Représentations de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$, I : une involution

J.-L. Waldspurger

21 novembre 2016

Abstract We consider a group $SO(2n+1)$ over a p-adic field and tempered irreducible representations of this group, of unipotent reduction. We use the construction due to Lusztig of these representations. In an old paper with Moeglin, we have defined an involution in the complex vector space generated by those representations which are elliptic. It is strongly related to another involution defined by Lusztig for finite groups. We give a new definition of our involution and we prove it commutes, in some sense, with Jacquet functor.

Introduction

Soient p un nombre premier et F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose que p est grand relativement à n. On considère le groupe spécial orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée sur un espace de dimension $2n+1$ sur F. Plus précisément, on considère les deux formes possibles de ce groupe : la forme déployée que l'on note G_{iso} et la forme non quasi-déployée G_{an}. Pour l'un ou l'autre de ces indices $\sharp = iso$ ou an, notons $Irr_{unip,\sharp}$ l'ensemble des (classes d'isomorphismes de) représentations admissibles irréductibles de $G_\sharp(F)$ qui sont de réduction unipotente. Cette dernière propriété est définie de la façon suivante. Soit π une représentation admissible irréductible de $G_\sharp(F)$ dans un espace complexe E. Pour tout sous-groupe parahorique K de $G_\sharp(F)$, notons K^u son radical pro-p-unipotent et E^{K^u} le sous-espace des éléments de E fixés par K^u. De π se déduit une représentation de K/K^u dans E^{K^u}. Le groupe K/K^u s'identifie au groupe des points sur le corps résiduel $\mathbb{F}_q$ de F d'un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbb{F}_q$. En suivant Lusztig, on sait définir la notion de représentation unipotente d'un tel groupe. On dit que π est de réduction unipotente si et seulement s'il existe K comme ci-dessus de sorte que E^{K^u} soit non nul et que la représentation de K/K^u dans E^{K^u} soit unipotente. On note $Irr_{tunip,\sharp}$ le sous-ensemble des représentations dans $Irr_{unip,\sharp}$ qui sont tempérées. L'involution introduite par Zelevinsky dans le cas des groupes $GL(n)$ a été généralisée aux autres groupes par Aubert et par Schneider et Stuhler, cf. [3] et [8]. Notons-la D. Dans trois articles dont celui-ci est le premier, nous allons étudier les représentations appartenant à $Irr_{tunip,\sharp}$ ainsi que leurs images par l'involution D. Notre but est de calculer le front d'ondes de $D(\pi)$ pour $\pi \in Irr_{tunip,\sharp}$. Cela sera fait dans le troisième article et nous y reviendrons le moment venu. Décrivons plutôt le contenu des deux premiers.

On note Irr_{tunip} la réunion disjointe de $Irr_{tunip,iso}$ et $Irr_{tunip,an}$. La conjecture de Langlands, raffinée par Deligne et Lusztig, paramétrise Irr_{tunip} de la façon suivante. Notons W_F de groupe de Weyl de F et $Sp(2n;\mathbb{C})$ le groupe symplectique complexe d'un espace de dimension $2n$. Pour un homomorphisme $\psi : W_F \times SL(2;\mathbb{C}) \to Sp(2n;\mathbb{C})$, notons $S(\psi)$ le groupe des composantes connexes du centralisateur dans $Sp(2n;\mathbb{C})$ de l'image de ψ. C'est un produit fini de groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on note $S(\psi)^\vee$ son groupe de caractères. Alors Irr_{tunip} est conjecturalement paramétré par les classes de conjugaison par $Sp(2n;\mathbb{C})$ de couples (ψ,ϵ) où

$\psi : W_F \times SL(2;\mathbb{C}) \to Sp(2n;\mathbb{C})$ est un homomorphisme dont la restriction à W_F est non-ramifiée, semi-simple, d'image bornée et dont la restriction à $SL(2;\mathbb{C})$ est algébrique ;

$\epsilon \in S(\psi)^\vee$.

Ce paramétrage devient unique si on impose aux représentations ainsi paramétrées des conditions relatives à l'endoscopie et à l'endoscopie tordue. Nous y reviendrons ci-dessous.

Le paramétrage a été obtenu par différents auteurs : Lusztig, cf. [4] ; Moeglin, cf. [5] théorème 5.2 ; Arthur, cf. [1] théorème 2.2.1. Arthur a prouvé les propriétés relatives à l'endoscopie, du moins dans le cas du groupe $G_{iso}(F)$. Nous utilisons les constructions de Lusztig. Le but des deux premiers articles est de prouver que les représentations qu'il a construites vérifient bel et bien les propriétés requises quant à l'endoscopie.

Pour énoncer ces propriétés, il est commode de modifier le paramétrage. Considérons un homomorphisme ψ comme ci-dessus. Puisqu'il est non ramifié, il est déterminé par sa restriction ρ à $SL(2;\mathbb{C})$ et par l'image s d'un élément de Frobenius de W_F. On sait paramétrer les classes de conjugaison d'homomorphismes algébriques $\rho : SL(2;\mathbb{C}) \to Sp(2n;\mathbb{C})$ par les orbites unipotentes de $Sp(2n;\mathbb{C})$. Celles-ci sont elles-mêmes paramétrées par l'ensemble $\mathcal{P}^{symp}(2n)$ des partitions symplectiques de $2n$, cf. 1.3. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$, fixons un homomorphisme ρ_λ dans la classe paramétrée par λ. Notons $Z(\lambda)$ le commutant dans $Sp(2n;\mathbb{C})$ de l'image de ρ_λ. L'élément s doit être un élément semi-simple de $Z(\lambda)$. De plus, ses valeurs propres doivent être de module 1 : c'est la condition "tempérée" et on dira simplement que s est "compact". On note $Z(\lambda,s)$ le commutant de s dans $Z(\lambda)$, $\mathbf{Z}(\lambda,s)$ le groupe des composantes connexes de $Z(\lambda,s)$ et $\mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee$ son groupe de caractères. On a les égalités $S(\psi) = \mathbf{Z}(\lambda,s)$ et $S(\psi)^\vee = \mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee$. Ainsi, l'ensemble Irr_{tunip} est paramétré par l'ensemble des triplets (λ,s,ϵ), où $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$, s est un élément semi-simple et compact de $Z(\lambda)$ et $\epsilon \in \mathbf{Z}(s,\lambda)^\vee$ (plus exactement par l'ensemble des classes de conjugaison de tels triplets, en un sens facile à préciser). Nous notons $\pi(\lambda,s,\epsilon)$ l'élément que Lusztig associe à un tel triplet.

Remarque. En fait, Lusztig construit non pas les représentations tempérées mais leurs images par l'involution D ; notre $\pi(\lambda,s,\epsilon)$ est l'image par cette involution de la représentation construite par Lusztig.

Pour tout ensemble X, notons $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel complexe de base X. L'espace $\mathbb{C}[Irr_{tunip}]$ est somme directe de $\mathbb{C}[Irr_{tunip,iso}]$ et $\mathbb{C}[Irr_{tunip,an}]$. Pour $\pi \in \mathbb{C}[Irr_{tunip}]$, on note π_{iso} et π_{an} ses deux composantes. Introduisons l'ensemble $\mathfrak{Endo}_{tunip}$ des classes de conjugaison de triplets (λ,s,h) où $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$, s et h sont des éléments semi-simples de $Z(\lambda)$, s et h commutent entre eux, s est compact et $h^2 = 1$. Pour un tel triplet, on a $h \in Z(\lambda,s)$ et, pour $\epsilon \in \mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee$, on peut évaluer ϵ en l'image de h dans $\mathbf{Z}(\lambda,s)$. On note simplement $\epsilon(h)$ cette valeur. Posons

$$\Pi(\lambda,s,h) = \sum_{\epsilon \in \mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee} \pi(\lambda,s,\epsilon)\epsilon(h).$$

On note $\mathfrak{St}_{tunip}$ le sous-ensemble des $(\lambda,s,h) \in \mathfrak{Endo}_{tunip}$ tels que $h = 1$. On sait définir la notion de distribution stable pour le groupe $G_{iso}(F)$. On dit qu'un élément de $\mathbb{C}[Irr_{tunip,iso}]$ est stable si sa distribution trace associée l'est. La première propriété caractérisant le paramétrage est

(1) pour $(\lambda, s, 1) \in \mathfrak{St}_{tunip}$, $\Pi_{iso}(\lambda, s, 1)$ est stable.

La deuxième propriété fait intervenir l'endoscopie tordue qui relie G_{iso} et le groupe $GL(2n)$, ou plus exactement un espace tordu sur ce groupe. Nous l'énoncerons précisément en 2.1 et la résumons ici par l'assertion vague

(2) pour $(\lambda, s, 1) \in \mathfrak{St}_{tunip}$, le transfert de $\Pi_{iso}(\lambda, s, 1)$ à $GL(2n)$ par endoscopie tordue est une représentation bien déterminée de ce groupe.

Considérons un couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_1 + n_2 = n$. On note $G_{n_1,iso}$ et $G_{n_2,iso}$ les groupes similaires à G_{iso} quand on remplace n par n_1 ou n_2. De même, on affecte les objets introduits ci-dessus d'un indice n_1 ou n_2 quand ils sont relatifs à ces entiers. Considérons $(\lambda_1, s_1, 1) \in \mathfrak{St}_{tunip,n_1}$ et $(\lambda_2, s_2, 1) \in \mathfrak{St}_{tunip,n_2}$. On en déduit un triplet $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{tunip}$ de la façon suivante. Le groupe $Sp(2n_1; \mathbb{C}) \times Sp(2n_2; \mathbb{C})$ se plonge naturellement dans $Sp(2n; \mathbb{C})$. Par composition avec ce plongement, $\rho_{\lambda_1} \otimes \rho_{\lambda_2}$ devient un homomorphisme de $SL(2; \mathbb{C})$ dans $Sp(2n; \mathbb{C})$, qui est paramétré par la partition $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. L'élément (s_1, s_2) devient pareillement un élément s de $Sp(2n; \mathbb{C})$. Enfin, h est l'image par le plongement du produit de l'identité de $Sp(2n_1; \mathbb{C})$ et de l'élément -1 de $Sp(2n_2; \mathbb{C})$. Le groupe $G_{n_1,iso} \times G_{n_2,iso}$ est le groupe endoscopique d'une donnée endoscopique évidente de G_{iso} ou de G_{an}. On sait définir le transfert à $G_{iso}(F)$ ou $G_{an}(F)$ d'une distribution stable sur $G_{n_1,iso}(F) \times G_{n_2,iso}(F)$.

Remarque. Pour travailler simultanément avec les deux groupes G_{iso} et G_{an}, on doit utiliser une variante un peu sophistiquée de l'endoscopie, cf. 2.1. On peut parler d'endoscopie pour les formes intérieures pures.

La troisième propriété du paramétrage est

(3)(a) $\Pi_{iso}(\lambda, s, h)$ est le transfert à $G_{iso}(F)$ de $\Pi_{iso}(\lambda_1, s_1, 1) \otimes \Pi_{iso}(\lambda_2, s_2, 1)$;

(3)(a) $-\Pi_{an}(\lambda, s, h)$ est le transfert à $G_{an}(F)$ de $\Pi_{iso}(\lambda_1, s_1, 1) \otimes \Pi_{iso}(\lambda_2, s_2, 1)$.

On souligne la présence du signe -1 dans (3)(b). Les trois propriétés ci-dessus déterminent entièrement le paramétrage. La propriété (1) est connue : c'est le résultat principal de [6]. La propriété (2) l'est aussi, cf. [11]. Nous énoncerons plus précisément les propriétés (3)(a) et (3)(b) en 2.1 ci-dessous et nous les démontrerons dans le deuxième article.

La première section du présent article introduit tout le matériel qui sera utilisé dans la suite. On reprend en particulier de nombreuses constructions faites dans [6]. La deuxième section est consacrée à l'une de ces constructions, celle d'une certaine involution. Rappelons d'où vient celle-ci. Introduisons le sous-ensemble $\mathfrak{Endo}_{unip-disc}$ des $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{tunip}$ tels que $s^2 = 1$ et que le commutant commun $Z(\lambda, s) \cap Z(\lambda, h)$ de s et h dans $Z(\lambda)$ soit fini. La famille des $\Pi(\lambda, s, h)$, quand (λ, s, h) décrit $\mathfrak{Endo}_{unip,disc}$, est une base du sous-espace de $\mathbb{C}[Irr_{tunip}]$ engendré par les représentations de réduction unipotente qui sont elliptiques au sens d'Arthur, cf. [2]. L'espace $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip,disc}]$ s'identifie donc à ce sous-espace de $\mathbb{C}[Irr_{tunip}]$. Une compatibilité à l'induction permet de ramener la preuve de (3)(a) et (3)(b) au cas où $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{unip,disc}$. Pour $\sharp = iso$ ou an, on doit calculer autant que faire se peut le caractère de $\Pi_\sharp(\lambda, s, h)$ sur les éléments fortement réguliers de $G_\sharp(F)$. Grâce à un résultat d'Arthur, on peut se restreindre aux éléments elliptiques de $G_\sharp(F)$. Un tel élément appartient à un sous-groupe compact et la première chose à faire est de restreindre nos représentations aux divers sous-groupes compacts maximaux de $G_\sharp(F)$. La construction de Lusztig est parfaitement adaptée pour cela. Mais elle décrit ces restrictions en termes de représentations irréductibles des groupes "résiduels" (les groupes K/K^u ci-dessus). Le calcul des caractères de ces représentations n'est pas simple mais a été effectué par Lusztig. Pour cela, il a introduit les "faisceaux-caractères" qui créent des fonctions-traces plus facilement calculables que les caractères de représentations. Les faisceaux-caractères et les représentations irréductibles d'un groupe résiduel sont paramétrés par un même ensemble combinatoire, appelons-le X. On a ainsi deux applications linéaires k et Rep définies sur $\mathbb{C}[X]$: pour $x \in X$, $k(x)$ est la fonction-trace du faisceau-caractère paramétré par x et $Rep(x)$ est le caractère de la représentation irréductible paramétrée par x. Lusztig a défini une involution $\mathcal{F}^L$ de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifie $k = Rep \circ \mathcal{F}^L$. Revenons à notre problème. Après avoir restreint nos représentations aux sous-groupes compacts maximaux de $G_\sharp(F)$, on doit appliquer les involutions $\mathcal{F}^L$ relatives à ces sous-groupes. Le calcul paraît bien compliqué mais on l'a simplifié dans [6] en introduisant une involution $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}[\mathfrak{End}\mathfrak{o}_{unip,disc}]$ qui a la propriété suivante. Soit $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{End}\mathfrak{o}_{unip,disc}$. On en déduit une représentation du groupe résiduel ci-dessus K/K^u. Soit $\varphi \in \mathbb{C}[X]$ tel que cette représentation (identifiée à son caractère) soit $Rep(\varphi)$. Alors la représentation du même groupe résiduel associée à $\mathcal{F}(\Pi(\lambda, s, h))$ est égale à $Rep \circ \mathcal{F}^L(\varphi)$, c'est-à-dire à $k(\varphi)$. Cette involution $\mathcal{F}$ rend possible la suite du calcul.

Remarque. En fait, on a démontré dans [6] une propriété plus faible mais suffisante, à savoir que la projection cuspidale de la représentation du groupe résiduel associée à $\mathcal{F}(\Pi(\lambda, s, h))$ est égale à la projection cuspidale de $Rep \circ \mathcal{F}^L(\varphi)$.

Dans [6], on a donné une définition combinatoire assez compliquée de $\mathcal{F}$. Avec les notations ci-dessus, elle est très simple : elle consiste à échanger s et h. En effet, pour $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{End}\mathfrak{o}_{unip,disc}$, on a aussi $(\lambda, h, s) \in \mathfrak{End}\mathfrak{o}_{unip,disc}$ et on montrera en 2.3 que $\mathcal{F}(\Pi(\lambda, s, h)) = \Pi(\lambda, h, s)$. Enfin, en 2.7, nous lèverons la restriction évoquée dans la remarque ci-dessus : on a bien égalité entre les deux représentations de cette remarque et pas seulement de leurs projections cuspidales. Le résultat de 2.7 est conditionnel : on admet les propriétés (3)(a) et (3)(b). Mais, comme on l'a dit, ces propriétés seront démontrées dans l'article suivant.

Remarque. A l'aide des constructions de Lusztig, on devrait pouvoir traiter non seulement le cas des paramètres non ramifiés, mais celui des paramètres modérément ramifiés. J'ignore ce que devient notre involution $\mathcal{F}$ dans cette situation plus générale.

Un index des notations se trouve en fin de l'article.

1 Les groupes et leurs représentations

1.1 Groupes orthogonaux

Soit F un corps local non-archimédien de caractéristique nulle. On note $\mathfrak{o}$ son anneau d'entiers et on fixe une uniformisante ϖ. On note $\mathbb{F}_q = \mathfrak{o}/\varpi\mathfrak{o}$ le corps résiduel, q étant son nombre d'éléments; p la caractéristique de $\mathbb{F}_q$; $|.|_F$ la valeur absolue de F ; val_F la valuation. On a $|\varpi|_F = q^{-1}$ et $val_F(\varpi) = 1$. On suppose $p \neq 2$. On note $F^\times$ le groupe multiplicatif $F - \{0\}$; $\mathfrak{o}^\times$ le groupe des unités; $F^{\times 2}$, $\mathfrak{o}^{\times 2}$ et $\mathbb{F}_q^{\times 2}$ les sous-groupes des carrés dans $F^\times$, $\mathfrak{o}^\times$ et $\mathbb{F}_q^\times$.

Soit $d \geq 1$ un entier et soit V un espace vectoriel sur F de dimension d, muni d'une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée Q. Le déterminant $det(Q)$ est bien défini dans $F^\times/F^{\times 2}$. On pose $\eta(Q)=(-1)^{[d/2]}det(Q)$, où, pour $x\in\mathbb{R}$, $[x]$ est la partie entière de x. La valuation $val_F(\eta(Q))$ est bien définie dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note $O(Q)$ le groupe orthogonal de (V,Q), $SO(Q)$ ou $O^+(Q)$ le groupe spécial orthogonal et $O^-(Q)$ la composante connexe non neutre de $O(Q)$.

Les mêmes définitions s'appliquent si V est un espace sur $\mathbb{F}_q$. La terme $\eta(Q)$ est alors un élément de $\mathbb{F}^\times/\mathbb{F}^{\times 2}$. On identifie ce groupe à $\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times 2}$. Pour mieux distinguer les corps de base, on notera par lettres grasses $\mathbf{SO}(Q)$ etc.. les groupes relatifs aux espaces définis sur $\mathbb{F}_q$.

Revenons à un espace quadratique (V,Q) défini sur F. Pour un $\mathfrak{o}$-réseau $L\subset V$, notons $L^*=\{v\in V;\forall v'\in L, Q(v,v')\in\mathfrak{o}\}$. Il existe des réseaux L presque autoduaux, c'est-à-dire tels que $\varpi L^*\subset L\subset L^*$. Pour un tel réseau, posons $l'=L/\varpi L^*$, $l''=L^*/L$. On note d', resp. d'', la dimension sur $\mathbb{F}_q$ de l', resp. l''. La forme Q se réduit en une forme quadratique non dégénérée Q' sur l' et la forme ϖQ se réduit en une forme quadratique non dégénérée Q'' sur l''. Les termes $\eta(Q')$ et $\eta(Q'')$ sont indépendants du choix du réseau L. On les note $\eta'(Q)$ et $\eta''(Q)$. On vérifie les relations

$$d'\equiv d+val_F(\eta(Q))\ mod\ 2\mathbb{Z},\ d''\equiv val_F(\eta(Q))\ mod\ 2\mathbb{Z},$$

$$(-1)^{d'd''}\eta'(Q)\eta''(Q)\varpi^{val_F(\eta(Q))}=\eta(Q).$$

Considérons maintenant un entier $d\geq 1$ et un élément $\eta\in F^\times/F^{\times 2}$. A l'exception des cas $d=1$ et $(d,\eta)=(2,1)$, on sait qu'il y a deux classes d'isomorphie d'espaces quadratiques (V,Q) comme ci-dessus tels que $\eta(Q)=\eta$. On les note (V_{iso},Q_{iso}) et (V_{an},Q_{an}), les indices iso et an étant déterminés par les relations suivantes

si $d+val_F(\eta)$ est pair, $\eta''(Q_{iso})\in\mathbb{F}^{\times 2}$ et $\eta''(Q_{an})\not\in\mathbb{F}_q^{\times 2}$;

si $d+val_F(\eta)$ est impair, $\eta'(Q_{iso})\in\mathbb{F}^{\times 2}$ et $\eta'(Q_{an})\not\in\mathbb{F}_q^{\times 2}$.

Dans les cas particuliers $d=1$ ou $(d,\eta)=(2,1)$, la définition ci-dessus conduit à considérer l'unique espace quadratique (V,Q) comme étant (V_{iso},Q_{iso}).

Le groupe $SO(Q_{iso})$ est quasi-déployé. Le groupe $SO(Q_{an})$ en est une forme intérieure. Il n'est pas quasi-déployé si d est impair ou si d est pair et $\eta=1$. Il est isomorphe à $SO(Q_{iso})$ si d est pair et $\eta\neq 1$.

Considérons maintenant le cas des espaces quadratiques définis sur $\mathbb{F}_q$. Dans ce cas, d étant fixé, la classe d'isomorphie de (V,Q) est déterminée par $\eta(Q)$. Si d est impair, le groupe $O(Q)$ est indépendant de η. On le note simplement $\mathbf{O}(d)$ et on note ses deux composantes connexes $\mathbf{SO}(d)$, ou $\mathbf{O}^+(d)$, et $\mathbf{O}^-(d)$. Le groupe $\mathbf{SO}(d)$ est déployé. Si d est pair, on note $\mathbf{O}(d)_{iso}$ le groupe orthogonal de l'espace (V,Q) tel que $\eta(Q)\in\mathbb{F}_q^{\times 2}$ et $\mathbf{O}(d)_{an}$ celui de l'espace (V,Q) tel que $\eta(Q)\not\in\mathbb{F}_q^{\times 2}$. Pour un indice $\sharp=iso$ ou an, on note aussi $\mathbf{SO}(d)_\sharp$, ou $\mathbf{O}^+(d)_\sharp$, et $\mathbf{O}^-(d)_\sharp$ les deux composantes connexes de $\mathbf{O}(d)_\sharp$. Le groupe $\mathbf{SO}(d)_{iso}$ est déployé et le groupe $\mathbf{SO}(d)_{an}$ ne l'est pas.

Dans cet article, nous fixons un entier $n\geq 1$. On suppose

$p>6n+4$.

Cette borne est reprise de [6]. Nous considérons la construction ci-dessus (sur F) pour $d=2n+1$ et $\eta=1$. On a donc deux couples (V_{iso},Q_{iso}) et (V_{an},Q_{an}) définis sur F. Concrètement, fixons un élément $\xi\in\mathfrak{o}^\times-\mathfrak{o}^{\times 2}$. Pour un indice $\sharp=iso$ ou an, il y a une base $\{v_1,...,v_{2n+1}\}$ de $V_\sharp$ telle qu'en notant $v=\sum_{i=1,...,2n+1}x_iv_i$ la décomposition d'un élément $v\in V_\sharp$ dans cette base, on ait

si $\sharp=iso$, $Q_{iso}(v,v)=x_{n+1}^2+2\sum_{i=1,...,n}x_ix_{2n+2-i}$,

si $\sharp=an$, $Q_{an}(v,v)=\varpi x_1^2+\xi x_{n+1}^2-\xi\varpi^{-1}x_{2n+1}^2+2\sum_{i=2,...,n}x_ix_{2n+2-i}$.

On pose simplement $G_\sharp = SO(Q_\sharp)$.

Nous introduirons divers objets relatifs à notre entier n fixé. On aura parfois besoin des objets analogues relatifs à d'autres entiers. On les notera simplement en ajoutant l'entier en question dans la notation. Par exemple $G_\sharp$ peut aussi bien être noté $G_{n,\sharp}$.

1.2 Sous-groupes parahoriques maximaux

Notons $D(n)$ l'ensemble des couples $(n',n'') \in \mathbb{N}^2$ tels que $n'+n''=n$. Posons $D_{iso}(n) = D(n)$ et $D_{an}(n) = \{(n',n'') \in D(n); n'' \geq 1\}$. Soit $\sharp = iso$ ou an. Pour $(n',n'') \in D_\sharp(n)$, on définit le réseau $L_{n',n''} \subset V_\sharp$ par

$$L_{n',n''} = \mathfrak{o}v_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{o}v_{2n+1-n''} \oplus \varpi\mathfrak{o}v_{2n+2-n''} \oplus ... \oplus \varpi\mathfrak{o}v_{2n+1},$$

où $\{v_1, ..., v_{2n+1}\}$ est la base introduite dans le paragraphe précédent. On a

$$L^*_{n',n''} = \varpi^{-1}\mathfrak{o}v_1 \oplus ... \oplus \varpi^{-1}\mathfrak{o}v_{n''} \oplus \mathfrak{o}v_{i+1} \oplus ... \oplus \mathfrak{o}v_{2n+1}$$

et les inclusions

$$\varpi L^*_{n',n''} \subset L_{n',n''} \subset L^*_{n',n''}.$$

On pose $l_{2n'+1} = L_{n',n''}/\varpi L^*_{n',n''}$, $l_{2n''} = L^*_{n',n''}/L_{n',n''}$. Comme on l'a dit en 1.1, ces espaces sur $\mathbb{F}_q$ sont munis de formes bilinéaires symétriques et non dégénérées. Leurs groupes orthogonaux sont respectivement $\mathbf{O}(2n'+1)$ et $\mathbf{O}(2n'')_\sharp$.

Remarque. Si $\sharp = iso$ et $n''=0$, $l_0 = \{0\}$. Dans ce cas, on supprime les constructions relatives à cet espace.

On note $K^\pm_{n',n''}$ le sous-groupe des $g \in G_\sharp(F)$ tels que $g(L_{n',n''}) \subset L_{n',n''}$ (ce qui entraîne aussi $g(L^*_{n',n''}) \subset L^*_{n',n''}$). C'est un groupe compact et on note $K^u_{n',n''}$ son radical pro-p-unipotent. Si $\sharp = iso$ et $n''=0$, on pose simplement $K^+_{n,0} = K^\pm_{n,0}$ et on a l'isomorphisme $K^+_{n,0}/K^u_{n,0} = \mathbf{SO}(2n+1;\mathbb{F}_q)$. Hormis ce cas, $K^\pm_{n',n''}/K^u_{n',n''}$ s'identifie au sous-groupe des éléments $(g',g'') \in \mathbf{O}(2n'+1;\mathbb{F}_q) \times \mathbf{O}(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$ tels que $det(g')det(g'')=1$. On identifie ce groupe à $\mathbf{SO}(2n'+1;\mathbb{F}_q) \times \mathbf{O}(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$ par l'application $(g',g'') \mapsto (g'det(g''),g'')$. On note $K^+_{n',n''}$, resp. $K^-_{n',n''}$, l'image réciproque dans $K^\pm_{n',n''}$ du sous-groupe $\mathbf{SO}(2n'+1;\mathbb{F}_q)\times\mathbf{SO}(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$, resp. du sous-ensemble $\mathbf{SO}(2n'+1;\mathbb{F}_q)\times\mathbf{O}^-(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$.

Un élément de $G_\sharp(F)$ est dit compact si et seulement si le sous-groupe qu'il engendre est d'adhérence compacte. On sait qu'un élément $g \in G_\sharp(F)$ est compact si et seulement si il existe $(n',n'') \in D_\sharp(n)$ et $h \in G_\sharp(F)$ de sorte que $h^{-1}gh \in K^\pm_{n',n''}$.

1.3 Représentations de réduction unipotente

Pour $\sharp = iso$ ou an, notons $Irr_{t,\sharp}$ l'ensemble des (classes d'isomorphismes de) représentations admissibles irréductibles tempérées de $G_\sharp(F)$. Notons Irr_t la réunion disjointe de $Irr_{t,iso}$ et $Irr_{t,an}$.

On sait conjecturalement classifier l'ensemble Irr_t de la façon suivante. On note W_F le groupe de Weyl de F et $Sp(2n,\mathbb{C})$ le groupe symplectique complexe d'un espace de dimension $2n$. Pour un homomorphisme $\psi : W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \to Sp(2n,\mathbb{C})$, on note $S(\psi)$ le groupe des composantes du centralisateur dans $Sp(2n,\mathbb{C})$ de l'image de ψ. C'est un produit fini de groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on note $S(\psi)^\vee$ son groupe de caractères. On note $z(\psi)$ l'image naturelle dans $S(\psi)$ de l'élément central -1 de $Sp(2n,\mathbb{C})$. Alors Irr_t est en bijection avec les classes de conjugaison par $Sp(2n,\mathbb{C})$ de couples (ψ,ϵ), où

$\psi : W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \to Sp(2n,\mathbb{C})$ est un homomorphisme dont la restriction à W_F est semi-simple et d'image bornée et dont la restriction à $SL(2,\mathbb{C})$ est algébrique ;

ϵ est un élément de $S(\psi)^\vee$.

On note $\pi(\psi,\epsilon)$ la représentation paramétrée par (ψ,ϵ). Celle-ci appartient à $Irr_{t,,iso}$, resp. $Irr_{t,an}$, si et seulement si $\epsilon(z(\psi)) = 1$, resp. $\epsilon(z(\psi)) = -1$.

Les représentations $\pi(\psi,\epsilon)$ sont caractérisées par leur comportement par endoscopie et endoscopie tordue. Nous y reviendrons en 2.1. Dans le cas où $\sharp = iso$, la classification et ces propriétés relatives à l'endoscopie ne sont plus conjecturales : elles ont été établies par Arthur, cf. [1] théorème 2.2.1. La situation présente du cas $\sharp = an$ est peu claire.

Soit $\sharp = iso$ ou an et soit π une représentation admissible irréductible de $G_\sharp(F)$ dans un espace complexe E. Pour $(n',n'') \in D_\sharp(n)$, le sous-espace d'invariants $E^{K^u_{n',n''}}$ est de dimension finie et est stable par l'action du groupe $K^\pm_{n',n''}$. Notons $\pi_{n',n''}$ la représentation de ce groupe dans cet espace d'invariants. Elle est triviale sur $K^u_{n',n''}$ et se descend en une représentation du groupe $\mathbf{SO}(2n'+1;\mathbb{F}_q) \times \mathbf{O}(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$, que l'on note encore $\pi_{n',n''}$. On sait définir la notion de représentation unipotente de ce groupe fini. On dit que π est de réduction unipotente si et seulement s'il existe $(n',n'') \in D_\sharp(n)$ tel que $E^{K^u_{n',n''}}$ soit non nul et que $\pi_{n',n''}$ soit unipotente. On sait qu'alors, pour tout autre $(n',n'') \in D_\sharp(n)$ tel que $E^{K^u_{n',n''}}$ soit non nul, $\pi_{n',n''}$ est unipotente. On note $Irr_{unip,\sharp}$ l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) représentations admissibles irréductibles de réduction unipotente de $G_\sharp(F)$. On note $Irr_{tunip,\sharp} = Irr_{t,\sharp} \cap Irr_{unip,\sharp}$. On note Irr_{unip}, resp. Irr_{tunip}, la réunion disjointe de $Irr_{unip,iso}$ et de $Irr_{unip,an}$, resp. de $Irr_{tunip,iso}$ et de $Irr_{tunip,an}$.

Conjecturalement, l'ensemble Irr_{tunip} est classifié par les (classes de conjugaison des) couples (ψ,ϵ) comme ci-dessus vérifiant de plus la condition : la restriction de ψ à W_F est non ramifiée. Lusztig a effectivement classifié l'ensemble Irr_{tunip} par de tels couples (ψ,ϵ), cf. [4] théorème 5.21.

On va décrire de façon plus combinatoire l'ensemble des couples (ψ,ϵ) qui paramétrisent l'ensemble Irr_{tunip}. Pour cela, introduisons quelques définitions. On appelle partition une classe d'équivalence de suites décroissantes finies de nombres entiers positifs ou nuls, deux suites étant équivalentes si elles ne diffèrent que par des termes nuls. Pour une telle partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r)$, on pose $S(\lambda) = \sum_{j=1,...,r} \lambda_j$ et on note $l(\lambda)$ le plus grand entier j tel que $\lambda_j \neq 0$. Cas particulier : on note $\emptyset$ la partition $(0,...)$ et on pose $l(\emptyset) = 0$. On note $mult_\lambda$ la fonction sur $\mathbb{N} - \{0\}$ telle que, pour tout i dans cet ensemble, $mult_\lambda(i)$ est le nombre d'entiers j tels que $\lambda_j = i$. On note $Jord(\lambda)$ l'ensemble des $i \geq 1$ tels que $mult_\lambda(i) \geq 1$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(N)$ l'ensemble des partitions λ telles que $S(\lambda) = N$. On note $\mathcal{P}^{symp}(2N)$ l'ensemble des partitions symplectiques de $2N$, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathcal{P}(2N)$ telles que $mult_\lambda(i)$ est pair pour tout entier i impair. Pour une telle partition, on note $Jord_{bp}(\lambda)$ l'ensemble des entiers $i \geq 2$ pairs tels que $mult_\lambda(i) \geq 1$. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ l'ensemble des couples (λ,ϵ) où $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2N)$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$.

On sait que les classes de conjugaison d'homomorphismes algébriques $\rho : SL(2;\mathbb{C}) \to Sp(2n;\mathbb{C})$ s'identifient aux orbites unipotentes dans $Sp(2n;\mathbb{C})$: à ρ on associe l'orbite de l'image par ρ d'un élément unipotent régulier de $SL(2;\mathbb{C})$. Ces orbites unipotentes sont elles-mêmes classifiées par $\mathcal{P}^{symp}(2n)$. Ainsi, à ρ, on associe une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$. Inversement, pour toute telle partition λ, fixons un homomorphisme ρ_λ classifié par λ. On note $Z(\lambda)$ le commutant de ρ_λ dans $Sp(2n;\mathbb{C})$.

Considérons un couple (ψ,ϵ) paramétrisant un élément de Irr_{tunip}. A la restriction ρ de ψ à $SL(2;\mathbb{C})$ est associée une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$. Puisque la restriction de ψ à W_F est non ramifiée, celle-ci est déterminée par l'image s d'un élément de Frobenius. C'est un élément semi-simple de $Z(\lambda)$. Parce que la restriction de ψ à W_F est d'image bornée, les valeurs propres de s (considéré comme un élément de $GL(2n;\mathbb{C})$) sont de valeurs absolues 1. On dit que s est compact. Notons $Z(\lambda,s)$ le commutant de s dans $Z(\lambda)$, $\mathbf{Z}(\lambda,s)$ son groupe de composantes connexes et $\mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee$ le groupe des caractères de $\mathbf{Z}(\lambda,s)$. On a les égalités $S(\psi)=\mathbf{Z}(\lambda,s)$, $S(\psi)^\vee=\mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee$. Le terme ϵ appartient à $\mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee$. La partition λ étant fixée, il y a une notion évidente de conjugaison par $Z(\lambda)$ du couple (s,ϵ). On voit que l'ensemble des classes de conjugaison de couples (ψ,ϵ) s'identifie aux classes de conjugaison au sens que l'on vient d'indiquer des triplets (λ,s,ϵ) vérifiant les conditions ci-dessus. On note $\mathfrak{Irr}_{tunip}$ cet ensemble de classes de conjugaison de triplets (λ,s,ϵ). Pour un tel triplet, on note $\pi(\lambda,s,\epsilon)$ la représentation associée par Lusztig au couple (ψ,ϵ) associé au triplet.

Remarquons que, pour $\lambda\in\mathcal{P}^{symp}(2n)$ et $s\in Z(\lambda)$, l'élément s définit une décomposition de λ. En effet, considérons les valeurs propres de s. Ce sont $+1$ intervenant avec une multiplicité paire $2n^+\geq 0$, -1 intervenant avec une multiplicité paire $2n^-\geq 0$ et un ensemble de couples (s_j,s_j^{-1}), j parcourant un ensemble fini d'indices J, chaque s_j étant un nombre complexe différent de ±1, et s_j comme s_j^{-1} intervenant avec une multiplicité $m_j\geq 1$. Le commutant d'un tel s dans $Sp(2n,\mathbb{C})$ est

$$Sp(2n^+;\mathbb{C})\times Sp(2n^-;\mathbb{C})\times\prod_{j\in J}GL(m_j;\mathbb{C}).$$

L'homomorphisme ρ_λ prend ses valeurs dans ce commutant. Pour un groupe $H=GL(m_j;\mathbb{C})$ ou $Sp(2n^+;\mathbb{C})$ ou $Sp(2n^-;\mathbb{C})$, la classe de conjugaison d'un homomorphisme de $SL(2,\mathbb{C})$ à valeurs dans H est déterminée comme ci-dessus par une partition $\lambda_j\in\mathcal{P}(m_j)$ si $H=GL(m_j;\mathbb{C})$, resp. $\lambda^+\in\mathcal{P}^{symp}(2n^+)$ si $H=Sp(2n^+;\mathbb{C})$ et $\lambda^-\in\mathcal{P}^{symp}(2n^-)$ si $H=Sp(2n^-;\mathbb{C})$. Ainsi, à ρ_λ sont associées des partitions λ^+, λ^- et λ_j pour $j\in J$. On a l'égalité

$$\lambda=\lambda^+\cup\lambda^-\cup_{j\in J}(\lambda_j\cup\lambda_j),$$

où il s'agit de l'union usuelle des partitions. On vérifie facilement que $\mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee$ s'identifie à $\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda^+)}\times\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda^-)}$. Si $\epsilon\in\mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee$ s'identifie ainsi à un élément $(\epsilon^+,\epsilon^-)\in\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda^+)}\times\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda^-)}$, on vérifie l'égalité

$$(1)\qquad \epsilon(z(\psi))=\Big(\prod_{i\in Jord_{bp}(\lambda^+)}\epsilon^+(i)^{mult_{\lambda^+}(i)}\Big)\Big(\prod_{i\in Jord_{bp}(\lambda^-)}\epsilon^-(i)^{mult_{\lambda^-}(i)}\Big),$$

où ψ est l'homomorphisme associé à (λ,s). Il résulte des constructions de Lusztig que $\pi(\lambda,s,\epsilon)$ est bien, comme on l'attend, une représentation de $G_{iso}(F)$ si le produit ci-dessus vaut 1 et de $G_{an}(F)$ s'il vaut -1.

Un cas particulièrement intéressant est celui où s n'a pour valeurs propres que $+1$ et -1, c'est-à-dire $s^2=1$. On $\mathfrak{Irr}_{unip-quad}$ le sous-ensemble des $(\lambda,s,\epsilon)\in\mathfrak{Irr}_{tunip}$ tels que $s^2=1$. La construction ci-dessus l'identifie à celui des quadruplets $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$ tels que

il existe $(n^+,n^-)\in D(n)$ de sorte $(\lambda^+,\epsilon^+)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{symp}(2n^+)$ et $(\lambda^-,\epsilon^-)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{symp}(2n^-)$.

Si (λ,s,ϵ) correspond ainsi à $(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)$, on note $\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)=\pi(\lambda,s,\epsilon)$. On note $Irr_{unip-quad}$ l'ensemble de ces représentations.

1.4 Représentations elliptiques

Notation. Pour tout ensemble X, on note $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de base X.

Pour toute partition symplectique λ, on a défini l'ensemble $Jord_{bp}(\lambda)$ des entiers pairs $i \geq 2$ tels que $mult_\lambda(i) \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 1$, notons plus précisément $Jord^k_{bp}(\lambda)$ l'ensemble des entiers pairs $i \geq 2$ tels que $mult_\lambda(i) = k$.

Notons $\mathfrak{Ell}_{unip}$ l'ensemble des quadruplets $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$ vérifiant les conditions suivantes :

il existe des entiers $n^+, n^- \in \mathbb{N}$ tels que $n^+ + n^- = n$, $\lambda^+ \in \mathcal{P}^{symp}(2n^+)$ et $\lambda^- \in \mathcal{P}^{symp}(2n^-)$;

pour $\zeta = \pm$ et $i \geq 1$, $mult_{\lambda^\zeta}(i) = 0$ si i est impair et $mult_{\lambda^\zeta}(i) \leq 2$ si i est pair ;

pour $\zeta = \pm$, ϵ^ζ est un élément de $\{-1\}^{Jord^1_{bp}(\lambda^\zeta)}$.

A un tel quadruplet, on associe l'élément $\pi_{ell}(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) \in \mathbb{C}[Irr_{tunip}]$ défini par

$$\pi_{ell}(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) = 2^{-|Jord^2_{bp}(\lambda^+)| - |Jord^2_{bp}(\lambda^-)|} \sum_{\epsilon'^+, \epsilon'^-} \left(\prod_{i \in Jord^2_{bp}(\lambda^+)} \epsilon'^+(i) \right)$$

$$\left(\prod_{i \in Jord^2_{bp}(\lambda^-)} \epsilon'^-(i) \right) \pi(\lambda^+, \epsilon'^+, \lambda^-, \epsilon'^-),$$

où la somme porte sur les $(\epsilon'^+, \epsilon'^-) \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda^+)} \times \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda^-)}$ tels que, pour $\zeta = \pm$ et $i \in Jord^1_{bp}(\lambda^\zeta)$, on ait $\epsilon'^\zeta(i) = \epsilon^\zeta(i)$. On note Ell_{unip} l'ensemble de ces représentations $\pi_{ell}(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$ pour $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) \in \mathfrak{Ell}_{unip}$.

Une représentation $\pi_{ell}(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$ est elliptique au sens d'Arthur, cf. [2] paragraphe 3. Plus précisément, Ell_{unip} est exactement l'ensemble des représentations elliptiques de réduction unipotente des groupes $G_{iso}(F)$ et $G_{an}(F)$ (la définition des représentations elliptiques dépend de certains choix ; on veut dire que l'on peut effectuer ceux-ci de sorte que l'assertion ci-dessus soit vraie).

1.5 L'application de restriction, les espaces $\mathcal{R}^{par}$ et $\mathcal{R}^{par,glob}$

Pour tout $n' \in \mathbb{N}$, on note $C'_{n'}$ le sous-espace de l'espace des fonctions sur $\mathbf{SO}(2n'+1; \mathbb{F}_q)$ (à valeurs complexes) engendré linéairement par les traces de représentations unipotentes de ce groupe. Pour $\sharp = iso$ ou an et pour tout entier $n'' \geq 1$, introduisons l'espace des fonctions sur $\mathbf{O}(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$ engendré par les traces de représentations unipotentes. Pour $\zeta = \pm$, on note $C''^{\zeta}_{n'',\sharp}$ l'espace des restrictions à $\mathbf{O}^\zeta(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$ des fonctions de l'espace précédent (ou encore le sous-espace des éléments de cet espace précédent qui sont nuls sur l'autre composante $\mathbf{O}^{-\zeta}(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$). On pose

$$C''_{n''} = C^{+}_{n'',iso} \oplus C^{-}_{n'',iso} \oplus C^{+}_{n'',an} \oplus C^{-}_{n'',an}.$$

Dans le cas où $n'' = 0$, on pose formellement $C''_0 = C''^{+}_{0,iso} = \mathbb{C}$. On pose

$$\mathcal{R}^{par} = \oplus_{(n',n'') \in D(n)} C'_{n'} \otimes C''_{n''}.$$

Les espaces $C'_{n'}$ etc... sont naturellement munis de produits hermitiens définis positifs. On en déduit un tel produit sur $\mathcal{R}^{par}$.

Soit $\sharp = iso$ ou an, soit $(n', n'') \in D_\sharp(n)$, soit $\zeta = \pm$ (avec $\zeta = +$ si $\sharp = iso$ et $n'' = 0$) et soit $\pi \in Irr_{unip,\sharp}$. On a défini la représentation $\pi_{n',n''}$ de $\mathbf{SO}(2n'+1; \mathbb{F}_q) \times \mathbf{O}(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$.

On note $Res^{\zeta}_{n',n''}(\pi)$ la restriction à la composante $\mathbf{SO}(2n'+1;\mathbb{F}_q)\times\mathbf{O}^{\zeta}(2n'')_{\sharp}(\mathbb{F}_q)$ de la trace de $\pi_{n',n''}$. Cette fonction s'identifie à un élément de $C'_{n'}\otimes C''^{\zeta}_{n'',\sharp}$, donc à un élément de $\mathcal{R}^{par}$. On note $Res(\pi)$ la somme des $Res^{\zeta}_{n',n''}(\pi)$ sur les triplets (n',n'',ζ) soumis aux restrictions indiquées ci-dessus. Cela définit une application $Res: Irr_{unip}\to\mathcal{R}^{par}$. Cette application se prolonge en une application linéaire $Res:\mathbb{C}[Irr_{unip}]\to\mathcal{R}^{par}$.

Considérons un entier $m\in\{1,...,n\}$, posons $n_0=n-m$. Notons $C^{GL(m)}$ l'espace de fonctions sur le groupe fini $\mathbf{GL}(m;\mathbb{F}_q)$ engendré par les traces de représentations unipotentes. On définit deux applications linéaires

$$res'_m, res''_m:\mathcal{R}^{par}\to C^{GL(m)}\otimes\mathcal{R}^{par}_{n_0}$$

de la façon suivante. Considérons une composante $C'_{n'}\otimes C''^{\zeta}_{n'',\sharp}$ de $\mathcal{R}^{par}$. Si $n'<m$, res'_m est nulle sur cette composante. Si $n'\geq m$, on introduit un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{SO}(2n'+1)$ dont une composante de Levi est isomorphe à $\mathbf{GL}(m)\times\mathbf{SO}(2n'-2m+1)$. L'application module de Jacquet envoie $C'_{n'}$ dans $C^{GL(m)}\otimes C'_{n'-m}$ et elle ne dépend pas du choix de $\mathbf{P}$. Alors res'_m est égale sur $C'_{n'}\otimes C''^{\zeta}_{n'',\sharp}$ à l'application

$$C'_{n'}\otimes C''^{\zeta}_{n'',\sharp}\to C^{GL(m)}\otimes C'_{n'-m}\otimes C''^{\zeta}_{n'',\sharp}$$

produit tensoriel de l'application précédente et de l'identité de $C''^{\zeta}_{n'',\sharp}$. Si $\sharp=iso$ et $n''<m$ ou si $\sharp=an$ et $n''\leq m$, res''_m est nulle sur notre composante. Sinon, on introduit comme ci-dessus un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{O}(2n'')_{\sharp}$ dont une composante de Levi est isomorphe à $\mathbf{GL}(m)\times\mathbf{O}(2n''-2m)_{\sharp}$. On a de nouveau une application module de Jacquet $C''^{\zeta}_{n'',\sharp}\to C^{GL(m)}\otimes C''^{\zeta}_{n''-m,\sharp}$, dont on déduit l'application

$$res''_m: C'_{n'}\otimes C''^{\zeta}_{n'',\sharp}\to C^{GL(m)}\otimes C'_{n'}\otimes C''^{\zeta}_{n''-m,\sharp}.$$

On note $\mathcal{R}^{par,glob}$ le sous-espace des éléments $\phi\in\mathcal{R}^{par}$ tels que $res'_m(\phi)=res''_m(\phi)$ pour tout $m\in\{1,...,n\}$. On note res_m la restriction à ce sous-espace de l'une ou l'autre des applications res'_m ou res''_m. C'est une application linéaire

$$res_m:\mathcal{R}^{par,glob}\to C^{GL(m)}\otimes\mathcal{R}^{par}_{n_0}.$$

Elle prend ses valeurs dans $C^{GL(m)}\otimes\mathcal{R}^{par,glob}_{n_0}$. En effet, pour $r\in\{1,...,n_0\}$, notons $res'_{m,r}$ la composée de res_m et de l'application res'_r définie sur $\mathcal{R}^{par}_{n_0}$. On définit de façon similaire l'application $res''_{m,r}$. On voit que ces deux applications sont composées de res'_{m+r}, resp. res''_{m+r}, et d'une application module de Jacquet de $C^{GL(m+r)}$ dans $C^{GL(m)}\otimes C^{GL(r)}$. L'égalité $res'_{m+r}=res''_{m+r}$ sur $\mathcal{R}^{par,glob}$ entraîne l'égalité $res'_{m,r}=res''_{m,r}$, d'où notre assertion.

On vérifie que l'application Res introduite plus haut prend ses valeurs dans $\mathcal{R}^{par,glob}$. Plus précisément, soient $m\in\{1,...,n\}$, $\sharp=iso$ ou an et $\pi\in Irr_{unip,\sharp}$. Introduisons un sous-groupe parabolique P de $G_{\sharp}$ dont une composante de Levi soit isomorphe à $GL(n)\times G_{n_0,\sharp}$ (en supposant $m<n$ si $\sharp=an$). Notons π_M le module de Jacquet de π relatif à P. On a une application $Res^M:\mathbb{C}[Irr_{unip,\sharp}]\to C^{GL(m)}\otimes\mathcal{R}^{par}_{n_0}$ similaire à Res. On a l'égalité

(1) $res_m\circ Res(\pi)=Res^M(\pi_M)$.

Cela résulte directement de [7] proposition 6.7. Dans le cas où $\sharp=an$ et $m=n$, on a $res_m\circ Res(\pi)=0$.

Dans les espaces $C'_{n'}$ et $C''^{\zeta}_{n'',\sharp}$, on sait définir le sous-espace des fonctions cuspidales et la projection orthogonale sur ce sous-espace, que l'on note $proj_{cusp}$.

Remarque. Dans le cas particulier de l'espace $C''^{+}_{1,iso}$, correspondant au groupe $\mathbf{SO}(2)_{iso} \simeq \mathbf{GL}(1)$, cette projection est nulle.

On note $\mathcal{R}^{par}_{cusp}$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{R}$ dont toutes les composantes sont cuspidales. Des projections précédentes se déduit une projection $proj_{cusp} : \mathcal{R}^{par} \to \mathcal{R}^{par}_{cusp}$. L'espace $\mathcal{R}_{cusp}$ est inclus dans $\mathcal{R}^{par,glob}$. Pour tout entier $m \geq 1$, on note aussi $C^{GL(m)}_{cusp}$ le sous-espace des éléments cuspidaux de $C^{GL(m)}$. On sait qu'il est de dimension 1. Notons $\mathcal{P}(\leq n)$ l'ensemble des partitions $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_t)$ telles que $S(\mathbf{m}) \leq n$. Soit $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_t) \in \mathcal{P}(\leq n)$, posons $n_0 = n - S(\mathbf{m})$. En itérant la construction précédente, on obtient une application linéaire

$$res_{\mathbf{m}} : \mathcal{R}^{par,glob} \to \mathcal{R}^{par,glob}_{\mathbf{m}} := C^{GL(m_1)} \otimes ... \otimes C^{GL(m_t)} \otimes \mathcal{R}^{par,glob}_{n_0}.$$

On pose

$$\mathcal{R}^{par}_{\mathbf{m},cusp} = C^{GL(m_1)}_{cusp} \otimes ... \otimes C^{GL(m_t)}_{cusp} \otimes \mathcal{R}^{par}_{n_0,cusp} \simeq \mathcal{R}^{par}_{n_0,cusp}.$$

On dispose aussi des projections cuspidales de $\mathcal{R}^{par}_{n_0}$ sur $\mathcal{R}^{par}_{n_0,cusp}$ et de $C^{GL(m_j)}$ sur $C^{GL(m_j)}_{cusp}$. On note $proj_{cusp}$ ces projections ainsi que les produits tensoriels de telles projections. On a donc une application linéaire

$$(2) \qquad \mathcal{R}^{par,glob} \to \oplus_{\mathbf{m}} \mathcal{R}^{par}_{\mathbf{m},cusp},$$

qui est la somme des applications $proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}}$ sur toutes les partitions $\mathbf{m} \in \mathcal{P}(\leq n)$. On vérifie facilement que c'est un isomorphisme.

La restriction de l'application $proj_{cusp} \circ Res$ au sous-espace $\mathbb{C}[Ell_{unip}]$ de $\mathbb{C}[Irr_{tunip}]$ est un isomorphisme de ce sous-espace sur l'espace $\mathcal{R}^{par}_{cusp}$, cf. [6] 4.2 et 5.4.

Remarque. On peut définir l'application $res_{\mathbf{m}}$ pour toute suite d'entiers positifs $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_t)$ telle que $m_1 + ... + m_t \leq n$ (on n'a pas besoin que $\mathbf{m}$ soit une partition, c'est-à-dire que $m_1 \geq ... \geq m_t$). Mais, pour une telle suite, $res_{\mathbf{m}}$ se déduit par permutation des facteurs de $res_{\mathbf{m}'}$, où $\mathbf{m}'$ est la partition associée à $\mathbf{m}$, c'est-à-dire celle qui a les mêmes termes que $\mathbf{m}$, ordonnés de façon décroissante.

1.6 Egalité de restrictions aux éléments compacts

On va considérer deux situations auxquelles s'appliqueront le lemme ci-dessous.

Dans le cas (A), on considère un triplet $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{tunip}$. On pose $\pi = \pi(\lambda, s, \epsilon)$. On sait décrire le groupe $Z(\lambda)$. C'est le produit des $Sp(mult_\lambda(i); \mathbb{C})$ pour $i \in Jord(\lambda)$ impair et des $O(mult_\lambda(i); \mathbb{C})$ pour $i \in Jord_{bp}(\lambda)$. Ainsi, l'élément $s \in Z(\lambda)$ se décompose en produit de s_i pour $i \in Jord(\lambda)$. Fixons $i_0 \in Jord(\lambda)$ et supposons que s_{i_0} ait une valeur propre $z \neq \pm 1$ (il a donc aussi la valeur propre z^{-1}). On peut alors fixer une décomposition

$$\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{2i_0} \oplus \mathbb{C}^{2n-2i_0}$$

qui soit stable par s et par l'homomorphisme ρ_λ, de sorte que les composantes $\underline{s}$ et $\underline{\rho}$ de ces termes à valeurs dans la première composante $\mathbb{C}^{2i_0}$ vérifient :

$\underline{s}$ a pour valeurs propres z et z^{-1}, chacune avec multiplicité i_0 ;

$\underline{\rho}$ est paramétré par la partition (i_0, i_0).

On note s_0 et ρ_0 les composantes de s et ρ_λ dans l'autre composante $\mathbb{C}^{2n-2i_0}$ et on note λ_0 la partition associée à ρ_0. On note $\bar{s}$ l'élément qui agit comme s_0 dans cette deuxième composante mais qui agit par l'identité sur la première $\mathbb{C}^{2i_0}$. Si i_0 est impair ou si i_0 et pair et s_{i_0} admet la valeur propre 1, on voit que le groupe $\mathbf{Z}(\lambda, \bar{s})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}(\lambda, s)$. L'élément ϵ s'identifie à un élément de $\mathbf{Z}(\lambda, \bar{s})^\vee$, le triplet $(\lambda, \bar{s}, \epsilon)$ appartient à $\mathfrak{Irr}_{tunip}$ et on pose $\bar{\pi} = \pi(\lambda, \bar{s}, \epsilon)$. Si i_0 est pair et s_{i_0} n'a pas 1 pour valeur propre, le groupe $\mathbf{Z}(\lambda, \bar{s})$ est plus gros que $\mathbf{Z}(\lambda, s)$. Plus précisément, le deuxième s'identifie à un sous-groupe d'indice 2 du premier. Il y a deux prolongements du caractère ϵ au groupe $\mathbf{Z}(\lambda, \bar{s})$, que l'on note $\bar{\epsilon}'$ et $\bar{\epsilon}''$. On pose $\bar{\pi} = \pi(\lambda, \bar{s}, \bar{\epsilon}') + \pi(\lambda, \bar{s}, \bar{\epsilon}'')$. C'est un élément de $\mathbb{C}[Irr_{tunip}]$.

Dans le cas (B), on considère un entier $i_0 \geq 1$, deux partitions symplectiques $\bar{\lambda}^+$ et λ^- et des éléments $\bar{\epsilon}^+ \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\bar{\lambda}^+)}$ et $\epsilon^- \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda^-)}$. On suppose $2n = 2i_0 + S(\bar{\lambda}^+) + S(\lambda^-)$. On pose $\lambda^+ = \bar{\lambda}^+ \cup \{i_0, i_0\}$. Si i_0 est impair ou si i_0 est pair et $mult_{\bar{\lambda}^+}(i_0) \geq 1$, on a $Jord_{bp}(\lambda^+) = Jord_{bp}(\bar{\lambda}^+)$ et $\bar{\epsilon}^+$ est aussi un élément de $Jord_{bp}(\lambda^+)$. On pose $\pi = \pi(\lambda^+, \bar{\epsilon}^+, \lambda^-, \epsilon^-)$. Si i_0 est pair et $mult_{\bar{\lambda}^+}(i_0) = 0$, on a $Jord_{bp}(\lambda^+) = Jord_{bp}(\bar{\lambda}^+) \cup \{i_0\}$. Il y a deux prolongements de $\bar{\epsilon}^+$ en des éléments de $Jord_{bp}(\lambda^+)$, que l'on note ϵ'^+ et ϵ''^+. On pose $\pi = \pi(\lambda^+, \epsilon'^+, \lambda^-, \epsilon^-) + \pi(\lambda^+, \epsilon''^+, \lambda^-, \epsilon^-)$. On pose $\bar{\lambda}^- = \lambda^- \cup \{i_0, i_0\}$. Si i_0 est impair ou si i_0 est pair et $mult_{\lambda^-}(i_0) \geq 1$, on a $Jord_{bp}(\bar{\lambda}^-) = Jord_{bp}(\lambda^-)$ et ϵ^- apparaît comme un élément de $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\bar{\lambda}^-)}$. On pose $\bar{\pi} = \pi(\bar{\lambda}^+, \bar{\epsilon}^+, \bar{\lambda}^-, \epsilon^-)$. Si i_0 est pair et $mult_{\lambda^-}(i_0) = 0$, on a $Jord_{bp}(\bar{\lambda}^-) = Jord_{bp}(\lambda^-) \cup \{i_0\}$ et il y a de nouveau deux prolongements de ϵ^- en un élément de $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\bar{\lambda}^-)}$, que l'on note $\bar{\epsilon}'^-$ et $\bar{\epsilon}''^-$. On pose $\bar{\pi} = \pi(\bar{\lambda}^+, \bar{\epsilon}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\epsilon}'^-) + \pi(\bar{\lambda}^+, \bar{\epsilon}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\epsilon}''^-)$.

Lemme. *Dans les deux cas (A) et (B) ci-dessus, on a l'égalité* $Res(\pi) = Res(\bar{\pi})$.

Remarque. On peut considérer des situations similaires à celles ci-dessus mais où l'on échange les rôles des valeurs propres 1 et -1 dans le cas (A), ou des exposants $+$ et $-$ dans le cas (B). Evidemment, le lemme vaut aussi dans ces cas.

Preuve. On considère d'abord la première situation. Notons $\sharp$ l'indice tel que nos représentations soient des représentations de $G_\sharp(F)$. Introduisons un sous-groupe parabolique P de $G_\sharp$ de composante de Levi

$$M = GL(i_0) \times G_{n-i_0,\sharp}.$$

On a introduit les termes s_0 et λ_0. Le groupe $Z(\lambda_0, s_0)$ est naturellement un sous-groupe de $Z(\lambda, s)$, d'où un homomorphisme de $\mathbf{Z}(\lambda_0, s_0)$ dans $\mathbf{Z}(\lambda, s)$. On vérifie que c'est un isomorphisme (parce que $z \neq \pm 1$). Ainsi, ϵ s'identifie à un élément de $\mathbf{Z}(\lambda_0, s_0)$ et on définit la représentation $\pi_0 = \pi(\lambda_0, s_0, \epsilon)$ de $G_{n-i_0,\sharp}(F)$. Notons st_{i_0} la représentation de Steinberg de $GL(i_0; F)$. Pour un élément $y \in \mathbb{C}$, notons $st_{i_0}(|.|_F^y \circ det) \times \pi_0$ la représentation de $G_\sharp(F)$ induite à l'aide de P de la représentation $st_{i_0}(|.|_F^y \circ det) \otimes \pi_0$ de $M(F)$. Soit y un nombre complexe tel que $q^{-y} = z$. Il est connu que $\pi = st_{i_0}(|.|_F^y \circ det) \times \pi_0$. La représentation $st_{i_0}(|.|_F^0 \circ det) \times \pi_0$ est irréductible si i_0 est impair ou si i_0 est pair et s_{i_0} a pour valeur propre 1 ; elle est réductible si i_0 est pair et s_{i_0} n'a pas 1 pour valeur propre. Dans les deux cas, il est connu que son image dans le groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie de $G_\sharp(F)$ est égale à $\bar{\pi}$. Il suffit donc de prouver que, pour $y \in \mathbb{C}$, $Res(st_{i_0}(|.|_F^y \circ det) \times \pi_0)$ ne dépend pas de y. Ce terme se déduit des restrictions de la représentation $st_{i_0}(|.|_F^y \circ det) \times \pi_0$ aux différents groupes $K^{\pm}_{n',n''}$. Ces restrictions s'identifient à des représentations de dimension finie de groupes finis, que l'on peut écrire $\sum_\rho m(y,\rho)\rho$, où ρ parcourt les représentations irréductibles du groupe en question et les multiplicités $m(y,\rho)$ sont des entiers positifs ou nuls. Il est clair que les caractères de ces représentations varient continûment en y, ce qui entraîne que les multiplicités $m(y,\rho)$ aussi. Comme ce sont des entiers, il sont constants en z. Cela démontre le lemme dans le cas (A) .

Considérons maintenant le cas (B). On note $(\lambda_0, s_0, \epsilon)$ l'élément de $\mathfrak{Irr}_{n-i_0,tunip}$ auquel s'identifie le quadruplet $(\bar{\lambda}^+, \bar{\epsilon}^+, \lambda^-, \epsilon^-)$. On fixe un nombre complexe $z \neq \pm 1$ de valeur absolue 1. On introduit la partition $\underline{\lambda} = (i_0, i_0)$ et un élément $\underline{s} \in Z(\underline{\lambda})$ ayant deux valeurs propres z et z^{-1}. On note (λ, s) la somme directe, en un sens évident, de $(\underline{\lambda}, \underline{s})$ et (λ_0, s_0). On a l'égalité $\mathbf{Z}(\lambda, s) = \mathbf{Z}(\lambda_0, s_0)$ et ϵ peut être considéré comme un élément de $\mathbf{Z}(\lambda, s)^\vee$. On pose alors $\Pi = \pi(\lambda, s, \epsilon)$. Appliquons le cas (A) aux données λ, s, ϵ, à l'entier i_0 et à la valeur propre z de s_{i_0}. On en déduit un élément de $\mathbb{C}[Irr_{tunip}]$ que l'on note $\bar{\Pi}^+$ (pour le distinguer du $\bar{\pi}$ dont on dispose déjà). On vient de démontrer que $Res(\Pi) = Res(\bar{\Pi}^+)$. Mais on voit que, par construction, $\bar{\Pi}^+$ n'est autre que le présent π. Donc $Res(\Pi) = Res(\pi)$. Maintenant, on applique le cas (A) aux mêmes données, mais en échangeant les rôles des valeurs propres 1 et -1, ce qui est loisible ainsi qu'on l'a remarqué. On obtient un autre élément $\bar{\Pi}^-$ et l'égalité $Res(\Pi) = Res(\bar{\Pi}^-)$. De nouveau, par construction, on a l'égalité $\bar{\Pi}^- = \bar{\pi}$. Donc $Res(\Pi) = Res(\bar{\pi})$, puis l'égalité $Res(\pi) = Res(\bar{\pi})$, qui achève la démonstration. $\square$

1.7 L'involution de Aubert-Zelevinsky

Soit $\sharp = iso$ ou an. On sait définir une involution de l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles, qui généralise l'involution introduite par Zelevinsky dans le cas du groupe $GL(n)$, cf. [3] ou [8] paragraphe III.3. On la note D. Il est connu qu'elle conserve l'ensemble $Irr_{unip,\sharp}$. Pour un groupe $\mathbf{SO}(2n'+1)$ ou $\mathbf{O}(2n'')_\sharp$ défini sur $\mathbb{F}_q$, on sait définir une involution similaire. Par produit tensoriel et sommation, on en déduit une involution D^{par} de $\mathcal{R}^{par}$. On sait que les involutions en question commutent en un sens convenable à l'application module de Jacquet. Il en résulte que D^{par} conserve l'espace $\mathcal{R}^{par,glob}$.

Lemme. *On a l'égalité $D^{par} \circ Res = Res \circ D$.*

Preuve. Fixons $(n', n'') \in D_\sharp(n)$ et une représentation $\pi \in Irr_{unip,\sharp}$. On a défini en 1.3 la représentation $\pi_{n',n''}$ de $\mathbf{G}_\sharp(\mathbb{F}_q)$, où $\mathbf{G}_\sharp = \mathbf{SO}(2n'+1) \times \mathbf{O}(2n'')_\sharp$. Notons $\mathbf{D}$ l'involution de l'ensemble des représentations de $\mathbf{G}_\sharp(\mathbb{F}_q)$. On doit prouver que $\mathbf{D}(\pi_{n',n''}) = (D(\pi))_{n',n''}$.

Notons P_{min} le sous-groupe parabolique minimal de $G_\sharp$ formé des éléments qui, avec les notations de 1.1, stabilisent les drapeaux de sous-espaces

Fv_1, $Fv_1 \oplus Fv_2$,...,$Fv_1 \oplus ... \oplus Fv_n$, si $\sharp = iso$,

Fv_2, $Fv_2 \oplus Fv_3$,...,$Fv_2 \oplus ... \oplus Fv_n$, si $\sharp = an$.

On note M_{min} sa composante de Levi "évidente".

Les sous-groupes paraboliques standard de $G_\sharp$, c'est-à-dire contenant P_{min}, sont en bijection avec les multiplets d'entiers $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_t, n_0)$, où $t \in \mathbb{N}$, $m_j \geq 1$ pour tout $j \in \{1, ..., t\}$, $n_0 + \sum_{j=1,...,t} m_j = n$ et $n_0 \geq 0$ si $\sharp = iso$, $n_0 \geq 1$ si $\sharp = an$. On note $P_{\mathbf{m}}$ le sous-groupe parabolique standard associé à $\mathbf{m}$ et $M_{\mathbf{m}}$ sa composante de Levi standard, c'est-à-dire contenant M_{min}. On a un isomorphisme

$$M_{\mathbf{m}} \simeq GL(m_1) \times ... \times GL(m_t) \times G_{n_0,\sharp}.$$

Par définition, on a l'égalité suivante, que l'on expliquera ci-dessous :

$$(1) \qquad (-1)^{n(\pi)} D(\pi) = \sum_{\mathbf{m}} (-1)^{t(\mathbf{m})} Ind_{P_{\mathbf{m}}}^{G_\sharp} \circ res_{P_{\mathbf{m}}}^{G_\sharp}(\pi).$$

Par "égalité", on veut dire ici que les deux membres ont même image dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de longueur finie de $G_\sharp(F)$. On a noté $Ind_{P_{\mathbf{m}}}^{G_\sharp}$ le foncteur d'induction et $res_{P_{\mathbf{m}}}^{G_\sharp}$ le foncteur module de Jacquet. On a noté $t(\mathbf{m})$ l'entier t qui figure dans la donnée $\mathbf{m}$. Enfin, $n(\pi)$ est un entier dépendant de π sur lequel on reviendra plus loin. Fixons $=(m_1, ..., m_t, n_0)$, notons

$$\pi_{\mathbf{m}} = Ind_{P_{\mathbf{m}}}^{G_\sharp} \circ res_{P_{\mathbf{m}}}^{G_\sharp}(\pi)$$

et calculons $(\pi_{\mathbf{m}})_{n',n''}$. Cette représentation est une somme indexée par les doubles classes $P_{\mathbf{m}}(F)\backslash G_\sharp(F)/K^{\pm}_{n',n''}$. On voit que cet ensemble de doubles classes est indexé par l'ensemble $X_{\mathbf{m}}$ des couples de multiplets d'entiers $\mathbf{m}' = (m'_1, ..., m'_t, n'_0)$, $\mathbf{m}'' = (m''_1, ..., m''_t, n''_0)$ vérifiant les conditions suivantes :

pour tout $j = 1, ..., t$, $m'_j, m''_j \geq 0$ et $m_j = m'_j + m''_j$;

$n_0 = n'_0 + n''_0$, $n'_0 \geq 0$, $n''_0 \geq 0$ si $\sharp = iso$ et $n''_0 \geq 1$ si $\sharp = an$;

$n' = n'_0 + \sum_{j=1,...,t} m'_j$, $n'' = n''_0 + \sum_{j=1,...,t} m''_j$.

Ainsi, on a une égalité $(\pi_{\mathbf{m}})_{n',n''} = \sum_{(\mathbf{m}',\mathbf{m}'')\in X_{\mathbf{m}}} \pi_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}$.

Fixons un couple $(\mathbf{m}', \mathbf{m}'') \in X_{\mathbf{m}}$. Il détermine plusieurs sous-groupes. D'une part un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}'_{\mathbf{m}'}$ de $\mathbf{SO}(2n'+1)$, dont une composante de Levi $\mathbf{M}'_{\mathbf{m}'}$ est isomorphe à

$$\mathbf{GL}(m'_1) \times ... \times \mathbf{GL}(m'_t) \times \mathbf{SO}(2n'_0 + 1),$$

et un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}''_{\mathbf{m}''}$ de $\mathbf{O}(2n'')_\sharp$, dont une composante de Levi $\mathbf{M}''_{\mathbf{m}''}$ est isomorphe à

$$\mathbf{GL}(m''_1) \times ... \times \mathbf{GL}(m''_t) \times \mathbf{O}(2n''_0)_\sharp.$$

On pose $\mathbf{P}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''} = \mathbf{P}'_{\mathbf{m}'} \times \mathbf{P}''_{\mathbf{m}''}$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''} = \mathbf{M}'_{\mathbf{m}'} \times \mathbf{M}''_{\mathbf{m}''}$ Le couple $(\mathbf{m}', \mathbf{m}'')$ détermine d'autre part un sous-groupe compact $K_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}$ de $M_{\mathbf{m}}(F)$, qui est produit de sous-groupes des diverses composantes. Le sous-groupe de $G_{n_0,\sharp}(F)$ est (à conjugaison près) $K^{\pm}_{n'_0,n''_0}$. Pour $j = 1, ..., t$, le sous-groupe de $GL(m_j; F)$ est un sous-groupe parahorique dont le groupe résiduel associé est isomorphe à

$$\mathbf{GL}(m'_j) \times \mathbf{GL}(m''_j).$$

La représentation $\pi_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}$ de $\mathbf{SO}(2n'+1)(\mathbb{F}_q) \times \mathbf{O}(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$ associée à $(\mathbf{m}', \mathbf{m}'')$ s'obtient de la façon suivante. Par un procédé analogue à celui de 1.3, le groupe $K^{\pm}_{n',n''}$ de ce paragraphe étant remplacé par $K^{\pm}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}$, on déduit de la représentation $res_{P_{\mathbf{m}}}^{G_\sharp}(\pi)$ de $M_{\mathbf{m}}(F)$ une représentation du groupe résiduel de $K^{\pm}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}$. Par permutation des facteurs, cette représentation devient une représentation $\sigma_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}$ de $\mathbf{M}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}(\mathbb{F}_q)$. Alors $\pi_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''} = Ind_{\mathbf{P}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}(\sigma_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''})$. D'après [7] proposition 6.7, $\sigma_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}$ n'est autre que l'image de $\pi_{n',n''}$ par le foncteur module de Jacquet $res_{\mathbf{M}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}$. On obtient

$$(2) \qquad (\pi_{\mathbf{m}})_{n',n''} = \sum_{(\mathbf{m}',\mathbf{m}'')\in X_{\mathbf{m}}} Ind_{\mathbf{P}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}}^{\mathbf{G}_\sharp} \circ res_{\mathbf{M}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}(\pi_{n',n''}).$$

Notons X l'ensemble des couples de multiplets d'entiers $\mathbf{r}'=(r'_1,...,r'_{t'},n'_0)$, $\mathbf{r}''=(r''_1,...,r''_{t''},n''_0)$ tels que

$r'_j\geq 1$ pour tout $j=1,...,t'$ et $r''_j\geq 1$ pour tout $j=1,...,t''$;

$n'_0\geq 0$, $n''_0\geq 0$ si $\sharp=iso$ et $n''_0\geq 1$ si $\sharp=an$;

$n'=n'_0+\sum_{j=1,...,t'}r'_j$, $n''=n''_0+\sum_{j=1,...,t'}r''_j$.

Evidemment, à tout tel couple, on peut associer comme ci-dessus un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}$ et sa composante de Levi $\mathbf{M}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}$. Un couple $(\mathbf{m}',\mathbf{m}'')\in X_{\mathbf{m}}$ n'appartient pas toujours à l'ensemble X car des composantes m'_j ou m''_j peuvent être nulles. Mais, en supprimant les termes nuls, on obtient un élément $(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\in X$ et, évidemment, les paraboliques et groupes de Levi associés à $(\mathbf{m}',\mathbf{m}'')$ et $(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$ sont les mêmes. On peut donc récrire (2) sous la forme

$$(\pi_{\mathbf{m}})_{n',n''}=\sum_{(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\in X}x_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')Ind_{\mathbf{P}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}\circ res_{\mathbf{M}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}(\pi_{n',n''}),$$

où $x_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$ est le nombre des éléments $(\mathbf{m}',\mathbf{m}'')\in X_{\mathbf{m}}$ égaux à $(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$, à des termes m'_j ou m''_j nuls près. En utilisant (1), on en déduit

$$(-1)^{n(\pi)}D(\pi)_{n',n''}=\sum_{(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\in X}x(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')Ind_{\mathbf{P}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}\circ res_{\mathbf{M}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}(\pi_{n',n''}),$$

où

$$x(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')=\sum_{\mathbf{m}}(-1)^{t(\mathbf{m})}x_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'').$$

On prouvera plus loin l'égalité

$$(3)\qquad x(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')=(-1)^{t'(\mathbf{r}')+t''(\mathbf{r}'')},$$

$t'(\mathbf{r}')$ et $t''(\mathbf{r}'')$ étant évidemment les entiers t' et t'' figurant dans les données $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$. En utilisant cela, on obtient

$$(4)\qquad (-1)^{n(\pi)}D(\pi)_{n',n''}=\sum_{(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\in X}(-1)^{t'(\mathbf{r}')+t''(\mathbf{r}'')}Ind_{\mathbf{P}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}\circ res_{\mathbf{M}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}(\pi_{n',n''}).$$

Soit ρ une composante irréductible de $\pi_{n',n''}$. On a alors une formule similaire à (1) :

$$(5)\qquad (-1)^{n(\rho)}\mathbf{D}(\rho)=\sum_{(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\in X}(-1)^{t'(\mathbf{r}')+t''(\mathbf{r}'')}Ind_{\mathbf{P}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}\circ res_{\mathbf{M}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}}^{\mathbf{G}_\sharp}(\rho).$$

Expliquons cela. La formule résulte d'une formule similaire pour les groupes $\mathbf{SO}(2n'+1)$ et $\mathbf{O}(2n'')_\sharp$. Pour le premier et aussi le second quand $\sharp=an$, il n'y a pas de problème, c'est bien la formule de définition de l'involution. Considérons le cas d'un groupe $\mathbf{O}(2n'')_{iso}$, avec $n''>0$ (sinon le groupe disparaît). Traitons chacune des composantes, en commençant par $\mathbf{SO}(2n'')_{iso}$. Les sous-groupes paraboliques standard de ce groupe ne sont pas en bijection avec nos données $\mathbf{r}''$. Pour paramétrer ces sous-groupes, on doit d'une part ne considérer que des $\mathbf{r}''=(r''_1,...,r''_{t''},n''_0)$ telles que $n''_0\neq 1$ (car les sous-groupes paraboliques définis par $(r''_1,...,r''_{t''},n''_0=1)$ et $(r''_1,...,r''_{t''},1,n''_0=0)$ sont les mêmes). D'autre part, si $n''_0=0$ et $r''_{t''}\geq 2$, il y a deux sous-groupes paraboliques associés à $\mathbf{r}''$, qui sont conjugués par un élément de $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ mais pas par un élément de $\mathbf{SO}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$. Considérons le second problème, soit $\mathbf{r}''=(r''_1,...,r''_{t''},n''_0=0)$ avec $r''_{t''}\geq 2$. Dans la définition de l'involution interviennent les induites à $\mathbf{SO}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ à partir des deux sous-groupes paraboliques en question. D'après leur définition, les représentations que l'on induit sont conjuguées par l'élément de $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ qui échange les deux paraboliques. Dans la formule similaire à (5) intervient la restriction à $\mathbf{SO}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ de l'induite de $\mathbf{P}''_{\mathbf{r}''}(\mathbb{F}_q)$ à $\mathbf{O}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ de l'une ou l'autre de ces représentations. Mais, parce que $n''_0 = 0$, $\mathbf{P}''_{\mathbf{r}''}$ ne coupe pas la composante $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}$ et la restriction à $\mathbf{SO}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ de cette dernière induite se décompose naturellement en deux induites qui ne sont autres que les précédentes. Considérons maintenant le cas d'une donnée $\mathbf{r}'' = (r''_1, ..., r''_{t''}, n''_0 = 1)$. Introduisons l'autre donnée $\bar{\mathbf{r}}'' = (r''_1, ..., r''_{t''}, 1, n''_0 = 0)$. Dans la définition de l'involution intervient le produit de $(-1)^{t''+1}$ et d'une induite de $\mathbf{P}''_{\bar{\mathbf{r}}''}(\mathbb{F}_q)$ à $\mathbf{SO}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ d'une certaine représentation. Par construction de celle-ci et parce que le normalisateur de $\mathbf{P}''_{\bar{\mathbf{r}}''}$ dans $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ est non vide, cette représentation est invariante par ce normalisateur. Dans la formule similaire à (5) intervient d'une part le produit de $(-1)^{t''+1}$ et de la restriction à $\mathbf{SO}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ de l'induite de $\mathbf{P}''_{\bar{\mathbf{r}}''}(\mathbb{F}_q)$ à $\mathbf{O}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ de la même représentation. D'après la propriété d'invariance ci-dessus et le fait que $\mathbf{P}''_{\bar{\mathbf{r}}''}$ ne coupe pas $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}$, on obtient 2 fois la contribution de $\bar{\mathbf{r}}''$ à la formule de l'involution. Mais, dans la formule similaire à (5), il y a aussi le produit de $(-1)^{t''}$ et de la restriction à $\mathbf{SO}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ de l'induite de $\mathbf{P}''_{\mathbf{r}''}(\mathbb{F}_q)$ à $\mathbf{O}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ de la même représentation, prolongée en une représentation de $\mathbf{M}''_{\mathbf{r}''}(\mathbb{F}_q)$. Cette fois, $\mathbf{P}''_{\mathbf{r}''}$ coupe $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}$ et on obtient -1 fois la contribution de $\bar{\mathbf{r}}''$ à la formule de l'involution. Comme $2 - 1 = 1$, les deux formules coïncident. La comparaison des formules pour la composante $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}$ est similaire. Cette fois, l'involuion est définie en induisant à partir des normalisateurs dans $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ des sous-groupes paraboliques de $\mathbf{SO}(2n'')_{iso}$ pour lesquels ce normalisateur est non vide. Les données $\mathbf{r}'' = (r''_1, ..., r''_{t''}, n''_0 = 0)$ avec $r''_{t''} \geq 2$ disparaissent, leurs deux sous-groupes paraboliques associés ne vérifiant pas cette condition. Une telle donnée intervient dans la formule similaire à (5) par la restriction à $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ d'une certaine induite de $\mathbf{P}''_{\mathbf{r}''}(\mathbb{F}_q)$ à $\mathbf{O}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$. Parce que $\mathbf{P}''_{\mathbf{r}''}$ ne coupe pas $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}$, on voit que l'action de $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ permute deux sous-$\mathbf{SO}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$-modules de l'induite et une telle représentation de $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ est de trace nulle. Enfin, pour une donnée $\mathbf{r}'' = (r''_1, ..., r''_{t''}, n''_0 = 1)$, il intervient dans la formule de l'involution une induite à partir du normalisateur dans $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ de $\mathbf{P}''_{\bar{\mathbf{r}}''}$, avec la même notation que plus haut. Or ce normalisateur est justement l'intersection $\mathbf{O}^-(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q) \cap \mathbf{P}''_{\mathbf{r}''}(\mathbb{F}_q)$. On voit que les deux formules se réconcilient encore. Ces considérations justifient la formule (5).

En vertu de (4) et (5), pour prouver l'égalité cherchée $\mathbf{D}(\pi_{n',n''}) = D(\pi)_{n',n''}$, il suffit de prouver que, pour toute composante irréductible ρ de $\pi_{n',n''}$, on a l'égalité $(-1)^{n(\pi)} = (-1)^{n(\rho)}$. Cela résulte de la définition par la méthode de Lusztig des éléments de $Irr_{unip,\sharp}$. En fait, ces signes se calculent, ils valent $(-1)^n$ si $\sharp = iso$ et $(-1)^{n-1}$ si $\sharp = an$, cf. [6] corollaire 5.7.

Cela achève la démonstration, à ceci près qu'il nous reste à prouver l'égalité (3). Considérons un couple $\mathbf{r}' = (r'_1, ..., r'_{t'}, n'_0)$, $\mathbf{r}'' = (r''_1, ..., r''_{t''}, n''_0)$ appartenant à X. Les données t, $\mathbf{m}'$ et $\mathbf{m}''$ intervenant dans la définition de $x(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ se construisent de la façon suivante. On considère un entier $t \geq sup(t', t'')$ et deux sous-ensembles $Y', Y'' \subset \{1, ..., t\}$. On suppose que Y', resp. Y'', a $t - t'$ éléments, resp. $t - t''$. Notons $i_1, ..., i_{t'}$ les éléments de $\{1, ..., t\} - Y'$. On définit $\mathbf{m}'$ par $m'_{i_k} = r'_k$ pour $k = 1, ..., t'$ et $m'_j = 0$ pour $j \in Y'$. On définit de façon similaire $\mathbf{m}''$, en utilisant l'ensemble Y'' à la place de Y'. Pour tout $j = 1, ..., t$ le terme $m_j = m'_j + m''_j$ doit être non nul. Cela équivaut évidemment à la condition $Y' \cap Y'' = \emptyset$. On voit qu'elle ne peut être réalisée que si $t \leq t' + t''$. Pour

$t \in \{sup(t', t''), ..., t' + t''\}$, on obtient que

$$\sum_{\mathbf{m}; l(\mathbf{m})=t} x_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$$

est le nombre de couples (Y', Y'') comme ci-dessus. Ce nombre est le produit du nombre de sous-ensembles Y' à $t - t'$ éléments de $\{1, ..., t\}$ et du nombre de sous-ensembles Y'' à $t - t''$ éléments de $\{1, ..., t\} - Y'$. C'est-à-dire

$$\frac{t!}{t'!(t-t')!} \frac{t'!}{(t-t'')!(t'+t''-t)!} = \frac{t!}{(t-t')!(t-t'')!(t'+t''-t)!}.$$

D'où

$$x(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \sum_{t=sup(t',t''),...,t'+t''} (-1)^t \frac{t!}{(t-t')!(t-t'')!(t'+t''-t)!}.$$

Supposons $t' \geq t''$ pour fixer la notation. On remplace t par $t' + u$. Alors $x(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ est la valeur en $X = 1$ du polynôme

$$P(X) = \sum_{u=0,...,t''} (-1)^{t'+u} \frac{(t'+u)!}{u!(t'-t''+u)!(t''-u)!} X^{t'-t''+u}.$$

En posant

$$Q(X) = \sum_{u=0,...,t''} (-1)^{t'+u} \frac{1}{u!(t''-u)!} X^{t'+u},$$

on voit que $P(X) = (\frac{d}{dX})^{t''} Q(X)$. Or on calcule

$$Q(X) = \frac{(-1)^{t'}}{t''!} X^{t'} (1-X)^{t''}.$$

On voit que $(\frac{d}{dX})^{t''} Q(X)$ est la somme de $(-1)^{t'+t''}$ et d'un polynôme divisible par $(1-X)$. Donc la valeur en 1 de $(\frac{d}{dX})^{t''} Q(X)$, c'est-à-dire de $P(X)$, vaut $(-1)^{t'+t''}$. Cela prouve (3). $\square$

1.8 Les espaces $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{glob}$

Pour tout groupe fini W, on note $\hat{W}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de W. En identifiant une telle représentation à son caractère, l'espace $\mathbb{C}[\hat{W}]$ s'identifie à celui des fonctions de W dans $\mathbb{C}$ qui sont invariantes par conjugaison.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $\mathfrak{S}_N$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, ..., N\}$. On note sgn le caractère signe usuel de $\mathfrak{S}_N$. Les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_N$ sont paramétrées par $\mathcal{P}(N)$. On note w_α un élément de la classe ainsi paramétrée.

Pour un entier $k \geq 1$, notons $\mathcal{P}_k(N)$ l'ensemble des familles $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ de partitions telles que $S(\alpha_1) + ... + S(\alpha_k) = N$. Dans la suite, on utilisera des variantes de cette notation, par exemple $\mathcal{P}_k^{symp}(N)$. On note W_N le groupe de Weyl d'un système de racines de type B_N ou C_N (avec la convention $W_0 = \{1\}$). On note sgn le caractère signe usuel de W_N et sgn_{CD} le caractère dont le noyau est le sous-groupe W_N^D d'un système de racines de type D_N. Les classes de conjugaison dans W_N sont paramétrées par les couples de partitions $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N)$. On note $w_{\alpha\beta}$ un élément de la classe ainsi paramétrée. On a $sgn(w_{\alpha\beta}) = (-1)^{N+l(\alpha)}$ et $sgn_{CD}(w_{\alpha\beta}) = (-1)^{l(\beta)}$.

On note Γ l'ensemble des quadruplets $\gamma = (r', r'', N', N'')$ tels que

$$r' \in \mathbb{N},\, r'' \in \mathbb{Z},\, N' \in \mathbb{N},\, N'' \in \mathbb{N},\, r'^2 + r' + N' + r''^2 + N'' = n.$$

Pour un tel γ, on pose

$$\mathcal{R}(\gamma) = \mathbb{C}[\hat{W}_{N'}] \otimes \mathbb{C}[\hat{W}_{N''}].$$

On définit

$$\mathcal{R} = \oplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{R}(\gamma).$$

Chaque espace $\mathbb{C}[\hat{W}_N]$ est naturellement muni d'un produit hermitien défini positif. On en déduit un tel produit sur l'espace $\mathcal{R}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq m \leq n$. Pour un entier $N \geq n$, le groupe $\mathfrak{S}_m \times W_{N-m}$ apparaît comme sous-groupe "de Levi" de W_N et il y a une application linéaire de restriction

$$res_m : \mathbb{C}[\hat{W}_N] \to \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_m] \otimes \mathbb{C}[\hat{W}_{N-m}].$$

Pour $\varphi \in \mathbb{C}[\hat{W}_N]$, $\mu \in \mathcal{P}(m)$ et $(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}_2(N-m)$, on a l'égalité
$res_m(\varphi)(w_\mu \times w_{\alpha,\beta}) = \varphi(w_{\mu\cup\alpha,\beta})$.

On construit des applications linéaires

$$res'_m, res''_m : \mathcal{R} \to \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_m] \otimes \mathcal{R}_{n-m}$$

de la façon suivante. Soit $\gamma = (r', r'', N', N'') \in \Gamma_n$. Si $N' < m$, res'_m est nulle sur $\mathcal{R}(\gamma)$. Si $N' \geq m$, $\gamma' = (r', r'', N'-m, N'')$ appartient à Γ_{n-m}. L'application res'_m envoie $\mathcal{R}(\gamma)$ dans $\mathcal{R}(\gamma')$ et coïncide sur $\mathcal{R}(\gamma)$ avec le produit tensoriel de

$$res_m : \mathbb{C}[\hat{W}_{N'}] \to \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_m] \otimes \mathbb{C}[\hat{W}_{N'-m}]$$

et de l'identité de $\mathbb{C}[\hat{W}_{N''}]$. L'application res''_m est similaire, en permutant les rôles des $'$ et $''$. On définit $\mathcal{R}^{glob}$ comme l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}$ qui, pour tout m, ont même image par les deux applications res'_m, res''_m. On note

$$res_m : \mathcal{R}^{glob} \to \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_m] \otimes \mathcal{R}_{n-m}$$

l'application commune $res'_m = res''_m$. On voit que res_m envoie $\mathcal{R}^{glob}$ dans $\mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_m] \otimes \mathcal{R}^{glob}_{n-m}$ (la preuve est similaire à celle de 1.5 concernant l'espace $\mathcal{R}^{par,glob}$).

On note $\mathcal{R}_{cusp}$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{R}$ annulés par toutes les applications res'_m et res''_m. Il est inclus dans $\mathcal{R}^{glob}$. On note $proj_{cusp}$ la projection orthogonale de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}_{cusp}$. L'espace $\mathcal{R}_{cusp}$ se décrit de la façon suivante. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{C}[\hat{W}_N]_{cusp}$ le sous-espace des fonctions sur W_N, invariantes par conjugaison, et à support dans les classes de conjugaison paramétrées par des couples de partitions de la forme $(\emptyset, \beta)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose

$$\mathcal{R}_{cusp}(\gamma) = \mathbb{C}[\hat{W}_{N'}]_{cusp} \otimes \mathbb{C}[\hat{W}_{N''}]_{cusp}.$$

Alors

$$\mathcal{R}_{cusp} = \oplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{R}_{cusp}(\gamma).$$

Donnons une autre présentation de l'espace $\mathcal{R}$. Notons $\mathbf{\Gamma}$ l'ensemble des triplets (r', r'', N) tels que

$$r' \in \mathbb{N},\ r'' \in \mathbb{Z},\ N \in \mathbb{N},\ r'^2 + r' + r''^2 + N = n.$$

Il y a une application évidente $\Gamma \to \boldsymbol{\Gamma}$ qui, à $(r', r'', N', N'') \in \Gamma$, associe $(r', r'', N' + N'')$. On la note $\gamma \mapsto \boldsymbol{\gamma}$. Pour $\boldsymbol{\gamma} = (r', r'', N) \in \boldsymbol{\Gamma}$, posons

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\gamma}) = \oplus_{\gamma \in \Gamma; \gamma \mapsto \boldsymbol{\gamma}} \mathcal{R}(\gamma) = \sum_{(N', N'') \in D(N)} \mathbb{C}[\hat{W}_{N'}] \otimes \mathbb{C}[\hat{W}_{N''}].$$

Alors

$$\mathcal{R} = \oplus_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Gamma}} \mathcal{R}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Soit $\boldsymbol{\gamma} = (r', r'', N) \in \boldsymbol{\Gamma}$ et soit $\varphi \in \mathcal{R}(\boldsymbol{\gamma})$. On peut identifier φ à une fonction sur l'ensemble des $w_{\alpha',\beta'} \times w_{\alpha'',\beta''}$ pour $(\alpha', \beta', \alpha'', \beta'') \in \mathcal{P}_4(N)$. D'après la formule explicite écrite plus haut pour l'application res_m, la condition $res'_m(\varphi) = res''_m(\varphi)$ signifie que, pour tout $\mu \in \mathcal{P}(m)$ et tout $(\alpha', \beta', \alpha'', \beta'') \in \mathcal{P}_4(N - m)$, on a l'égalité $\varphi(w_{\mu \cup \alpha', \beta'} \times w_{\alpha'', \beta''}) = \varphi(w_{\alpha', \beta'} \times w_{\mu \cup \alpha'', \beta''})$. En faisant varier m, on voit que $\varphi \in \mathcal{R}^{glob}$ si et seulement si, pour tout $(\alpha', \beta', \alpha'', \beta'') \in \mathcal{P}_4(N)$, $\varphi(w_{\alpha',\beta'} \times w_{\alpha'',\beta''})$ ne dépend que du triplet $(\alpha' \cup \alpha'', \beta', \beta'')$. On note $\mathcal{R}^{glob}(\boldsymbol{\gamma})$ l'espace des $\varphi \in \mathcal{R}(\boldsymbol{\gamma})$ qui vérifient cette condition. Pour $(\alpha, \beta', \beta'') \in \mathcal{P}_3(N)$, on note $w_{\alpha,\beta',\beta''}$ un élément quelconque $w_{\alpha',\beta'} \times w_{\alpha'',\beta''}$ où $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha$. On peut considérer que $\mathcal{R}^{glob}(\boldsymbol{\gamma})$ est l'espace des fonctions sur l'ensemble de ces éléments $w_{\alpha,\beta',\beta''}$. On a l'égalité

$$\mathcal{R}^{glob} = \oplus_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Gamma}} \mathcal{R}^{glob}(\boldsymbol{\gamma}).$$

1.9 L'involution de Lusztig

En suivant Lusztig, on a défini en [6] 3.16 deux isomorphismes

$$Rep : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^{par}, \; k : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^{par}.$$

Donnons seulement une idée des définitions, en renvoyant à [6] 2.6, 2.7, 2.9, 2.10 pour plus de précision. Lusztig a classifié de façon combinatoire les représentations irréductibles unipotentes d'un groupe $\mathbf{SO}(2n'+1; \mathbb{F}_q)$. Elles sont paramétrées par les couples $(r', N') \in \mathbb{N}^2$ tels que $r'^2 + r' + N' = n'$. De même, la réunion disjointe des ensembles de représentations irréductibles unipotentes de $\mathbf{O}(2n'')_{iso}(\mathbb{F}_q)$ et de $\mathbf{O}(2n'')_{an}(\mathbb{F}_q)$ sont paramétrées par les couples $(r'', N'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que $r''^2 + N'' = n''$. Pour $\gamma = (r', r'', N', N'') \in \Gamma$, pour $\rho' \in \hat{W}_{N'}$ et $\rho'' \in \hat{W}_{N''}$, l'isomorphisme Rep envoie l'élément $\rho' \otimes \rho'' \in \mathcal{R}(\gamma)$ sur un élément de $C'_{n'} \otimes C''_{n''}$ où $n' = r'^2 + r' + N' = n'$ et $n'' = r''^2 + N''$. Cet élément est le produit tensoriel des traces des représentations irréductibles unipotentes paramétrées par (r', ρ') et (r'', ρ'').

Lusztig a aussi introduit la notion de faisceau-caractère. Pour un tel faisceau défini par exemple sur un groupe $\mathbf{SO}(2n' + 1)$, la fonction trace associée à ce faisceau est une fonction sur $\mathbf{SO}(2n' + 1; \mathbb{F}_q)$, invariante par conjugaison. Lusztig a classifié les faisceaux-caractères dont la fonction trace est unipotente, c'est-à-dire appartient à l'espace $C'_{n'}$. De nouveau, ils sont paramétrés par les couples $(r', N') \in \mathbb{N}^2$ tels que $r'^2 + r' + N' = n'$. Une construction analogue vaut pour les groupes $\mathbf{O}(2n'')_{iso}$ ou $\mathbf{O}(2n'')_{an}$. Pour $\gamma = (r', r'', N', N'') \in \Gamma$, pour $\rho' \in \hat{W}_{N'}$ et $\rho'' \in \hat{W}_{N''}$, l'isomorphisme k envoie l'élément $\rho' \otimes \rho'' \in \mathcal{R}(\gamma)$ sur un élément de $C'_{n'} \otimes C''_{n''}$ où n' et n'' sont comme ci-dessus. Cet élément est le produit tensoriel des traces des faisceaux-caractères paramétrés par (r', ρ') et (r'', ρ'').

Remarque. La fonction-trace associée à un faisceau-caractère n'est vraiment canonique qu'à homothétie près. Pour la définir précisément, on doit faire des choix de normalisations. Nous utilisons ceux de [6] 2.7 et 2.10.

Notons $\mathcal{F}^L$ l'automorphisme de $\mathcal{R}$ tel que $Rep \circ \mathcal{F}^L = k$. C'est une isométrie. Lusztig a prouvé que c'était une involution, qui peut se décrire de façon combinatoire. On transporte $\mathcal{F}^L$ en une involution $\mathcal{F}^{par}$ de $\mathcal{R}^{par}$. Autrement dit, $\mathcal{F}^{par}$ est l'involution de $\mathcal{R}^{par}$ telle que $\mathcal{F}^{par} \circ Rep = k$. Elle est isométrique.

Pour tout entier $m \geq 1$, on a de même des isomorphismes $Rep, k : \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_{\mathbf{m}}] \to C^{GL(m)}$. Cette fois, ils sont égaux et les analogues de $\mathcal{F}^L$ et $\mathcal{F}^{par}$ sont les identités. Supposons $m \leq n$, posons $n_0 = n - m$. On a construit des applications linéaires

$$res'_m, res''_m : \mathcal{R}^{par} \to C^{GL(m)} \otimes \mathcal{R}^{par}_{n_0},$$

$$res'_m, res''_m : \mathcal{R} \to \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_m] \otimes \mathcal{R}_{n_0}.$$

Les applications Rep et k sont compatibles en un sens plus ou moins évident à ces applications. Il en résulte que $\mathcal{F}^L$ et $\mathcal{F}^{par}$ le sont aussi.

Les applications Rep et k se restreignent en des isomorphismes $\mathcal{R}^{glob} \to \mathcal{R}^{par,glob}$. L'involution $\mathcal{F}^L$ conserve $\mathcal{R}^{glob}$ et $\mathcal{F}^{par}$ conserve $\mathcal{R}^{par,glob}$. Les propriétés de compatibilité ci-dessus de l'involution isométrique $\mathcal{F}^{par}$ entraînent que :

(1) $\mathcal{F}^{par} \circ proj_{cusp} = proj_{cusp} \circ \mathcal{F}^{par}$.

1.10 L'induction endoscopique

On a défini en [6] 3.18 une application linéaire $\rho\iota : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^{glob}$. Rappelons sa définition. Soit $\gamma = (r', r'', N^+, N^-) \in \Gamma$ et $\varphi \in \mathcal{R}(\gamma)$. Posons $N = N^+ + N^-$. L'élément $\rho\iota(\varphi)$ appartient à $\mathcal{R}(\boldsymbol{\delta})$, où $\boldsymbol{\delta} = (r', (-1)^{r'} r'', N) \in \mathbf{\Gamma}$. Soit $\delta = (r', (-1)^{r'}, N_1, N_2) \in \Gamma$. Nous allons décrire la composante $\rho\iota(\varphi)_\delta$ de $\rho\iota(\varphi)$ dans $\mathcal{R}(\delta)$.

On définit un quadruplet d'entiers $\mathbf{a} = (a_1^+, a_1^-, a_2^+, a_2^-)$ par les formules suivantes :
$\mathbf{a} = (0, 0, 0, 1)$ si $0 < r'' \leq r'$ ou si $r'' = 0$ et r' est pair ;
$\mathbf{a} = (0, 0, 1, 0)$ si $-r' \leq r'' < 0$ ou si $r'' = 0$ et r' est impair ;
$\mathbf{a} = (0, 1, 0, 0)$ si $r' < r''$;
$\mathbf{a} = (1, 0, 0, 0)$ si $r'' < -r'$.

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des quadruplets $\mathbf{N} = (N_1^+, N_1^-, N_2^+, N_2^-)$ d'entiers positifs ou nuls tels que

$$N^+ = N_1^+ + N_2^+,\ N^- = N_1^- + N_2^-,\ N_1 = N_1^+ + N_1^-,\ N_2 = N_2^+ + N_2^-.$$

Pour un tel quadruplet, posons $W_{\mathbf{N}} = W_{N_1^+} \times W_{N_1^-} \times W_{N_2^+} \times W_{N_2^-}$. Ce groupe se plonge de façon évidente dans $W_{N_1} \times W_{N_2}$, resp. $W_{N^+} \times W_{N^-}$, et ces plongements sont bien définis à conjugaison près. On a donc des foncteurs de restriction $res_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N^+} \times W_{N^-}}$ et d'induction $ind_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N_1} \times W_{N_2}}$. On note $sgn_{CD}^{\mathbf{a}}$ le caractère de $W_{\mathbf{N}}$ qui est le produit tensoriel des caractères $sgn_{CD}^{a_1^+}$, $sgn_{CD}^{a_1^-}$, $sgn_{CD}^{a_2^+}$, $sgn_{CD}^{a_2^-}$ sur chacun des facteurs de $W_{\mathbf{N}}$. Alors

$$\rho\iota(\varphi)_\delta = \sum_{\mathbf{N} \in \mathcal{N}} ind_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N_1} \times W_{N_2}} \left(sgn_{CD}^{\mathbf{a}} \otimes res_{W_{\mathbf{N}}}^{W_{N^+} \times W_{N^-}}(\varphi) \right).$$

Donnons une formule plus concrète. Fixons plutôt $\boldsymbol{\gamma} = (r', r'', N) \in \mathbf{\Gamma}$ et supposons $\varphi \in \mathcal{R}(\boldsymbol{\gamma})$. On a $\rho\iota(\varphi) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{\delta})$, où $\boldsymbol{\delta}$ est comme ci-dessus. Soit $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathcal{P}_3(N)$.

Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des sextuplets $\mathbf{I} = (I^+, I^-, J_1^+, J_1^-, J_2^+, J_2^-)$, dont les composantes sont des ensembles tels que

$$\{1,...,l(\alpha)\} = I^+ \sqcup I^-,\ \{1,...,l(\beta_1)\} = J_1^+ \sqcup J_1^-,\ \{1,...,l(\beta_2)\} = J_2^+ \sqcup J_2^-.$$

A tout tel sextuplet, on associe six partitions $\alpha^+(\mathbf{I}), \alpha^-(\mathbf{I}), \beta_1^+(\mathbf{I}), \beta_1^-(\mathbf{I}), \beta_2^+(\mathbf{I}), \beta_2^-(\mathbf{I})$. La partition $\alpha^+(\mathbf{I})$ est formée des α_j pour $j \in I^+$. Les autres sont construites de façon similaire. On vérifie la formule suivante

$$(1) \qquad \rho\iota(\varphi)(w_{\alpha,\beta_1,\beta_2}) = \sum_{\mathbf{I}\in\mathcal{I}} (-1)^{a_1^+|J_1^+|+a_1^-|J_1^-|+a_2^+|J_2^+|+a_2^-|J_2^-|}$$

$$\varphi(w_{\alpha^+(\mathbf{I}),\beta_1^+(\mathbf{I})\cup\beta_2^+(\mathbf{I})} \times w_{\alpha^-(\mathbf{I}),\beta_1^-(\mathbf{I})\cup\beta_2^-(\mathbf{I})}).$$

On voit que notre application $\rho\iota$ commute aux projections $proj_{cusp}$.

1.11 Description de $Res \circ D(\pi)$ pour $\pi \in Irr_{unip-quad}$

On définit un espace

$$\mathcal{S}_n = \oplus_{k,N}\mathbb{C}[\hat{W}_N],$$

où l'on somme sur les couples $(k, N) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k(k+1) + 2N = 2n$. On a l'égalité

$$(1) \qquad \oplus_{(n^+,n^-)\in D(n)}\, \mathcal{S}_{n^+} \otimes \mathcal{S}_{n^-} = \oplus_{k^+,N^+,k^-,N^-}\mathbb{C}[\hat{W}_{N^+}] \otimes \mathbb{C}[\hat{W}_{N^-}],$$

où l'on somme sur l'ensemble $\Gamma_{\mathcal{S}}$ des quadruplets $(k^+, N^+, k^-, N^-) \in \mathbb{N}^4$ tels que $k^+(k^+ + 1)+2N^+ + k^-(k^- + 1)+2N^- = 2n$. Pour un tel quadruplet, définissons des entiers $r' \in \mathbb{N}$, $r'' \in \mathbb{Z}$ par les formules suivantes :

- si $k^+ \equiv k^-\, mod\, 2\mathbb{Z}$, $r' = \frac{k^+ + k^-}{2}$, $r'' = \frac{k^+ - k^-}{2}$;
- si $k^+ \not\equiv k^-\, mod\, 2\mathbb{Z}$ et $k^+ > k^-$, $r' = \frac{k^+ - k^- - 1}{2}$, $r'' = \frac{k^+ + k^- + 1}{2}$;
- si $k^+ \not\equiv k^-\, mod\, 2\mathbb{Z}$ et $k^+ < k^-$, $r' = \frac{k^- - k^+ - 1}{2}$, $r^- = -\frac{k^+ + k^- + 1}{2}$.

On vérifie que $(r', r'', N^+, N^-) \in \Gamma$. Inversement, pour $(r', r'', N^+, N^-) \in \Gamma$, définissons deux entiers $k^+, k^- \in \mathbb{N}$ par les formules suivantes :

- si $|r''| \leq r'$, $k^+ = r' + r''$, $k^- = r' - r''$;
- si $r' < r''$, $k^+ = r' + r''$, $k^- = r'' - r' - 1$;
- si $r'' < -r'$, $k^+ = -r'' - r' - 1$, $k^- = r' - r''$.

Alors $(k^+, k^-, N^+, N^-) \in \Gamma_{\mathcal{S}}$. Ces deux applications sont inverses l'une de l'autre et définissent donc des bijections entre $\Gamma_{\mathcal{S}}$ et Γ. On peut donc remplacer l'ensemble de sommation $\Gamma_{\mathcal{S}}$ par Γ dans la formule (1) et on obtient un isomorphisme

$$j : \oplus_{(n^+,n^-)\in D(n)}\mathcal{S}_{n^+} \otimes \mathcal{S}_{n^-} \to \mathcal{R}.$$

Puisque $\mathcal{S}_0 = \mathbb{C}$, l'espace $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n \otimes \mathcal{S}_0$ se plonge dans l'espace de départ de j. On note $j_{n,0}$ la restriction de j à ce sous-espace.

Soit $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-) \in \mathfrak{Irr}_{unip-quad}$. Posons $S(\lambda^+) = 2n^+$, $S(\lambda^-) = 2n^-$. Soit $\zeta = \pm$. Par la correspondance de Springer généralisée, le couple $(\lambda^\zeta, \epsilon^\zeta)$ détermine deux entiers $k^\zeta, N^\zeta \in \mathbb{N}$ tel que $k^\zeta(k^\zeta + 1) + 2N^\zeta = 2n^\zeta$ et une représentation irréductible $\rho_{\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta}$ de W_{N^ζ}. On définit une autre représentation $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta}$ de W_{N^ζ}, cf. [9] 5.1. Nous ne rappelons pas sa définition. Disons seulement que $\rho_{\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta}$ est l'action de W_N dans un certain sous-espace déterminé par ϵ^ζ de l'espace de cohomologie de plus haut degré d'une certaine variété algébrique, tandis que $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta}$ est l'action de W_N dans un sous-espace analogue de la somme de tous les espaces de cohomologie de la même variété. Cette représentation n'est pas irréductible en général. Elle est de la forme

$$\boldsymbol{\rho}_{\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta} = \oplus_{(\lambda_1^\zeta,\epsilon_1^\zeta)} c(\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta;\lambda_1^\zeta,\epsilon_1^\zeta)\rho_{\lambda_1^\zeta,\epsilon_1^\zeta},$$

où $(\lambda_1^\zeta,\epsilon_1^\zeta)$ parcourt les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{symp}(2n^\zeta)$ tels que les entiers k_1^ζ, N_1^ζ qui leur sont associés sont égaux à k^ζ, N^ζ et où $c(\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta;\lambda_1^\zeta,\epsilon_1^\zeta) \in \mathbb{N}$ est une multiplicité. On sait que si $c(\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta;\lambda_1^\zeta,\epsilon_1^\zeta) \geq 1$, on a soit $\lambda_1^\zeta > \lambda^\zeta$ pour l'ordre usuel des partitions, soit $(\lambda_1^\zeta,\epsilon_1^\zeta) = (\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta)$ et, dans ce dernier cas, on a $c(\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta;\lambda^\zeta,\epsilon^\zeta) = 1$.

On identifie le produit $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}$ à un élément du membre de droite de (1), plus précisément de la composante indexée par k^+, N^+, k^-, N^-. On a donc $j(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}) \in \mathcal{R}$ et on définit l'élément $\rho\iota \circ j(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}) \in \mathcal{R}$.

Proposition. *On a l'égalité*

$$Res \circ D(\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)) = Rep \circ \rho\iota \circ j(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}).$$

Cf. [9] 5.3.

1.12 Un lemme technique

Soit $\mathbf{m} = (m_1,...,m_t > 0) \in \mathcal{P}(\leq n)$. Posons $n_0(\mathbf{m}) = n - S(\mathbf{m})$. En itérant les constructions de 1.8, on définit l'application linéaire

$$res_{\mathbf{m}} : \mathcal{R} \to \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_{m_1}] \otimes ... \otimes \mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_{m_t}] \otimes \mathcal{R}_{n_0(\mathbf{m})}.$$

Pour $i = 1,...,t$, $\mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_{m_i}]_{cusp}$ est de dimension 1. On choisit pour base la fonction caractéristique de la classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_{m_i}$ paramétrée par la partition (m_i). On peut alors considérer que $proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}}$ prend ses valeurs dans $\mathcal{R}_{n_0(\mathbf{m}),cusp}$.

Soit $(n^+,n^-) \in D(n)$. Pour $\zeta = \pm$, soit $\phi^\zeta \in \mathcal{S}_{n^\zeta}$, posons $\varphi^\zeta = \rho\iota \circ j_{n^\zeta,0}(\phi^\zeta)$, cf. 1.11 pour la définition de $j_{n^\zeta,0}$. Dans ce paragraphe, l'application $\rho\iota$ est relative à divers entiers, ici c'est n^ζ. Pour toute partition $\mathbf{m} \in \mathcal{P}(\leq n^\zeta)$, soit $\phi^\zeta[\mathbf{m}] \in \mathcal{S}_{n_0^\zeta(\mathbf{m})}$, où $n_0^\zeta(\mathbf{m}) = n^\zeta - S(\mathbf{m})$. Posons $\varphi^\zeta[\mathbf{m}] = \rho\iota \circ j_{n_0^\zeta(\mathbf{m}),0}(\phi^\zeta[\mathbf{m}])$. Posons $\varphi = \rho\iota \circ j(\phi^+ \otimes \phi^-)$. Fixons maintenant une partition $\mathbf{m} = (m_1,...,m_t > 0) \in \mathcal{P}(\leq n)$ et posons $n_0 = n_0(\mathbf{m})$. Considérons un couple d'ensembles (I^+,I^-) tels que $I^+ \sqcup I^- = \{1,...,t\}$. Pour tout tel couple, on définit les partitions $\mathbf{m}(I^+)$, resp. $\mathbf{m}(I^-)$, formées des m_i pour $i \in I^+$, resp. $i \in I^-$. On note $\mathfrak{I}$ l'ensemble des couples (I^+,I^-) comme ci-dessus tels que $S(\mathbf{m}(I^+)) \leq n^+$ et $S(\mathbf{m}(I^-)) \leq n^-$. Pour un tel couple, posons

$$\varphi[I^+,I^-] = \rho\iota \circ j_{n_0}(\phi^+[\mathbf{m}(I^+)] \otimes \phi^-[\mathbf{m}(I^-)]).$$

Lemme. *Supposons que, pour tout $\zeta = \pm$ et pour toute partition $\mathbf{m}' \in \mathcal{P}(\leq n^\zeta)$, on ait l'égalité*

$$proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}'}(\varphi^\zeta) = proj_{cusp}(\varphi^\zeta[\mathbf{m}']).$$

Alors on a l'égalité

$$proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}(\varphi)=\sum_{(I^+,I^-)\in\mathfrak{I}}proj_{cusp}(\varphi[I^+,I^-]).$$

Preuve. Pour tout $f\in\mathcal{R}$ et tout $\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{\Gamma}$, on note $f_{\boldsymbol{\gamma}}$ la composante de f dans $\mathcal{R}(\boldsymbol{\gamma})$. Posons $f=proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}(\varphi)$. Fixons $\boldsymbol{\gamma}_0=(r',r'',N)\in\boldsymbol{\Gamma}_{n_0}$, posons $\boldsymbol{\delta}_0=(r',(-1)^{r'}r'',N)$. Nous allons calculer $f_{\boldsymbol{\delta}_0}$. Puisque f est cuspidale, il suffit de calculer $f_{\boldsymbol{\delta}_0}(w_{\emptyset,\beta_1,\beta_2})$ pour tout couple $(\beta_1,\beta_2)\in\mathcal{P}_2(N)$. Posons $\boldsymbol{\delta}=(r',(-1)^{r'}r'',N+S(\mathbf{m}))\in\boldsymbol{\Gamma}$ et $\boldsymbol{\gamma}=(r',r'',N+S(\mathbf{m})$. Par définition de $res_{\mathbf{m}}$, on a $f_{\boldsymbol{\delta}_0}(w_{\emptyset,\beta_1,\beta_2})=\varphi_{\boldsymbol{\delta}}(w_{\mathbf{m},\beta_1,\beta_2})$. De (r',r'') se déduit un quadruplet $\mathbf{a}$ comme en 1.10 et la formule (1) de ce paragraphe nous dit que

$$\varphi_{\boldsymbol{\delta}}(w_{\mathbf{m},\beta_1,\beta_2})=\sum_{\mathbf{I}\in\mathcal{I}}(-1)^{a_1^+|J_1^+|+a_1^-|J_1^-|+a_2^+|J_2^+|+a_2^-|J_2^-|}$$

$$j(\phi^+\otimes\phi^-)_{\boldsymbol{\gamma}}(w_{\mathbf{m}^+(\mathbf{I}),\beta_1^+(\mathbf{I})\cup\beta_2^+(\mathbf{I})}\times w_{\mathbf{m}^-(\mathbf{I}),\beta_1^-(\mathbf{I})\cup\beta_2^-(\mathbf{I})}).$$

De (r',r'') se déduit aussi un couple d'entiers (k^+,k^-) comme en 1.11. Par définition de j, on a $j(\phi^+\otimes\phi^-)_{\boldsymbol{\gamma}}=0$ sauf si

(1) $k^+(k^++1)\leq 2n^+$ et $k^-(k^-+1)\leq 2n^-$.

On en déduit d'abord que $f_{\boldsymbol{\delta}_0}(w_{\emptyset,\beta_1,\beta_2})=0$ si (1) n'est pas vérifiée.

Supposons (1) vérifiée et définissons N^+ et N^- par $k^+(k^++1)+2N^+=2n^+$, $k^-(k^-+1)+2N^-=2n^-$. Notons $\phi^+_{k_+}$ la composante de ϕ^+ dans le composant de $\mathcal{S}_{n^+}$ indexé par (k^+,N^+). On définit de même $\phi^-_{k^-}$. Toujours par définition de j, un terme

$$j(\phi^+\otimes\phi^-)_{\boldsymbol{\gamma}}(w_{\mathbf{m}^+(\mathbf{I}),\beta_1^+(\mathbf{I})\cup\beta_2^+(\mathbf{I})}\times w_{\mathbf{m}^-(\mathbf{I}),\beta_1^-(\mathbf{I})\cup\beta_2^-(\mathbf{I})})$$

est nul sauf si

(2) $S(\mathbf{m}^\zeta(\mathbf{I}))+S(\beta_1^\zeta(\mathbf{I}))+S(\beta_2^\zeta(\mathbf{I}))=N^\zeta$ pour $\zeta=\pm$.

Si ces conditions sont vérifiées, il vaut

$$\phi^+_{k^+}(w_{\mathbf{m}^+(\mathbf{I}),\beta_1^+(\mathbf{I})\cup\beta_2^+(\mathbf{I})})\phi^-_{k^-}(w_{\mathbf{m}^-(\mathbf{I}),\beta_1^-(\mathbf{I})\cup\beta_2^-(\mathbf{I})}).$$

Remarquons que, pour $\mathbf{I}=(I^+,I^-,J_1^+,J_1^-,J_2^+,J_2^-)$, les partitions $\mathbf{m}^+(\mathbf{I})$ et $\mathbf{m}^-(\mathbf{I})$ coïncident avec les partitions $\mathbf{m}[I^+]$ et $\mathbf{m}[I^-]$ définies plus haut. Les $\mathbf{I}$ qui vérifient (2) sont les sextuplets $\mathbf{I}=(I^+,I^-,J_1^+,J_1^-,J_2^+,J_2^-)$ tels que

$$(3)\qquad I^+\sqcup I^-=\{1,...,t\},\ J_1^+\sqcup J_1^-=\{1,...,l(\beta_1)\},\ J_2^+\sqcup J_2^-=\{1,...,l(\beta_2)\},$$

et

$$(4)\qquad k^\zeta(k^\zeta+1)+2S(\mathbf{m}(I^\zeta))+2S(\beta_1^\zeta(\mathbf{I}))+2S(\beta_2^\zeta(\mathbf{I}))=2n^\zeta$$

pour $\zeta=\pm$. Cette dernière condition implique

(5) $k^+(k^++1)\leq 2n^+-2S(\mathbf{m}[I^+])$, $k^-(k^-+1)\leq 2n^--2S(\mathbf{m}[I^-])$.

On note $\mathfrak{I}_0$ l'ensemble des (I^+,I^-) vérifiant la première condition de (3) ainsi que (5). Notons que c'est un sous-ensemble de $\mathfrak{I}$. Pour $(I^+,I^-)\in\mathfrak{I}_0$, notons $\mathcal{J}[I^+,I^-]$ l'ensemble des quadruplets $(J_1^+,J_1^-,J_2^+,J_2^-)$ vérifiant les deux dernières conditions de (3) ainsi que (4). On remplace les notations $\beta_1^+(\mathbf{I})$ etc... par $\beta_1^+(\mathbf{J})$ etc... On obtient

$$(6)\qquad f_{\boldsymbol{\delta}_0}(w_{\emptyset,\beta_1,\beta_2})=\sum_{(I^+,I^-)\in\mathfrak{I}_0}\sum_{\mathbf{J}\in\mathcal{J}[I^+,I^-]}(-1)^{a_1^+|J_1^+|+a_1^-|J_1^-|+a_2^+|J_2^+|+a_2^-|J_2^-|}\phi^+_{k^+}(w_{\mathbf{m}[I^+],\beta_1^+(\mathbf{J})\cup\beta_2^+(\mathbf{J})})$$

$$\phi^-_{k^-}(w_{\mathbf{m}[I^-],\beta_1^-(\mathbf{J})\cup\beta_2^-(\mathbf{J})}).$$

Remarquons que, si (1) n'est pas vérifiée, $\mathfrak{I}_0$ est vide. L'égalité (6) est donc vraie que cette condition (1) soit vérifiée ou pas.

Fixons $(I^+,I^-)\in\mathfrak{I}$ et posons $f[I^+,I^-]=proj_{cusp}(\varphi[I^+,I^-])$. On calcule de la même façon $f[I^+,I^-]_{\boldsymbol{\delta}_0}(w_{\emptyset,\beta_1,\beta_2})$. L'application $res_{\mathbf{m}}$ disparaît. On obtient que $f[I^+,I^-]_{\boldsymbol{\delta}_0}(w_{\emptyset,\beta_1,\beta_2})=0$ sauf si l'analogue de (1) est vérifiée. Mais cette analogue est précisément la condition (5), autrement dit la condition $(I^+,I^-)\in\mathfrak{I}_0$. Si $(I^+,I^-)\in\mathfrak{I}_0$, l'ensemble $\mathcal{I}$ est directement remplacé par $\mathcal{J}[I^+,I^-]$. Le quadruplet $\mathbf{a}$ est inchangé. On obtient

$$(7)\qquad f[I^+,I^-]_{\boldsymbol{\delta}_0}(w_{\emptyset,\beta_1,\beta_2})=\sum_{\mathbf{J}\in\mathcal{J}[I^+,I^-]}(-1)^{a_1^+|J_1^+|+a_1^-|J_1^-|+a_2^+|J_2^+|+a_2^-|J_2^-|}$$

$$\phi^+[\mathbf{m}(I^+)]_{k^+}(w_{\emptyset,\beta_1^+(\mathbf{J})\cup\beta_2^+(\mathbf{J})})\phi^-[\mathbf{m}(I^-)]_{k^-}(w_{\emptyset,\beta_1^-(\mathbf{J})\cup\beta_2^-(\mathbf{J})}).$$

En comparant les formules (4) et (6), on voit que, pour achever la preuve du lemme, il suffit de fixer $(I^+,I^-)\in\mathfrak{I}_0$, $\mathbf{J}\in\mathcal{J}[I^+,I^-]$ et de démontrer que le terme

$$\phi^+_{k^+}(w_{\mathbf{m}[I^+],\beta_1^+(\mathbf{J})\cup\beta_2^+(\mathbf{J})})\phi^-_{k^-}(w_{\mathbf{m}[I^-],\beta_1^-(\mathbf{J})\cup\beta_2^-(\mathbf{J})})$$

de l'expression (6) est égal au terme

$$\phi^+[\mathbf{m}(I^+)]_{k^+}(w_{\emptyset,\beta_1^+(\mathbf{J})\cup\beta_2^+(\mathbf{J})})\phi^-[\mathbf{m}(I^-)]_{k^-}(w_{\emptyset,\beta_1^-(\mathbf{J})\cup\beta_2^-(\mathbf{J})})$$

de l'expression (7). Cela va résulter de deux assertions parallèles, l'une pour les termes affectés d'un exposant $+$, l'autre pour les termes affectés d'un exposant $-$, dont nous n'énoncerons que la première. Soit $\mathbf{m}^+\in\mathcal{P}(\leq N^+)$ et soit $\beta\in\mathcal{P}(N^+-S(\mathbf{m}^+))$. Alors on a l'égalité

$$(8)\qquad \phi^+_{k^+}(w_{\mathbf{m}^+,\beta})=\phi^+[\mathbf{m}^+]_{k^+}(w_{\emptyset,\beta}).$$

Du couple $(k^+,0)$ se déduit un couple (r'^+,r''^+). On pose $\boldsymbol{\delta}_0^+=(r'^+,(-1)^{r'^+}r''^+,N^+-S(\mathbf{m}^+))\in\boldsymbol{\Gamma}_{n^+-S(\mathbf{m}^+)}$. Posons aussi $f^+=proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}^+}(\varphi^+)$. Le calcul du terme $f^+_{\boldsymbol{\delta}_0^+}(w_{\emptyset,\beta,\emptyset})$ est un cas particulier du calcul ci-dessus. Il se simplifie grandement car les composantes affectées d'un exposant $-$ disparaissent, ainsi que le β_2. L'analogue de l'ensemble $\mathbf{I}$ est réduit à l'élément $(I^+,I^-,J_1^+,J_1^-,J_2^+,J_2^-)$ tel que $I^+=\{1,...,l(\mathbf{m}^+)\}$, $J_1^+=\{1,...,l(\beta)\}$, $I^-=J_1^-=J_2^+=J_2^-=\emptyset$. D'après la recette de 1.11, on a $r''^+\geq 0$ donc $a_1^+=0$ d'après la définition de 1.10. Comme analogue de la relation (6), on obtient simplement

$$f^+_{\boldsymbol{\delta}_0^+}(w_{\emptyset,\beta,\emptyset})=\phi^+_{k^+}(w_{\mathbf{m}^+,\beta}).$$

Posons $f_0^+=proj_{cusp}(\varphi^+[\mathbf{m}^+])$. On calcule de même

$$f^+_{0,\boldsymbol{\delta}_0^+}(w_{\emptyset,\beta,\emptyset})=\phi^+[\mathbf{m}^+]_{k^+}(w_{\emptyset,\beta}).$$

L'hypothèse de l'énoncé est que $f^+=f_0^+$. Avec les égalités ci-dessus, cela entraîne (8), ce qui achève la démonstration. $\square$

2 Endoscopie ; l'involution $\mathcal{F}$

2.1 Endoscopie

Pour $\pi \in \mathbb{C}[Irr_{tunip}] = \mathbb{C}[Irr_{tunip,iso}] \oplus \mathbb{C}[Irr_{tunip,an}]$ et $\sharp = iso$ ou an, notons $\pi_\sharp$ la composante de π dans $\mathbb{C}[Irr_{tunip,\sharp}]$.

On sait définir la notion de distribution stable sur $G_{iso}(F)$. Un élément $\pi \in \mathbb{C}[Irr_{tunip,iso}]$ est dit stable si son caractère-distribution (c'est-à-dire la forme linéaire $f \mapsto trace(\pi(f))$) est stable.

Pour travailler commodément avec nos deux groupes G_{iso} et G_{an}, il convient de modifier la définition usuelle des données endoscopiques. Nous n'entrerons pas dans les détails théoriques. En pratique, une donnée endoscopique elliptique est déterminée ici par la classe de conjugaison dans $Sp(2n;\mathbb{C})$ d'un élément h de ce groupe tel que $h^2 = 1$. En notant $2n_1$ la multiplicité de 1 parmi les valeurs propres de h et $2n_2$ celle de -1, la donnée endoscopique est aussi bien associée au couple $(n_1, n_2) \in D(n)$ (il serait plus logique de noter n_{-1} au lieu de n_2 mais cela compliquerait l'écriture). Le groupe endoscopique associé à la donnée est $H = G_{n_1,iso} \times G_{n_2,iso}$. Pour des groupes spéciaux orthogonaux impairs, il y a un choix canonique de facteurs de transfert, cf. [10] 1.10. On doit faire attention au point suivant. Un tel facteur est une fonction $\Delta_{h,\sharp}$ définie presque partout sur $H(F) \times G_\sharp(F)$. Si on multiplie h par -1, on remplace H par le groupe isomorphe $H' = G_{n_2,iso} \times G_{n_1,iso}$. Notons ι l'isomorphisme de H sur H' qui permute les deux facteurs. Pour $h \in H(F)$ et $g \in G_\sharp(F)$, on a alors

- si $\sharp = iso$, $\Delta_{-h,iso}(\iota(h), g) = \Delta_{h,iso}(h, g)$;
- si $\sharp = an$, $\Delta_{-h,an}(\iota(h), g) = -\Delta_{h,an}(h, g)$.

En tout cas, on dispose d'un tranfert qui envoie une combinaison linéaire stable de représentations tempérées de $H(F)$ sur une combinaison linéaire de représentations tempérées de $G_\sharp(F)$. Notons-le simplement $transfert_{h,\sharp}$.

En particulier, pour $h = 1$, on a $H = G_{iso}$. Evidemment, le transfert de H vers G_{iso} est l'identité. Mais il y a aussi un transfert de $H = G_{iso}$ vers G_{an}.

Introduisons l'automorphisme extérieur $\theta : g \mapsto {}^t g^{-1}$ de $GL(2n)$, le groupe $GL(2n) \rtimes \{1, \theta\}$ et sa composante connexe $\tilde{GL}(2n) = GL(2n)\theta$. Par endoscopie tordue, il y a aussi une notion de transfert qui envoie une combinaison linéaire stable de représentations tempérées de $G_{iso}(F)$ sur une combinaison linéaire de représentations tempérées tordues de $\tilde{GL}(2n; F)$.

Introduisons l'ensemble $\mathfrak{Endo}_{tunip}$ formé des classes de conjugaison de triplets (λ, s, h) tels que $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$, $s, h \in Z(\lambda)$, s et h commutent entre eux ($sh = hs$), s est compact et $h^2 = 1$. La notion de conjugaison est la conjugaison de s et h par un même élément de $Z(\lambda)$. Pour un tel triplet, h appartient à $Z(\lambda, s)$, notons $\mathbf{h}$ son image dans $\mathbf{Z}(\lambda, s)$. Pour $\epsilon \in \mathbf{Z}(\lambda, s)^\vee$, on peut évaluer ϵ au point $\mathbf{h}$. On note simplement $\epsilon(h)$ cette valeur. On pose

$$\Pi(\lambda, s, h) = \sum_{\epsilon \in \mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee} \pi(\lambda, s, \epsilon)\epsilon(h).$$

Par linéarité, on obtient une application

$$\Pi : \mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{tunip}] \to \mathbb{C}[Irr_{tunip}].$$

Notons $\mathfrak{St}_{tunip}$ le sous-ensemble des $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{tunip}$ tels que $h = 1$. Les résultats principaux de [6] sont que pour $(\lambda, s, 1) \in \mathfrak{St}_{tunip}$, $\Pi_{iso}(\lambda, s, 1)$ est stable et $-\Pi_{an}(\lambda, s, 1)$ est son transfert à la forme non déployée G_{an} ;

tout élément de $\pi \in \mathbb{C}[Irr_{tunip}]$ tel que π_{iso} soit stable et que $-\pi_{an}$ soit le transfert de π_{iso} est combinaison linéaire des $\Pi(\lambda, s, 1)$ quand $(\lambda, s, 1)$ parcourt $\mathfrak{St}_{tunip}$.

Pour tout entier $m \geq 1$, notons st_m la représentation de Steinberg de $GL(m; F)$. Pour une partition $\mu = (\mu_1 \geq ... \geq \mu_t > 0)$, notons st_μ la représentation de $GL(S(\mu); F)$ qui est induite, en un sens évident, de $st_{\mu_1} \otimes ... \otimes st_{\mu_t}$. Soit $(\lambda, s, 1) \in \mathfrak{St}_{tunip}$. Décomposons λ en

$$\lambda^+ \cup \lambda^- \cup \bigcup_{j \in J} (\lambda_j \cup \lambda_j)$$

selon les valeurs propres de s, cf. 1.3. Pour tout $j \in J$, notons χ_j l'unique caractère non ramifié de $F^\times$ tel que $\chi_j(\varpi) = s_j$. Notons χ^- l'unique caractère non ramifié de $F^\times$ tel que $\chi^-(\varpi) = -1$. Notons $\Pi^{GL}(\lambda, s)$ l'induite de $st_{\lambda^+} \otimes (\chi^- \circ det) st_{\lambda^-} \otimes \otimes_{j \in J}((\chi_j \circ det) st_{\lambda_j}) \otimes (\chi_j^{-1} \circ det) st_{\lambda_j}))$. Cette représentation se prolonge en une représentation tordue $\tilde{\Pi}^{GL}(\lambda, s)$ de $\tilde{GL}(2n; F)$ (il y a différents prolongements possibles, il faut normaliser le prolongement de façon adéquate). Le résultat principal de [11] est que le transfert par endoscopie tordue de $\Pi_{iso}(\lambda, s, 1)$ à $GL(2n; F)$ est $\tilde{\Pi}^{GL}(\lambda, s)$.

Remarque. Ceci n'est pas tout-à-fait exact. Dans [11], on n'a énoncé le résultat que dans le cas où $s^2 = 1$. Mais le résultat général en résulte par induction.

Ces propriétés caractérisent entièrement $\Pi_{iso}(\lambda, s, 1)$ et $\Pi_{an}(\lambda, s, 1)$.

Soit maintenant $h \in Sp(2n; \mathbb{C})$ un élément tel que $h^2 = 1$. Il détermine une donnée endoscopique elliptique dont le groupe est $G_{n_1,iso} \times G_{n_2,iso}$ avec les notations ci-dessus. Soient $(\lambda_1, s_1, 1) \in \mathfrak{St}_{n_1,tunip}$ et $(\lambda_2, s_2, 1) \in \mathfrak{St}_{n_2,tunip}$. Pour $j = 1, 2$, λ_j paramètre un homomorphisme $\rho_j : SL(2; \mathbb{C}) \to Sp(2n_j; \mathbb{C})$ et s_j est un élément du commutant de l'image de ρ_j. Le groupe $Sp(2n_1; \mathbb{C}) \times Sp(2n_2; \mathbb{C})$ est le commutant de h dans $Sp(2n; \mathbb{C})$ et est donc plongé dans ce groupe. L'homomorphisme $\rho_1 \times \rho_2$ devient un homomorphisme ρ de $SL(2; \mathbb{C})$ dans $Sp(2n; \mathbb{C})$. Evidemment, ρ est paramétré par $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. L'élément (s_1, s_2) devient un élément s du commutant de l'image de ρ, c'est-à-dire de $Z(\lambda)$. On a aussi $h \in Z(\lambda)$ par construction. Les éléments s et h commutent. On conclut que (λ, s, h) appartient à $\mathfrak{Endo}_{tunip}$.

Théorème. *Sous ces hypothèses, on a les égalités*

$transfert_{h,iso}(\Pi_{iso}(\lambda_1, s_1, 1) \otimes \Pi_{iso}(\lambda_2, s_2, 1)) = \Pi_{iso}(\lambda, s, h)$;

$transfert_{h,an}(\Pi_{iso}(\lambda_1, s_1, 1) \otimes \Pi_{iso}(\lambda_2, s_2, 1)) = -\Pi_{an}(\lambda, s, h)$.

A l'aide d'une transformation de Fourier sur $\mathbf{Z}(\lambda, s)$, les représentations $\pi(\lambda, s, \epsilon)$ pour $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{tunip}$, s'expriment comme combinaisons linéaires de représentations $\Pi(\lambda, s, h)$. Alors, les propriétés de l'énoncé ci-dessus caractérisent entièrement nos représentations $\pi(\lambda, s, \epsilon)$. Le théorème sera démontré dans l'article suivant.

Remarque. Pour définir un transfert endoscopique entre fonctions, il est nécessaire de fixer des mesures de Haar sur tous les groupes considérés. Mais le transfert dual entre représentations est indépendant de ces choix.

2.2 Le cas "quadratique-unipotent"

Notons $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ le sous-ensemble des $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{tunip}$ tels que $s^2 = 1$. Soit $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ et soit $i \in Jord(\lambda)$. On note s_i et h_i les composantes de s et h

dans la composante $Sp(mult_\lambda(i);\mathbb{C})$ ou $O(mult_\lambda(i);\mathbb{C})$ du groupe $Z(\lambda)$. Cette composante agit naturellement dans un espace $\mathbb{C}^{mult_\lambda(i)}$ et s_i et h_i sont des automorphismes de cet espace, de carrés 1 et qui commutent. Ainsi, l'espace se décompose en sous-espaces propres communs pour s_i et h_i. Pour $\zeta,\xi\in\{\pm\}\simeq\{\pm1\}$, on note $m^{\zeta\xi}_{s,h}(i)$ la dimension du sous-espace propre où s_i agit par ζ et h_i agit par ξ. D'autre part, on a vu qu'à s est associée une décomposition $\lambda=\lambda^+\cup\lambda^-$. On calcule alors

$$(1)\qquad \Pi(\lambda,s,h)=\sum_{\epsilon^+,\epsilon^-}\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)\left(\prod_{i\in Jord_{bp}(\lambda^+)}\epsilon^+(i)^{m^{+-}_{s,h}(i)}\right)\left(\prod_{i\in Jord_{bp}(\lambda^-)}\epsilon^-(i)^{m^{--}_{s,h}(i)}\right),$$

où (ϵ^+,ϵ^-) parcourt l'ensemble $\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda^+)}\times\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda^-)}$.

Pour (λ,s,h) et $(\bar\lambda,\bar s,\bar h)\in\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$, disons que ces deux triplets sont *Res*-équivalents si et seulement si $\lambda=\bar\lambda$ et $m^{\zeta\xi}_{s,h}(i)\equiv m^{\zeta\xi}_{\bar s,\bar h}(i)\ mod\ 2\mathbb{Z}$ pour tout $i\in Jord(\lambda)$ et tous $\zeta,\xi=\pm$. Notons $\mathfrak{K}$ le sous-espace de $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip-quad}]$ engendré par les différences $(\lambda,s,h)-(\lambda',s',h')$ de deux éléments *Res*-équivalents.

Lemme. *L'application* $Res\circ\Pi:\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip-quad}]\to\mathcal{R}^{par,glob}$ *est surjective. Son noyau est l'espace* $\mathfrak{K}$.

Remarque. En vertu du lemme 1.7, l'énoncé reste vrai si l'on y remplace l'application $Res\circ\Pi$ par $Res\circ D\circ\Pi$.

Preuve. Pour (λ,s,h) et $(\bar\lambda,\bar s,\bar h)\in\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$, disons que ces deux triplets sont liés si, quitte à les permuter, les conditions suivantes sont vérifiées :

$\bar\lambda=\lambda$;

il existe $i\in Jord(\lambda)$ et il existe $\zeta,\xi,\bar\zeta,\bar\xi=\pm$, avec $(\zeta,\xi)\neq(\bar\zeta,\bar\xi)$, de sorte que $m^{\zeta,\xi}_{\bar s,\bar h}(i)=m^{\zeta,\xi}_{s,h}(i)-2$, $m^{\bar\zeta\bar\xi}_{\bar s,\bar h}(i)=m^{\bar\zeta\bar\xi}_{s,h}(i)+2$ et $m^{\zeta'\xi'}_{\bar s,\bar h}(i')=m^{\zeta'\xi'}_{s,h}(i')$ pour tout triplet (i',ζ',ξ') différent de (i,ζ,ξ) et $(i,\bar\zeta,\bar\xi)$. Considérons deux tels triplets liés (et abandonnons la notation $\bar\lambda$ inutile puisque $\bar\lambda=\lambda$). Montrons que

$$(2)\qquad Res\circ\Pi(\lambda,\bar s,\bar h)=Res\circ\Pi(\lambda,s,h).$$

On utilise les données i, ζ, ξ, $\bar\zeta$, $\bar\xi$ fournies par la définition ci-dessus. Supposons d'abord $\bar\zeta=\zeta$. Les valeurs propres des termes s et $\bar s$ sont alors les mêmes et on peut supposer $\bar s=s$. La décomposition $\lambda=\lambda^+\cup\lambda^-$ est la même pour nos deux triplets. On utilise la formule (1) pour chacun de nos triplets. Les seuls termes qui changent d'un triplet à l'autre sont les exposants des termes $\epsilon^+(i)$ et $\epsilon^-(i)$. Mais ces exposants $m^{+-}_{s,h}(i)$ etc... n'interviennent que par leur parité et, par définition, celle-ci ne change pas quand on remplace h par $\bar h$. L'égalité (2) en résulte. Supposons maintenant que $\bar\zeta\neq\zeta$. Pour simplifier la notation, supposons $\zeta=+$ et $\bar\zeta=-$. Notons $\lambda=\lambda^+\cup\lambda^-$ la décomposition associée à s et $\lambda=\bar\lambda^+\cup\bar\lambda^-$ celle associée à $\bar s$. On a $\lambda^+=\bar\lambda^+\cup\{i,i\}$ et $\bar\lambda^-=\lambda^-\cup\{i,i\}$. Il y a des inclusions naturelles $Jord_{bp}(\bar\lambda^+)\subset Jord_{bp}(\lambda^+)$ et $Jord_{bp}(\lambda^-)\subset Jord_{bp}(\bar\lambda^-)$. Pour $(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)\in\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\bar\lambda^+)}\times\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda^-)}$, posons

$$P^i_{s,h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)=\left(\prod_{i'\in Jord_{bp}(\bar\lambda^+),i'\neq i}\bar\epsilon^+(i')^{m^{+-}_{s,h}(i')}\right)\left(\prod_{i'\in Jord_{bp}(\lambda^-),i'\neq i}\epsilon^-(i')^{m^{--}_{s,h}(i')}\right),$$

$$R_{s,h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)=\sum_{\epsilon^+}\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-)\epsilon^+(i)^{m^{+-}_{s,h}(i)}\epsilon^-(i)^{m^{--}_{s,h}(i)},$$

où ϵ^+ parcourt les éléments de $Jord_{bp}(\lambda^+)$ qui prolongent $\bar\epsilon^+$ (il y en a 1 ou 2) et, par convention, $\epsilon^+(i)=1$ si $i\not\in Jord_{bp}(\lambda^+)$ et $\epsilon^-(i)=1$ si $i\not\in Jord_{bp}(\lambda^-)$. On définit $P^i_{\bar s,\bar h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)$ de la même façon que ci-dessus et on pose

$$R_{\bar s,\bar h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)=\sum_{\bar\epsilon^-}\pi(\bar\lambda^+,\bar\epsilon^+,\bar\lambda^-,\bar\epsilon^-)\bar\epsilon^+(i)^{m^{+-}_{\bar s,\bar h}(i)}\bar\epsilon^-(i)^{m^{--}_{\bar s,\bar h}(i)},$$

où $\bar\epsilon^-$ parcourt les éléments de $Jord_{bp}(\bar\lambda^-)$ qui prolongent ϵ^- (il y en a 1 ou 2) et avec la même convention que ci-dessus. On peut récrire (1) sous la forme

$$\Pi(\lambda,s,h)=\sum_{\bar\epsilon^+,\epsilon^-}P^i_{s,h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)R_{s,h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-),$$

et on a la formule similaire

$$\Pi(\lambda,\bar s,\bar h)=\sum_{\bar\epsilon^+,\epsilon^-}P^i_{\bar s,\bar h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)R_{\bar s,\bar h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-).$$

Il nous suffit de fixer $(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)$ et de démontrer l'égalité

$$(3)\qquad P^i_{s,h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)Res(R_{s,h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-))=P^i_{\bar s,\bar h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)Res(R_{\bar s,\bar h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)).$$

Il est clair que $P^i_{s,h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)=P^i_{\bar s,\bar h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)$: pour les $i'\in Jord_{bp}(\lambda)$ tels que $i'\neq i$, les multiplicités ne changent pas quand on remplace s,h par $\bar s,\bar h$. Dans la définition de $R_{s,h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)$, on peut remplacer le terme $\epsilon^+(i)^{m^{+-}_{s,h}(i)}$ par $\bar\epsilon^+(i)^{m^{+-}_{\bar s,\bar h}(i)}$. En effet, si $i\in Jord_{bp}(\bar\lambda^+)$, il n'y a qu'un seul prolongement ϵ^+ de $\bar\epsilon^+$, pour lequel $\epsilon^+(i)=\bar\epsilon^+(i)$, et les exposants $m^{+-}_{s,h}(i)$ et $m^{+-}_{\bar s,\bar h}(i)$ sont de même parité. Si $i\not\in Jord_{bp}(\bar\lambda^+)$, on a $\bar\epsilon^+(i)=1$ par convention. Si i est impair, on a aussi $\epsilon^+(i)=1$ par convention. Si i est pair, l'hypothèse $i\not\in Jord_{bp}(\bar\lambda^+)$ entraîne $m^{+-}_{\bar s,\bar h}(i)=0$, donc $m^{+-}_{s,h}(i)$ est pair et $\epsilon^+(i)^{m^{+-}_{s,h}(i)}=1$ pour chacun des deux prolongements ϵ^+. On obtient

$$R_{s,h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)=\bar\epsilon^+(i)^{m^{+-}_{\bar s,\bar h}(i)}\epsilon^-(i)^{m^{--}_{s,h}(i)}\sum_{\epsilon^+}\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-).$$

De même

$$R_{\bar s,\bar h}(\bar\epsilon^+,\epsilon^-)=\bar\epsilon^+(i)^{m^{+-}_{\bar s,\bar h}(i)}\epsilon^-(i)^{m^{--}_{s,h}(i)}\sum_{\bar\epsilon^-}\pi(\bar\lambda^+,\bar\epsilon^+,\bar\lambda^-,\bar\epsilon^-).$$

Les premiers facteurs sont les mêmes et le lemme 1.6 affirme précisément que

$$Res(\sum_{\epsilon^+}\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-))=Res(\sum_{\bar\epsilon^-}\pi(\bar\lambda^+,\bar\epsilon^+,\bar\lambda^-,\bar\epsilon^-)).$$

Cela démontre (3), d'où (2).

Pour deux éléments (λ,s,h) et $(\bar\lambda,\bar s,\bar h)$ de $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ qui sont Res-équivalents, on voit qu'il existe une suite $(\lambda,s,h)=(\lambda_1,s_1,h_1)$, (λ_2,s_2,h_2),...,$(\lambda_k,s_k,h_k)=(\bar\lambda,\bar s,\bar h)$ d'éléments de $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ de sorte que, pour $j=1,...,k-1$, (λ_j,s_j,h_j) et $(\lambda_{j+1},s_{j+1},h_{j+1})$ soient liés. En appliquant (2) à chacun de ces couples, on obtient

$$Res\circ\Pi(\lambda,s,h)=Res\circ\Pi(\bar\lambda,\bar s,\bar h).$$

Cela démontre que $\mathfrak{K}$ est contenu dans le noyau de $Res\circ\Pi$.

Notons $\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}$ le sous-ensemble des $(\lambda,s,h)\in\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ tels que, pour tout $i\in Jord(\lambda)$, on ait $m^{+-}_{s,h}(i)\leq 1$, $m^{-+}_{s,h}(i)\leq 1$, $m^{--}_{s,h}(i)\leq 1$. Il est clair que tout élément de $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ est Res-équivalent à un unique élément de $\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}$. En conséquence, on a l'égalité

$$\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip-quad}]=\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}]\oplus\mathfrak{K}.$$

Pour achever la preuve du lemme, il suffit de prouver que

(4) la restriction de $Res\circ\Pi$ à $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}]$ est un isomorphisme de cet espace sur $\mathcal{R}^{par,glob}$.

Notons $\mathfrak{N}$ l'ensemble des quadruplets $(\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m})$ tels que

$\lambda\in\mathcal{P}^{symp}(2n)$;

$\tilde{\gamma}$, m et $\tilde{m}$ sont des éléments de $\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$;

pour $i\in Jord_{bp}(\lambda)$ tel que $mult_{\lambda}(i)=1$, on a $\tilde{\gamma}(i)=1$;

pour $i\in Jord_{bp}(\lambda)$ tel que $mult_{\lambda}(i)=2$, on a $(\tilde{\gamma}(i),m(i),\tilde{m}(i))\neq(-1,1,1)$.

Dans [6] 6.7, on a associé à tout tel quadruplet un élément $rea(\psi_{\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m}})\in\mathbb{C}[Irr_{unip-quad}]$ (à ceci près que, dans [6], la partition λ est remplacée par l'orbite unipotente symplectique $\mathcal{O}$ qu'elle paramètre). D'après [6] 6.9, quand $(\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m})$ décrit $\mathfrak{N}$, les éléments $rea(\psi_{\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m}})$ sont linéairement indépendants. Notons $\mathbb{C}[Irr_{unip-quad}]^0$ le sous-espace de $\mathbb{C}[Irr_{unip-quad}]$ engendré par ces éléments. La proposition 6.21 de [6] dit que la restriction de $Res\circ D$ à ce sous-espace est un isomorphisme de celui-ci sur $\mathcal{R}^{par,glob}$. D'après la remarque suivant l'énoncé ci-dessus, cela revient à dire que la restriction de Res à ce sous-espace est aussi un isomorphisme de celui-ci sur $\mathcal{R}^{par,glob}$. Pour prouver (4), il suffit donc de définir une bijection $\iota:\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}\to\mathfrak{N}$ de telle sorte que, pour tout $(\lambda,s,h)\in\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}$, on ait l'égalité

$$(5)\qquad Res\circ\Pi(\lambda,s,h)=Res(rea(\psi_{\lambda',\tilde{\gamma},m,\tilde{m}})),$$

où $(\lambda',\tilde{\gamma},m,\tilde{m})=\iota(\lambda,s,h)$. Construisons cette bijection. Soit $(\lambda,s,h)\in\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}$. On définit un triplet $(\tilde{\gamma},m,\tilde{m})$ de la façon suivante. Soit $i\in Jord_{bp}(\lambda)$. On pose

$$m(i)=(-1)^{m^{-+}_{s,h}(i)+m^{--}_{s,h}(i)},\ \tilde{m}(i)=(-1)^{m^{+-}_{s,h}(i)+m^{--}_{s,h}(i)}.$$

Si $mult_{\lambda}(i)=1$, on pose $\tilde{\gamma}(i)=1$. Si $mult_{\lambda}(i)\geq 2$, on pose $\tilde{\gamma}(i)=(-1)^{m^{--}_{s,h}(i)}$. On vérifie que le quadruplet $(\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m})$ appartient à $\mathfrak{N}$. On pose $\iota(\lambda,s,h)=(\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m})$. Il est facile de vérifier que l'application ι ainsi définie est une bijection de $\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}$ sur $\mathfrak{N}$. On doit prouver la relation (5). Utilisons les notations de cette relation (on a $\lambda'=\lambda$ par définition de ι). Le lemme 6.7 de [6] calcule le terme $rea(\psi_{\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m}})$. Avec nos présentes notations, ce lemme dit que

$$(6)\qquad rea(\psi_{\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m}})=2^{-|\mathcal{E}|}\sum_{(s',h')\in\mathcal{E}}\Pi(\lambda,s',h'),$$

où $\mathcal{E}$ est un certain ensemble de paires (s',h') telles que (λ,s',h') appartienne à $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$. L'énoncé de ce lemme décrit l'ensemble $\mathcal{E}$. En utilisant cette description et la définition de ι donnée ci-dessus, on s'aperçoit que l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas vide et que, pour tout $(s',h')\in\mathcal{E}$, l'élément (λ,s',h') est Res-équivalent à (λ,s,h). Puisque deux éléments Res-équivalents ont même image par $Res\circ\Pi$, l'égalité (5) résulte de (6). Cela achève la démonstration. $\square$

2.3 Définition de l'involution

On définit une involution $\mathcal{F}$ de l'ensemble $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ par $\mathcal{F}(\lambda,s,h)=(\lambda,h,s)$ pour tout $(\lambda,s,h)\in\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$. Il résulte de la définition de la Res-équivalence que, si deux éléments de $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ sont Res-équivalents, leurs images par $\mathcal{F}$ sont encore Res-équivalents. On prolonge l'involution $\mathcal{F}$ en une involution linéaire de $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip-quad}]$, encore notée $\mathcal{F}$. La propriété précédente entraîne que $\mathcal{F}$ conserve le sous-espace $\mathfrak{K}$. D'après le lemme 2.2 et la remarque qui le suit, $\mathcal{F}$ se descend via l'application $Res\circ D\circ\Pi$ en une involution de $\mathcal{R}^{par,glob}$, notons-la $\mathfrak{F}^{par}$. On a donc par définition l'égalité $\mathfrak{F}^{par}\circ Res\circ D\circ\Pi=Res\circ D\circ\Pi\circ\mathcal{F}$. On a aussi défini au paragraphe 1.9 une involution $\mathcal{F}^{par}$ de l'espace $\mathcal{R}^{par,glob}$. En admettant le théorème 2.1, nous démontrerons en 2.7 que les deux involutions $\mathcal{F}^{par}$ et $\mathfrak{F}^{par}$ sont égales. Pour le moment, contentons-nous du lemme inconditionnel suivant.

Lemme. *On a l'égalité* $proj_{cusp}\circ\mathfrak{F}^{par}=\mathcal{F}^{par}\circ proj_{cusp}$.

Preuve. En [6] section 6, on a défini une involution de $\mathcal{R}^{par,glob}$ similaire à $\mathfrak{F}^{par}$, par une construction légèrement différente. Notons-la $\mathfrak{F}^{par}_{MW}$. Montrons que

(1) on a l'égalité $\mathfrak{F}^{par}=\mathfrak{F}^{par}_{MW}$.

D'après la remarque suivant l'énoncé du lemme 2.2, on peut glisser des involutions D dans les assertions (4) et (5) de la preuve de ce lemme. Grâce à cette assertion (4), il suffit de prouver l'égalité

$$(2)\qquad \mathfrak{F}^{par}\circ Res\circ D\circ\Pi(\lambda,s,h)=\mathfrak{F}^{par}_{MW}\circ Res\circ D\circ\Pi(\lambda,s,h)$$

pour tout $(\lambda,s,h)\in\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}$. Posons $\iota(\lambda,s,h)=(\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m})$. D'après 2.2(5), on a

$$\mathfrak{F}^{par}_{MW}\circ Res\circ D\circ\Pi(\lambda,s,h)=\mathfrak{F}^{par}_{MW}\circ Res\circ D(rea(\psi_{\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m}})).$$

Par définition de $\mathfrak{F}^{par}_{MW}$, cf. [6] 6.4, le membre de droite ci-dessus est égal à

$$Res\circ D(rea(\psi_{\lambda,\tilde{\gamma},\tilde{m},m})).$$

Mais il résulte de la définition de la bijection ι (cf. 2.2) que $(\lambda,\tilde{\gamma},\tilde{m},m)=\iota(\lambda,h,s)=\iota\circ\mathcal{F}(\lambda,s,h)$ (remarquons que (λ,h,s) appartient encore à $\mathfrak{Endo}^{red}_{unip-quad}$). En utilisant de nouveau 2.2(5), on obtient l'égalité

$$\mathfrak{F}^{par}_{MW}\circ Res\circ D(rea(\psi_{\lambda,\tilde{\gamma},m,\tilde{m}}))=Res\circ D\circ\Pi\circ\mathcal{F}(\lambda,s,h).$$

Le membre de droite ci-dessus est égal au membre de gauche de (2) par définition de $\mathfrak{F}^{par}$. Cela démontre (2), d'où (1).

Le théorème 6.26 de [6] affirme que l'égalité de l'énoncé est vraie si l'on y remplace $\mathfrak{F}^{par}$ par $\mathfrak{F}^{par}_{MW}$. L'égalité de ces deux involutions entraîne donc l'énoncé. $\square$

2.4 Le cas elliptique

Notons $\mathfrak{Endo}_{unip,disc}$ le sous-ensemble des $(\lambda,s,h)\in\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ tels que le commutant commun de s et h dans $Z(\lambda)$ (c'est-à-dire le groupe des $x\in Z(\lambda)$ tels que $sx=xs$ et $hx=xh$) soit fini. Ce commutant commun se calcule facilement. C'est le produit des groupes $Sp(m^{\zeta\xi}_{s,h}(i);\mathbb{C})$ pour les $i\in Jord(\lambda)$ impairs et les $\zeta,\xi=\pm$ et des groupes

$O(m_{s,h}^{\zeta\xi}(i);\mathbb{C})$ pour les $i \in Jord_{bp}(\lambda)$ et les $\zeta, \xi = \pm$. Que ce groupe soit fini est équivalent à ce que $m_{s,h}^{\zeta\xi}(i) \leq 1$ pour tous i, ζ, ξ. Dans le cas où i est impair, $m_{s,h}^{\zeta\xi}(i)$ est forcément pair, la condition équivaut donc à $m_{s,h}^{\zeta\xi}(i) = 0$. Puisque $mult_\lambda(i)$ est la somme des $m_{s,h}^{\zeta\xi}(i)$ sur les ζ, ξ, cela entraîne que λ ne contient que des termes pairs.

On vérifie facilement que l'image par l'application Π de l'espace $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip,disc}]$ est égal à $\mathbb{C}[Ell_{unip}]$. On a une suite d'applications linéaires

$$\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip,disc}] \stackrel{\Pi}{\to} \mathbb{C}[Ell_{unip}] \stackrel{Res}{\to} \mathcal{R}^{par,glob} \stackrel{proj_{cusp}}{\to} \mathcal{R}^{par}_{cusp}.$$

L'ensemble $\mathfrak{Endo}_{unip,disc}$ est inclus dans l'ensemble $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}^{red}$ introduit dans la démonstration précédente. Comme on l'a vu alors, l'application $Res \circ \Pi$ est injective sur $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip-quad}^{red}]$. Il en résulte que la première application de la suite ci-dessus est bijective. Comme on l'a dit en 1.5, la composée $proj_{cusp} \circ Res$ des deux dernières applications est bijective. La suite fournit donc un isomorphisme de $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip,disc}]$ sur $\mathcal{R}^{par}_{cusp}$.

L'involution $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ préserve le sous-ensemble $\mathfrak{Endo}_{unip,disc}$. Donc l'involution $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip-quad}]$ préserve le sous-espace $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip,disc}]$. Via la bijection ci-dessus, on peut la considérer comme une involution de $\mathbb{C}[Ell_{unip}]$. Le lemme 2.3 entraîne que, pour $\pi \in \mathbb{C}[Ell_{unip}]$, on a l'égalité

$$(1) \qquad \mathcal{F}^{par} \circ proj_{cusp} \circ Res \circ D(\pi) = proj_{cusp} \circ Res \circ D \circ \mathcal{F}(\pi).$$

Notons $\mathfrak{St}_{unip-quad}$ le sous-ensemble des $(\lambda, s, 1) \in \mathfrak{St}_{tunip}$ tels que $s^2 = 1$. Pour $(\lambda, s, 1) \in \mathfrak{St}_{unip-quad}$, s détermine une décomposition $\lambda = \lambda^+ \cup \lambda^-$ et le couple (λ^+, λ^-) appartient à $\mathcal{P}_2^{symp}(2n)$. L'application $(\lambda, s, 1) \mapsto (\lambda^+, \lambda^-)$ est une bijection de $\mathfrak{St}_{unip-quad}$ sur $\mathcal{P}_2^{symp}(2n)$.

Notation. Pour $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathcal{P}_2^{symp}(2n)$, on note $\Pi^{st}(\lambda^+, \lambda^-)$ la représentation $\Pi(\lambda, s, 1)$ où $(\lambda, s, 1)$ correspond à (λ^+, λ^-).

Pour tout entier pair $N \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}^{symp,disc}(N)$ l'ensemble des partitions symplectiques de N qui ne contiennent que des termes pairs, lesquels interviennent avec multiplicité au plus 1. Notons $\mathfrak{St}_{unip,disc}$ l'intersection de $\mathfrak{St}_{unip-quad}$ et de $\mathfrak{Endo}_{unip,disc}$. L'application $(\lambda, s, 1) \mapsto (\lambda^+, \lambda^-)$ se restreint en une bijection de $\mathfrak{St}_{unip,disc}$ sur $\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n)$. Pour $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n)$ et pour $(\epsilon^+, \epsilon^-) \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda^+)} \times \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda^+)}$, la représentation $\pi(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$ est de la série discrète. D'après [6] proposition 8.2, on a

tout élément $\pi \in \mathbb{C}[Ell_{unip}]$ tel que π_{iso} soit stable et que $-\pi_{an}$ soit le transfert de π_{iso} est combinaison linéaire des $\Pi^{st}(\lambda^+, \lambda^-)$ quand (λ^+, λ^-) décrit $\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n)$.

2.5 Modules de Jacquet des représentations stables

Soit $\mathbf{m} = (m_1 \geq ... \geq m_t > 0) \in \mathcal{P}(\leq n)$. Posons $n_0 = n - S(\mathbf{m})$. Pour $\sharp = iso$ ou an, la partition $\mathbf{m}$ détermine un sous-groupe parabolique standard $P_\sharp$ (standard voulant dire qu'il contient le groupe P_{min} défini en 1.7) et sa composante de Levi standard

$$M_\sharp = GL(m_1) \times ... \times GL(m_t) \times G_{n_0,\sharp}.$$

Dans le cas où $\sharp = an$ et $n_0 = 0$, il n'y a pas de tels sous-groupes et on les élimine de ce qui suit. De même que l'on a considéré simultanément les deux groupes G_{iso} et G_{an}, on considère simultanément les groupes M_{iso} et M_{an}. Les notions introduites précédemment pour les groupes G_{iso} et G_{an} se généralisent aux groupes M_{iso} et M_{an}. On ajoute des indices ou exposants M aux objets définis pour ces groupes. En particulier, on définit l'ensemble $Irr_{unip,M_\sharp}$ des (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles de réduction unipotente de $M_\sharp(F)$ et on note $Irr_{unip,M}$ la réunion disjointe de $Irr_{unip,M_{iso}}$ et $Irr_{unip,M_{an}}$. On définit aussi le sous-ensemble $Ell_{unip,M} \subset \mathbb{C}[Irr_{unip,M}]$ des représentations elliptiques. Un élément de $Ell_{unip,M}$ est de la forme

$$(1) \qquad st_{m_1}(|.|_F^{z_1} \circ det) \otimes ... \otimes st_{m_t}(|.|_F^{z_t} \circ det) \otimes \sigma_0,$$

où $z_1, ..., z_t$ sont des nombres complexes, $\sigma_0 \in Ell_{unip,n_0}$. On rappelle que, pour tout $m \geq 1$, st_m est la représentation de Steinberg de $GL(m; F)$. On sait que tout élément de $\mathbb{C}[Irr_{unip,M}]$ est somme d'un élément bien déterminé de $\mathbb{C}[Ell_{unip,M}]$ et d'une combinaison linéaire d'induites à partir de sous-groupes paraboliques propres.

En identifiant un élément de $\mathbb{C}[Irr_{unip,M}]$ à sa distribution trace (ou plus exactement à la paire de distributions, l'une sur $M_{iso}(F)$, l'autre sur $M_{an}(F)$), on peut définir la restriction de cette distribution aux éléments elliptiques (fortement réguliers) de $M(F)$, que l'on note $proj_{ell}$, ou aux éléments elliptiques et compacts, que l'on note $proj_{ell,comp}$. Remarquons qu'un élément elliptique de $M(F)$ est compact si et seulement si ses composantes dans les groupes $GL(m_j; F)$ sont de déterminants de valeurs absolues 1.

Montrons que

(2) pour $\sigma \in \mathbb{C}[Irr_{unip,M}]$, on a $proj_{ell,comp}(\sigma) = 0$ si et seulement si $proj_{cusp} \circ Res^M(\sigma) = 0$.

Les applications $proj_{ell,comp}$ comme $proj_{cusp} \circ Res^M$ annulent les induites à partir de sous-groupes paraboliques propres. On peut donc supposer que $\sigma \in \mathbb{C}[Ell_{unip,M}]$. Pour une représentation σ de la forme (1), on voit que $proj_{ell,comp}(\sigma)$ comme $proj_{cusp} \circ Res^M(\sigma)$ ne dépendent pas de $z_1, ..., z_t$. Modulo l'intersection des noyaux de nos applications $proj_{ell,comp}$ et $proj_{cusp} \circ Res^M$, on peut donc supposer σ de la forme

$$st_{m_1} \otimes ... \otimes st_{m_t} \otimes \sigma_0,$$

où $\sigma_0 \in Ell_{unip,n_0}$. Pour tout $i = 1, ...t$, st_{m_i} n'est annulé par aucune des analogues pour $GL(m_i)$ des deux applications $proj_{ell,comp}$ et $proj_{cusp} \circ Res$. Les conditions $proj_{ell,comp}(\sigma) = 0$, resp. $proj_{cusp} \circ Res^M(\sigma) = 0$, équivalent donc à $proj_{ell}(\sigma_0) = 0$, resp. $proj_{cusp} \circ Res_{n_0}(\sigma_0) = 0$. Parce que σ_0 est elliptique, chacune de ces conditions équivaut à $\sigma_0 = 0$. Cela prouve (2).

Pour $\sharp = iso$ ou an et pour $\pi \in Irr_{unip,\sharp}$, on note π_M le semi-simplifié du module de Jacquet de π relatif au sous-groupe parabolique $P_\sharp$. C'est une représentation de $M_\sharp(F)$ dont on sait que toutes ses composantes irréductibles sont de réduction unipotente. Par linéarité, on prolonge l'application $\pi \mapsto \pi_M$ en une application linéaire de $\mathbb{C}[Irr_{unip}]$ dans $\mathbb{C}[Irr_{unip,M}]$. Pour $i = 1, ..., t$, notons $\underline{st}_{m_i}$ la restriction de st_{m_i} aux éléments elliptiques et compacts de $GL(m_i; F)$. Il résulte de ce qui précède que, pour $\pi \in \mathbb{C}[Irr_{unip}]$, il existe une unique $\sigma_0 \in \mathbb{C}[Ell_{unip,n_0}]$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$proj_{ell,comp}(\pi_M) = \underline{st}_{m_1} \otimes ... \otimes \underline{st}_{m_t} \otimes proj_{ell}(\sigma_0).$$

Considérons $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathcal{P}_2^{symp}(2n)$. A $\pi = \Pi^{st}(\lambda^+, \lambda^-)$ correspond ainsi une représentation $\sigma_0 \in \mathbb{C}[Ell_{unip,n_0}]$. Les propriétés de stabilité et de transfert se conservent par passage au module de Jacquet et par l'application $proj_{ell,comp}$. On en déduit que $\sigma_{0,iso}$ est stable et que $-\sigma_{0,an}$ en est son transfert au groupe $G_{an,n_0}(F)$. D'après ce que l'on a dit au paragraphe précédent, σ_0 est combinaison linéaire des $\Pi^{st}(\nu^+, \nu^-)$ quand (ν^+, ν^-) décrit

$\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n_0)$. Il y a donc une unique décomposition

$$(3)\qquad proj_{ell,comp}(\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-)_M)=\sum_{(\nu^+,\nu^-)\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n_0)} c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)$$

$$\underline{st}_{m_1}\otimes...\otimes\underline{st}_{m_t}\otimes proj_{ell}(\Pi^{st}(\nu^+,\nu^-)),$$

où les $c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)$ sont des coefficients complexes.

Montrons que

(4) si $\lambda^-=\emptyset$, alors $c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\emptyset;\nu^+,\nu^-)=0$ pour tout $(\nu^+,\nu^-)\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n_0)$ tel que $\nu^-\neq\emptyset$.

Considérons d'abord un couple (λ^+,λ^-) quelconque et posons

$$\sigma_0=\sum_{(\nu^+,\nu^-)\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n_0)} c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)\Pi^{st}(\nu^+,\nu^-).$$

On a décrit en 2.1 la représentation de $\tilde{GL}(2n;F)$ correspondant par endoscopie tordue à $\Pi^{st}_{iso}(\lambda^+,\lambda^-)$, notons-la $\tilde{\Pi}^{GL}(\lambda^+,\lambda^-)$. Au sous-groupe parabolique P_{iso} correspond un sous-groupe parabolique P^{GL} de $GL(2n)$ dont une composante de Levi M^{GL} est de la forme

$$GL(m_1)\times..\times GL(m_t)\times GL(2n_0)\times GL(m_t)\times...\times GL(m_1).$$

A M est associé un sous-espace de Levi $\tilde{M}^{GL}\subset\tilde{GL}(2n)$. La correspondance définie par l'endoscopie tordue est compatible au passage au module de Jacquet et aux projections sur les éléments elliptiques et compacts (ces notions étant relatives à l'espace $\tilde{GL}(2n)$ et non pas au groupe $GL(2n)$). Il en résulte que $proj_{ell,comp}(\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-)_M)$ correspond à $proj_{ell,comp}(\tilde{\Pi}^{GL}(\lambda^+,\lambda^-)_{\tilde{M}})$, avec des notations compréhensibles. Le module de Jacquet $\tilde{\Pi}^{GL}(\lambda^+,\lambda^-)_{\tilde{M}}$ est somme de prolongements à $\tilde{M}^{GL}(F)$ de représentations irréductibles de $M(F)$. Celles-ci interviennent dans le module de Jacquet ordinaire $\Pi^{GL}(\lambda^+,\lambda^-)_M$ et sont de la forme

$$(5)\qquad \rho_1\otimes...\otimes\rho_t\otimes\rho_{n_0}\otimes\check{\rho}_t\otimes...\otimes\check{\rho}_1,$$

où les ρ_j sont des représentations irréductibles de $GL(m_j;F)$, les $\check{\rho}_j$ en sont les contragrédientes et ρ_{n_0} est une représentation irréductible de $GL(n_0;F)$ qui se prolonge en une représentation $\tilde{\rho}_{n_0}$ de l'espace $\tilde{GL}(2n_0;F)$. Toutes ces représentations sont de réduction unipotente. Comme précédemment, il en résulte que, pour $i=1,...,t$, $proj_{ell,comp}(\rho_i)$ est proportionnelle à $\underline{st}_{m_i}$. La correspondance entre $proj_{ell,comp}(\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-)_M)$ et $proj_{ell,comp}(\tilde{\Pi}^{GL}(\lambda^+,\lambda^-)_{\tilde{M}})$ entraîne alors que $proj_{ell}(\sigma_0)$ correspond à une certaine combinaison linéaire des $proj_{ell}(\tilde{\rho}_{n_0})$, pour les ρ_0 intervenant ci-dessus. De nouveau, pour une telle ρ_{n_0}, le prolongement $\tilde{\rho}_{n_0}$ est somme d'une représentation tordue elliptique $\tilde{\rho}_{n_0,ell}$ et d'une combinaison linéaire d'induites propres. Puisqu'on projette $\tilde{\rho}_{n_0}$ sur les éléments elliptiques, on peut aussi bien remplacer $\tilde{\rho}_{n_0}$ par $\tilde{\rho}_{n_0,ell}$. D'autre part, on sait d'après 2.1 que $proj_{ell}(\sigma_0)$ correspond à l'image par $proj_{ell}$ de

$$\sum_{(\nu^+,\nu^-)\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n_0)} c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)\tilde{\Pi}^{GL}(\nu^+,\nu^-).$$

Les représentations tordues intervenant ici sont elliptiques. La projection sur les éléments elliptiques est injective sur les représentations tordues elliptiques. Donc la représentation ci-dessus est combinaison linéaire des $\tilde{\rho}_{n_0,ell}$ précédents. Cela entraîne que, pour tout couple (ν^+,ν^-) intervenant avec un coefficient $c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)$ non nul, la représentation irréductible sous-jacente $\Pi^{GL}(\nu^+,\nu^-)$ vérifie la condition suivante : il existe ρ_{n_0} comme ci-dessus tel que $\Pi^{GL}(\nu^+,\nu^-)$ soit une composante irréductible de la représentation de $GL(2n_0;F)$ sous-jacente à $\tilde{\rho}_{n_0,ell}$.

Faisons maintenant l'hypothèse que $\lambda^-=\emptyset$. Alors le support cuspidal de $\Pi^{GL}(\lambda^+,\emptyset)$ est formé de caractères du tore déployé maximal de $GL(2n)$ de la forme

$$|.|_F^{h_1/2}\otimes...\otimes|.|_F^{h_{2n}/2},$$

où $h_i\in\mathbb{Z}$ pour tout i. Les représentations (5) interviennent dans le module de Jacquet de $\Pi^{GL}(\lambda^+,\emptyset)$ donc le support cuspidal de la représentation ρ_{n_0} est de la même forme, l'entier n étant remplacé par n_0. La représentation $\tilde{\rho}_{n_0,ell}$ se déduit explicitement de $\tilde{\rho}_{n_0}$ par la théorie du quotient de Langlands. Il en résulte que la représentation sous-jacente de $\tilde{\rho}_{n_0,ell}$ a même support cuspidal que ρ_{n_0}. Cela entraîne que, pour tout couple (ν^+,ν^-) intervenant avec un coefficient $c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\emptyset;\nu^+,\nu^-)$ non nul, la représentation irréductible sous-jacente $\Pi^{GL}(\nu^+,\nu^-)$ a pour support cuspidal des caractères du tore déployé maximal de $GL(2n_0)$ de la forme ci-dessus. Mais, si ν^- était non vide, les caractères intervenant dans ce support cuspidal contiendraient au moins une composante $|.|_F^{h/2}\chi^-$ où χ^- est le caractère non ramifié de $F^\times$ d'ordre 2. C'est impossible donc ν^- est vide. Cela prouve (4).

Pour $\lambda\in\mathcal{P}^{symp}(2n)$ et $\nu\in\mathcal{P}^{symp,disc}(2n_0)$, on pose simplement

$$c_{\mathbf{m}}(\lambda;\nu)=c_{\mathbf{m}}(\lambda,\emptyset;\nu,\emptyset).$$

Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des paires (I^+,I^-) d'ensembles tels que $I^+\sqcup I^-=\{1,...,t\}$. A toute telle paire, on associe les partitions $\mathbf{m}(I^+)$ et $\mathbf{m}(I^-)$: $\mathbf{m}(I^+)$ est formée des m_i pour $i\in I^+$ et $\mathbf{m}(I^-)$ est formée des m_i pour $i\in I^-$.

Lemme. *Soient $(\lambda^+,\lambda^-)\in\mathcal{P}_2^{symp}(2n)$ et $(\nu^+,\nu^-)\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n_0)$. Alors on a l'égalité*

$$c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)=\sum_{I^+,I^-}c_{\mathbf{m}(I^+)}(\lambda^+;\nu^+)c_{\mathbf{m}(I^-)}(\lambda^-;\nu^-),$$

où l'on somme sur les $(I^+,I^-)\in\mathcal{I}$ tels que $S(\lambda^+)=S(\nu^+)+2S(\mathbf{m}(I^+))$ et $S(\lambda^-)=S(\nu^-)+2S(\mathbf{m}(I^-))$.

Preuve. En vertu de (2), l'égalité (3) équivaut à

$$(6)\qquad proj_{cusp}\circ Res^M(\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-)_M)=\sum_{(\nu^+,\nu^-)\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n_0)}c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)$$

$$proj_{cusp}\circ Res^M(st_{m_1}\otimes...\otimes st_{m_t}\otimes\Pi^{st}(\nu^+,\nu^-)).$$

On peut composer cette égalité avec la dualité $D^{par,M}$. Cette application commute avec $proj_{cusp}$. On sait d'après 1.5(1) que $Res^M(\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-)_M)=res_{\mathbf{m}}\circ Res(\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-))$. On a aussi $D^{par,M}\circ res_{\mathbf{m}}=res_{\mathbf{m}}\circ D^{par}$ et $D^{par}\circ Res=Res\circ D$ d'après le lemme 1.7. D'où

$$D^{par,M}\circ proj_{cusp}\circ Res^M(\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-)_M)=proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}\circ Res\circ D(\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-)).$$

Par définition, on a

$$\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-)=\sum_{\epsilon^+,\epsilon^-}\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-),$$

où (ϵ^+,ϵ^-) parcourt $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda^+)}\times\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda^-)}$. Pour un tel couple, la proposition 1.11 dit que

$$Res\circ D(\pi(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-))=Rep\circ\rho\iota\circ j(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}\otimes\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}).$$

Rappelons que $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}$, resp. $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-,\epsilon^-}$, ont été identifiés à des éléments de $\mathcal{S}_{n^+}$, resp. $\mathcal{S}_{n^-}$, où $S(\lambda^+)=2n^+$, resp. $S(\lambda^-)=2n^-$. Définissons l'élément

$$\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+}=\sum_{\epsilon^+}\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+,\epsilon^+}$$

de $\mathcal{S}_{n^+}$ et l'élément similaire $\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-}$ de $\mathcal{S}_{n^-}$. En utilisant les propriétés de compatibilité des applications Rep et Rep^M, on obtient

$$D^{par,M}\circ proj_{cusp}\circ Res^M(\Pi^{st}(\lambda^+,\lambda^-)_M)=Rep^M(\psi),$$

où

$$\psi=proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}\circ\rho\iota\circ j(\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+}\otimes\boldsymbol{\rho}_{\lambda^-}).$$

On calcule aussi l'image par $D^{par,M}$ du membre de droite de (6). Pour $i=1,...,t$, l'image par l'involution de Zelevinsky de st_{m_i} est la représentation triviale de $GL(m_i;F)$. Son image par l'application analogue à Res est l'image par l'application analogue à Rep de la fonction constante égale à 1 sur le groupe $\mathfrak{S}_{m_i}$. Rappelons qu'en 1.12, on a identifié $\mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_{m_i}]_{cusp}$ à $\mathbb{C}$ précisément en choisissant pour base de cet espace la projection cuspidale de cette fonction constante. En faisant ainsi disparaitre ces espaces $\mathbb{C}[\hat{\mathfrak{S}}_{m_i}]_{cusp}$, on obtient que l'image par $D^{par,M}$ du membre de droite de (6) est égale à $Rep^M(\psi_0)$, où

$$\psi_0=\sum_{(\nu^+,\nu^-)\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n_0)}c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)proj_{cusp}\circ\rho\iota\circ j_{n_0}(\boldsymbol{\rho}_{\nu^+}\otimes\boldsymbol{\rho}_{\nu^-}).$$

Puisque Rep^M est bijectif, l'égalité (6) équivaut à

(7) $\psi=\psi_0$.

On a vu que l'égalité (6) déterminait les coefficients $c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)$. Il en est donc de même de l'égalité (7).

On peut remplacer le couple (λ^+,λ^-) par $(\lambda^+,\emptyset)$, en remplaçant n par n^+ et $\mathbf{m}$ par une partition $\mathbf{m}^+\in\mathcal{P}(n^+)$. L'assertion (4) nous dit que les ν^- intervenant dans la définition de ψ_0 disparaissent. En posant $\phi^+=\boldsymbol{\rho}_{\lambda^+}$, $n_0^+(\mathbf{m}^+)=n^+-S(\mathbf{m}^+)$ et

$$\phi^+[\mathbf{m}^+]=\sum_{\nu^+\in\mathcal{P}^{symp,disc}(2n_0^+(\mathbf{m}^+))}c_{\mathbf{m}^+}(\lambda^+,\nu^+)\boldsymbol{\rho}_{\nu^+},$$

l'analogue de l'égalité (7) devient

$$proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}^+}\circ\rho\iota\circ j_{n^+,0}(\phi^+)=proj_{cusp}\circ\rho\iota\circ j_{n_0^+(\mathbf{m}^+)}(\phi^+[\mathbf{m}^+]).$$

La même chose vaut pour les données affectées d'un exposant $-$. Cela vérifie les hypothèses du lemme 1.12. Appliquons ce lemme. Il affirme une égalité dont le membre de gauche n'est autre que ψ. On voit que le membre de droite est égal à

$$\psi_0'=\sum_{(\nu^+,\nu^-)\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2n_0)}c'_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)proj_{cusp}\circ\rho\iota\circ j_{n_0}(\boldsymbol{\rho}_{\nu^+}\otimes\boldsymbol{\rho}_{\nu^-}),$$

où $c'_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)$ est le membre de droite de l'égalité du présent énoncé. On a donc $\psi=\psi_0'$. Puisqu'on a aussi $\psi=\psi_0$ et que cette égalité détermine les coefficients, on conclut $c_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)=c'_{\mathbf{m}}(\lambda^+,\lambda^-;\nu^+,\nu^-)$ pour tout couple (ν^+,ν^-), ce qui démontre le lemme. $\square$

2.6 Modules de Jacquet des représentations endoscopiques

On a vu en 2.4 que $\mathfrak{St}_{unip-quad}$ s'identifiait à $\mathcal{P}_2^{symp}(2n)$. L'ensemble $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ s'identifie de même à $\mathcal{P}_4^{symp}(2n)$: à $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{unip-quad}$, on associe le quadruplet de partitions $(\lambda^{++}, \lambda^{-+}, \lambda^{+-}, \lambda^{--})$ où, pour $\zeta, \xi = \pm$ et tout entier $i \geq 1$, la multiplicité de i dans $\lambda^{\zeta\xi}$ est $m_{s,h}^{\zeta\xi}(i)$, cf. 2.2. Remarquons que le sous-ensemble $\mathfrak{Endo}_{unip,disc}$ de $\mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ s'identifie à $\mathcal{P}_4^{symp,disc}(2n)$.

Soit $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_t > 0) \in \mathcal{P}(\leq n)$. On reprend les constructions et notations du paragraphe précédent associées à cette partition. Soient $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{unip-quad}$ et $(\nu, z, k) \in \mathfrak{Endo}_{unip,disc,n_0}$. On déduit de ces données des quadruplets $(\lambda^{++}, \lambda^{-+}, \lambda^{+-}, \lambda^{--})$ et $(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--})$. Considérons un quadruplet $\mathbf{I} = (I^{++}, I^{-+}, I^{+-}, I^{--})$ d'ensembles tels que

$$I^{++} \sqcup I^{-+} \sqcup I^{+-} \sqcup I^{--} = \{1, ..., t\}.$$

On en déduit des partitions $\mathbf{m}^{\zeta\xi}(\mathbf{I})$ pour $\zeta, \xi = \pm$, formées des m_i pour $i \in I^{\zeta\xi}$. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des quadruplets comme ci-dessus qui vérifient

$$S(\lambda^{\zeta\xi}) = S(\nu^{\zeta\xi}) + 2S(\mathbf{m}^{\zeta\xi}(\mathbf{I}))$$

pour tous ζ, ξ. Pour $\mathbf{I} = (I^{++}, I^{-+}, I^{+-}, I^{--}) \in \mathcal{I}$ et pour $\zeta, \xi = \pm$, on a défini en 2.5 le coefficient $c_{\mathbf{m}^{\zeta\xi}(\mathbf{I})}(\lambda^{\zeta\xi}; \nu^{\zeta\xi})$. Posons

$$c_{\mathbf{I}}(\lambda, s, h; \nu, z, k) = \prod_{\zeta,\xi=\pm} c_{\mathbf{m}^{\zeta\xi}(\mathbf{I})}(\lambda^{\zeta\xi}; \nu^{\zeta\xi}),$$

puis

$$c(\lambda, s, h; \nu, z, k) = \sum_{\mathbf{I} \in \mathcal{I}} c_{\mathbf{I}}(\lambda, s, h; \nu, z, k).$$

Remarquons la propriété suivante

(1) on a l'égalité $c(\lambda, h, s; \nu, k, z) = c(\lambda, s, h; \nu, z, k)$.

En effet, échanger s et h, resp. z et k, revient à échanger λ^{-+} et λ^{+-}, resp. ν^{-+} et ν^{+-}. L'échange de I^{-+} et I^{+-} dans la définition ci-dessus conduit à l'égalité (1).

Lemme. *Supposons vérifié le théorème 2.1. Soit $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{unip-quad}$. Alors on a l'égalité*

$$proj_{ell,comp}(\Pi(\lambda, s, h)_M) = \sum_{(\nu,z,k) \in \mathfrak{Endo}_{unip,disc,n_0}} c(\lambda, s, h; \nu, z, k) \underline{st}_{m_1} \otimes ... \otimes \underline{st}_{m_t} \otimes proj_{ell}(\Pi(\nu, z, k)).$$

Preuve. On introduit le quadruplet de partitions $(\lambda^{++}, \lambda^{-+}, \lambda^{+-}, \lambda^{--})$ associé à (λ, s, h). Soit $\sharp = iso$ ou an. Le théorème 2.1 dit que

$$\Pi(\lambda, s, h)_\sharp = sgn_\sharp transfert(\Pi_{iso}^{st}(\lambda^{++}, \lambda^{-+}) \otimes \Pi_{iso}^{st}(\lambda^{+-}, \lambda^{--})),$$

où on a posé $sgn_{iso} = 1$ et $sgn_{an} = -1$. On définit les entiers m^+ et m^- de sorte que $\Pi_{iso}^{st}(\lambda^{++}, \lambda^{-+})$ soit une représentation de $G_{m^+,iso}(F)$ et $\Pi_{iso}^{st}(\lambda^{+-}, \lambda^{--})$ soit une représentation de $G_{m^-,iso}(F)$. Le transfert est compatible au passage au module de Jacquet. On doit toutefois considérer tous les sous-groupes de Levi de $G_{m^+,iso} \times G_{m^-,iso}$ qui se transfèrent en notre Levi M. Précisément, considérons une paire d'ensembles (J^+, J^-) telle que $J^+ \cup J^- = \{1, ..., t\}$. On lui associe comme toujours deux partitions $\mathbf{m}(J^+)$ et

$\mathbf{m}(J^-)$. Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble de ces paires telles que $S(\mathbf{m}(J^+)) \leq m^+$, $S(\mathbf{m}(J^-)) \leq m^-$. Une telle paire définit des groupes de Levi $M(J^+) \subset G_{m^+,iso}$ et $M(J^-) \subset G_{m^-,iso}$ associés aux partitions $\mathbf{m}(J^+)$ et $\mathbf{m}(J^-)$. On a un isomorphisme

$$M(J^+) \times M(J^-) = GL(m_1) \times ... \times GL(m_t) \times G_{m_0(J^+),iso} \times G_{m_0(J^-),iso},$$

où $m_0(J^+) = m^+ - S(\mathbf{m}(J^+))$ et $m_0(J^-) = m^- - S(\mathbf{m}(J^-))$. Le groupe $G_{m_0(J^+),iso} \times G_{m_0(J^-),iso}$ est celui d'une donnée endoscopique évidente de $G_{n_0,\sharp}$. On dispose pour ces objets d'un transfert. En le tensorisant par les identités sur les groupes $GL(m_j)$, on obtient un transfert entre distributions invariantes stables sur $M(J^+)(F) \times M(J^-)(F)$ et distributions invariantes sur $M(F)$. On a précisément

$$\Pi(\lambda, s, h)_{\sharp,M_\sharp} = sgn_\sharp \sum_{(J^+,J^-)\in\mathcal{J}} transfert(\Pi^{st}_{iso}(\lambda^{++}, \lambda^{-+})_{M(J^+)} \otimes \Pi^{st}_{iso}(\lambda^{+-}, \lambda^{--})_{M(J^-)}).$$

Le transfert commute aussi aux projections sur les elliptiques compacts. Donc

$$(2) \qquad proj_{ell,comp}(\Pi(\lambda, s, h)_{\sharp,M_\sharp}) = \sum_{(J^+,J^-)\in\mathcal{J}} sgn_\sharp$$

$$transfert(proj_{ell,comp}(\Pi^{st}_{iso}(\lambda^{++}, \lambda^{-+})_{M(J^+)}) \otimes proj_{ell,comp}(\Pi^{st}_{iso}(\lambda^{+-}, \lambda^{--})_{M(J^-)})).$$

Fixons $(J^+, J^-) \in \mathcal{J}$. On applique la relation 2.5(3) :

$$proj_{ell,comp}(\Pi^{st}_{iso}(\lambda^{++}, \lambda^{-+})_{M(J^+)}) \otimes proj_{ell,comp}(\Pi^{st}_{iso}(\lambda^{+-}, \lambda^{--})_{M(J^-)}) =$$

$$\sum_{(\nu^{++},\nu^{-+})\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2m_0(J^+))} \; \sum_{(\nu^{+-},\nu^{--})\in\mathcal{P}_2^{symp,disc}(2m_0(J^-))} c_{\mathbf{m}(J^+)}(\lambda^{++}, \lambda^{-+}; \nu^{++}, \nu^{-+})$$

$$c_{\mathbf{m}(J^-)}(\lambda^{+-}, \lambda^{--}; \nu^{+-}, \nu^{--})\underline{st}_{m_1}\otimes...\otimes\underline{st}_{m_t}\otimes proj_{ell}(\Pi^{st}_{iso}(\nu^{++}, \nu^{-+}))\otimes proj_{ell}(\Pi^{st}_{iso}(\nu^{+-}, \nu^{--})).$$

Les quadruplets $(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--})$ qui interviennent dans cette formule appartiennent tous à $\mathcal{P}_4^{symp,disc}(2n_0)$. La relation (2) se récrit

$$(3) \qquad proj_{ell,comp}(\Pi(\lambda, s, h)_{\sharp,M_\sharp}) = \sum_{(\nu^{++},\nu^{-+},\nu^{+-},\nu^{--})\in\mathcal{P}_4^{symp,disc}(2n_0)} C(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--})$$

$$sgn_\sharp\underline{st}_{m_1} \otimes ... \otimes \underline{st}_{m_t} \otimes sgn_\sharp transfert(proj_{ell}(\Pi^{st}_{iso}(\nu^{++}, \nu^{-+})) \otimes proj_{ell}(\Pi^{st}_{iso}(\nu^{+-}, \nu^{--}))),$$

où la constante $C(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--})$ est définie de la façon suivante. Le quadruplet $(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--})$ étant fixé, on note $\mathcal{J}^*$ le sous-ensemble des $(J^+, J^-) \in \mathcal{J}$ tels que $S(\nu^{++}) + S(\nu^{-+}) = 2m_0(J^+)$ et $S(\nu^{+-}) + S(\nu^{--}) = 2m_0(J^-)$. Alors

$$(4) \qquad C(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--}) = \sum_{(J^+,J^-)\in\mathcal{J}^*} c_{\mathbf{m}(J^+)}(\lambda^{++}, \lambda^{-+}; \nu^{++}, \nu^{-+})$$

$$c_{\mathbf{m}(J^-)}(\lambda^{+-}, \lambda^{--}; \nu^{+-}, \nu^{--}).$$

Pour $(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--}) \in \mathcal{P}_4^{symp,disc}(2n_0)$, les mêmes arguments que ci-dessus (en particulier, on utilise le théorème 2.1) montrent que

$$sgn_\sharp transfert(proj_{ell}(\Pi^{st}_{iso}(\nu^{++}, \nu^{-+})) \otimes proj_{ell}(\Pi^{st}_{iso}(\nu^{+-}, \nu^{--}))) = proj_{ell}(\Pi(\nu, z, k)_\sharp),$$

où $(\nu, z, k) \in \mathfrak{Endo}_{unip,disc,n_0}$ correspond à $(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--})$. La formule (3) devient celle de l'énoncé à condition de démontrer l'égalité

$$(5) \qquad c(\lambda, s, h; \nu, z, k) = C(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--}).$$

Fixons donc (ν, z, k) et le quadruplet $(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--})$ qui lui correspond. On applique le lemme 2.5 aux termes intervenant dans la définition (4). On obtient

$$(6) \qquad C(\nu^{++}, \nu^{-+}, \nu^{+-}, \nu^{--}) = \sum_{(J^+,J^-)\in\mathcal{J}^*} \sum_{I^{++},I^{-+}} c_{\mathbf{m}(J^+)(I^{++})}(\lambda^{++}; \nu^{++})$$

$$c_{\mathbf{m}(J^+)(I^{-+})}(\lambda^{-+}; \nu^{-+}) \sum_{I^{+-},I^{--}} c_{\mathbf{m}(J^-)(I^{+-})}(\lambda^{+-}; \nu^{+-}) c_{\mathbf{m}(J^-)(I^{--})}(\lambda^{--}; \nu^{--}).$$

On vérifie que les quadruplets $\mathbf{I} = (I^{++}, I^{-+}, I^{+-}, I^{--})$ intervenant dans cette formule appartiennent à l'ensemble $\mathcal{I}$ défini avant l'énoncé. Un élément $\mathbf{I} = (I^{++}, I^{-+}, I^{+-}, I^{--}) \in \mathcal{I}$ intervient dans la somme ci-dessus pour un unique (J^+, J^-) : on a $J^+ = I^{++} \cup I^{-+}$ et $J^- = I^{+-} \cup I^{--}$. On a aussi $\mathbf{m}(J^+)(I^{++}) = \mathbf{m}(I^{++})$ etc... Alors le membre de droite de (6) devient exactement $c(\lambda, s, h; \nu, z, k)$. Cela prouve (5) et achève la démonstration. $\square$.

2.7 Egalité des deux involutions

On a introduit deux involutions $\mathcal{F}^{par}$ et $\mathfrak{F}^{par}$ de l'espace $\mathcal{R}^{par,glob}$, cf. 1.9 et 2.3.

Théorème. *Supposons vérifié le théorème 2.1. Alors on a l'égalité $\mathfrak{F}^{par} = \mathcal{F}^{par}$.*

Preuve. En vertu de l'isomorphisme 1.5(2), il suffit de démontrer que, pour toute partition $\mathbf{m} \in \mathcal{P}(\leq n)$, on a l'égalité

(1) $proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}} \circ \mathfrak{F}^{par} = proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}} \circ \mathcal{F}^{par}$.

Fixons donc $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_t)$ et posons $n_0 = n - S(\mathbf{m})$. Composons à droite les deux membres de l'égalité ci-dessus par l'application $Res \circ D \circ \Pi$. On obtient des applications linéaires définies sur $\mathbb{C}[\mathfrak{Endo}_{unip-quad}]$. En vertu du lemme 2.2 et de la remarque qui le suit, il suffit de démontrer que ces applications sont égales. Soit $(\lambda, s, h) \in \mathfrak{Endo}_{unip-quad}$. Par définition de $\mathfrak{F}^{par}$, on a l'égalité

$$proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}} \circ \mathfrak{F}^{par} \circ Res \circ D(\Pi(\lambda, s, h)) = proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}} \circ Res \circ D(\Pi(\lambda, h, s)).$$

On a

$$proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}} \circ Res \circ D = proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}} \circ D^{par} \circ Res$$

d'après le lemme 1.7 puis

$$proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}} \circ D^{par} \circ Res = D^{par,M} \circ proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}} \circ Res$$

d'après les propriétés de compatibilité de l'application D^{par}. Enfin,

$$res_{\mathbf{m}} \circ Res(\Pi(\lambda, h, s)) = Res^M(\Pi(\lambda, h, s)_M)$$

d'après 1.5(1). D'où

$$proj_{cusp} \circ res_{\mathbf{m}} \circ \mathfrak{F}^{par} \circ Res \circ D(\Pi(\lambda, s, h)) = D^{par,M} \circ proj_{cusp} \circ Res^M(\Pi(\lambda, h, s)_M).$$

En appliquant 2.5(2) et le lemme 2.6, on obtient

$$(2)\qquad proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}\circ\mathfrak{F}^{par}\circ Res\circ D(\Pi(\lambda,s,h))=\sum_{(\nu,z,k)\in\mathfrak{Endo}_{unip,disc,n_0}}c(\lambda,h,s;\nu,z,k)X(\nu,z,k),$$

où

$$X(\nu,z,k)=D^{par,M}\circ proj_{cusp}\circ Res^M(st_{m_1}\otimes...\otimes st_{m_t}\otimes\Pi(\nu,z,k)).$$

Calculons maintenant $proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}\circ\mathcal{F}^{par}\circ Res\circ D(\Pi(\lambda,s,h))$. Dans l'espace $\mathcal{R}^{par,glob}_{\mathbf{m}}$, cf. 1.5, on définit les involutions $\mathcal{F}^{par}_{\mathbf{m}}$, resp. $\mathfrak{F}^{par}_{\mathbf{m}}$, qui sont les produits tensoriels des identités des composantes $C^{GL(m_i)}$ et de $\mathcal{F}^{par}_{n_0}$, resp. $\mathfrak{F}^{par}_{n_0}$, sur la composante $\mathcal{R}^{par,glob}_{n_0}$. Les propriétés de compatibilité des involutions de Lusztig entraînent

$$proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}\circ\mathcal{F}^{par}\circ Res\circ D(\Pi(\lambda,s,h))=\mathcal{F}^{par}_{\mathbf{m}}\circ proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}\circ Res\circ D(\Pi(\lambda,s,h)),$$

puis, par les mêmes arguments que ci-dessus,

$$proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}\circ\mathcal{F}^{par}\circ Res\circ D(\Pi(\lambda,s,h))=\mathcal{F}^{par}_{\mathbf{m}}\circ D^{par,M}\circ proj_{cusp}\circ Res^M(\Pi(\lambda,s,h)_M).$$

En appliquant 2.5(2) et le lemme 2.6, on obtient

$$(3)\qquad proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}\circ\mathcal{F}^{par}\circ Res\circ D(\Pi(\lambda,s,h))=\sum_{(\nu,z,k)\in\mathfrak{Endo}_{unip,disc,n_0}}c(\lambda,s,h;\nu,z,k)Y(\nu,z,k),$$

où

$$Y(\nu,z,k)=\mathcal{F}^{par}_{\mathbf{m}}\circ D^{par,M}\circ proj_{cusp}\circ Res^M(st_{m_1}\otimes...\otimes st_{m_t}\otimes\Pi(\nu,z,k)).$$

Fixons $(\nu,z,k)\in\mathfrak{Endo}_{unip,disc,n_0}$. On a $D^{par,M}\circ proj_{cusp}\circ Res^M=proj_{cusp}\circ Res^M\circ D^M$. On a aussi $\mathcal{F}^{par}_{\mathbf{m}}\circ proj_{cusp}=proj_{cusp}\circ\mathfrak{F}^{par}_{\mathbf{m}}$ d'après le lemme 2.3. D'où

$$Y(\nu,z,k)=proj_{cusp}\circ\mathfrak{F}^{par}_{\mathbf{m}}\circ Res^M\circ D^M(st_{m_1}\otimes...\otimes st_{m_t}\otimes\Pi(\nu,z,k)).$$

En appliquant la définition de l'involution $\mathfrak{F}^{par}_{\mathbf{m}}$, on obtient

$$Y(\nu,z,k)=proj_{cusp}\circ Res^M\circ D^M(st_{m_1}\otimes...\otimes st_{m_t}\otimes\Pi(\nu,k,z)),$$

puis, par les mêmes arguments de compatibilité,

$$Y(\nu,z,k)=D^{par,M}\circ proj_{cusp}\circ Res^M(st_{m_1}\otimes...\otimes st_{m_t}\otimes\Pi(\nu,k,z))$$

Autrement dit, $Y(\nu,z,k)=X(\nu,k,z)$. En permutant z et k dans le membre de droite de (3), on obtient

$$(4)\qquad proj_{cusp}\circ res_{\mathbf{m}}\circ\mathcal{F}^{par}\circ Res\circ D(\Pi(\lambda,s,h))=\sum_{(\nu,z,k)\in\mathfrak{Endo}_{unip,disc,n_0}}c(\lambda,s,h;\nu,k,z)X(\nu,z,k).$$

La relation 2.6(1) entraîne que les membres de droite de (2) et (4) sont égaux. Donc aussi les membres de gauche. Comme on l'a dit, cela démontre (1). □

Index des notations

Références

[1] J. Arthur *The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic Groups*, AMS Colloquium Publ. vol 61 (2013)

[2] J. Arthur *On elliptic tempered characters* Acta Math. **171** (1993), pp.73-138

[3] A.-M. Aubert *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique*, Transct. Am. Math. Soc. 347 (1995), pp. 2179-2189

[4] G. Lusztig *Classification of unipotent representations of simple p-adic groups*, Int. Math. Res. Notices (1995), pp. 517-589

[5] C. Moeglin *Représentations quadratiques unipotentes des groupes classiques p-adiques*, Duke Math. J. 84 (1996), pp. 267-332

[6] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger *Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$*, Invent. Math. 152 (2003), pp. 461-623

[7] A. Moy, G. Prasad *Jacquet functors and unrefined minimal K-types*, Comment. Math. Helv. 71 (1996), pp. 98-121

[8] Schneider, Stuhler *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, Publ. Math. de l'IHES 85 (1997), pp. 97-191

[9] J.-L. Waldspurger *Représentations de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$, quelques conséquences d'un article de Lusztig*, in *Contributions to automorphic forms, geometry and number theory* H. Hida, D. Ramakrishnan, F. Shahidi ed. The Johns Hopkins University Press 2004, pp. 803-910

[10] J.-L. Waldspurger *Les facteurs de transfert pour les groupes classiques : un formulaire*, manuscripta math. 133 (2010), pp. 41-82

[11] J.-L. Waldspurger *Le groupe GL_N tordu, sur un corps p-adique, $2^{ème}$ partie*, Duke Math. J. 137 (2007), pp. 235-336

jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr