tilde{G})$ sauf pour un nombre fini de γ. D'après ce que l'on a dit ci-dessus, il existe un sous-ensemble fini $\Xi \subset \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$ tel qu'elles annulent $\pi_{\xi'}$ pour tout $\xi' \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}}) \setminus \Xi$. Fixons un tel Ξ, contenant ξ. Pour $a \in A_{\tilde{G}}$, on a alors l'égalité :

$$trace_{\tilde{G}}\pi({}^a f_0) = \sum_{\xi'\in\Xi} \xi'(a) trace_{\tilde{G}}\pi_{\xi'}(f_0).$$

On peut fixer deux familles $(a_{\xi'})_{\xi'\in\Xi}$ de points de $A_{\tilde{G}}$ et $(z_{\xi'})_{\xi'\in\Xi}$ de nombres complexes telles que, pour $\xi'' \in \Xi$,

$$\sum_{\xi'\in\Xi} z_{\xi'}\xi''(a_{\xi'}) = \begin{cases} 0, & si\ \xi'' \neq \xi, \\ 1, & si\ \xi'' = \xi. \end{cases}$$

On pose $f = \sum_{\xi'\in\Xi} z_{\xi'}{}^{a_{\xi'}} f_0$. Alors pour tout $a \in A_{\tilde{G}}$, on a l'égalité :

$$trace_{\tilde{G}}\pi({}^a f) = \xi(a) trace_{\tilde{G}}\pi_\xi(f_0).$$

Mais $trace_{\tilde{G}}\pi_\xi(f_0) = x_b$ d'après le choix de f_0. Cela prouve (2). $\square$

On a aussi :

(3) soit $f \in C^{\infty}_c(\tilde{G})$; alors il existe $f_{cusp} \in C_{cusp}(\tilde{G})$ tel que, pour tout $\pi \in R_{ell}(\tilde{G})$, $trace_{\tilde{G}}\pi(f) = trace_{\tilde{G}}\pi(f_{cusp})$.

Preuve. Notons $\mathcal{X}_{nr,u}(\tilde{G})$ le sous-groupe des éléments unitaires de $\mathcal{X}_{nr}(\tilde{G})$. C'est un groupe compact, munissons-le d'une mesure de Haar. Fixons un ensemble de représentants Ξ des orbites de l'action de $\mathcal{X}_{nr,u}(\tilde{G})$ dans $\mathcal{X}_u(A_{\tilde{G}})$. Pour tout $\xi \in \Xi$, fixons une base B_ξ de $R_{\xi,ell}(\tilde{G})$ telle que $(\phi(b))_{b\in B_\xi}$ soit une bonne base de $I_{\xi,cusp}(\tilde{G})$ et fixons une famille $(f_b)_{b\in B_\xi}$ d'éléments de $C_{\xi,cusp}(\tilde{G})$ telle que $(f^G_{b'},\phi(b))=\delta_{b,b'}$ pour tous $b,b'\in B_\xi$. Pour $f\in C_c^\infty(\tilde{G})$, posons :

$$f'_{cusp}=\sum_{\xi\in\Xi}\sum_{b\in B_\xi}\int_{\mathcal{X}_{nr,u}(\tilde{G})} trace_{\tilde{G}}(b\otimes\mu)(f)(\bar{f}_b\otimes\mu^{-1})d\mu.$$

On vérifie que chaque intégrale définit un élément de $C_{cusp}(\tilde{G})$, que cet élément est nul sauf pour un nombre fini de couples (ξ,b) et qu'il existe $c\in\mathbb{C}^\times$, d'ailleurs indépendant de f, tel que $trace_{\tilde{G}}\pi(f)=c\,trace_{\tilde{G}}\pi(f'_{cusp})$ pour tout $\pi\in R_{ell}(\tilde{G})$. On pose $f_{cusp}=cf'_{cusp}$. Cela prouve (3). $\square$

IV.6. Un lemme de Herb

Lemme. *Pour tout* $\tilde{\mathbf{M}}\in\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$*, soit* $D_M\in R^\infty_{ell}(\tilde{M})^{Norm_G(\tilde{M})}$*. Supposons :*

$$\sum_{\tilde{\mathbf{M}}\in\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj} Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_M)=0.$$

Alors $D_M=0$ *pour tout* $\tilde{\mathbf{M}}$.

Preuve (cf. [H] preuve du théorème 3.2). Pour simplifier l'écriture, on identifie chaque D_M à son image $trace_{\tilde{M}}D_M$ dans $D(\tilde{M})$. On raisonne par récurrence sur la dimension de G. On tient le lemme pour acquis pour les groupes de dimension inférieure. Les conséquences de ce lemme sont également acquises pour ces groupes.

On peut supposer $D_M\neq 0$ pour au moins un $\tilde{\mathbf{M}}\neq\tilde{\mathbf{G}}$, sinon la conclusion est claire. On peut alors fixer $\tilde{\mathbf{M}}\neq\tilde{\mathbf{G}}$ tel que $D_M\neq 0$ et $\tilde{\mathbf{M}}$ soit de dimension maximale. Soient $f\in C_{cusp}(\tilde{M})$ et $\mathbf{P}\in\mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$. Fixons un sous-groupe ouvert compact K de G et $\eta>0$ tels que, pour tout $a\in A_{\tilde{M}}$ vérifiant $|\alpha(a)|<\eta$ pour tout $\alpha\in\Delta_P$, la fonction ${}^af^K$ de IV.2 soit définie et vérifie les propriétés indiquées dans ce paragraphe. Soit $\tilde{\mathbf{L}}\in\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$. Les fonctions ${}^af^K$ étant invariantes par le même groupe K, elles annulent $Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(R_{\gamma,ell}(\tilde{L}))$ pour presque tout $\gamma\in\Gamma(\tilde{L})$. Il existe donc $D'_L\in R_{ell}(\tilde{L})$ tel que $Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D_L)({}^af^K)=Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D'_L)({}^af^K)$ pour tout a vérifiant les conditions ci-dessus. On fixe un tel D'_L. On peut supposer D'_L invariante par $Norm_G(\tilde{L})$ et $D'_L=0$ si $D_L=0$. La forme linéaire $Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D'_L)$ est localement intégrable, associée à une fonction que l'on note d'_L, qui est localement constante sur $\tilde{G}_{reg}$. D'après IV.2(4), on a une égalité :

$$(1)\qquad Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D_L)({}^af^K)=\int_{\tilde{M}} d'_L(m){}^af(m)\delta_P(m)^{-1/2}dm$$

pour tout a. Puisque ${}^af\in C_{cusp}(\tilde{M})$, on voit que l'on peut restreindre l'intégration à $\tilde{M}_{ell}$. Mais $d'_L(m)\neq 0$ seulement si m est conjugué à un élément de $\tilde{L}$. Un élément de $\tilde{M}_{ell}$ n'est conjugué à un élément de $\tilde{L}$ que si (quitte à conjuguer $\tilde{\mathbf{L}}$) $\tilde{\mathbf{M}}\subseteq\tilde{\mathbf{L}}$. La condition de maximalité imposée à $\tilde{\mathbf{M}}$ entraîne alors $d'_L=0$ sauf si $\tilde{\mathbf{L}}=\tilde{\mathbf{M}}$ ou $\tilde{\mathbf{L}}=\tilde{\mathbf{G}}$. Cela démontre que $Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D_L)({}^af^K)=0$ si $\tilde{\mathbf{L}}$ n'est pas l'un de ces deux ensembles.

Pour $m\in\tilde{M}_{ell}$, on vérifie comme dans le cas connexe l'égalité :

$$d'_M(m)=\Delta_M^G(m)^{-1/2}\sum_{w\in Norm_G(\tilde{M})} D'_M(wmw^{-1})$$

où $\Delta_M^G(m)$ est la valeur absolue du déterminant de $1-Ad(m)$ agissant dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$. On a supposé D'_M invariante par $Norm_G(\tilde{M})$. Si η est assez petit, on a l'égalité $\Delta_M^G(m)=\delta_P(m)^{-1}$ pour tout élément m du support de ${}^af$. La formule (1), pour $\tilde{\mathbf{L}}=\tilde{\mathbf{M}}$, devient :

$$Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_M)({}^af^K)=|Norm_G(\tilde{M})|\int_{\tilde{M}} D'_M(m){}^af(m)dm=|Norm_G(\tilde{M})|D_M({}^af).$$

Fixons $\delta \in]0,1[$ et $\epsilon > 0$. Puisque $D'_G \in R_{ell}(\tilde{G})$, D'_G est quasi-supertempérée (IV.4(4)) et il existe $R_0 > 0$ de sorte que, pour tout $R \geq R_0$ et tout $a \in A_{\tilde{P}}(\delta, R)$, on ait $|d'_G(m)| < \epsilon \delta_P(m)^{1/2}$ pour tout élément m du support de ${}^a f$. On peut de plus supposer que , pour tout $a \in A_{\tilde{P}}(\delta, R)$, on a $|\alpha(a)| < \eta$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$. Alors (1) entraîne :

$$|D_G({}^a f^K)| \leq \epsilon \int_{\tilde{M}} |{}^a f(m)| dm = \epsilon \int_{\tilde{M}} |f(m)| dm$$

pout tout $a \in A_{\tilde{P}}(\delta, R)$.

Par hypothèse,

$$\sum_{\tilde{\mathbf{L}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj} Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D_L)({}^a f^K) = 0.$$

Cette égalité et les calculs précédents entraînent :

(2) pour tous $\delta \in]0,1[$ et $\epsilon > 0$, il existe $R_0 > 0$ tel que, pour tout $R \geq R_0$ et tout $a \in A_{\tilde{P}}(\delta, R)$, on ait l'inégalité $|D_M({}^a f)| < \epsilon$.

Puisque $\tilde{\mathbf{M}} \neq \tilde{\mathbf{G}}$, l'hypothèse de récurrence permet d'appliquer à D_M les considérations de IV.5. Ecrivons formellement comme dans ce paragraphe :

$$D_M = \sum_{\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{M}})} \sum_{b \in B_\xi} x_b b,$$

fixons $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{M}})$ et $b \in B_\xi$, choisissons pour f un élément de $C_{cusp}(\tilde{M})$ tel que $D_M({}^a f) = \xi(a) x_b$ pour tout $a \in A_{\tilde{M}}$. Fixons une base Δ_0 de $X^*(\tilde{\mathbf{G}})$. Pour tout $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$, il existe des coefficients c_α réels tels que l'on puisse écrire $|\xi(a)| = \prod_{\alpha \in \Delta_0 \cup \Delta_P} |\alpha(a)|^{c_\alpha}$ pour tout $a \in A_{\tilde{M}}$. On peut choisir $\mathbf{P}$ tel que $c_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$. Alors $|\xi(a)|$ est minoré sur $A_{\tilde{P}}(\delta, R)$ par une constante > 0 dépendant de δ mais pas de R. Appliquons (2) pour ces choix de f et $\mathbf{P}$. On en déduit $x_b = 0$. Ceci étant vrai pour tous ξ, b, on a $D_M = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

V. Stabilité

V.1. Décomposition de $I_{cusp}(\tilde{G})$

La situation est celle de IV.1. On a défini en II.1 la notion d'intégrale orbitale stable. On note $C_c^{\infty,inst}(\tilde{G})$ le sous-espace des $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ telles que $J^{st}(g, f) = 0$ pour tout $g \in \tilde{G}_{reg}$. On pose $C_{cusp}^{inst}(\tilde{G}) = C_c^{\infty,inst}(\tilde{G}) \cap C_{cusp}(\tilde{G})$. On note $C_{cusp}^{st}(\tilde{G})$ le sous-espace des $f \in C_{cusp}(\tilde{G})$ telles que la fonction $g \mapsto J^G(g, f)$ soit constante sur les classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{reg}$, ou dans $\tilde{G}_{ell}$ puisque cette fonction est nulle hors de $\tilde{G}_{ell}$. Evidemment, $C_{cusp}^{st}(\tilde{G}) \cap C_{cusp}^{inst}(\tilde{G}) = C_0(\tilde{G})$. Par passage au quotient, on obtient deux sous-espaces $I_{cusp}^{st}(\tilde{G})$ et $I_{cusp}^{inst}(\tilde{G})$ de $I_{cusp}(\tilde{G})$, d'intersection nulle.

Proposition. *On a l'égalité $I_{cusp}(\tilde{G}) = I_{cusp}^{st}(\tilde{G}) \oplus I_{cusp}^{inst}(\tilde{G})$.*

Dans le cas connexe, c'est la proposition 3.5 de [A3]. Arthur admet la validité de certains lemmes fondamentaux,mais on a montré en [MW] 4.5 comment lever ces hypothèses. On adapte la démonstration au cas (B) dans les trois paragraphes suivants.

V.2. Décomposition dans l'algèbre de Lie

Pour ce paragraphe, modifions nos hypothèses. Le groupe $\mathbf{G}$ est ici un groupe réductif connexe sur F, on fixe une forme quasi-déployée $\mathbf{G}^*$ de $\mathbf{G}$ et un torseur intérieur $\psi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}^*$. On note encore $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ l'application dérivée. Comme on l'a déjà dit, on adapte un certain nombre de définitions et notations aux algèbres de Lie. On note $C_{0,loc}(\mathfrak{g})$ le sous-espace des $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ telles qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}$ de sorte que $J^G(X, f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg} \cap U$. On pose $I_{loc}(\mathfrak{g}) = C_c^\infty(\mathfrak{g})/C_{0,loc}(\mathfrak{g})$, $I_{cusp,loc}(\mathfrak{g}) = C_{cusp}(\mathfrak{g})/(C_{cusp}(\mathfrak{g}) \cap C_{0,loc}(\mathfrak{g}))$. Ce dernier espace est celui des "germes en 0" d'éléments de $I_{cusp}(\mathfrak{g})$. Ces espaces possèdent des sous-espaces $I_{loc}^{inst}(\mathfrak{g})$, $I_{cusp,loc}^{st}(\mathfrak{g})$, $I_{cusp,loc}^{inst}(\mathfrak{g})$, ces deux derniers étant en somme directe. On construit les espaces analogues pour $\mathfrak{g}^*$. Le transfert endoscopique existe dans cette situation : c'est un homomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\mathfrak{g})/C_c^{\infty,inst}(\mathfrak{g}) & \to & C_c^\infty(\mathfrak{g}^*)/C_c^{\infty,inst}(\mathfrak{g}^*) \\ f & \mapsto & f^*. \end{array}$$

Il induit un transfert local, qui est un homomorphisme :

$$I_{loc}(\mathfrak{g})/I_{loc}^{inst}(\mathfrak{g}) \to I_{loc}(\mathfrak{g}^*)/I_{loc}^{inst}(\mathfrak{g}^*).$$

Lemme. *On a les égalités :*

$$I_{cusp,loc}(\mathfrak{g}) = I_{cusp,loc}^{st}(\mathfrak{g}) \oplus I_{cusp,loc}^{inst}(\mathfrak{g}),$$

$$I_{cusp,loc}(\mathfrak{g}^*) = I_{cusp,loc}^{st}(\mathfrak{g}^*) \oplus I_{cusp,loc}^{inst}(\mathfrak{g}^*),$$

et le transfert local induit un isomorphisme de $I_{cusp,loc}^{st}(\mathfrak{g})$ sur $I_{cusp,loc}^{st}(\mathfrak{g}^*)$.

Preuve. On introduit des transformations de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ comme dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}^*)$, vérifiant les conditions de compatibilité de [W2], VIII.6. Il est clair que $C_{cusp}(\mathfrak{g})$ est invariant par transformation de Fourier. L'espace $C_{cusp}^{st}(\mathfrak{g})$ l'est aussi. En effet, avec les notations de [W3], on a $C_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}) = C_{cusp}(\mathfrak{g}) \cap (\bigcap_{\mathbf{H}} C_c^{\infty,H-inst}(\mathfrak{g}))$ où $\mathbf{H}$ parcourt tous les groupes endoscopiques elliptiques de $\mathbf{G}$ autres que $\mathbf{G}^*$. D'après [W3], proposition B, chacun de ces espaces est invariant par transformation de Fourier. On sait qu'il y a une fonction $\hat{i}_\mathfrak{g}; \mathfrak{g}_{reg} \times \mathfrak{g}_{reg}$, localement constante, telle que :

$$(1) \qquad J^G(X,f) = \int_\mathfrak{g} \hat{i}_\mathfrak{g}(X,Z)\hat{f}(Z)\Delta(Z)^{-1/2}dZ$$

pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ et tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}$. Si $f \in C_{cusp}(\mathfrak{g})$, on peut limiter l'intégration à $\mathfrak{g}_{ell}$. Notons $\Omega_\mathfrak{g}$ l'espace des germes en 0 de fonctions définies sur les classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{ell}$. On définit un homomorphisme :

$$C_{cusp}(\mathfrak{g}) \to \Omega_\mathfrak{g}$$

qui, à $f \in C_{cusp}(\mathfrak{g})$, associe le germe en 0 de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{ell} & \to & \mathbb{C} \\ X & \mapsto & J^{st}(X,f). \end{array}$$

Par définition, cet homomorphisme induit une injection :

$$\alpha_\mathfrak{g} : I_{cusp,loc}(\mathfrak{g})/I_{cusp,loc}^{inst}(\mathfrak{g}) \to \Omega_\mathfrak{g}.$$

Notons $\Omega'_\mathfrak{g}$ le sous-espace de $\Omega_\mathfrak{g}$ engendré par les germes en 0 des fonctions sur $\mathfrak{g}_{ell}$: $X \mapsto \sum_{X' \in E(X)} \hat{i}_\mathfrak{g}(X',Z)$, quand Z parcourt $\mathfrak{g}_{ell}$ (rappelons que $E(X)$ est un ensemble des représentants des classes de conjugaison par G dans la classe de conjugaison stable de X). On a :

(2) $\Omega'_\mathfrak{g}$ est l'image de $\alpha_\mathfrak{g}$.

En effet, soit $\mathfrak{k}$ un sous-ensemble compact de $\mathfrak{g}$ et U un voisinage de 0. Considérons l'application qui, à $Z \in \mathfrak{g}_{reg} \cap \mathfrak{k}$, associe la restriction à $U \cap \mathfrak{g}_{reg}$ de $X \mapsto \hat{i}_\mathfrak{g}(X,Z)$. La "conjecture" de Howe implique que cette application est localement constante et que son image engendre un sous-espace de dimension finie. Pour $f \in C_{cusp}(\mathfrak{g})$, ces propriétés, jointes à la formule (1) et au fait que $\hat{f} \in C_{cusp}(\mathfrak{g})$, entraînent que, pour tout voisinage U de 0, il existe une famille finie $(Z_i)_{i=1,\ldots,n}$ d'éléments de $\mathfrak{g}_{ell}$ et une famille $(z_i)_{i=1,\ldots,n}$ de nombres complexes de sorte que :

$$J^G(X,f) = \sum_{i=1,..,n} z_i \hat{i}_\mathfrak{g}(X,Z_i)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg} \cap U$. On a alors, pour un tel X :

$$J^{st}(X,f) = \sum_{i=1,...,n} z_i \sum_{X' \in E(X)} \hat{i}_{\mathfrak{g}}(X', Z_i).$$

Le germe de cette fonction appartient bien à $\Omega'_{\mathfrak{g}}$. Inversement, soit $Z \in \mathfrak{g}_{ell}$. En prenant pour f une fonction telle que $\hat{f}$ soit la fonction caractéristique d'un voisinage assez petit de Z, on voit que le germe de la fonction $X \mapsto \sum_{X' \in E(X)} \hat{i}(X', Z)$ est un multiple de celui de la fonction $X \mapsto J^{st}(X,f)$. Cela démontre (2).

Notons $\Omega''_{\mathfrak{g}}$ le sous-espace de $\Omega_{\mathfrak{g}}$ engendré par les germes en 0 des fonctions sur $\mathfrak{g}_{ell}$: $X \mapsto \sum_{X' \in E(X)} \sum_{Z' \in E(Z)} \hat{i}_{\mathfrak{g}}(X', Z')$., quand Z parcourt $\mathfrak{g}_{ell}$. On a :

(3) $\Omega''_{\mathfrak{g}}$ est l'image par $\alpha_{\mathfrak{g}}$ de $I^{st}_{cusp,loc}(\mathfrak{g})$.

La démonstration est similaire à celle de (2), grâce à la stabilité de $C^{st}_{cusp}(\mathfrak{g})$ par transformation de Fourier.

Grâce à [W1] théorème 1.5(2), on a l'égalité $\Omega'_{\mathfrak{g}} = \Omega''_{\mathfrak{g}}$. Alors (2), (3) et l'iinjectivité de $\alpha_{\mathfrak{g}}$ montrent que $I_{cusp,loc}(\mathfrak{g}) = I^{st}_{cusp,loc}(\mathfrak{g}) + I^{inst}_{cusp,loc}(\mathfrak{g})$. D'où la première assertion de l'énoncé puisque ces deux sous-espaces sont d'intersection nulle. La deuxième assertion est un cas particulier de la première.

La correspondance entre classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ induit une bijection de $\Omega_{\mathfrak{g}}$ sur $\Omega_{\mathfrak{g}^*}$ grâce à laquelle on identifie ces deux espaces. Pour $f \in I_{cusp,loc}(\mathfrak{g})$ et $f^* \in I_{cusp,loc}(\mathfrak{g}^*)$, f^* est un transfert local de f si et seulement si on a l'égalité $\alpha_{\mathfrak{g}}(f) = \alpha_{\mathfrak{g}^*}(f^*)$. Or le théorème 1.5(2) de [W1] affirme que $\Omega'_{\mathfrak{g}} = \Omega'_{\mathfrak{g}^*}$. Grâce à (2) et l'assertion analogue pour $\mathfrak{g}^*$, on en déduit la dernière assertion de l'énoncé. $\square$

V.3. Etude au voisinage d'un point singulier

Revenons à la situation de V.1. Soit s un élément semi-simple de $\tilde{G}$. On pose :

$$Y_s = \{y \in \mathbf{G}(\bar{F}); \forall \sigma \in Gal(\bar{F}/F), \sigma(y)^{-1}y \in \mathbf{I}_s(\bar{F})\},$$

$$\bar{Y}_s = G\backslash Y_s / \mathbf{I}_s(\bar{F})$$

(le groupe $\mathbf{I}_s$ a été défini en II.1). L'ensemble $\bar{Y}_s$ est fini, on fixe un sous-ensemble $\{y_1, ..., y_n\} \subset Y_s$ qui se projette bijectivement sur $\bar{Y}_s$. Pour tout $i = 1, ..., n$, on pose $s_i = y_i s y_i^{-1}$. Ces éléments sont stablement conjugués à s et tout élément de $\tilde{G}$ stablement conjugué à s est conjugué à au moins l'un des s_i, mais éventuellement à plusieurs. Fixons une forme quasi-déployée $\mathbf{G}^*_s$ de $\mathbf{G}_s$ et un torseur intérieur $\psi : \mathbf{G}_s \to \mathbf{G}^*_s$. Pour tout i, on pose $\psi_i = \psi \circ Ad(y_i^{-1}) : \mathbf{G}_{s_i} \to \mathbf{G}^*_s$. C'est encore un torseur intérieur. Posons :

$$\Gamma_i = \{\gamma \in \mathbf{G}^{s_i}(\bar{F}); \forall \sigma \in Gal(\bar{F}/F), \sigma(\gamma)^{-1}\gamma \in \mathbf{I}_{s_i}(\bar{F})\}.$$

Parce que $\mathbf{I}_{s_i}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbf{G}^{s_i}$, Γ_i est un groupe qui contient $\mathbf{I}_{s_i}(\bar{F})$. Il agit dans $\mathbf{G}_{s_i}$ par adjonction. Notons $Ad(\Gamma_i)$ son image dans le groupe d'automorphismes $Aut(\mathbf{G}_{s_i})$. C'est un groupe qui contient le sous-groupe des automorphismes intérieurs. De l'isomorphisme ψ_i se déduit un isomorphisme noté de la même façon de $Aut(\mathbf{G}_{s_i})$ sur $Aut(\mathbf{G}^*_s)$. Il est facile de vérifier que $\psi_i(Ad(\Gamma_i))$ ne dépend pas de i. Notons ce groupe $Ad(\Gamma)$ et notons $\bar{\Gamma}$ son image dans le groupe $Out(\mathbf{G}^*_s)$ des automorphismes extérieurs de $\mathbf{G}^*_s$. On vérifie que $Gal(\bar{F}/F)$ agit trivialement sur $\bar{\Gamma}$. Puisque $\mathbf{G}^*_s$ est quasi-déployé, on peut relever $\bar{\Gamma}$ en un groupe d'automorphismes définis sur F de $\mathbf{G}^*_s$, auquel on l'identifie.

Rappelons que l'exponentielle identifie un voisinage de 0 dans une algèbre de Lie à un voisinage de l'unité dans le groupe correspondant. Soit U^*_s un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_s$, invariant par conjugaison stable et invariant par $\bar{\Gamma}$. Pour tout $i = 1, ..., n$, notons U_i l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}_{s_i}$ tels que $\psi_i(X)$ soit conjugué à un élément de U^*_s par un élément de $\mathbf{G}^*_s(\bar{F})$. Notons U

l'ensemble des éléments de $\tilde{G}$ conjugués par G à un élément de $s_iexp(U_i)$ pour un $i \in \{1,...,n\}$. Si U_s^* est assez petit, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- U est un voisinage de s dans $\tilde{G}$ invariant par conjugaison stable ;

(1) soient $i,j \in \{1,...,n\}$, $X_i \in U_i$, $X_j \in U_j$ et $g \in \mathbf{G}(\bar{F})$; supposons $gs_iexp(X_i)g^{-1} = s_jexp(X_j)$; alors on a aussi $gs_ig^{-1} = s_j$;

(2) soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ et $i \in \{1,...,n\}$; alors il existe $f_i \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{s_i})$ tel que $J^{G_{s_i}}(X, f_i) = J^G(s_iexp(X), f)$ pour tout $X \in U_i \cap \mathfrak{g}_{s_i,reg}$;

(3) soient $i \in \{1,...,n\}$ et $f_i \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{s_i})$; supposons $J^{G_{s_i}}(gXg^{-1}, f) = J^{G_{s_i}}(X, f_i)$ pour tout $X \in U_i \cap \mathfrak{g}_{s_i,reg}$ et tout $g \in G^{s_i}$; alors il existe $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ tel que, pour tout $g \in \tilde{G}_{reg}$, on ait les égalités :

$J^G(g, f) = 0$ si g n'est pas conjugué à un élément de $s_iexp(U_i)$,

$J^G(g, f) = J^{G_{s_i}}(X, f_i)$, si $g = s_iexp(X)$ avec $X \in U_i$.

Fixons de tels voisinages. Notons C_s^*, resp. C_{s_i}, C, l'ensemble des classes de conjugaison stable d'éléments réguliers elliptiques de U_s^*, resp. U_i, U. Pour tout $i = 1,...,n$, on déduit de ψ_i une bijection $C_{s_i} \simeq C_s^*$. On a d'autre part une application $C_{s_i} \to C$ qui, à une classe $c \in C_{s_i}$, associe la classe de $s_iexp(X)$ pour n'importe quel $X \in c$. Le composé $C_s^* \to C_{s_i} \to C$ ne dépend pas du choix de i. Notons $\iota : C_s^* \to C$ cette application composée. Par définition de U, elle est surjective. Le groupe $\bar{\Gamma}$ agit dans C_s^*. On a :

(4) ι se factorise en une bijection de $C_s^*/\bar{\Gamma}$ sur C.

Soient $X, Y \in U_s^* \cap \mathfrak{g}_{s,ell}^*$. Fixons $i \in \{1,...,n\}$, soient $X_i, Y_i \in U_{s_i} \cap \mathfrak{g}_{s_i,ell}$ tels que $\psi_i(X_i)$, resp. $\psi_i(Y_i)$, soit conjugué à X, resp. Y, par un élément de $\mathbf{G}_s^*(\bar{F})$, posons $x = s_iexp(X_i)$, $y = s_iexp(Y_i)$. Alors x et y sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $g \in \mathbf{G}(\bar{F})$ tel que $gxg^{-1} = y$. D'après (1), un tel g appartient forcément à $\mathbf{G}^{s_i}(\bar{F})$. On a aussi $\sigma(g)^{-1}g \in \mathbf{G}^x(\bar{F})$ pour tout $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$. Or $\mathbf{G}^x \subseteq \mathbf{I}_{s_i}$ (parce que x est régulier, $\mathbf{G}^x = \mathbf{I}_x$ est engendré par $\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$ et $\mathbf{G}_x$; d'après (1), $\mathbf{G}^x \subseteq \mathbf{G}^{s_i}$, donc $\mathbf{G}_x \subseteq \mathbf{G}_{s_i}$, et $\mathbf{I}_x \subseteq \mathbf{I}_{s_i}$). Donc $g \in \Gamma_i$. Cela montre que x et y sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $g \in \Gamma_i$ tel que $gxg^{-1} = y$. Ou encore s'il existe $\gamma \in Ad(\Gamma_i)$ tel que $\gamma(X_i) = Y_i$, ou encore s'il existe $\gamma \in Ad(\Gamma)$ tel que $\gamma(X) = Y$. Ou encore s'il existe $\gamma \in \bar{\Gamma}$ et $g \in \mathbf{G}_s^*(\bar{F})$ tel que $\gamma(X) = gYg^{-1}$. Ou encore si les classes de conjugaison stable de X et Y se déduisent l'une de l'autre par l'action d'un élément de $\bar{\Gamma}$. Cela prouve (4).

Soit $c \in C$. Pour $x, x' \in c$, les groupes $\mathbf{I}_x$ et $\mathbf{I}_{x'}$, resp. $\mathbf{G}_x$ et $\mathbf{G}_{x'}$, sont canoniquement isomorphes. Le nombre d'éléments de I_x/G_x est donc indépendant de x. On le note $a(c)$. Pour tout $i = 1,...,n$, notons b_i le nombre d'éléments du quotient I_{s_i}/G_{s_i}. Soit $c^* \in C_s^*$, notons r le nombre de classes de conjugaison par G_s^* dans c^*. Il est clair que, si on remplace c^* par $\gamma(c^*)$ où $\gamma \in \bar{\Gamma}$, ce nombre r ne change pas. Il ne dépend donc que de $c = \iota(c^*)$ et on pourra le noter $r(c)$. Pour tout $i = 1,...,n$, soit $c_i \in C_{s_i}$ la classe de conjugaison stable correspondant à c^*. Il est connu que c_i contient ce même nombre r de classes de conjugaison par G_{s_i}. Fixons des représentants $X_{i,j}$, $j = 1,..,r$ de ces classes. On pose $x_{i,j} = s_iexp(X_{i,j})$. Notons $\mathcal{J} = \{1,...,n\} \times \{1,...,r\}$. Alors :

(5) tout élément de c est conjugué par un élément de G à $x_{i,j}$ pour au moins un couple $(i,j) \in \mathcal{J}$; pour $(i,j) \in \mathcal{J}$, l'ensemble des $(k,\ell) \in \mathcal{J}$ tels que $x_{i,j}$ est conjugué à $x_{k,\ell}$ a $\frac{b_i}{a(c)}$ éléments.

Remarque. Soient $(i,j) \in \mathcal{J}$ et $k \in \{1,...,n\}$. Alors $\{x_{k,\ell}; \ell = 1,...,r\}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par G_{s_k} dans l'ensemble des éléments de $\tilde{G}$ conjugués à $y_ky_i^{-1}x_{i,j}y_iy_k^{-1}$ par un élément de $\mathbf{G}_{s_k}(\bar{F})$. Cela résulte des définitions. On peut aussi remplacer dans cette assertion $\mathbf{G}_{s_k}(\bar{F})$ par $\mathbf{I}_{s_k}(\bar{F})$ puisque $\mathbf{I}_{s_k}$ agit dans $\mathbf{G}_{s_k}$ par automorphismes intérieurs.

Prouvons (5). Soit $x \in c$. Par construction, x est stablement conjugué à $x_{1,1}$. Soit $g \in \mathbf{G}(\bar{F})$ tel que $gx_{1,1}g^{-1} = x$. Pour $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$, on a $\sigma(g)^{-1}g \in \mathbf{I}_{x_{1,1}}(\bar{F})$. On a $\mathbf{I}_{x_{1,1}} \subseteq \mathbf{I}_{s_1}$, cf. preuve de (4). Posons $y = gy_1$. Des propriétés précédentes résulte que $y \in Y_s$. Soit $k \in \{1,...,n\}$ tel que y ait même image que y_k dans $\bar{Y}_s$. Alors il existe $g_1 \in G$ et $g_2 \in \mathbf{I}_{s_k}(\bar{F})$ tels que $y = g_1g_2y_k$. On a $g_1^{-1}xg_1 = g_2y_ky_1^{-1}x_{1,1}y_1y_k^{-1}g_2^{-1}$. Puisque $g_1^{-1}xg_1$ est rationnel, le terme de droite l'est aussi. D'après la remarque, il est conjugué par un élément de G_{s_k} à l'un des $x_{k,\ell}$. Cela démontre la première assertion de (5).

Soient $(i,j),(k,\ell) \in \mathcal{J}$ et $g \in G$ tels que $gx_{i,j}g^{-1} = x_{k,\ell}$. D'après la remarque, il existe $u \in \mathbf{G}_{s_i}(\bar{F})$ tel que $x_{i,j} = uy_iy_k^{-1}x_{k,\ell}y_ky_i^{-1}u^{-1}$. Alors $guy_iy_k^{-1} \in \mathbf{G}^{x_{k,\ell}}(\bar{F}) = \mathbf{I}_{x_{k,\ell}}(\bar{F}) \subseteq \mathbf{I}_{s_k}(\bar{F})$. En conjuguant par y_k, on obtient $y_k^{-1}guy_i \in \mathbf{I}_s(\bar{F})$. Puisqu'aussi $y_i^{-1}uy_i \in \mathbf{I}_s(\bar{F})$, on en déduit que y_i et y_k ont même image dans $\bar{Y}_s$, donc $i = k$. Reprenant le calcul ci-dessus, on a maintenant $gu = guy_iy_k^{-1} \in \mathbf{I}_{s_k}(\bar{F}) = \mathbf{I}_{s_i}(\bar{F})$, donc $g \in \mathbf{I}_{s_i}(\bar{F})$ et $g \in I_{s_i}$ puisque g est rationnel. Inversement, soit $g \in I_{s_i}$. Puisque $\mathbf{I}_{s_i}$ agit par automorphismes intérieurs sur $\mathbf{G}_{s_i}$, $gX_{i,j}g^{-1}$ est conjugué par un élément de G_{s_i} à un élément $X_{i,\ell}$ et alors $gx_{i,j}g = x_{i,\ell}$. Le nombre de $(k,\ell) \in \mathcal{J}$ tels que $x_{i,j}$ est conjugué à $x_{k,\ell}$ est donc égal au nombre de classes de conjugaison par G_{s_i} dans la classe de conjugaison par I_{s_i} de $x_{i,j}$. Ce nombre est le nombre d'éléments de l'ensemble $I_{x_{i,j}}\backslash I_{s_i}/G_{s_i}$. Puisque I_{s_i}/G_{s_i} est abélien, c'est aussi $|I_{s_i}/G_{s_i}||I_{x_{i,j}}/G_{x_{i,j}}|^{-1}$, d'où la deuxième assertion de (5).

V.4. Preuve de la proposition V.1

Un argument de partition de l'unité nous ramène à prouver l'assertion suivante. Soient $f \in C_{cusp}(\tilde{G})$ et s un élément semi-simple de $\tilde{G}$. Alors il existe un voisinage U de s, invariant par conjugaison stable, et il existe $\phi \in C_{cusp}^{st}(\tilde{G})$ tels que, pour tout $x \in U \cap \tilde{G}_{reg}$, on ait l'égalité $J^{st}(x,\phi) = J^{st}(x,f)$. Fixons f et s, appliquons à s les constructions de V.3. Par V.3(2), on déduit de f des fonctions $f_i \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{s_i})$ pour tout $i = 1,...,n$. Evidemment $f_i \in C_{cusp}(\mathfrak{g}_{s_i})$. Appliquons le lemme V.2 : soit $f_i^* \in C_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}_s^*)$ dont l'image dans $I_{cusp,loc}^{st}(\mathfrak{g}_s^*)$ soit un transfert de l'image de f_i dans $I_{cusp,loc}(\mathfrak{g}_{s_i})$. Soit $c^* \in C_s^*$, appliquons les définitions de V.3(5). Fixons $X^* \in c^*$ et $x \in c = \iota(c^*)$. Quitte à restreindre le voisinage U, on a les égalités suivantes, où $r = r(c)$:

- pour tout $i = 1,...,n$,

$$J^{st}(X, f_i^*) = J^{st}(X_{i,1}, f_i) = \sum_{j=1,...,r} J^{G_{s_i}}(X_{i,j}, f_i) = \sum_{j=1,...,r} J^G(x_{i,j}, f);$$

- grâce à V.3(5), $J^{st}(x,f) = a(c)\sum_{i=1,...,n} b_i^{-1} \sum_{j=1,...,r} J^G(x_{i,j}, f)$.

Posons $f^* = \sum_{i=1,...,n} b_i^{-1} f_i^*$. On a $f^* \in C_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}_s^*)$ et, d'après les formules ci-dessus :

$$J^{st}(X, f^*) = a(c)^{-1} J^{st}(x,f).$$

Remarquons que ce terme ne dépend que de c, autrement dit le membre de gauche est invariant par l'action naturelle de $\bar{\Gamma}$.

Repartons en sens inverse. Grâce au lemme V.2, pour tout $i = 1,...,n$, on peut fixer $\varphi_i \in C_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}_{s_i})$ dont le transfert à $\mathfrak{g}_s^*$ ait même image que f^* dans $I_{cusp,loc}(\mathfrak{g}_s^*)$. Soient $c_i \in C_{s_i}$, c^* son image dans C_s^* et $c = \iota(c^*)$. Fixons $X_i \in c_i$, $X^* \in c^*$, $x \in c$. Quitte à restreindre U, on a (parce que φ_i est stable) :

$$(1) \qquad J^{G_{s_i}}(X_i, \varphi_i) = \frac{1}{r(c)} J^{st}(X_i, \varphi_i) = \frac{1}{r(c)} J^{st}(X^*, f^*) = \frac{1}{r(c)a(c)} J^{st}(x,f).$$

Appliquer à X_i un élément de G^{s_i} ne change par c. Les intégrales orbitales de φ_i sont donc invariantes par G^{s_i}. Appliquant V.3(3), on déduit de φ_i une fonction sur $\tilde{G}$, notons-la ϕ_i. D'après (1) ci-dessus, cette fonction vérifie, pour $x \in \tilde{G}_{reg}$:

$J^G(x, \phi_i) = 0$, si x n'est pas elliptique ou si x n'est pas conjugué à un élément de $s_i exp(U_i)$;

$J^G(x, \phi_i) = \frac{1}{r(c)a(c)} J^{st}(x,f)$, si x est elliptique et conjugué à un élément de $s_i exp(U_i)$,

où $c \in C$ est la classe de conjugaison stable de x. Pour tout $i = 1,...,n$, notons d_i le nombre de $k \in \{1,...,n\}$ tels que s_k soit conjugué à s_i par un élément de G. Posons $\phi' = \sum_{i=1,...,n} d_i^{-1} \phi_i$. Soit $x \in U \cap \tilde{G}_{reg}$. Evidemment $J^G(x, \phi') = 0$ si x n'est pas elliptique ou si $x \notin U$. Supposons

$x \in U$ et x elliptique, notons c sa classe de conjugaison stable. On peut fixer i tel que x soit conjugué à un élément de $s_i exp(U_i)$. Grâce à V.3(1), l'ensemble $\mathcal{K}$ des $k \in \{1, ..., n\}$ tels que x soit conjugué à un élément de $s_k exp(U_k)$ est égal à celui des k tels que s_k soit conjugué à s_i. La fonction $k \mapsto d_k$ est constante sur $\mathcal{K}$, égale à d_i, et on a $d_i = |\mathcal{K}|$. Alors :

$$J^G(x, \phi') = \sum_{k \in \mathcal{K}} d_k^{-1} J^G(x, \phi_k) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{d_k r(c) a(c)} J^{st}(x, f) = \frac{1}{r(c) a(c)} J^{st}(x, f).$$

En particulier, les intégrales orbitales de ϕ' sont constantes sur les classes de conjugaison stable, i.e. $\phi' \in C^{st}_{cusp}(\tilde{G})$. Soit $c^* \in C^*$ tel que $\iota(c^*) = c$. Appliquons les constructions de V.3(5). Alors, d'après cette relation (5) :

$$J^{st}(x, \phi') = a(c) \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} b_i^{-1} J^G(x_{i,j}, \phi') = a(c) \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} \frac{1}{b_i r(c) a(c)} J^{st}(x, f).$$

Posons $b = (\sum_{i=1,...,n} b_i^{-1})^{-1}$. Alors $\sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} b_i^{-1} = b^{-1} r(c)$ et l'égalité précédente devient $J^{st}(x, \phi') = b^{-1} J^{st}(x, f)$. Alors la fonction $\phi = b\phi'$ vérifie les propriétés requises. $\square$

V.5. Un théorème de stabilité

Notons $R^{st}_{ell}(\tilde{G})$, resp. $R^{inst}_{ell}(\tilde{G})$, le sous-espace des éléments de $R_{ell}(\tilde{G})$ qui annulent $C^{inst}_{cusp}(\tilde{G})$, resp. $C^{st}_{cusp}(\tilde{G})$ (ou, plus exactement, dont les images dans $D(\tilde{G})$ annulent ces espaces). On définit de façon similaire les espaces $R^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$, $R^{\infty,inst}_{ell}(\tilde{G})$ et, pour $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$, $R^{st}_{\xi,ell}(\tilde{G})$ et $R^{inst}_{\xi,ell}(\tilde{G})$. Pour $\xi \in \mathcal{X}_u(A_{\tilde{G}})$, la conjonction des propriétés énoncées en IV.5 et de la proposition V.1 entraîne l'égalité :

$$R_{\xi,ell}(\tilde{G}) = R^{st}_{\xi,ell}(\tilde{G}) \oplus R^{inst}_{\xi,ell}(\tilde{G}).$$

Par tensorisation par des éléments de $\mathcal{X}_{nr}(\tilde{G})$, on en déduit l'égalité :

$$R_{ell}(\tilde{G}) = R^{st}_{ell}(\tilde{G}) \oplus R^{inst}_{ell}(\tilde{G}),$$

puis l'égalité :

$$R^{\infty}_{ell}(\tilde{G}) = R^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G}) \oplus R^{\infty,inst}_{ell}(\tilde{G}).$$

Un élément de $D(\tilde{G})$ est dit stable s'il annule $C^{\infty,inst}_c(\tilde{G})$. En particulier, soit $\pi \in R(\tilde{G})$. Alors la distribution $trace_{\tilde{G}}\pi$ est stable si et seulement si $trace_{\tilde{G}}\pi$, considéré cette fois comme une fonction sur $\tilde{G}_{reg}$, est constante sur les classes de conjugaison stable contenues dans $\tilde{G}_{reg}$. De même, pour $\pi \in R_{ell}(\tilde{G})$, on a $\pi \in R^{st}_{ell}(\tilde{G})$ si et seulement si la fonction $trace_{\tilde{G}}\pi$ est constante sur les classes de conjugaison stable contenues dans $\tilde{G}_{ell}$.

Remarquons que pour $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$ et $D_M \in D(\tilde{M})$, si D_M est stable, alors $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_M)$ l'est aussi.

Théorème. *Pour tout $\pi \in R^{st}_{ell}(\tilde{G})$, la distribution $trace_{\tilde{G}}\pi$ est stable.*

Preuve. Le théorème est dû à Arthur dans le cas connexe ([A3], théorème 6.1). On reprend sa démonstration, en la modifiant pour éliminer l'usage de la formule des traces locales. Pour simplifier l'écriture, on identifie tout élément d'un espace de représentations à sa distribution associée (par exemple tout $\pi \in R^{\infty}(\tilde{G})$ à $trace_{\tilde{G}}\pi$). On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathbf{G}$, tenant le théorème pour acquis pour les groupes de Lévi propres de $\mathbf{G}^+$.

Fixons un corps de nombres $\dot{F}$, un groupe réductif connexe $\dot{\mathbf{G}}$ défini sur $\dot{F}$, muni d'un automorphisme $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ d'ordre r, et une place finie u de $\dot{F}$ vérifiant les conditions ci-dessous. On utilise les notations standard : pour toute place v de $\dot{F}$, $\dot{F}_v$ est le complété de $\dot{F}$ en v, $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de $\dot{F}$, $\mathbb{A}^v$ le sous-anneau des éléments dont la composante en v est 1, etc... On suppose :

- $\dot{F}_u \simeq F$ et on fixe un tel isomorphisme ;
- par extension des scalaires de $\dot{F}$ à F, $\dot{\mathbf{G}}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathbf{A}_{\dot{\mathbf{G}}}$ deviennent $\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{G}}$;

- pour toute place archimédienne v de $\dot{F}$, $\dot{F}_v \simeq \mathbb{C}$;

- $\dot{\mathbf{G}}(\dot{F})$ est dense dans $\dot{\mathbf{G}}(\dot{F}_u) = G$;

- si $\mathbf{G}$ est de type (B), $(\dot{\mathbf{G}}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ est l'avatar global évident de $(\mathbf{G}, \boldsymbol{\theta})$, par exemple si $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_N$ sur F, $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{GL}_N$ sur $\dot{F}$.

Identifions le groupe $\mathbb{R}_{>0}$ des réels > 0 au sous-groupe $\mathcal{A}_{\dot{F}}$ des éléments de $\mathbb{A}^\times$ dont toutes les composantes finies valent 1 et toutes les composantes archimédiennes sont égales à un même nombre réel > 0. Identifions $\mathbf{A}_{\dot{\mathbf{G}}}$ à $\mathbf{GL}(1)^m$ pour un certain entier m. Alors $\mathbf{A}_{\dot{\mathbf{G}}}(\mathbb{A})$ s'identifie à $(\mathbb{A}^\times)^m$ et on note $\mathcal{A}$ le sous-groupe de $\mathbf{A}_{\dot{\mathbf{G}}}(\mathbb{A})$ qui s'identifie à $\mathcal{A}_{\dot{F}}^m$. Ce groupe ne dépend pas de l'dentification choisie.

On définit de façon évidente les espaces $C_c^\infty(\tilde{\dot{\mathbf{G}}}(\mathbb{A}))$ et $C_c^\infty(\tilde{\dot{\mathbf{G}}}(\mathbb{A}^u))$. On note $\mathcal{H}^u$ le sous-espace de $C_c^\infty(\tilde{\dot{\mathbf{G}}}(\mathbb{A}^u))$ engendré par les fonctions $\prod_{v\neq u} f_v$ vérifiant :

- il existe deux places finies $v_1, v_2 \neq u$ telles que $f_{v_i} \in C_{cusp}(\tilde{\dot{\mathbf{G}}}(\dot{F}_{v_i}))$ pour $i = 1, 2$;

(1) il existe une place finie $v_0 \neq u$ telle que $f_{v_0} \in C_{cusp}^{st}(\tilde{\dot{\mathbf{G}}}(\dot{F}_{v_0}))$.

Pour $f^u \in \mathcal{H}^u$ et $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, on a $f^u \otimes f \in C_c^\infty(\tilde{\dot{\mathbf{G}}}(\mathbb{A}))$. On peut appliquer à cette fonction la formule des traces simples ([A4], paragraphe 7).

Remarques. (a) On utilise la version de cette formule des traces où l'espace "primitif" est $L^2(\mathcal{A}\dot{\mathbf{G}}(\dot{F})\backslash\dot{\mathbf{G}}(\mathbb{A}))$.

(b) Dans le cas (B) où $\mathbf{G}^+$ n'est pas connexe, les résultats de [A4] sont valides sous une hypothèse d'analyse harmonique aux places archimédiennes. Cette hypothèse a été vérifiée par Mezo ([M]) pour les places réelles. Pour la présente démonstration, on pourrait aussi bien supposer $\dot{F}$ totalement réel. Ce sera moins clair pour la démonstration du théorème VI.3. En fait, la démonstration de Mezo s'étend sans difficulté au cas complexe (au contraire, en se simplifiant) et nous considérerons ce point comme acquis.

La formule des traces simple s'écrit :

$$I_{geom}(f^u \otimes f) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} I_{spec,\nu}(f^u \otimes f),$$

où $\mathcal{N}$ est un certain ensemble de paramètres archimédiens, cf. [A3] (7.3). On pose $I = \mathcal{H}^u \times \mathcal{N}$. Pour $i = (f^u, \nu) \in I$, on note D_i la distribution $f \mapsto I_{spec,\nu}(f^u \otimes f)$. Ces distributions vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout $i \in I$, $D_i \in R^\infty(\tilde{G})$, cf. [A3] formule suivant (7.3) ;

- pour tout $i \in I$, D_i est stable ;

(2) soit $f \in C_{cusp}(\tilde{G})$, supposons $D_i(f) = 0$ pour tout $i \in I$; alors f appartient à $C_{cusp}^{inst}(\tilde{G})$.

En effet, les arguments utilisant les multiplicateurs de [A3] paragraphe 8 montrent que, pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, on a l'équivalence :

$$\forall i \in I, D_i(f) = 0 \Leftrightarrow \forall f^u \in \mathcal{H}^u, I_{geom}(f^u \otimes f) = 0.$$

La stabilisation de la formule des traces géométriques ([KS], [L2]) et l'hypothèse (1) entraînent que, pour tout $f^u \in \mathcal{H}^u$, la distribution $f \mapsto I_{geom}(f^u \otimes f)$ est stable. De ces deux arguments résulte que D_i est stable pour tout i. Pour $f \in C_{cusp}(\tilde{G})$, $f \notin C_{cusp}^{inst}(\tilde{G})$, l'argument de [A3], fin du paragraphe 8 montre qu'il existe $f^u \in \mathcal{H}^u$ tel que $I_{geom}(f^u \otimes f) \neq 0$. Alors $D_i(f) \neq 0$ pour au moins un i, d'où (2).

Pour tout $i \in I$ et tout $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$, introduisons l'élément $D_{i,M} \in R_{ell}^\infty(\tilde{M})^{Norm_G(\tilde{M})}$ tel que :

$$D_i = \sum_{\tilde{\mathbf{M}}\in\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj} Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{i,M}).$$

Montrons que :

(3) pour tout $i \in I$ et tout $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$, $D_{i,M}$ est stable.

On fixe i. Notons $\mathcal{L}^{st}$, resp. $\mathcal{L}^{inst}$, l'ensemble des $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$ tels que $D_{i,M}$ est stable, resp. ne l'est pas. Posons :

$$D'_i = \sum_{\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}^{inst}} Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{i,M}) = D_i - \sum_{\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}^{st}} Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{i,M}).$$

Tous les termes du troisième membre sont stables donc D'_i l'est. On veut prouver que $\mathcal{L}^{inst}$ est vide. Supposons qu'il ne l'est pas. Il ne peut pas être réduit à $\{\tilde{\mathbf{G}}\}$: sinon $D'_i = D_{i,G}$ donc $D_{i,G}$ est stable et $\tilde{\mathbf{G}} \notin \mathcal{L}^{inst}$. Donc $\mathcal{L}^{inst}$ contient un groupe de Lévi propre et on peut fixer $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}^{inst}$, $\tilde{\mathbf{M}} \neq \tilde{\mathbf{G}}$, de dimension maximale. Pour tout $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{M}})$, fixons une base B_ξ de $R_{\xi,ell}(\tilde{M})$ vérifiant la propriété suivante. On écrit $\xi = \xi_u \mu_{|A_{\tilde{M}}}$ où $\xi_u \in \mathcal{X}_u(A_{\tilde{M}})$ et $\mu \in \mathcal{X}_{nr}(\tilde{M})$. On demande que la famille $(\phi(b \otimes \mu^{-1}))_{b \in B_\xi}$ soit réunion d'une base orthonormée de $I^{st}_{\xi_u,cusp}(\tilde{M})$ et d'une base orthonormée de $I^{inst}_{\xi_u,cusp}(\tilde{M})$. Remarquons que ces deux espaces sont orthogonaux. Notre famille est dons une base orthonormée de $I_{\xi_u,cusp}(\tilde{M})$ et est une bonne base comme toute base orthonormée. De plus B_ξ se décompose de façon naturelle en $B_\xi^{st} \cup B_\xi^{inst}$. Ecrivons formellement :

$$D_{i,M} = \sum_{\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{M}})} \sum_{b \in B_\xi} x_b b.$$

On reprend la preuve du lemme IV.6, en ne considérant que des fonctions $f \in C^{inst}_{cusp}(\tilde{M})$. Pour une telle fonction, les fonctions ${}^a f^K$ de IV.2 appartiennent à $C_c^{\infty,inst}(\tilde{G})$ et annulent donc D'_i. Alors la preuve du lemme IV.6 conduit maintenant à l'égalité $x_b = 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{M}})$ et tout $b \in B_\xi^{inst}$. Donc $D_{i,M}$ appartient à $R_{ell}^{\infty,st}(\tilde{M})$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $D_{i,M}$ est stable, ce qui contredit l'hypothèse $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}^{inst}$. Cela prouve (3).

Soit $f \in C_c^{\infty,inst}(\tilde{G})$. Introduisons $f_{cusp} \in C_{cusp}(\tilde{G})$ vérifiant IV.5(3). Soit $i \in I$. Puisque $D_{i,G} \in R^\infty_{ell}(\tilde{G})$, on a $D_{i,G}(f_{cusp}) = D_{i,G}(f)$. Puisque $D_{i,G}$ est stable d'après (3), on a $D_{i,G}(f) = 0$, donc $D_{i,G}(f_{cusp}) = 0$. Puisque $f_{cusp} \in C_{cusp}(\tilde{G})$, on a aussi $(Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{i,M}))(f_{cusp}) = 0$ pour tout $\tilde{\mathbf{M}} \neq \tilde{\mathbf{G}}$. Alors $D_i(f_{cusp}) = 0$. En appliquant (2), on obtient $f_{cusp} \in C^{inst}_{cusp}(\tilde{G})$. Pour tout $D \in R^{st}_{ell}(\tilde{G})$, on a donc $D(f_{cusp}) = 0$. Mais $D(f) = D(f_{cusp})$ donc $D(f) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $f \in C_c^{\infty,inst}(\tilde{G})$, D est stable. $\square$

VI. Transfert de représentations elliptiques

VI.1. Transfert endoscopique

Soit N un entier ≥ 1. On considère le groupe $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^+_N$ décrit en I.2. On considère l'hypothèse :

$(Lemme\ fond)_{\leq N}$ *Pour tout corps de nombres k, pour tout entier $N' \in \{1..., N\}$ de même parité que N et pour presque toute place v de k, l'hypothèse $(Lemme\ fond)_{k_v,N'}$ est vérifiée.*

Pour toute la fin de l'article, on suppose cette hypothèse vérifiée.

On pose $n = [N/2]$, $\epsilon = +$ si N est pair, $\epsilon = -$ si N est impair, et on considère le groupe $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\epsilon_n$ du paragraphe III.2. On a défini dans ce paragraphe une correspondance entre classes de conjugaison stable semi-simples régulières dans $\tilde{G}$ et dans H, dont on déduit une notion de transfert stable (correspondance entre $C_c^\infty(\tilde{G})$ et $C_c^\infty(H)$) et une notion duale, à savoir une correspondance entre éléments stables de $D(H)$ et éléments stables de $D(\tilde{G})$. En particulier, soient $\pi^H \in R(H)$ et $\pi \in R(\tilde{G})$. Supposons $trace\,\pi^H$ et $trace_{\tilde{G}}\pi$ stables. Alors π est un transfert de π^H si et seulement si, pour tous $g \in \tilde{G}_{reg}$, $h \in H_{reg}$ tels que $Norme(g) = h$, on a l'égalité $trace_{\tilde{G}}\pi(g) = trace\,\pi^H(h)$.

Proposition. *(i) Pour toute $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, il existe un transfert $f^H \in C_c^\infty(H)$.*

(ii) Le transfert induit une isométrie de $I^{st}_{cusp}(\tilde{G})$ sur $I^{st}_{cusp}(H)$.

Preuve. La démonstration est similaire à celle de la proposition V.1, on n'en donnera qu'une esquisse. Un argument de partition de l'unité permet de fixer un élément semi-simple s de $\tilde{G}$ et un élément semi-simple $\sigma \in H$ vérifiant la condition suivante : pour tous voisinages stablement invariants U_s de s dans $\tilde{G}$ et U_σ de σ dans H, il existe des éléments $g \in U_s \cap \tilde{G}_{reg}$ et $h \in U_\sigma \cap H_{reg}$ tels que $Norme(g) = h$. On considère ce qui se passe dans des voisinages stablement invariants de s et σ. Comme en V.3, on introduit des groupes quasi-déployés $\mathbf{G}_s^*$ et $\mathbf{H}_\sigma^*$, munis de groupes d'automorphismes, que nous noterons $\bar{\Gamma}_s$ et $\bar{\Gamma}_\sigma$. On a paramétré en I.3 la classe de conjugaison de s et décrit le groupe $\mathbf{G}_s$. Une description analogue vaut pour la classe de σ et son commutant. On peut décrire l'application $Norme$ en termes d'algèbre linéaire élémentaire et en déduire que les groupes $\mathbf{G}_s^*$ et $\mathbf{H}_\sigma^*$ sont très voisins. Nous laissons cette description au lecteur et en indiquons simplement le résultat (on donnera plus de détails en XII.1 dans le cas où N est pair). Précisément, il existe des groupes $\mathbf{U}_i$, pour $i = 1, ..., m$, des groupes $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}^H$, tous quasi-déployés sur F, tels que :

$$\mathbf{G}_s^* = \mathbf{S} \times \mathbf{S}' \times \prod_{i=1,\ldots,m} \mathbf{U}_i,$$

$$\mathbf{H}_\sigma^* = \mathbf{S}^H \times \mathbf{S}' \times \prod_{i=1,\ldots,m} \mathbf{U}_i,$$

- pour tout $i = 1, ..., m$, il existe une extension finie F_i' de F tel que $\mathbf{U}_i$ soit l'image par le foncteur $Res_{F_i'/F}$ d'un groupe unitaire ou linéaire général ;

- si N est pair, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{S} = \mathbf{H}_\ell^-$ et $\mathbf{S}^H = \mathbf{H}_\ell^+$, tandis que $\mathbf{S}'$ est un groupe spécial orthogonal pair ;

- si N est impair, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{S} = \mathbf{H}_\ell^+$ et $\mathbf{S}^H = \mathbf{H}_\ell^-$, tandis que $\mathbf{S}'$ est un groupe symplectique ;

- les groupes $\bar{\Gamma}_s$ et $\bar{\Gamma}_\sigma$ sont triviaux si N est impair ou si $\mathbf{S}' = \{1\}$; sinon, le groupe spécial orthogonal pair $\mathbf{S}'$ se plonge dans le groupe orthogonal correspondant $\mathbf{O}'$ et les deux groupes $\bar{\Gamma}_s$ et $\bar{\Gamma}_\sigma$ s'identifient à O'/S' qui agit par automorphismes extérieurs sur $\mathbf{G}_s^*$ comme sur $\mathbf{H}_\sigma^*$.

De la correspondance entre classes de conjugaison stables dans $\tilde{G}$ et dans H se déduit une correspondance analogue entre $\mathfrak{g}_s^*$ et $\mathfrak{h}_\sigma$. Précisément, pour $X \in \mathfrak{g}_{s,reg}^*$ et $Y \in \mathfrak{h}_{\sigma,reg}^*$, disons que les classes de conjugaison stable de X et Y se correspondent si et seulement si, pour tout $\lambda \in F$ de valuation assez grande, $Norme(s\, exp(\lambda X)) = \sigma\, exp(2\lambda Y)$. Décomposons X en $X = X_S + X_{S'} + \sum_{i=1,\ldots,m} X_i$ où $X_S \in \mathfrak{s}$, $X_{S'} \in \mathfrak{s}'$, $X_i \in \mathfrak{u}_i$ pour tout $i = 1, ..., m$ et décomposons de même Y en $Y = Y_{S^H} + Y_{S'} + \sum_{i=1,\ldots,m} Y_i$. Alors les classes de conjugaison stable de X et Y se correspondent si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

pour tout $i = 1, ..., m$, X_i et Y_i sont stablement conjugués ;

si N est impair ou si $\mathbf{S}' = \{1\}$, $X_{S'}$ et $Y_{S'}$ sont stablement conjugués ; sinon, il existe $\gamma \in O'$ (cf. ci-dessus) tel que $\gamma(X_{S'})\gamma^{-1}$ soit stablement conjugué à $Y_{S'}$;

les classes de conjugaison stable de X_S et Y_{S^H} se correspondent par la correspondance décrite en III.3.

La preuve de V.4 montre que l'on peut transférer toute fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ en une fonction $f^{G_s^*} \in I_{loc}(\mathfrak{g}_s^*)^{\bar{\Gamma}_s}$. De même, on peut transférer toute fonction $f \in C_c^\infty(H)$ en une fonction $f^{H_\sigma^*} \in I_{loc}(\mathfrak{h}_\sigma^*)^{\bar{\Gamma}_\sigma}$. Cette dernière application est surjective car on peut choisir σ tel que $\mathbf{H}_\sigma$ soit quasi-déployé, auquel cas $\mathbf{H}_\sigma = \mathbf{H}_\sigma^*$. On peut aussi transférer tout élément $f \in I_{loc}(\mathfrak{g}_s^*)^{\bar{\Gamma}_s}$ en une fonction $f' \in I_{loc}(\mathfrak{h}_\sigma^*)^{\bar{\Gamma}_\sigma}$. En effet, cette assertion se décompose en des assertions analogues pour chaque composante des groupes $\mathbf{G}_s^*$ et $\mathbf{H}_\sigma^*$. Pour les composantes $\mathbf{U}_i$ ou $\mathbf{S}'$, l'assertion est triviale, le transfert étant l'identité. Pour les composantes $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S}^H$, l'assertion se prouve comme en [W1], cf. preuve ci-dessus de la proposition III.5. Il faut pour cela disposer de l'assertion $(\mathfrak{Lemme\ fond})_\ell$. Mais, grâce au lemme III.3, celle-ci résulte de notre hypothèse $(Lemme\ fond)_{\leq N}$. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, on transfère f en $f^{G_s^*} \in I_{loc}(\mathfrak{g}_s^*)^{\bar{\Gamma}_s}$, puis cette fonction en $f' \in I_{loc}(\mathfrak{h}_\sigma^*)^{\bar{\Gamma}_\sigma}$. On choisit $f_0 \in C_c^\infty(H)$ qui se transfère en $f_0^{H_\sigma^*} = f'$. Alors f_0 est un transfert local de f au voisinage de σ. Cela prouve le (i) de l'énoncé.

De la même façon, que le transfert induise un isomorphisme de $I^{st}_{cusp}(\tilde{G})$ sur $I^{st}_{cusp}(H)$ se ramène à l'assertion suivante : le transfert local induit un isomorphisme de $I^{st}_{cusp,loc}(\mathfrak{s})$ sur $I^{st}_{cusp,loc}(\mathfrak{s}^H)$. Cette assertion se prouve comme le lemme V.2, en utilisant la proposition III.3.

Que l'isomorphisme obtenu de $I^{st}_{cusp}(\tilde{G})$ sur $I^{st}_{cusp}(H)$ soit une isométrie résulte immédiatement des définitions. □

Remarquons qu'il y a une bijection évidente entre les ensembles $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$ et $\mathcal{L}(\mathbf{H})/conj$. Soient $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$ et $\tilde{\mathbf{L}} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})/conj$ deux éléments qui se correspondent par cette bijection. Modifions les notations en notant maintenant $(\tilde{\mathbf{G}}, \mathbf{H})$ le couple $(\tilde{\mathbf{M}}, \mathbf{L})$. Les définitions ci-dessus s'étendent à ce couple et les résultats restent valables. On vérifie qu'il existe un isomorphisme naturel de $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{G}}}$ sur $\mathbf{A}_{\mathbf{H}}$, grâce auquel nous identifierons ces deux groupes, de sorte que, pour $g \in \tilde{G}_{reg}$, $h \in H_{reg}$ et $a \in A_{\tilde{G}}$, on ait $Norme(g) = h$ si et seulement si $Norme(ag) = a^2h$. Les groupes de caractères $\mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$ et $\mathcal{X}(A_H)$ s'identifient. Pour $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}})$, l'isomorphisme du (ii) de la proposition induit une isométrie :

$$I^{st}_{\xi,cusp}(\tilde{G}) \simeq \oplus_{\eta;\eta^2=\xi} I^{st}_{\eta,cusp}(H).$$

VI.2. Transfert archimédien

Considérons les groupes $\mathbf{G}^+$ et $\mathbf{H}$ du début du paragraphe précédent mais, pour ce paragraphe, supposons que le corps de base soit $\mathbb{C}$ au lieu de F. Introduisons les sous-groupes de Borel triangulaires supérieurs $\mathbf{B^G}$ de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{B^H}$ de $\mathbf{H}$ et leurs sous-tores diagonaux $\mathbf{T^G}$ et $\mathbf{T^H}$ (le groupe $\mathbf{H}$ étant réalisé de façon matricielle de la façon habituelle). Introduisons des sous-groupes compacts maximaux K^G de G et K^H de H en bonne position relativement à $\mathbf{T^G}$ et $\mathbf{T^H}$. On suppose de plus K^G invariant par $\boldsymbol{\theta}$. On note W le groupe de Weyl du groupe $\mathbf{H}$ relativement à $\mathbf{T^H}$. C'est le groupe de Weyl d'un système de racines de type C_n. On note $\mathcal{H}(\tilde{G})$, resp. $\mathcal{H}(H)$, le sous-espace des éléments de $C_c^\infty(\tilde{G})$, resp. $C_c^\infty(H)$, qui sont biinvariants par K^G, resp. K^H. Décomposons l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}^H$ en somme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}^H_0$ du plus grand sous-tore réel déployé de T^H et de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}^H_K$ de $T^H \cap K^H$. Posons $\mathfrak{l} = i\mathfrak{t}^H_K \oplus \mathfrak{t}^H_0$, notons $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}^*_{\mathbb{C}}$ son dual. Notons enfin $W_{\mathbb{C}}$ le groupe de Weyl complexe de H. Dans la preuve du théorème V.5 intervient un ensemble $\mathcal{N}$ de paramètres archimédiens. Cet ensemble est le même pour $\mathbf{G}^+$ et $\mathbf{H}$: c'est le sous-ensemble des invariants $(\mathfrak{l}^*_{\mathbb{C}})^{W_{\mathbb{C}}}$. Les multiplicateurs d'Arthur sont des éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{l})^{W_{\mathbb{C}}}$. Un tel élément α a une transformée de Fourier $\hat{\alpha}$, qui est une fonction de Paley-Wiener sur $\mathfrak{l}^*_{\mathbb{C}}$. L'action d'un multiplicateur α sur $C_c^\infty(\tilde{G})$ ou $C_c^\infty(H)$ est notée $f \mapsto f_\alpha$. Cette action conserve les espaces $\mathcal{H}(\tilde{G})$, resp. $\mathcal{H}(H)$.

Lemme. *(i) Soit $f \in \mathcal{H}(\tilde{G})$. Alors il existe un transfert f^H de f qui appartient à $\mathcal{H}(H)$.*

(ii) Soient $f \in \mathcal{H}(\tilde{G})$, $f^H \in \mathcal{H}(H)$ et α un multiplicateur. Si f^H est un transfert de f, alors $(f^H)_\alpha$ est un transfert de f_α.

Preuve. Notons $\mathbf{U^G}$, resp. $\mathbf{U^H}$, les radicaux unipotents de $\mathbf{B^G}$, resp. $\mathbf{B^H}$. On définit des applications :

$$b_{\tilde{G}} : \mathcal{H}(\tilde{G}) \to C^\infty(T^G\theta),\ b_H : \mathcal{H}(H) \to C_c^\infty(T^H)$$

par :

$$b_{\tilde{G}}(f)(t\theta) = \delta_{B^G}(t\theta)^{1/2} \int_{U^G} f(tu\theta)du,$$

$$b_H(f)(t) = \delta_{B^H}(t)^{1/2} \int_{U^H} f(tu)du.$$

L'application b_H a pour image le sous-espace des invariants $C_c^\infty(T^H/(T^H \cap K^H))^W$, cf. [CD], proposition 1. Définissons une application que l'on note encore $Norme : T^G\theta \to T^H$ par :

$$si\ N\ est\ impair,\quad \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & t_N \end{pmatrix}\theta \mapsto \begin{pmatrix} t_1t_N^{-1} & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & t_nt_{n+2}^{-1} & & & \\ & & & & t_{n+2}t_n^{-1} & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & t_Nt_1^{-1} \end{pmatrix}$$

$$si\ N\ est\ pair,\quad \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & t_N \end{pmatrix}\theta \mapsto \begin{pmatrix} -t_1t_N^{-1} & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & -t_nt_{n+1}^{-1} & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & -t_{n+1}t_n^{-1} & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & -t_Nt_1^{-1} \end{pmatrix}$$

Pour $f \in \mathcal{H}(\tilde{G})$, la fonction $b_{\tilde{G}}(f)$ se factorise par cette application. On note $b'_{\tilde{G}}(f)$ la fonction sur T^H telle que $b'_{\tilde{G}}(f) \circ Norme = b_{\tilde{G}}(f)$. Cela définit une application $b'_{\tilde{G}}$ de $\mathcal{H}(\tilde{G})$ dans $C^\infty(T^H)$. Son image est évidemment contenue dans $C_c^\infty(T^H/(T^H \cap K^H))^W$, en fait égale, mais peu importe.

Soit $t \in T^G$ tel que $t\theta$ appartienne à $\tilde{G}_{reg}$ et soit $f \in \mathcal{H}(\tilde{G})$. Par descente de Harish-Chandra et pourvu que les mesures soient convenablement normalisées, on a l'égalité $J^G(t\theta, f) = b_{\tilde{G}}(f)(t\theta)$. De même, pour $t \in T^H \cap H_{reg}$ et $f \in \mathcal{H}(H)$, on a l'égalité $J^H(t, f) = b_H(f)(t)$. Parce que le corps de base est $\mathbb{C}$, tout élément de $\tilde{G}_{reg}$, resp. H_{reg}, est conjugué à un élément de $T^G\theta$, resp. T^H. Alors, pour $f \in \mathcal{H}(\tilde{G})$ et $f^H \in \mathcal{H}(H)$, f^H est un transfert de f si et seulement si $b_H(f^H) = b'_{\tilde{G}}(f)$. Puisque l'image de $b'_{\tilde{G}}$ est incluse dans celle de b_H, on obtient la première assertion.

Notons $\mathfrak{t}_{0,\mathbb{C}}^{H,*}$ le dual de l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{t}_0^H$. La transformation de Mellin définit un isomorphisme ι de $C_c^\infty(T^H/(T^H \cap K^H))^W$ sur l'espace des fonctions de Paley-Wiener sur $\mathfrak{t}_{0,\mathbb{C}}^{H,*}$ invariantes par W. Remarquons que toute fonction $\hat{\alpha}$ sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ définit par restriction une fonction $\hat{\alpha}_0$ sur $\mathfrak{t}_{0,\mathbb{C}}^{H,*}$. Pour un multiplicateur α et pour $f \in \mathcal{H}(\tilde{G})$, resp. $f^H \in \mathcal{H}(H)$, on a les égalités $\iota \circ b'_{\tilde{G}}(f_\alpha) = \hat{\alpha}_0\, \iota \circ b'_{\tilde{G}}(f)$, resp. $\iota \circ b_H((f^H)_\alpha) = \hat{\alpha}_0\, \iota \circ b_H(f^H)$. De la description ci-dessus du transfert résulte alors la deuxième assertion de l'énoncé. $\square$

Ici encore, les résultats se généralisent au cas où on remplace $(\tilde{\mathbf{G}}, \mathbf{H})$ par $(\tilde{\mathbf{M}}, \mathbf{L})$, où $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$ et $\mathbf{L} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})/conj$ sont des Lévi qui se correspondent.

VI.3. Le théorème

Le corps de base est de nouveau F. Maintenant le couple $(\mathbf{G}^+, \mathbf{H})$ est celui décrit en VI.1 ou, plus généralement, le couple formé par deux Lévi de ces groupes qui se correspondent.

Soient $D^H \in D(H)$ et $D \in D(\tilde{G})$ deux éléments stables. On a défini la propriété "D est un transfert de D^H". On dit que D est un transfert de D^H sur les elliptiques si et seulement si, pour tous $f \in C_{cusp}(\tilde{G})$, $f^H \in C_{cusp}(H)$ tels que f^H soit un transfert de f, on a l'égalité $D^H(f^H) = D(f)$. En particulier, si D est l'image de $\pi \in R(\tilde{G})$ et D^H celle de $\pi^H \in R(H)$, il revient au même de demander que, pour tous $g \in \tilde{G}_{ell}$, $h \in H_{ell}$ tels que $Norme(g) = h$, on ait l'égalité $trace_{\tilde{G}}\pi(g) = trace\, \pi^H(h)$. Grâce au théorème V.5, la proposition VI.1(ii) se dualise en l'assertion suivante. Il existe un unique isomorphisme $trans : R_{ell}^{st}(H) \to R_{ell}^{st}(\tilde{G})$ de sorte que, pour $\pi^H \in R^{st}_{ell}(H)$ et $\pi \in R^{st}_{ell}(\tilde{G})$, $trace_{\tilde{G}}\pi$ soit un transfert de $trace\,\pi^H$ sur les elliptiques si et seulement si $\pi = trans(\pi^H)$.

Pour tout $\eta \in \mathcal{X}(A_H)$, fixons une base $B^{st,H}_\eta$ de $R^{st}_{\eta,ell}(H)$ comme dans la preuve du théorème V.5. Pour tout $\xi \in \mathcal{X}(A_{\tilde{G}}) = \mathcal{X}(A_H)$, posons :

$$B^{st,\tilde{G}}_\xi = \sqcup_{\eta;\eta^2=\xi} trans(B^{st,H}_\eta).$$

C'est une base de $R^{st}_{\xi,ell}(\tilde{G})$ qui vérifie les mêmes propriétés que la base $B^{st,H}_\eta$. Soient $\pi^H \in R^{\infty,st}_{ell}(H)$ et $\pi \in R^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$. Ecrivons formellement :

$$\pi^H = \sum_{\eta\in\mathcal{X}(A_H)} \sum_{b\in B^{st,H}_\eta} x_b b,$$

$$\pi = \sum_{\eta\in\mathcal{X}(A_H)} \sum_{b\in B^{st,H}_\eta} y_b trans(b).$$

On a :

(1) pour tous $\eta \in \mathcal{X}(A_H)$ et tout $b \in B^{st,H}_\eta$, il existe $f \in C^{st}_{cusp}(\tilde{G})$ et $f^H \in C^{st}_{cusp}(H)$ tels que f^H soit un transfert de f et, pour tout $a \in A_{\tilde{G}}$, on ait les égalités :

$$trace_{\tilde{G}}\pi({}^a f) = \eta^2(a) y_b,\ trace\,\pi^H({}^a f^H) = \eta(a) x_b.$$

C'est une variante de IV.5(2) qui se démontre de la même façon.

Théorème. *Soient $\pi \in R^{st}_{ell}(\tilde{G})$ et $\pi^H \in R^{st}_{ell}(H)$. Supposons que $trace_{\tilde{G}}\pi$ soit un transfert de $trace\,\pi^H$ sur les elliptiques. Alors $trace_{\tilde{G}}\pi$ est un transfert de $trace\,\pi^H$.*

Preuve. On adopte les mêmes simplifications d'écriture que dans la preuve du théorème V.5. De nouveau, on raisonne sur la dimension de $\mathbf{G}$.

On fixe un corps de nombres $\dot{F}$, deux groupes $\dot{\mathbf{G}}$ et $\dot{\mathbf{H}}$ définis sur $\dot{F}$ et une place u de $\dot{F}$ de sorte que $(\dot{F}, u, \dot{\mathbf{G}})$ et $(\dot{F}, u, \dot{\mathbf{H}})$ vérifient tous deux les conditions de la preuve de V.5. On modifie les définitions de ce paragraphe en notant $\mathcal{H}^u(\dot{\tilde{G}})$ le sous-espace de $C^\infty_c(\dot{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathbb{A}^{\mathbf{u}}))$ engendré par les fonctions $\prod_{v\neq u} f_v$ qui vérifient les mêmes conditions qu'en V.5 et de plus :

- pour toute place v archimédienne, $f_v \in \mathcal{H}(\dot{\tilde{\mathbf{G}}}(\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}}))$, cf. VI.2.

On définit de façon similaire l'espace $\mathcal{H}^u(\dot{H})$. Grâce aux résultats de VI.1 et VI.2 et surtout grâce au lemme fondamental que l'on suppose vérifié, pour tout $f^u \in \mathcal{H}^u(\dot{\tilde{G}})$, il existe $f^{u,H} \in \mathcal{H}^u(\dot{H})$ qui soit un transfert de f.

Pour $f \in C^\infty_c(\tilde{G})$ et $f^u \in \mathcal{H}^u(\dot{\tilde{G}})$, on écrit la formule des traces simples :

$$I^G_{geom}(f^u \otimes f) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} I^G_{spec,\nu}(f^u \otimes f).$$

De même, pour $f^H \in C^\infty_c(H)$ et $f^{u,H} \in \mathcal{H}^u(\dot{H})$, on a la formule :

$$I^H_{geom}(f^{u,H} \otimes f^H) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} I^H_{spec,\nu}(f^{u,H} \otimes f^H).$$

L'ensemble de paramètres archimédiens est le même. On note I l'ensemble des triplets $(f^u, f^{u,H}, \nu)$ où $\nu \in \mathcal{N}$, $f^u \in \mathcal{H}^u(\dot{\tilde{G}})$, $f^{u,H} \in \mathcal{H}^u(\dot{H})$ et $f^{u,H}$ est un transfert de f^u. Pour un tel triplet , on note D^G_i, resp. D^H_i, la distribution $f \mapsto I^G_{spec,\nu}(f^u\otimes f)$ sur $C^\infty_c(\tilde{G})$, resp. $f^H \mapsto I^H_{spec,\nu}(f^{u,H}\otimes f^H)$ sur $C^\infty_c(H)$. Grâce à la stabilisation de la formule des traces tordue ([KS], [L2]), et en suivant Arthur [A3] paragraphe 9, on montre les propriétés suivantes :

- pour tout $i \in I$, $D^G_i \in R^\infty(\tilde{G})$ et $D^H_i \in R^\infty(H)$;
- pour tout $i \in I$, D^G_i et D^H_i sont stables et D^G_i est un transfert de D^H_i ;

(2) soient $f \in C_{cusp}(\tilde{G})$ et $f^H \in C_{cusp}(H)$, supposons $D_i^G(f) = D_i^H(f^H)$ pour tout $i \in I$; alors f^H est un transfert de f.

Pour tout $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$, notons $\mathbf{M}^H$ l'élément corespondant de $\mathcal{L}(\mathbf{H})/conj$. Pour tout $i \in I$ et tout $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$, introduisons les éléments $D_{i,M} \in R_{ell}^{\infty}(\tilde{M})^{Norme_G(\tilde{M})}$ et $D_{i,M^H} \in R_{ell}^{\infty}(M^H)^{Norm_H(M^H)}$ tels que :

$$D_i^G = \sum_{\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj} Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{i,M}),$$

$$D_i^H = \sum_{\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj} Ind_{M^H}^{H}(D_{i,M^H}).$$

D'après V.5(3), $D_{i,M}$ et D_{i,M^H} sont stables. Montrons que :

(3) pour tout $i \in I$ et tout $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$, $D_{i,M}$ est un transfert de D_{i,M^H}.

Fixons $i \in I$. On reprend la preuve de V.5(3). Si l'assertion ci-dessus n'est pas vérifiée, on peut fixer $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, $\tilde{\mathbf{M}} \neq \tilde{\mathbf{G}}$, tel que $D_{i,M}$ ne soit pas un transfert de D_{i,M^H} et $\tilde{\mathbf{M}}$ soit de dimension maximale. Selon les constructions précédant (1) ci-dessus, écrivons :

$$D_{i,M^H} = \sum_{\eta \in \mathcal{X}(A_{M^H})} \sum_{b \in B_\eta^{st,M^H}} x_b b,$$

$$D_{i,M} = \sum_{\eta \in \mathcal{X}(A_{M^H})} \sum_{b \in B_\eta^{st,M^H}} y_b trans(b).$$

On fixe $\eta \in \mathcal{X}(A_{M^H})$ et $b \in B_\eta^{st,M^H}$ et on choisit $f \in C_{cusp}(\tilde{M})$ et $f^H \in C_{cusp}^{st}(M^H)$ tels que f^H soit un transfert de f et, pour tout $a \in A_{\tilde{M}}$, on ait les égalités :

$$D_{i,M}({}^a f) = \eta^2(a) y_b,\ D_{i,M^H}({}^a f^H) = \eta(a) x_b.$$

On introduit des fonctions ${}^a f^K$ et ${}^a f^{H,K^H}$ comme en IV.2. Parce qu'on contrôle leurs intégrales orbitales en fonction de celles de f et f^H, on vérifie que ${}^a f^{H,K^H}$ est un transfert de ${}^a f^K$. On a donc l'égalité :

$$D_i^G({}^a f^K) - D_i^H({}^a f^{H,K^H}) = 0.$$

On reprend alors la preuve du lemme IV.6 qui conduit maintenant à l'égalité $x_b = y_b$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, $trans(b)$ est un transfert de b pour tout $\eta \in \mathcal{X}(A_{M^H})$ et tout $b \in B_\eta^{st,M^H}$. L'égalité des coefficients que l'on vient d'obtenir entraîne que $D_{i,M}$ est un transfert de D_{i,M^H}. Cela contredit l'hypothèse sur $\tilde{\mathbf{M}}$. Cette contradiction démontre (3).

Soient $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G})$ et $f^H \in C_c^{\infty}(H)$, supposons que f^H soit un transfert de f. Suivant IV.5(3), introduisons $f_{cusp} \in C_{cusp}(\tilde{G})$ et $f_{cusp}^H \in C_{cusp}(H)$. Comme dans la preuve du théorème V.5, pour tout $i \in I$, on a les égalités :

$$D_i^G(f_{cusp}) = D_{i,G}(f_{cusp}) = D_{i,G}(f) = D_{i,H}(f^H) = D_{i,H}(f_{cusp}^H) = D_i^H(f_{cusp}^H).$$

Alors, d'après (2), f_{cusp}^H est un transfert de f_{cusp}. Autrement dit, les images naturelles de f_{cusp} dans $I_{cusp}^{st}(\tilde{G})$ et de f_{cusp}^H dans $I_{cusp}^{st}(H)$ se correspondent par l'isomorphisme de la proposition VI.1(ii). Soit $D^H \in R_{ell}^{st}(H)$. Alors, par définition de l'application $trans$, on a l'égalité $D^H(f_{cusp}^H) = trans(D^H)(f_{cusp})$. Puisque $D^H(f_{cusp}^H) = D^H(f^H)$ et $trans(D^H)(f_{cusp}) = trans(D^H)(f)$, on obtient $D^H(f^H) = trans(D^H)(f)$. Cela étant vrai pour tout couple (f, f^H), $trans(D^H)$ est un transfert de D^H. $\square$

Bibliographie

[A1] J. Arthur : *Unipotent automorphic représentations : global motivation*, in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, éd. L. Clozel et J.S. Milne, Perspectives in Math. vol.10, Academic Press 1990

[A2]———— : *On elliptic tempered characters*, Acta Math. 171 (1993), p.73-138

[A3]———— : *On local character relations*, Selecta Math. 2 (1996), p.501-579

[A4]———— : *The invariant trace formula II. Global theory*, J. AMS 1 (1988), p.501-554

[BDK] J. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan : *The trace Paley-Wiener theorem for reductive p-adic groups*, J. Analyse Math. 47 (1986), p.180-192

[BW] A. Borel, N. Wallach : *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Annals of Math. St. 94, Princeton Univ. Press, 1980

[C] L. Clozel : *Characters of non-connected, reductive p-adic groups*, Canadian J. Math. 39 (1987), p.149-167

[CD] L. Clozel, P. Delorme : *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs*, Inventiones Math. 77 (1984), p.427-453

[H] R. Herb : *Supertempered virtual characters*, Compositio Math. 93 (1994), p.139-154

[KR] R. Kottwitz, J. Rogawski : *The distributions in the invariant trace formula are supported on characters*, Canadian J. Math. 52 (2000)

[KS] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[L1] J.-P. Labesse : *Non invariant base change identities*, Mémoires SMF 61 (1995)

[L2] ———— : *Stable twisted trace formula : elliptic terms*, J. Inst. Math. Jussieu 3 (2004), p.473-530

[M] P. Mezo : *Twisted trace Paley-Wiener theorems for special and general linear groups*, Compositio Math. 140 (2004)

[MW] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour* $SO(2n+1)$, Inventiones Math. 152 (2003), p.461-623

[R] J. Rogawski : *Trace Paley-Wiener theorem in the twisted case*, Trans. AMS 309 (1988), p.215-229

[SS] P. Schneider, U. Stuhler : *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, Publ. Math. IHES 85 (1997), p.13-191

[W1] J.-L. Waldspurger : *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. 105 (1997), p.153-236

[W2] ———— : *Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie p-adiques*, J. reine angew. Math. 465 (1995), p.41-99

[W3] ———— : *Transformation de Fourier et endoscopie*, J. Lie Theory 10 (2000), p.195-206

CNRS-Institut de mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
e-mail waldspur@math.jussieu.fr