Le groupe GL_N tordu, sur un corps p-adique, 2 ème partie

J.-L. Waldspurger

8 juillet 2005

Introduction

Cet article est la suite de [W1]. Rappelons la situation. Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle et N un entier ≥ 1. On suppose que la caractéristique résiduelle p de F est $\neq 2$ et $> N$. Notons $\mathbf{G}_N$ ou simplement $\mathbf{G}$ le groupe algébrique $\mathbf{GL}_N$ défini sur F. On le munit de l'automorphisme $\boldsymbol{\theta}$ défini par $\boldsymbol{\theta}(g) = J{}^tg^{-1}J$, où :

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbf{G}^+$ le groupe non connexe $\mathbf{G} \times \{1, \theta\}$ défini par les relations $\theta^2 = 1$ et $\theta g \theta^{-1} = \boldsymbol{\theta}(g)$ pour $g \in \mathbf{G}$. On note $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\theta$ la composante non neutre de ce groupe. On pose $G = \mathbf{G}(F)$, $\tilde{G} = \tilde{\mathbf{G}}(F)$, $G^+ = \mathbf{G}^+(F)$.

On sait bien que la théorie de l'endoscopie est triviale pour le groupe $\mathbf{G}$ lui-même. La raison en est que deux éléments de G qui sont conjugués par un élément de $\mathbf{G}(\bar{F})$ (où $\bar{F}$ est la clôture algébrique de F) sont en fait conjugués par un élément de G. Cela n'est plus vrai pour $\mathbf{G}^+$, ou mieux pour sa composante $\tilde{\mathbf{G}}$: deux éléments de $\tilde{G}$ peuvent être conjugués par un élément de $\mathbf{G}(\bar{F})$ sans l'être par un élément de G. La théorie de l'endoscopie pour $\tilde{\mathbf{G}}$ est donc non triviale. Elle est même très riche : les groupes symplectiques et spéciaux orthogonaux apparaissent comme groupes endoscopiques de $\tilde{\mathbf{G}}$. Arthur montre dans [Ar] que cette théorie de l'endoscopie pour $\tilde{\mathbf{G}}$, dans sa version globale, permet conjecturalement de décrire le spectre discret de ces groupes classiques. Le but du présent article est de démontrer deux résultats, infimes mais non vides, de la théorie (locale) de l'endoscopie pour l'ensemble $\tilde{\mathbf{G}}$.

On s'intéresse aux représentations π^+ de G^+ qui sont admissibles, irréductibles, tempérées, qui possèdent des invariants non nuls par un sous-groupe d'Iwahori de G et dont la restriction à $\tilde{G}$ est elliptique. Cette dernière condition revient à dire que la restriction du caractère de π^+ à l'ensemble $\tilde{G}_{ell}$ des éléments réguliers elliptiques de $\tilde{G}$ est non nulle. Ces conditions sont très restrictives mais l'étude des représentations qui les vérifient donne déjà une idée de ce que doit être le cas général. Ces représentations se construisent toutes de la façon suivante. Appelons partition une suite $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$ de nombres entiers ≥ 0, décroissante, avec seulement un nombre fini de termes non nuls. Pour une telle partition, on pose :

$$S(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_1 + \lambda_2 + ...$$

Notons $\mathcal{P}_2(N)$ l'ensemble des couples de partitions $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ tels que $S(\boldsymbol{\lambda}^+) + S(\boldsymbol{\lambda}^-) = N$. Notons ξ l'unique caractère de $F^\times$ non ramifié et d'ordre 2. Pour tout entier $n \geq 1$, notons $St(n)$ la représentation de Steinberg de $G_n = GL_n(F)$ et $\xi St(n) = (\xi \circ det) \otimes St(n)$. Pour $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$, considérons la représentation :

$$St(\lambda_1^+) \otimes St(\lambda_2^+) \otimes ... \otimes \xi St(\lambda_1^-) \otimes \xi St(\lambda_2^-) \otimes ...$$

C'est une représentation de :

$$G_{\lambda_1^+} \times G_{\lambda_2^+} \times ... \times G_{\lambda_1^-} \times G_{\lambda_2^-} \times ...$$

Ce groupe est un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique de G. Par induction d'Harish-Chandra, on obtient une représentation de G, notée $\pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$. Cette représentation se prolonge de deux façons distinctes en une représentation de G^+. Notons $\mathcal{P}_{2,disc}(N)$ le sous-ensemble des $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$ tels que $\boldsymbol{\lambda}^+$ et $\boldsymbol{\lambda}^-$ soient "sans multiplicité" (tout entier $i \geq 1$ intervient au plus une fois dans $\boldsymbol{\lambda}^+$ et au plus une fois dans $\boldsymbol{\lambda}^-$). Pour $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}(N)$, chacun des deux prolongements de $\pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ vérifie les propriétés indiquées plus haut et toute représentation vérifiant ces propriétés est de cette forme.

Pour tout $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$, on indiquera en VII.3 comment choisir un prolongement de $\pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$, que l'on note $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$. On note $trace_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ la restriction à $\tilde{G}$ du caractère de $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$. C'est une distribution sur $\tilde{G}$, invariante par conjugaison par G. Elle n'a aucune raison d'être stable, c'est-à-dire invariante par conjugaison stable. De fait, en général, elle ne l'est pas. Notons $\mathcal{P}^{st}_{2,disc}(N)$ le sous-ensemble des $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}(N)$ tels que :

- si N est pair, les termes de $\boldsymbol{\lambda}^+$ et $\boldsymbol{\lambda}^-$ sont pairs ;

- si N est impair, les termes non nuls de $\boldsymbol{\lambda}^+$ et $\boldsymbol{\lambda}^-$ sont impairs et $S(\boldsymbol{\lambda}^-)$ est pair (ou, ce qui revient au même, $\boldsymbol{\lambda}^-$ a un nombre pair de termes non nuls).

Notre premier résultat est le théorème XI.5 :

Théorème. *Soit* $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}^{st}_{2,disc}(N)$. *Alors la distribution* $trace_{\tilde{G}}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ *est stable.*

Remarque. Les méthodes utilisées dans l'article permettraient probablement de prouver la réciproque suivante. Soit :

$$D = \sum_{(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}(N)} x(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) trace_{\tilde{G}}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$$

une combinaison linéaire finie à coefficients complexes. Supposons D stable. Alors $x(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) = 0$ si $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \notin \mathcal{P}^{st}_{2,disc}$. Nous ne le ferons pas.

Supposons maintenant que N est pair. Introduisons le groupe spécial orthogonal $\mathbf{H} = \mathbf{SO}(N+1)$ défini sur F, plus exactement la forme déployée de ce groupe. Posons $H = \mathbf{H}(F)$. Considérons les représentations π de H qui sont admissibles, irréductibles, de la série discrète et de réduction unipotente. Cette dernière condition est un peu plus générale que de posséder des éléments non nuls invariants par un sous-groupe d'Iwahori. Ces représentations se regroupent en L-paquets. Ces L-paquets sont paramétrés par l'ensemble $\mathcal{P}^{st}_{2,disc}(N)$. En effet, cet ensemble paramètre naturellement un certain ensemble d'homomorphismes de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ dans $Sp(N, \mathbb{C})$, où W_F est le groupe de Weil de F et le groupe symplectque $Sp(N, \mathbb{C})$ est le groupe dual de $\mathbf{H}$, cf. XII.2. Signalons en passant que la condition "de réduction unipotente" se traduit par le fait que les homomorphismes considérés sont non ramifiés, c'est-à-dire triviaux sur le sous-groupe d'inertie de W_F. Pour $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}^{st}_{2,disc}(N)$, notons $trace\,\sigma(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ la somme des caractères des éléments du L-paquet associé à $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$. C'est une distribution sur H, invariante par conjugaison. L'un des principaux résultats de [MW] est que cette distribution est stable.

Le groupe $\mathbf{H}$ est un groupe endoscopique de $\tilde{\mathbf{G}}$. C'est même son groupe endoscopique principal, en ce sens qu'il contrôle les distributions stables sur $\tilde{G}$. A la suite de Kottwitz, Shelstad et Labesse, on a introduit dans la première partie de l'article une notion de transfert entre $\tilde{G}$ et H ([W1] VI.1). Pour les distributions, ce transfert envoie une distribution stable sur H sur une distribution stable sur $\tilde{G}$. Notre deuxième résultat décrit le transfert pour les distributions introduites ci-dessus. Mais il est conditionnel : on suppose vérifié le lemme fondamental. Plus précisément, on suppose vérifiée l'hypothèse $(Lemme fond)_{\leq N}$ de [W1] VI.1, c'est-à-dire que, pour tout entier $N' \leq N$, de même parité que N, pour tout corps de nombres k et pour presque toute place finie v de k, le lemme fondamental est vérifié pour le couple

$(\mathbf{SO}(N'+1), \tilde{\mathbf{G}}_{N'})$ défini sur le corps complété k_v. Le résultat est alors le suivant (théorème XII.3) :

Théorème. *Supposons vérifiée l'hypothèse* $(Lemmefond)_{\leq N}$. *Pour tout* $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}^{st}_{2,disc}(N)$, *la distribution* $trace_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ *est le transfert de* $trace\,\sigma(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$.

Indiquons brièvement la structure de la preuve. Tout d'abord, les théorèmes de [W1] VI (qui reprennent des résultats d'Arthur) permettent de se limiter aux éléments réguliers elliptiques de $\tilde{G}$ ou H. Par exemple, pour le premier théorème, on doit prouver que, sous les hypothèses de ce théorème, le caractère $trace_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$, vu comme fonction sur les éléments réguliers de $\tilde{G}$, est constant sur les classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ell}$. Soit $g \in \tilde{G}_{ell}$. La théorie de Schneider-Stuhler, développée en [W1] II, permet de calculer $trace_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)(g)$ comme intégrale orbitale d'un pseudo-coefficient de $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$. On doit calculer ce pseudo-coefficient. Introduisons les notations nécessaires. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, posons $\underline{G}_n = GL_n(\mathbb{F}_q)$, où $\mathbb{F}_q$ est le corps résiduel de F. Comme sur le corps de base F, on introduit un groupe non connexe $\underline{G}_n^+$ de composante neutre $\underline{G}_n$ et on note $\underline{\tilde{G}}_n$ sa composante non neutre. On note $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_n)$ l'espace des fonctions sur $\underline{\tilde{G}}_n$, à valeurs complexes, invariantes par conjugaison par $\underline{G}_n$ et unipotentes (cette notion est bien définie pour les groupes réductifs finis). On note $\mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{G}}_n)$ son sous-espace des fonctions cuspidales. Pour tout couple d'entiers $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 + N_2 = N$, soit K_{N_1,N_2} un sous-groupe parahorique de G tel qu'en notant $K^u_{N_1,N_2}$ son radical pro-p-unipotent, on ait $K_{N_1,N_2}/K^u_{N_1,N_2} \simeq \underline{G}_{N_1} \times \underline{G}_{N_2}$. Ce groupe K_{N_1,N_2} se "prolonge" naturellement en un sous-groupe $K^+_{N_1,N_2}$ de G^+. On pose $\tilde{K}_{N_1,N_2} = K_{N_1,N_2} \cap \tilde{G}$. On a alors $\tilde{K}_{N_1,N_2}/K^u_{N_1,N_2} \simeq \underline{\tilde{G}}_{N_1} \times \underline{\tilde{G}}_{N_2}$. Posons :

$$\mathcal{C} = \oplus_{N_1+N_2=N}(\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})),$$

$$\mathcal{C}_{cusp} = \oplus_{N_1+N_2=N}(\mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})).$$

L'espace $\mathcal{C}$ est muni d'un produit hermitien défini positif, on note $proj_{cusp}$ la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_{cusp}$. On définit une application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & C_c^\infty(\tilde{G}) \\ f & \mapsto & f_{\tilde{G}} \end{array}$$

Essentiellement, si f appartient à un facteur $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})$, on relève f en une fonction sur $\tilde{K}_{N_1,N_2}$, on la prolonge à $\tilde{G}$ par 0 hors de $\tilde{K}_{N_1,N_2}$ et on la multiplie par une mesure convenable.

Dans un premier temps, on montre que le pseudo-coefficient de $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ est de la forme $(\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp})_{\tilde{G}}$, où $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}$ est un certain élément de $\mathcal{C}$ et $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp} = proj_{cusp}(\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-})$. La composante de $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}$ dans un facteur $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})$ de $\mathcal{C}$ s'obtient en calculant la représentation de $K^+_{N_1,N_2}$ déduite de $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ dans le sous-espace des vecteurs invariants par $K^u_{N_1,N_2}$. Cette première expression du pseudo-coefficient n'est guère maniable pour deux raisons. D'une part, elle ne permet pas une comparaison avec ce qui se passe sur un groupe endoscopique. D'autre part et surtout, le calcul de des représentations de $K^+_{N_1,N_2}$ est difficile : il s'avère qu'il ne peut s'expliciter qu'à l'aide de polynômes de Kazhdan-Lusztig. Toutefois, on dispose de deux renseignements sur les éléments $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}$:

(a) pour deux couples $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$, $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-)$ de $\mathcal{P}_2(N)$, on peut calculer le produit scalaire $(\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp}, \tilde{f}^{\boldsymbol{\mu}^+,\boldsymbol{\mu}^-}_{cusp})$ dans $\mathcal{C}$;

(b) on peut introduire une filtration sur $\mathcal{C}$, montrer que $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}$ appartient à un certain terme de cette filtration et calculer son image dans le terme associé du gradué ; ce calcul est effectué au paragraphe VIII.

Pour calculer exactement $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp}$, on doit utiliser la correspondance de Springer généralisée. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons W_n le groupe de Weyl d'un système de racines de type B_n ou C_n. Notons $\mathcal{C}(W_n)$ l'espace des fonctions sur W_n, à valeurs complexes et invariantes par conjugaison. On introduit un espace $\mathcal{K}$, somme de sous-espaces du type $\mathcal{C}(W_{n_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n_2})$ pour certains entiers n_1, n_2. La description des représentations unipotentes des groupes finis $\underline{G}_n^+$ permet de définir un isomorphisme $k : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$. D'autre part, la correspondance de Springer généralisée permet d'associer à $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$ un élément $\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ de $\mathcal{K}$. Enfin, on définit de façon purement combinatoire des endomorphismes τ et ι de $\mathcal{K}$. Le premier est insignifiant. Le second, ι, mérite de s'appeler induction endoscopique. Il est l'outil combinatoire qui intervient dans toutes les questions liées à l'endoscopie pour les groupes classiques (il intervient déjà dans [W4] et [MW]). On montre alors que, pour $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{st}(N)$, on a l'égalité :

$$\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-} = proj_{cusp} \circ k \circ \tau \circ \iota(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)).$$

Pour le prouver, on montre que le membre de droite ci-dessus vérifie des propriétés analogues à (a) et (b) et que les images des deux membres dans le gradué de $\mathcal{C}$ sont égales. Alors la "matrice de changement de base" entre les deux systèmes :

$$(proj_{cusp} \circ k \circ \tau \circ \iota(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)))_{(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{st}(N)}$$

et :

$$(\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-})_{(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{st}(N)}$$

doit être à la fois unipotente et unitaire. C'est donc l'identité. Tout ceci est développé au paragraphe IX.

Maintenant que l'on a calculé les fonctions $\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-}$, on peut calculer l'intégrale orbitale $J^G(g, (\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-})_{\tilde{G}})$ de la façon suivante. Parce que g est régulier elliptique, on peut décomposer g en $g = su$, où $s \in \tilde{G}$ est compact et topologiquement semi-simple (s est semi-simple et ses "valeurs propres" sont des racines de l'unité d'ordre premier à p), $u \in G$ est tologiquement unipotent et s et u commutent. Bien sûr, s n'est pas régulier, en général. Notons $Z_G(s)^0$ la composante neutre du commutant de s dans G. On montre que $J^G(g, (\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-})_{\tilde{G}})$ se calcule comme l'intégrale orbitale sur la classe de conjugaison de u dans $Z_G(s)^0$ d'une certaine fonction explicite sur ce groupe (une fonction de Green). Parce que u est topologiquement unipotent, on peut utiliser une application de Cayley (ou l'exponentielle si l'on est moins regardant sur les conditions imposées à p) pour descendre cette intégrale orbitale en une intégrale orbitale sur l'algèbre de Lie de $Z_G(s)^0$. Celle-ci s'avère être une valeur de la transformée de Fourier d'une distribution qui est évidemment stable. Parce que la transformation de Fourier préserve la stabilité, on peut en déduire la constance cherchée de $J^G(g, (\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-})_{\tilde{G}})$ sur les classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ell}$. On obtient ainsi le premier théorème. Cela est développé au paragraphe XI.

Pour le second théorème, on se ramène de même à comparer des intégrales orbitales sur les algèbres de Lie de commutants $Z_G(s)^0$ et $Z_H(s')^0$, où s et s' sont des éléments compacts et topologiquement semi-simples de $\tilde{G}$, resp. H, dont les classes de conjugaison stable se correspondent. Ces groupes $Z_G(s)^0$ et $Z_H(s')^0$ se décomposent en produits de groupes soit symplectiques, soit spéciaux orthogonaux, soit unitaires. Les facteurs de ces produits se correspondent deux à deux et deux termes qui se correspondent sont, à une exception près, des formes intérieures l'un de l'autre. On sait effectuer le transfert entre deux groupes qui sont formes intérieures l'un de l'autre et cela permet de comparer nos intégrales orbitales sur les facteurs en question. Il reste un couple de facteurs exceptionnels : le facteur dans $Z_G(s)^0$ est un groupe symplectique et celui dans $Z_H(s')^0$ est un groupe spécial orthogonal impair de même rang. Pour comparer les intégrales orbitales sur ces deux groupes, on utilise le lemme fondamental non standard énoncé en [W1] III et dont les conséquences sont développées au paragraphe X. Le second théorème s'ensuit, ainsi qu'on le montre au paragraphe XII.

Comme on l'a dit, le présent article est la suite de [W1]. La numérotation des paragraphes prend la suite de celle de cette première partie. Elle commence ainsi par le paragraphe VII. Un renvoi à un paragraphe antérieur signifie implicitement un renvoi à [W1].

VII. Représentations de réduction unipotente du groupe GL_N tordu

VII.1. Préliminaires sur les groupes finis

Considérons des groupes $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}^+$ comme en I.1, à ceci près qu'ils ne sont pas définis sur F mais sur $\mathbb{F}_q$. On utilise les notations de I.1. Notons $\mathcal{C}(\tilde{G})$ l'espace des fonctions sur $\tilde{G}$, à valeurs complexes, invariantes par conjugaison par G. On munit $\mathcal{C}(\tilde{G})$ du produit hermitien :

$$(f,f') = |G|^{-1}\sum_{g\in\tilde{G}}\bar{f}(g)f'(g).$$

Soient $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{M}}}$, notons $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$. On définit les homomorphismes :

$$Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} : \mathcal{C}(\tilde{M}) \to \mathcal{C}(\tilde{G}),\ Res_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} : \mathcal{C}(\tilde{G}) \to \mathcal{C}(\tilde{M})$$

par les formules usuelles :

$$(Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))(g) = |P|^{-1}\sum_{x\in G, m\in\tilde{M}, u\in U; x^{-1}gx=mu} f(m),$$

$$(Res_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))(m) = |U|^{-1}\sum_{u\in U} f(mu).$$

Ils sont adjoints l'un de l'autre. On montre qu'ils ne dépendent pas du choix de $\mathbf{P}$, ce qui justifie les notations $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et $Res_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On dit qu'un élément f de $\mathcal{C}(\tilde{G})$ est cuspidal si et seulement si $Res_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f) = 0$ pour tout $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, $\tilde{\mathbf{M}} \neq \tilde{\mathbf{G}}$. On note $\mathcal{C}_{cusp}(\tilde{G})$ le sous-espace des éléments cuspidaux de $\mathcal{C}(\tilde{G})$ et $proj_{cusp}$ la projection orthogonale de $\mathcal{C}(\tilde{G})$ sur $\mathcal{C}_{cusp}(\tilde{G})$. Remarquons que, pour $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, $\mathcal{C}_{cusp}(\tilde{M})$ est invariant par l'action de $Norm_G(\tilde{M})$. Notons $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison par G dans $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$.

Lemme. *Pour tout $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})$, on a l'égalité $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathcal{C}_{cusp}(\tilde{M})) = Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathcal{C}_{cusp}(\tilde{M})^{Norm_G(\tilde{M})})$. L'espace $\mathcal{C}(\tilde{G})$ se décompose en la somme directe orthogonale des sous-espaces $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathcal{C}_{cusp}(\tilde{M})^{Norm_G(\tilde{M})})$, pour $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{G}})/conj$.*

La preuve est analogue à celle du cas où le groupe est connexe, cf. par exemple [Au], théorème de décomposition. □

On sait définir la notion de représentation irréductible unipotente du groupe G. Disons qu'une représentation irréductible de G^+ est unipotente si et seulement si toutes les composantes irréductibles de sa restriction à H le sont. Il revient au même de demander qu'au moins une telle composante le soit. On note $\mathcal{C}_{unip}(\tilde{G})$ le sous-espace de $\mathcal{C}(\tilde{G})$ engendré par les restrictions à $\tilde{G}$ des caractères de représentations irréductibles unipotentes de G^+. La projection $proj_{cusp}$ conserve ce sous-espace. On pose $\mathcal{C}_{unip,cusp}(\tilde{G}) = \mathcal{C}_{unip}(\tilde{G}) \cap \mathcal{C}_{cusp}(\tilde{G})$. Un lemme similaire au précédent est valable pour l'espace $\mathcal{C}_{unip}(\tilde{G})$.

On aura à considérer des situations où l'image naturelle de $\tilde{\mathbf{G}}$ dans $\mathbf{G}^+/\mathbf{G}$ n'engendre pas ce groupe fini. Dans ce cas, on définit les espaces $\mathcal{C}(\tilde{G})$, $\mathcal{C}_{cusp}(\tilde{G})$ etc... en remplaçant le groupe $\mathbf{G}^+$ par son sous-groupe engendré par $\tilde{\mathbf{G}}$.

Dans les définitions du paragraphe I.2, on peut remplacer le corps de base F par le corps fini $\mathbb{F}_q$. Pour tout entier N, on définit ainsi des groupes ou variétés sur ce corps que l'on note $\underline{\mathbf{G}}_N$, $\underline{\mathbf{G}}_N^+$, $\underline{\tilde{\mathbf{G}}}_N$, $\underline{V}_N$. Soient N, n, N' des entiers ≥ 0 tels que $N = N' + 2n$. Considérons le sous-groupe parabolique $\underline{\mathbf{P}}$ de $\underline{\mathbf{G}}_N$, triangulaire supérieur par blocs, de blocs de tailles n, N', n. Notons $\underline{\mathbf{M}}$ sa composante de Lévi diagonale par blocs. On peut identifier $\underline{\mathbf{M}}$ à $\underline{\mathbf{G}}_n \times \underline{\mathbf{G}}_{N'} \times \underline{\mathbf{G}}_n$. Notons $\underline{\tilde{\mathbf{M}}}$ l'ensemble des $g \in \underline{\tilde{\mathbf{G}}}_N$ tels que $g\underline{\mathbf{M}}g^{-1} = \underline{\mathbf{M}}$ et $g\underline{\mathbf{P}}g^{-1} = \underline{\mathbf{P}}$. C'est un Lévi de $\underline{\tilde{\mathbf{G}}}_N$ et on a l'égalité $\underline{\tilde{\mathbf{M}}} = \theta_N\underline{\mathbf{M}}$. Soient $\varphi \in \mathcal{C}(\underline{G}_n)$ et $f' \in \mathcal{C}(\underline{\tilde{G}}_{N'})$. On définit une fonction f sur $\underline{\tilde{M}}$ de la façon suivante. Soit $m \in \underline{\tilde{M}}$ que l'on écrit $m = (a, g', b)$, avec $a, b \in \underline{G}_n$ et $g' \in \underline{G}_{N'}$.

On pose $f(\theta_N m) = \varphi(\boldsymbol{\theta}_n(a)b)f'(\theta_{N'}g')$. On vérifie que f est invariante par conjugaison par $\underline{M}$. On a ainsi défini une application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\underline{G}_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(\underline{\tilde{G}}_{N'}) & \to & \mathcal{C}(\underline{\tilde{M}}) \\ (\varphi, f') & \mapsto & f \end{array}$$

C'est un isomorphisme. En particulier, on peut considérer que l'homomorphisme $Res^{\underline{\tilde{G}}_N}_{\underline{\tilde{M}}}$ prend ses valeurs dans $\mathcal{C}(\underline{G}_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(\underline{\tilde{G}}_{N'})$. Des constructions analogues valent en remplaçant chaque espace par son sous-espace des fonctions cuspidales ou unipotentes.

VII.2. Sous-groupes parahoriques

Soit F un corps local non archimédien comme en I.1, de caractéristique résiduelle p. On fixe pour tout l'article un entier $N \geq 1$. On suppose :

$$p > N$$

. On introduit le groupe $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_N$ sur F et les différents objets qu'on lui a associés en I.2 : $\mathbf{G}^+$, $\tilde{\mathbf{G}}$, $V = V_N$ etc... Bien sûr, si on définit un objet, disons X, relatif à $\mathbf{G}$ et s'il nous est utile d'utiliser un objet analogue relatif à un groupe $\mathbf{GL}_{N'}$ pour $N' \neq N$, on notera cet objet $X_{N'}$ sans plus de commentaire. On fixe une mesure de Haar sur le groupe G.

Pour $j \in \{0, ..., N\}$, notons L_j le $\mathfrak{o}$-réseau de V engendré par les éléments $e_1, ..., e_{N-j}$, $\varpi e_{N-j+1}, ..., \varpi e_N$. Pour $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 + N_2 = N$, notons K_{N_1,N_2} le sous-groupe parahorique des éléments de G qui conservent les réseaux L_0 et L_{N_2}. On note $K^u_{N_1,N_2}$ le radical pro-p-unipotent de K_{N_1,N_2}. Le quotient $K_{N_1,N_2}/K^u_{N_1,N_2}$ s'identifie à $\underline{G}_{N_1} \times \underline{G}_{N_2}$. En effet, $L_{N_2}/\varpi L_0$ s'identifie naturellement à $\underline{V}_{N_1}$ et L_0/L_{N_2} s'identifie naturellement à $\underline{V}_{N_2}$. Un élément de K_{N_1,N_2} définit un automorphisme de chacun de ces quotients. Cela définit une application de K_{N_1,N_2} dans $\underline{G}_{N_1} \times \underline{G}_{N_2}$, qui se quotiente en l'isomorphisme annoncé.

Pour tout $\mathfrak{o}$-réseau L de V, notons $L^* = \{v^* \in V^*; \forall v \in L, < v^*, v > \in \mathfrak{o}\}$. On note $\tilde{K}_{N_1,N_2}$ l'ensemble des $\tilde{\sigma}$ pour $\sigma \in Isom(V, V^*)$ tel que $\sigma(L_{N_2}) = L_0^*$ et $\sigma(L_0) = L^*_{N_2}$. On pose $K^+_{N_1,N_2} = K_{N_1,N_2} \cup \tilde{K}_{N_1,N_2}$. C'est un sous-groupe de G^+ et $K^u_{N_1,N_2}$ en est un sous-groupe distingué. L'ensemble $\tilde{K}_{N_1,N_2}/K^u_{N_1,N_2}$ s'identifie à $\underline{\tilde{G}}_{N_1} \times \underline{\tilde{G}}_{N_2}$. En effet, un élément σ tel que $\tilde{\sigma} \in \tilde{K}_{N_1,N_2}$ définit naturellement deux éléments $\sigma_1 \in Isom(L_{N_2}/\varpi L_0, L_0^*/\varpi L^*_{N_2})$ et $\sigma_2 \in Isom(L_0/L_{N_2}, L^*_{N_2}/L_0^*)$. On a identifié $L_{N_2}/\varpi L_0$ à $\underline{V}_{N_1}$, ce qui identifie $L_0^*/\varpi L^*_{N_2}$ à $\underline{V}^*_{N_1}$. Alors $\sigma_1 \in Isom(\underline{V}_{N_1}, \underline{V}^*_{N_1})$ définit un élément $\tilde{\sigma}_1 \in \underline{\tilde{G}}_{N_1}$. On a identifié L_0/L_{N_2} à $\underline{V}_{N_2}$, ce qui identifie $\varpi L^*_{N_2}/\varpi L_0^*$ à $\underline{V}^*_{N_2}$. Via la multiplication par ϖ, cela identifie $L^*_{N_2}/L_0^*$ à $\underline{V}^*_{N_2}$. Alors $\sigma_2 \in Isom(\underline{V}_{N_2}, \underline{V}^*_{N_2})$ définit un élément $\tilde{\sigma}_2 \in \underline{\tilde{G}}_{N_2}$. Cela définit une application de $\tilde{K}_{N_1,N_2}$ dans $\underline{\tilde{G}}_{N_1} \times \underline{\tilde{G}}_{N_2}$ qui se quotiente en la bijection annoncée. Le quotient $K^+_{N_1,N_2}/K^u_{N_1,N_2}$ s'identifie ainsi au sous-groupe des couples $(g_1, g_2) \in \underline{G}^+_{N_1} \times \underline{G}^+_{N_2}$ tels que g_1 et g_2 appartiennent à la "même" composante connexe, c'est-à-dire tous deux à la composante neutre ou tous deux à l'autre composante. On note $(\underline{G}_{N_1} \times \underline{G}_{N_2})^+$ ce sous-groupe.

Plus concrètement, introduisons l'élément :

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 \\ \varpi & & & \end{pmatrix}$$

de G. Alors $\tilde{K}_{N_1,N_2} = K_{N_1,N_2}\theta\zeta^{-N_2}$. Par l'application précédente, $\theta\zeta^{-N_2}$ s'envoie sur l'élément $(\theta_{N_1}, \theta_{N_2})$ de $\underline{\tilde{G}}_{N_1} \times \underline{\tilde{G}}_{N_2}$.

On pose :

$$\mathcal{C} = \oplus_{N_1+N_2=N}(\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})),$$

$$\mathcal{C}_{cusp} = \oplus_{N_1+N_2=N}(\mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})).$$

Chaque composante de ces espaces est muni d'un produit hermitien. On munit ces espaces des produits hermitiens somme directe des produits sur chaque sous-espace. On note $proj_{cusp}$ la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_{cusp}$.

On définit une application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & C_c^\infty(\tilde{G}) \\ f & \mapsto & f_{\tilde{G}} \end{array}$$

de la façon suivante. Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1+N_2 = N$ et $f \in \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})$. On identifie f à une fonction sur $\tilde{K}_{N_1,N_2}$ invariante par multiplication par $K^u_{N_1,N_2}$. On la prolonge à $\tilde{G}$ par 0 hors de $\tilde{K}_{N_1,N_2}$. On la multiplie par $mes(K_{N_1,N_2})^{-1}$. On obtient ainsi la fonction $f_{\tilde{G}}$.

VII.3. Les représentations

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions, c'est-à-dire des suites finies et décroissantes d'entiers ≥ 0, deux suites étant identifiées si elles ne diffèrent que par des 0. On écrit une telle partition $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ...)$. On pose $S(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j$ et on définit la fonction $mult_{\boldsymbol{\lambda}}$ sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i) = |\{j \geq 1; \lambda_j = i\}|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions $\boldsymbol{\lambda}$ telles que $S(\boldsymbol{\lambda}) = n$ et $\mathcal{P}_2(n)$ l'ensemble des couples de partitions $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ tels que $S(\boldsymbol{\lambda}) + S(\boldsymbol{\mu}) = n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $St(n)$ la représentation de Steinberg de G_n. Si π est une représentation de G_n et χ un caractère de $F^\times$, on pose $\chi\pi = (\chi \circ det) \otimes \pi$. Si $n = n_1 + ... + n_a$ et, pour tout $i = 1, ..., a$, π_i est une représentation de G_{n_i}, on note $\pi_1 \times ... \times \pi_a$ la représentation de G_n induite de la représentation $\pi_1 \otimes ... \otimes \pi_a$ de $G_{n_1} \times ... \times G_{n_a}$, relativement au sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}_n$, triangulaire supérieur par blocs, de blocs de tailles successives $n_1, ..., n_a$.

On note ξ l'unique caractère non ramifié et d'ordre 2 de $F^\times$.

Pour $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$, on définit la représentation de G :

$$\pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) = St(\lambda_1^+) \times St(\lambda_2^+) \times ... \times \xi St(\lambda_1^-) \times St(\lambda_2^-) \times ...$$

Elle est irréductible. On note $E(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ son espace. Cette représentation est invariante par $\boldsymbol{\theta}$, c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme A de $E(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ tel que :

$$\pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)(\boldsymbol{\theta}(g)) \circ A = A \circ \pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)(g)$$

pour tout $g \in G$. En normalisant A de sorte que $A^2 = 1$, on prolonge $\pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ en une représentation $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ de G^+ en posant $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)(\theta) = A$. Il y a deux normalisations possibles qui diffèrent par un signe. On va en choisir une. Posons $K = K_{N,0}$ et notons I le sous-groupe d'Iwahori des éléments de G qui conservent chacun des réseaux $L_0, L_1, ..., L_{N-1}$. Notons $\underline{\mathcal{H}}$ l'algèbre des fonctions sur K biinvariantes par I (l'unité est la fonction caractéristique de I multipliée par $mes(I)^{-1}$). Cette algèbre admet un caractère dit de Steinberg. Elle agit sur l'espace d'invariants $E(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)^I$ et ce caractère de Steinberg intervient avec multiplicité 1 dans cette représentation. Cela détermine une droite $D \subset E(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)^I$. Or l'automorphisme $\boldsymbol{\theta}$ conserve K, I, $\underline{\mathcal{H}}$ et le caractère de Steinberg de cette algèbre. L'opérateur A conserve donc D. On normalise A de sorte qu'il agisse par l'identité sur D. On note désormais $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ la représentation de G^+ ainsi normalisée.

VII.4. Pseudo-coefficients

Soit $(\pi^+, E) \in Rep_f(G^+/Z_2)$, cf. II.1. Supposons que E soit engendré comme G^+-module par l'espace d'invariants E^I. Pour $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 + N_2 = N$, on définit une fonction $\tilde{f}^{\pi^+}_{N_1,N_2}$ sur $\tilde{K}_{N_1,N_2}$ par :

$$\tilde{f}^{\pi^+}_{N_1,N_2}(g) = trace(\pi^+(g)|E^{K^u_{N_1,N_2}})$$

pour tout $g \in \tilde{K}_{N_1,N_2}$. Cette fonction est invariante par multiplication par $K^u_{N_1,N_2}$ et s'identifie donc à un élément de $\mathcal{C}(\underline{G}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(\underline{G}_{N_2})$, que nous noterons encore $\tilde{f}^{\pi^+}_{N_1,N_2}$. Il est bien connu qu'en fait, cet élément appartient à $\mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_{N_2})$. On définit l'élément de $\mathcal{C}$:

$$\tilde{f}^{\pi^+} = \oplus_{N_1,N_2;N_1+N_2=N} \tilde{f}^{\pi^+}_{N_1,N_2}.$$

On pose $\tilde{f}^{\pi^+}_{cusp} = proj_{cusp}(\tilde{f}^{\pi^+})$.

Cette construction s'applique en particulier aux représentations $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)$, pour $(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$. On note simplement $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}$, $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp}$ etc... les termes $\tilde{f}^{\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)}$, $\tilde{f}^{\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)}_{cusp}$ etc... Notons $\mathcal{P}_{2,disc}(N)$ l'ensemble des couples $(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$ tels que, pour $\epsilon = \pm$ et tout entier $j \geq 1$, on ait $mult_{\boldsymbol{\lambda}^\epsilon}(j) \leq 1$.

Proposition. *Soit* $(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$.

(i) Pour tout $(\boldsymbol{\mu}^+,\boldsymbol{\mu}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$, *avec* $(\boldsymbol{\mu}^+,\boldsymbol{\mu}^-) \neq (\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)$, *on a l'égalité* $(\tilde{f}^{\boldsymbol{\mu}^+,\boldsymbol{\mu}^-}_{cusp}, \tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp}) = 0$.

(ii) Le terme $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp}$ *est non nul si et seulement si* $(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)$ *appartient à* $\mathcal{P}_{2,disc}(N)$.

(iii) Pour tout $g \in \tilde{G}_{ell}$, *on a l'égalité* $trace_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-))(g) = \Delta(g)^{-1/2} J^G(g, (\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp})_{\tilde{G}})$.

La preuve est donnée dans les trois paragraphes suivants.

VII.5. Réduction à des fonctions cuspidales

Commençons par expliciter quelques définitions des paragraphes II.1 et II.2, dont nous reprenons les notations. En particulier, on note Imm l'immeuble de $\mathbf{PGL}_N$ sur F. On a défini en VII.2 les réseaux L_j pour $j \in \{0,...,N\}$. Prolongeons la définition à $j \in \mathbb{Z}$ de sorte que $L_{j+N} = \varpi L_j$ pour tout j. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-ensembles non vides de $\mathbb{Z}$ invariants par translations par $N\mathbb{Z}$. Le groupe $\mathbb{Z}$ agit par translations sur $\mathcal{A}$. A tout élément $A \in \mathcal{A}$, on associe la facette $\phi(A)$ de l'immeuble Imm telle que les sommets appartenant à la clôture $\bar{\phi}(A)$ soient exactement ceux associés aux réseaux L_j pour $j \in A$. On peut prendre pour ensemble Φ/G l'ensemble des $\phi(A)$ pour $A \in \mathcal{A}/\mathbb{Z}$ (on identifie ce quotient à un ensemble de représentants dans $\mathcal{A}$; de telles identifications seront également effectuées dans la suite). Pour $n \in \mathbb{Z}$, l'élément $\theta\zeta^{-n}$ de $\tilde{G}$ envoie une facette $\phi(A)$ sur $\phi(-A+n)$. Notons $\tilde{\mathcal{A}}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{A}$ tels que $-A$ soit un translaté de A. On peut prendre pour ensemble $\tilde{\Phi}/G$ l'ensemble des $\phi(A)$ pour $A \in \tilde{\mathcal{A}}/\mathbb{Z}$. Fixons $A \in \tilde{\mathcal{A}}$. Notons $N(A)$ le plus petit entier ≥ 1 tel que $A + N(A) = A$. C'est un diviseur de N. Notons $C(A)$ l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $A = -A + n$. Pour $n \in C(A)$, posons $c(A,n) = \theta\zeta^{-n}K(\phi(A))$. C'est un élément de $C(\phi(A))$ et l'application :

$$\begin{array}{ccc} C(A) & \rightarrow & C(\phi(A)) \\ n & \mapsto & c(A,n) \end{array}$$

est bijective. De plus, $C(\phi(A))/Z_2$ s'identifie à $C(A)/2N\mathbb{Z}$. D'autre part, $C(A)$ est un espace homogène sous $N(A)\mathbb{Z}$, donc $|C(A)/2N\mathbb{Z}| = \frac{2N}{N(A)}$.

Soit $(\pi^+, E) \in Rep_f(G^+/Z_2)$, supposons E engendré comme G^+-module par E^I. En particulier π^+ appartient à $Rep^0_f(G^+/Z_2)$ et on peut lui associer un pseudo-coefficient $\tilde{f}^{\pi^+,0}$. Grâce aux descriptions ci-dessus, sa définition se récrit :

$$\tilde{f}^{\pi^+,0} = \sum_{A \in \tilde{\mathcal{A}}/\mathbb{Z}} (-1)^{d(\phi(A))} mes(K(\phi(A)))^{-1} \frac{N(A)}{N} \sum_{n \in C(A)/2N\mathbb{Z}} f^{\pi^+,0}_{c(A,n)}.$$

Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des couples (A,n) où $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ et $n \in C(A)$. Le groupe $\mathbb{Z}$ y agit par $(A,n)+m = (A+m, n+2m)$. On vérifie que $c(A+m,n+2m) = \zeta^m c(A,n)\zeta^{-m}$. Les fonctions $f^{\pi^+,0}_{c(A,n)}$ et $f^{\pi^+,0}_{c(A+m,n+2m)}$ sont conjuguées donc équivalentes pour notre problème. On en déduit d'abord, en considérant le cas $m \in N(A)\mathbb{Z}$, que la fonction $f^{\pi^+,0}_{c(A,n)}$ ne dépend essentiellement que de n modulo $2N(A)\mathbb{Z}$. On peut donc remplacer $\tilde{f}^{\pi^+,0}$ par la fonction :

$$\tilde{f}^{\pi^+}_1 = \sum_{A\in\tilde{\mathcal{A}}/\mathbb{Z}} (-1)^{d(\phi(A))} mes(K(\phi(A)))^{-1} \sum_{n\in C(A)/2N(A)\mathbb{Z}} f^{\pi^+,0}_{c(A,n)}.$$

Celle-ci se récrit :

$$\tilde{f}^{\pi^+}_1 = \sum_{(A,n)\in\mathcal{B}/\mathbb{Z}} (-1)^{d(\phi(A))} mes(K(\phi(A)))^{-1} f^{\pi^+,0}_{c(A,n)}.$$

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des familles $\mathbf{N} = (N_1, N_2, n_1, ..., n_r)$, tous ces termes étant des entiers ≥ 0, avec de plus $n_1, ..., n_r \geq 1$ et $N_1 + N_2 + 2n_1 + ... + 2n_r = N$. A une telle famille, associons l'ensemble $A(\mathbf{N})$ réunion des translatés par $N\mathbb{Z}$ de l'ensemble :

$$\{-n_1 - ... - n_r, ..., -n_1 - n_2, -n_1, 0, N_2, N_2 + n_1, ..., N_2 + n_1 + ... + n_r\}.$$

On a $N_2 \in C(A(\mathbf{N}))$. Associons à $\mathbf{N}$ l'élément $(A(\mathbf{N}), N_2)$ de $\mathcal{B}$. On vérifie que, quand $\mathbf{N}$ parcourt $\mathcal{N}$, ces éléments parcourent $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$. Pour simplifier, remplaçons dans quelques notations les termes $A(\mathbf{N})$ ou $c(A(\mathbf{N}), N_2)$ par $\mathbf{N}$. On obtient :

$$(1) \qquad \tilde{f}^{\pi^+}_1 = \sum_{\mathbf{N}\in\mathcal{N}} (-1)^{d(\mathbf{N})} mes(K_{\mathbf{N}})^{-1} f^{\pi^+,0}_{\mathbf{N}}.$$

Soit $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$. Posons $\tilde{K}_{\mathbf{N}} = c(A(\mathbf{N}), N_2) = \theta\zeta^{-N_2} K_{\mathbf{N}}$ et :

$$\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{G}}_{N_1} \times \underline{\mathbf{G}}_{N_2} \times (\underline{\mathbf{G}}_{n_1} \times \underline{\mathbf{G}}_{n_1}) \times ... \times (\underline{\mathbf{G}}_{n_r} \times \underline{\mathbf{G}}_{n_r}).$$

On a un isomorphisme $K_{\mathbf{N}}/K^u_{\mathbf{N}} = \underline{G}_{\mathbf{N}}$ et on peut définir un groupe non connexe $\underline{\mathbf{G}}^+_{\mathbf{N}}$, de composante neutre $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{N}}$, et une composante connexe $\underline{\tilde{\mathbf{G}}}_{\mathbf{N}}$ de $\underline{\mathbf{G}}^+_{\mathbf{N}}$ de sorte que $\tilde{K}_{\mathbf{N}}/K^u_{\mathbf{N}} = \underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}}$. On note $W(\mathbf{N})$ le groupe d'automorphismes de $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{N}}$ engendré par :

- pour $i, j \in \{1, ..., r\}$ tels que $i \neq j$ et $n_i = n_j$, la permutation des facteurs $(\underline{\mathbf{G}}_{n_i} \times \underline{\mathbf{G}}_{n_i})$ et $(\underline{\mathbf{G}}_{n_j} \times \underline{\mathbf{G}}_{n_j})$;
- pour tout $i = 1, ..., r$, la permutation des deux facteurs de $(\underline{\mathbf{G}}_{n_i} \times \underline{\mathbf{G}}_{n_i})$.

L'action de $W(\mathbf{N})$ s'étend en une action sur $\underline{\mathbf{G}}^+_{\mathbf{N}}$ qui fixe l'image de $\theta\zeta^{-N_2}$. La restriction à $\tilde{K}_{\mathbf{N}}$ de la fonction $f^{\pi^+,0}_{\mathbf{N}}$ se factorise en une fonction sur $\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}}$ que l'on note $\tilde{f}^{\pi^+}_{\mathbf{N}}$. Cette fonction appartient à $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}})$. Inversement, tout élément ψ de cet espace définit une fonction $\psi_{\tilde{G}}$ sur $\tilde{G}$: on la remonte en une fonction sur $\tilde{K}_{\mathbf{N}}$, on l'étend à $\tilde{G}$ par 0 hors de $\tilde{K}_{\mathbf{N}}$ puis on la multiplie par $mes(K_{\mathbf{N}})^{-1}$. La formule (1) se récrit donc :

$$(2) \qquad \tilde{f}^{\pi^+}_1 = \sum_{\mathbf{N}\in\mathcal{N}} (-1)^{d(\mathbf{N})} (\tilde{f}^{\pi^+}_{\mathbf{N}})_{\tilde{G}}.$$

Pour deux éléments $\mathbf{N} = (N_1, N_2, n_1, ..., n_r)$ et $\mathbf{N}' = (N'_1, N'_2, n'_1, ..., n'_{r'})$ de $\mathcal{N}$, disons que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}'$ sont associés si $N'_1 = N_1$, $N'_2 = N_2$, $r' = r$ et les suites $(n_1, ..., n_r)$ et $(n'_1, ..., n'_{r'})$ ne diffèrent que par permutation. Notons $\mathcal{N}/ass$ un ensemble de représentants de $\mathcal{N}$ modulo association. Montrons que, pour tout $\mathbf{N} \in \mathcal{N}/ass$, il existe un élément $\psi^{\pi^+}_{\mathbf{N}} \in \mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}})^{W(\mathbf{N})}$ de sorte que la fonction :

$$(3) \qquad \tilde{f}^{\pi^+}_2 = \sum_{\mathbf{N}\in\mathcal{N}/ass} (\psi^{\pi^+}_{\mathbf{N}})_{\tilde{G}}$$

jouisse des mêmes propriétés que $\tilde{f}^{\pi^+}_1$. On doit faire la remarque suivante. Soient $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$, $\underline{\tilde{\mathbf{M}}} \in \mathcal{L}(\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{N}})$ et $\underline{\mathbf{P}} \in \mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{M}}}}$. Notons $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{P}}$ le radical unipotent de $\underline{\mathbf{P}}$ et $\underline{\mathbf{P}}^+ = \underline{\mathbf{M}}^+\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{P}}$. Notons $\underline{\tilde{\mathbf{P}}} = \underline{\mathbf{P}}^+ \cap \underline{\tilde{\mathbf{G}}}_{\mathbf{N}}$ et $\tilde{K}_{\underline{P}}$ l'image réciproque de $\underline{\tilde{P}}$ dans $\tilde{K}_{\mathbf{N}}$. Alors il existe $\mathbf{N}' \in \mathcal{N}$ tel que $\tilde{K}_{\underline{P}}$

soit conjugué à $\tilde{K}_{\mathbf{N}'}$ par un élément de G. De plus, l'indice r relatif à $\mathbf{N}'$ est strictement plus grand que celui relatif à $\mathbf{N}$ si $\underline{\tilde{\mathbf{M}}} \neq \underline{\tilde{\mathbf{G}}}$. Cela étant, considérons une fonction $(-1)^{d(\mathbf{N})}(\tilde{f}_{\mathbf{N}}^{\pi^+})_{\tilde{G}}$ intervenant dans la formule (2). Utilisons le lemme VII.1 pour la remplacer par une somme de fonctions $(Ind_{\underline{\tilde{M}}}^{\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}}}(\psi_{\underline{M}}))_{\tilde{G}}$ où $\underline{\mathbf{P}}$ est comme ci-dessus, et $\psi_{\underline{M}}$ est un élément de $\mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{M}})$. Par la remarque, on vérifie que l'on peut remplacer une telle fonction par $(\psi'_{\mathbf{N}'})_{\tilde{G}}$ pour un $\mathbf{N}'$ convenable et un élément $\psi'_{\mathbf{N}'} \in \mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}'})$. Ayant ainsi transformé la formule (2), on peut ensuite regrouper les fonctions à supports associés et les rendre invariantes par nos groupes d'automorphismes. En effet, soient $\mathbf{N} = (N_1, N_2, n_1, ..., n_r)$ et $\mathbf{N}' = (N_1, N_2, n'_1, ..., n'_r)$ deux éléments associés de $\mathcal{N}$. Posons $\mathbf{N}_0 = (N - N_2, N_2)$. Alors $\tilde{K}_{\mathbf{N}}$ et $\tilde{K}_{\mathbf{N}'}$ sont égaux à des ensembles $\tilde{K}_{\underline{P}}$ et $\tilde{K}_{\underline{P}'}$ comme ci-dessus, pour des couples $(\underline{\tilde{\mathbf{M}}}, \underline{\mathbf{P}})$ et $(\underline{\tilde{\mathbf{M}}}', \underline{\mathbf{P}}')$, où $\underline{\tilde{\mathbf{M}}}$ et $\underline{\tilde{\mathbf{M}}}'$ sont des éléments conjugués de $\mathcal{L}(\underline{\tilde{\mathbf{G}}}_{\mathbf{N}_0})$. De plus, le groupe $W(\mathbf{N})$ s'identifie à $Norm_{\underline{G}_{\mathbf{N}_0}}(\underline{\tilde{M}})/\underline{M}$. En travaillant dans l'ensemble $\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}_0}$, on peut effectuer les transformations indiquées ci-dessus et on obtient une fonction de la forme (3).

Le calcul direct des fonctions $\psi_{\mathbf{N}}^{\pi^+}$ est délicat, sauf dans le cas des éléments maximaux de $\mathcal{N}$, c'est-à-dire les $\mathbf{N}$ tels que $\tilde{K}_{\mathbf{N}}$ n'apparaît pas comme sous-ensemble "parabolique" propre d'un autre $\tilde{K}_{\mathbf{N}'}$. Ce sont les $\mathbf{N}$ de la forme $\mathbf{N} = (N_1, N_2)$. Un tel $\mathbf{N}$ n'est associé qu'à lui-même et le groupe $W(\mathbf{N})$ est réduit à $\{1\}$. La construction ci-dessus conduit alors à l'égalité $\psi_{\mathbf{N}}^{\pi^+} = proj_{cusp}((-1)^{d(\mathbf{N})}\tilde{f}_{\mathbf{N}}^{\pi^+})$. Ce n'est autre que la fonction $proj_{cusp}(\tilde{f}_{N_1,N_2}^{\pi^+})$. En effet, il résulte des définitions que $\tilde{f}_{\mathbf{N}}^{\pi^+}$ est le produit de $\tilde{f}_{N_1,N_2}^{\pi^+}$ et de la fonction $\epsilon_{\phi(A(\mathbf{N}))}$ de II.1, ou plus exactement de la fonction sur $\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}}$ déduite de cette fonction. Si N_1 ou N_2 est nul, $d(\mathbf{N}) = 0$ et cette fonction $\epsilon_{\phi(A(\mathbf{N}))}$ est constante égale à 1 sur $\tilde{K}_{\mathbf{N}}$. Si N_1 et N_2 sont tous deux non nuls, $d(\mathbf{N}) = 1$ et la fonction $\epsilon_{\phi(A(\mathbf{N}))}$ est constante égale à -1 sur $\tilde{K}_{\mathbf{N}}$.

VII.6. Identification du pseudo-coefficient

Soit $\mathbf{N} = (N_1, N_2, n_1, ..., n_r) \in \mathcal{N}$. Pour $i = 1, ..., 2r+1$, notons $V(i)$ le sous-espace de V engendré par les éléments de base e_j pour :

$$j \in \begin{cases} \{m_{i-1}+1, ..., m_i\}, & si\ i \neq r, \\ \{m_r+1, ...m_r+N_1\} \cup \{N-N_2+1, ..., N\}, & si\ i = r+1, \end{cases}$$

où on a posé :

$$m_i = \begin{cases} n_1 + ... + n_i, & si\ i \leq r, \\ N - N_2 - n_1 - ... - n_{2r+1-i}, & si\ i \geq r+1. \end{cases}$$

Posons $W(i) = V(1) \oplus ... \oplus V(i)$. Notons $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique des éléments de $\mathbf{G}$ qui conservent chaque espace $W(i)$ et $\mathbf{M}$ sa composante de Lévi formée des éléments qui conservent chaque $V(i)$. Comme en I.1, on note $\tilde{\mathbf{M}}$ l'ensemble des $g \in \tilde{\mathbf{G}}$ tels que $g\mathbf{M}g^{-1} = \mathbf{M}$ et $g\mathbf{P}g^{-1} = \mathbf{P}$. Remarquons que $\tilde{M}$ est non vide, précisément $\theta\zeta^{-N_2} \in \tilde{M}$. Posons $K_{\mathbf{N}}^M = K_{\mathbf{N}} \cap M$, $K_{\mathbf{N}}^{M,u} = K_{\mathbf{N}}^u \cap M$, $\tilde{K}_{\mathbf{N}}^M = \tilde{K}_{\mathbf{N}} \cap \tilde{M}$. Les applications naturelles :

$$K_{\mathbf{N}}^M / K_{\mathbf{N}}^{M,u} \to K_{\mathbf{N}}/K_{\mathbf{N}}^u = \underline{G}_{\mathbf{N}},\ \tilde{K}_{\mathbf{N}}^M / K_{\mathbf{N}}^{M,u} \to \tilde{K}_{\mathbf{N}}/K_{\mathbf{N}}^u = \underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}}$$

sont bijectives. Via la seconde, on associe à un élément $\psi \in \mathcal{C}(\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}})$ une fonction $\psi_{\tilde{M}}$ sur $\tilde{M}$ (en copiant la définition de $\psi_{\tilde{G}}$). Notons $\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{M}}}$ le plus grand tore central dans $\mathbf{M}^+$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_{cusp}(\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}})$. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{M})$, posons :

$$D_\psi^{\tilde{M}}(f) = \int_{A_{\tilde{M}}\backslash M} \int_{\tilde{M}} \bar{\psi}_{\tilde{M}} f(x^{-1}mx) dm dx.$$

En utilisant la cuspidalité de ψ, on montre que les intégrales sont convergentes dans l'ordre indiqué. Cela définit une distribution sur $\tilde{M}$ invariante par conjugaison par M. On définit la distribution $D_\psi^{\tilde{G}} = Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_\psi^{\tilde{M}})$ sur $\tilde{G}$. On a alors la proposition suivante :

Proposition. *(i) Soient* $\mathbf{N}, \mathbf{N}' \in \mathcal{N}$ *deux éléments qui ne sont pas associés. Alors* $D_{\psi}^{\tilde{G}}(\psi'_{\tilde{G}}) = 0$ *pour tous* $\psi \in \mathcal{C}_{cusp}(\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}})$, $\psi' \in \mathcal{C}_{cusp}(\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}'})$.

(ii) Soit $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$. *Il existe un réel* $c_{\mathbf{N}} > 0$ *tel que* $D_{\psi}^{\tilde{G}}(\psi'_{\tilde{G}}) = c_{\mathbf{N}}(\psi, \psi')$ *pour tous* $\psi, \psi' \in \mathcal{C}_{cusp}(\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}})^{W(\mathbf{N})}$.

La preuve est la même que dans le cas connexe, cf. [Co] lemme 3.12 $\square$

Rappelons que la fonction $\tilde{f}_2^{\pi^+}$ du paragraphe précédent a par construction les mêmes propriétés que la fonction de départ $\tilde{f}^{\pi^+,0}$. Soit alors $\mathbf{N}$ un élément de $\mathcal{N}$ qui n'est pas maximal au sens du paragraphe précédent. Le Lévi $\tilde{\mathbf{M}}$ qu'on lui associe ci-dessus est propre. D'après le corollaire II.2(ii), on a donc $D_{\psi}^{\tilde{G}}(\tilde{f}_2^{\pi^+}) = 0$ pour tout $\psi \in \mathcal{C}_{cusp}(\underline{\tilde{G}}_{\mathbf{N}})$. Appliquons cela pour $\psi = \psi_{\mathbf{N}}^{\pi^+}$. D'après l'égalité (3) du paragraphe précédent et la proposition ci-dessus, on a $D^{\tilde{G}}_{\psi_{\mathbf{N}}^{\pi^+}}(\tilde{f}_2^{\pi^+}) = c_{\mathbf{N}}(\psi_{\mathbf{N}}^{\pi^+}, \psi_{\mathbf{N}}^{\pi^+})$, donc $\psi_{\mathbf{N}}^{\pi^+} = 0$. En joignant ce résultat aux dernières remarques du paragraphe précédent, on obtient l'égalité :

$$\tilde{f}_2^{\pi^+} = (\tilde{f}_{cusp}^{\pi^+})_{\tilde{G}}.$$

VII.7. Preuve de la proposition VII.4

Soient (π^+, E) et (π_0^+, E_0) deux éléments de $Rep_f(G^+/Z_2)$ tels que E et E_0 sont tous deux engendrés comme G^+-modules par leurs sous-espaces d'invariants E^I et E_0^I. Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 + N_2 = N$ et soit $\psi \in \mathcal{C}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes \mathcal{C}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})$. L'opérateur $\pi_0^+(\bar{\psi}_{\tilde{G}})$ prend ses valeurs dans le sous-espace E_0^I et un calcul immédiat conduit à l'égalité :

$$trace(\pi_0^+(\bar{\psi}_{\tilde{G}})) = (\psi, \tilde{f}_{N_1,N_2}^{\pi_0^+}).$$

Si ψ est cuspidale, on peut remplacer ce produit scalaire par $(\psi, proj_{cusp}(\tilde{f}_{N_1,N_2}^{\pi_0^+}))$. En appliquant cela à $\psi = proj_{cusp}(\tilde{f}_{N_1,N_2}^{\pi^+})$, puis en sommant sur N_1, N_2, on obtient :

$$trace(\pi_0^+((\bar{\tilde{f}}_{cusp}^{\pi^+})_{\tilde{G}})) = (\tilde{f}_{cusp}^{\pi^+}, \tilde{f}_{cusp}^{\pi_0^+}).$$

D'après les deux paragraphes précédents, on peut remplacer à gauche la fonction $(\bar{\tilde{f}}_{cusp}^{\pi^+})_{\tilde{G}}$ par la fonction de départ $\bar{\tilde{f}}^{\pi^+,0}$. On obtient :

$$(1) \qquad trace(\pi_0^+(\bar{\tilde{f}}^{\pi^+,0})) = (\tilde{f}_{cusp}^{\pi^+}, \tilde{f}_{cusp}^{\pi_0^+}).$$

Appliquons ceci à $\pi^+ = \pi^+(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-)$, $\pi_0^+ = \pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$, pour deux couples distincts $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-), (\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$. Notons π et π_0 les restrictions de π^+ et π_0^+ à G. On sait définir le support cuspidal d'une représentation irréductible de G. Ici, les supports cuspidaux de π et de π_0 sont des classes de conjugaison modulo le groupe de Weyl de caractères non ramifiés du tore diagonal de G. Parce que les couples sont distincts, on voit que les supports cuspidaux de π et π_0 sont distincts. De plus, il sont tous deux fixes par $\boldsymbol{\theta}$. Il en résulte que le centre de Bernstein $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ (cf.I.1) n'agit pas par le même caractère dans π^+ et dans π_0^+. D'après [BW] théorème I.4.1, les caractéristiques d'Euler-Poincaré $EP(\pi^+, \pi_0^+)$ et $EP(\pi, \pi_0)$ sont donc toutes deux nulles. D'après II.2(1), le membre de gauche de l'égalité (1) ci-dessus est nul. Le membre de droite aussi, ce qui est l'assertion (i) de la proposition VII.4.

On considère maintenant un couple $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$ et on pose $\pi^+ = \pi_0^+ = \pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$. Supposons de plus $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \notin \mathcal{P}_{2,disc}(N)$. On peut par exemple supposer qu'il existe $j \geq 1$ tel que $mult_{\boldsymbol{\lambda}^+}(j) \geq 2$. Fixons un tel i. On a l'égalité :

$$\pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) = St(j) \times \pi(\boldsymbol{\lambda}'^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \times St(j),$$

où $\boldsymbol{\lambda}'^{+}$ est la partition déduite de $\boldsymbol{\lambda}^+$ en retirant deux termes égaux à j. Notons $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$, triangulaire par blocs, de blocs de tailles $j, N-2j, j$ et $\mathbf{M} = \mathbf{G}_j \times \mathbf{G}_{N-2j} \times \mathbf{G}_j$ sa composante de Lévi diagonale par blocs. On déduit de ce couple un ensemble $\tilde{\mathbf{M}}$, cf. I.1, qui n'est autre que $\mathbf{M}\theta$, et un groupe $\mathbf{M}^+$. Il est clair que l'induite de M à M^+ de la représentation $St(j) \otimes \pi(\boldsymbol{\lambda}'^{+}, \boldsymbol{\lambda}^-) \otimes St(j)$ de M se décompose en deux composantes irréductibles. Alors $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ est l'image par induction de P^+ à G^+ de l'une de ces composantes irréductibles. Sa trace est une distribution induite, qui annule $C_{cusp}(\tilde{G})$. Donc le membre de gauche de (1) est nul. Le membre de droite aussi, ce qui entraîne $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp} = 0$. Supposons maintenant qu'au contraire $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}(N)$. Il résulte de la description de IV.4 que π appartient à l'ensemble noté $\widetilde{Ell}(G)$ dans ce paragraphe. Grâce à IV.5(1), la fonction $\tilde{f}^{\pi^+,0}$ a une image non nulle dans $I_{cusp}(\tilde{G})$. Cette image est la même que celle de $(\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp})_{\tilde{G}}$. A fortiori $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}_{cusp}$ n'est pas nul. Cela démontre le (ii) de la proposition.

Enfin le (iii) résulte de l'assertion (iii) du corollaire II.2, dans laquelle on remplace une fois de plus $\tilde{f}^{\pi^+,0}$ par $(\tilde{f}^{\pi^+}_{cusp})_{\tilde{G}}$. $\square$

VIII. Détermination des pseudo-coefficients

VIII.1. Une filtration de l'espace $\mathcal{C}$

Pour $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(N)$, notons $(\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}), \underline{E}(\boldsymbol{\mu}))$ la représentation irréductible unipotente de $\underline{G}$ paramétrée par $\boldsymbol{\mu}$. En particulier, pour $\boldsymbol{\mu} = (N)$, $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$ est la représentation triviale. La représentation $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$ s'étend de deux façons distinctes en une représentation de $\underline{G}^+$. Nous allons en choisir une. Notons $\underline{\mathbf{B}}$ le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur de $\underline{G}$ et $\underline{\mathcal{H}}$ l'algèbre des fonctions sur $\underline{G}$ biinvariantes par $\underline{B}$ (elle est naturellement isomorphe à l'algèbre introduite en VII.3). Elle a pour base les éléments habituels T_w, pour $w \in \mathfrak{S}_N$. De $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$ se déduit une représentation de $\underline{\mathcal{H}}$ dans $\underline{E}(\boldsymbol{\mu})^{\underline{B}}$, que l'on note encore $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$. Notons w_{max} l'élément de $\mathfrak{S}_N$ de longueur maximale. Soit $\underline{\pi}^+(\boldsymbol{\mu})$ un prolongement de $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$ à $\underline{G}^+$. On vérifie que l'opérateur $\underline{\pi}^+(\boldsymbol{\mu})(\theta)$ conserve l'espace $\underline{E}(\boldsymbol{\mu})^{\underline{B}}$ et qu'il existe un signe $\epsilon = \pm 1$ et un entier $t \in \mathbb{Z}$ de sorte que, dans ce sous-espace, $\underline{\pi}^+(\boldsymbol{\mu})(\theta)$ coïncide avec $\epsilon q^{t/2} \underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})(T_{w_{max}})$. On choisit le prolongement $\underline{\pi}^+(\boldsymbol{\mu})$ de sorte que $\epsilon = 1$. On note $\chi^+(\boldsymbol{\mu})$ le caractère de $\underline{\pi}^+(\boldsymbol{\mu})$ et $\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu})$ sa restriction à $\underline{\tilde{G}}$. La famille $(\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}))_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(N)}$ forme une base de $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}})$. On a introduit en VII.2 l'espace $\mathcal{C}$. Il a pour base la famille des $\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_2)$ pour $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(N)$. On définit sur l'ensemble des partitions l'ordre usuel ainsi que les opérations de transposition, de réunion et de somme. On définit sur $\mathcal{C}$ une filtration indexée par $\mathcal{P}(N)$: pour $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(N)$, $\mathcal{C}_{\leq \boldsymbol{\mu}}$ est le sous-espace engendré par les $\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_2)$ pour les $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ tels que $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 \leq \boldsymbol{\mu}$. On définit de façon similaire le sous-espace $\mathcal{C}_{<\boldsymbol{\mu}}$. Les quotients de la filtration sont les espaces $\mathcal{C}_{\leq \boldsymbol{\mu}} / \mathcal{C}_{<\boldsymbol{\mu}}$. Notons $proj_{\boldsymbol{\mu}} : \mathcal{C}_{\leq \boldsymbol{\mu}} \to \mathcal{C}_{\leq \boldsymbol{\mu}} / \mathcal{C}_{<\boldsymbol{\mu}}$ la projection naturelle. Alors $\mathcal{C}_{\leq \boldsymbol{\mu}} / \mathcal{C}_{<\boldsymbol{\mu}}$ a pour base la famille des $proj_{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_2))$ pour les $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ tels que $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}$.

VIII.2. Restriction des représentations de G aux sous-groupes compacts : première propriété

Soit $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$. Posons $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-$, $\pi = \pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$, $\pi^+ = \pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$, $E = E(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$. Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 + N_2 = N$. Comme on l'a dit, π^+ se restreint en une représentation de $K^+_{N_1,N_2}$ dans $E^{K^u_{N_1,N_2}}$, qui se quotiente en une représentation du groupe $(\underline{G}_{N_1} \times \underline{G}_{N_2})^+$, cf.VII.2. Notons $\pi^+_{N_1,N_2}$ cette représentation et π_{N_1,N_2} sa restriction à $\underline{G}_{N_1} \times \underline{G}_{N_2}$. Dans le cas où $N_1 = N$ et $N_2 = 0$, $K_{N,0}$ est le sous-groupe compact maximal standard de G et le calcul de la représentation $\pi_{N,0}$ est aisé. On a :

$$\pi_{N,0} = \underline{St}(\lambda^+_1) \times \underline{St}(\lambda^+_2) \times ... \times \underline{St}(\lambda^-_1) \times \underline{St}(\lambda^-_2) \times ...$$

Pour tout entier n, on a noté $\underline{St}(n)$ la représentation de Steinberg de $\underline{G}_n$ paramétrée par la partition $(1, ..., 1)$.

Rappelons que si $\boldsymbol{\mu}_1, ..., \boldsymbol{\mu}_k$ sont des partitions telles que $S(\boldsymbol{\mu}_1) + ... + S(\boldsymbol{\mu}_k) = N$, la représentation induite $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_1) \times ... \times \underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_k)$ de $\underline{G}$ se décompose en somme de représentations $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$ pour $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(N)$ tel que :

$$\boldsymbol{\mu}_1 \cup ... \cup \boldsymbol{\mu}_k \leq \boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{\mu}_1 + ... + \boldsymbol{\mu}_k.$$

Si l'une des inégalités est une égalité, la multiplicité de $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$ est 1.

Appliquons cela aux partitions $\boldsymbol{\mu}_1, ..., \boldsymbol{\mu}_k$ toutes de la forme $(1, ..., 1)$, de longueurs successives $\lambda_1^+, \lambda_2^+, ..., \lambda_1^-, \lambda_2^-, ...$ Alors $\boldsymbol{\mu}_1 + ... + \boldsymbol{\mu}_k = {}^t\boldsymbol{\lambda}$. Donc $\pi_{N,0}$ se décompose en somme de représentations $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$ pour $\boldsymbol{\mu} \leq {}^t\boldsymbol{\lambda}$. En général, K_{N_1,N_2} est un sous-groupe de $K_{N,0}$ et son image dans $\underline{G}_N$ est le groupe des points sur $\mathbb{F}_q$ d'un sous-groupe parabolique de composante de Lévi $\underline{\mathbf{G}}_{N_1} \times \underline{\mathbf{G}}_{N_2}$. Alors π_{N_1,N_2} n'est autre que le module de Jacquet de $\pi_{N,0}$ relatif à ce sous-groupe parabolique. On en déduit que π_{N_1,N_2} est somme de représentations $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_2)$ pour des couples $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}(N_1) \times \mathcal{P}(N_2)$ tels que $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 \leq {}^t\boldsymbol{\lambda}$. Si $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 = {}^t\boldsymbol{\lambda}$, alors $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_2)$ intervient avec multiplicité 1.

La représentation $\pi^+_{N_1,N_2}$ est somme de prolongements à $(\underline{G}_{N_1} \times \underline{G}_{N_2})^+$ des représentations précédentes. Par définition, $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}$ est la somme directe des restrictions à $\underline{\tilde{G}}_{N_1} \times \underline{\tilde{G}}_{N_2}$ des traces de $\pi^+_{N_1,N_2}$. On en déduit le lemme suivant.

Lemme. *La fonction $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}$ appartient à $\mathcal{C}_{\leq {}^t\boldsymbol{\lambda}}$. Pour tout $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(N)$ tel que $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 = {}^t\boldsymbol{\lambda}$, il existe $\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \{\pm 1\}$ tel que :*

$$proj_{{}^t\boldsymbol{\lambda}}(\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}) = \sum_{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2; \boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 = {}^t\boldsymbol{\lambda}} \alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) proj_{{}^t\boldsymbol{\lambda}}(\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_2)).$$

VIII.3. Réduction au cas du sous-groupe compact maximal

Notons $\mathcal{H}$ l'algèbre des fonctions sur G biinvariantes par le sous-groupe d'Iwahori I (cf. VII.3). Elle contient la sous-algèbre des fonctions à support dans $K = K_{N,0}$, qui s'identifie à $\underline{\mathcal{H}}$. Celle-ci est engendrée par les éléments $T_i = T_{s_i}$ pour $i = 1, ..., N-1$, où $s_i \in \mathfrak{S}_N$ est la symétrie élémentaire usuelle. L'algèbre $\mathcal{H}$ contient aussi une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, ..., X_N, X_N^{-1}]$ (on utilise la présentation de [R] paragraphe 5). Les deux sous-algèbres engendrent $\mathcal{H}$ et on a les relations :

$$(T_i - q)(T_i + 1) = 0, \ X_j T_i = T_i X_j \ pour \ j \neq i, i+1,$$

$$X_i T_i = T_i X_{i+1} - (q-1) X_{i+1}, \ X_{i+1} T_i = T_i X_i + (q-1) X_{i+1}.$$

Notons $\boldsymbol{\zeta}$ la fonction caractéristique de ζI multipliée par $mes(I)^{-1}$. Elle appartient à $\mathcal{H}$ et on vérifie l'égalité :

$$\boldsymbol{\zeta} = q^{-\frac{N-1}{2}} T_\sigma X_1 = q^{\frac{N-1}{2}} X_N T_{\sigma^{-1}}^{-1},$$

où $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ est la permutation circulaire envoyant 1 sur N et i sur $i-1$ pour $i = 2, ..., N$.

Soient $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, ..., \chi_N)$ une famille de caractères non ramifiés de $F^\times$. Notons $E(\boldsymbol{\chi})$ l'espace de la représentation induite $\chi_1 \times ... \times \chi_N$. On sait que la représentation de $\mathcal{H}$ dans $E(\boldsymbol{\chi})^I$ est isomorphe à la représentation par multiplication à gauche dans l'espace $\mathcal{H}/\mathcal{I}(\boldsymbol{\chi})$, où $\mathcal{I}(\boldsymbol{\chi})$ est l'idéal à gauche de $\mathcal{H}$ engendré par les $X_i - \chi_i(\varpi)$ pour $i = 1, ..., N$.

Reprenons les notations du paragraphe précédent. Soit $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(N)$ tel que $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 = {}^t\boldsymbol{\lambda}$. Le signe $\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ se détermine de la façon suivante. Identifions de façon évidente $\mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2}$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_N$. L'algèbre $\underline{\mathcal{H}}_{N_1} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{H}}_{N_2}$ s'identifie à la sous-algèbre de $\underline{\mathcal{H}}$ engendrée par les T_w pour $w \in \mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2}$. Notons-la $\underline{\mathcal{H}}'$. Notons w'_{max} l'élément $(w_{N_1,max}, w_{N_2,max})$ de $\mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2}$. Il y a un unique sous-$\underline{\mathcal{H}}'$-module de E^I dans lequel cette algèbre agit par la représentation $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_2)$ (comme on l'a dit, on note de la même façon les représentations des groupes et les représentations des algèbres de Hecke qui s'en déduisent).

Notons $\underline{E}'$ ce sous-module, qui est donc isomorphe à $\underline{E}(\boldsymbol{\mu}_1)^{\underline{B}_{N_1}} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{E}(\boldsymbol{\mu}_2)^{\underline{B}_{N_2}}$. L'opérateur $\pi^+(\theta)\pi(\boldsymbol{\zeta}^{-N_2})$ conserve ce sous-module et il existe un réel $c > 0$ tel que cet opérateur agisse sur ce sous-module de la même façon que $c\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)\pi_{N,0}(T_{w'_{max}})$.

Pour $j = 1, 2$, posons $\boldsymbol{\nu}_j = {}^t\boldsymbol{\mu}_j$. Pour $\epsilon = \pm$ et $j = 1, 2$, définissons une partition $\boldsymbol{\nu}_j^\epsilon$ de la façon suivante. Puisque ${}^t\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2$, on a $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2$. Soit i un entier ≥ 1. Puisque $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-$, il existe $k \geq 1$ tel que $\lambda_i^\epsilon = \lambda_k$. L'entier k n'est pas forcément unique. Mais, si $\lambda_k = \lambda_\ell$, l'égalité $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2$ entraîne que $\nu_{j,k} = \nu_{j,\ell}$. L'entier $\nu_{j,k}$ est donc bien déterminé. On le note $\nu_{j,i}^\epsilon$ et cela définit la partition $\boldsymbol{\nu}_j^\epsilon$. On a les égalités :

$$\boldsymbol{\nu}_1^\epsilon + \boldsymbol{\nu}_2^\epsilon = \boldsymbol{\lambda}^\epsilon,\ \boldsymbol{\nu}_j^+ \cup \boldsymbol{\nu}_j^+ = \boldsymbol{\nu}_j.$$

Posons $a(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = S(\boldsymbol{\nu}_2^-)$. Enfin, posons $\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) = \alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; {}^t\boldsymbol{\lambda}, \emptyset)$.

Lemme. *On a l'égalité :*

$$\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = (-1)^{a(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)}\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-).$$

Preuve. Appliquons les définitions en remplaçant le couple $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ par $({}^t\boldsymbol{\lambda}, \emptyset)$. L'analogue de l'algèbre $\underline{\mathcal{H}}'$ est simplement $\underline{\mathcal{H}}$. Notons $\underline{E}$ l'analogue du module $\underline{E}'$. Puisque $\underline{E} \simeq \underline{\pi}({}^t\boldsymbol{\lambda})$ et $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 = {}^t\boldsymbol{\lambda}$, la représentation de $\underline{\mathcal{H}}'$ dans $\underline{E}$ contient la représentation $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_2)$. Puisque cette représentation n'intervient qu'une fois dans E^I, cela prouve que $\underline{E}' \subseteq \underline{E}$. L'opérateur $\pi^+(\theta)$ agit dans $\underline{E}$ comme $c\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)\pi(T_{w_{max}})$, où c est un réel > 0. Alors l'opérateur $\pi^+(\theta)\pi(\boldsymbol{\zeta}^{-N_2}) = \pi(\boldsymbol{\zeta}^{N_2})\pi^+(\theta)$ agit dans $\underline{E}'$ comme $c\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)\pi(\boldsymbol{\zeta}^{N_2}T_{w_{max}})$. On vérifie que $\boldsymbol{\zeta}^{N_2}T_{w_{max}} = q^{r/2}X_{N_1+1}...X_N T_{w'_{max}}$ pour un entier $r \in \mathbb{Z}$. Cela entraîne que $\pi(X_{N_1+1}...X_N)$ conserve $\underline{E}'$, y agit comme une homothétie de rapport c' réel non nul, et que $\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ est le produit de $\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ et du signe de c'.

Posons $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_{N_1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{N_2}$. Identifions de façon naturelle $\mathcal{H}'$ à une sous-algèbre de $\mathcal{H}$. Pour calculer la représentation de $\underline{\mathcal{H}}'$ dans E^I, on peut commencer par calculer la restriction à $\mathcal{H}'$ de la représentation de $\mathcal{H}$ dans E^I, puis restreindre la représentation obtenue à la sous-algèbre $\underline{\mathcal{H}}'$ de $\mathcal{H}'$. Notons $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique triangulaire supérieur de $\mathbf{G}$ de composante de Lévi $\mathbf{G}_{N_1} \times \mathbf{G}_{N_2}$ et (π_P, E_P) le module de Jacquet normalisé de (π, E) relatif à ce parabolique. Comme on le sait, en tant que $\mathcal{H}'$-module, E^I est isomorphe à $(E_P)^{I_{N_1} \times I_{N_2}}$. La représentation (π_P, E_P) est filtrée d'après la théorie de Bernstein-Zelevinsky. Le gradué de cette filtration possède la propriété suivante : soit $(\rho, \mathcal{E})$ un terme de ce gradué ; alors le centre $Z(\mathcal{H}')$ de $\mathcal{H}'$ agit dans $\mathcal{E}^{I_{N_1} \times I_{N_2}}$ par un caractère χ_ρ. Par unicité, il y a un unique terme $(\rho, \mathcal{E})$ du gradué tel que la représentation $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_2)$ intervienne dans la représentation de $\underline{\mathcal{H}}'$ dans $\mathcal{E}^{I_{N_1} \times I_{N_2}}$. Puisque $X_{N_1+1}...X_N$ appartient au centre $Z(\mathcal{H}')$, le réel c' est nécessairement égal à $\chi_\rho(X_{N_1+1}...X_N)$.

Les termes du gradué de la filtration de Bernstein-Zelevinsky sont indexés par les familles $\mathbf{d} = (d_{j,i}^\epsilon)_{\epsilon=\pm, j=1,2, i\geq 1}$ telles que :

$$d_{j,i}^\epsilon \in \mathbb{N},\ d_{1,i}^\epsilon + d_{2,i}^\epsilon = \lambda_i^\epsilon,\ \sum_{\epsilon=\pm, i\geq 1} d_{j,i}^\epsilon = N_j.$$

La représentation $\rho_{\mathbf{d}}$ de $G_{N_1} \times G_{N_2}$ dans le terme correspondant à une telle famille est le produit tensoriel de la représentation de G_{N_1} :

$$|.|^{d_{2,1}^+/2}St(d_{1,1}^+) \times |.|^{d_{2,2}^+/2}St(d_{1,2}^+) \times ... \times \xi|.|^{d_{2,1}^-/2}St(d_{1,1}^-) \times \xi|.|^{d_{2,2}^-/2}St(d_{1,2}^-) \times ...$$

et de la représentation de G_{N_2} :

$$|.|^{-d_{1,1}^+/2}St(d_{2,1}^+) \times |.|^{-d_{1,2}^+/2}St(d_{2,2}^+) \times ... \times \xi|.|^{-d_{1,1}^-/2}St(d_{2,1}^-) \times \xi|.|^{-d_{1,2}^-/2}St(d_{2,2}^-) \times ...$$

La valeur $\chi_{\rho_{\mathbf{d}}}(X_{N_1+1}...X_N)$ est la valeur en ϖ du caractère de $F^\times$ produit des caractères intervenant dans le support cuspidal de cette deuxième représentation. C'est un réel de signe $(-1)^{s(\mathbf{d})}$, où $s(\mathbf{d}) = \sum_{i\geq 1} d^-_{2,i}$.

Pour $\mathbf{d}$ comme ci-dessus et $j=1,2$, notons $\mathbf{d}_j$ la partition qui a pour termes $d^+_{j,1}, d^+_{j,2}, ..., d^-_{j,1}, d^-_{j,2}, ...$ rangés en ordre décroissant. Comme en VIII.2, la représentation de $\underline{G}_{N_1} \times \underline{G}_{N_2}$ déduite de $\rho_{\mathbf{d}}$ est l'induite :

$$\underline{St}(d_{j,1}) \times \underline{St}(d_{j,2}) \times ...$$

Cette représentation ne contient $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_1) \otimes \underline{\pi}(\boldsymbol{\mu}_2)$ que si $\boldsymbol{\mu}_j \leq {}^t\mathbf{d}_j$ pour $j=1,2$. Nous allons montrer que :

(1) cette condition n'est réalisée que pour l'unique famille $\mathbf{d}$ telle que $d^\epsilon_{j,i} = \nu^\epsilon_{j,i}$ pour tous $\epsilon = \pm$, $j=1,2$, $i\geq 1$.

En effet, puisque $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-$, on peut fixer une bijection $\tau : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \{\pm\} \times (\mathbb{N}\setminus\{0\})$ de sorte que, pour tout $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on ait l'égalité $\lambda_i = \lambda^\epsilon_k$, où $(\epsilon,k) = \tau(i)$. Définissons des suites d'entiers $\boldsymbol{\delta}_1$ et $\boldsymbol{\delta}_2$ par $\delta_{j,i} = d^\epsilon_{j,k}$ pour tout $i\geq 1$, où $(\epsilon,k)=\tau(i)$. Ce ne sont pas a priori des partitions, les termes n'ayant pas de raison d'être décroissants. Toutefois, quand on range les termes de $\boldsymbol{\delta}_j$ en ordre décroissant, on obtient la partition $\mathbf{d}_j$. Les suites $\boldsymbol{\delta}_j$ vérifient l'égalité :

$$(2) \qquad \delta_{1,i} + \delta_{2,i} = \lambda_i, \ \textit{pour tout } i.$$

On a imposé l'égalité $\boldsymbol{\mu}_1 \cup \boldsymbol{\mu}_2 = {}^t\boldsymbol{\lambda}$, ou encore $\boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\lambda}$. Supposons vérifiées les relations $\boldsymbol{\mu}_j \leq {}^t\mathbf{d}_j$ pour $j=1,2$, ou encore $\boldsymbol{\nu}_j \geq \mathbf{d}_j$. Pour toute suite d'entiers $\mathbf{n} = (n_i)_{i\geq 1}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons $S_i(\mathbf{n}) = n_1 + ... + n_i$. Les relations précédentes entraînent la relation :

$$S_i(\boldsymbol{\lambda}) = S_i(\boldsymbol{\nu}_1) + S_i(\boldsymbol{\nu}_2) \geq S_i(\mathbf{d}_1) + S_i(\mathbf{d}_2)$$

pour tout $i\in\mathbb{N}$. Remarquons que $S_i(\mathbf{d}_j)$ est la somme des i plus grands termes de $\mathbf{d}_j$. Puisque $\boldsymbol{\delta}_j$ ne diffère de $\mathbf{d}_j$ que par l'ordre des termes, on a $S_i(\mathbf{d}_j) \geq S_i(\boldsymbol{\delta}_j)$. Grâce à (2), les inégalités précédentes se complètent en la suite d'inégalités :

$$S_i(\boldsymbol{\lambda}) = S_i(\boldsymbol{\nu}_1) + S_i(\boldsymbol{\nu}_2) \geq S_i(\mathbf{d}_1) + S_i(\mathbf{d}_2) \geq S_i(\boldsymbol{\delta}_1) + S_i(\boldsymbol{\delta}_2) = S_i(\boldsymbol{\lambda}).$$

Le premier terme de cette suite étant égal au dernier, cela entraîne que ces inégalités , ainsi que toutes celles utilisées au cours du calcul, sont des égalités. En particulier $S_i(\mathbf{d}_j) = S_i(\boldsymbol{\delta}_j)$ pour $j=1,2$. En en soustrayant les égalités analogues relatives à $i-1$, on en déduit $\delta_{j,i} = \nu_{j,i}$ pour tous $j=1,2$ et $i\geq 1$. Mais cela équivaut à la conclusion de (1).

Remarquons que, pour la famille déterminée par (1), on a $s(\mathbf{d}) = a(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$. On a ainsi déterminé le "bon" terme $\mathbf{d}$ du gradué et son signe $\chi_{\rho_{\mathbf{d}}}(X_{N_1+1}...X_N)$. Cela achève la preuve. $\square$

VIII.4. Détermination du dernier signe

On conserve les notations de VIII.2. On va déterminer le signe $\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$. Introduisons quelques notations. Soit r un entier ≥ 1. Notons $\mathcal{N}(r)$ l'ensemble des familles $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_r)$ d'entiers ≥ 1 telles que $n_1 + ... + n_r = N$. Pour toute telle famille, notons $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}$ le groupe $\mathfrak{S}_{n_1} \times ... \times \mathfrak{S}_{n_r}$ plongé naturellement dans $\mathfrak{S}_N$, $\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{n}}$ l'algèbre $\underline{\mathcal{H}}_{n_1} \otimes_{\mathbb{C}} ... \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{H}}_{n_r}$ plongée naturellement dans $\underline{\mathcal{H}}$, et définissons les deux éléments de $\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{n}}$:

$$e_{\mathbf{n}} = \sum_{w\in\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}} T_w, \ f_{\mathbf{n}} = \sum_{w\in\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}} (-q)^{-l(w)} T_w,$$

où l est la fonction longueur. Appelons décomposition en intervalles associée à $\mathbf{n}$ la décomposition $\{1,...,N\} = I_1 \sqcup ... \sqcup I_r$, où $I_i = \{n_1 + ... + n_{i-1} + 1, ..., n_1 + ... + n_i\}$. Le groupe $\mathfrak{S}_r$ agit naturellement sur $\mathcal{N}(r)$. Soit $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(r)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. On définit un élément $w(\sigma, \mathbf{n}) \in \mathfrak{S}_N$: si

$\{1, ..., N\} = I_1 \sqcup ... \sqcup I_r = I'_1 \sqcup ... \sqcup I'_r$ sont les décompositions associées à $\mathbf{n}$ et $\sigma(\mathbf{n})$, $w(\sigma, \mathbf{n})$ est croissante sur chaque I_i et envoie I_i sur $I'_{\sigma(i)}$.

Notons $\mathcal{N}^{\pm}(r)$ l'ensemble des couples $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ où $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_r) \in \mathcal{N}(r)$ et $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, ..., \epsilon_r)$ est une famille de signes $\pm$. Notons $\xi_+ = 1$ et $\xi_- = \xi$ les deux caractères non ramifiés d'ordre ≤ 2 de $F^\times$. Pour $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ comme ci-dessus, définissons la représentation $(St(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}), E(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}))$ de G par :

$$St(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) = \xi_{\epsilon_1} St(n_1) \times ... \times \xi_{\epsilon_r} St(n_r).$$

On définit la famille de caractères :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) = (\xi_{\epsilon_1} |.|^{\frac{n_1-1}{2}}, ..., \xi_{\epsilon_1} |.|^{\frac{1-n_1}{2}}, ..., \xi_{\epsilon_r} |.|^{\frac{n_r-1}{2}}, ..., \xi_{\epsilon_r} |.|^{\frac{1-n_r}{2}}).$$

Plus généralement, pour une famille $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_r)$ de nombres complexes, on définit $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z})$ en remplaçant les ξ_{ϵ_i} par $\xi_{\epsilon_i} |.|^{z_i}$ dans la formule précédente. Le groupe $\mathfrak{S}_r$ agit naturellement sur $\mathcal{N}^{\pm}(r)$.

Soit $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, ..., \chi_N)$ une famille de caractères non ramifiés de $F^\times$. On a déjà dit que $E(\boldsymbol{\chi})^I$ était isomorphe à $\mathcal{H}/\mathcal{I}(\boldsymbol{\chi})$. Précisons cet isomorphisme. L'application naturelle $\underline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}/\mathcal{I}(\boldsymbol{\chi})$ est bijective. On définit une application linéaire $\underline{\mathcal{H}} \to E(\boldsymbol{\chi})^I$ en associant à T_w, pour $w \in \mathfrak{S}_N$, l'unique élément de $E(\boldsymbol{\chi})^I$ (donc une fonction sur G) dont la restriction à K est la fonction caractéristique de $Iw^{-1}I$, en identifiant $\mathfrak{S}_N$ au sous-groupe de G formé des matrices de permutation. On peut supposer que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & E(\boldsymbol{\chi})^I \\ & \nearrow & \\ \underline{\mathcal{H}} & & \downarrow \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{H}/\mathcal{I}(\boldsymbol{\chi}) \end{array}$$

est commutatif. Ses flèches sont des isomorphismes de $\underline{\mathcal{H}}$-modules. Si $\boldsymbol{\chi}$ est en position générale, il existe un unique isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules de $E(\boldsymbol{\chi})^I$ sur $E(w(\boldsymbol{\chi}))^I$ qui, en identifiant ces espaces à $\underline{\mathcal{H}}$, fixe l'élément $f_{(N)}$ (c'est-à-dire l'élément $f_{\mathbf{n}}$ pour $\mathbf{n} = (N) \in \mathcal{N}(1)$). Il se traduit par la multiplication à droite par un élément $N(w, \boldsymbol{\chi})$ de $\underline{\mathcal{H}}$. En particulier, si w est une symétrie élémentaire s_i, on a :

$$N(s_i, \boldsymbol{\chi}) = (q\chi_i(\varpi)\chi_{i+1}(\varpi)^{-1} - 1)^{-1} \left(T_i(1 - \chi_i(\varpi)\chi_{i+1}(\varpi)^{-1}) + (q-1)\chi_i(\varpi)\chi_{i+1}(\varpi)^{-1} \right).$$

Posons $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\chi}) = (\chi_N^{-1}, ..., \chi_1^{-1})$ et définissons l'homomorphisme $\Theta(\boldsymbol{\chi}) : E(\boldsymbol{\chi}) \to E(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\chi}))$ qui, à une fonction $\varphi \in E(\boldsymbol{\chi})$, associe la fonction $\varphi \circ \boldsymbol{\theta}$. Il se restreint en un homomorphisme de $E(\boldsymbol{\chi})^I$ dans $E(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\chi}))^I$. En identifiant ces espaces à $\underline{\mathcal{H}}$, celui-ci se traduit par l'homomorphisme qui, pour tout $w \in \mathfrak{S}_N$, envoie T_w sur $T_{w_{max} w w_{max}}$. Mais $T_{w_{max} w w_{max}} = T_{w_{max}} T_w T_{w_{max}}^{-1}$. Cet homomorphisme est donc la conjugaison par $T_{w_{max}}$, que l'on note $Ad(T_{w_{max}})$.

Soit $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) \in \mathcal{N}^{\pm}(r)$. Alors $E(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ est un sous-module de $E(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}))$ et $E(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})^I$ s'identifie au sous-$\underline{\mathcal{H}}$-module $\underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}}$ de $\underline{\mathcal{H}} = E(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}))^I$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. Il y a un opérateur d'entrelacement de $E(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ sur $E(\sigma(\mathbf{n}), \sigma(\boldsymbol{\epsilon}))$. On peut le normaliser de sorte qu'il se traduise sur les éléments invariants par I par l'application :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}} & \to & \underline{\mathcal{H}} f_{\sigma(\mathbf{n})} \\ h & \mapsto & hN(\sigma, \mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}), \end{array}$$

où $N(\sigma, \mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ est un élément de $\underline{\mathcal{H}}$ construit de la façon suivante. Pour $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_r)$ en position générale, on dispose de l'élément $N(w(\sigma, \mathbf{n}), \boldsymbol{\chi}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}))$ de $\underline{\mathcal{H}}$. Pour $h \in \underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}}$, l'élément $hN(w(\sigma, \mathbf{n}), \boldsymbol{\chi}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}))$ est régulier en $\mathbf{z} = 0$. Sa valeur en $\mathbf{z} = 0$ est égale à $hN(\sigma, \mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ pour une certain élément $N(\sigma, \mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) \in \underline{\mathcal{H}}$ qui est l'élément cherché.

Remarque. Pour être précis, cela ne définit cet élément que modulo l'annulateur à droite de $\underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}}$, mais cela n'a pas d'importance.

Notons maintenant r^+, resp. r^-, le nombre de termes non nuls de $\boldsymbol{\lambda}^+$, resp. $\boldsymbol{\lambda}^-$, posons $r = r^+ + r^-$ et définissons $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) \in \mathcal{N}^{\pm}(r)$ par :

$$(n_i, \epsilon_i) = \begin{cases} (\lambda_i^+, +), & \textit{pour } i = 1, ..., r^+, \\ (\lambda_{i-r^+}^-, -), & \textit{pour } i = r^+ + 1, ..., r. \end{cases}$$

Evidemment $\pi = St(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$. Posons $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ et notons σ_{max} l'élément maximal de $\mathfrak{S}_r$. Remarquons que $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\chi}) = \boldsymbol{\chi}(\sigma_{max}(\mathbf{n}), \sigma_{max}(\boldsymbol{\epsilon}))$. L'homomorphisme $\Theta(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\chi}))$ se restreint en un homomorphisme de $E(\sigma_{max}(\mathbf{n}), \sigma_{max}(\boldsymbol{\epsilon}))$ dans $E(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$. On dispose d'autre part de l'opérateur d'entrelacement de $E(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ dans $E(\sigma_{max}(\mathbf{n}), \sigma_{max}(\boldsymbol{\epsilon}))$. Le composé de ces deux opérateurs est l'opérateur $\pi^+(\theta)$ de $E = E(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$. En effet, il entrelace les représentations π et $\boldsymbol{\theta}(\pi)$ et vérifie la condition de normalisation imposée en VII.3. Donc $\pi^+(\theta)$ se restreint à $E^I = \underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}}$ en le composé des deux applications :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccccc} \underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}} & \rightarrow & \underline{\mathcal{H}} f_{\sigma_{max}(\mathbf{n})} & \underline{\mathcal{H}} f_{\sigma_{max}(\mathbf{n})} & \stackrel{Ad(T_{w_{max}})}{\rightarrow} & \underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}} \\ h & \mapsto & hN(\sigma_{max}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) & h & \mapsto & T_{w_{max}} h T_{w_{max}}^{-1} \end{array}$$

Posons $\boldsymbol{\mu} = {}^t\boldsymbol{\lambda}$ et notons $\underline{E}$ le sous-$\underline{\mathcal{H}}$-module de $E^I = \underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}}$ dans lequel $\underline{\mathcal{H}}$ agit par la représentation $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$. Pour déterminer l'action de $\pi^+(\theta)$ dans $\underline{E}$, on doit restreindre l'application ci-dessus à $\underline{E}$ et la comparer à l'action de $T_{w_{max}}$. Ces deux actions étant proportionnelles, on va se limiter à un élément bien choisi de $\underline{E}$. Par définition de $\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$ (vue comme représentation de $\underline{\mathcal{H}}$), sa restriction à $\underline{\mathcal{H}}_{\boldsymbol{\mu}}$ contient la représentation "triviale", plus exactement celle qui correspond à la représentation triviale de $\underline{G}_{\mu_1} \times \underline{G}_{\mu_2} \times ....$ Or celle-ci n'intervient qu'une fois dans $\underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}}$. En effet, le sous-espace isotypique de $\underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}}$ associé à la représentation "triviale" de $\underline{\mathcal{H}}_{\boldsymbol{\mu}}$ est engendré par les éléments $e_{\boldsymbol{\mu}} T_w f_{\mathbf{n}}$ pour les $w \in \mathfrak{S}_N$ de longueur minimale dans leur double classe $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}} w \mathfrak{S}_{\mathbf{n}}$. Pour qu'un tel élément soit non nul, il faut que $w \mathfrak{S}_{\mathbf{n}} w^{-1} \cap \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}} = \{1\}$. Mais un seul w vérifie ces conditions. Notons w_1 cet élément et $h_1 = e_{\boldsymbol{\mu}} T_{w_1} f_{\mathbf{n}}$. Par unicité, on a forcément $h_1 \in \underline{E} \subseteq \underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}}$. On a donc :

$$\pi^+(\theta)(h_1) = \alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) q^{t/2} T_{w_{max}} h_1,$$

où t est un certain entier.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. On peut remplacer $\mathbf{n}$ par $\sigma(\mathbf{n})$ dans les constructions ci-dessus. Au lieu de w_1 et h_1, on obtient des termes analogues w_σ et h_σ. Posons aussi :

$$k_\sigma = h_1 T_{w(\sigma^{-1}, \sigma(\mathbf{n}))}.$$

Il est non nul car $T_{w(\sigma^{-1}, \sigma(\mathbf{n}))}$ est inversible. Il appartient à $\underline{\mathcal{H}} f_{\sigma(\mathbf{n})}$ car $f_{\mathbf{n}} T_{w(\sigma^{-1}, \sigma(\mathbf{n}))} = T_{w(\sigma^{-1}, \sigma(\mathbf{n}))} f_{\sigma(\mathbf{n})}$. Il se transforme par la représentation "triviale" de $\underline{\mathcal{H}}_{\boldsymbol{\mu}}$. Par unicité, les éléments h_σ et k_σ sont donc proportionnels. La première application de (1) est équivariante pour l'action de $\underline{\mathcal{H}}$. Elle envoie forcément h_1 sur un multiple de $k_{\sigma_{max}}$. Posons donc :

$$h_1 N(\sigma_{max}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) = c k_{\sigma_{max}}.$$

La deuxième application de (1) envoie $k_{\sigma_{max}}$ sur $T_{w_{max}} k_{\sigma_{max}} T_{w_{max}}^{-1}$. Notons $w_{\mathbf{n},max}$ l'élément de longueur maximale de $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}$. On a l'égalité $w_{max} = w_{\mathbf{n},max} w(\sigma_{max}, \sigma(\mathbf{n}))$ et la longueur du terme de gauche est la somme des longueurs des deux termes du membre de droite. Donc $T_{w_{max}} = T_{w_{\mathbf{n},max}} T_{w(\sigma_{max}, \sigma(\mathbf{n}))}$. On en déduit :

$$T_{w_{max}} k_{\sigma_{max}} T_{w_{max}}^{-1} = T_{w_{max}} h_1 T_{w_{\mathbf{n},max}}^{-1}.$$

Mais $f_{\mathbf{n}} T_{w_{\mathbf{n},max}}^{-1} = (-1)^{l_1} f_{\mathbf{n}}$, où $l_1 = l(w_{\mathbf{n},max})$. On obtient alors :

$$\pi^+(\theta)(h_1) = c(-1)^{l_1} T_{w_{max}} h_1,$$

d'où :

$$\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) = c(-1)^{l_1}q^{-t/2}.$$

Décomposons σ_{max} en produit de symétries élémentaires, notons $\sigma_{max} = \sigma_d...\sigma_1$ cette décomposition. Pour $j = 0,...,d$, posons $\sigma_{\leq j} = \sigma_j...\sigma_1$ et $(\mathbf{n}_j,\boldsymbol{\epsilon}_j) = \sigma_{\leq j}(\mathbf{n},\boldsymbol{\epsilon})$. Comme ci-dessus, il y a un nombre complexe $C_j \neq 0$ tel que :

$$h_1N(\sigma_{\leq j},\mathbf{n},\boldsymbol{\epsilon}) = C_jk_{\sigma_{\leq j}}.$$

On a $C_0 = 1$ et $c = C_d$. Supposons $j \geq 1$ et considérons les deux éléments $h_{\sigma_{\leq j-1}}T_{w(\sigma_j,\mathbf{n}_j)}$ et $h_{\sigma_{\leq j-1}}N(\sigma_j,\mathbf{n}_{j-1},\boldsymbol{\epsilon}_{j-1})$. Ils appartiennent à $\underline{\mathcal{H}}f_{\mathbf{n}_j}$ et vérifient des conditions similaires aux éléments $h_{\sigma_{\leq j}}$ ou $k_{\sigma_{\leq j}}$. Ils sont donc proportionnels. Soit c_j le nombre complexe tel que :

$$h_{\sigma_{\leq j-1}}N(\sigma_j,\mathbf{n}_{j-1},\boldsymbol{\epsilon}_{j-1}) = c_jh_{\sigma_{\leq j-1}}T_{w(\sigma_j,\mathbf{n}_j)}.$$

Puisque $h_{\sigma_{\leq j-1}}$ et $k_{\sigma_{\leq j-1}}$ sont proportionnels, on a aussi :

$$k_{\sigma_{\leq j-1}}N(\sigma_j,\mathbf{n}_{j-1},\boldsymbol{\epsilon}_{j-1}) = c_jk_{\sigma_{\leq j-1}}T_{w(\sigma_j,\mathbf{n}_j)} = c_jk_{\sigma_{\leq j}}.$$

On a alors :

$$h_1N(\sigma_{\leq j},\mathbf{n},\boldsymbol{\epsilon}) = h_1N(\sigma_{\leq j-1},\mathbf{n},\boldsymbol{\epsilon})N(\sigma_j,\mathbf{n}_{j-1},\boldsymbol{\epsilon}_{j-1}) = C_{j-1}k_{\sigma_{\leq j-1}}N(\sigma_j,\mathbf{n}_{j-1},\boldsymbol{\epsilon}_{j-1}) = C_{j-1}c_jk_{\sigma_{\leq j}},$$

donc $C_j = C_{j-1}c_j$. On en déduit :

$$c = \prod_{j=1,...,d} c_j,$$

puis :

$$(2) \qquad \alpha(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) = (-1)^{l_1}q^{-t/2}\prod_{j=1,...,d} c_j.$$

Comme on va le voir, pour tout $j = 1...,d$, c_j est en fait la valeur en $q^{1/2}$ d'une fraction rationnelle $c_j(X)$ sans pôle en $X = 1$. Notons $c(X)$ le produit de ces fractions rationnelles. Dans tous ces calculs, on peut remplacer q par une puissance entière q^n arbitraire. On ne sait pas a priori que $\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)$ et t sont indépendants de n (on pourrait facilement prouver que t l'est, mais peu importe). En tout cas, pour tout entier $n \geq 1$, on obtient une égalité $c(q^{n/2}) = \epsilon(n)q^{nt(n)/2}$, avec $\epsilon(n) \in \{\pm 1\}$ et $t(n) \in \mathbb{Z}$. Faisons tendre n vers l'infini. Nécessairement, $\epsilon(n)$ et $t(n)$ deviennent constants : $\epsilon(n)X^{t(n)}$ est le quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur de $c(X)$. Notons $\epsilon(\infty)$ et $t(\infty)$ ces valeurs constantes. Alors $c(q^{n/2}) = \epsilon(\infty)q^{nt(\infty)/2}$ pour n assez grand. Cela entraîne $c(X) = \epsilon(\infty)X^{t(\infty)}$. Alors l'égalité (2) devient :

$$\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) = (-1)^{l_1}\epsilon(\infty)q^{\frac{t(\infty)-t}{2}},$$

d'où $t = t(\infty)$ et $\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) = (-1)^{l_1}\epsilon(\infty) = (-1)^{l_1}c(1)$. On a obtenu l'égalité :

$$(3) \qquad \alpha(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) = (-1)^{l_1}\prod_{j=1,...,d} c_j(1).$$

Il nous reste à démontrer l'assertion concernant les c_j et à calculer $c_j(1)$.

Fixons $j \in \{1,....,d\}$, notons k l'élément de $\{1,...,r-1\}$ tel que la symétrie élémentaire σ_j permute k et $k+1$. Posons $N' = n_k + n_{k+1}$, $\mathbf{n}' = (n_k, n_{k+1})$, $\boldsymbol{\epsilon}' = (\epsilon_k, \epsilon_{k+1})$. Notons σ'_{max} l'élément non trivial de $\mathfrak{S}_2$, $\boldsymbol{\lambda}'$ la partition qui a les mêmes termes que $\mathbf{n}'$, rangés en ordre décroissant, et posons $\boldsymbol{\mu}' = {}^t\boldsymbol{\lambda}'$. Tous ces objets sont des analogues, quand on remplace N par N', de $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, σ_{max}, $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$. En leur appliquant les constructions précédentes, on définit un élément $w'_1 \in \mathfrak{S}_{N'}$ et des éléments $e_{\boldsymbol{\mu}'}$, h'_1, $N(\sigma'_{max}, \mathbf{n}', \boldsymbol{\epsilon}')$ et $T_{w(\sigma'_{max}, \sigma'_{max}(\mathbf{n}'))}$ de $\underline{\mathcal{H}}_{N'}$. Il y a un nombre complexe $c' \neq 0$ tel que :

$$(4) \qquad h'_1 N(\sigma'_{max}, \mathbf{n}', \boldsymbol{\epsilon}') = c' h'_1 T_{w(\sigma'_{max}, \sigma'_{max}(\mathbf{n}'))}.$$

Posons $\mathbf{m} = (n_1, ..., n_{k-1}, N', n_{k+2}, ..., n_r)$. Le groupe $\mathfrak{S}_{N'}$ se plonge de façon évidente dans $\mathfrak{S}_{\mathbf{m}}$, puis dans $\mathfrak{S}_N$. De même, $\underline{\mathcal{H}}_{N'}$ se plonge dans $\underline{\mathcal{H}}_{\mathbf{m}}$ puis dans $\underline{\mathcal{H}}$. On vérifie que les images par ce plongement de $N(\sigma'_{max}, \mathbf{n}', \boldsymbol{\epsilon}')$ et $T_{w(\sigma'_{max}, \sigma'_{max}(\mathbf{n}'))}$ sont égales respectivement à $N(\sigma_j, \mathbf{n}_{j-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{j-1})$ et $T_{w(\sigma_j, \mathbf{n}_j)}$. Identifions désormais les ensembles de départ de ces plongements à leurs images. Décomposons $w_{\sigma_{\leq j-1}}$ en produit vw', où v est de longueur minimale dans sa classe $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}} v \mathfrak{S}_{\mathbf{m}}$ et $w' \in \mathfrak{S}_{\mathbf{m}}$. On a l'égalité $h_{\sigma_{\leq j-1}} = e_{\boldsymbol{\mu}} T_v T_{w'} f_{\sigma_{\leq j-1}(\mathbf{n})}$. On vérifie que $v^{-1} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}} v \cap \mathfrak{S}_{\mathbf{m}}$ est égal au sous-groupe $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}'}$ de $\mathfrak{S}_{N'}$. On en déduit que $e_{\boldsymbol{\mu}} T_v$ est proportionnel à $e_{\boldsymbol{\mu}} T_v e_{\boldsymbol{\mu}'}$. On voit aussi que $w' = w'_1$. Alors $e_{\boldsymbol{\mu}'} T_{w'} f_{\sigma_{\leq j-1}(\mathbf{n})}$ appartient à $\underline{\mathcal{H}} h'_1$. On en déduit que $h_{\sigma_{\leq j-1}}$ appartient lui aussi à $\underline{\mathcal{H}} h'_1$. En utilisant (4) et les identifications que l'on a déjà explicitées, on obtient :

$$h_{\sigma_{\leq j-1}} N(\sigma_j, \mathbf{n}_{j-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{j-1}) = c' h_{\sigma_{\leq j-1}} T_{w(\sigma_j, \mathbf{n}_j)}.$$

En comparant avec la définition de c_j, on voit que $c_j = c'$. Cela ramène le calcul de c_j à un calcul dans $\underline{\mathcal{H}}_{N'}$ relatif à la partition $\boldsymbol{\lambda}'$. Cette partition n'a que deux termes.

Oublions les notations N', $\boldsymbol{\lambda}'$ etc..., supposons simplement que $\boldsymbol{\lambda}$ n'a que deux termes, i.e. $r = 2$. On va alors calculer le terme c. On simplifie les notations en posant $(m, n) = \mathbf{n}$, $(\delta, \epsilon) = \boldsymbol{\epsilon}$. Pour fixer les idées, on suppose $m \geq n$. Alors $\boldsymbol{\mu}$ ne contient comme termes non nuls que des 1 et des 2, avec $mult_{\boldsymbol{\mu}}(2) = n$, $mult_{\boldsymbol{\mu}}(1) = m - n$. Introduisons la famille $\mathbf{n}' = (m, 1, ..., 1) \in \mathcal{N}(n+1)$, définissons la représentation (π', E') de G par :

$$\pi' = \xi_\delta St(m) \times \xi_\epsilon |.|^{\frac{n-1}{2}} \times ... \times \xi_\epsilon |.|^{\frac{1-n}{2}}.$$

Elle n'est pas du type considéré précédemment à cause des caractères valeurs absolues, mais elle conserve une partie des propriétés que l'on a décrites. En particulier E'^I s'identifie à $\underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}'}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on définit de façon évidente la représentation $\sigma(\pi')$. Pourvu que σ soit croissant sur $\{2, ..., n+1\}$, on définit un opérateur d'entrelacement entre π' et $\sigma(\pi')$. Il se traduit dans les espaces d'invariants par I par la multiplication à droite :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}'} & \rightarrow & \underline{\mathcal{H}} f_{\sigma(\mathbf{n}')} \\ h & \mapsto & hN(\sigma, \pi') \end{array}$$

où $N(\sigma, \pi')$ est un certain élément de $\underline{\mathcal{H}}$. Cela est vrai parce que les deux hypothèses "σ croissant sur $\{2, ..., n+1\}$" et $m \geq n$ entraînent que σ ne permute que des segments non liés au sens de Zelevinsky. Toujours parce que $m \geq n$, on vérifie que la représentation "triviale" de $\underline{\mathcal{H}}_{\boldsymbol{\mu}}$ intervient dans $\underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}'}$ avec multiplicité 1. On définit dans cet espace l'élément h'_1 analogue de h_1, qui n'est autre que $e_{\boldsymbol{\mu}} w_1 f_{\mathbf{n}'}$. Notons maintenant $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ la permutation telle que $\sigma(1) = n+1$, $\sigma(i) = i - 1$ pour $i = 2, ..., n+1$. Comme précédemment, il existe un nombre complexe c' non nul tel que :

$$h'_1 N(\sigma, \pi') = c' h'_1 T_{w(\sigma^{-1}, \sigma(\mathbf{n}'))}.$$

La représentation π est sous-module de π', ce qui se traduit pour les éléments invariants par I par l'inclusion $\underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}} \subseteq \underline{\mathcal{H}} f_{\mathbf{n}'}$. Les termes $N(\sigma_{max}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ et $T_{w(\sigma_{max}, \sigma_{max}(\mathbf{n}))}$ sont respectivement égaux à $N(\sigma, \pi')$ et $T_{w(\sigma^{-1}, \sigma(\mathbf{n}'))}$. En multipliant à droite l'égalité ci-dessus par $f_{\sigma_{max}(\mathbf{n})}$, on obtient l'égalité $c = c'$. Cela nous ramène à un problème concernant la représentation π'. Un procédé de réduction analogue à celui expliqué plus haut nous ramène alors à la situation suivante. Soit $k \in \{1-n, ..., n-1\}$ un entier de même parité que $n - 1$. Définissons la représentation

$$\pi'_k = \xi_\delta St(m) \times \xi_\epsilon |.|^{k/2}$$

de G_{m+1}. On définit pour cette représentation un nombre complexe c'_k analogue à c'. On a alors l'égalité :

$$(5) \qquad c = c' = \prod_k c'_k,$$

le produit portant sur les k ci-dessus.

Fixons donc k. On s'est ramené à une situation où $N = m+1$ et π est remplacée par la représentation π'_k ci-dessus. Notons v, w les éléments de $\mathfrak{S}_N$ définis par $v(1) = 1$, $v(j) = j+1$ pour $j = 2, ..., N-1$, $v(N) = 2$, $w(j) = j+1$ pour $j = 1, ..., N-1$, $w(N) = 1$. Notons aussi σ l'élément non trivial de $\mathfrak{S}_2$. Remarquons que $w(\sigma, \sigma(\mathbf{n})) = w^{-1}$ et $w_1 = v$. La définition de c'_k se traduit par l'égalité :

$$(6) \qquad e_{\boldsymbol{\mu}} T_v f_{\mathbf{n}} N(\sigma, \pi'_k) = c'_k e_{\boldsymbol{\mu}} T_v f_{\mathbf{n}} T_{w^{-1}}.$$

Calculons $N(\sigma, \pi'_k)$. Pour cela, on introduit une variable $z \in \mathbb{C}$, on considère la famille de caractères :

$$\boldsymbol{\chi}(z) = (\xi_\delta |.|^{\frac{m-1}{2}}, ..., \xi_\delta |.|^{\frac{1-m}{2}}, \xi_\epsilon |.|^{z+\frac{k}{2}}),$$

et l'élément $N(w, \boldsymbol{\chi}(z)) \in \underline{\mathcal{H}}$. En notant s_j les symétries élémentaires usuelles de $\mathfrak{S}_N$, on a l'égalité $w = s_1 s_2 ... s_m$, d'où :

$$N(w, \boldsymbol{\chi}(z)) = N(s_m, \boldsymbol{\chi}(z)) N(s_{m-1}, s_m(\boldsymbol{\chi}(z))) ... N(s_1, s_2 ... s_m(\boldsymbol{\chi}(z))).$$

Pour $j = 1, ..., m$, posons :

$$A_j(z) = -\frac{1 - \delta\epsilon q^{j+z+\frac{k-N}{2}}}{1 - \delta\epsilon q^{j+z+1+\frac{k-N}{2}}}, \; B_j(z) = \frac{(1-q)\delta\epsilon q^{j+z+\frac{k-N}{2}}}{1 - \delta\epsilon q^{j+z+1+\frac{k-N}{2}}}.$$

On a l'égalité :

$$N(s_j, s_{j+1} ... s_m(\boldsymbol{\chi}(z))) = A_j(z) T_j + B_j(z).$$

Pour tout sous-ensemble $J \subseteq \{1, ..., m\}$, notons T_J le produit des T_j pour $j \in J$, pris dans l'ordre décroissant, $A_J(z)$, resp. $B^J(z)$ les produit des $A_j(z)$, resp. $B_j(z)$, pour $j \in J$, resp. $j \notin J$. Alors :

$$N(w, \boldsymbol{\chi}(z)) = \sum_{J \subseteq \{1,...,m\}} A_J(z) B^J(z) T_J.$$

Posons $Q = \sum_{x \in \mathfrak{S}_m} q^{-l(x)}$. On a l'égalité $f_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} = Q f_{\mathbf{n}}$. Parce que $N(w, \boldsymbol{\chi}(z))$ est un entrelacement, on en déduit :

$$f_{\mathbf{n}} N(w, \boldsymbol{\chi}(z)) = Q^{-1} f_{\mathbf{n}} N(w, \boldsymbol{\chi}(z)) f_{w(\mathbf{n})}.$$

Soit $J \subsetneq \{1, ..., m\}$. Il existe $t \in \{1, ..., m\}$ et deux sous-ensembles $J' \subseteq \{1, ..., t-1\}$, $J'' \subseteq \{t+1, ..., m\}$, tels que $T_J = T_{J''} T_{J'} = T_{J'} T_{J''}$. Pour $j < m$, on a $s_j \in \mathfrak{S}_{\mathbf{n}}$. On en déduit $f_{\mathbf{n}} T_{J'} = (-1)^{|J'|} f_{\mathbf{n}}$. Pour $j > 1$, on a $s_j \in \mathfrak{S}_{w(\mathbf{n})}$. On en déduit $T_{J''} f_{w(\mathbf{n})} = (-1)^{|J''|} f_{w(\mathbf{n})}$. D'où l'égalité $f_{\mathbf{n}} T_J f_{w(\mathbf{n})} = (-1)^{|J|} f_{\mathbf{n}} f_{w(\mathbf{n})}$. On obtient alors :

$$f_{\mathbf{n}} N(w, \boldsymbol{\chi}(z)) = f_{\mathbf{n}}(A(z) T_{w^{-1}} + B(z)) f_{w(\mathbf{n})},$$

où :

$$A(z) = Q^{-1} A_{\{1,...,m\}}(z), \; B(z) = Q^{-1} \sum_{J \subsetneq \{1,...m\}} (-1)^{|J|} A_J(z) B^J(z).$$

On calcule immédiatement :

$$A(z) = (-1)^m Q^{-1} \frac{1 - \delta\epsilon q^{z+\frac{k+1-m}{2}}}{1 - \delta\epsilon q^{z+\frac{k+1+m}{2}}},$$

$$B(z) = (-1)^{m+1}Q^{-1}A_{\{1,\dots,m\}}(z) + Q^{-1}\Big(\sum_{J\subseteq\{1,\dots,m\}} (-1)^{|J|}A_J(z)B^J(z)\Big),$$
$$= (-1)^{m+1}Q^{-1}A_{\{1,\dots,m\}}(z) + Q^{-1}\prod_{j=1,\dots,m}(B_j(z) - A_j(z)) = (-1)^{m+1}A(z) + Q^{-1}.$$

Les termes $A(z)$ et $B(z)$ sont réguliers en $z = 0$ (parce que $k \geq 1 - n$ et $m \geq n$). Par définition, $N(\sigma, \pi'_k)$ est un élément de $\underline{\mathcal{H}}$ tel que $f_{\mathbf{n}}N(\sigma, \pi'_k)$ soit la valeur en $z = 0$ de $f_{\mathbf{n}}N(w, \boldsymbol{\chi}(z))$. On peut donc supposer que $N(\sigma, \pi'_k) = (A(0)T_{w^{-1}} + B(0))f_{w(\mathbf{n})}$. On voit alors que les coefficients de ce terme dans la base $(T_x)_{x\in\mathfrak{S}_N}$ de $\underline{\mathcal{H}}$ sont des fractions rationnelles en $q^{1/2}$ qui n'ont pas de pôles en $q^{1/2} = 1$. Il en est donc de même du terme c'_k, puis du terme c. Cela démontre la première assertion concernant ce terme. Comme on l'a expliqué, il nous suffit de calculer la valeur $c'_k(1)$ que prend c'_k quand on y remplace $q^{1/2}$ par 1. Quand on remplace ainsi $q^{1/2}$ par 1, $\underline{\mathcal{H}}$ devient l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_N]$. Afin de ne pas submerger le lecteur d'un déluge de notations, on travaille pour quelques temps dans cette algèbre, tout en conservant les notations déjà introduites. Notons a et b les valeurs de $A(0)$ et $B(0)$ en $q^{1/2} = 1$. Alors $N(\sigma, \pi'_k)$ devient $(aT_{w^{-1}} + b)f_{w(\mathbf{n})}$ ou encore $af_{\mathbf{n}}T_{w^{-1}} + bf_{w(\mathbf{n})}$. Maintenant $f_{\mathbf{n}}f_{\mathbf{n}} = m!f_{\mathbf{n}}$ et le membre de gauche de (6) devient :

$$am!e_{\boldsymbol{\mu}}T_vf_{\mathbf{n}}T_{w^{-1}} + be_{\boldsymbol{\mu}}T_vf_{\mathbf{n}}f_{w(\mathbf{n})}.$$

Le premier terme est directement comparable au membre de droite de (6). Etudions le second. On a l'égalité :

$$T_vf_{\mathbf{n}} = (-1)^{m-1}\sum_{x\in\mathfrak{S}_N, x(N)=2}(-1)^{l(x)}T_x.$$

D'où :

$$e_{\boldsymbol{\mu}}T_vf_{\mathbf{n}}f_{w(\mathbf{n})} = (-1)^{m-1}\sum_{x\in\mathfrak{S}_N, x(N)=2}(-1)^{l(x)}e_{\boldsymbol{\mu}}T_xf_{w(\mathbf{n})}.$$

Mais $e_{\boldsymbol{\mu}}T_xf_{w(\mathbf{n})} = 0$ si $x^{-1}(1)$ et $x^{-1}(2)$ sont tous deux ≥ 2. On peut donc ne garder dans la somme que les x pour lesquels $x(1) = 1$. Un tel x appartient à $\mathfrak{S}_{w(\mathbf{n})}$ et $T_xf_{w(\mathbf{n})} = (-1)^{l(x)}f_{w(\mathbf{n})}$. D'où l'égalité :

$$e_{\boldsymbol{\mu}}T_vf_{\mathbf{n}}f_{w(\mathbf{n})} = (-1)^{m-1}(m-1)!e_{\boldsymbol{\mu}}f_{w(\mathbf{n})}.$$

D'autre part,

$$e_{\boldsymbol{\mu}}T_vf_{\mathbf{n}}T_{w^{-1}} = e_{\boldsymbol{\mu}}T_{vw^{-1}}f_{w(\mathbf{n})}.$$

Mais $vw^{-1} = s_1$ et $e_{\boldsymbol{\mu}}T_{s_1} = e_{\boldsymbol{\mu}}$. D'où l'égalité $e_{\boldsymbol{\mu}}T_vf_{\mathbf{n}}T_{w^{-1}} = e_{\boldsymbol{\mu}}f_{w(\mathbf{n})}$. Finalement, pour $q^{1/2} = 1$, le membre de gauche de (6) devient égal à :

$$(am! + (-1)^{m-1}b(m-1)!)e_{\boldsymbol{\mu}}T_vf_{\mathbf{n}}T_{w^{-1}}.$$

D'où l'égalité :

$$c'_k(1) = am! + (-1)^{m-1}b(m-1)!$$

Distinguons maintenant deux cas. Si $\delta\epsilon = -$, on calcule $a = \frac{(-1)^m}{m!}$, $b = 0$, d'où $c'_k(1) = (-1)^m$. Si $\delta\epsilon = +$, on calcule :

$$a = \frac{(-1)^m}{m!}\frac{k+1-m}{k+1+m},\ b = \frac{2}{(m-1)!}\frac{1}{k+1+m},$$

d'où $c'_k(1) = (-1)^{m+1}\frac{m+1-k}{m+1+k}$.

Il faut maintenant remonter les différentes réductions que l'on a effectuées. On commence par reporter les valeurs ci-dessus dans (5) pour calculer la valeur $c(1)$ que prend c en $q^{1/2} = 1$.

On se rappelle que l'on a supposé $m \geq n$. Un calcul similaire vaut dans le cas $m < n$ et la formule générale que l'on obtient est :

$$c(1) = \begin{cases} (-1)^{mn}, & si\ \delta \neq \epsilon, \\ (-1)^{mn+inf(m,n)}, & si\ \delta = \epsilon. \end{cases}$$

Revenons aux hypothèses initiales et utilisons la formule (3). Les termes $c_i(1)$ intervenant dans cette formule sont calculés par la formule ci-dessus. Les familles (m, n, δ, ϵ) qui interviennent sont d'une part les $(\lambda_j^\epsilon, \lambda_k^\epsilon, \epsilon, \epsilon)$ pour $\epsilon = \pm$ et $j < k$, d'autre part les $(\lambda_j^+, \lambda_k^-, +, -)$ pour tous j, k. D'autre part, on calcule :

$$l_1 = \sum_i \frac{n_i(n_i - 1)}{2} = \sum_{i,\epsilon} \frac{\lambda_i^\epsilon(\lambda_i^\epsilon - 1)}{2}.$$

Pour toute partition $\boldsymbol{\nu}$, posons :

$$z(\boldsymbol{\nu}) = \sum_{j \geq 1} j\nu_j.$$

Remarque. Pour tout $i \geq 1$, posons $mult_{\boldsymbol{\nu}}(\geq i) = \sum_{\ell \geq i} mult_{\boldsymbol{\nu}}(\ell)$. On vérifie l'égalité :

$$z(\boldsymbol{\nu}) = \sum_{i \geq 1} i\, mult_{\boldsymbol{\nu}}(i)(mult_{\boldsymbol{\nu}}(\geq i) + \frac{1 - mult_{\boldsymbol{\nu}}(i)}{2}).$$

A partir de la formule (3), un calcul simple conduit à la proposition suivante.

Proposition. *Soit* $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$. *Alors on a l'égalité :*

$$\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) = (-1)^{\frac{N^2+N}{2} + z(\boldsymbol{\lambda}^+) + z(\boldsymbol{\lambda}^-)}.$$

IX. Pseudo-coefficients et correspondance de Springer

IX.1. L'espace $\mathcal{C}_{glob}$

Soient $n, N' \in \mathbb{N}$ tels que $2n + N' = N$. On définit une application linéaire :

$$res(n)_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{N'}$$

de la façon suivante. Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 + N_2 = N$. On va décrire la restriction de $res(n)_1$ au facteur $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})$ de $\mathcal{C}$. Si $N_1 < 2n$, cette restriction est nulle. Supposons $N_1 \geq 2n$. On a construit en VII.1 une application de restriction qui envoie $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1})$ dans $\mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1-2n})$. Par tensorisation avec l'identité de $\mathcal{C}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})$, on obtient une application de $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})$ dans $\mathcal{C}(\underline{G}_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1-2n}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2})$. Ce dernier espace se plonge dans $\mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{N'}$. La composée de ces deux applications est l'application cherchée.

En échangeant les rôles des indices 1 et 2, on définit de même une application linéaire $res(n)_2$. On pose $res(n) = res(n)_1 - res(n)_2$. On note $\mathcal{C}_{glob}$ l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{C}$ tels que $res(n)(\varphi) = 0$ pour tout $n \geq 1$ tel que $2n \leq N$. Bien sûr, $\mathcal{C}_{cusp} \subseteq \mathcal{C}_{glob}$.

Lemme. *Soit* $(\pi^+, E) \in Rep_f(G^+/Z_2)$ *une représentation telle que* E *soit engendré comme* G^+*-module par* E^I. *Alors* $\tilde{f}^{\pi^+}$ *appartient à* $\mathcal{C}_{glob}$.

Preuve. Soient $n, N_1', N_2' \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 1$ et $2n + N_1' + N_2' = N$. Reprenons les notations de VII.5. Notons A_1 la réunion des translatés par $N\mathbb{Z}$ de l'ensemble $\{-n, 0, N_2', N_2' + n\}$. Il appartient à $\tilde{\mathcal{A}}$ et N_2' appartient à $C(A_1)$. On a défini le groupe $K(\phi(A_1))$ et l'ensemble $c(A_1, N_2')$. Posons :

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{G}}_{N_1'} \times \underline{\mathbf{G}}_{N_2'} \times \underline{\mathbf{G}}_n \times \underline{\mathbf{G}}_n.$$

On a :

$$K(\phi(A_1))/K^u(\phi(A_1)) \simeq \underline{H}.$$

On peut définir un groupe $\underline{\mathbf{H}}_1^+$ sur $\mathbb{F}_q$, de composante neutre $\underline{\mathbf{H}}$, et une composante $\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_1$ de $\underline{\mathbf{H}}_1^+$ de sorte que :

$$c(A_1, N_2')/K^u(\phi(A_1)) \simeq \underline{\tilde{H}}_1.$$

On montre comme en VII.1 que :

$$(1) \qquad \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{H}}_1) \simeq \mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1'}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2'}).$$

Définissons une fonction φ_1 sur $c(A_1, N_2')$ par :

$$\varphi_1(g) = trace(\pi^+(g)|E^{K^u(\phi(A_1))}).$$

Elle se quotiente en une fonction sur $\underline{\tilde{H}}_1$, qui appartient à $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{H}}_1)$ et à laquelle on l'identifie. Mais $c(A_1, N_2')$ est inclus dans $K_{N_1'+2n,N_2'}$ et apparaît comme un "sous-ensemble parabolique" de cet ensemble. Il résulte des définitions que la composante de $res(n)_1(\tilde{f}^{\pi^+})$ dans l'espace de droite de (1) n'est autre que l'image de φ_1 par l'isomorphisme (1).

Notons A_2 la réunion des translatés par $N\mathbb{Z}$ de l'ensemble $\{0, n, N_2'+n, N_2'+2n\}$. C'est un élément de $\tilde{\mathcal{A}}$ et $N_2'+2n$ appartient à $C(A_2)$. En copiant les constructions ci-dessus, on définit un groupe $\underline{\mathbf{H}}_2^+$, une composante $\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_2$ de ce groupe, avec un isomorphisme :

$$(2) \qquad \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{H}}_2) \simeq \mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_1'}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N_2'}),$$

et un élément $\varphi_2 \in \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{H}}_2)$. L'ensemble $c(A_2, N_2'+2n)$ est un "sous-ensemble parabolique" de $K_{N_1',N_2'+2n}$ et la composante de $res(n)_2(\tilde{f}^{\pi^+})$ dans l'espace de droite de (2) n'est autre que l'image de φ_2 par l'isomorphisme (2).

Mais les couples $(K(\phi(A_1)), c(A_1, N_2'))$ et $(K(\phi(A_2)), c(A_2, N_2'+2n))$ sont conjugués par un élément de G : en effet, $Ad(\zeta^n)$ envoie le premier sur le second. Il en résulte facilement que l'on peut identifier $\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_1$ à $\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_2$ de sorte que φ_1 s'identifie à φ_2 et que les applications (1) et (2) deviennent identiques. Cela prouve que $res(n)_1(\tilde{f}^{\pi^+}) = res(n)_2(\tilde{f}^{\pi^+})$, d'où l'assertion de l'énoncé. $\square$

IX.2. Base de $\mathcal{C}_{glob}$

Pour tout ensemble E, on note $\mathbb{C}[E]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de base E. On définit sur $\mathcal{P}_2(N)$ une relation d'équivalence notée $\sim$. Pour $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-), (\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$, on a $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \sim (\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-)$ si et seulement si $\boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^- = \boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^-$ et, pour tout entier $i \geq 1$ et tout $\epsilon = \pm$, on a la congruence $mul_{\boldsymbol{\lambda}^\epsilon}(i) \equiv mult_{\boldsymbol{\mu}^\epsilon}(i) \ mod \ 2\mathbb{Z}$. Notons $\mathcal{P}_2(N)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Proposition. *Considérons l'application qui, à $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$, associe $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-} \in \mathcal{C}_{glob}$. Elle est constante sur les classes d'équivalence. L'application linéaire de $\mathbb{C}[\mathcal{P}_2(N)/\sim]$ dans $\mathcal{C}_{glob}$ qui s'en déduit est un isomorphisme.*

Preuve. L'équivalence est engendrée par la relation élémentaire suivante. Soient $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$ et k un entier ≥ 1 tel que $mult_{\boldsymbol{\lambda}^+}(k) \geq 2$. Définissons $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-)$ par :

$mult_{\boldsymbol{\mu}^\epsilon}(j) = mult_{\boldsymbol{\lambda}^\epsilon}(j)$ pour $\epsilon = \pm$ et tout $j \geq 1$, $j \neq k$;

$$mult_{\boldsymbol{\mu}^\epsilon}(k) = mult_{\boldsymbol{\lambda}^\epsilon}(k) + \begin{cases} -2, & pour \ \epsilon = + \\ +2, & pour \ \epsilon = -. \end{cases}$$

Alors $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \sim (\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-)$. Pour prouver la première assertion, il suffit de prouver que $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-} = \tilde{f}^{\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-}$ sous les hypothèses ci-dessus. Pour tout nombre complexe s, introduisons la représentation de G :

$$\pi(s) = |.|^s St(k) \times \pi(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \times |.|^{-s} St(k).$$

Elle est $\boldsymbol{\theta}$-stable. Limitons-nous aux s imaginaires purs. Alors $\pi(s)$ est irréductible et on peut la prolonger en une représentation $\pi^+(s)$ de G^+ que l'on normalise comme en VII.3. Il est clair par construction que $\tilde{f}^{\pi^+(s)}$ varie continûment en s. Mais les composantes de ce terme sont des caractères de représentations de degré borné de groupes finis. Cela entraîne que $s \mapsto \tilde{f}^{\pi^+(s)}$ est constante. Or $\pi^+(0) = \pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ tandis que $\pi^+(\frac{\pi i}{log(q)}) = \pi^+(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-)$ (dans la première parenthèse, $\pi = 3,14...$ et $i = \sqrt{-1}$). D'où l'égalité cherchée $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-} = \tilde{f}^{\boldsymbol{\mu}^+,\boldsymbol{\mu}^-}$.

On veut prouver que l'application linéaire de $\mathbb{C}[\mathcal{P}_2(N)]$ dans $\mathcal{C}_{glob}$ est injective. On peut remplacer $\mathcal{C}_{glob}$ par $\mathcal{C}$. Pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(N)$, notons $\mathcal{P}_2(N, \boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$ tels que $\boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^- = \boldsymbol{\lambda}$. Cet ensemble est stable par l'équivalence, on note $\mathcal{P}_2(N, \boldsymbol{\lambda})/\sim$ l'ensemble des classes. Introduisons sur $\mathbb{C}[\mathcal{P}_2(N)/\sim]$ une filtration indexée par $\mathcal{P}(N)$ de sorte que, pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_2(N)$, le terme $\mathbb{C}[\mathcal{P}_2(N)/\sim]_{\geq \boldsymbol{\lambda}}$ de cette filtration ait pour base $\bigcup_{\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{\lambda}} \mathcal{P}_2(N, \boldsymbol{\mu})/\sim$. Le lemme VIII.2 nous dit que cette filtration est compatible, à transposition près, avec celle introduite en VIII.1 sur $\mathcal{C}$. Précisément, notre application linéaire envoie $\mathbb{C}[\mathcal{P}_2(N)/\sim]_{\geq \boldsymbol{\lambda}}$ dans $\mathcal{C}_{\leq {}^t\boldsymbol{\lambda}}$. Il s'en déduit une application linéaire entre les gradués. Pour les termes indexés par $\boldsymbol{\lambda}$, c'est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathcal{P}_2(N, \boldsymbol{\lambda})/\sim] & \to & \mathcal{C}_{\leq {}^t\boldsymbol{\lambda}}/\mathcal{C}_{< {}^t\boldsymbol{\lambda}} \\ (\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) & \mapsto & proj_{{}^t\boldsymbol{\lambda}}(\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}). \end{array}$$

Il suffit de prouver que cette application est injective. Avec les notations de VIII.2, considérons la matrice :

$$(\alpha(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2))$$

indexée par les couples $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N, \boldsymbol{\lambda})/\sim$ et les couples $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathcal{P}_2(N, {}^t\boldsymbol{\lambda})$. Il suffit de prouver que cette matrice est de rang $|\mathcal{P}_2(N, \boldsymbol{\lambda})|$. D'après le lemme VIII.4, on peut aussi bien considérer la matrice :

$$(1) \qquad ((-1)^{a(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)})$$

indexée par les mêmes couples. Posons $Jord(\boldsymbol{\lambda}) = \{i \geq 1; mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i) \geq 1\}$, notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des sous-ensembles de $Jord(\boldsymbol{\lambda})$. Pour $X \in \mathcal{X}$, définissons des partitions $\boldsymbol{\lambda}^+(X)$, $\boldsymbol{\lambda}^-(X)$ par les relations suivantes, pour $\epsilon = \pm$ et tout $i \geq 1$:

$$mult_{\boldsymbol{\lambda}^\epsilon(X)}(i) = \begin{cases} mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i), & si\ \epsilon = +\ et\ i \notin X, \\ 0, & si\ \epsilon = -\ et\ i \notin X, \\ mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i) - 1, & si\ \epsilon = +\ et\ i \in X, \\ 1 & si\ \epsilon = -\ et\ i \in X. \end{cases}$$

On vérifie que la famille $(\boldsymbol{\lambda}^+(X), \boldsymbol{\lambda}^-(X))_{X \in \mathcal{X}}$ forme un système de représentants des classes d'équivalence dans $\mathcal{P}_2(N, \boldsymbol{\lambda})$. Pour $Y \in \mathcal{X}$, définissons des suites d'entiers $\boldsymbol{\nu}_1(Y)$ et $\boldsymbol{\nu}_2(Y)$ par les égalités suivantes, pour tout $i \geq 1$:

$$\nu_2(Y)_i = |\{k \in Y; k \leq \lambda_i\}|, \ \nu_1(Y)_i = \lambda_i - \nu_i.$$

On vérifie que ce sont des partitions. On note $\boldsymbol{\mu}_j(Y)$ la transposée de $\boldsymbol{\nu}_j(Y)$. On a évidemment $(\boldsymbol{\mu}_1(Y), \boldsymbol{\mu}_2(Y)) \in \mathcal{P}_2(N, {}^t\boldsymbol{\lambda})$. Pour $X, Y \in \mathcal{X}$, on a associé en VIII.3 au quadruplet $\boldsymbol{\lambda}^+(X), \boldsymbol{\lambda}^-(X), \boldsymbol{\mu}_1(Y), \boldsymbol{\mu}_2(Y)$ un quadruplet de partitions $(\boldsymbol{\nu}_j^\epsilon)_{j=1,2,\epsilon=\pm}$. On calcule la partition $\boldsymbol{\nu}_2^-$ ainsi. Notons $x_1 > ... > x_t$ les éléments de X. Alors, pour tout $i \geq 1$, $\nu_{2,i}^- = |\{k \in Y; k \leq x_i\}|$, avec la convention $x_i = 0$ si $i > t$. Alors :

$$a(\boldsymbol{\lambda}^+(X), \boldsymbol{\lambda}^-(X); \boldsymbol{\mu}_1(Y), \boldsymbol{\mu}_2(Y)) = S(\boldsymbol{\nu}_2^-) = |\{(x, y) \in X \times Y; x \geq y\}|,$$

et la matrice carrée :

$$\left((-1)^{|\{(x,y) \in X \times Y; x \geq y\}|}\right)_{X, Y \in \mathcal{X}}$$

est une matrice extraite de (1). Il est élémentaire de prouver que cette dernière matrice est inversible, de rang $|\mathcal{X}| = |\mathcal{P}_2(N, \boldsymbol{\lambda})/\sim|$. Cela prouve l'injectivité.

Pour prouver la surjectivité, il suffit de comparer les dimensions. Un ensemble de représentants de $\mathcal{P}_2(N)/\sim$ est formé des couples $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$ tels que $mult_{\boldsymbol{\lambda}^-}$ ne prend pour valeurs que 0 ou 1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(n)$ est le coefficient de X^n dans la série formelle $\prod_{i\geq 1}(1-X^i)^{-1}$. De même, le nombre de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(n)$ tels que $mult_{\boldsymbol{\lambda}}$ ne prend pour valeurs que 0 ou 1 est le coefficient de X^n dans la série formelle $\prod_{i\geq 1}(1+X^i)$. Donc le nombre d'éléments de $\mathcal{P}_2(N)/\sim$ est le coefficient de X^N dans la série :

$$(2) \qquad \prod_{i\geq 1}(1+X^i)(1-X^i)^{-1}.$$

Généralisons la définition de $\mathcal{P}_2(N)$ en notant, pour tout entier $k \geq 2$, $\mathcal{P}_k(N)$ l'ensemble des k-uplets de partitions $(\boldsymbol{\lambda}_1, ..., \boldsymbol{\lambda}_k)$ tels que $S(\boldsymbol{\lambda}_1)+...+S(\boldsymbol{\lambda}_k) = N$. On montrera au paragraphe IX.6 que :

$$(3) \qquad dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C}_{glob} = \sum_{m_1,m_2,n} |\mathcal{P}_3(n)|,$$

où on somme sur les $m_1, m_2, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\frac{m_1(m_1+1)}{2} + \frac{m_2(m_2+1)}{2} + 2n = N.$$

Le nombre d'éléments de $\mathcal{P}_3(n)$ est le coefficient de X^{2n} dans la série formelle $\prod_{i\geq 1}(1-X^{2i})^{-3}$. Posons :

$$Q(X) = \sum_{m\geq 0} X^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Alors $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C}_{glob}$ est le coefficient de X^N dans la série formelle :

$$(4) \qquad Q(X)^2 \prod_{i\geq 1}(1-X^{2i})^{-3}.$$

D'après [HW] 19.9.2, on a l'égalité :

$$Q(X) = \prod_{i\geq 1}(1-X^i)(1+X^i)^2.$$

Alors les deux séries (2) et (4) sont égales. On en déduit l'égalité cherchée $|\mathcal{P}_2(N)/\sim| = dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C}_{glob}$, ce qui achève la démonstration. □

IX.3. Base de $\mathcal{C}_{cusp}$

Définissons l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathcal{P}_{2,disc}(N)] & \rightarrow & \mathcal{C}_{cusp} \\ (\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) & \mapsto & proj_{cusp}(\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}). \end{array}$$

Corollaire. *Cette application est un isomorphisme.*

Preuve. On peut étendre la définition en une application linéaire de $\mathbb{C}[\mathcal{P}_2(N)]$ dans $\mathcal{C}_{cusp}$. D'après la proposition précédente, cette application est surjective. D'après la proposition VII.4(ii), cette application annule les éléments de $\mathcal{P}_2(N) \setminus \mathcal{P}_{2,disc}(N)$. Sa restriction à $\mathbb{C}[\mathcal{P}_{2,disc}(N)]$ reste donc surjective. Il reste à comparer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée. Comme dans le paragraphe précédent, le nombre d'éléments de $\mathcal{P}_{2,disc}(N)$ est le coefficient de X^N dans la série formelle :

$$(1) \qquad \prod_{i\geq 1}(1+X^i)^2.$$

Posons :

$$R(X) = \sum_{k\geq 0} dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{G}}_k))X^k.$$

Par définition de $\mathcal{C}_{cusp}$, sa dimension est le coefficient de X^N dans $R(X)^2$. On montrera au paragraphe IX.5 que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$(2) \qquad dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{unip,cusp}(\tilde{\underline{G}}_k)) = \sum_{m,n} |\mathcal{P}(n)|,$$

où on somme sur les $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{m(m+1)}{2} + 2n = k$. Il en résulte que :

$$R(X) = Q(X) \prod_{i \geq 1} (1 - X^{2i})^{-1},$$

où $Q(X)$ est comme dans le paragraphe précédent. A l'aide de [HW] 19.9.2, on en déduit que $R(X) = \prod_{i \geq 1}(1 + X^i)$, puis que $dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{cusp})$ est le coefficient de X^N dans la série (1). Cela achève la preuve. $\square$

IX.4. Quelques rappels combinatoires

On considérera différents groupes de Weyl. Pour un tel groupe W, on note $\mathcal{C}(W)$ l'espace des fonctions sur W, à valeurs complexes, invariantes par conjugaison. On le munit du produit hermitien habituel. A toute représentation (de dimension finie) ρ de W est associé son caractère, qui appartient à $\mathcal{C}(W)$. Pour simplifier les notations, on notera encore ρ ce caractère.

On note W_N le groupe de Weyl d'un système de racines de type B_N ou C_N. On l'identifie au groupe des permutations w de l'ensemble $\{\pm 1, ... \pm N\}$ telles que $w(-i) = -w(i)$ pour tout i. Les représentations irréductibles de W_N sont paramétrées par $\mathcal{P}_2(N)$, cf. [Ca] 11.4.2. Pour $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(N)$, on note $\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ la représentation irréductible paramétrée par ce couple. En particulier, $\rho_{(N),\emptyset}$ est la représentation triviale. On note sgn l'homomorphisme signature usuel de W_N dans $\{\pm 1\}$. Autrement dit, $sgn = \rho_{\emptyset,(1,...,1)}$. On note sgn_{CD} l'homomorphisme de W_N dans $\{\pm 1\}$ dont le noyau est le groupe d'un système de racines de type D_N. Autrement dit, $sgn_{CD} = \rho_{\emptyset,(N)}$. On note W_N^D le noyau de sgn_{CD}.

Les classes de conjugaison dans W_N sont aussi paramétrées par $\mathcal{P}_2(N)$. Rappelons ce paramétrage. Soit $w \in W_N$. Décomposons l'ensemble $\{\pm 1, ..., \pm N\}$ en orbites sous l'action du sous-groupe engendré par w. Il y a deux types d'orbites : les orbites J telles que $J \cap (-J) = \emptyset$; les orbites J telle que $J = -J$. On note $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ les partitions telles que, pour tout $i \geq 1$, $2mult_{\boldsymbol{\alpha}}(i)$ soit le nombre d'orbites J du premier type, telles que $|J| = i$, et $mult_{\boldsymbol{\beta}}(i)$ soit le nombre d'orbites J du deuxième type, telles que $|J| = 2i$. L'application qui à w associe $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ se quotiente en le paramétrage annoncé des classes de conjugaison. On dit qu'un élément $w \in W_N$ est elliptique si sa classe est paramétrée par un couple de la forme $(\emptyset, \boldsymbol{\beta})$. On note $W_{N,ell}$ l'ensemble des éléments elliptiques de W_N, $\mathcal{C}(W_{N,ell})$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{C}(W_N)$ à support dans $W_{N,ell}$ et $proj_{ell}$ la projection orthogonale de $\mathcal{C}(W_N)$ sur $\mathcal{C}(W_{N,ell})$.

Notons $\mathcal{T}(N)$ l'ensemble des triplets (m, n, ρ) où $m, n \in \mathbb{N}$, $\frac{m(m+1)}{2} + 2n = N$ et ρ est une représentation irréductible de W_n. Soit $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(N)$. On va lui associer un triplet $(m(\boldsymbol{\mu}), n(\boldsymbol{\mu}), \rho(\boldsymbol{\mu})) \in \mathcal{T}(N)$. Soit t un entier assez grand, tel que $t \equiv N + 1 \; mod \; 2\mathbb{Z}$. Posons :

$$E = \{\mu_i + t - i; i = 1, ..., t\},$$

$$E^+ = \{\frac{x}{2}; x \in E, \, x \; pair\}, \; E^- = \{\frac{x-1}{2}; x \in E, \, x \; impair\},$$

notons t^+, resp. t^-, le nombre d'éléments de E^+, resp. E^-. On pose :

$$m(\boldsymbol{\mu}) = sup(t^- - t^+, t^+ - t^- - 1), \; n(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}(N - \frac{m(\boldsymbol{\mu})(m(\boldsymbol{\mu}) + 1)}{2}).$$

On vérifie que $n(\boldsymbol{\mu})$ est un entier ≥ 0. Notons $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ les uniques partitions telles que :

$$E^+ = \{\alpha_i + t^+ - i; i = 1, ..., t^+\}, \; \alpha_i = 0 \; pour \; i > t^+,$$

$$E^- = \{\beta_i + t^- - i; i = 1, ..., t^-\},\ \beta_i = 0 \ pour\ i > t^-.$$

On vérifie que $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(n(\boldsymbol{\mu}))$. On pose $\rho(\boldsymbol{\mu}) = \rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$.

L'application $\boldsymbol{\mu} \mapsto (m(\boldsymbol{\mu}), n(\boldsymbol{\mu}), \rho(\boldsymbol{\mu}))$ est une bijection de $\mathcal{P}(N)$ sur $\mathcal{T}(N)$. Les remarques suivantes nous seront utiles :

(1) pour tout $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(N)$, on a l'égalité $(m({}^t\boldsymbol{\mu}), n({}^t\boldsymbol{\mu}), \rho({}^t\boldsymbol{\mu})) = (m(\boldsymbol{\mu}), n(\boldsymbol{\mu}), \rho(\boldsymbol{\mu}) \otimes sgn)$. C'est immédiat ;

(2) dans la construction ci-dessus, on a la congruence $t \equiv [\frac{m(\boldsymbol{\mu})-1}{2}]\ mod\ 2\mathbb{Z}$ et les égalités :

$$t^+ = \frac{1}{2}\left(t + (-1)^{[\frac{m(\boldsymbol{\mu})}{2}]}(m(\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\right),$$

$$t^- = \frac{1}{2}\left(t - (-1)^{[\frac{m(\boldsymbol{\mu})}{2}]}(m(\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\right).$$

(selon l'usage $[x]$ est la partie entière de x). En effet, on a déjà dit que $n(\boldsymbol{\mu})$ était entier, donc $N \equiv \frac{m(\boldsymbol{\mu})(m(\boldsymbol{\mu})+1)}{2} \equiv [\frac{m(\boldsymbol{\mu})+1}{2}]\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Puisque $t \equiv N + 1\ mod\ 2\mathbb{Z}$, cela entraîne la première relation. Puisque $m(\boldsymbol{\mu})$ est égal soit à $t^- - t^+$, soit à $t^+ - t^- - 1$ et que $t^- - t^+ \equiv t \equiv [\frac{m(\boldsymbol{\mu})-1}{2}]\ mod\ 2\mathbb{Z}$, on a :

$$m(\boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} t^- - t^+, & si\ m(\boldsymbol{\mu}) \equiv [\frac{m(\boldsymbol{\mu})-1}{2}]\ mod\ 2\mathbb{Z} \\ t^+ - t^- - 1, & si\ m(\boldsymbol{\mu}) \not\equiv [\frac{m(\boldsymbol{\mu})-1}{2}]\ mod\ 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

La relation $m(\boldsymbol{\mu}) \equiv [\frac{m(\boldsymbol{\mu})-1}{2}]\ mod\ 2\mathbb{Z}$ équivaut à $[\frac{m(\boldsymbol{\mu})}{2}] \equiv 1\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Les égalités ci-dessus sont alors équivalentes à :

$$t^+ - t^- - \frac{1}{2} = (-1)^{[\frac{m(\boldsymbol{\mu})}{2}]}(m(\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2}),$$

dont on déduit les égalités de (2). $\square$

On a défini en VIII.3 la somme $S_k(\boldsymbol{\mu})$ pour $k \in \mathbb{N}$. Dans la preuve ci-dessous, on étend la définition de la façon suivante : pour tout ensemble fini X de nombres réels et tout $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k(X)$ la somme des k plus grands termes de X.

Lemme. *Soit $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(N)$, notons $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}') \in \mathcal{P}_2(n(\boldsymbol{\mu}))$ le couple de partitions paramétrant la représentation $\rho(\boldsymbol{\mu}) \otimes sgn_{CD}^{[\frac{m(\boldsymbol{\mu})}{2}]}$ de $W_{n(\boldsymbol{\mu})}$. Pour tout entiers $k, \ell \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité :*

$$S_{k+\ell}(\boldsymbol{\mu}) \geq 2S_k(\boldsymbol{\alpha}') + 2S_\ell(\boldsymbol{\beta}') - \frac{(k-\ell)^2}{2} + (k-\ell)(m(\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2}).$$

Preuve. Avec les notations ci-dessus, on a l'égalité :

$$S_{k+\ell}(\boldsymbol{\mu}) = S_{k+\ell}(E) - S_{k+\ell}(\{t-1, ..., 0\}).$$

La somme des $k+\ell$ plus grands termes de E est au moins aussi grande que la somme des k plus grands termes pairs de E plus celle des ℓ plus grands termes impairs. D'où :

$$S_{k+\ell}(E) \geq 2S_k(E^+) + \ell + 2S_\ell(E^-)$$

$$\geq 2S_k(\boldsymbol{\alpha}) + 2S_k(\{t^+ - 1, ..., 0\}) + \ell + 2S_\ell(\boldsymbol{\beta}) + 2S_\ell(\{t^- - 1, ..., 0\}).$$

On obtient :

$$S_{k+\ell}(\boldsymbol{\mu}) \geq 2S_k(\boldsymbol{\alpha}) + 2S_\ell(\boldsymbol{\beta}) - \frac{(k-\ell)^2}{2} + (k-\ell)(t^+ - t^- - \frac{1}{2}).$$

Comme on l'a vu ci-dessus, $t^+ - t^- - \frac{1}{2} = (-1)^{[\frac{m(\boldsymbol{\mu})}{2}]}(m(\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2})$. Si $[\frac{m(\boldsymbol{\mu})}{2}]$ est pair, on a $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}') = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ et l'inégalité précédente est celle de l'énoncé. Si $[\frac{m(\boldsymbol{\mu})}{2}]$ est impair, on a

$(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$ et l'inégalité de l'énoncé se déduit de la précédente en échangeant les rôles de k et ℓ. $\square$

On rappelle que, pour toute partition $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}(N)$, on a défini en VIII.4 l'entier $z(\boldsymbol{\mu})$. On pose :

$$\gamma(\boldsymbol{\mu})=(-1)^{z({}^t\boldsymbol{\mu})+n(\boldsymbol{\mu})+\frac{m(\boldsymbol{\mu})(m(\boldsymbol{\mu})+1}{2}}.$$

IX.5. Fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères sur les groupes finis

Notons $\mathcal{M}_{1,1}(N)$ l'ensemble des couples (m,n) d'entiers ≥ 0 tels que $\frac{m(m+1)}{2}+2n=N$. Posons :

$$\underline{\mathcal{K}}=\oplus_{(m,n)\in\mathcal{M}_{1,1}(N)}\mathcal{C}(W_n).$$

On munit cet espace du produit hermitien défini positif somme directe des produits usuels sur chacun des facteurs.

Soient $(m,n)\in\mathcal{M}_{1,1}(N)$ et ρ une représentation irréductible de W_n. Notons $\boldsymbol{\mu}$ l'élément de $\mathcal{P}(N)$ dont l'image dans $\mathcal{T}(N)$ est (m,n,ρ). Posons :

$$\underline{k}(\rho)=\gamma(\boldsymbol{\mu})\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}).$$

On étend cette définition par linéarité, obtenant ainsi un homomorphisme :

$$\underline{k}:\underline{\mathcal{K}}\to\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}).$$

C'est un isomorphisme isométrique.

Remarque. En fait $\underline{k}(\rho)$ se définit plus naturellement comme la fonction caractéristique d'un faisceau-caractère sur $\underline{\tilde{\mathbf{G}}}$. La base de $\underline{\mathcal{K}}$ formée des représentations irréductibles de chaque W_n intervenant paramètre naturellement ces faisceaux-caractères. De ce point de vue, l'égalité que l'on a prise ci-dessus comme définition est un théorème ([W2] théorème 17).

Soient $r,n\in\mathbb{N}$ tels que $r\leq n$. Le groupe $\mathfrak{S}_r\times W_{n-r}$ se plonge naturellement dans W_n : il s'identifie au groupe des permutations w de $\{\pm1,...,\pm n\}$ qui vérifient $w(-i)=-w(i)$ pour tout i et conservent l'ensemble $\{1,...,r\}$. Il y a donc une application de restriction :

$$\mathcal{C}(W_n)\to\mathcal{C}(\mathfrak{S}_r)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(W_{n-r}).$$

Soit maintenant r un entier ≥ 0 et tel que $2r\leq N$. On définit une application linéaire :

$$\underline{res}(r):\underline{\mathcal{K}}\to\mathcal{C}(\mathfrak{S}_r)\otimes\underline{\mathcal{K}}_{N-2r}.$$

Elle est nulle sur les composantes $\mathcal{C}(W_n)$ de $\underline{\mathcal{K}}$ telles que $n<r$. Si $n\geq r$, elle envoie $\mathcal{C}(W_n)$ sur la composante $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_r)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(W_{n-r})$ de l'espace d'arrivée et coïncide sur ce facteur avec l'application de restriction précédente. Définissons une application linéaire :

$$\underline{h}_r:\mathcal{C}(\mathfrak{S}_r)\to\mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_r).$$

Pour tout $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}(r)$, elle envoie la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_r$ paramétrée usuellement par $\boldsymbol{\mu}$ sur le caractère $trace\,\underline{\pi}(\boldsymbol{\mu})$. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$(1)\qquad\begin{array}{ccc}\underline{\mathcal{K}} & \stackrel{\underline{k}}{\to} & \mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}})\\ \downarrow\underline{res}(r) & & \downarrow Res_n\\ \mathcal{C}(\mathfrak{S}_r)\otimes_{\mathbb{C}}\underline{\mathcal{K}}_{N-2r} & \stackrel{\underline{h}_r\otimes\underline{k}_{N-2r}}{\to} & \mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_r)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}}_{N-2r})\end{array}$$

où Res_n est l'application décrite en VII.1. Cf. [W2] lemme 18.

Par définition, $\mathcal{C}_{unip,cusp}(\underline{\tilde{G}})$ est le sous-espace des éléments de $\mathcal{C}_{unip}(\underline{\tilde{G}})$ annulés par toutes les applications Res_n quand n parcourt tous les entiers tels que $n\geq 1$ et $2n\leq N$. D'après la commutativité du diagramme ci-dessus, c'est l'image par $\underline{k}$ du sous-espace :

$$\oplus_{(m,n)\in\mathcal{M}_{1,1}(N)}\mathcal{C}(W_{n,ell})$$

de $\underline{\mathcal{K}}$. Puisque $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(W_{n,ell}) = |\mathcal{P}(n)|$, on en déduit l'égalité IX.3(2) qui restait à prouver.

IX.6. L'espace $\mathcal{K}$

Notons $\mathcal{M}_{2,2}(N)$ l'ensemble des quadruplets (m_1, m_2, n_1, n_2) d'entiers ≥ 0 tels que $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + \frac{m_2(m_2+1)}{2} + 2n_1 + 2n_2 = N$. Pour un tel quadruplet, on définit l'espace :

$$\mathcal{K}[m_1, m_2, n_1, n_2] = \mathcal{C}(W_{n_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n_2}).$$

On le munit du produit hermitien produit tensoriel des produits usuels sur chacun des facteurs. On pose :

$$\mathcal{K} = \oplus_{(m_1,m_2,n_1,n_2)\in\mathcal{M}_{2,2}(N)}\mathcal{K}[m_1, m_2, n_1, n_2].$$

On munit $\mathcal{K}$ du produit hermitien somme directe des précédents. Puisque l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,2}(N) & \to & \sqcup_{N_1,N_2;N_1+N_2=N}\mathcal{M}_{1,1}(N_1) \times \mathcal{M}_{1,1}(N_2) \\ (m_1, m_2, n_1, n_2) & \mapsto & ((m_1, n_1), (m_2, n_2)) \end{array}$$

est bijective, on a un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{K} = \oplus_{N_1,N_2,N_1+N_2=N}\underline{\mathcal{K}}_{N_1} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{K}}_{N_2}.$$

On définit l'application linéaire $k : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ qui, sur toute composante $\underline{\mathcal{K}}_{N_1} \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathcal{K}}_{N_2}$ est égale à $\underline{k}_{N_1} \otimes \underline{k}_{N_2}$. C'est un isomorphisme isométrique.

Soit r un entier tel que $r \geq 0$ et $2r \leq N$. En copiant la définition de IX.1, où on remplace les applications Res par les applications $\underline{res}_n$ définies dans le paragraphe précédent, on définit deux applications linéaires :

$$res_{\mathcal{K}}(r)_j : \mathcal{K} \to \mathcal{C}(\mathfrak{S}_r) \otimes \mathcal{K}_{N-2r}$$

pour $j = 1, 2$. On pose $res_{\mathcal{K}}(r) = res_{\mathcal{K}}(r)_1 - res_{\mathcal{K}}(r)_2$. Grâce à la commutativité du diagramme IX.5(1), le diagramme suivant est lui aussi commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \stackrel{k}{\to} & \mathcal{C} \\ \downarrow res_{\mathcal{K}}(r) & & \downarrow res(r) \\ \mathcal{C}(\mathfrak{S}_r) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_{N-2r} & \stackrel{\underline{h}_r\otimes k_{N-2r}}{\to} & \mathcal{C}_{unip}(\underline{G}_r) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{N-2r}. \end{array}$$

Notons $\mathcal{K}_{glob}$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{K}$ annulés par l'application $res_{\mathcal{K}}(r)$ pour tout r tel que $r \geq 1$ et $2r \leq N$. Alors k se restreint en un isomorphisme de $\mathcal{K}_{glob}$ sur $\mathcal{C}_{glob}$.

Notons $\mathcal{M}_{2,1}(N)$ l'ensemble des triplets (m_1, m_2, n) d'entiers ≥ 0 tels que $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + \frac{m_2(m_2+1)}{2} + 2n = N$. Pour un tel triplet, on pose $\mathcal{Q}[m_1, m_2, n] = \mathbb{C}[\mathcal{P}_4(n)]^*$. Cet espace est le dual de l'espace vectoriel complexe de base $\mathcal{P}_4(n)$; on l'identifie à l'espace des fonctions à valeurs complexes sur l'ensemble $\mathcal{P}_4(n)$. Posons :

$$\mathcal{Q} = \oplus_{(m_1,m_2,n)\in\mathcal{M}_{2,1}(N)}\mathcal{Q}[m_1, m_2, n].$$

On va définir une application linéaire de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{Q}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout couple $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(n)$, on fixe un élément $w_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \in W_n$ dans la classe de conjugaison paramétrée par $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Soit $f \in \mathcal{K}$ et soient $(m_1, m_2, n) \in \mathcal{M}_{2,1}(N)$ et $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2) \in \mathcal{P}_4(n)$. Pour $j = 1, 2$, posons $n_j = S(\boldsymbol{\alpha}_j) + S(\boldsymbol{\beta}_j)$. On a $(m_1, m_2, n_1, n_2) \in \mathcal{M}_{2,2}(N)$. Notons $f[m_1, m_2, n_1, n_2]$ la composante de f dans $\mathcal{K}[m_1, m_2, n_1, n_2]$. C'est un élément de $\mathcal{C}(W_{n_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n_2})$, autrement dit une fonction sur $W_{n_1} \times W_{n_2}$. Posons :

$$\varphi[m_1, m_2, n](\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2) = f[m_1, m_2, n_1, n_2](w_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1} \times w_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2}).$$

Cette formule définit un élément de $\mathcal{Q}[m_1,m_2,n]=\mathbb{C}[\mathcal{P}_4(n)]^*$. On pose :

$$\varphi=\oplus_{(m_1,m_2,n)\in\mathcal{M}_{2,1}(N)}\varphi[m_1,m_2,n]\in\mathcal{Q}.$$

L'application linéaire annoncée est l'application $f\mapsto\varphi$. Il est clair que c'est un isomorphisme de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{Q}$.

De même, soit $r\in\mathbb{N}$ tel que $2r\leq N$. Pour $(m_1,m_2,n)\in\mathcal{M}_{2,1}(N-2r)$, posons $\mathcal{Q}^{(r)}[m_1,m_2,n]=\mathbb{C}[\mathcal{P}(r)\times\mathcal{P}_4(n)]^*$. Et posons :

$$\mathcal{Q}^{(r)}=\oplus_{(m_1,m_2,n)\in\mathcal{M}_{2,1}(N-2r)}\mathcal{Q}^{(r)}[m_1,m_2,n].$$

En copiant la construction ci-dessus, on définit un isomorphisme de $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_r)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{K}_{N-2r}$ sur $\mathcal{Q}^{(r)}$. Modulo ces isomorphismes, l'application $res_{\mathcal{K}}(r)$ devient une application $res_{\mathcal{Q}}:\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}^{(r)}$ qui s'exprime de la façon suivante. Soit $\varphi=\oplus_{(m_1,m_2,n)\in\mathcal{M}_{2,1}(N)}\varphi[m_1,m_2,n]$ un élément de $\mathcal{Q}$. Alors $res_{\mathcal{Q}}(\varphi)$ est l'élément $\varphi'=\oplus_{(m_1,m_2,n)\in\mathcal{M}_{2,1}(N-2r)}\varphi'[m_1,m_2,n]$ tel que, pour tout $(m_1,m_2,n)\in\mathcal{M}_{2,1}(N-2r)$, tout $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}(r)$ et tout $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)\in\mathcal{P}_4(n)$, on ait l'égalité :

$$\varphi'[m_1,m_2,n](\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=\varphi[m_1,m_2,n+r](\boldsymbol{\alpha}_1\cup\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)$$

$$-\varphi[m_1,m_2,n+r](\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cup\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\beta}_2).$$

Alors $\mathcal{K}_{glob}$ est isomorphe à l'espace des $\varphi\in\mathcal{Q}$ tels qu'avec les notations ci-dessus, pour tout $(m_1,m_2,n)\in\mathcal{M}_{2,1}(N)$, $\varphi[m_1,m_2,n]$ se factorise par l'application :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{P}_4(n) & \to & \mathcal{P}_3(n)\\ (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2) & \mapsto & (\boldsymbol{\alpha}_1\cup\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\end{array}$$

Cette application étant surjective, $\mathcal{K}_{glob}$ est isomorphe à :

$$\oplus_{(m_1,m_2,n)\in\mathcal{M}_{2,1}(N)}\mathbb{C}[\mathcal{P}_3(n)]^*.$$

On en déduit l'égalité IX.2(3) qui restait à prouver.

IX.7. Induction endoscopique et produits elliptiques

On va définir un endomorphisme ι de $\mathcal{K}$. Il suffit de fixer deux éléments (m_1,m_2,n_1,n_2) et (m_1',m_2',n_1',n_2') de $\mathcal{M}_{2,2}(N)$ et de définir la composante de ι dans :

$$Hom(\mathcal{K}[m_1,m_2,n_1,n_2],\mathcal{K}[m_1',m_2',n_1',n_2']).$$

Si $(m_1,m_2)\neq(m_1',m_2')$, cette composante est nulle. Supposons $(m_1,m_2)=(m_1',m_2')$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des familles $\mathbf{n}=(n_{j,j'})_{j,j'=1,2}$ d'entiers ≥ 0 telles que, pour $j,j'=1,2$, on ait les égalités :

$$n_{j,1}+n_{j,2}=n_j,\ n_{1,j'}+n_{2,j'}=n_{j'}'.$$

Pour une telle famille, posons :

$$W_{\mathbf{n}}=W_{n_{1,1}}\times W_{n_{1,2}}\times W_{n_{2,1}}\times W_{n_{2,2}}.$$

Il y a deux plongements évidents (au moins à conjugaison près) :

$$W_{n_1}\times W_{n_2}\leftarrow W_{\mathbf{n}}\to W_{n_1'}\times W_{n_2'},$$

d'où sont issus un homomorphisme de restriction :

$$res_{\mathbf{n}}:\mathcal{C}(W_{n_1})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(W_{n_2})\to\mathcal{C}(W_{\mathbf{n}}),$$

et un homomorphisme d'induction :

$$ind_{\mathbf{n}} : \mathcal{C}(W_{\mathbf{n}}) \to \mathcal{C}(W_{n'_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n'_2}).$$

On définit un couple (e, e') par les formules suivantes :
- si $m_1 \equiv m_2 \ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $m_1 \geq m_2$, $(e, e') = (2, 2)$;
- si $m_1 \equiv m_2 \ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $m_1 < m_2$, $(e, e') = (2, 1)$;
- si $m_1 \not\equiv m_2 \ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $m_1 > m_2$, $(e, e') = (1, 2)$;
- si $m_1 \not\equiv m_2 \ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $m_1 < m_2$, $(e, e') = (1, 1)$.

Notons $\chi_{\mathbf{n}}$ la fonction sur $W_{\mathbf{n}}$ qui est le produit du caractère sgn_{CD} du facteur $W_{n_{e,e'}}$ et des caractères triviaux des trois autres composantes. L'homomorphisme cherché est alors :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}[m_1, m_2, n_1, n_2] & \to & \mathcal{K}[m_1, m_2, n'_1, n'_2] \\ f & \mapsto & \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}} ind_{\mathbf{n}}(\chi_{\mathbf{n}} res_{\mathbf{n}}(f)). \end{array}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $\mathcal{C}(W_n)$ deux produits hermitiens que l'on peut appeler "elliptiques". Ils sont tous deux positifs ou nuls, quoique dégénérés. Le premier, noté $(.,.)_{cusp}$, est le produit "naïf" défini par :

$$(f, f')_{cusp} = (proj_{ell}(f), proj_{ell}(f')) = |W_n|^{-1} \sum_{w \in W_{n,ell}} \bar{f}(w) f'(w).$$

Notons δ_n la représentation naturelle de W_n dans $\mathbb{C}^n$. Les éléments elliptiques de W_n sont précisément les éléments w tels que $det(1 - \delta_n(w)) \neq 0$. Le second produit scalaire, noté $(.,.)_{ell}$, est défini par :

$$(f, f')_{ell} = |W_n|^{-1} \sum_{w \in W_{n,ell}} det(1 - \delta_n(w)) \bar{f}(w) f'(w).$$

A l'aide de ces produits, on définit deux produits sur l'espace $\mathcal{K}$ notés encore $(.,.)_{cusp}$ et $(.,.)_{ell}$. Remarquons que l'on peut définir un sous-espace $\mathcal{K}_{ell}$ de $\mathcal{K}$ en remplaçant dans les définitions les espaces $\mathcal{C}(W_n)$ par $\mathcal{C}(W_{n,ell})$. Notons $proj_{ell}$ la projection orthogonale (pour le produit non dégénéré usuel) de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{K}_{ell}$. Alors le produit elliptique naïf de $\mathcal{K}$ est défini par la formule :

$$(f, f')_{cusp} = (proj_{ell}(f), proj_{ell}(f')).$$

Remarquons aussi que l'isomorphisme k identifie $\mathcal{K}_{ell}$ à $\mathcal{C}_{cusp}$ et $proj_{ell}$ à $proj_{cusp}$.

Proposition. *L'image de l'endomorphisme ι est contenue dans $\mathcal{K}_{glob}$. Pour $f, f' \in \mathcal{K}$, on a l'égalité :*

$$(\iota(f), \iota(f'))_{cusp} = (f, f')_{ell}.$$

Preuve. Pour toute partition $\boldsymbol{\mu}$, posons :

$$mult_{\boldsymbol{\mu}}! = \prod_{i \geq 1} mult_{\boldsymbol{\mu}}(i)!$$

Pour $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$, les homomorphismes d'induction et de restriction :

$$\mathcal{C}(W_{n_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n_2}) \leftrightarrows \mathcal{C}(W_n)$$

s'expriment concrètement par les formules suivantes. Pour $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(n)$ et $f \in \mathcal{C}(W_{n_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n_2})$,

$$ind(f)(w_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \sum \frac{mult_{\boldsymbol{\alpha}}! mult_{\boldsymbol{\beta}}!}{mult_{\boldsymbol{\alpha}_1}! mult_{\boldsymbol{\beta}_1}! mult_{\boldsymbol{\alpha}_2}! mult_{\boldsymbol{\beta}_2}!} f(w_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1} \times w_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2}),$$

où on somme sur les couples $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1) \in \mathcal{P}_2(n_1)$, $(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2) \in \mathcal{P}_2(n_2)$ tels que $\boldsymbol{\alpha}_1 \cup \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}_1 \cup \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}$. D'autre part, pour $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1) \in \mathcal{P}_2(n_1)$, $(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2) \in \mathcal{P}_2(n_2)$ et $f \in \mathcal{C}(W_n)$, on a :

$$res(f)(w_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1} \times w_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2}) = f(w_{\boldsymbol{\alpha}_1\cup\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\cup\boldsymbol{\beta}_2}).$$

On a aussi la formule $sgn_{CD}(w_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \prod_{i\geq 1}(-1)^{mult_{\boldsymbol{\beta}}(i)}$.

On a défini en IX.6 un espace $\mathcal{Q}$ et un isomorphisme de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{Q}$. Identifions ces deux espaces. Alors ι devient un endomorphisme de $\mathcal{Q}$ que l'on peut calculer à l'aide des formules ci-dessus. Il est clair qu'il est somme d'endomorphismes des sous-espaces $\mathcal{Q}[m_1,m_2,n]$. Fixons donc $(m_1,m_2,n) \in \mathcal{M}_{2,1}(N)$ et décrivons la restriction de ι au sous-espace correspondant. Pour deux éléments $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)$ et $\mathbf{A}' = (\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\beta}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\beta}'_2)$ de $\mathcal{P}_4(n)$, notons $\Delta(\mathbf{A},\mathbf{A}')$ l'ensemble des familles $\mathbf{D} = (\boldsymbol{\alpha}_{1,1},\boldsymbol{\alpha}_{1,2},\boldsymbol{\beta}_{1,1},\boldsymbol{\beta}_{1,2},\boldsymbol{\alpha}_{2,1},\boldsymbol{\alpha}_{2,2},\boldsymbol{\beta}_{2,1},\boldsymbol{\beta}_{2,2}) \in \mathcal{P}_8(n)$ telles que, pour $j,j' = 1,2$, on ait les égalités :

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_{j,1} \cup \boldsymbol{\alpha}_{j,2},\ \boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\beta}_{j,1} \cup \boldsymbol{\beta}_{j,2},\ \boldsymbol{\alpha}'_{j'} = \boldsymbol{\alpha}_{1,j'} \cup \boldsymbol{\alpha}_{2,j'},\ \boldsymbol{\beta}'_{j'} = \boldsymbol{\beta}_{1,j'} \cup \boldsymbol{\beta}_{2,j'}.$$

Pour une telle famille $\mathbf{D}$, on pose $s(\mathbf{D}) = \prod_{i\geq 1}(-1)^{mult_{\boldsymbol{\beta}_{e,e'}}(i)}$, où e et e' sont associés à m_1 et m_2 comme ci-dessus. Posons aussi :

$$mult_{\mathbf{A}}! = mult_{\boldsymbol{\alpha}_1}!mult_{\boldsymbol{\beta}_1}!mult_{\boldsymbol{\alpha}_2}!mult_{\boldsymbol{\beta}_2}!$$

On définit de même $mult_{\mathbf{A}'}!$ et $mult_{\mathbf{D}}!$ pour $\mathbf{D}$ comme ci-dessus. On pose :

$$c(\mathbf{A},\mathbf{A}') = \sum_{\mathbf{D}\in\Delta(\mathbf{A},\mathbf{A}')} s(\mathbf{D})\frac{mult_{\mathbf{A}}!}{mult_{\mathbf{D}}!}.$$

Avec ces notations, pour $f \in \mathcal{Q}[m_1,m_2,n] = \mathbb{C}[\mathcal{P}_4(n)]^*$ et $\mathbf{A} \in \mathcal{P}_4(n)$, on a l'égalité :

$$\iota(f)(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{A}'\in\mathcal{P}_4(n)} c(\mathbf{A},\mathbf{A}')f(\mathbf{A}').$$

Pour quatre entiers $a_1,a_2,a'_1,a'_2 \geq 0$, notons $\Delta(a_1,a_2,a'_1,a'_2)$ l'ensemble des familles $\mathbf{a} = (a_{j,j'})_{j,j'=1,2}$ d'entiers ≥ 0 telles que, pour $j,j' = 1,2$, on ait les égalités :

$$a_j = a_{j,1} + a_{j,2},\ a'_{j'} = a_{1,j'} + a_{2,j'}.$$

Pour une telle famille, on note $\mathbf{a}! = \prod_{j,j'=1,2} a_{j,j'}!$ et $s(\mathbf{a}) = (-1)^{a_{e,e'}}$. On pose :

$$c_+(a_1,a_2,a'_1,a'_2) = \sum_{\mathbf{a}\in\Delta(a_1,a_2,a'_1,a'_2)} \frac{a_1!a_2!}{\mathbf{a}!},$$

$$c_-(a_1,a_2,a'_1,a'_2) = \sum_{\mathbf{a}\in\Delta(a_1,a_2,a'_1,a'_2)} s(\mathbf{a})\frac{a_1!a_2!}{\mathbf{a}!}.$$

Pour deux éléments $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)$ et $\mathbf{A}' = (\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\beta}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\beta}'_2)$ de $\mathcal{P}_4(n)$, il y a une bijection naturelle :

$$\Delta(\mathbf{A},\mathbf{A}') \simeq \left(\prod_{i\geq 1} \Delta(mult_{\boldsymbol{\alpha}_1}(i), mult_{\boldsymbol{\alpha}_2}(i), mult_{\boldsymbol{\alpha}'_1}(i), mult_{\boldsymbol{\alpha}'_2}(i))\right) \times$$
$$\left(\prod_{i\geq 1} \Delta(mult_{\boldsymbol{\beta}_1}(i), mult_{\boldsymbol{\beta}_2}(i), mult_{\boldsymbol{\beta}'_1}(i), mult_{\boldsymbol{\beta}'_2}(i))\right)$$

qui, à $\mathbf{D} = (\boldsymbol{\alpha}_{1,1}, \boldsymbol{\alpha}_{1,2}, \boldsymbol{\beta}_{1,1}, \boldsymbol{\beta}_{1,2}, \boldsymbol{\alpha}_{2,1}, \boldsymbol{\alpha}_{2,2}, \boldsymbol{\beta}_{2,1}, \boldsymbol{\beta}_{2,2}) \in \Delta(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$ associe l'élément de l'ensemble de droite dont la i-ième composante dans le premier, resp. second, produit est $(mult_{\boldsymbol{\alpha}_{j,j'}}(i))_{j,j'=1,2}$, resp. $(mult_{\boldsymbol{\beta}_{j,j'}}(i))_{j,j'=1,2}$. A l'aide de cette bijection, on obtient l'égalité :

$$c(\mathbf{A}, \mathbf{A}') = \left(\prod_{i \geq 1} c_+(mult_{\boldsymbol{\alpha}_1}(i), mult_{\boldsymbol{\alpha}_2}(i), mult_{\boldsymbol{\alpha}'_1}(i), mult_{\boldsymbol{\alpha}'_2}(i)) \right) \times$$

$$\left(\prod_{i \geq 1} c_-(mult_{\boldsymbol{\beta}_1}(i), mult_{\boldsymbol{\beta}_2}(i), mult_{\boldsymbol{\beta}'_1}(i), mult_{\boldsymbol{\beta}'_2}(i)) \right).$$

Un terme $c_+(a_1, a_2, a'_1, a'_2)$ est facile à calculer. C'est le produit de $a_1!a_2!$ et du coefficient de $X^{a_1}Y^{a_2}$ dans la somme :

$$\sum_{\mathbf{a}} \frac{X^{a_{1,1}+a_{1,2}} Y^{a_{2,1}+a_{2,2}}}{\mathbf{a}!}$$

où on somme sur les $\mathbf{a} = (a_{j,j'})_{j,j'=1,2}$ tels que $a'_{j'} = a_{1,j'} + a_{2,j'}$ pour $j' = 1, 2$. Cette somme est égale à :

$$\frac{(X+Y)^{a'_1+a'_2}}{a'_1!a'_2!},$$

et on obtient :

$$c_+(a_1, a_2, a'_1, a'_2) = \begin{cases} 0, & si\ a_1 + a_2 \neq a'_1 + a'_2 \\ \frac{(a'_1+a'_2)!}{a'_1!a'_2!}, & si\ a_1 + a_2 = a'_1 + a'_2. \end{cases}$$

En particulier, $c_+(a_1, a_2, a'_1, a'_2)$ ne dépend de a_1 et a_2 que via leur somme $a_1 + a_2$. Cela entraîne que $c(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$ ne dépend des composantes $\boldsymbol{\alpha}_1$ et $\boldsymbol{\alpha}_2$ de $\mathbf{A}$ que via leur réunion $\boldsymbol{\alpha}_1 \cup \boldsymbol{\alpha}_2$. Il en est de même de $\iota(f)(\mathbf{A})$. D'après l'interprétation de $\mathcal{K}_{glob}$ donnée en IX.6, cela signifie que $\iota(f)$ appartient à $\mathcal{K}_{glob}$.

Pour $f, f' \in \mathcal{Q}[m_1, m_2, n] = \mathcal{P}_4(n)$, le produit elliptique naïf s'exprime ainsi :

$$(f, f')_{cusp} = \sum_{(\boldsymbol{\beta}''_1, \boldsymbol{\beta}''_2) \in \mathcal{P}_2(n)} \frac{\prod_{i \geq 1} 2^{-mult_{\boldsymbol{\beta}''_1}(i) - mult_{\boldsymbol{\beta}''_2}(i)}}{mult_{\boldsymbol{\beta}''_1}! mult_{\boldsymbol{\beta}''_2}!} \bar{f}(\mathbf{B}) f'(\mathbf{B}),$$

où on a posé $\mathbf{B} = (\emptyset, \boldsymbol{\beta}''_1, \emptyset, \boldsymbol{\beta}''_2)$. De même, en remarquant que, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(r)$, on a l'égalité $det(1 - \delta_r(w_{\emptyset, \boldsymbol{\beta}})) = \prod_{i \geq 1} 2^{mult_{\boldsymbol{\beta}}(i)}$, on obtient l'égalité :

$$(1) \qquad (f, f')_{ell} = \sum_{(\boldsymbol{\beta}''_1, \boldsymbol{\beta}''_2) \in \mathcal{P}_2(n)} \frac{1}{mult_{\boldsymbol{\beta}''_1}! mult_{\boldsymbol{\beta}''_2}!} \bar{f}(\mathbf{B}) f'(\mathbf{B}).$$

On calcule :

$$(2) \qquad (\iota(f), \iota(f'))_{cusp} = \sum_{\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in \mathcal{P}_4(n)} x(\mathbf{A}, \mathbf{A}') \bar{f}(\mathbf{A}) f'(\mathbf{A}'),$$

avec :

$$x(\mathbf{A}, \mathbf{A}') = \sum_{(\boldsymbol{\beta}''_1, \boldsymbol{\beta}''_2) \in \mathcal{P}_2(n)} \frac{\prod_{i \geq 1} 2^{-mult_{\boldsymbol{\beta}''_1}(i) - mult_{\boldsymbol{\beta}''_2}(i)}}{mult_{\boldsymbol{\beta}''_1}! mult_{\boldsymbol{\beta}''_2}!} c(\mathbf{B}, \mathbf{A}) c(\mathbf{B}, \mathbf{A}').$$

Calculons ce coefficient. Pour $\mathbf{B}$ comme ci-dessus, il est clair que $\Delta(\mathbf{B}, \mathbf{A}) = \emptyset$ donc $c(\mathbf{B}, \mathbf{A}) = 0$, si $\mathbf{A}$ n'est pas de la forme $\mathbf{A} = (\emptyset, \boldsymbol{\beta}_1, \emptyset, \boldsymbol{\beta}_2)$. On peut supposer que $\mathbf{A}$ est de cette forme et, de même, que $\mathbf{A}' = (\emptyset, \boldsymbol{\beta}'_1, \emptyset, \boldsymbol{\beta}'_2)$. Pour quatre entiers $b_1, b_2, b'_1, b'_2 \geq 0$, posons :

$$x(b_1, b_2, b'_1, b'_2) = \sum_{b''_1, b''_2 \geq 0} \frac{2^{-b''_1 - b''_2}}{b''_1! b''_2!} c_-(b''_1, b''_2, b_1, b_2) c_-(b''_1, b''_2, b'_1, b'_2).$$

Comme précédemment, on voit que :

$$x(\mathbf{A},\mathbf{A}')=\prod_{i\geq 1} x(mult_{\boldsymbol{\beta}_1}(i),mult_{\boldsymbol{\beta}_2}(i),mult_{\boldsymbol{\beta}'_1}(i),mult_{\boldsymbol{\beta}'_2}(i)).$$

Le terme $x(b_1,b_2,b'_1,b'_2)$ défini ci-dessus est égal à la somme :

$$\sum_{\mathbf{b},\mathbf{b}'}\frac{2^{-b_{1,1}-b_{1,2}-b_{2,1}-b_{2,2}}(-1)^{b_{e,e'}+b'_{e,e'}}(b_{1,1}+b_{1,2})!(b_{2,1}+b_{2,2})!}{\prod_{j,j'=1,2}(b_{j,j'}!b'_{j,j'}!)},$$

où l'on somme sur les familles $\mathbf{b}=(b_{j,j'})_{j,j'=1,2}$, $\mathbf{b}'=(b'_{j,j'})_{j,j'=1,2}$ d'entiers ≥ 0 telles que, pour $j,j'=1,2$:

$$b_{1,j'}+b_{2,j'}=b_{j'},\ b'_{1,j'}+b'_{2,j'}=b'_{j'},\ b_{j,1}+b_{j,2}=b'_{j,1}+b'_{j,2}.$$

C'est le coefficient de $X^{b_1}Y^{b_2}Z^{b'_1}T^{b'_2}$ dans la série formelle :

$$\sum_{\mathbf{b},\mathbf{b}'}\frac{2^{-b_{1,1}-b_{1,2}-b_{2,1}-b_{2,2}}(-1)^{b_{e,e'}+b'_{e,e'}}(b_{1,1}+b_{1,2})!(b_{2,1}+b_{2,2})!}{\prod_{j,j'=1,2}(b_{j,j'}!b'_{j,j'}!)}X^{b_{1,1}+b_{2,1}}Y^{b_{1,2}+b_{2,2}}Z^{b'_{1,1}+b'_{2,1}}T^{b'_{1,2}+b'_{2,2}},$$

où on somme maintenant sur les $\mathbf{b},\mathbf{b}'$ vérifiant seulement :

$$b_{j,1}+b_{j,2}=b'_{j,1}+b'_{j,2}$$

pour $j=1,2$. Pour fixer les idées, supposons $(e,e')=(2,2)$, un calcul analogue valant dans les autres cas. Pour $\mathbf{b}$ fixé, la somme en $\mathbf{b}'$ se calcule aisément. La série ci-dessus est égale à :

$$\sum_{\mathbf{b}}\frac{2^{-b_{1,1}-b_{1,2}-b_{2,1}-b_{2,2}}(-1)^{b_{2,2}}}{\prod_{j,j'=1,2}b_{j,j'}!}X^{b_{1,1}+b_{2,1}}Y^{b_{1,2}+b_{2,2}}(Z+T)^{b_{1,1}+b_{1,2}}(Z-T)^{b_{2,1}+b_{2,2}},$$

sommé maintenant sur tout $\mathbf{b}$. Cette série est encore égale à :

$$exp(\frac{1}{2}X(Z+T))exp(\frac{1}{2}X(Z-T))exp(\frac{1}{2}Y(Z+T))exp(-\frac{1}{2}Y(Z-T)),$$

ou encore $exp(XZ+YT)$. Le calcul du coefficient de $X^{b_1}Y^{b_2}Z^{b'_1}T^{b'_2}$ est immédiat, on obtient :

$$x(b_1,b_2,b'_1,b'_2)=\begin{cases}0, & si\ (b_1,b_2)\neq(b'_1,b'_2),\\ \frac{1}{b_1!b_2!}, & si\ (b_1,b_2)=(b'_1,b'_2).\end{cases}$$

On en déduit :

$$x(\mathbf{A},\mathbf{A}')=\begin{cases}0, & si\ \mathbf{A}\neq\mathbf{A}',\\ \frac{1}{mult_{\boldsymbol{\beta}_1}!mult_{\boldsymbol{\beta}_2}!}, & si\ \mathbf{A}=\mathbf{A}'.\end{cases}$$

Alors les membres de droite des expressions (1) et (2) sont égales, ce qui achève la preuve. □

IX.8. Correspondance de Springer

Soit $r\in\mathbb{N}$. Pour toute partition $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(r)$, posons :

$$Jord(\boldsymbol{\lambda})=\{j\in\mathbb{N};j\geq 1,\ mult_{\boldsymbol{\lambda}}(j)\geq 1\},$$

$$Jord_{pair}(\boldsymbol{\lambda})=\{j\in Jord(\boldsymbol{\lambda});\ j\ pair\},$$

$$Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda})=\{j\in Jord(\boldsymbol{\lambda}),\ j\ impair\},$$

et, pour tout entier $k\geq 1$,

$$Jord^k(\boldsymbol{\lambda})=\{j\in Jord(\boldsymbol{\lambda});\ mult_{\boldsymbol{\lambda}}(j)=k\}.$$

On dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est symplectique, resp. orthogonale, si $mult_{\boldsymbol{\lambda}}$ prend des valeurs paires sur $Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda})$, resp. $Jord_{pair}(\boldsymbol{\lambda})$. On note $\mathcal{I}_{symp}(r)$, resp. $\mathcal{I}_{orth}(r)$, l'ensemble des couples $\mathcal{E} = (\boldsymbol{\lambda}, \epsilon)$ où $\boldsymbol{\lambda}$ est une partition symplectique, resp. orthogonale, de r et ϵ est une fonction de $Jord_{pair}(\boldsymbol{\lambda})$, resp. $Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda})$, dans $\{\pm 1\}$.

Soit $\mathcal{E} = (\boldsymbol{\lambda}, \epsilon) \in \mathcal{I}_{symp}(r)$ (cela impose bien sûr que r est pair). La correspondance de Springer généralisée associe à $\mathcal{E}$ un entier $h = h(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ tel que $h(h+1) \leq r$ et une représentation irréductible $\rho(\mathcal{E})$ de W_n où $n = \frac{r-h(h+1)}{2}$. En suivant Lusztig, on définit une autre représentation $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E})$ de W_n. Indiquons simplement que $\rho(\mathcal{E})$ est la représentation qui intervient dans l'espace de cohomologie de degré maximal d'une certaine variété, tandis que $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E})$ est la représentation dans toute la cohomologie de cette variété. En général, cette représentation n'est pas irréductible. Elle se décompose en représentations irréductibles sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}) = \sum_{\mathcal{E}' \in \mathcal{I}_{symp}(r)} p(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \rho(\mathcal{E}')$$

où les coefficients $p(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ vérifient les propriétés suivantes :

$p(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \in \mathbb{Z}$;

$p(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 1$;

soit $\mathcal{E}' = (\boldsymbol{\lambda}', \epsilon') \in \mathcal{I}_{symp}(r)$; supposons $\mathcal{E}' \neq \mathcal{E}$ et $p(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \neq 0$; alors $h(\mathcal{E}') = h(\mathcal{E})$ et $\boldsymbol{\lambda}' > \boldsymbol{\lambda}$.

Soient $\mathcal{E} = (\boldsymbol{\lambda}, \epsilon)$ et $\mathcal{E}' = (\boldsymbol{\lambda}', \epsilon')$ deux éléments de $\mathcal{I}_{symp}(r)$. Si $h(\mathcal{E}) = h(\mathcal{E}')$, les représentations $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E})$ et $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}')$ sont des représentations d'un même groupe W_n. On a défini en IX.7 leur produit elliptique $(\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}), \boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}'))_{ell}$. Si $h(\mathcal{E}) \neq h(\mathcal{E}')$, on pose simplement $(\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}), \boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}')) = 0$. Considérons la condition :

(2) $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}'$, $Jord(\boldsymbol{\lambda}) = Jord_{pair}(\boldsymbol{\lambda})$, $Jord^k(\boldsymbol{\lambda}) = \emptyset$ pour tout $k \geq 3$ et les restrictions de ϵ et ϵ' à $Jord^1(\boldsymbol{\lambda})$ sont égales.

Si elle n'est pas vérifiée, on pose $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')_{ell} = 0$. Si elle l'est, on pose :

$$(\mathcal{E}, \mathcal{E}')_{ell} = \prod_{j \in Jord^2(\boldsymbol{\lambda})} \epsilon(j)\epsilon'(j).$$

On a alors l'égalité :

$$(3) \qquad (\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}), \boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}'))_{ell} = (\mathcal{E}, \mathcal{E}')_{ell}$$

cf. [W3] corollaire 13.

Soit maintenant $\mathcal{E} = (\boldsymbol{\lambda}, \epsilon) \in \mathcal{I}_{orth}(r)$. Considérons l'ensemble des fonctions sur $Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda})$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Le groupe $\{\pm 1\}$ agit sur cet ensemble par multiplication sur l'ensemble d'arrivée. Cela définit une relation d'équivalence sur notre ensemble de fonctions. Notons $\bar{\epsilon}$ la classe d'équivalence de ϵ et posons $\bar{\mathcal{E}} = (\boldsymbol{\lambda}, \bar{\epsilon})$. La correspondance de Springer généralisée associe à $\bar{\mathcal{E}}$ un entier $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{h}^2 \geq r$ et $\bar{h} \equiv r \ mod \ 2\mathbb{Z}$. Posons $n = \frac{r-\bar{h}^2}{2}$. Si $\bar{h} > 0$, cette correspondance associe également à $\bar{\mathcal{E}}$ une représentation irréductible $\bar{\rho}$ de W_n. Si $\bar{h} = 0$, la correspondance associe à $\bar{\mathcal{E}}$ une représentation irréductible $\bar{\rho}$ du sous-groupe W_n^D défini en IX.4.

Notons $j_1 > ... > j_t$ les éléments $j \in Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda})$ tels que $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(j)$ soit impair. Posons :

$$N(\mathcal{E}) = \sum_{s=1,\dots,t; \epsilon(j_s)=-1} (-1)^s.$$

On vérifie que :

$$\bar{h} = \begin{cases} 2|N(\mathcal{E})|, & si\ r\ est\ pair, \\ |2N(\mathcal{E})+1|, & si\ r\ est\ impair \end{cases}$$

cf. [W4], lemme XI.4. On pose :

$$h(\mathcal{E}) = \begin{cases} 2N(\mathcal{E}), & si\ r\ est\ pair, \\ 2N(\mathcal{E})+1, & si\ r\ est\ impair. \end{cases}$$

Si $h \neq 0$, on pose $\rho(\mathcal{E}) = \bar{\rho}$. Si $h = 0$ et l'induite de $\bar{\rho}$ de W_n^D à W_n est irréductible, on note $\rho(\mathcal{E})$ cette induite. Si cette induite est réductible, on note $\rho(\mathcal{E})$ l' extension de $\bar{\rho}$ à W_n déterminée de la façon suivante. Notons j_{max} le plus grand terme de $Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda})$. La représentation $\bar{\rho}$ est paramétrée par un ensemble $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$ de partitions telles que $S(\boldsymbol{\alpha}) + S(\boldsymbol{\beta}) = n$. Ces deux partitions sont distinctes parce que l'induite de $\bar{\rho}$ est supposée réductible. Choisir un prolongement revient à ordonner l'ensemble $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$. Notons $\succ$ l'ordre lexicographique : on a $\boldsymbol{\alpha} \succ \boldsymbol{\beta}$ si et seulement si $\alpha_i > \beta_i$ pour le plus petit entier i tel que $\alpha_i \neq \beta_i$. Quitte à échanger $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$, on peut supposer que :

$$\boldsymbol{\alpha} \succ \boldsymbol{\beta} \ si \ \epsilon(j_{max}) = 1,$$

$$\boldsymbol{\beta} \succ \boldsymbol{\alpha} \ si \ \epsilon(j_{max}) = -1.$$

On choisit alors $\rho(\mathcal{E}) = \rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$.

On peut encore définir une autre représentation $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E})$ de W_n, essentiellement de la façon indiquée dans le cas symplectique. Elle vérifie la propriété (1) (au remplacement près des indices *symp* par *orth*). Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathcal{I}_{orth}(n)$. On définit les produits $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')_{ell}$ et $(\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}), \boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}'))_{ell}$ comme dans le cas symplectique (au remplacement près des indices *pair* par *impair*). Insistons sur le fait que c'est l'égalité des entiers relatifs $h(\mathcal{E})$ et $h(\mathcal{E}')$ qui conditionne la non nullité du second produit. On a encore l'égalité (3), cf. [W3] corollaire 14.

On aura besoin ci-dessous de la remarque suivante. Considérons l'application :

$$(4) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (h_1, h_2) & \mapsto & (m_1, m_2) \end{array}$$

où :

$$(m_1, m_2) = (sup(h_1 + (-1)^{h_1} h_2, -h_1 - (-1)^{h_1} h_2 - 1), sup(h_1 - (-1)^{h_1} h_2, -h_1 + (-1)^{h_1} h_2 - 1)).$$

C'est une bijection. Avec les notations de cette formule, on a l'égalité :

$$(5) \qquad \frac{m_1(m_1+1)}{2} + \frac{m_2(m_2+1)}{2} = h_1(h_1+1) + h_2^2.$$

On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des couples $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ tels qu'il existe deux entiers $N_1, N_2 \geq 0$ de sorte que $N = N_1 + N_2$, $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{I}_{symp}(N_1)$, $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{I}_{orth}(N_2)$. Considérons un tel couple. A $\mathcal{E}_1$ sont associés un entier $h_1 = h(\mathcal{E}_1) \in \mathbb{N}$ et une représentation $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1)$ de W_{n_1} où $n_1 = \frac{N_1 - h_1(h_1+1)}{2}$. A $\mathcal{E}_2$ sont associés un entier $h_2 = h(\mathcal{E}_2) \in \mathbb{Z}$ et une représentation $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_2)$ de W_{n_2}, où $n_2 = \frac{N_2 - h_2^2}{2}$. Associons à (h_1, h_2) un couple (m_1, m_2) par la formule (4). Grâce à (5), le quadruplet (m_1, m_2, n_1, n_2) appartient à $\mathcal{M}_{2,2}(N)$. Posons $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1) \otimes \boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_2) \in \mathcal{C}(W_{n_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n_2})$. Puisque $\mathcal{C}(W_{n_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n_2}) = \mathcal{K}[m_1, m_2, n_1, n_2]$, on peut identifier $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ à un élément de $\mathcal{K}[m_1, m_2, n_1, n_2]$, donc de $\mathcal{K}$. On a ainsi défini une application :

$$\boldsymbol{\rho} : \mathcal{I} \to \mathcal{K}.$$

IX.9. Elements de $\mathcal{C}$ associés à la correspondance de Springer

Définissons un automorphisme τ de $\mathcal{K}$. Il respecte chaque facteur $\mathcal{K}[m_1, m_2, n_1, n_2]$, il suffit donc de fixer $(m_1, m_2, n_1, n_2) \in \mathcal{M}_{2,2}(N)$ et de définir la restriction de τ au facteur correspondant. On pose :

$$c'(m_1, m_2) = \frac{N^2}{2} - \frac{m_1(m_1+1)}{4} - \frac{m_2(m_2+1)}{4} = \frac{N^2 - N}{2} + n_1 + n_2.$$

Ce nombre est entier d'après la seconde égalité et ne dépend que de m_1 et m_2 d'après la première. On pose :

$$c(m_1, m_2) = (-1)^{c'(m_1, m_2)}.$$

Notons $s[m_1,m_2,n_1,n_2]$ la fonction sur $W_{n_1}\times W_{n_2}$:

$$(w_1,w_2)\mapsto sgn_{CD}(w_1)^{[\frac{m_1}{2}]}sgn(w_1)sgn_{CD}(w_2)^{[\frac{m_2}{2}]}sgn(w_2).$$

Rappelons que l'on peut considérer $\mathcal{K}[m_1,m_2,n_1,n_2]$ comme un espace de fonctions sur $W_{n_1}\times W_{n_2}$. Alors la restriction de τ à cet espace est la multiplication par la fonction $c(m_1,m_2)s[m_1,m_2,n_1,n_2]$.

Soit $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\in\mathcal{I}$. Ecrivons $\mathcal{E}_j=(\boldsymbol{\lambda}_j,\epsilon_j)$ pour $j=1,2$, posons $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1\cup\boldsymbol{\lambda}_2$. On associe à $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ des entiers N_j,h_j,n_j,m_j comme dans le paragraphe précédent.

Considérons deux partitions $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2$ telles que $\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2=\boldsymbol{\lambda}$. Pour $i\in Jord(\boldsymbol{\lambda})$, choisissons $\ell\geq 1$ tel que $\lambda_\ell=i$. Les termes $\nu_{1,\ell}$ et $\nu_{2,\ell}$ ne dépendent pas du choix de ℓ. On les note $\nu_1(i)$ et $\nu_2(i)$. On pose :

$$e_1(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,i)=\nu_2(i)+mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(\geq i)+N;\ e_2(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,i)=\nu_1(i)+mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq i).$$

Notons $Gr(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ l'ensemble des couples $(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)\in\mathcal{P}_2(N)$ tels qu'en posant $\boldsymbol{\nu}_j={}^t\boldsymbol{\mu}_j$ pour $j=1,2$, on ait :

$\boldsymbol{\mu}_1\cup\boldsymbol{\mu}_2={}^t\boldsymbol{\lambda}$;

pour tout $i\in Jord_{pair}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $\epsilon_1(i)=(-1)^{e_1(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,i)}$;

pour tout $i\in Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda}_2)$, $\epsilon_2(i)=(-1)^{e_2(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,i)}$.

Proposition. *(i) Pour tout $(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)\in Gr(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$, on a l'égalité $(m(\boldsymbol{\mu}_1),m(\boldsymbol{\mu}_2))=(m_1,m_2)$.*

(ii) L'élément $k\circ\tau\circ\iota\circ\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ de $\mathcal{C}$ appartient au sous-espace $\mathcal{C}_{\leq{}^t\boldsymbol{\lambda}}$.

(iii) L'image de cet élément dans le quotient $\mathcal{C}_{\leq{}^t\boldsymbol{\lambda}}/\mathcal{C}_{<{}^t\boldsymbol{\lambda}}$ est égale à :

$$c(m_1,m_2)\sum_{(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)\in Gr(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)}\gamma(\boldsymbol{\mu}_1)\gamma(\boldsymbol{\mu}_2)proj_{{}^t\boldsymbol{\lambda}}(\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_1)\otimes\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_2)).$$

Preuve. On a une égalité :

$$\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)=\sum_{\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2}p(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}'_1)p(\mathcal{E}_2,\mathcal{E}'_2)\rho(\mathcal{E}'_1)\otimes\rho(\mathcal{E}'_2).$$

La somme porte sur les $\mathcal{E}'_1\in\mathcal{I}_{symp}(N_1)$ tels que $h(\mathcal{E}'_1)=h_1$ et les $\mathcal{E}'_2\in\mathcal{I}_{orth}(N_2)$ tels que $h(\mathcal{E}'_2)=h_2$. Le membre de droite s'interprète comme un élément de $\mathcal{K}[m_1,m_2,n_1,n_2]$. Pour tout tel couple $(\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2)$ et tout couple (n'_1,n'_2) d'entiers ≥ 0 tels que $n'_1+n'_2=n_1+n_2$, la composante dans $\mathcal{K}[m_1,m_2,n'_1,n'_2]$ de $\iota(\rho(\mathcal{E}'_1)\otimes\rho(\mathcal{E}'_2))$ est par construction une somme à coefficients entiers relatifs de produits tensoriels de représentations irréductibles de chaque facteur $W_{n'_j}$. Ecrivons cette somme :

$$\iota(\rho(\mathcal{E}'_1)\otimes\rho(\mathcal{E}'_2))=\sum_{\rho_1,\rho_2}x(\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2;\rho_1,\rho_2)\rho_1\otimes\rho_2.$$

Alors :

$$\iota\circ\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2):\sum_{\rho_1,\rho_2}x(\rho_1,\rho_2)\rho_1\otimes\rho_2,$$

où :

$$x(\rho_1,\rho_2)=\sum_{\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2}p(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}'_1)p(\mathcal{E}_2,\mathcal{E}'_2)x(\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2;\rho_1,\rho_2).$$

En utilisant la remarque IX.4(1) et les définitions des applications k et τ, on en déduit l'égalité :

$$(1)\qquad k\circ\tau\circ\iota\circ\boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)=\sum_{(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\in\Gamma(m_1,m_2)}c(m_1,m_2)\gamma({}^t\boldsymbol{\nu}_1)\gamma({}^t\boldsymbol{\nu}_2)$$

$$x(\rho(\boldsymbol{\nu}_1)\otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_1}{2}]},\rho(\boldsymbol{\nu}_2)\otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_2}{2}]})\tilde{\chi}({}^t\boldsymbol{\nu}_1)\otimes\tilde{\chi}({}^t\boldsymbol{\nu}_2),$$

où $\Gamma(m_1,m_2)$ est l'ensemble des $(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\in\mathcal{P}_2(N)$ tels que $m(\boldsymbol{\nu}_j)=m_j$ pour $j=1,2$.

Pour prouver le (ii) de l'énoncé, on doit prouver :

(2) soit $(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\in\Gamma(m_1,m_2)$ tel que $x(\rho(\boldsymbol{\nu}_1)\otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_1}{2}]},\rho(\boldsymbol{\nu}_2)\otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_2}{2}]})\neq 0$; alors $\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2\geq\boldsymbol{\lambda}$.

Soit donc $(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\in\Gamma(m_1,m_2)$, posons $\rho_j=\rho(\boldsymbol{\nu}_j)\otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_j}{2}]}$ pour $j=1,2$, supposons $x(\rho_1,\rho_2)\neq 0$. On peut fixer $\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2$ tels que :

$$p(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}'_1)p(\mathcal{E}_2,\mathcal{E}'_2)x(\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2;\rho_1,\rho_2)\neq 0.$$

Calculons le coefficient $x(\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2;\rho_1,\rho_2)$. Pour simplifier la rédaction, convenons que, dans ce qui suit, j et j' désignent des éléments quelconques de $\{1,2\}$. Notons $(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_j)$, resp. $(\boldsymbol{\alpha}'_j,\boldsymbol{\beta}'_j)$ le couple de partitions paramétrant $\rho(\mathcal{E}'_j)$, resp. ρ_j (attention à l'incohérence des ' que l'on n'a pas réussi à éliminer). Introduisons le couple (e,e') associé en IX.7 à m_1 et m_2. Alors $x(\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2;\rho_1,\rho_2)$ est la somme, sur les quadruplets $(\boldsymbol{\alpha}_{j,j'},\boldsymbol{\beta}_{j,j'})$ de couples de partitions, des produits des termes suivants :

- la multiplicité de $\rho_{\boldsymbol{\alpha}_{j,1},\boldsymbol{\beta}_{j,1}}\otimes\rho_{\boldsymbol{\alpha}_{j,2},\boldsymbol{\beta}_{j,2}}$ dans la restriction de $\rho_{\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_j}$;
- la multiplicité de $\rho_{\boldsymbol{\gamma}_{1,j'},\boldsymbol{\delta}_{1,j'}}\otimes\rho_{\boldsymbol{\gamma}_{2,j'},\boldsymbol{\delta}_{2,j'}}$ dans la restriction de $\rho_{\boldsymbol{\alpha}'_{j'},\boldsymbol{\beta}'_{j'}}$, où on a posé $(\boldsymbol{\gamma}_{j,j'},\boldsymbol{\delta}_{j,j'})=(\boldsymbol{\alpha}_{j,j'},\boldsymbol{\beta}_{j,j'})$ si $(j,j')\neq(e,e')$, $(\boldsymbol{\gamma}_{e,e'},\boldsymbol{\delta}_{e,e'})=(\boldsymbol{\beta}_{e,e'},\boldsymbol{\alpha}_{e,e'})$.

Remarques. (a) Dans les deux cas, des égalités sont sous-entendues. Par exemple dans le premier cas, posons $r_{j,1}=S(\boldsymbol{\alpha}_{j,1})+S(\boldsymbol{\beta}_{j,1})$, $r_{j,2}=S(\boldsymbol{\alpha}_{j,2})+S(\boldsymbol{\beta}_{j,2})$ et rappelons que $n_j=S(\boldsymbol{\alpha}_j)+S(\boldsymbol{\beta}_j)$. On suppose implicitement que $r_{j,1}+r_{j,2}=n_j$ et la restriction dont on parle est la restriction de W_{n_j} à $W_{r_{j,1}}\times W_{r_{j,2}}$.

(b) L'introduction des partitions $(\boldsymbol{\gamma}_{j,j'},\boldsymbol{\delta}_{j,j'})$ traduit la torsion par $\chi_{\mathbf{n}}$ dans la définition de ι.

Puisque $x(\mathcal{E}'_1,\mathcal{E}'_2;\rho_1,\rho_2)\neq 0$, on peut fixer un tel quadruplet pour lequel toutes les multiplicités ci-dessus sont non nulles. Il est bien connu que cela entraîne les relations :

$$(3)\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_j\leq\boldsymbol{\alpha}_{j,1}+\boldsymbol{\alpha}_{j,2}, & \boldsymbol{\beta}_j\leq\boldsymbol{\beta}_{j,1}+\boldsymbol{\beta}_{j,2},\\ \boldsymbol{\gamma}_{1,j'}\cup\boldsymbol{\gamma}_{2,j'}\leq\boldsymbol{\alpha}'_{j'}, & \boldsymbol{\delta}_{1,j'}\cup\boldsymbol{\delta}_{2,j'}\leq\boldsymbol{\beta}'_{j'}.\end{cases}$$

Ecrivons $\mathcal{E}'_j=(\boldsymbol{\lambda}'_j,\epsilon'_j)$, $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{\lambda}'_1\cup\boldsymbol{\lambda}'_2$. Puisque $p(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}'_j)\neq 0$, on a $\boldsymbol{\lambda}'_j\geq\boldsymbol{\lambda}_j$, d'où $\boldsymbol{\lambda}'\geq\boldsymbol{\lambda}$. Il suffit de prouver que $\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2\geq\boldsymbol{\lambda}'$. D'après le critère de [S] lemme 3.4, page 182, il suffit de montrer que, pour tout $i\geq 1$, on a la relation :

$$(4)\qquad S_{mult_{\boldsymbol{\lambda}'}(\geq i)}(\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2)\geq S_{mult_{\boldsymbol{\lambda}'}(\geq i)}(\boldsymbol{\lambda}').$$

Fixons $i\geq 1$, posons $r_j=mult_{\boldsymbol{\lambda}'_j}(\geq i)$, $r=mult_{\boldsymbol{\lambda}'}(\geq i)$. On a $r=r_1+r_2$ et :

$$S_r(\boldsymbol{\lambda}')=S_{r_1}(\boldsymbol{\lambda}'_1)+S_{r_2}(\boldsymbol{\lambda}'_2).$$

Pour toute fonction $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ à support fini, posons $f(\geq i)=\sum_{\ell\geq i}f(\ell)$. On a défini en [W4] XI.3 une fonction $w_j:\mathbb{N}\to\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\}$ associée à $\mathcal{E}'$. Posons $\mathbf{w}_j=w_j(\geq i)$. On a prouvé en [W4] XI.5 la congruence $\mathbf{w}_j\equiv\frac{r_j}{2}\ mod\ \mathbb{Z}$ et l'égalité :

$$S_{r_j}(\boldsymbol{\lambda}'_j)=2S_{\frac{r_j}{2}-\mathbf{w}_j}(\boldsymbol{\alpha}_j)+2S_{\frac{r_j}{2}+\mathbf{w}_j}(\boldsymbol{\beta}_j)-4\mathbf{w}_j^2-4H_j\mathbf{w}_j,$$

où $H_1=h_1+\frac{1}{2}$, $H_2=|h_2|$.

Grâce à (3), on a :

$$S_{\frac{r_j}{2}-\mathbf{w}_j}(\boldsymbol{\alpha}_j)\leq S_{\frac{r_j}{2}-\mathbf{w}_j}(\boldsymbol{\alpha}_{j,1})+S_{\frac{r_j}{2}-\mathbf{w}_j}(\boldsymbol{\beta}_{j,2}),$$

et une relation similaire pour $S_{\frac{r_j}{2}+\mathbf{w}_j}(\boldsymbol{\beta}_j)$. On obtient :

$$S_r(\boldsymbol{\lambda}')\leq 2\sum_{j,j'}(S_{\frac{r_j}{2}-\mathbf{w}_j}(\boldsymbol{\alpha}_{j,j'})+S_{\frac{r_j}{2}+\mathbf{w}_j}(\boldsymbol{\beta}_{j,j'}))-4\mathbf{w}_1^2-4\mathbf{w}_2^2-4H_1\mathbf{w}_1-4H_2\mathbf{w}_2.$$

Définissons des fonctions $y_{j,j'}, z_{j,j'}$ sur $\mathbb{N}$ par :

si $(j,j') \neq (e,e')$, $y_{j,j'} = \frac{1}{2}mult_{\boldsymbol{\lambda}'_j} - w_j$, $z_{j,j'} = \frac{1}{2}mult_{\boldsymbol{\lambda}'_j} + w_j$,

$y_{e,e'} = \frac{1}{2}mult_{\boldsymbol{\lambda}'_e} + w_e$, $z_{e,e'} = \frac{1}{2}mult_{\boldsymbol{\lambda}'_e} - w_e$.

Posons $\mathbf{y}_{j,j'} = y_{j,j'}(\geq i)$, $\mathbf{z}_{j,j'} = z_{j,j'}(\geq i)$. L'égalité précédente se récrit :

$$S_r(\boldsymbol{\lambda}') \leq 2\sum_{j,j'}(S_{\mathbf{y}_{j,j'}}(\boldsymbol{\gamma}_{j,j'}) + S_{\mathbf{z}_{j,j'}}(\boldsymbol{\delta}_{j,j'})) - 4\mathbf{w}_1^2 - 4\mathbf{w}_2^2 - 4H_1\mathbf{w}_1 - 4H_2\mathbf{w}_2.$$

Considérons une somme $S_{\mathbf{y}_{1,j'}}(\boldsymbol{\gamma}_{1,j'}) + S_{\mathbf{y}_{2,j'}}(\boldsymbol{\gamma}_{2,j'})$. C'est la somme de $\mathbf{y}_{1,j'} + \mathbf{y}_{2,j'}$ termes de la partition $\boldsymbol{\gamma}_{1,j'} \cup \boldsymbol{\gamma}_{2,j'}$. Elle est donc $\leq S_{\mathbf{y}_{1,j'}+\mathbf{y}_{2,j'}}(\boldsymbol{\gamma}_{1,j'} \cup \boldsymbol{\gamma}_{2,j'})$. Grâce à (3), elle est aussi $\leq S_{\mathbf{y}_{1,j'}+\mathbf{y}_{2,j'}}(\boldsymbol{\alpha}'_{j'})$. En introduisant les fonctions $y_{j'} = y_{1,j'} + y_{2,j'}$, $z_{j'} = z_{1,j'} + z_{2,j'}$ et les termes $\mathbf{y}_{j'} = y_{j'}(\geq i)$, $\mathbf{z}_{j'} = z_{j'}(\geq i)$, on obtient :

$$S_r(\boldsymbol{\lambda}') \leq 2\sum_{j'}(S_{\mathbf{y}_{j'}}(\boldsymbol{\alpha}'_{j'}) + S_{\mathbf{z}_{j'}}(\boldsymbol{\beta}'_{j'})) - 4\mathbf{w}_1^2 - 4\mathbf{w}_2^2 - 4H_1\mathbf{w}_1 - 4H_2\mathbf{w}_2.$$

Appliquons le lemme IX.4 à la partition $\boldsymbol{\nu}_j$ et aux entiers $\mathbf{y}_{j'}$ et $\mathbf{z}_{j'}$. Remarquons que $\mathbf{y}_{j'} + \mathbf{z}_{j'} = r_1 + r_2 = r$. En posant :

$$c = \frac{(\mathbf{y}_1 - \mathbf{z}_1)^2}{2} + \frac{(\mathbf{y}_2 - \mathbf{z}_2)^2}{2} - (\mathbf{y}_1 - \mathbf{z}_1)(m_1 + \frac{1}{2}) - (\mathbf{y}_2 - \mathbf{z}_2)(m_2 + \frac{1}{2}) - 4\mathbf{w}_1^2 - 4\mathbf{w}_2^2 - 4H_1\mathbf{w}_1 - 4H_2\mathbf{w}_2,$$

on obtient alors l'inégalité :

$$S_r(\boldsymbol{\lambda}') \leq S_r(\boldsymbol{\nu}_1) + S_r(\boldsymbol{\nu}_2) + c.$$

On calcule c en considérant les différents cas : $m_1 \equiv m_2 \ mod\ 2\mathbb{Z}$ ou $m_1 \not\equiv m_2 \ mod\ 2\mathbb{Z}$, $m_1 \geq m_2$ ou $m_1 < m_2$. On trouve $c = 0$. Cela démontre l'inégalité (4) et achève de prouver l'assertion (ii) de l'énoncé.

Notons $\Gamma(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ l'ensemble des $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) \in \Gamma(m_1, m_2)$ tels que $\boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\lambda}$ et $x(\rho(\boldsymbol{\nu}_1) \otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_1}{2}]}, \rho(\boldsymbol{\nu}_2) \otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_2}{2}]}) \neq 0$. D'après (1), pour prouver l'assertion (iii), il suffit de prouver que :

$$\Gamma(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \{({}^t\boldsymbol{\mu}_1, {}^t\boldsymbol{\mu}_2); (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in Gr(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)\},$$

et que, pour $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) \in \Gamma(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, on a l'égalité $x(\rho(\boldsymbol{\nu}_1) \otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_1}{2}]}, \rho(\boldsymbol{\nu}_2) \otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_2}{2}]}) = 1$.

Soit $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) \in \Gamma(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. On reprend la démonstration précédente. On y a prouvé les inégalités $\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\lambda}' \leq \boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2$. Maintenant l'hypothèse $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) \in \Gamma(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ impose que les deux termes extrêmes de cette suite d'inégalités sont égaux. Donc $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}$, ce qui implique $\boldsymbol{\lambda}'_j = \boldsymbol{\lambda}_j$. Puisque $p(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}'_j) \neq 0$, cela entraîne $\mathcal{E}'_j = \mathcal{E}_j$, cf. IX.8 (1). On a utilisé une suite d'inégalités pour prouver (4). Mais (4) est maintenant une égalité. Il en est donc de même de toutes les inégalités que l'on a utilisées. On a aussi utilisé le lemme IX.4 pour la partition $\boldsymbol{\nu}_{j'}$ et les entiers $\mathbf{y}_{j'}$ et $\mathbf{z}_{j'}$. L'inégalité de ce lemme doit maintenant être une égalité. Reprenons la preuve de ce lemme en affectant les objets d'indices j' et en supposant $[\frac{m_{j'}}{2}]$ pair pour fixer les idées. On voit que l'ensemble des $\mathbf{y}_{j'} + \mathbf{z}_{j'}$plus grands termes de $E_{j'}$ est égal à la réunion de celui des $\mathbf{y}_{j'}$ plus grands termes de $E_{j'}^+$ et de celui des $\mathbf{z}_{j'}$ plus grands termes de $E_{j'}^-$. Soustrayons de cette égalité ensembliste la même égalité relative à l'entier $i+1$. Par définition des ensembles $E_{j'}, E_{j'}^+, E_{j'}^-$, on obtient l'égalité suivante, avec des notations évidentes :

$$(5) \qquad \{t_{j'} - \ell + \nu_{j',\ell}; \ell = mult_{\boldsymbol{\lambda}}(> i) + 1, ..., mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i)\} =$$

$$\{2t_{j'}^+ - 2\ell + 2\alpha'_{j',\ell}; \ell = y_{j'}(> i) + 1, ..., y_{j'}(\geq i)\} \cup \{2t_{j'}^- - 2\ell + 2\beta'_{j',\ell} + 1; \ell = z_{j'}(> i) + 1, ..., z_{j'}(\geq i)\}.$$

Les ensembles de droite ont respectivement $y_{j'}(i)$ et $z_{j'}(i)$ éléments. Notons $\bar{e}$, resp. $\bar{e}'$, l'élément de $\{1,2\}$ autre que e, resp. e'. On a les égalités :

$$y_{\bar{e}'} = \frac{1}{2}mult_{\boldsymbol{\lambda}} - w_1 - w_2, \ z_{\bar{e}'} = \frac{1}{2}mult_{\boldsymbol{\lambda}} + w_1 + w_2,$$

$$y_{e'}=\frac{1}{2}mult_{\boldsymbol{\lambda}}-w_{\bar{e}}+w_e,\ z_{e'}=\frac{1}{2}mult_{\boldsymbol{\lambda}}+w_{\bar{e}}-w_e.$$

A ce point, on doit rappeler la définition des fonctions w_j, cf. [W4] XI.3. On doit légèrement modifier les formules de cette référence car, dans le cas orthogonal, on n'avait considéré que des fonctions ϵ_2 pour lesquelles h_2 était ≥ 0. Les formules se modifient ainsi. On note $\mathfrak{s}$ la fonction sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mathfrak{s}(\ell)=0$ pour $\ell\geq 0$, $\mathfrak{s}(\ell)=1$ pour $\ell<0$. Alors :

$$w_j(i)=\begin{cases}\epsilon_j(i)\frac{(-1)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(\geq i)+h_j+\mathfrak{s}(h_j)}}{2}, & si\ mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(i)\ est\ impair,\\ 0, & si\ mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(i)\ est\ pair.\end{cases}$$

Supposons d'abord $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ pair. Alors $mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(i)$ et $mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(i)$ sont tous deux pairs : pour l'un de ces termes, cela résulte du fait que $\boldsymbol{\lambda}_1$ est symplectique et $\boldsymbol{\lambda}_2$ orthogonal ; pour l'autre, cela résulte de l'égalité $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)=mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(i)+mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(i)$. Donc $w_1(i)=w_2(i)=0$ et $y_{j'}(i)=z_{j'}(i)=\frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)}{2}$. On a déjà dit que, puisque $\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2=\boldsymbol{\lambda}$, $\nu_{j',\ell}$ était constant pour $\ell=mult_{\boldsymbol{\lambda}}(>i)+1,...,mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i)$. Notons $\nu_{j'}(i)$ cette valeur constante.

Remarque. Cette définition n'a de sens que si l'ensemble d'indices ℓ ci-dessus n'est pas vide, i.e. $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)>0$. Chaque fois qu'intervient $\nu_{j'}(i)$, on suppose implicitement que cette condition est vérifiée. La même remarque s'applique à d'autres termes que nous définirons ci-dessous.

Le membre de gauche de (5) est un intervalle d'entiers consécutifs qui a $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ éléments. L'égalité (5) donne la décomposition de cet intervalle en $\frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)}{2}$ termes pairs et $\frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)}{2}$ termes impairs. Il en résulte que $\alpha'_{j',\ell}$ est constant pour $\ell=y_{j'}(>i)+1,...,y_{j'}(\geq i)$ et $\beta'_{j',\ell}$ est constant pour $\ell=z_{j'}(>i)+1,...,z_{j'}(\geq i)$. Notons $\alpha'_{j'}(i)$ et $\beta'_{j'}(i)$ ces valeurs constantes. Elles sont données par les égalités :

$$\alpha'_{j'}(i)=y_{j'}(\geq i)-t^+_{j'}+[\frac{t_{j'}-mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i)+\nu_{j'}(i)+1}{2}],$$

$$\beta'_{j'}(i)=z_{j'}(\geq i)-t^-_{j'}+[\frac{t_{j'}-mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i)+\nu_{j'}(i)}{2}].$$

En utilisant les égalités IX.4(2), on transforme ces égalités en :

$$\alpha'_{j'}(i)=y_{j'}(\geq i)+[\frac{\nu_{j'}(i)-mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i)+\frac{1}{2}+(-1)^{1+[\frac{m_{j'}}{2}]}(m_{j'}+\frac{1}{2})}{2}],$$

$$\beta'_{j'}(i)=z_{j'}(\geq i)+[\frac{\nu_{j'}(i)-mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i)+\frac{1}{2}+(-1)^{[\frac{m_{j'}}{2}]}(m_{j'}+\frac{1}{2})}{2}].$$

On avait supposé $[\frac{m_{j'}}{2}]$ pair. Dans le cas où $[\frac{m_{j'}}{2}]$ est impair, la démonstration du lemme IX.4 conduit à échanger les rôles de $\alpha'_{j'}$ et $\beta'_{j'}$. La formule générale est alors :

$$(6)\begin{cases}\alpha'_{j'}(i)=y_{j'}(\geq i)+[\frac{\nu_{j'}(i)-mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i)-m_{j'}}{2}],\\ \beta'_{j'}(i)=y_{j'}(\geq i)+[\frac{\nu_{j'}(i)-mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i)+m_{j'}+1}{2}].\end{cases}$$

Supposons maintenant $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ impair. Posons $j(i)=1$ si i est pair, $j(i)=2$ si i est impair. Si $\bar{j}(i)$ est l'élément de $\{1,2\}$ autre que $j(i)$, $mult_{\boldsymbol{\lambda}_{\bar{j}(i)}}(i)$ est pair puisque $\boldsymbol{\lambda}_{\bar{j}(i)}$ est respectivement orthogonal ou symplectique. Donc $mult_{\boldsymbol{\lambda}_{j(i)}}(i)$ est impair. On vérifie alors les égalités :

$$y_{j'}(i)=\frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)}{2}-(-1)^{(j'-\bar{e}')(j(i)-\bar{e})}w_{j(i)}(i),$$

$$z_{j'}(i)=\frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)}{2}+(-1)^{(j'-\bar{e}')(j(i)-\bar{e})}w_{j(i)}(i).$$

Le membre de gauche de (5), qui a un nombre impair d'éléments, doit posséder $y_{j'}(i)$ termes pairs et $z_{j'}(i)$ termes impairs. Cela impose que $t_{j'} - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) + \nu_{j'}(i)$ est pair si $y_{j'}(i) > z_{j'}(i)$, impair si $y_{j'}(i) < z_{j'}(i)$. On a supposé $[\frac{m_{j'}}{2}]$ pair. Dans le cas où $[\frac{m_{j'}}{2}]$ est impair, on doit échanger les rôles de $y_{j'}$ et $z_{j'}$. Cela revient à remplacer $t_{j'}$ par $t_{j'} + [\frac{m_{j'}}{2}]$ dans l'assertion précédente. On peut ensuite, grâce à IX.4(2), remplacer $t_{j'} + [\frac{m_{j'}}{2}]$ par $[\frac{m_{j'}-1}{2}] + [\frac{m_{j'}}{2}]$. Cette expression est $\equiv m_{j'} + 1 \ mod \ 2\mathbb{Z}$. En utilisant les formules pour $y_{j'}(i), z_{j'}(i)$ et $w_{j(i)}(i)$, on obtient l'égalité :

$$\epsilon_{j(i)}(i) = (-1)^{f_{j'}(i)},$$

où :

$$f_{j'}(i) = \nu_{j'}(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) + m_{j'} + (j' - \bar{e}')(j(i) - \bar{e}) + mult_{\boldsymbol{\lambda}_{j(i)}}(\geq i) + h_{j(i)} + \mathfrak{s}(h_{j(i)}).$$

En traitant tous les cas possibles, on vérifie que :

$$m_{j'} + h_1 + h_2 \equiv (j' - \bar{e}')(\bar{e} - 1) \ mod \ 2\mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{s}(h_{j(i)}) \equiv \ (j(i) - 1)(h_1 + \bar{e}' - 1) \ mod \ 2\mathbb{Z}.$$

De plus, $j(i) - 1 \equiv i \ mod \ 2\mathbb{Z}$. Alors :

$$f_{j'}(i) \equiv \nu_{j'}(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) + mult_{\boldsymbol{\lambda}_{j(i)}}(\geq i) + h_{j(i)} - h_1 - h_2 + i(h_1 + j' - 1) \ mod \ 2\mathbb{Z}.$$

Parce que $\nu_1(i) + \nu_2(i) = i$, on vérifie que la parité de $\nu_{j'}(i) + ij'$ ne dépend pas de j'. Alors la parité de $f_{j'}(i)$ n'en dépend pas non plus. Remarquons que $h_2 \equiv N_2 \equiv N \ mod \ 2\mathbb{Z}$. On voit alors que $f_{j'}(i) \equiv e_{j(i)}(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, i)$ avec les notations utilisées avant l'énoncé. On a ainsi obtenu les égalités :

$$(7) \begin{cases} \epsilon_1(i) = (-1)^{e_1(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, i)}, & si \ i \in Jord_{pair}(\boldsymbol{\lambda}_1), \\ \epsilon_2(i) = (-1)^{e_2(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, i)}, & si \ i \in Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda}_2), \end{cases}$$

sous l'hypothèse $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ impair. L'égalité (5) a aussi les mêmes conséquences pour les partitions $\boldsymbol{\alpha}'_{j'}$ et $\boldsymbol{\beta}'_{j'}$ que dans le cas où $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ est pair. On obtient encore les formules (6).

On a prouvé l'inégalité :

$$S_{\mathbf{y}_{1,j'}}(\boldsymbol{\gamma}_{1,j'}) + S_{\mathbf{y}_{2,j'}}(\boldsymbol{\gamma}_{2,j'}) \leq S_{\mathbf{y}_{j'}}(\boldsymbol{\alpha}'_{j'}).$$

C'est maintenant une égalité. Un raisonnement analogue à celui qui conduit à l'égalité (5) montre que la famille $(\alpha'_{j',\ell})_{\ell = y_{j'}(>i)+1,\dots,y_{j'}(\geq i)}$ est égale, à l'ordre des termes près, à la réunion, en un sens évident, des deux familles :

$$(\gamma_{1,j',\ell})_{\ell = y_{1,j'}(>i)+1,\dots,y_{1,j'}(\geq i)} \cup (\gamma_{2,j',\ell})_{\ell = y_{2,j'}(>i)+1,\dots,y_{2,j'}(\geq i)}.$$

Or les termes de la famille $(\alpha'_{j',\ell})_{\ell = y_{j'}(>i)+1,\dots,y_{j'}(\geq i)}$ sont tous égaux à $\alpha'_{j'}(i)$. Il en est donc de même des termes des deux familles ci-dessus. Un raisonnement similaire vaut pour les partitions $\boldsymbol{\delta}_{j,j'}$. En traduisant les relations obtenues en termes des partitions $\boldsymbol{\alpha}_{j,j'}$ et $\boldsymbol{\beta}_{j,j'}$, on obtient le résultat suivant. Posons :

$$A_j = \{\frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(> i)}{2} - w_j(> i) + 1, \dots, \frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(\geq i)}{2} - w_j(\geq i)\},$$

$$B_j = \{\frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(> i)}{2} + w_j(> i) + 1, \dots, \frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(\geq i)}{2} + w_j(\geq i)\}.$$

Alors $\alpha_{j,j',\ell}$, resp. $\beta_{j,j',\ell}$ est constant pour $\ell \in A_j$, resp. $\ell \in B_j$. En notant $\alpha_{j,j'}(i)$, resp. $\beta_{j,j'}(i)$, ces valeurs constantes, on a les égalités :

$$(8) \qquad \begin{cases} si \ (j,j') \neq (e,e'), \ \alpha_{j,j'}(i) = \alpha'_{j'}(i), \ \beta_{j,j'}(i) = \beta'_{j'}(i), \\ \qquad \alpha_{e,e'}(i) = \beta'_{e'}(i), \ \beta_{e,e'}(i) = \alpha'_{j'}(i). \end{cases}$$

On a calculé les partitions $\boldsymbol{\alpha}_j$ et $\boldsymbol{\beta}_j$ en [W4] XI.3. Les termes $\alpha_{j,\ell}$, resp. $\beta_{j,\ell}$ sont constants pour $\ell \in A_j$, resp. $\ell \in B_j$. En notant $\alpha_j(i)$, resp. $\beta_j(i)$, ces valeurs constantes, on a les égalités :

$$\alpha_j(i) = \frac{i}{2} - H_j - 2w_j(\geq i) + \begin{cases} 0, & si\ j \neq j(i), \\ \frac{\epsilon_j(i)}{2}(-1)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(\geq i)+h_j+\mathfrak{s}(h_j)}, & si\ j = j(i), \end{cases}$$

$$\beta_j(i) = i - \alpha_j(i).$$

Les inégalités (3) sont des égalités. Alors, pourvu que A_j, resp. B_j, ne soit pas vide, on a les égalités $\alpha_j(i) = \alpha_{j,1}(i) + \alpha_{j,2}(i)$, resp. $\beta_j(i) = \beta_{j,1}(i) + \beta_{j,2}(i)$. Grâce à (6) et (8), on calcule $\alpha_{j,1}(i) + \alpha_{j,2}(i) + \beta_{j,1}(i) + \beta_{j,2}(i) = \alpha'_1(i) + \beta'_1(i) + \alpha'_2(i) + \beta'_2(i) = i$. Les deux égalités précédentes sont donc équivalentes. Elles doivent être vérifiées pourvu que A_j ou B_j soit non vide, c'est-à-dire pourvu que $mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(i) \neq 0$. En explicitant grâce à (6) et (8), on obtient :

(9) si $mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(i) \neq 0$,

$$\alpha_j(i) = mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - 2w_j(\geq i) +$$

$$\begin{cases} [\frac{\nu_1(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - m_1}{2}] + [\frac{\nu_2(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - m_2}{2}], & si\ j \neq e, \\ [\frac{\nu_{\bar{e}'}(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - m_{\bar{e}'}}{2}] + [\frac{\nu_{e'}(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) + m_{e'} + 1}{2}], & si\ j = e. \end{cases}$$

En fait, cette égalité est automatique pour $j \neq j(i)$. En effet, supposons $j \neq j(i)$ et, pour fixer les idées, supposons $j(i) = e$. On a $\nu_1(i) + \nu_2(i) = i \equiv j(i) + 1 \equiv j\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Egalement $m_1 + m_2 \equiv e \equiv j + 1\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Les nombres $\nu_1(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - m_1$ et $\nu_2(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - m_2$ sont donc de parités distinctes. Si a et b sont des entiers de parités distinctes, on a évidemment $[\frac{a}{2}] + [\frac{b}{2}] = \frac{a+b-1}{2}$. Le membre de droite de (9) vaut alors :

$$mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - 2w_j(\geq i) + \frac{\nu_1(i) + \nu_2(i) - 2mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - m_1 - m_2 - 1}{2},$$

ou encore :

$$\frac{i}{2} - \frac{m_1 + m_2 + 1}{2} - 2w_j(\geq i).$$

En traitant tous les cas, on vérifie que $\frac{m_1+m_2+1}{2} = H_{\bar{e}} = H_j$ et l'expression ci-dessus est bien égale à $\alpha_j(i)$.

Pour $j = j(i)$, on peut faire un calcul similaire. Cette fois (en supposant encore $j \neq e$), les nombres $\nu_1(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - m_1$ et $\nu_2(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - m_2$ sont des entiers de même parité. Si a et b sont des entiers de même parité, on a l'égalité $[\frac{a}{2}] + [\frac{b}{2}] = \frac{a+b-1}{2} + \frac{(-1)^a}{2}$. Alors le membre de droite de (9) est égal à :

$$\frac{i}{2} - H_j - 2w_j(\geq i) + \frac{(-1)^{\nu_{\bar{e}'}(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) - m_{\bar{e}'}}}{2}.$$

L'égalité de cette expression avec $\alpha_{j(i)}(i)$ est équivalente à :

$$\epsilon_{j(i)}(i) = (-1)^{f_{\bar{e}'}(i)},$$

ou encore à la relation (7), et cette fois que $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ soit pair ou impair. Par définition de $Gr(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, la relation (7) entraîne que $({}^t\boldsymbol{\nu}_1, {}^t\boldsymbol{\nu}_2)$ appartient à $Gr(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

Posons $\rho_j = \rho(\boldsymbol{\nu}_j) \otimes sgn_{CD}^{[\frac{m_j}{2}]}$ et calculons $x(\rho_1, \rho_2)$. On a vu que seul le couple $(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2) = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ intervenait dans notre calcul. Puisque $p(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_j) = 1$, on a $x(\rho_1, \rho_2) = x(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2; \rho_1, \rho_2)$. Ce terme est une somme sur des quadruplets de couples $(\boldsymbol{\alpha}_{j,j'}, \boldsymbol{\beta}_{j,j'})$ vérifiant (3). On a vu qu'il n'y a qu'un seul tel quadruplet : il est déterminé par (8). Il ne reste plus, pour cet unique quadruplet, qu'un produit de certaines multiplicités. Mais les inégalités (3) sont des égalités et, comme il est bien connu, cela entraîne que ces multiplicités sont égales à 1. Donc $x(\rho_1, \rho_2) = 1$.

Supposons réciproquement que $({}^t\boldsymbol{\nu}_1, {}^t\boldsymbol{\nu}_2)$ appartient à $Gr(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ et supposons l'assertion (i) démontrée. On peut alors inverser le raisonnement ci-dessus. On connaît le nombre de termes pairs, resp. impairs, du membre de gauche de (5) : c'est évidemment $[\frac{mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)}{2}]$ si $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ est pair ; sinon, ce nombre est déterminé par le raisonnement conduisant à la relation (7). On en déduit par récurrence le calcul des partitions $\boldsymbol{\alpha}'_{j'}$ et $\boldsymbol{\beta}'_{j'}$. On définit des partitions $\boldsymbol{\alpha}_{j,j'}$, $\boldsymbol{\beta}_{j,j'}$ de sorte que, pour $\ell \in A_j$, $\alpha_{j,j',\ell}$ soit égal à $\alpha_{j,j'}(i)$ et, pour $\ell \in B_j$, $\beta_{j,j',\ell}$ soit égal à $\beta_{j,j'}(i)$, ces entiers étant définis par (6) et (7). On a alors :

$$\boldsymbol{\gamma}_{1,j'} \cup \boldsymbol{\gamma}_{2,j'} = \boldsymbol{\alpha}'_{j'},\ \boldsymbol{\delta}_{1,j'} \cup \boldsymbol{\delta}_{2,j'} = \boldsymbol{\beta}'_{j'}.$$

On vérifie comme ci-dessus l'égalité (9), qui entraîne :

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_{j,1} + \boldsymbol{\alpha}_{j,2},\ \boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\beta}_{j,1} + \boldsymbol{\beta}_{j,2}.$$

Comme ci-dessus, le produit des multiplicités relatives au quadruplet de couples $(\boldsymbol{\alpha}_{j,j'}, \boldsymbol{\beta}_{j,j'})$ est égal à 1, ce qui entraîne $x(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2; \rho_1, \rho_2) > 0$, a fortiori $x(\rho_1, \rho_2) > 0$, donc $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ appartient à $\Gamma(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. Cela achève la preuve de (iii), sous réserve que (i) soit vérifié.

Il nous reste à vérifier (i). Soit donc $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ tel que $({}^t\boldsymbol{\nu}_1, {}^t\boldsymbol{\nu}_2) \in Gr(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. On veut montrer que $m_{j'} = m(\boldsymbol{\nu}_{j'})$. Par définition :

$$m(\boldsymbol{\nu}_{j'}) + \frac{1}{2} = |t^+_{j'} - t^-_{j'} - \frac{1}{2}|$$

L'ensemble $E_{j'}$ est réunion des membres de gauche de (5) pour $i \geq 1$ et de l'ensemble $\{t_{j'} - \ell; \ell = mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq 1) + 1, ..., t_{j'}\}$. Le nombre $t^+_{j'} - t^-_{j'}$ est la somme sur tous ces ensembles de la différence entre le nombre de leurs termes pairs et celui de leurs termes impairs. La contribution d'un membre de gauche de (5) à $t^+_{j'} - t^-_{j'}$ est nulle si $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ est pair et vaut $(-1)^{t_{j'} - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i) + \nu_{j'}(i)}$ si $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ est impair. On a déjà expliqué que $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(i)$ était impair si et seulement si l'un des termes $mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(i)$ ou $mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(i)$ l'était et alors un seul de ces termes l'est. La contribution du dernier ensemble est de même 0 si $t_{j'} + mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq 1)$ est pair, 1 si ce terme est impair. On obtient donc :

$$t^+_{j'} - t^-_{j'} = (-1)^{t_{j'}} S_{1,j'} + (-1)^{t_{j'}} S_{2,j'} + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{t_{j'} + mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq 1)}}{2},$$

où :

$$S_{j,j'} = \sum_{i \geq 1; mult_{\boldsymbol{\lambda}_j}(i)\ impair} (-1)^{\nu_{j'}(i) - mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq i)}.$$

Puis :

$$(10) \qquad m(\boldsymbol{\nu}_{j'}) + \frac{1}{2} = |S_{1,j'} + S_{2,j'} + \frac{(-1)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq 1) + 1}}{2}|.$$

Calculons $S_{1,j'}$. Pour $i \geq 1$ tel que $mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(i)$ est impair, i est pair puisque $\boldsymbol{\lambda}_1$ est symplectique, donc $\nu_1(i) \equiv \nu_2(i)\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Puisque $({}^t\boldsymbol{\nu}_1, {}^t\boldsymbol{\nu}_2) \in Gr(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, on a $\epsilon_1(i) = (-1)^{e_1(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, i)} = (-1)^{\nu_{j'}(i) + mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(\geq i) + h_2}$ (on utilise ici la congruence $h_2 \equiv N\ mod\ 2\mathbb{Z}$). On obtient :

$$S_{1,j'} = (-1)^{h_2} \sum_{i \geq 1; mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(i)\ impair} \epsilon_1(i)(-1)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq i)},$$

ou encore :

$$S_{1,j'} = 2(-1)^{h_2+1} \left(\sum_{i \geq 1; mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(i)\ impair} \frac{1 - \epsilon_1(i)}{2} (-1)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq i)} \right)$$

$$+(-1)^{h_2} \left(\sum_{i \geq 1; mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(i)\ impair} (-1)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq i)} \right).$$

La deuxième somme est une somme alternée. Elle vaut 0, resp. -1, si le nombre de termes est pair, resp. impair, ou encore si $mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq 1)$ est pair, resp. impair. Elle vaut donc :

$$-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq 1)}}{2}.$$

On voit que la première somme est égal au terme $N(\mathcal{E}_1)$ que l'on a défini en IX.8 (en fait, on a défini ce terme pour les partitions orthogonales, mais la définition est identique dans le cas symplectique). D'après [W4] XI.3, on a $h_1 = 2N(\mathcal{E}_1)$ ou $h_1 = -2N(\mathcal{E}_1) - 1$. En tout cas,

$$2N(\mathcal{E}_1) = -\frac{1}{2} + (-1)^{h_1}(h_1 + \frac{1}{2}).$$

Alors :

$$S_{1,j'} = (-1)^{h_1+h_2+1}(h_1+\frac{1}{2}) + \frac{(-1)^{h_2+mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq 1)}}{2}.$$

Calculons $S_{2,j'}$. Pour $i \geq 1$ tel que $mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}$ est impair, i est impair donc $\nu_1(i) \not\equiv \nu_2(i)\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Cette fois :

$$\epsilon_2(i) = (-1)^{e_2(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,i)} = (-1)^{\nu_1(i)+mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq i)} = (-1)^{\nu_{j'}(i)+j'+1+mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq i)}.$$

Le calcul se poursuit comme ci-dessus et on obtient :

$$S_{2,j'} = (-1)^{h_2+j'}(h_2+\frac{1}{2}) + \frac{(-1)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(\geq 1)+j'+1}}{2}.$$

On remarque que, $\boldsymbol{\lambda}_2$ étant orthogonale, on a $mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(\geq 1) \equiv S(\boldsymbol{\lambda}_2) \equiv h_2\ mod\ 2\mathbb{Z}$, d'où $mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq 1) \equiv mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq 1) + h_2\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Un certain nombre de termes se simplifient et on obtient :

$$S_{1,j'} + S_{2,j'} + \frac{(-1)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}}(\geq 1)+1}}{2} = (-1)^{h_1+h_2+1}(h_1 + (-1)^{h_1+j'+1}h_2 + \frac{1}{2}).$$

Par définition :

$$m_1 + \frac{1}{2} = |h_1 + (-1)^{h_1}h_2 + \frac{1}{2}|,\ m_2 + \frac{1}{2} = |h_1 - (-1)^{h_1}h_2 + \frac{1}{2}|.$$

La valeur absolue de l'expression ci-dessus est donc égale à $m_{j'} + \frac{1}{2}$. Grâce à (10), cela démontre que $m(\boldsymbol{\nu}_{j'}) = m_{j'}$. Cela achève la preuve. $\square$

IX.10. Egalité de deux termes dans le gradué de $\mathcal{C}$

Soit $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(N)$. Notons $\boldsymbol{\lambda}_1$, resp. $\boldsymbol{\lambda}_2$, la partition formée des termes pairs, resp. impairs, de $\boldsymbol{\lambda}$. Pour toute fonction $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$, notons ϵ_1, resp. ϵ_2, la restriction de ϵ à $Jord_{pair}(\boldsymbol{\lambda}) = Jord_{pair}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, resp. $Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda}) = Jord_{impair}(\boldsymbol{\lambda}_2)$. Posons $\mathcal{E}_1 = (\boldsymbol{\lambda}_1, \epsilon_1)$, $\mathcal{E}_2 = (\boldsymbol{\lambda}_2, \epsilon_2)$. On a $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \in \mathcal{I}$. On pose $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}, \epsilon) = \boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

Soit $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$, supposons $\boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^- = \boldsymbol{\lambda}$. On pose $N^+ = S(\boldsymbol{\lambda}^+)$, $N^- = S(\boldsymbol{\lambda}^-)$. Pour $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$, posons :

$$< \epsilon, \boldsymbol{\lambda}^- > = \prod_{i \in Jord(\boldsymbol{\lambda})} \epsilon(i)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}^-}(i)}.$$

On définit l'élément de $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) = (-1)^{NN^-} \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}} < \epsilon, \boldsymbol{\lambda}^- > \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}, \epsilon).$$

Proposition. *Soit* $(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)\in\mathcal{P}_2(N)$ *tel que* $\boldsymbol{\lambda}^+\cup\boldsymbol{\lambda}^-=\boldsymbol{\lambda}$. *L'élément* $k\circ\tau\circ\iota(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-))$ *de* $\mathcal{C}$ *appartient à* $\mathcal{C}_{\geq {}^t\boldsymbol{\lambda}}$. *Son image dans* $\mathcal{C}_{\geq {}^t\boldsymbol{\lambda}}/\mathcal{C}_{<{}^t\boldsymbol{\lambda}}$ *est égale à celle de* $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}$.

Preuve. La première assertion résulte immédiatement de la proposition précédente. Pour $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$, définissons $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ comme ci-dessus et posons $Gr(\epsilon)=Gr(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$. Quand ϵ parcourt $\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$, les ensembles $Gr(\epsilon)$ sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble des couples $(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)\in\mathcal{P}_2(N)$ tels que $\boldsymbol{\mu}_1\cup\boldsymbol{\mu}_2={}^t\boldsymbol{\lambda}$. Plus précisément, pour un tel couple, notons $\epsilon_{\boldsymbol{\mu}_2}$ l'élément de $\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$ défini par :

$$\epsilon_{\boldsymbol{\mu}_2}(i)=\begin{cases}(-1)^{{}^t\boldsymbol{\mu}_2(i)+mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(\geq i)+N}, & si\ i\ est\ pair,\\ (-1)^{{}^t\boldsymbol{\mu}_2(i)+mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq i)+1}, & si\ i\ est\ impair.\end{cases}$$

Cet élément $\epsilon_{\boldsymbol{\mu}_2}$ est l'unique ϵ tel que $(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)$ appartienne à $Gr(\epsilon)$. Alors l'image de $k\circ\tau\circ\iota(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-))$ dans $\mathcal{C}_{\geq {}^t\boldsymbol{\lambda}}/\mathcal{C}_{<{}^t\boldsymbol{\lambda}}$ est égale à :

$$(-1)^{NN^-}\sum c(m(\boldsymbol{\mu}_1),m(\boldsymbol{\mu}_2))\gamma(\boldsymbol{\mu}_1)\gamma(\boldsymbol{\mu}_2)<\epsilon_{\boldsymbol{\mu}_2},\boldsymbol{\lambda}^->proj_{{}^t\boldsymbol{\lambda}}(\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_1)\otimes\tilde{\chi}(\boldsymbol{\mu}_2)),$$

où on somme sur les $(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)$ tels que $\boldsymbol{\mu}_1\cup\boldsymbol{\mu}_2={}^t\boldsymbol{\lambda}$. En comparant avec le lemme VIII.2, il suffit de prouver que, pour tout tel couple, on a l'égalité :

$$(1)\qquad \alpha(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-;\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)=(-1)^{NN^-}c(m(\boldsymbol{\mu}_1),m(\boldsymbol{\mu}_2))\gamma(\boldsymbol{\mu}_1)\gamma(\boldsymbol{\mu}_2)<\epsilon_{\boldsymbol{\mu}_2},\boldsymbol{\lambda}^->.$$

Fixons un tel couple $(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)$ et posons $\boldsymbol{\nu}_j={}^t\boldsymbol{\mu}_j$ pour $j=1,2$. On a l'égalité :

$$c(m(\boldsymbol{\mu}_1),m(\boldsymbol{\mu}_2))\gamma(\boldsymbol{\mu}_1)\gamma(\boldsymbol{\mu}_2)=(-1)^{\frac{N^2+N}{2}+z(\boldsymbol{\nu}_1)+z(\boldsymbol{\nu}_2)}.$$

Par définition de ces termes et d'après l'égalité $\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2=\boldsymbol{\lambda}$, on a l'égalité $z(\boldsymbol{\nu}_1)+z(\boldsymbol{\nu}_2)=z(\boldsymbol{\lambda})$. On a aussi :

$$<\epsilon_{\boldsymbol{\mu}_2},\boldsymbol{\lambda}^->=\prod_{i\in Jord(\boldsymbol{\lambda})}\epsilon_{\boldsymbol{\mu}_2}(i)^{mult_{\boldsymbol{\lambda}^-}(i)}=(-1)^{b(\boldsymbol{\nu}_2)+d},$$

où :

$$b(\boldsymbol{\nu}_2)=\sum_{i\geq1}\boldsymbol{\nu}_2(i)mult_{\boldsymbol{\lambda}^-}(i),$$

$$d=\left(\sum_{i\geq1,i\ pair}mult_{\boldsymbol{\lambda}^-}(i)(mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(\geq i)+N)\right)+\left(\sum_{i\geq1;i\ impair}mult_{\boldsymbol{\lambda}^-}(i)(mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\geq i)+1)\right).$$

On reconnaît dans $b(\boldsymbol{\nu}_2)$ le terme noté $a(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-;\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)$ en VIII.3. Le membre de droite de l'expression (1) est donc égal à :

$$(-1)^{NN^-+\frac{N^2+N}{2}+z(\boldsymbol{\lambda})+a(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-;\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)+d}.$$

D'après le lemme VIII.3 et la proposition VIII.4, le membre de gauche est égal à :

$$(-1)^{\frac{N^2+N}{2}+z(\boldsymbol{\lambda}^+)+z(\boldsymbol{\lambda}^-)+a(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-;\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2)}.$$

Il reste simplement à prouver :

$$(2)\qquad z(\boldsymbol{\lambda}^+)+z(\boldsymbol{\lambda}^-)+z(\boldsymbol{\lambda})+NN^-+d\equiv 0\ mod\ 2\mathbb{Z}.$$

On pose $M=mult_{\boldsymbol{\lambda}}$, $M^+=mult_{\boldsymbol{\lambda}^+}$, $M^-=mult_{\boldsymbol{\lambda}^-}$. Pour calculer les termes $z(\boldsymbol{\lambda})$ etc..., on utilise la remarque qui précède la proposition VIII.4. Pour tout $i\geq1$, impair, la contribution de i à $z(\boldsymbol{\lambda}^+)+z(\boldsymbol{\lambda}^-)+z(\boldsymbol{\lambda})$ est :

$$\equiv\frac{M^+(i)^2-M^+(i)}{2}+M^+(i)M^+(\geq i)+\frac{M^-(i)^2-M^-(i)}{2}+M^-(i)M^-(\geq i)+\frac{M(i)^2-M(i)}{2}+M(i)M(\geq i).$$

Ici comme dans la suite de la démonstration, $\equiv$ signifie congru modulo $2\mathbb{Z}$. En utilisant l'égalité $M^+ + M^- = M$, on voit que cette expression est :

$$\equiv M^-(i) + M(i)M^-(i) + M^-(i)M(\geq i) + M(i)M^-(\geq i).$$

Et $z(\boldsymbol{\lambda}^+) + z(\boldsymbol{\lambda}^-) + z(\boldsymbol{\lambda})$ est congru à la somme de ces termes pour i impair.

Parce que $\boldsymbol{\lambda}_2$ est orthogonale, $mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(\geq 1) \equiv S(\boldsymbol{\lambda}_2)$. De plus $S(\boldsymbol{\lambda}_1)$ est pair puisque $\boldsymbol{\lambda}_1$ est symplectique, donc $S(\boldsymbol{\lambda}_2) \equiv N$. Alors, pour tout $i \geq 1$, $N + mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(\geq i) \equiv \sum_{j; 1 \leq j < i} mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(j)$. On utilise de plus les égalités :

$$mult_{\boldsymbol{\lambda}_1}(i) = \begin{cases} M(i), & si\ i\ est\ pair, \\ 0, & si\ i\ est\ impair, \end{cases}$$

$$mult_{\boldsymbol{\lambda}_2}(i) = \begin{cases} 0, & si\ i\ est\ pair, \\ M(i), & si\ i\ est\ impair, \end{cases}$$

Alors on a la congruence :

$$d \equiv \left(\sum_{j<i;\ j\ impair,\ i\ pair} M(j)M^-(i) \right) + \left(\sum_{i<j;\ i\ impair,\ j\ pair} M(j)M^-(i) \right) + \left(\sum_{i\ impair} M^-(i) \right).$$

Dans la première double somme, on peut remplacer la somme en i par la somme sur tout $i \geq j$, moins celle sur les $i \geq j$, i impair. Un raisonnement analogue s'applique à la deuxième double somme et on obtient :

$$d \equiv \left(\sum_{i,j\ impairs} M(j)M^-(i) \right) + \sum_{i\ impair} (M(i)M^-(\geq i) + M^-(i)M(\geq i) + M^-(i) + M(i)M^-(i)).$$

En comparant avec l'expression trouvée un peu plus haut, on obtient :

$$z(\boldsymbol{\lambda}^+) + z(\boldsymbol{\lambda}^-) + z(\boldsymbol{\lambda}) + d \equiv \sum_{i,j\ impairs} M(j)M^-(i).$$

Mais :

$$\sum_{j\ impair} M(j) \equiv \sum_{j \geq 1} jM(j) = N.$$

De même, $\sum_{i\ impair} M^-(i) \equiv N^-$. Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est donc $\equiv NN^-$, ce qui prouve (2). $\square$

IX.11. Utilisation de l'orthogonalité

On a défini en VII.4 l'ensemble $\mathcal{P}_{2,disc}(N)$. On note $\mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)$ le sous-ensemble des $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}(N)$ tels que les termes non nuls de $\boldsymbol{\lambda}^+$ et $\boldsymbol{\lambda}^-$ sont tous pairs si N est pair, tous impairs si N est impair.

Proposition. *Pour tout $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)$, on a l'égalité :*

$$\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-} = proj_{cusp} \circ k \circ \tau \circ \iota(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)).$$

Preuve. Pour simplifier, posons :

$$\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) = k \circ \tau \circ \iota(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)).$$

Pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(N)$, notons $\Sigma_1(\boldsymbol{\lambda})$, resp. $\Sigma_2(\boldsymbol{\lambda})$, la somme de ses termes pairs, resp. impairs. Notons $E(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}(N)$ tels que, en posant $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^-$, on ait $\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{\lambda}$,

$\Sigma_1(\boldsymbol{\mu}) = \Sigma_1(\boldsymbol{\lambda})$, $\Sigma_2(\boldsymbol{\mu}) = \Sigma_2(\boldsymbol{\lambda})$ (ces deux dernières égalités sont d'ailleurs équivalentes). Notons $E_{\neq}(\boldsymbol{\lambda}) = E(\boldsymbol{\lambda}) \setminus \{\boldsymbol{\lambda}\}$. Montrons d'abord :

(1) pour tout $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}(N)$, on a une égalité :

$$proj_{cusp}(\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)) = \tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-} + \sum_{(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \in E_{\neq}(\boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-)} x(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-},$$

pour des coefficients $x(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \in \mathbb{C}$.

On démontre cette assertion par récurrence descendante sur $\boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-$. D'après la proposition IX.7, $\iota(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-))$ appartient à $\mathcal{K}_{glob}$. Il est facile de voir que τ respecte cet espace $\mathcal{K}_{glob}$. Donc $\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ appartient à $\mathcal{C}_{glob}$. Le terme $\tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}+, \boldsymbol{\lambda}-}$ appartient aussi à $\mathcal{C}_{glob}$ d'après le lemme IX.1. D'après la proposition précédente, on a donc $\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) - \tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-} \in \mathcal{C}_{glob} \cap \mathcal{C}_{<^t\boldsymbol{\lambda}}$, où $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-$. Une preuve similaire à celle de la proposition IX.2 montre que cet espace est engendré par les $\tilde{f}^{\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-}$ pour $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \in \mathcal{P}_2(N)$ et $\boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^- > \boldsymbol{\lambda}$. Ecrivons $\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) - \tilde{f}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-}$ comme combinaison linéaire de tels termes et projetons sur $\mathcal{C}_{cusp}$. On se rappelle (proposition VII.4(ii)) que cette projection annule $\tilde{f}^{\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-}$ si $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \notin \mathcal{P}_{2,disc}(N)$. On obtient :

$$proj_{cusp}(\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)) = \tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-} + \sum_{(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}(N), \boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^- > \boldsymbol{\lambda}} x(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-}.$$

Il suffit de montrer que, pour $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}(N)$ et $\boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^- > \boldsymbol{\lambda}$, le coefficient $x(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-)$ est nul pour $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \notin E(\boldsymbol{\lambda})$. Or l'égalité ci-dessus exprime $proj_{cusp}(\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-))$ dans une base orthogonale (proposition VII.4(i)). Donc $x(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-)$ est le produit d'un réel > 0 et du produit scalaire :

$$(proj_{cusp}(\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)), \tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-}).$$

L'hypothèse de récurrence nous permet d'inverser la formule (1) sous une forme :

$$\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-} = \sum_{(\boldsymbol{\nu}^+, \boldsymbol{\nu}^-) \in E(\boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^-)} y(\boldsymbol{\nu}^+, \boldsymbol{\nu}^-) \kappa(\boldsymbol{\nu}^+, \boldsymbol{\nu}^-).$$

Il suffit de montrer que :

$$(proj_{cusp}(\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)), proj_{cusp}(\kappa(\boldsymbol{\nu}^+, \boldsymbol{\nu}^-))) = 0$$

pour tout $(\boldsymbol{\nu}^+, \boldsymbol{\nu}^-) \in E(\boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^-)$, pourvu que $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \notin E(\boldsymbol{\lambda})$. L'application $proj_{cusp} \circ k$ entrelace le produit elliptique "naïf" sur $\mathcal{K}_{glob}$ avec le produit sur $\mathcal{C}$. L'automorphisme τ conserve le produit elliptique naïf et ι entrelace le (bon) produit elliptique avec le produit elliptique naïf. Le produit scalaire ci-dessus est donc égal à :

$$(2) \qquad (\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-), \mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\nu}^+, \boldsymbol{\nu}^-))_{ell}.$$

Par construction, $\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$, resp. $\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\nu}^+, \boldsymbol{\nu}^-)$, n'a de composantes non nulle que dans les sous-espaces $\mathcal{K}[m_1, m_2, n_1, n_2]$ tels que, pour $j = 1, 2$, on ait $\frac{m_j(m_j+1)}{2} + 2n_j = \Sigma_j(\boldsymbol{\lambda})$, resp. $\Sigma_j(\boldsymbol{\nu}^+ \cup \boldsymbol{\nu}^-)$. On a $\Sigma_j(\boldsymbol{\nu}^+ \cup \boldsymbol{\nu}^-) = \Sigma_j(\boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^-)$ et, puisque $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \notin E(\boldsymbol{\lambda})$, $\Sigma_j(\boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^-) \neq \Sigma_j(\boldsymbol{\lambda})$. Alors le produit scalaire (2) est évidemment nul, ce qui achève la preuve de (1).

Montrons que :

(3) pour $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-), (\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)$, on a l'égalité :

$$(proj_{cusp}(\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)), proj_{cusp}(\kappa(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-))) = \begin{cases} 0, & si\ (\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \neq (\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-), \\ 2^{|Jord(\boldsymbol{\lambda}^+)| + |Jord(\boldsymbol{\lambda}^-)|}, & si\ (\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) = (\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-). \end{cases}$$

Comme ci-dessus, le membre de gauche est égal à :

$$(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-), \mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-))_{ell}.$$

Posons $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^-$. En se reportant aux définitions de IX.10, un calcul immédiat de transformation de Fourier montre que l'égalité (3) résulte des égalités suivantes, pour $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$ et $\delta \in \{\pm 1\}^{Jord(\boldsymbol{\mu})}$:

$$(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda},\epsilon), \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\mu},\delta))_{ell} = \begin{cases} 0, & si\ \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{\mu}, \\ 0, & si\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}\ et\ \epsilon_{|Jord^1(\boldsymbol{\lambda})} \neq \delta_{|Jord^1(\boldsymbol{\lambda})}, \\ \prod_{i \in Jord^2(\boldsymbol{\lambda})} \epsilon(i)\delta(i), & si\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}\ et\ \epsilon_{|Jord^1(\boldsymbol{\lambda})} = \delta_{|Jord^1(\boldsymbol{\lambda})}. \end{cases}$$

Mais supposons par exemple N pair. Avec les notations de IX.10, l'hypothèse $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)$ entraîne $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}$, $\epsilon_1 = \epsilon$ et $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda},\epsilon) = \boldsymbol{\rho}(\mathcal{E}_1)$. On calcule de même $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\mu},\delta)$ et les égalités ci-dessus résultent de IX.8(3). Cela démontre (3).

Remarquons que, pour $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)$, on a $E(\boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-) \subseteq \mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)$. En effet, pour $(\boldsymbol{\mu}^+, \boldsymbol{\mu}^-) \in E(\boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-)$, on a $\Sigma_j(\boldsymbol{\mu}^+ \cup \boldsymbol{\mu}^-) = \Sigma_j(\boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-)$ pour $j = 1, 2$. Donc $\boldsymbol{\mu}^+$ et $\boldsymbol{\mu}^-$ sont, comme $\boldsymbol{\lambda}^+$ et $\boldsymbol{\lambda}^-$, tous deux à termes pairs si N est pair, à termes impairs si N est impair. La formule (1) exprime donc la matrice de passage entre les deux bases suivantes d'un même espace :

$$(proj_{cusp}(\kappa(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)))_{(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)}\ et\ (\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-})_{(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)}.$$

Cette matrice est unipotente. Grâce à (3) et à la proposition VII.4(i), les deux bases sont orthogonales. La matrice est donc l'identité, d'où l'énoncé. □

X. Conséquences d'un lemme fondamental non standard

X.1. Fonctions de Green et distributions invariantes sur les algèbres de Lie symplectiques

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a introduit en III.2 un espace V_n^- de dimension $2n$ sur F, muni d'une forme symplectique q_n^-, et son groupe symplectique H_n^-. L'entier n étant fixé, on abandonne ici les indices n superflus. On va adapter au groupe H^- les constructions effectuées pour les groupes spéciaux orthogonaux dans [MW] paragraphes 2.14 et 3.11. On le fait brièvement, renvoyant à cette référence pour plus de détails. Signalons que [MW] contient un certain nombre de fâcheuses erreurs de détail. Il est facile de les corriger et le lecteur trouvera à la fin du présent article une liste de corrections.

Soient $h', h'', n', n'' \in \mathbb{N}$ tels que :

$$n = \frac{h'(h'+1)}{2} + \frac{h''(h''+1)}{2} + n' + n''.$$

Fixons un réseau L de V^- tel que, en notant $L^* = \{v \in V^-; \forall v' \in L, q^-(v,v') \in \mathfrak{o}\}$, on ait :

$$L^* \supseteq L \supseteq \varpi L^*;$$

$$dim_{\mathbb{F}_q}(L^*/L) = h''(h''+1) + 2n'',\ dim_{\mathbb{F}_q}(L/\varpi L^*) = h'(h'+1) + 2n'.$$

Posons $\underline{V}' = L/\varpi L^*$. La forme q^- se réduit naturellement en une forme symplectique q' sur $\underline{V}'$. Décomposons $\underline{V}'$ en somme orthogonale $\underline{V}'_0 \oplus \underline{V}'_1$, où $dim_{\mathbb{F}_q}(\underline{V}'_0) = h'(h'+1)$ et $dim_{\mathbb{F}_q}(\underline{V}'_1) = 2n'$. Notons $\mathbf{Sp}(\underline{V}')$, $\mathbf{Sp}(\underline{V}'_0)$ etc... les groupes symplectiques de $\underline{V}'$, $\underline{V}'_0$ etc... Soit $w' \in W_{n'}$. Un tel élément paramètre une classe de conjugaison de tores maximaux définis sur $\mathbb{F}_q$ du groupe $\mathbf{Sp}(\underline{V}'_1)$. Fixons un tel tore $\underline{\mathbf{T}}_{w'}$. Le groupe $\underline{\mathbf{T}}_{w'} \times \mathbf{Sp}(\underline{V}'_0)$ est un Lévi de $\mathbf{Sp}(\underline{V}')$. Le groupe $\mathbf{Sp}(\underline{V}'_0)$ porte un faisceau-caractère irréductible cuspidal, que l'on prolonge trivialement à $\underline{\mathbf{T}}_{w'} \times \mathbf{Sp}(\underline{V}'_0)$ et que l'on peut ensuite induire à $\mathbf{Sp}(\underline{V}')$. A ce faisceau-caractère induit est ensuite associée une fonction caractéristique dans $\mathcal{C}(\underline{Sp}(\underline{V}'))$. On note $Q(h', w')$ la restriction de cette fonction caractéristique à l'ensemble des éléments unipotents de $\underline{Sp}(\underline{V}')$. Une construction analogue vaut pour l'algèbre de Lie, conduisant à la définition d'une fonction $Q(h',w')^{Lie}$ sur $\mathfrak{sp}(\underline{V}')$, à support dans l'ensemble des éléments nilpotents. On sait bien que l'application :

$$E : X \mapsto (1+\frac{X}{2})(1-\frac{X}{2})^{-1}$$

est une bijection de l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{sp}(\underline{V}')$ sur l'ensemble des éléments unipotents de $\underline{Sp}(\underline{V}')$. On a l'égalité $Q(h',w')\circ E = Q(h',w')^{Lie}$.

La définition ci-dessus est imprécise car on n'a pas fixé le Frobenius sur le faisceau-caractère cuspidal. On a fixé dans [W4] II une normalisation précise et défini une fonction que l'on a notée $Q_{w'}$. On normalise ici nos fonctions de sorte que :

$$Q(h',w')^{Lie} = (-1)^{n'} q^{\delta_{symp}(h')/2} Q_{w'},$$

où $\delta_{symp}(h') = \frac{h'(2h'+1)(h'+1)}{6}$. Remarquons que $\delta_{symp}(h')$ est entier mais pas toujours pair. Par définition $q^{\delta_{symp}(h')/2} = (q^{1/2})^{\delta_{symp}(h')}$, où $q^{1/2}$ est la racine carrée >0 de q.

On pose $\underline{V}'' = L^*/L$. Il est aussi muni d'une forme symplectique q'', réduction de ϖq. Pour $w'' \in W_{n''}$, on définit de même des fonctions $Q(h'',w'')$ sur $\underline{Sp}(\underline{V}'')$ et $Q(h'',w'')^{Lie}$ sur $\mathfrak{sp}(\underline{V}'')$.

Notons $K(L)$ le stabilisateur de L dans H^- et $K(L)^u$ son radical pro-p-unipotent. Le groupe $K(L)/K(L)^u$ est isomorphe à $\underline{Sp}(\underline{V}')\times \underline{Sp}(\underline{V}'')$. On munit H^- de la mesure de Haar telle que $mes(K(L)) = q^{-d(L)/2}|K(L)/K(L)^u|$, où $d(L)$ est la dimension sur $\mathbb{F}_q$ de $\mathfrak{sp}(\underline{V}')\oplus\mathfrak{sp}(\underline{V}'')$. On vérifie aisément qu'en fait, cette mesure est indépendante des données h',h'',n',n''. Pour $(w',w'')\in W_{n'}\times W_{n''}$, la fonction $Q(h',w')\otimes Q(h'',w'')$ se relève en une fonction sur $K(L)$. On la multiplie par $mes(K(L))^{-1}$ et on l'étend à tout H^- par 0 hors de $K(L)$. On obtient ainsi une fonction notée $Q(h',h'';w',w'')$. Une construction analogue s'applique dans l'algèbre de Lie et conduit à une fonction $Q(h',h'';w',w'')^{Lie}$ sur $\mathfrak{h}^-$. Evidemment, ces fonctions dépendent du choix du réseau L. Mais leurs intégrales orbitales ne dépendent pas de ce choix et c'est ce qui nous importe.

Fixons une décomposition orthogonale $V^- = V_0\oplus V_1$ de sorte que :

$$L = (V_0\cap L)\oplus(V_1\cap L),$$

$$pour\ i=0,1,\ (V_i\cap L)/(V_i\cap\varpi L^*) = \underline{V}'_i,\ (V_i\cap L^*)/(V_i\cap L) = \underline{V}''_i.$$

Notons $\mathfrak{k}(L)$ le stabilisateur de L dans $\mathfrak{h}^-$. Il y a une projection naturelle :

$$\mathfrak{k}(L)\cap\mathfrak{sp}(V_1)\to\mathfrak{sp}(\underline{V}'_1)\oplus\mathfrak{sp}(\underline{V}''_1).$$

Soient $(w',w'')\in W_{n',ell}\times W_{n'',ell}$. On fixe un élément $X_{w',w''}\in\mathfrak{k}(L)\cap\mathfrak{sp}(V_1)$ qui s'envoie par la projection précédente sur un élément semi-simple régulier de $\underline{\mathfrak{t}}_{w'}\oplus\underline{\mathfrak{t}}_{w''}$. Dans les constructions de III.5, on choisit ψ trivial sur $\varpi\mathfrak{o}$ et non trivial sur $\mathfrak{o}$. On munit $\mathfrak{h}^-$ de la mesure autoduale pour ce choix de ψ. On vérifie d'ailleurs que ce choix est cohérent avec celui qu'on a fait sur H^-, c'est-à-dire que l'application E, qui est définie au voisinage de 0 dans $\mathfrak{h}^-$, préserve les mesures au voisinage de 0. On définit de même une mesure sur $\mathfrak{h}_0^- = \mathfrak{sp}(V_0)$. Les constructions précédentes, appliquées à $n'=n''=0$, définissent une fonction $Q(h',h'';-,-)^{Lie}$ sur $\mathfrak{h}_0^-$. Notons-la simplement $\mathfrak{f}^0$. Pour $\mathfrak{f}\in C_c^\infty(\mathfrak{h}^-)$, on pose :

$$D^0(\mathfrak{f}) = \int_{H^-}\int_{\mathfrak{h}_0^-}\mathfrak{f}(x^{-1}(X_{w',w''}+Y)x)\mathfrak{f}^0(Y)\,dY\,dx.$$

Les intégrales sont convergentes dans l'ordre indiqué (parce que w' et w'' sont supposés elliptiques). La distribution $\mathfrak{f}\mapsto D^0(\hat{\mathfrak{f}})$ est localement intégrable. Notons $\hat{i}_{D^0}$ la fonction sur $\mathfrak{h}^-$ telle que :

$$D^0(\hat{\mathfrak{f}}) = \int_{\mathfrak{h}^-}\mathfrak{f}(Y)\hat{i}_{D^0}(Y)\Delta(Y)^{-1/2}\,dY.$$

Elle est localement constante sur $\mathfrak{h}^-_{reg}$. Le caractère ψ définit par réduction un caractère encore noté ψ de $\mathbb{F}_q$. Notons ν l'unique caractère d'ordre 2 de $\mathbb{F}_q^\times$ et posons :

$$\epsilon(\psi) = q^{-1/2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^\times} \nu(x)\psi(x).$$

On sait que $\epsilon(\psi)$ est une racine de l'unité d'ordre au plus 4.

Proposition. *Soit Y un élément semi-simple régulier elliptique et topologiquement nilpotent de $\mathfrak{h}^-$. On a l'égalité :*

$$\hat{i}_{D^0}(Y) = q^{-(n'+n'')/2}\epsilon(\psi)^{-\frac{h'(h'+1)}{2}-\frac{h''(h''+1)}{2}}|\underline{T}_{w'}||\underline{T}_{w''}|J^{H^-}(Y, Q(h',h'';w',w'')^{Lie}).$$

La preuve est identique à celle de [MW] proposition 3.13. □

X.2. Expression de $\hat{i}_{D^0}$ comme combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales

On conserve les données $h', h'', n', n'', w', w''$. Dans [W4] IV.1, on a associé à h', h'' (notés k', k'' dans cette référence) un ensemble fini Γ, une fonction σ sur Γ, un ensemble $\mathcal{E} = (\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times 2})^{sup(h',h'')}$, une fonction κ_0 sur $\mathcal{E}$ et, pour $\gamma \in \Gamma$, un ensemble $A(\gamma)$. Cet ensemble $A(\gamma)$ est naturellement un espace principal homogène sous l'action d'un certain groupe abélien compact. De la mesure de Haar de masse totale 1 sur ce groupe se déduit une mesure sur $A(\gamma)$. Pour $\gamma \in \Gamma$, $a \in A(\gamma)$ et $e \in \mathcal{E}$, on a défini un élément $X[a,e] \in \mathfrak{h}_0^-$. Disons simplement que les valeurs propres de $X[a,e]$ sont paramétrées par a et que, quand on fixe a, la famille $(X[a,e])_{e\in\mathcal{E}}$ forme un système de représentants des classes de conjugaison dans une même classe de conjugaison stable. L'élément $X[a,e] + X_{w',w''}$ de $\mathfrak{h}^-$ est semi-simple régulier, il lui est associé une fonction $\hat{i}^-(X[a,e] + X_{w',w''}, .)$ sur $\mathfrak{h}^-$, cf. III.5, que l'on note simplement $\hat{i}^-[a,e,w',w'']$. La fonction $(a, Y) \mapsto \hat{i}^-[a,e,w',w''](Y)$ est localement constante sur $A(\gamma) \times \mathfrak{h}^-_{reg}$, ce qui donne un sens à la formule ci-dessous.

Proposition. *Pour tout élément $Y \in \mathfrak{h}^-$, semi-simple régulier elliptique et topologiquement nilpotent de $\mathfrak{h}^-$, on a l'égalité :*

$$\hat{i}_{D^0}(Y) = 2^{-2sup(h',h'')} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sigma(\gamma) \int_{A(\gamma)} \sum_{e\in\mathcal{E}} \kappa_0(e)\hat{i}^-[a,e,w',w''](Y)\, da.$$

C'est essentiellement la proposition IV.3 de [W4]. Cf. aussi la proposition 3.14 de [MW]. On a seulement à effectuer le calcul des constantes pour passer de nos normalisations à celles de [W4]. □

Considérons un instant le cas où $n'' = 0$. Pour $w \in W_{n'}$, $\gamma \in \Gamma$, $a \in A(\gamma)$ et $e \in \mathcal{E}$, on dispose de l'élément $X[a,e] + X_w \in \mathfrak{h}^-$. Il dépend de certains choix mais, comme on l'a dit, sa classe de conjugaison stable ne dépend pas de e. On a défini en III.5 la fonction $D^-(X[a,e] + X_w, .)$ sur $\mathfrak{h}^-_{reg}$. Elle ne dépend pas non plus de e. On la note simplement $D^-[a,w]$.

X.3. Un résultat de stabilité

Soient $h', h'', t \in \mathbb{N}$ tels que :

$$n = t + \frac{h'(h'+1)}{2} + \frac{h''(h''+1)}{2}.$$

Posons :

$$\mathcal{K}^t = \oplus_{n',n''\in\mathbb{N}, n'+n''=t} \mathcal{C}(W_{n'}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n''}).$$

On définit un homomorphisme :

$$\iota^t : \mathcal{K}^t \to \mathcal{K}^t$$

de la même façon qu'en IX.7, en identifiant $\mathcal{K}^t$ à $\oplus_{n',n''\in\mathbb{N},n'+n''=t}\mathcal{K}_{2t}[0,0,n',n'']$. Posons :

$$\mathcal{K}^t_{ell} = \oplus_{n',n''\in\mathbb{N},n'+n''=t}\mathcal{C}(W_{n',ell})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(W_{n'',ell}).$$

Remarquons que ι^t conserve $\mathcal{K}^t_{ell}$. On définit un homomorphisme :

$$Q^-(h',h'')^{Lie} : \mathcal{K}^t_{ell} \to C_c^\infty(\mathfrak{h}^-).$$

Pour n',n'' tels que $n'+n''=t$, $\varphi'\in\mathcal{C}(W_{n',ell})$ et $\varphi''\in\mathcal{C}(W_{n'',ell})$, on pose :

$$Q^-(h',h'')^{Lie}(\varphi'\otimes\varphi'') = |W_{n'}|^{-1}|W_{n''}|^{-1}\sum_{w'\in W_{n',ell},w''\in W_{n'',ell}}\varphi'(w')\varphi''(w'')Q(h',h'';w',w'')^{Lie}.$$

Pour $w\in W_{t,ell}$, on note $O(w)$ sa classe de conjugaison dans W_t et φ^w la fonction caractéristique de $O(w)$ dans $W_{t,ell}$.

Proposition. *Soient $n',n''\in\mathbb{N}$ tels que $n'+n''=t$.*

(i) Soit φ un élément non nul de $\mathcal{C}(W_{n',ell})\otimes\mathcal{C}(W_{n'',ell})$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- les intégrales orbitales de la fonction $Q^-(h',h'')^{Lie}\circ\iota^t(\varphi)$ sont constantes sur les classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples réguliers ;

- $h'=h''$ et $n''=0$.

(ii) Supposons $h'=h''$ et $n''=0$. Soit $w\in W_{n',ell}$. Pour tout élément semi-simple régulier elliptique et topologiquement nilpotent Y de $\mathfrak{h}^-$, on a l'égalité :

$$J^{H^-}(Y,Q^-(h',h')^{Lie}\circ\iota^t(\varphi^w)) = 4^{-h'}q^{n'/2}\nu(-1)^{h'(h'+1)/2}\gamma_\psi(\mathfrak{h}^-)^{-1}\frac{|O(w)|}{|W_{n'}|}|\underline{T}_w|^{-1}$$

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\sigma(\gamma)\int_{A(\gamma)}D^-[a,w](Y)\,da.$$

A l'aide des propositions X.1 et X.2, la preuve est identique à celle de la proposition 3.12 et du lemme 3.15 de [MW] (compte tenu des errata). □

X.4. Un résultat de transfert

Soit $n\in\mathbb{N}$. En III.2, on a introduit un espace V_n^+ de dimension $2n+1$ sur F, muni d'une forme quadratique q_n^+, et son groupe spécial orthogonal $\mathbf{H}_n^+$. On va se placer dans une situation un peu plus générale. Fixons $\eta\in F^\times$ (en fait, seule son image dans $F^\times/F^{\times 2}$ importe). Fixons deux espaces V^+_{iso} et V^+_{an} de dimension $2n+1$ sur F, munis de formes quadratiques non dégénérées q^+_{iso} et q^+_{an}. On suppose que le noyau anisotrope de q^+_{iso} est de dimension 1, isomorphe à F muni de la forme quadratique ηx^2. On suppose que q^+_{an} a même discriminant que q^+_{iso} mais a un noyau anisotrope de dimension 3. On note $\mathbf{H}^+_{iso}$ et $\mathbf{H}^+_{an}$ les groupes spéciaux orthogonaux respectifs.

Soient $h',h'',t\in\mathbb{N}$ tels que :

$$h'^2+h''^2+2t=2n+1$$

et :

$$(1)\qquad h'\equiv val(\eta)+1\ mod\ 2\mathbb{Z},\ \ h''\equiv val(\eta)\ mod\ 2\mathbb{Z}.$$

Pour $\sharp=iso$ ou $\sharp=an$, on a défini en [MW] 3.11 une application :

$$Q^+_\sharp(h',h'')^{Lie} : \mathcal{K}^t_{ell}\to C_c^\infty(\mathfrak{h}^+_\sharp),$$

évidemment similaire à l'application de X.3 (il y a quelques différences de notations avec [MW] : les entiers $2n+1,h',h'',t$ étaient notés d,r',r'',N dans cette référence ; on a ici ajouté un exposant $^+$ pour distinguer la présente application de celle de X.3).

Remarque. Avec les notations de III.2, on peut supposer que $V_{iso}^+ = V_n^+$ et $q_{iso}^+ = \eta q_n^+$. Alors $\mathbf{H}_{iso}^+ = \mathbf{H}_n^+$. Mais les applications $Q_\sharp^+(h',h'')^{Lie}$ dépendent de η, car les paramétrages des différents objets qui interviennent dans leur définition en dépendent.

Comme en III.3, on définit une bijection :

$$\mathfrak{h}_{reg}^-/st \sim \mathfrak{h}_{iso,reg}^+/st$$

(on a abandonné l'indice n de $\mathfrak{h}_n^-$). C'est exactement la bijection de III.3 quand on identifie $\mathfrak{h}_{iso}^+$ et $\mathfrak{h}_n^+$. Pour $X^- \in \mathfrak{h}_{reg}^-$ et $X_{iso}^+ \in \mathfrak{h}_{iso,reg}^+$, on note $X^- \sim X_{iso}^+$ si les classes de conjugaison stable de ces éléments se correspondent par cette bijection.

Parce que $\mathbf{H}_{iso}^+$ est la forme intérieure quasi-déployée de $\mathbf{H}_{an}^+$, on a aussi une injection :

$$\mathfrak{h}_{an,reg}^+/st \to \mathfrak{h}_{iso,reg}^+/st.$$

Pour $X_{an}^+ \in \mathfrak{h}_{an,reg}^+$ et $X_{iso}^+ \in \mathfrak{h}_{iso,reg}^+$, on note $X_{an}^+ \sim X_{iso}^+$ si les classes de conjugaison stable de ces éléments se correspondent par l'injection ci-dessus. Pour $X^- \in \mathfrak{h}_{reg}^-$ et $X_{an}^+ \in \mathfrak{h}_{an,reg}^+$, on note $X^- \sim X_{an}^+$ s'il existe un élément $X_{iso}^+ \in \mathfrak{h}_{iso,reg}^+$ tel que $X^- \sim X_{iso}^+ \sim X_{an}^+$.

Soient maintenant $h, t \in \mathbb{N}$ tels que $h(h+1)+t = n$. Soient h', h'' les deux entiers ≥ 0 vérifiant (1) et tels que $\{h',h''\} = \{h, h+1\}$.

Proposition. *Supposons vérifiée l'hypothèse $(\mathfrak{Lemmefond})_n$ de III.5. Soit $w \in W_t$. Identifions $\mathcal{C}(W_{t,ell})$ au facteur $\mathcal{C}(W_{t,ell}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{0,ell})$ de $\mathcal{K}_{ell}^t$ et, par conséquent, φ^w à un élément de cet espace $\mathcal{K}_{ell}^t$. Soient $\sharp = iso$ ou $\sharp = an$, $Y^- \in \mathfrak{h}_{reg}^-$, $Y_\sharp^+ \in \mathfrak{h}_{\sharp,reg}^+$. Supposons $Y^- \sim Y_\sharp^+$. Alors on a l'égalité :*

$$J^{H^-}(Y^-, Q^-(h,h)^{Lie} \circ \iota^t(\varphi^w)) = \nu(-\eta\varpi^{-val(\eta)})^h sgn_{CD}(w)^h J^{H_\sharp^+}(Y_\sharp^+, Q_\sharp^+(h',h'')^{Lie} \circ \iota^t(\varphi^w)).$$

Preuve. Les fonctions qui interviennent sont cuspidales et à support topologiquement nilpotent. Leurs intégrales orbitales sont donc nulles hors des éléments elliptiques topologiquement nilpotents. On peut donc supposer Y^- et $Y_\sharp^+$ elliptiques et topologiquement nilpotents. Le membre de gauche est calculé par la proposition X.3(ii). Les objets se simplifient parce que les termes h' et h'' de X.3 sont ici tous deux égaux à h. En particulier $\Gamma = (\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times 2})^h$ et, pour $\gamma = (\gamma_j)_{j=1,\ldots,h} \in \Gamma$, $\sigma(\gamma) = \prod_{j=1,\ldots,h} \nu(\gamma_j)^j$, en identifiant ν à l'unique caractère non trivial de $\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times 2}$.

On a défini ci-dessus une application ι^t. Elle coïncide avec une application intervenant dans [MW], à savoir l'application notée $\rho^* \circ \iota$ dans cette référence. On voit alors que l'intégrale orbitale du membre de droite est calculée par le lemme 3.15 de [MW] (les constantes y sont particulièrement fausses, cf. errata). Sous nos hypothèses simplificatrices concernant h' et h'', la formule de ce lemme devient :

$$J^{H_\sharp^+}(Y_\sharp^+, Q_\sharp^+(h',h'')^{Lie} \circ \iota^t(\varphi^w)) = 2^{1-h'-h''} q^{h/2} \alpha(w,-)_\sharp \gamma(h',h'')_\sharp \gamma_\psi(\mathfrak{h}_\sharp^+)^{-1} \frac{|O(w)|}{|W_t|} |\underline{T}_w|^{-1}$$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \sigma_\sharp(\gamma) \int_{A(\gamma)} D_\sharp^+[a,w](Y_\sharp^+)\, da,$$

où :

$\alpha(w,-)_\sharp$ et $\gamma(h',h'')_\sharp$ sont définis en [MW] p.536 et 532 ;

pour $\gamma = (\gamma_j)_{j=1,\ldots,h} \in \Gamma$,

$$\sigma_\sharp(\gamma) = \prod_{j=1,\ldots,h} \nu(-\gamma_j)^j = \nu(-1)^{h(h+1)/2}\sigma(\gamma);$$

$D_\sharp^+[a,w]$ est défini de façon similaire à $D^-[a,w]$.

Soient $\gamma \in \Gamma$ et $a \in A(\gamma)$. On a défini $D^-[a,w]$ comme la fonction $D^-(X^-,.)$ pour un certain élément $X^- \in \mathfrak{h}^-_{reg}$. De même, $D^+_\sharp[a,w]$ est la fonction $D^+_\sharp(X^+_\sharp,.)$ pour un certain élément $X^+_\sharp \in \mathfrak{h}^+_{\sharp,reg}$, cette fonction étant elle-même définie comme en III.5. En se reportant aux définitions, on voit que $X^- \sim X^+_\sharp$, ou plus exactement on peut effectuer les choix faits dans les définitions de sorte qu'il en soit ainsi. Si $\sharp = iso$, on peut identifier $\mathfrak{h}^+_{iso}$ à $\mathfrak{h}^+_n$. Alors D^+_{iso} est la fonction D^+ définie en III.5. et la proposition III.5 nous dit que $D^-(X^-,Y^-) = D^+_{iso}(X^+_{iso},Y^+_{iso})$. Si $\sharp = an$, introduisons des éléments $X^+_{iso}, Y^+_{iso} \in \mathfrak{h}^+_{iso,reg}$ tels que $X^+_{an} \sim X^+_{iso}$ et $Y^+_{an} \sim Y^+_{iso}$. En appliquant successivement [W5] théorème 1.5. et notre proposition III.5, on obtient :

$$D^+_{an}(X^+_{an},Y^+_{an}) = D^+_{iso}(X^+_{iso},Y^+_{iso}) = D^-(X^-,Y^-).$$

En tout cas, $D^-[a,w](Y^-) = D^+_\sharp[a,w](Y^+_\sharp)$. En comparant les formules, il ne reste plus qu'à prouver l'égalité :

$$4^{-h}\gamma_\psi(\mathfrak{h}^-) = 2^{1-h'-h''}\nu(-\eta\varpi^{-val(\eta)})^h sgn_{CD}(w)^h \alpha(w,-)_\sharp \gamma(h',h'')_\sharp \gamma_\psi(\mathfrak{h}^+_\sharp)^{-1}.$$

C'est un simple calcul. □

XI. Calcul d'intégrales orbitales

XI.1. Classification des éléments topologiquement semi-simples

On revient désormais à notre groupe $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^+_N$. . On a paramétré en I.3 les classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}$. On a besoin de rendre notre paramétrage plus explicite. Soit s un élément semi-simple auquel on associe des données $I, I^*, (a_i)_{i\in I}$ etc... comme en I.3. Remarquons qu'à isomorphisme près, la forme q_- est uniquement déterminée par d_-.

De même, la classe d'équivalence de q_+ est déterminée par d_+ et par un quadruplet :

$$(d_{1,+}, d_{2,+}, \eta_{1,+}, \eta_{2,+}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$$

tel que $d_{1,+} + d_{2,+} \equiv d_+ \ mod\ 2\mathbb{Z}$ (on ne dit pas que tout tel quadruplet détermine une forme quadratique ; c'est vrai si $d_+ \geq 3$ mais faux si $d_+ \leq 2$). Rappelons la définition de ce quadruplet. On choisit un réseau $L \subseteq V_+$ tel qu'en posant $L^* = \{v \in V_+; \forall v' \in L, q_+(v,v') \in \mathfrak{o}\}$, on ait $L^* \supseteq L \supseteq \varpi L^*$. On pose $d_{1,+} = dim_{\mathbb{F}_q}(L/\varpi L^*)\ mod\ 2\mathbb{Z}$, $d_{2,+} = dim_{\mathbb{F}_q}(L^*/L)\ mod\ 2\mathbb{Z}$. L'espace $L/\varpi L^*$ est muni naturellement d'une forme quadratique $q_{1,+}$ dont le déterminant est bien défini dans $\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times 2}$. On pose :

$$\eta_{1,+} = \nu(det(q_{1,+})(-1)^{[D_{1,+}/2]}),$$

où $D_{1,+} = dim_{\mathbb{F}_q}(L/\varpi L^*)$. Si $D_{1,+} = 0$, $\eta_{1,+} = 1$. De même, L^*/L est muni d'une forme quadratique $q_{2,+}$, la réduction de ϖq_+. On définit $\eta_{2,+}$ de façon similaire.

Pour $i \in I^*$, la classe d'équivalence de q_i est déterminée par d_i et un couple :

$$(d_{1,i}, d_{2,i}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

tel que $d_{1,i} + d_{2,i} \equiv d_i\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Pour le définir, notons $\mathfrak{o}_i$ l'anneau des entiers de F_i et $\mathfrak{f}_i$ son corps résiduel (on a $\mathfrak{f}_i = \mathbb{F}_{q^{2f_i}}$ puisque F_i/F est non ramifiée). On choisit un $\mathfrak{o}_i$-réseau L dans V_i tel qu'en posant $L^\sharp = \{v \in V_i; \forall v' \in L, q_i(v,v') \in \mathfrak{o}_i\}$, on ait $L^\sharp \supseteq L \supseteq \varpi L^\sharp$. On pose $d_{1,i} = dim_{\mathfrak{f}_i}(L/\varpi L^\sharp)$, $d_{2,i} = dim_{\mathfrak{f}_i}(L^\sharp/L)$.

Remarques. (1) s est elliptique si et seulement si $I = I^*$;

(2) si s est elliptique, il est compact (cf. III.4).

En suivant Labesse, on a défini en III.1 la conjugaison stable dans l'ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}$. Soient s, s' deux tels éléments. Ils sont stablement conjugués si et seulement si :

- si N est impair, s et s' sont conjugués par un élément de $\mathbf{G}(\bar{F})$;

- si N est pair, il existe $g \in \mathbf{G}(\bar{F})$ tel que $gsg^{-1} = s'$ et, pour tout $\tau \in Gal(\bar{F}/F)$, on a $\tau(g^{-1})g \in \mathbf{Z_G}(s)^0(\bar{F})$.

La différence entre les cas N pair ou impair vient de ce que le centre de $\mathbf{G}^+$ est contenu dans $\mathbf{Z_G}(s)^0$ si N est pair et ne l'est pas si N est impair.

On peut alors paramétrer les classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples de $\tilde{G}$. Le paramétrage se déduit de celui de I.3. Si N est impair, on oublie les données $(q_i)_{i\in I^*}$ et q_+ (et q_- que l'on peut de toute façon oublier). Si N est pair, on oublie les $(q_i)_{i\in I^*}$ et on ne conserve de q_+ que son déterminant qui est un élément de $F^\times/F^{\times 2}$. Autrement dit, on ne conserve que $I, I^*, (a_i)_{i\in I}, (d_i)_{i\in I}, d_+, d_-$ plus, si N est pair, le triplet $(d_{1,+}, d_{2,+}, \eta_{1,+}\eta_{2,+})$.

Il nous sera commode d'utiliser une notion plus fine que la conjugaison stable, que nous allons définir. On définit d'abord une application $\underline{det} : G^+ \to F^\times/F^{\times 2}$. Sur G, c'est le déterminant composé avec l'homomorphisme $F^\times \to F^\times/F^{\times 2}$. Pour $\sigma \in Isom(V, V^*)$,$\underline{det}(\tilde{\sigma})$ est l'image dans $F^\times/F^{\times 2}$ du déterminant de la matrice exprimant σ dans deux bases de V et V^* sur F duales l'une de l'autre. On vérifie que $\underline{det}$ est un homomorphisme. Soient s et s' deux éléments semi-simples de $\tilde{G}$. On dira que s et s' sont fortement stablement conjugués si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- s et s' sont stablement conjugués ;

- $\underline{det}(s) = \underline{det}(s')$.

Cela définit une relation d'équivalence. Notons $\mathbf{Z_G}$ le centre de $\mathbf{G}$.

Lemme. *Soient s et s' deux éléments semi-simples de $\tilde{G}$.*

(i) Si N est pair, s et s' sont stablement conjugués si et seulement s'ils sont fortement stablement conjugués.

(ii) Si N est impair, s et s' sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $z \in Z_G$ tel que zs et s' soient fortement stablement conjugués.

Preuve. Supposons que N soit pair et que s et s' soient stablement conjugués. Soit $g \in \mathbf{G}(\bar{F})$ tel que $gsg^{-1} = s'$ et $\tau(g^{-1})g \in \mathbf{Z_G}(s)^0(\bar{F})$ pour tout $\tau \in Gal(\bar{F}/F)$. Il résulte de la description ci-dessus que le déterminant est trivial sur $\mathbf{Z_G}(s)^0$. La relation précédente entraîne que $det(g)$ appartient à $F^\times$. Mais $\underline{det}(s') = \underline{det}(gsg^{-1})$ est le produit de $\underline{det}(s)$ et de l'image dans $F^\times/F^{\times 2}$ de $det(g)^{-2}$. Donc $\underline{det}(s') = \underline{det}(s)$ et s et s' sont fortement stablement conjugués.

Supposons que N soit impair et que s et s' soient stablement conjugués. Soit $g \in \mathbf{G}(\bar{F})$ tel que $gsg^{-1} = s'$. Pour $\tau \in Gal(\bar{F}/F)$, on a $\tau(g^{-1})g \in \mathbf{Z_G}(s)(\bar{F})$, donc $det(\tau(g^{-1})g) \in \{\pm 1\}$. Identifions $\{\pm 1\}$ au sous-groupe d'ordre 2 de Z_G. Par le théorème de Hilbert 90, on peut trouver $z_0 \in \mathbf{Z_G}(\bar{F})$ tel que, pour tout τ, on ait l'égalité $\tau(z_0^{-1})z_0 = det(\tau(g^{-1})g)$. Posons $z = z_0^2$ et $g_0 = z_0^{-1}g$. On vérifie que $z \in Z_G$, $g_0zsg_0^{-1} = s'$ et $\tau(g_0^{-1})g \in \mathbf{Z_G}(s)^0(\bar{F})$ pour tout $\tau \in Gal(\bar{F}/F)$. Par le même raisonnement que dans le cas N pair, zs et s' sont fortement stablement conjugués. La réciproque est facile. $\square$

On paramètre aisément les classes de forte conjugaison stable : on oublie les $(q_i)_{i\in I^*}$ et on ne conserve de q_+ que son déterminant , autrement dit, on ne conserve que $I, I^*, (a_i)_{i\in I}, (d_i)_{i\in I}, d_+, d_-$ et le triplet $(d_{1,+}, d_{2,+}, \eta_{1,+}\eta_{2,+})$ (cela redémontre d'ailleurs le (i) du lemme).

On a défini en III.4 la notion d'élément d'élément compact et topologiquement semi-simple de $\tilde{G}$. Pour s comme ci-dessus, s est compact et topologiquement semi-simple si et seulement si tous les a_i sont des racines de l'unité d'ordre premier à p. On obtient ainsi un paramétrage des classes de conjugaison, resp. de conjugaison stable, resp. de forte conjugaison stable, d'éléments compacts et topologiquement semi-simples de $\tilde{G}$.

XI.2. Une formule de descente

Soient $(m_1, m_2, n_1, n_2) \in \mathcal{M}_{2,2}(N)$, $w_1 \in W_{n_1,ell}$ et $w_2 \in W_{n_2,ell}$. Pour $j = 1, 2$, notons φ^{w_j} la fonction caractéristique de l'orbite $O(w_j)$ de w_j. Posons $\varphi = \varphi^{w_1} \otimes \varphi^{w_2} \in \mathcal{C}(W_{n_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n_2}) = \mathcal{K}_{m_1,m_2,n_1,n_2}$. Posons $f = k(\varphi) \in \mathcal{C}$, cf. IX.6, et associons à f la fonction $f_{\tilde{G}} \in C_c^\infty(\tilde{G})$, cf. VII.2. On se propose de calculer $J^G(x, f_{\tilde{G}})$ pour un élément $x \in \tilde{G}$ semi-simple régulier elliptique.

Fixons un tel élément x. Comme on l'a dit dans le paragraphe précédent, il est nécessairement compact. On peut décomposer x en produit $x = su$, où s est compact et topologiquement semi-simple, u est topologiquement unipotent, s et u commutent. Parce que x est elliptique, s l'est aussi. Associons à s les données $I = I^*$, etc... $(d_{1,i}, d_{2,i})_{i\in I^*}$, $(d_{1,+}, d_{2,+}, \eta_{1,+}, \eta_{2,+})$ comme dans le paragraphe précédent.

Pour $j = 1, 2$, posons $m_{j,-} = [\frac{m_j}{2}]$, $m_{j,+} = [\frac{m_j+1}{2}]$. Considérons l'hypothèse :

$$(Hyp)\left\{\begin{array}{c} d_{1,+} \equiv m_{1,+}\ mod\ 2\mathbb{Z},\ d_{2,+} \equiv m_{2,+}\ mod\ 2\mathbb{Z} \\ d_+ \geq m_{1,+}^2 + m_{2,+}^2,\ d_- \geq m_{1,-}(m_{1,-}+1) + m_{2,-}(m_{2,-}+1). \end{array}\right.$$

Sous cette hypothèse, posons :

$$N_+ = (d_+ - m_{1,+}^2 - m_{2,+}^2)/2,\ N_- = (d_- - m_{1,-}(m_{1,-}+1) - m_{2,-}(m_{2,-}+1))/2.$$

Ces nombres sont entiers. Pour simplifier les notations, étendons l'ensemble d'indices I en lui adjoignant des indices $+$ et $-$, i.e. posons $\tilde{I} = I \cup \{+,-\}$. En fait, l'indice $+$, resp. $-$, ne jouera aucun rôle si $d_+ = 0$, resp. $d_- = 0$. Notons $\mathcal{N}(x, n_1, n_2)$ l'ensemble des familles $\mathbf{n} = (n_{j,i})_{j=1,2,i\in\tilde{I}}$ d'entiers ≥ 0 telles que :

$$n_{1,+} + n_{2,+} = N_+,\ n_{1,-} + n_{2,-} = N_-,\ n_{1,i} + n_{2,i} = d_i\ pour\ tout\ i \in I,$$

$$n_{j,+} + n_{j,-} + \sum_{i\in I} n_{j,i} f_i = n_j\ pour\ j = 1, 2.$$

Pour une telle famille $\mathbf{n}$, on pose :

$$W(\mathbf{n}) = W_{n_{1,+}} \times W_{n_{2,+}} \times W_{n_{1,-}} \times W_{n_{2,-}} \times \prod_{i\in I}(\mathfrak{S}_{n_{1,i}} \times \mathfrak{S}_{n_{2,i}}).$$

Soit $\mathbf{v} = (v_{j,i})_{j=1,2,i\in\tilde{I}} \in W(\mathbf{n})$. En X.1, on a défini une fonction de Green $Q(m_{1,-}, m_{2,-}; v_{1,-}, v_{2,-})$ sur le groupe symplectique $Sp(q_-)$ (elle est en tout cas bien définie à conjugaison près). Elle est à support topologiquement unipotent. De même, dans [MW], on a défini une fonction de Green $Q(m_{1,+}, m_{2,+}; v_{1,+}, v_{2,+})$ sur le groupe orthogonal $SO(q_+)$ et, pour $i \in I$, une fonction de Green $Q(v_{1,i}, v_{2,i})$ sur le groupe unitaire $U(q_i)$ ([MW], paragraphes 3.3 et 3.11, modifiés par les erratas ci-dessous). Remarquons que, d'après ces définitions, on a $Q(v_{1,i}, v_{2,i}) = 0$ si $n_{j,i} \neq d_{j,i}\ mod\ 2\mathbb{Z}$. On pose :

$$Q(\mathbf{v}) = Q(m_{1,+}, m_{2,+}; v_{1,+}, v_{2,+}) \otimes Q(m_{1,-}, m_{2,-}; v_{1,-}, v_{2,-}) \otimes (\otimes_{i\in I} Q(v_{1,i}, v_{2,i})).$$

C'est une fonction sur $Z_G(s)^0$, à support tologiquement unipotent. Puisque $u \in Z_G(s)^0$, on définit l'intégrale orbitale $J^{Z_G(s)^0}(u^2, Q(\mathbf{v}))$ dans ce groupe (les mesures satisfont la même normalisation qu'en X.1). Soient $i \in I$ et $j = 1, 2$. On définit un plongement $\xi_{j,i} : \mathfrak{S}_{n_{j,i}} \to W_{n_{j,i}f_i}$. de la façon suivante. Pour $v \in \mathfrak{S}_{n_{j,i}}$ et $h \in \{1, ..., n_{j,i}f_i\}$, on a :

$$\xi_{j,i}(v)(\pm h) = \left\{\begin{array}{ll} \pm h, & si\ h > n_{j,i}, \\ \pm v(h), & si\ h \leq n_{j,i} \end{array}\right.$$

On définit d'autre part $\bar{w}_{j,i} \in W_{n_{j,i}f_i}$ par :

$$\bar{w}_{j,i}(h) = \left\{\begin{array}{ll} h + n_{j,i}, & si\ h \leq n_{j,i}(f_i - 1), \\ n_{j,i}f_i - h - n_{j,i}, & si\ h > n_{j,i}(f_i - 1). \end{array}\right.$$

On définit l'application $\zeta_{j,i} : \mathfrak{S}_{n_{j,i}} \to W_{n_{j,i}f_i}$ par $\zeta_{j,i}(v) = \bar{w}_{j,i}\xi_{j,i}(v)$. Ce n'est plus un homomorphisme de groupes mais deux éléments conjugués dans $\mathfrak{S}_{n_{j,i}}$ ont des images conjuguées dans $W_{n_{j,i}f_i}$. Pour $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(x, n_1, n_2)$ (écrit comme ci-dessus), on définit :

$$\zeta_j(\mathbf{n}) : W_{n_{j,+}} \times W_{n_{j,-}} \times \prod_{i\in I} \mathfrak{S}_{n_{j,i}} \to W_{n_j}.$$

C'est la composée de l'application $id \times id \times \prod_{i\in I} \zeta_{j,i}$, à valeurs dans $W_{n_{j,+}} \times W_{n_{j,-}} \times \prod_{i\in I} W_{n_{j,i} f_i}$, et de l'injection naturelle de ce produit dans W_{n_j}. On en déduit une application :

$$\zeta(\mathbf{n}) = \zeta_1(\mathbf{n}) \times \zeta_2(\mathbf{n}) : W(\mathbf{n}) \to W_{n_1} \times W_{n_2}.$$

Proposition. *(i) Si l'hypothèse (Hyp) n'est pas vérifiée,* $J^G(x, f_{\tilde{G}}) = 0$.
(ii) Supposons l'hypothèse (Hyp) vérifiée. Alors on a l'égalité :

$$J^G(x, f_{\tilde{G}}) = (-1)^{n_1+n_2} \eta_{1,+}^{m_{1,-}} \eta_{2,+}^{m_{2,-}} \nu(-1)^a \nu(2)^b \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}(x,n_1,n_2)} |W(\mathbf{n})|^{-1}$$

$$\sum_{\mathbf{v}\in W(\mathbf{n});\zeta(\mathbf{n})(\mathbf{v})\in O(w_1)\times O(w_2)} sgn_{CD}(v_{1,+})^{m_{1,-}} sgn_{CD}(v_{2,+})^{m_{2,-}} J^{Z_G(s)^0}(u^2, Q(\mathbf{v})),$$

où $a = m_{1,-}[\frac{m_{1,+}}{2}] + m_{2,-}[\frac{m_{2,+}}{2}]$, $b = [\frac{m_{1,-}}{2}] + [\frac{m_{2,-}}{2}]$.

Preuve. Associons à s une décomposition $V = V_+ \oplus V_- \oplus (\oplus_{i\in I} V_i)$ comme en I.3. Posons $N_j = \frac{m_j(m_j+1)}{2} + 2n_j$ pour $j = 1, 2$. Par construction, la fonction $f_{\tilde{G}}$ est à support dans $\tilde{K}_{N_1,N_2}$. Pour $g \in G$, la condition $g^{-1}sug \in \tilde{K}_{N_1,N_2}$ est équivalente à la réunion des deux conditions $g^{-1}sg \in \tilde{K}_{N_1,N_2}$ et $g^{-1}ug \in K_{N_1,N_2}$. En effet, si $g^{-1}sug \in \tilde{K}_{N_1,N_2}$, on a $g^{-1}s^2u^2g \in K_{N_1,N_2}$. Or s^2 est topologiquement semi-simple et un raisonnement élémentaire entraîne que $g^{-1}s^2g$ et $g^{-1}u^2g$ appartiennent tous deux à K_{N_1,N_2}. Puisque $g^{-1}ug$ appartient à l'adhérence du groupe engendré par $g^{-1}u^2g$, on a aussi $g^{-1}ug \in K_{N_1,N_2}$. En revenant à la condition initiale, on a $g^{-1}sg \in \tilde{K}_{N_1,N_2}$.

Etudions l'ensemble des $g \in G$ tels que $g^{-1}sg \in K_{N_1,N_2}$. Pour un tel élément, on a $g^{-1}s^2g \in K_{N_1,N_2}$. Cela entraîne que s^2 conserve les réseaux $g(L_0)$ et $g(L_{N_2})$. Pour $i, i' \in \tilde{I}$, $i \neq i'$, aucune valeur propre de s^2 dans V_i n'est congrue $mod\ \varpi\mathfrak{o}$ à une telle valeur propre dans $V_{i'}$ (les valeurs propres de s^2 dans V_i sont égales à 1 si $i = +$, à -1 si $i = -$, et conjuguées à a_i ou a_i^{-1} si $i \in I$). Un raisonnement simple d'algèbre linéaire entraîne que chacun des réseaux $g(L_0)$ et $g(L_{N_2})$ est somme de ses intersections avec les V_i pour $i \in \tilde{I}$ et, quand $i \in I$, ces intersections sont des $\mathfrak{o}_i$-réseaux. Posons $L_{u,i} = g(L_u) \cap V_i$ pour $u = 0, N_2$ et $i \in \tilde{I}$. La relation $g^{-1}sg \in \tilde{K}_{N_1,N_2}$ entraîne que $s(L_{0,i}) = L_{N_2,i}^*$, $s(L_{N_2,i}) = L_{0,i}^*$ pour tout $i \in \tilde{I}$. Posons $L_{N_2,i}^\sharp = \{v \in V_i; \forall v' \in L_{N_2,i}, q_i(v, v') \in \mathfrak{o}_i\}$ (avec $\mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}$ si $i = \pm$). Les relations précédentes sont équivalentes à l'égalité $L_{N_2,i}^\sharp = L_{0,i}$. Remarquons que l'on a les inclusions :

$$L_{N_2,i}^\sharp = L_{0,i} \supseteq L_{N_2,i} \supseteq \varpi L_{0,i} = \varpi L_{N_2,i}^\sharp.$$

Posons $n'_{1,i} = dim_{\mathfrak{f}_i}(L_{N_2,i}/\varpi L_{N_2,i}^\sharp)$, $n'_{2,i} = dim_{\mathfrak{f}_i}(L_{N_2,i}^\sharp/L_{N_2,i})$, où, comme on l'a dit, $\mathfrak{f}_i = \mathbb{F}_{q^{2f_i}}$ si $i \in I$, et $\mathfrak{f}_\pm = \mathbb{F}_q$. La famille $\mathbf{n}' = (n'_{j,i})_{j=1,2,i\in\tilde{I}}$ vérifie les relations :

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} n'_{j,+} + n'_{j,-} + \sum_{i\in I} 2n'_{j,i} f_i = N_j,\ pour\ j = 1, 2, \\ n'_{1,i} + n'_{2,i} = d_i,\ pour\ i \in \tilde{I}, \\ n'_{j,i} \equiv d_{j,i}\ mod\ 2\mathbb{Z}\ pour\ j = 1, 2, i \in \tilde{I}, \end{array} \right.$$

où on a posé $d_{1,-} = d_{2,-} = 0$. Notons $\mathcal{N}'$ l'ensemble des familles vérifiant ces conditions. On vient de définir une application :

$$\{g \in G; g^{-1}sg \in \tilde{K}_{N_1,N_2}\} \to \mathcal{N}'.$$

Il est clair qu'elle se quotiente en une application :

$$Z_G(s)\backslash\{g \in G; g^{-1}sg \in \tilde{K}_{N_1,N_2}\}/K_{N_1,N_2} \to \mathcal{N}'.$$

On vérifie que celle-ci est bijective. Pour $\mathbf{n}' \in \mathcal{N}'$, fixons un antécédent $g_{\mathbf{n}'} \in G$ tel que $g_{\mathbf{n}'}^{-1} s g_{\mathbf{n}'} \in \tilde{K}_{N_1,N_2}$. Posons $K'_{\mathbf{n}'} = Z_G(s) \cap g_{\mathbf{n}'} K_{N_1,N_2} g_{\mathbf{n}'}^{-1}$, définissons une fonction $f_{\mathbf{n}'}$ sur les éléments topologiquement unipotents de $Z_G(s)^0$ par $f_{\mathbf{n}'}(y) = f_{\tilde{G}}(g_{\mathbf{n}'}^{-1} s y g_{\mathbf{n}'})$. Alors :

$$J^G(x, f_{\tilde{G}}) = \Delta(x)^{1/2} \sum_{\mathbf{n}' \in \mathcal{N}'} \int_{Z_G(s) g_{\mathbf{n}'} K_{N_1,N_2}} f_{\tilde{G}}(g^{-1} s u g)\, dg$$

$$(2) \qquad = \Delta(su)^{1/2} \sum_{\mathbf{n}' \in \mathcal{N}'} mes(K_{N_1,N_2}) mes(K'_{\mathbf{n}'})^{-1} \int_{Z_G(s)} f_{\mathbf{n}'}(g^{-1} u g)\, dg.$$

Fixons $\mathbf{n}' \in \mathcal{N}'$, associons à $g_{\mathbf{n}'}$ les réseaux $L_{N_2,i}$ pour $i \in \tilde{I}$. Soit y un élément tologiquement unipotent de $Z_G(s)^0$, que l'on décompose en $y = \prod_{i \in \tilde{I}} y_i$. Pour que $f_{\mathbf{n}'}(y)$ soit non nul, chaque y_i doit conserver le réseau $L_{N_2,i}$. Dans ce cas, y_i définit par réduction deux éléments $y_{1,i} \in U(L_{N_2,i}/\varpi L^\sharp_{N_2,i})$ et $y_{2,i} \in U(L^\sharp_{N_2,i}/L_{N_2,i})$ où, pour unifier les notations, on désigne ainsi des groupes unitaires si $i \in I$, des groupes spéciaux orthogonaux si $i = +$, un groupe symplectique si $i = -$. L'élément $g_{\mathbf{n}'}^{-1} s y g_{\mathbf{n}'}$ de $\tilde{K}_{N_1,N_2}$ définit par réduction deux éléments $x_1 \in \underline{\tilde{G}}_{N_1}$, $x_2 \in \underline{\tilde{G}}_{N_2}$. On décompose chacun d'eux en $x_j = s_j y_j$ où $s_j \in \underline{\tilde{G}}_{N_j}$ est semi-simple, $y_j \in \underline{G}_{N_j}$ est unipotent et s_j et y_j commutent. Evidemment, s_1 et s_2 sont les réductions de $g_{\mathbf{n}'}^{-1} s g_{\mathbf{n}'}$. Les classes de conjugaison d'éléments semi-simples de $\underline{\tilde{G}}_{N_j}$ se paramètrent de façon analogue à I.3, cf. [W2] paragraphe 2. On voit que s_j est paramétré par l'ensemble I, la famille de dimensions $(n'_{j,i})_{i \in \tilde{I}}$, plus les données $(d_{j,+}, \eta_{j,+})$ qui paramètrent une forme quadratique de rang $n'_{j,+}$ (pour être précis, il conviendrait de supprimer de I les i tels que $n'_{j,i} = 0$, mais peu importe). La composante neutre du commutant de s_1 dans $\underline{G}_{N_1}$ s'identifie à $\prod_{i \in \tilde{I}} U(L_{N_2,i}/\varpi L^\sharp_{N_2,i})$ et y_1 s'identifie à $\prod_{i \in \tilde{I}} y_{1,i}$. Une assertion analogue vaut pour y_2. Posons $\mathbf{w}_j = (m_{j,-}, m_{j,+}, n_j, 0, w_j, -)$. Dans [W2] paragraphe 5, on a défini, à la suite de Lusztig, une fonction $\phi(\mathbf{w}_j)$ sur $\underline{\tilde{G}}_{N_j}$. Nos présentes constructions sont faites pour que, sous les conditions ci-dessus, on ait l'égalité :

$$(3) \qquad f_{\mathbf{n}'}(y) = f_{\tilde{G}}(g_{\mathbf{n}'}^{-1} s y g_{\mathbf{n}'}) = mes(K_{N_1,N_2})^{-1} \frac{|O(w_1)||O(w_2)|}{|W_{n_1}||W_{n_2}|} \phi(\mathbf{w}_1)(x_1) \phi(\mathbf{w}_2)(x_2),$$

le terme $mes(K_{N_1,N_2})^{-1}$ venant de la définition de l'application $f \mapsto f_{\tilde{G}}$, cf. VII.2. Pour que $\phi(\mathbf{w}_j)(x_j)$ soit non nul, on doit avoir :

$$(4) \qquad n'_{j,+} \geq m_{j,+}^2,\ n'_{j,-} \geq m_{j,-}(m_{j,-}+1),$$

cf. la relation (H) de [W2] paragraphe 6. S'il existe un élément de $\mathcal{N}'$ vérifiant ces conditions, l'hypothèse (Hyp) est vérifiée. En effet, la relation ci-dessus et la deuxième relation de (1) entraînent :

$$d_+ \geq m_{1,+}^2 + m_{2,+}^2,\ d_- \geq m_{1,-}(m_{1,-}+1) + m_{2,-}(m_{2,-}+1).$$

D'autre part, les premières et troisièmes relations de (1) entraînent :

$$d_{j,+} \equiv n'_{j,+} \equiv N_j \equiv \frac{m_j(m_j+1)}{2} \equiv m_{j,+}\ mod\ 2\mathbb{Z}.$$

Cela démontre la première assertion de la proposition : si (Hyp) n'est pas vérifiée, tous les termes du membre de droite de (2) sont nuls et $J^G(x, f_{\tilde{G}}) = 0$.

On suppose désormais (Hyp) vérifiée. On définit une injection de l'ensemble des $\mathbf{n}' \in \mathcal{N}'$ qui vérifient (4) dans $\mathcal{N}(x, n_1, n_2)$: à $\mathbf{n}'$ on associe $\mathbf{n}$ tel que :

$$n_{j,i} = n'_{j,i},\ pour\ i \in I, j = 1, 2,$$

$$n_{j,+} = (n'_{j,+} - m_{j,+}^2)/2,\ n_{j,-} = (n'_{j,-} - m_{j,-}(m_{j,-}+1))/2.$$

Remarquons que l'image de cette injection est l'ensemble $\mathcal{N}'(x, n_1, n_2)$ des $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(x, n_1, n_2)$ tels que $n_{j,i} \equiv d_{j,i}\ mod\ 2\mathbb{Z}$ pour tous $j = 1, 2$, $i \in I$. On peut réindexer la somme (2) par $\mathcal{N}'(x, n_1, n_2)$ en indexant par $\mathbf{n}$ les objets indexés précédemment par $\mathbf{n}'$, si $\mathbf{n}'$ correspond à $\mathbf{n}$ par la bijection ci-dessus. Reprenons le calcul précédent. On a calculé la valeur $\phi(\mathbf{w}_j)(x_j)$ en [W2] proposition 6(ii). On doit harmoniser nos notations avec celles de [W2]. Elles sont telles que, pour $\mathbf{v}_j = (v_{j,i})_{i\in\tilde{I}} \in W_{n_{j,+}} \times W_{n_{j,-}} \times \prod_{i\in I} \mathfrak{S}_{n_{j,i}}$, l'expression $2^{z(m_{j,+},d_{j,+})} q^{\delta(m_{j,-},m_{j,+})/2} Q_{m_{j,-},m_{j,+},\mathbf{v}_j}(y_j)$ de [W2] soit égal à :

$$(5) \qquad (-1)^{n_j} Q(m_{j,+}, v_{j,+})(y_{j,+}) Q(m_{j,-}, v_{j,-})(y_{j,-}) \prod_{i\in I} Q(v_{j,i})(y_{j,i}),$$

où $Q(m_{j,-}, v_{j,-})$ a été défini en X.1 et les autres fonctions sont définies de façon analogue, cf. [MW] 2.14 et errata. Il est facile de comparer $Q(m_{j,-}, v_{j,-})(y_{j,-})$ et $Q(m_{j,-}, v_{j,-})(y_{j,-}^2)$. Il suffit en effet de comparer les fonctions :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Q(m_{j,-}, v_{j,-})^{Lie}(Y) \\ Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & Q(m_{j,-}, v_{j,-})^{Lie}(2Y). \end{tikzcd}$$

définies sur l'ensemble des éléments de l'algèbre de Lie sous-jacente. On obtient l'égalité :

$$Q(m_{j,-}, v_{j,-})(y_{j,-}) = \nu(2)^{[\frac{m_{j,-}}{2}]} Q(m_{j,-}, v_{j,-})(y_{j,-}^2).$$

Un calcul analogue conduit aux égalités :

$$Q(m_{j,+}, v_{j,+})(y_{j,+}) = Q(m_{j,+}, v_{j,+})(y_{j,+}^2),$$

$$Q(v_{j,i})(y_{j,i}) = Q(v_{j,i})(y_{j,i}^2),$$

pour tout $i \in I$. Alors (5) se récrit :

$$(-1)^{n_j} \nu(2)^{[\frac{m_{j,-}}{2}]} Q(m_{j,+}, v_{j,+})(y_{j,+}^2) Q(m_{j,-}, v_{j,-})(y_{j,-}^2) \prod_{i\in I} Q(v_{j,i})(y_{j,i}^2).$$

Le produit de ces expressions pour $j = 1, 2$ est égal à :

$$(-1)^{n_1+n_2} \nu(2)^{[\frac{m_{1,-}}{2}]+[\frac{m_{2,-}}{2}]} mes(K_{\mathbf{n}}) Q(\mathbf{v})(y^2),$$

où $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in W_{\mathbf{n}}$ et $K_{\mathbf{n}} = Z_G(s)^0 \cap g_{\mathbf{n}} K_{N_1,N_2} g_{\mathbf{n}}^{-1}$ (la mesure $mes(K_{\mathbf{n}}$ a été introduite dans les définitions des fonctions $Q(m_{1,+}, m_{2,+}; v_{1,+}, v_{2,+})$, $Q(m_{1,-}, m_{2,-}; v_{1,-}, v_{2,-})$ etc...). Alors la proposition 6(ii) de [W2] entraîne :

$$\phi(\mathbf{w}_1)(x_1)\phi(\mathbf{w}_2)(x_2) = (-1)^{n_1+n_2} \eta_{1,+}^{m_{1,-}} \eta_{2,+}^{m_{2,-}} \nu(-1)^a \nu(2)^b mes(K_{\mathbf{n}}) \frac{|W_{n_1}||W_{n_2}|}{|O(w_1)||O(w_2)|} |W(\mathbf{n})|^{-1}$$

$$\sum_{\mathbf{v}\in W(\mathbf{n}); \zeta(\mathbf{n})(\mathbf{v})\in O(w_1)\times O(w_2)} sgn_{CD}(v_{1,+})^{m_{1,-}} sgn_{CD}(v_{2,+})^{m_{2,-}} Q(\mathbf{v})(y^2),$$

où a et b ont les valeurs indiquées dans l'énoncé. En se reportant à (3), cela prouve l'égalité :

$$f_{\mathbf{n}}(y) = (-1)^{n_1+n_2} \eta_{1,+}^{m_{1,-}} \eta_{2,+}^{m_{2,-}} \nu(-1)^a \nu(2)^b mes(K_{N_1,N_2})^{-1} mes(K_{\mathbf{n}}) |W(\mathbf{n})|^{-1}$$

$$\sum_{\mathbf{v}\in W(\mathbf{n}); \zeta(\mathbf{n})(\mathbf{v})\in O(w_1)\times O(w_2)} sgn_{CD}(v_{1,+})^{m_{1,-}} sgn_{CD}(v_{2,+})^{m_{2,-}} Q(\mathbf{v})(y^2).$$

On reporte cette valeur dans (2). Les mesures de K_{N_1,N_2} disparaissent. Si $\mathbf{Z_G}(s)$ est connexe, on a $K_{\mathbf{n}} = K'_{\mathbf{n}}$, les mesures de ces groupes disparaissent et l'intégrale sur $Z_G(s)$ est aussi une intégrale sur $Z_G(s)^0$. Si $\mathbf{Z_G}(s)$ n'est pas connexe, on se rappelle que $K'_{\mathbf{n}} \cap O(q_+)$ est le stabilisateur du réseau $L_{N_2,+}$. Il coupe la composante non neutre de $O(q_+)$. Donc $mes(K'_{\mathbf{n}})^{-1} mes(K_{\mathbf{n}}) = 1/2$. D'autre part, la fonction $f_{\mathbf{n}}$ ci-dessus est invariante par conjugaison par $K'_{\mathbf{n}}$. On peut dans (2) remplacer l'intégrale sur $Z_G(s)$ par deux fois l'intégrale sur $Z_G(s)^0$. Dans les deux cas, les mesures de $K'_{\mathbf{n}}$ et $K_{\mathbf{n}}$ disparaissent donc, à condition de remplacer l'intégrale sur $Z_G(s)$ par une intégrale sur $Z_G(s)^0$. D'autre part, le terme $\Delta(x)$, qui est le facteur Δ calculé dans G, est égal au facteur $\Delta^{Z_G(s)^0}(u)$ calculé dans le groupe $Z_G(s)^0$. Alors, pour $\mathbf{v} \in W(\mathbf{n})$, on a l'égalité :

$$\Delta(x)^{1/2} \int_{Z_G(s)^0} Q(\mathbf{v})(g^{-1}u^2 g)\, dg \;=\; J^{Z_G(s)^0}(u^2, Q(\mathbf{v})).$$

La formule (2) devient celle de l'énoncé, à ceci près que la somme porte sur l'ensemble $\mathcal{N}'(x, n_1, n_2)$ au lieu de $\mathcal{N}(x, n_1, n_2)$. Mais on a déjà dit que, pour $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(x, n_1, n_2) \setminus \mathcal{N}'(x, n_1, n_2)$, on a $Q(\mathbf{v}) = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in W(\mathbf{n})$. On peut donc aussi bien sommer sur tout $\mathcal{N}(x, n_1, n_2)$. $\square$

XI.3. Une formule de descente, suite

Soit $(m_1, m_2, n_1, n_2) \in \mathcal{M}_{2,2}(N)$. On suppose :

- si N est pair, $m_1 = m_2$, $n_2 = 0$;
- si N est impair, $m_1 = m_2 \pm 1$, $inf(m_1, m_2)$ est pair, $n_1 = 0$.

Soit $\varphi \in K[m_1, m_2, n_1, n_2] = \mathcal{C}(W_{n_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{n_2})$. On suppose φ à support elliptique. Posons $f = k \circ \tau \circ \iota(\varphi)$. Soit $x = su$ comme dans le paragraphe précédent. Supposons vérifiée l'hypothèse (Hyp) de ce paragraphe. Posons $n_+ = N_+$, $n_- = N_-$, $n_i = d_i$ pour $i \in I$. Si N est pair, posons $(j', j'') = (1, 2)$. Si N est impair, posons $(j', j'') = (2, 1)$. Puisque $n_{j''} = 0$, l'ensemble $\mathcal{N}(x, n_1, n_2)$ se réduit à un seul élément, que l'on note $\mathbf{n}$, pour lequel on a $n_{j',i} = n_i$ et $n_{j'',i} = 0$ pour tout $i \in \tilde{I}$. On a :

$$W(\mathbf{n}) = W_{n_+} \times W_{n_-} \times \prod_{i \in I} \mathfrak{S}_{n_i}.$$

On définit une fonction $\varphi_{\mathbf{n}}$ sur ce groupe par :

$$\varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = sgn_{CD}(v_-)^{m_{1,-}} \varphi \circ \zeta(\mathbf{n})(\mathbf{v}).$$

Considérons la composante $Sp(q_-)$ de $Z_G(s)^0$. On a défini en X.3 l'espace :

$$\mathcal{K}^{n_-} = \oplus_{r_1, r_2 \in \mathbb{N}, r_1 + r_2 = n_-} \mathcal{C}(W_{r_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(W_{r_2}),$$

son sous-espace $\mathcal{K}^{n_-}_{ell}$, l'endomorphisme ι^{n_-} de $\mathcal{K}^{n_-}$ et une application :

$$Q^-(m_{1,-}, m_{2,-})^{Lie} : \mathcal{K}^{n_-}_{ell} \to C_c^\infty(\mathfrak{sp}(q_-)).$$

Pour simplifier les notations, on note ces objets respectivement $\mathcal{K}_-$, $\mathcal{K}_{-,ell}$, ι_-, Q_-^{Lie}. Cette dernière application se relève au groupe en une application que l'on note :

$$Q_- : \mathcal{K}^{n_-}_{ell} \to C_c^\infty(Sp(q_-)).$$

En [MW], on a défini des applications analogues relatives aux autres composantes $SO(q_+)$ et $U(q_i)$ pour $i \in I$. Posons :

$$\mathcal{K}_+ = \mathcal{K}^{n_+}.$$

On définit le sous-espace $\mathcal{K}_{+,ell}$, l'endomorphisme $\iota_+ = \iota^{n_+}$ de $\mathcal{K}_+$ et l'application :

$$Q_+ = Q^+(m_{1,+}, m_{2,+}) : \mathcal{K}_{+,ell} \to C_c^\infty(SO(q_+))$$

cf. [MW] 3.10, 3.11 (les applications ι sont notées $\rho^* \circ \iota$ en [MW] ; on a ajouté ici un exposant $^+$ pour distinguer les fonctions sur les groupes spéciaux orthogonaux des fonctions sur les groupes symplectiques). Pour tout $i \in I$, posons :

$$\mathcal{K}_i = \oplus_{r_1,r_2\in\mathbb{N},r_1+r_2=n_i}\mathcal{C}(\mathfrak{S}_{r_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(\mathfrak{S}_{r_2}).$$

On définit le sous-espace :

$$\mathcal{K}_{i,ell} = \oplus_{r_1,r_2\in\mathbb{N},r_1+r_2=n_i}\mathcal{C}(\mathfrak{S}_{r_1,U-ell}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(\mathfrak{S}_{r_2,U-ell})$$

où, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{S}_{r,U-ell}$ le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_r$ qui sont produits de cycles de longueur impaire. On a un endomorphisme ι_i de $\mathcal{K}_i$ et une application :

$$Q_i : \mathcal{K}_{i,ell} \to C_c^\infty(U(q_i)),$$

cf. [MW] 3.2, 3.3. Toutes ces applications définissent par produit tensoriel un endomorphisme $\iota_{\tilde{I}}$ de $\otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_i$ et une application :

$$Q_{\tilde{I}} : \otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_{i,ell} \to C_c^\infty(Z_G(s)^0).$$

Remarquons que, par construction, $\iota_{\tilde{I}}$ conserve le sous-espace $\otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_{i,ell}$. Identifions l'espace $\mathcal{C}(W_{n_+})$ à la composante $\mathcal{C}(W_{n_+})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(W_0)$ de $\mathcal{K}_+$, identifions de même $\mathcal{C}(W_{n_-})$ à la composante $\mathcal{C}(W_{n_-})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(W_0)$ de $\mathcal{K}_-$ et, pour tout $i \in I$, identifions $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_{n_i})$ à la composante $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_{n_i})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(\mathfrak{S}_0)$ de $\mathcal{K}_i$. Alors $\mathcal{C}(W(\mathbf{n}))$ s'identifie à un sous-espace de $\otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_i$. On peut donc définir :

$$f_{\mathbf{n}} = Q_{\tilde{I}} \circ \iota_{\tilde{I}}(\varphi_{\mathbf{n}}).$$

Corollaire. *(i) Si l'hypothèse (Hyp) de XI.2 n'est pas vérifiée,* $J^G(x, f_{\tilde{G}}) = 0$.
(ii) Supposons vérifiée cette hypothèse (Hyp). Alors on a l'égalité :

$$J^G(x, f_{\tilde{G}}) = c(\eta_{1,+}\eta_{2,+})^{m_{1,-}}(-1)^{m_{1,-}d_I} J^{Z_G(s)^0}(u^2, f_{\mathbf{n}}),$$

où $d_I = \sum_{i\in I} d_i$ *et :*

$$c = \begin{cases} (-1)^{m_{1,+}}, & \text{si } N \text{ est pair,} \\ \nu(-1)^{m_{1,-}}, & \text{si } N \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve. Posons $\psi = \tau \circ \iota(\varphi)$. On peut considérer ψ comme une fonction sur la réunion disjointe :

$$\sqcup_{r_1,r_2\in\mathbb{N},r_1+r_2=n_1+n_2} W_{r_1} \times W_{r_2},$$

à support elliptique. On peut alors l'écrire :

$$\psi = \sum_{r_1,r_2\in\mathbb{N},r_1+r_2=n_1+n_2} \sum_{w_1,w_2} \psi(w_1, w_2)\varphi^{w_1} \otimes \varphi^{w_2},$$

où, pour $j = 1, 2$, w_j décrit un ensemble de représentants des orbites dans $W_{r_j,ell}$. Pour chaque terme de cette somme, l'intégrale orbitale $J^G(x, (k(\varphi^{w_1}\otimes\varphi^{w_2}))_{\tilde{G}})$ est calculée par la proposition XI.2. Si l'hypothèse (Hyp) de XI.2 n'est pas vérifiée, toutes ces intégrales orbitales sont nulles et la première assertion du corollaire s'ensuit. Supposons vérifiée cette hypothèse (Hyp). Alors :

$$(1) \qquad J^G(x, f_{\tilde{G}}) = (-1)^{n_1+n_2}\eta_{1,+}^{m_{1,-}}\eta_{2,+}^{m_{2,-}}\nu(-1)^a\nu(2)^b \sum_{r_1,r_2\in\mathbb{N},r_1+r_2=n_1+n_2} \sum_{\mathbf{r}\in\mathcal{N}(x,r_1,r_2)} |W(\mathbf{r})|^{-1}$$

$$\sum_{w_1,w_2} \psi(w_1, w_2) \sum_{\mathbf{v}\in W(\mathbf{r}),\zeta(\mathbf{r})(\mathbf{v})\in O(w_1)\times O(w_2)} sgn_{CD}(v_{1,+})^{m_{1,-}} sgn_{CD}(v_{2,+})^{m_{2,-}} J^{Z_G(s)^0}(u^2, Q(\mathbf{v})).$$

On peut remplacer la double somme en w_1, w_2 et $\mathbf{v} \in W(\mathbf{r})$ tel que $\zeta(\mathbf{r})(\mathbf{v}) \in O(w_1) \times O(w_2)$ par une somme sur $\mathbf{v} \in W(\mathbf{r})$, à condition de remplacer $\psi(w_1, w_2)$ par $\psi \circ \zeta(\mathbf{r})(\mathbf{v})$.

Fixons $r_1, r_2, \mathbf{r} \in \mathcal{N}(x, r_1, r_2)$ et $\mathbf{v} \in W(\mathbf{r})$, dont on peut supposer toutes les composantes elliptiques, ou U-elliptiques. On peut écrire :

$$W(\mathbf{r}) = W_{r_{1,+}} \times W_{r_{2,+}} \times W_{r_{1,-}} \times W_{r_{2,-}} \times \prod_{i \in I} (\mathfrak{S}_{r_{1,i}} \times \mathfrak{S}_{r_{2,i}}).$$

Sous cette forme, on voit que $\mathbf{v}$ est un point en lequel on peut évaluer tout élément de $\otimes_{i \in \tilde{I}} \mathcal{K}_i$. Montrons que l'on a l'égalité :

$$(2) \qquad \psi \circ \zeta(\mathbf{r})(\mathbf{v}) sgn_{CD}(v_{1,+})^{m_{1,-}} sgn_{CD}(v_{2,+})^{m_{2,-}} = c(m_1, m_2)(-1)^{d+n_1+n_2} \iota_{\tilde{I}}(\varphi_{\mathbf{n}})(\mathbf{v}),$$

où $c(m_1, m_2)$ est défini en IX.9. On a la suite d'inclusions :

$$W(\mathbf{r}) \stackrel{\zeta(\mathbf{r})}{\to} W_{r_1} \times W_{r_2} \hookrightarrow W_{n_1+n_2} = W_{n_1} \times W_{n_2}$$

(on rappelle que $n_{j''} = 0$). Notons $(w_1, w_2) = \zeta(\mathbf{r})(\mathbf{v})$ et w l'image de (w_1, w_2) dans $W_{n_1+n_2}$. En se reportant aux définitions de ι et τ et en tenant compte de l'égalité $n_{j''} = 0$, on voit que :

$$\psi \circ \zeta(\mathbf{r})(\mathbf{v}) = c(m_1, m_2) sgn(w_1) sgn(w_2) sgn_{CD}(w_1)^{m_{1,-}} sgn_{CD}(w_2)^{m_{2,-}} \varphi(w).$$

Pour tout entier $h \in \mathbb{N}$ et tout $u \in W_{h,ell}$, on a $sgn(u) = (-1)^h$. Pour tous entiers $h, f \in \mathbb{N}$, définissons un plongement $\zeta : \mathfrak{S}_h \to W_{hf}$ comme en XI.2. On vérifie que, pour $u \in \mathfrak{S}_h$, la condition $u \in \mathfrak{S}_{h,U-ell}$ est équivalente à $\zeta(u) \in W_{hf,ell}$ et que, si cette condition est vérifiée, on a l'égalité $sgn_{CD}(\zeta(u)) = (-1)^h$. Remarquons aussi que les hypothèses entraînent $m_{1,-} = m_{2,-}$. Grâce à l'égalité ci-dessus, le membre de gauche de (2) est égal à :

$$(-1)^{d+n_1+n_2} c(m_1, m_2) sgn_{CD}(v_{1,-})^{m_{1,-}} sgn_{CD}(v_{2,-})^{m_{1,-}} \varphi(w).$$

Pour tout $i \in \tilde{I}$, notons v_i l'image de $(v_{1,i}, v_{2,i})$ dans W_{n_i} si $i = \pm$, dans $\mathfrak{S}_{n_i}$ si $i \in I$. Posons $\underline{\mathbf{v}} = (v_i)_{i \in \tilde{I}} \in W(\mathbf{n})$. Par définition de $\iota_{\tilde{I}}$, on a l'égalité :

$$\iota_{\tilde{I}}(\varphi_{\mathbf{n}})(\mathbf{v}) = \varphi_{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{v}}).$$

Il est facile de vérifier que les éléments $\zeta(\mathbf{n})(\underline{\mathbf{v}})$ et w sont conjugués dans $W_{n_1+n_2}$. La définition de $\varphi_{\mathbf{n}}$ entraîne donc :

$$\iota_{\tilde{I}}(\varphi_{\mathbf{n}})(\mathbf{v}) = sgn_{CD}(v_-)^{m_{1,-}} \varphi(w).$$

On a de plus $sgn_{CD}(v_-) = sgn_{CD}(v_{1,-}) sgn_{CD}(v_{2,-})$. En comparant avec l'égalité précédente, on obtient (2).

La définition de $Q_{\tilde{I}}$ est telle que :

$$\sum_{r_1, r_2 \in \mathbb{N}, r_1+r_2=n_1+n_2} \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{N}(x, n_1, n_2)} |W(\mathbf{r})|^{-1} \sum_{\mathbf{v} \in W(\mathbf{r})} \iota_{\tilde{I}}(\varphi_{\mathbf{n}})(\mathbf{v}) = Q_{\tilde{I}} \circ \iota_{\tilde{I}}(\varphi_{\mathbf{n}}) = f_{\mathbf{n}}.$$

Alors les égalités (1) (modifiée comme on l'a dit) et (2) entraînent une égalité que l'on transforme aisément en celle de l'énoncé, en utilisant l'égalité $m_{1,-} = m_{2,-}$ et un calcul élémentaire de a, b et $c(m_1, m_2)$. □

XI.4. Constance d'intégrales orbitales sur les classes de forte conjugaison stable elliptiques

Les hypothèses sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

Corollaire. *Les intégrales orbitales de $f_{\tilde{G}}$ sont constantes sur les classes de forte conjugaison stable régulières elliptiques.*

Preuve. Soient x, x' deux éléments réguliers elliptiques de $\tilde{G}$, fortement stablement conjugués. On veut prouver que $J^G(x, f_{\tilde{G}}) = J^G(x', f_{\tilde{G}})$. Les deux éléments x et x' sont compacts, écrivons $x = su$ et $x' = s'u'$ comme en XI.2. Nos deux intégrales orbitales sont calculées par le corollaire précédent. On affecte d'un ' les données relatives à x'. D'après la description de V.3, les éléments s et s' sont fortement stablement conjugués (remarquons que <u>det</u> est trivial sur les éléments topologiquement unipotents). On a donc $d_{j,+} = d'_{j,+}$ pour $j = 1, 2$, cf. XI.1. Alors l'hypothèse (Hyp) relative à x est équivalente à la même hypothèse relative à x'. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, nos deux intégrales orbitales sont nulles. Supposons cette hypothèse vérifiée. Les termes c et d intervenant dans la formule du corollaire précédent sont les mêmes pour x et x'. Un terme $\eta'_{j,+}$ n'est pas forcément égal à $\eta_{j,+}$ mais le produit $\eta'_{1,+}\eta'_{2,+}$ est égal à $\eta_{1,+}\eta_{2,+}$, cf. XI.1. Il reste à prouver l'égalité :

$$(1) \qquad J^{Z_G(s)^0}(u^2, f_{\mathbf{n}}) = J^{Z_G(s')^0}(u'^2, f'_{\mathbf{n}}).$$

D'après V.3, les deux groupes $\mathbf{Z_G}(s)^0$ et $\mathbf{Z_G}(s')^0$ sont formes intérieures l'un de l'autre. Il en résulte une correspondance bijective entre les classes de conjugaison stable régulières elliptiques dans $Z_G(s)^0$ et $Z_G(s')^0$. D'après V.3, il existe $\gamma \in Z_G(s)$ tel que les classes de conjugaison stable de $\gamma(u)$ et de u' se correspondent par cette bijection, donc aussi celles de $\gamma(u^2)$ et u'^2. Si $\mathbf{Z_G}(s)$ n'est pas connexe, la fonction $f_{\mathbf{n}}$ étant par construction invariante par au moins un élément de $Z_G(s) \setminus Z_G(s)^0$, ses intégrales orbitales sont invariantes par γ, et on peut supposer que u^2 et u'^2 sont dans des classes de conjugaison stable qui se correspondent. Chacun des groupes $\mathbf{Z_G}(s)^0$ et $\mathbf{Z_G}(s')^0$ se décompose en produit d'un groupe symplectique, d'un groupe spécial orthogonal et de groupes unitaires. Cela nous ramène à démontrer des égalités analogues à (1) pour chacun de ces facteurs. Pour les groupes spéciaux orthogonaux ou unitaires, l'égalité résulte de [MW], proposition 3.4(i) et proposition 3.12(i). Avec les notations des paragraphes précédents, on peut identifier les deux facteurs symplectiques $Sp(q_-)$ et $Sp(q'_-)$. L'égalité à prouver pour les facteurs symplectiques s'écrit :

$$J^{Sp(q_-)}(u_-^2, Q^-(m_{1,-}, m_{2,-}) \circ \iota^{n_-}(\varphi_-)) = J^{Sp(q_-)}(u_-'^2, Q^-(m_{1,-}, m_{2,-}) \circ \iota^{n_-}(\varphi_-)),$$

où u_- et u'_- sont les composantes de u et u' dans $Sp(q_-)$ et φ_- est un élément de $\mathcal{C}(W_{n_-})$. On introduit l'application :

$$E : X \mapsto \frac{1 + \frac{X}{2}}{1 - \frac{X}{2}},$$

qui envoie bijectivement l'ensemble des éléments tologiquement nilpotents de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(q_-)$ sur celui des éléments tologiquement unipotents dans $Sp(q_-)$. Soient $X, X' \in \mathfrak{sp}(q_-)$ tels que $E(X) = u_-^2$ et $E(X') = u_-'^2$. L'égalité à prouver s'écrit alors :

$$J^{Sp(q_-)}(X, Q^-(m_{1,-}, m_{2,-})^{Lie} \circ \iota^{n_-}(\varphi_-)) = J^{Sp(q_-)}(X', Q^-(m_{1,-}, m_{2,-})^{Lie} \circ \iota^{n_-}(\varphi_-)).$$

Cette égalité résulte de la proposition X.3(i). □

XI.5. Le théorème de stabilité

On a défini en IX.11 l'ensemble $\mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)$. Si N est pair, posons $\mathcal{P}_{2,disc}^{st}(N) = \mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)$. Si N est impair, notons $\mathcal{P}_{2,disc}^{st}(N)$ l'ensemble des $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{quasi-st}(N)$ tels que $S(\boldsymbol{\lambda}^-)$ est pair.

Théorème. *Soit* $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{st}(N)$. *Alors la distribution* $trace_{\tilde{G}}\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ *est stable.*

Preuve. Par construction, cette distribution appartient à $R_{ell}(\tilde{G})$, cf. IV.4. D'après le théorème V.5, il suffit de prouver que le caractère de $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ est constant sur les classes de conjugaison stable régulières elliptiques dans $\tilde{G}$. L'hypothèse $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}_{2,disc}^{st}(N)$ entraîne que le caractère central de la représentation $\pi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ de G est trivial. Alors le caractère de $\pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ est invariant par Z_G. D'après le lemme XI.1, il suffit donc de prouver que ce caractère est constant sur les classes de forte conjugaison stable régulières elliptiques. D'après la proposition VII.4(iii), il s'agit de prouver que les intégrales orbitales de la fonction $(\tilde{f}_{cusp}^{\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-})_{\tilde{G}}$ sont constantes sur de telles classes de forte conjugaison stable. D'après la proposition IX.11, on peut remplacer cette fonction par $(proj_{cusp}\circ k\circ\tau\circ\iota(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)))_{\tilde{G}}$. Il est clair que :

$$proj_{cusp}\circ k\circ\tau\circ\iota(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-))=k\circ\tau\circ\iota\circ proj_{ell}(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)).$$

Posons $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^+\cup\boldsymbol{\lambda}^-$. Alors $proj_{ell}(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-))$ est combinaison linéaire d'éléments $proj_{ell}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda},\epsilon))$ où $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$. Parce que $(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)\in\mathcal{P}_{2,disc}^{st}$, $\boldsymbol{\lambda}$ est à termes pairs si N est pair, impairs si N est impair. De la définition de $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda},\epsilon)$ résulte que $proj_{ell}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda},\epsilon))$ est un élément de $\mathcal{K}$ vérifiant les conditions imposées à l'élément φ de XI.3. Le corollaire XI.4 implique que pour tout ϵ, les intégrales orbitales de $(k\circ\tau\circ\iota\circ proj_{ell}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda},\epsilon)))_{\tilde{G}}$ sont constantes sur les classes de forte conjugaison stable régulières elliptiques de $\tilde{G}$. C'est ce qu'il fallait démontrer. $\square$

XII. Transfert endoscopique de $SO(N+1)$ vers $\tilde{G}_N$, pour N pair

XII.1. L'application norme

On suppose désormais :

- N est pair ;
- l'assertion $(Lemmefond)_{\leq N}$ est vérifiée, cf. VI.1.

On note simplement $\mathbf{H}$ le groupe $\mathbf{H}_{N/2}^+$ de III.2 (autrement dit le groupe $\mathbf{SO}(N+1)$ déployé). Rappelons que l'on a introduit, à la suite de Kottwitz et Shelstad, l'application :

$$Norme:\tilde{G}_{reg}/st\to H_{reg}/st,$$

et que, pour $g\in\tilde{G}_{reg}$ et $h\in H_{reg}$, on a convenu d'écrire $Norme(g)=h$ pour signifier que l'image par cette application de la classe de conjugaison stable de g était celle de h.

Soient $g\in\tilde{G}_{reg}$ et $h\in H_{reg}$, supposons $Norme(g)=h$. Alors g est elliptique si et seulement si h l'est. Supposons qu'il en soit ainsi. Alors g et h sont aussi compacts et on peut les décomposer en $g=su$, $h=s'u'$, où s, resp. s', est un élément topologiquement semi-simple de $\tilde{G}$, resp. H, u, resp. u', est un élément topologiquement unipotent de G, resp. H, s et u commutent ainsi que s' et u'. On a paramétré en I.3 et XI.1 la classe de conjugaison de s par des données $I=I^*$, $(a_i)_{i\in I}$, $(d_i)_{i\in\tilde{I}}$ (où $\tilde{I}=I\cup\{\pm\}$), $(d_{1,i},d_{2,i})_{i\in I}$, $(d_{1,+},d_{2,+},\eta_{1,+},\eta_{2,+})$. En [MW] 3.17, on a paramétré la classe de conjugaison de s' par des données analogues $I'={I'}^*$, $(a'_i)_{i\in I'}$, $(d'_i)_{i\in\tilde{I}'}$, $(d'_{1,i},d'_{2,i})_{i\in I'}$, $(d'_{1,+},d'_{2,+},\eta'_{1,+},\eta'_{2,+})$, $(d'_{1,-},d'_{2,-},\eta'_{1,-},\eta'_{2,-})$.

Remarque. Plus exactement, les données définies en [MW] sont équivalentes à des données comme ci-dessus. Les termes a'_i étaient notées s_i en [MW]. Pour $i\in I'$, la forme hermitienne Q_i^U de [MW] est paramétrée par le couple $(d'_{1,i},d'_{2,i})$ comme en XI.1. Enfin les deux formes quadratiques Q_+ et Q_- de [MW] sont paramétrées par les quadruplets $(d'_{1,\pm},d'_{2,\pm},\eta'_{1,\pm},\eta'_{2,\pm})$. La forme Q_+, resp. Q_- est de dimension impaire, resp. paire, autrement dit :

$$d'_-\equiv d'_++1\equiv 0\ mod\ 2\mathbb{Z}.$$

L'isomorphisme $Q_+\oplus Q_-\oplus(\oplus_{i\in I'}Q_i)\simeq q_{N/2}^+$ de [MW] se traduit par les relations :

$$(1)\qquad\left\{\begin{array}{c} d'_{2,+}+d'_{2,-}\equiv d'_{1,+}+d'_{1,-}+1\equiv 0\ mod\ 2\mathbb{Z}\\ \eta'_{1,+}\eta'_{1,-}=(-1)^{\sum_{i\in I'}d'_{1,i}},\ \eta'_{2,+}\eta'_{2,-}=(-1)^{\sum_{i\in I'}d'_{2,i}}\nu(-1)^{d'_{2,+}}.\end{array}\right.$$

On a noté $\Lambda(g)$ l'ensemble des valeurs propres de l'automorphisme ${}^t\sigma^{-1}\sigma$, où $\sigma\in Isom(V,V^*)$ est tel que $g=\tilde{\sigma}$. Une partie des données paramétrant s se déduisent de $\Lambda(g)$ de la façon suivante. Etendons la valuation val en une valuation définie sur $\bar{F}$, à valeurs dans $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$. Tout élément $x\in\bar{F}$ tel que $val(x)=0$ s'écrit de façon unique comme produit $x=x_cx_u$, où x_c est une racine de l'unité d'ordre premier à p et $val(x_u - 1) > 0$. D'autre part, pour $x \in \bar{F}^\times$, notons $\Omega(x)$ l'ensemble des conjugués de x. Il y a alors une décomposition en union disjointe :

$$\Lambda(g) = \sqcup_{i\in\tilde{I}}\Lambda(g)_i$$

et, pour tout $i \in \tilde{I}$, une bijection :

$$(2) \qquad \Lambda(g)_i \xrightarrow{\sim} \Omega(a_i) \times \{1, ..., d_i\},$$

où l'on note $a_+ = 1$, $a_- = -1$, de telle sorte que la composée de cette bijection et de la projection sur le premier facteur $\Omega(a_i)$ coïncide avec l'application $x \mapsto x_c$. On a associé à s une décomposition $V = \oplus_{i\in\tilde{I}} V_i$. L'élément u se décompose en $u = \prod_{i\in\tilde{I}} u_i$, où u_i est un automorphisme F_i-linéaire de V_i (avec $F_i = F$ si $i = \pm$). Notons $\Lambda(u_i)$ l'ensemble des valeurs propres de cet automorphisme. Alors l'ensemble $\{a_i x^2; x \in \Lambda(u_i)\}$ est l'image réciproque de $\{a_i\} \times \{1, ..., d_i\}$ par la bijection (2).

On décrit de façon analogue une partie des données paramétrant s' à l'aide de l'ensemble $\Lambda(h)$ des valeurs propres de h. Nous n'expliciterons pas cette description, mais en tirerons les conséquences. Ecrivons $u' = \prod_{i\in\tilde{I}'} u'_i$ et définissons $\Lambda(u'_i)$ comme ci-dessus. Grâce à l'égalité $\Lambda(h) = \{-x; x \in \Lambda(g)\} \cup \{1\}$, cf. III.2, on peut supposer :

$I' = I$;

$a'_i = -a_i$, $d'_i = d_i$ pour tout $i \in I$;

(3) $d'_+ = d_- + 1$, $d'_- = d_+$;

(4) $\Lambda(u'_i) = \{x^2; x \in \Lambda(u_i)\}$ pour tout $i \in I$;

(5) $\Lambda(u'_+) = \{x^2; x \in \Lambda(u_-)\} \cup \{1\}$, $\Lambda(u'_-) = \{x^2; x \in \Lambda(u_+)\}$.

Pour $i \in I$, u_i et u'_i appartiennent à des groupes unitaires de même rang, qui sont forcément formes intérieures l'un de l'autre. La relation (4) dit que les classes de conjugaison stable de u'_i et u_i^2 se correspondent. L'élément u'_+ appartient à un groupe spécial orthogonal impair et l'élément u_- appartient à un groupe symplectique de même rang. On a défini en X.4 une relation $\sim$ entre éléments réguliers des algèbres de Lie de ces groupes. Cette relation se relève aisément aux éléments du groupe qui appartiennent à l'image de l'application de Cayley notée E en XI.4, en particulier aux éléments topologiquement unipotents. La première relation de (5) dit que $u_-^2 \sim u'_+$. L'élément u'_-, resp. u_+, appartient au groupe orthogonal d'une forme quadratique Q_-, resp. q_+. Ces formes ont même dimension et celle-ci est paire. D'après la seconde relation de (5), ces éléments, qui sont réguliers, ont même ensemble de valeurs propres. Il en résulte que les déterminants de Q_- et q_+ sont égaux dans $F^\times/F^{\times 2}$. Autrement dit :

$$(6) \qquad (d'_{1,-}, d'_{2,-}, \eta'_{1,-}\eta'_{2,-}) = (d_{1,+}, d_{2,+}, \eta_{1,+}\eta_{2,+}).$$

Les deux groupes orthogonaux sont alors formes intérieures l'un de l'autre et la seconde relation de (5) nous dit qu'il existe $\gamma \in O(q_+)$ tel que les classes de conjugaison stable de u'_- et de $\gamma(u_+^2)$ se correspondent.

Remarquons que les relations (1) et (6) permettent de déterminer le triplet :

$$(7) \qquad (d'_{1,+}, d'_{2,+}, \eta'_{1,+}\eta'_{2,+}) = (d_{1,+} + 1, d_{2,+}, \eta_{1,+}\eta_{2,+}(-1)^{\sum_{i\in I} d_i}\nu(-1)^{d_{2,+}}).$$

XII.2. L-paquets pour les groupes orthogonaux impairs

Soit $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}^{st}_{2,disc}(N)$. Notons W_F le groupe de Weil de F et $\hat{H} = Sp(N, \mathbb{C})$. Au couple $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ on associe un homomorphisme :

$$\psi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) : W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \to \hat{H}$$

bien déterminé à conjugaison près par $\hat{H}$. On le construit de la façon suivante. Notons ξ_+ le caractère trivial de W_F et ξ_- son unique caractère d'ordre 2 non ramifié. Pour tout entier

$m \geq 1$, notons ρ_m l'unique représentation irréductible de $SL(2,\mathbb{C})$ de dimension m. Pour tout $\eta = \pm$ et tout $i \geq 1$ tel que $\lambda_i^\eta \neq 0$, l'homomorphisme :

$$\xi_\eta \otimes \rho_{\lambda_i^\eta} : W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \to GL(\lambda_i^\eta, \mathbb{C})$$

prend ses valeurs dans un sous-groupe isomorphe à $Sp(\lambda_i^\eta, \mathbb{C})$. Il y a d'autre part une injection évidente :

$$\prod_{\eta,i} Sp(\lambda_i^\eta, \mathbb{C}) \to Sp(N, \mathbb{C}).$$

Alors $\psi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ est le composé :

$$W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \stackrel{\prod_{\eta,i} \xi_\eta \otimes \rho_{\lambda_i^\eta}}{\to} \prod_{\eta,i} Sp(\lambda_i^\eta, \mathbb{C}) \to Sp(N, \mathbb{C}).$$

Notons $Z_{\hat{H}}(\psi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-))$ le commutant dans $\hat{H}$ de l'image de $\psi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$. Il contient l'élément -1 du centre de $\hat{H}$. Notons $E(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ l'ensemble des caractères de $Z_{\hat{H}}(\psi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-))$ triviaux sur cet élément -1 et sur la composante neutre $Z_{\hat{H}}(\psi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-))^0$. Dans [MW] 5.1, à la suite de Lusztig, on a associé à tout $\epsilon \in E(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ une représentation admissible irréductible de H, que l'on note ici $\sigma_{\psi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-),\epsilon}$. Elle est de la série discrète. Rappelons que l'on note $trace\, \sigma_{\psi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-),\epsilon}$ son caractère. Posons :

$$trace\, \sigma(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) = \sum_{\epsilon \in E(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)} trace\, \sigma_{\psi(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-),\epsilon}.$$

On sait d'après [MW] théorème 8.3 que cette distribution est stable.

XII.3. Le transfert des L-paquets

Théorème. *Soit* $(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-) \in \mathcal{P}^{st}_{2,disc}(N)$. *Alors* $trace_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$ *est un transfert de* $trace\, \sigma(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)$.

Preuve. Nous sommes dans les conditions où le théorème VI.3 s'applique (en particulier grâce à notre hypothèse $(Lemme fond)_{\geq N}$). Il suffit donc de prouver l'assertion suivante :

(1) soient $g \in \tilde{G}_{reg}$ et $h \in H_{reg}$ deux éléments semi-simples réguliers elliptiques ; supposons $Norme(g) = h$; alors on a l'égalité $trace\, \sigma(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)(h) = trace_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)(g)$.

Les éléments g et h sont compacts. On écrit $g = su$, $h = s'u'$ comme en XII.1 et on introduit les données I, $(a_i)_{i\in I}$, $(d_i)_{i \in \tilde{I}}$, $(d_{1,i}, d_{2,i})_{i\in I}$, $(d_{1,+}, d_{2,+}, \eta_{1,+}, \eta_{2,+})$ qui paramètrent s ainsi que les données I, $(-a_i)_{i\in I}$, $(d'_i)_{i\in\tilde{I}}$, $(d'_{1,i}, d'_{2,i})_{i\in I}$, $(d'_{1,+}, d'_{2,+}, \eta'_{1,+}, \eta'_{2,+})$, $(d'_{1,-}, d'_{2,-}, \eta'_{1,-}, \eta'_{2,-})$ qui paramètrent s'.

Posons $\varphi = proj_{ell}(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-))$. C'est un élément de $\mathcal{K}$. Posons $f = k \circ \tau \circ \iota(\varphi)$. Comme on l'a expliqué dans la preuve du théorème XI.5, les propositions VII.4(i) et IX.11 entraînent l'égalité :

$$trace_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)(g) = \Delta(g)^{-1/2} J^G(g, f_{\tilde{G}}).$$

Posons $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^+ \cup \boldsymbol{\lambda}^-$. Les termes de cette partition sont tous pairs. Pour $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$, posons $\varphi^\epsilon =< \epsilon, \boldsymbol{\lambda}^- > proj_{ell}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}, \epsilon))$ et $f^\epsilon = k \circ \tau \circ \iota(\varphi^\epsilon)$. On a l'égalité :

$$\varphi = \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}} \varphi^\epsilon,$$

d'où :

$$(2) \qquad trace_{\tilde{G}} \pi^+(\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)(g) = \Delta(g)^{-1/2} \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}} J^G(g, f^\epsilon_{\tilde{G}}).$$

D'après les définitions de IX.8 et IX.10, pour $\epsilon\in\{\pm 1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$, il existe un couple d'entiers ≥ 0, notons-le $(m(\epsilon),n(\epsilon))$, tel que φ^{ϵ} appartienne à $K[m(\epsilon),m(\epsilon),n(\epsilon),0]$. Posons $m(\epsilon)_-=[\frac{m(\epsilon)}{2}]$, $m(\epsilon)_+=[\frac{m(\epsilon)+1}{2}]$. Considérons l'hypothèse :

$$(Hyp^{\epsilon})\qquad \left\{\begin{array}{c} d_{1,+}\equiv d_{2,+}\equiv m(\epsilon)_+\ mod\ 2\mathbb{Z},\\ d_+\geq 2m(\epsilon)_+^2,\ d_-\geq 2m(\epsilon)_-(m(\epsilon)_-+1).\end{array}\right.$$

Sous cette hypothèse, en appliquant la construction de XI.3, on déduit de φ^{ϵ} une fonction sur $Z_G(s)^0$, notons-la f^{ϵ}_{unip}. Grâce au corollaire XI.3, on a l'égalité :

$$(3)\qquad J^G(g,f^{\epsilon}_{\tilde{G}})$$

$$=\left\{\begin{array}{cc} 0, & si\ (Hyp^{\epsilon})\ n'est\ pas\ v\acute{e}rifi\acute{e}e,\\ (-1)^{m(\epsilon)_++m(\epsilon)_-d_I}(\eta_{1,+}\eta_{2,+})^{m(\epsilon)_-}J^{Z_G(s)^0}(u^2,f^{\epsilon}_{unip}), & si\ (Hyp^{\epsilon})\ est\ v\acute{e}rifi\acute{e}e.\end{array}\right.$$

Dans [MW], on avait défini :

- un espace $\mathcal{R}$, un sous-espace $\mathcal{R}_{ell}$ et une projection $proj_{ell}:\mathcal{R}\to\mathcal{R}_{ell}$;

- un endomorphisme $\rho\iota$ de $\mathcal{R}$, conservant $\mathcal{R}_{ell}$;

- un homomorphisme $\psi_{k,iso}:\mathcal{R}_{ell}\to C_c^{\infty}(H)$ (la première composante du ψ_k de [MW] 3.16) ;

- pour tout quadruplet $(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$ formé de deux partitions $\boldsymbol{\mu}_1$, $\boldsymbol{\mu}_2$ telles que $\boldsymbol{\mu}_1\cup\boldsymbol{\mu}_2=\boldsymbol{\lambda}$ et de deux éléments $\epsilon_j\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\mu}_j)}$ pour $j=1,2$, un élément de $\mathcal{R}$, notons-le $\boldsymbol{\rho}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$;

- pour tout tel quadruplet, une combinaison linéaire des éléments précédents, que nous notons $\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$.

Rappelons quelques définitions. L'espace $\mathcal{R}$ est somme directe de sous-espaces $\mathcal{R}(r_1,r_2,n_1,n_2)$ sur les quadruplets (r_1,r_2,n_1,n_2) tels que $r_1,n_1,n_2\in\mathbb{N}$, $r_2\in\mathbb{Z}$, $r_1^2+r_1+r_2^2+n_1+n_2=\frac{N}{2}$. On a $\mathcal{R}(r_1,r_2,n_1,n_2)=\mathcal{C}(W_{n_1})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(W_{n_2})$. Le sous-espace $\mathcal{R}_{ell}$ est le sous-espace évident des éléments à support elliptique. Soit $(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$ comme ci-dessus. Pour $j=1,2$, posons $N_j=S(\boldsymbol{\mu}_j)$. On a $(\boldsymbol{\mu}_j,\epsilon_j)\in\mathcal{I}_{symp}(N_j)$, cf. IX.8. On lui associe comme dans ce paragraphe deux entiers $h_j,n_j\geq 0$ tels que $h_j(h_j+1)+2n_j=N_j$ et une représentation $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\mu}_j,\epsilon_j)$ de W_{n_j}. Posons :

$$(r_1,r_2)=\left\{\begin{array}{lll} (\frac{h_1+h_2}{2},\frac{h_1-h_2}{2}), & si\ h_1\equiv h_2\ mod\ 2\mathbb{Z} & \\ (\frac{h_1-h_2-1}{2},\frac{h_1+h_2+1}{2}), & si\ h_1\not\equiv h_2\ mod\ 2\mathbb{Z} & et\ h_1>h_2\\ (\frac{h_2-h_1-1}{2},-\frac{h_1+h_2+1}{2}), & si\ h_1\not\equiv h_2\ mod\ 2\mathbb{Z} & et\ h_1<h_2.\end{array}\right.$$

Alors $\boldsymbol{\rho}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$ est l'élément $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\mu}_1,\epsilon_1)\otimes\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\mu}_2,\epsilon_2)$ de $\mathcal{R}(r_1,r_2,n_1,n_2)=\mathcal{C}(W_{n_1})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}(W_{n_2})$.

Remarquons que l'ensemble des caractères de $Z_{\hat{H}}(\psi(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-))/Z_{\hat{H}}(\psi(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-))^0$ s'identifie naturellement à $\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda}^+)}\times\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda}^-)}$. Son sous-groupe $E(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)$ s'identifie au groupe des $(\epsilon^+,\epsilon^-)\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda}^+)}\times\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda}^-)}$ tels que :

$$\prod_{i\in Jord(\boldsymbol{\lambda}^+)}\epsilon^+(i)=\prod_{i\in Jord(\boldsymbol{\lambda}^-)}\epsilon^-(i).$$

L'égalité suivante est vérifiée pour tout $\epsilon=(\epsilon^+,\epsilon^-)\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda}^+)}\times\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda}^-)}$:

$$(4)\qquad \Delta(h)^{-1/2}J^H(h,\psi_{k,iso}\circ\rho\iota\circ proj_{ell}(\mathcal{F}\boldsymbol{\rho}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-,\epsilon^+,\epsilon^-)))=$$

$$\left\{\begin{array}{cc} 0, & si\ \epsilon\not\in E(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-),\\ (-1)^{N/2}trace\,\sigma_{\psi(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-),\epsilon}(h) & si\ \epsilon\in E(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-).\end{array}\right.$$

Cela résulte de l'application successive du théorème 1.9, du lemme 4.2, du corollaire 5.7, de la proposition 5.5 et du théorème 6.26 de [MW]. En particulier, le signe $(-1)^{N/2}$ est issu du corollaire 5.7.

On a d'autre part l'égalité :

$$(5)\qquad \sum_{(\epsilon^+,\epsilon^-)\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda}^+)}\times\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda}^-)}} \mathcal{F}\boldsymbol{\rho}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-,\epsilon^+,\epsilon^-) = \sum_{\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}} <\epsilon,\boldsymbol{\lambda}^- > \boldsymbol{\rho}_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\lambda},\emptyset,\epsilon,\emptyset).$$

Cela résulte des lemmes 6.4, 6.7 et du corollaire 6.12(i) de [MW].

Pour $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$, posons $\varphi^\epsilon_{\mathcal{R}} =<\epsilon,\boldsymbol{\lambda}^- > proj_{ell}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda},\emptyset,\epsilon,\emptyset))$ et $f^{\epsilon,H}=\psi_{k,iso}\circ\rho\iota(\varphi^\epsilon_{\mathcal{R}})$. Des formules (4) et (5) résulte l'égalité :

$$(6)\qquad trace\,\sigma(\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-) = (-1)^{N/2}\Delta(h)^{-1/2}\sum_{\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}} J^H(h,f^{\epsilon,H}).$$

Soit $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord(\boldsymbol{\lambda})}$. remarquons que, par construction, $(m(\epsilon),n(\epsilon))$ est le couple d'entiers attaché par la correspondance de Springer généralisée à $(\boldsymbol{\lambda},\epsilon)$. En appliquant les rappels ci-dessus, on voit que $\varphi^\epsilon_{\mathcal{R}}$ appartient à $\mathcal{R}(m(\epsilon)_-,m(\epsilon)_+,n(\epsilon),0)$. La proposition 3.19 de [MW] est analogue à la proposition XI.2 ci-dessus et on en tire un corollaire analogue à notre corollaire XI.3. Il s'énonce de la façon suivante. Considérons l'hypothèse :

$$(Hyp^{\epsilon,H})\qquad \begin{cases} d'_{2,-}\equiv m(\epsilon)_+ \; mod\; 2\mathbb{Z},\\ d'_+\geq m(\epsilon)_-^2+(m(\epsilon)_-+1)^2,\;\; d'_-\geq 2m(\epsilon)_+^2.\end{cases}$$

Sous cette hypothèse, en appliquant la construction de [MW] 3.19, on déduit de $\varphi^\epsilon_{\mathcal{R}}$ une fonction sur $Z_H(s')^0$, notons-la $f^{\epsilon,H}_{unip}$. On a l'égalité :

$$(7)\qquad J^H(h,f^{\epsilon,H}) = \begin{cases} 0, & si\ (Hyp^{\epsilon,H})\ n'est\ pas\ vérifiée,\\ (-1)^{m(\epsilon)_++N/2}\nu(-1)^a J^{Z_H(s')^0}(u',f^{\epsilon,H}_{unip}), & si\ (Hyp^{\epsilon,H})\ est\ vérifiée,\end{cases}$$

où $a=\frac{m(\epsilon)_-^2-m(\epsilon)_-+m(\epsilon)_+^2-m(\epsilon)_+}{2}$.

Grâce aux relations XII.1(3) et (6) et à la congruence évidente $d_{1,+}\equiv d_{2,+}\; mod\; 2\mathbb{Z}$ (car $d_{1,+}+d_{2,+}\equiv d_+\equiv N\equiv 0\; mod\; 2\mathbb{Z}$), on voit que les hypothèses (Hyp^ϵ) et $(Hyp^{\epsilon,H})$ sont équivalentes.

Supposons cette hypothèse vérifiée et revenons à la définition de la fonction f^ϵ_{unip}. Posons $\mathbf{n}=(n_i)_{i\in\tilde{I}}$, où :

$n_+=\frac{d_+}{2}-m(\epsilon)_+^2$, $n_-=\frac{d_-}{2}-m(\epsilon)_-(m(\epsilon)_-+1)$, $n_i=d_i$ pour tout $i\in I$.

Définissons comme en XI.3 les ensembles $W(\mathbf{n})$, $\mathcal{K}_i$ pour $i\in\tilde{I}$ et les applications :

$$\zeta(\mathbf{n}) : W(\mathbf{n})\to W_{n(\epsilon)},$$

$$\iota_{\tilde{I}}=\otimes_{i\in\tilde{I}}\iota_i : \otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_i\to\otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_i,$$

$$Q_{\tilde{I}}=\otimes_{i\in\tilde{I}}Q_i : \otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_{i,ell}\to C_c^\infty(Z_G(s)^0).$$

Avec les notations de XI.3, on a $Q_+=Q^+(m(\epsilon)_+,m(\epsilon)_+)$, $Q_-=Q^-(m(\epsilon)_-,m(\epsilon)_-)$. Considérons φ^ϵ comme un élément de $\mathcal{C}(W_{n(\epsilon),ell})$ et notons $sgn_{CD,-}$ la fonction sur $W(\mathbf{n})$ produit des caractères triviaux sur W_{n_+} et les $\mathfrak{S}_{n_i}$ pour $i\in I$, et du caractère sgn_{CD} de W_{n_-}. Alors :

$$f^\epsilon_{unip}=Q_{\tilde{I}}\circ\iota_{\tilde{I}}(sgn_{CD,-}^{m(\epsilon)_-}\varphi^\epsilon\circ\zeta(\mathbf{n})).$$

De façon plus explicite, décomposons $Z_G(s)^0$ en produit $\prod_{i\in\tilde{I}}U_i$, où U_+ est un groupe spécial orthogonal, U_- un groupe symplectique et, pour $i\in I$, U_i est un groupe unitaire. Décomposons conformément u en produit $u=\prod_{i\in\tilde{I}}u_i$. Pour simplifier, on peut supposer que $\varphi^\epsilon\circ\zeta(\mathbf{n})$ se décompose aussi en produit : le cas général s'en déduit par linéarité. Supposons donc $\varphi^\epsilon\circ\zeta(\mathbf{n})=\otimes_{i\in\tilde{I}}\varphi_i$, où $\varphi_\eta\in\mathcal{C}(W_{n_\eta})\subseteq\mathcal{K}_\eta$ pour $\eta=\pm$ et $\varphi_i\in\mathcal{C}(\mathfrak{S}_{n_i})\subseteq\mathcal{K}_i$ pour $i\in I$. Pour $i\in\tilde{I}$, définissons $f_i^\epsilon\in C_c^\infty(U_i)$ par :

$$f_+^\epsilon=Q_+\circ\iota_+(\varphi_+),$$
$$f_-^\epsilon=Q_-\circ\iota_-(sgn_{CD}^{m(\epsilon)_-}\varphi_-),$$
$$f_i^\epsilon=Q_i\circ\iota_i(\varphi_i),\ pour\ i\in I.$$

Alors $f_{unip}^\epsilon=\otimes_{i\in\tilde{I}}f_i^\epsilon$ et :

$$J^{Z_G(s)^0}(u^2,f_{unip}^\epsilon)=\prod_{i\in\tilde{I}}J^{U_i}(u_i^2,f_i^\epsilon).$$

La construction de $f_{unip}^{\epsilon,H}$ est similaire, cf. [MW] 3.19. Elle se reformule de la façon suivante. Posons $\mathbf{n}'=(n_i')_{i\in\tilde{I}}$ où $n_\pm'=n_\mp$ et $n_i'=n_i$ pour $i\in I$. On en déduit un ensemble $W(\mathbf{n}')$ et une application $\zeta(\mathbf{n}'):W(\mathbf{n}')\to W_{n(\epsilon)}$. On pose $\mathcal{K}_\pm'=\mathcal{K}_\mp$, $\mathcal{K}_i'=\mathcal{K}_i$ pour $i\in I$. On a des applications :

$$\iota_i':\mathcal{K}_i'\to\mathcal{K}_i'$$

pour tout $i\in\tilde{I}$. En fait, $\iota_i'=\iota_i$ pour $i\in I$ et $\iota_\pm'=\iota_\mp$. Décomposons $Z_H(s')^0$ en produit $Z_H(s')^0=\prod_{i\in\tilde{I}}U_i'$. On note :

$$\iota_{\tilde{I}}':\otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_i'\to\otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_i'$$

leur produit tensoriel. On a des applications :

$$\begin{cases} Q_+'=Q^+(m(\epsilon)_-+1,m(\epsilon)_-):\mathcal{K}_{+,ell}'\to C_c^\infty(U_+'), & si\ m(\epsilon)_+=m(\epsilon)_-,\\ Q_+'=Q^+(m(\epsilon)_-,m(\epsilon)_-+1):\mathcal{K}_{+,ell}'\to C_c^\infty(U_+'), & si\ m(\epsilon)_+=m(\epsilon)_-+1,\end{cases}$$

$$Q_-'=Q^+(m(\epsilon)_+,m(\epsilon)_+):\mathcal{K}_{-,ell}'\to C_c^\infty(U_-'),$$
$$Q_i':\mathcal{K}_{i,ell}'\to C_c^\infty(U_i'),\ pour\ i\in I.$$

Les notations sont essentiellement celles de [MW]. On a ajouté des exposants $^+$ à certaines applications pour rappeler qu'elles concernent des groupes spéciaux orthogonaux. On note :

$$Q_{\tilde{I}}':\otimes_{i\in\tilde{I}}\mathcal{K}_{i,ell}'\to C_c^\infty(Z_H(s')^0)$$

le produit tensoriel de ces applications. Alors $f_{unip}^{\epsilon,H}=Q_{\tilde{I}}'\circ\iota_{\tilde{I}}'(\varphi^\epsilon\circ\zeta(\mathbf{n}'))$. Décomposons u' en produit $u'=\prod_{i\in\tilde{I}}u_i'$. On a supposé $\varphi^\epsilon\circ\zeta(\mathbf{n})=\otimes_{i\in\tilde{I}}\varphi_i$. Alors $\varphi^\epsilon\circ\zeta(\mathbf{n}')=\otimes_{i\in\tilde{I}}\varphi_i'$, où $\varphi_\pm'=\varphi_\mp$ et $\varphi_i'=\varphi_i$ pour $i\in I$. Pour $i\in\tilde{I}$, définissons $f_i^{\epsilon,H}\in C_c^\infty(U_i')$ par :

$$f_i^{\epsilon,H}=Q_i'\circ\iota_i'(\varphi_i').$$

Alors $f_{unip}^{\epsilon,H}=\otimes_{i\in\tilde{I}}f_i^{\epsilon,H}$ et :

$$J^{Z_H(s')^0}(u',f_{unip}^{\epsilon,H})=\prod_{i\in\tilde{I}}J^{U_i'}(u_i',f_i^{\epsilon,H}).$$

D'après XII.1, les groupes spéciaux orthogonaux U_+ et U_-' sont formes intérieures l'un de l'autre. Les applications ι_+ et ι_-' sont égales. De plus, à l'action du groupe orthogonal près, u_+^2 et u_-' sont dans des classes de conjugaison stable qui se correspondent. L'action de ce groupe orthogonal est invisible, car les fonctions que l'on considère sont par construction invariantes par au moins un élément de ce groupe de déterminant -1 (pourvu que $d_+ \neq 0$; si $d_+ = 0$, les composantes U_+ et U'_- disparaissent). Alors le lemme 3.12 de [MW] nous dit que :

$$J^{U'_-}(u'_-, f_-^{\epsilon,H}) = J^{U_+}(u_+^2, f_+^{\epsilon}).$$

Un raisonnement analogue vaut pour les composantes U_i et U'_i pour $i \in I$, en utilisant la proposition 3.4 de [MW]. On obtient l'égalité :

$$J^{U'_i}(u'_i, f_i^{\epsilon,H}) = J^{U_i}(u_i^2, f_i^{\epsilon}).$$

Le groupe U_- est le groupe symplectique d'un espace de dimension d_-, le groupe U'_+ est le groupe spécial orthogonal d'un espace de dimension $d'_+ = d_- + 1$ et on a $u_-^2 \sim u'_+$. On va appliquer la proposition X.4. Indiquons par le tableau ci-dessous comment réconcilier les notations de ce paragraphe avec les notations présentes. A gauche, on indique les termes de X.4, à droite leur traduction :

$$\begin{array}{ccc} n & = & \frac{d_-}{2} \\ t & = & n_- \\ val(\eta) & \equiv & d'_{2,+} \ mod\ 2\mathbb{Z} \\ \nu(\eta\varpi^{-val(\eta)}) & = & \eta'_{1,+}\eta'_{2,+} \\ h & = & m(\epsilon)_- \\ \{h', h''\} & = & \{m(\epsilon)_-, m(\epsilon)_- + 1\} \\ h'' & \equiv & d'_{2,+} \ mod\ 2\mathbb{Z} \end{array}$$

D'après XII.1(7) et l'hypothèse (Hyp^{ϵ}), on a $d'_{2,+} \equiv m(\epsilon)_+ \ mod\ 2\mathbb{Z}$. Les deux dernières relations ci-dessus se transforment alors en :

$$(h', h'') = \begin{cases} (m(\epsilon)_- + 1, m(\epsilon)_-), & si\ m(\epsilon)_+ = m(\epsilon)_-, \\ (m(\epsilon)_-, m(\epsilon)_- + 1), & si\ m(\epsilon)_+ = m(\epsilon)_- + 1. \end{cases}$$

L'hypothèse $(\mathfrak{Lemmefond})_n$ de la proposition X.4 est vérifiée d'après notre hypothèse $(Lemmefond)_{\geq N}$ et le lemme III.3. Alors cette proposition (relevée aux groupes de la même façon qu'en XI.4) implique l'égalité :

$$J^{U'_+}(u'_+, f_+^{\epsilon,H}) = \nu(-1)^{m(\epsilon)_-}(\eta'_{1,+}\eta'_{2,+})^{m(\epsilon)_-} J^{U_-}(u_-^2, f_-^{\epsilon}).$$

Grâce à XII.1(7) et l'hypothèse (Hyp^{ϵ}), cette égalité se transforme en :

$$J^{U'_+}(u'_+, f_+^{\epsilon,H}) = \nu(-1)^{m(\epsilon)_-(m(\epsilon)_+ + 1)}(\eta_{1,+}\eta_{2,+})^{m(\epsilon)_-}(-1)^{m(\epsilon)_- d_I} J^{U_-}(u_-^2, f_-^{\epsilon}).$$

En rassemblant ces égalités, on obtient :

$$J^{Z_H(s')^0}(u', f_{unip}^{\epsilon,H}) = \nu(-1)^{m(\epsilon)_-(m(\epsilon)_+ + 1)}(\eta_{1,+}\eta_{2,+})^{m(\epsilon)_-}(-1)^{m(\epsilon)_- d_I} J^{Z_G(s)^0}(u^2, f_{unip}^{\epsilon}).$$

On vérifie que le terme a intervenant dans (7) est congru à $m(\epsilon)_-(m(\epsilon)_+ + 1)\ mod\ 2\mathbb{Z}$. En utilisant les relations (3) et (7), l'égalité précédente devient :

$$J^H(h, f^{\epsilon,H}) = (-1)^{N/2} J^G(g, f_{\tilde{G}}^{\epsilon}).$$

On a supposé (Hyp^{ϵ}) vérifiée. Si elle ne l'est pas, l'égalité ci-dessus reste vraie, les deux membres étant nuls.

On vérifie aisément que $\Delta(h) = \Delta(g)$. Alors l'égalité (1) s'obtient en utilisant les égalités (2) et (6). Cela achève la preuve. $\square$

Errata à [MW]

Paragraphe 2.16. La définition des fonctions $\mathcal{Q}(v_i)$ pour $i \in I$ est incorrecte. En effet, on a considéré le groupe $\mathbf{H}_i$ comme un groupe unitaire défini sur $\mathbb{F}_{q^{f_i}}$. En réalité, il s'agit d'un groupe défini sur $\mathbb{F}_q$, image du précédent par le foncteur de restriction des scalaires de $\mathbb{F}_{q^{f_i}}$ à $\mathbb{F}_q$. Cela change la normalisation des fonctions de Green, car cette définition fait intervenir le rang (absolu) du groupe. Le rang du groupe unitaire sur $\mathbb{F}_{q^{f_i}}$ est d_i tandis que celui de son image par restriction des scalaires est $f_i d_i$. Cela multiplie les fonctions de Green par $(-1)^{d_i(f_i-1)}$. On doit donc, dans tout l'article, soit modifier la définition des fonctions de Green sur les groupes unitaires comme on vient de l'indiquer, soit conserver la même définition mais introduire des $(-1)^{d_i(f_i-1)}$ dans toutes les formules où elles interviennent. Dans le présent article, on utilise la définition modifiée (i.e. la définition correcte, on l'espère).

paragraphe 3.11. Remplacer les $mes(K(L))^{-1}$ par $mes(K^{\pm}(L))^{-1}$.

Proposition 3.13. La formule correcte est :

$$\hat{i}_{D^0}(Y) = q^{-N/2} 2^{-\beta(r',r'')} \gamma(r',r'')_\sharp |T'||T''| J(Y, \mathcal{Q}(r',r'';w',w'')^{Lie}_\sharp).$$

page 533. Dans la formule (2), il manque $|T'||T''|$. Dans les calculs, les $mes(K(L))$ ou $mes(K(L_0))$ doivent être remplacés par $mes(K^{\pm}(L))$ ou $mes(K^{\pm}(L_0))$.

page 534. La formule pour $\hat{\mathcal{Q}}_{T'}(Z')$ est :

$$\hat{\mathcal{Q}}_{T'}(Z') = (-1)^{N'} q^{-N'/2} \gamma(r')_\sharp Q_{T'}(Z').$$

La formule pour $\hat{\mathcal{Q}}_{T''}(Z'')$ doit être modifiée de même.

paragraphe 3.14. On a $J = \{2, ..., R\}$ si d est impair.

page 536. Dans la définition de $\alpha(w',w'')_\sharp$, la condition à la deuxième ligne est $r' \geq r''$. La formule pour C est :

$$C = 2^{1-r'-r''-\beta(r',r'')}((q-1)^2(q-3))^{-[(R-r)/2]}.$$

page 558. L'application $\mathcal{Q}^+$ est celle notée $\mathcal{Q}(r'_+, |r''|)$ en 3.11 (et non pas $\mathcal{Q}(r', |r''|)$). De même, $\mathcal{Q}^-$ est l'application notée $\mathcal{Q}(r'_-, r'')$ en 3.11.

Bibliographie

[Ar] J. Arthur : *An introduction to the trace formula*, prépublication 2005

[Au] A.-M. Aubert : *Foncteurs de Mackey et dualité de Curtis généralisés*, C. R. Acad. Sci. Paris 315 (1992), p.663-668

[BW] A. Borel, N. Wallach : *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Annals of Math. St. 94, Princeton Univ. Press, 1980

[Ca] R. Carter : *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*, Wiley interscience 1993

[Co] F. Courtès : *Distributions invariantes*, prépublication

[HW] G. Hardy, E. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford Univ. Press 1971

[MW] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$*, Inventiones Math. 152 (2003), p.461-623

[R] J. Rogawski : *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*, Inventiones Math. 79 (1985), p.443-465

[S] N. Spaltenstein : *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*, Springer L.N. 946, 1982

[W1] J.-L. Waldspurger : *Le groupe GL_N tordu sur un corps p-adique, 1ère partie*, prépublication 2005

[W2] ―――――――― : *Le groupe GL_n tordu sur un corps fini*, prépublication 2005

[W3] ―――――――― : *Produit scalaire elliptique*, prépublication 2005

[W4] ―――――――― : *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque 269 (2001)

[W5] ———————— : *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. 105 (1997), p.153-236

CNRS-Institut de mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
e-mail waldspur@math.jussieu.fr