Produit scalaire elliptique

J.-L. Waldspurger

8 juillet 2005

Abstract. Suppose that W is a Weyl group, let $\mathcal{C}(W)$ the space of functions on W, with complex values, invariant under conjugation. We can define an "elliptic scalar product" on $\mathcal{C}(W)$. It's a natural ingredient to the representation theory of p-adic reductive groups. Let G be a reductive group over the algebraic closure of a finite field. The generalized Springer's correspondence gives a bijection between two sets :

- the set of pairs $(U, \mathcal{E})$, where U is an unipotent orbit of G and $\mathcal{E}$ is an G-equivariant irreducible local system on U ;

- the disjoint union of the sets of irreducible representations of certain Weyl groups related to G.

There is no simple formula that relies elliptic scalar product and the generalized Springer's correspondence. But a simple formula does exist, and we prove it, if we modify the Springer's correspondence according to an usual method which uses Kazhdan-Lusztig' polynomials. Our result is in fact a corollary of a theorem of Lusztig on the restriction of character-sheaves to the unipotent variety.

Mots-clés : produit scalaire elliptique, correspondance de Springer

Classification AMS : 20 G 40

Introduction

Soient W un groupe fini et δ une représentation de W dans un espace vectoriel réel V_δ de dimension finie. Notons $\mathcal{C}(W)$ l'espace des fonctions de W dans $\mathbb{C}$, invariantes par conjugaison. Pour $f, f' \in \mathcal{C}(W)$, on définit le produit scalaire elliptique :

$$(f, f')^\delta_{ell} = |W|^{-1} \sum_{w \in W} det(1 - \delta(w)|V_\delta)\bar{f}(w)f'(w).$$

C'est un produit hermitien ≥ 0 et dégénéré. Un cas particulier intéressant est le cas où W est un groupe de Weyl et δ sa représentation par réflexions. Dans ce cas, les $w \in W$ tels que $det(1 - \delta(w)|V_\delta) \neq 0$ sont les éléments "elliptiques", c'est-à-dire qui n'appartiennent pas à un "sous-groupe de Lévi" propre de W, ce qui justifie la dénomination de produit scalaire elliptique.

Ce produit intervient dans diverses situations. Notre motivation est que de tels produits contrôlent le produit scalaire des représentations "elliptiques" des groupes réductifs p-adiques, cf. [A] paragraphe 7, remarque 2, [W1] paragraphe IX. Les représentations de groupes de Weyl interviennent dans ce cas en liaison avec la correspondance de Springer généralisée. Rappelons ce qu'est cette correspondance. Soient p un nombre premier, $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments, $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. On suppose p "bon" pour G. Notons I l'ensemble des couples $(U, \mathcal{E})$ formés d'une orbite unipotente de G et d'un système local $\mathcal{E}$ sur U, G-équivariant et irréductible. Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des triplets $(M, U_c, \mathcal{E}_c)$ formés d'une composante de Lévi M d'un sous-groupe parabolique de G, d'une orbite unipotente U_c de M et d'un système local $\mathcal{E}_c$ sur U_c, M-équivariant, irréductible et cuspidal, cf. [L1] 2.4 pour cette notion de cuspidalité. Le groupe G opère par conjugaison sur

$\mathcal{J}$. Notons J l'ensemble des orbites. Pour tout $j \in J$, fixons un représentant $(M, U_c, \mathcal{E}_c)$ de j dans $\mathcal{J}$ et posons $\mathcal{W}_j = Norm_G(M)/M$, où $Norm_G(M)$ est le normalisateur de M dans G. Parce que M est d'une forme très particulière, ce groupe $\mathcal{W}_j$ est un groupe de Weyl. Notons $\hat{\mathcal{W}}_j$ l'ensemble de ses représentations irréductibles. On note $\tilde{J}$ l'ensemble des couples (j, ρ) où $j \in J$ et $\rho \in \hat{\mathcal{W}}_j$. Lusztig a défini une bijection :

$$\nu : I \xrightarrow{\sim} \tilde{J},$$

cf. [L1] théorème 6.5. C'est la correspondance de Springer généralisée. La correspondance de Springer initiale (non généralisée) consiste à se limiter au sous-ensemble $\mathcal{J}_0$ des $(M, U_c, \mathcal{E}_c) \in \mathcal{J}$ tels que M est un tore et aux sous-ensembles correspondants $\tilde{J}_0$ et I_0.

Pour tout $j \in J$, l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{W}_j)$ est muni d'un produit scalaire elliptique, relatif à la représentation par réflexions de $\mathcal{W}_j$. Posons :

$$\mathcal{C}_J = \oplus_{j \in J} \mathcal{C}(\mathcal{W}_j),$$

que l'on munit du produit somme directe des précédents. On note $(.,.)_{ell}$ ce produit. C'est l'espace $\mathcal{C}_J$ muni de ce produit qui intervient de façon cruciale dans la théorie mentionnée ci-dessus des représentations elliptiques des groupes réductifs p-adiques. Remarquons que l'on peut considérer $\tilde{J}$ comme un sous-ensemble de $\mathcal{C}_J$: à $(j, \rho) \in \tilde{J}$, on associe l'élément de $\mathcal{C}_J$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la j-ième qui est égale au caractère de ρ. On peut ainsi définir le produit scalaire elliptique $((j, \rho), (j', \rho'))_{ell}$ de deux éléments de $\tilde{J}$. On peut également définir un produit scalaire elliptique sur l'ensemble I. En effet, soient $i = (U, \mathcal{E})$, $i' = (U', \mathcal{E}')$ deux éléments de I. Si $U \neq U'$, on pose $(i, i')_{ell} = 0$. Supposons $U = U'$, fixons un élément $u \in U$, notons $\mathcal{Z}$ le groupe des composantes connexes du centralisateur de u dans G. Aux systèmes locaux $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont associés des représentations irréductibles χ_i et $\chi_{i'}$ de $\mathcal{Z}$, dont on note les caractères $trace\,\chi_i$ et $trace\,\chi_{i'}$. D'autre part, notons $Z_G(u)^0$ la composante neutre du centralisateur de u, fixons un sous-tore maximal T du groupe dérivé du plus grand quotient réductif de $Z_G(u)^0$ et notons $X_*(T)$ son groupe des cocaractères. On définit naturellement une représentation δ de $\mathcal{Z}$ dans l'espace $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On pose alors :

$$(i, i')_{ell} = (trace\,\chi_i, trace\,\chi_{i'})^{\delta}_{ell}.$$

La correspondance de Springer généralisée ne conserve pas les produits scalaires elliptiques, c'est-à-dire que, pour $i, i' \in I$, il n'y a pas de relation simple entre $(i, i')_{ell}$ et $(\nu(i), \nu(i'))_{ell}$. Pour obtenir des formules utilisables, on doit modifier les constructions. Soit $i \in I$, posons $\nu(i) = (j, \rho)$. On définit une autre représentation $\boldsymbol{\rho}$ de $\mathcal{W}_j$, qui n'est pas irréductible en général. La définition sera donnée au paragraphe 4, d'une façon plutôt combinatoire. Indiquons simplement ici une autre interprétation de cette représentation $\boldsymbol{\rho}$, dans le cas de la correspondance de Springer initiale. Dans ce cas, ρ est définie comme étant l'action de $\mathcal{W}_j$ dans l'espace de cohomologie de degré maximal d'une certaine variété de drapeaux associée à i. Alors $\boldsymbol{\rho}$ est l'action de $\mathcal{W}_j$ dans toute la cohomologie de cette variété. On définit une nouvelle application :

$$\boldsymbol{\nu} : I \to \mathcal{C}_J$$

en associant à i l'élément de $\mathcal{C}_J$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la j-ième qui est égale au caractère de $\boldsymbol{\rho}$. On peut décrire explicitement cette application à l'aide de la bijection ν et de polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Notre résultat est le :

Théorème. *Soient $i, i' \in I$. On a l'égalité $(i, i')_{ell} = (\boldsymbol{\nu}(i'), \boldsymbol{\nu}(i))_{ell}$.*

Remarquons que les définitions les plus naturelles conduisent à une permutation de i et i' entre les deux côtés de la formule. Reeder a prouvé ce théorème quand on se limite aux éléments $i, i' \in I_0$, c'est-à-dire aux éléments qui interviennent dans la correspondance de Springer initiale ([R], proposition 3.4.3). Sa méthode est assez indirecte : elle utilise l'interprétation de ces produits en termes de représentations de groupes p-adiques. Pour notre part, nous avons au contraire besoin de la formule du théorème pour en déduire des résultats concernant ces groupes. Comme on le verra, le théorème se déduit de façon simple du théorème 24.4 de [L3] où Lusztig calcule (essentiellement) le produit scalaire des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères, restreintes aux éléments unipotents de G.

Il y a en fait plusieurs façons naturelles de définir les représentations $\boldsymbol{\rho}$ ci-dessus car leur définition fait implicitement intervenir une structure de G sur une extension finie $\mathbb{F}_q$ de $\mathbb{F}_p$ et il y a plusieurs structures possibles. C'est pourquoi nous nous placerons dans un cadre un peu plus général que celui de cette introduction en considérant un couple (G,θ) formé d'un groupe G comme ci-dessus et d'un automorphisme quasi-semi-simple θ de G. Les définitions s'adaptent pour tenir compte de la torsion induite par θ sur tous les objets que l'on a considérés et on obtient un énoncé un peu plus général que le théorème ci-dessus.

Dans les trois derniers paragraphes de l'article, on donne une version explicite du théorème dans le cas des groupes symplectiques et spéciaux orthogonaux. C'est cette version dont nous avons besoin dans [W1]. Remarquons que c'est précisément pour traiter le cas des groupes spéciaux orthogonaux pairs qu'il est nécessaire de faire intervenir des automorphismes θ.

Dans cette introduction, le corps des coefficients était le corps des complexes (les représentations étaient à valeurs dans des espaces complexes etc...). Pour utiliser les résultats de [L3], il est plus commode d'utiliser pour corps de coefficients une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ du corps des nombres ℓ-adiques. On passe d'un point de vue à l'autre en fixant un isomorphisme algébrique entre ce corps et le corps des complexes.

1. Définitions

Soient p, ℓ deux nombres premiers distincts. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments, $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de ce corps et $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps des nombres ℓ-adiques.

Soit H un groupe. On note Z_H son centre. Pour $h \in H$, on note $Z_H(h)$ le centralisateur de h dans H. Pour tout sous-ensemble $X \subseteq H$, on note $Norm_H(X)$ le normalisateur de X dans H. On appelle représentation de H un couple (ρ, V) où V est un espace vectoriel sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\rho : H \to GL_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(V)$ un homomorphisme. La plupart du temps, on ignorera l'espace V en parlant de "la représentation ρ". Si besoin est, on notera alors V_ρ un espace dans lequel elle se réalise. On se limitera en fait aux représentations de dimension finie. On note $\hat{H}$ l'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie de H à isomorphisme près. On appelle ici représentation virtuelle de H une combinaison linéaire finie, à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, de représentations irréductibles de dimension finie. Le caractère d'une représentation virtuelle ρ est parfaitement défini, on le note $trace\,\rho$.

Soient H un groupe et θ un automorphisme de H. On introduit le groupe $H \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$ où $\theta^{\mathbb{Z}}$ est le groupe abélien libre engendré par θ. Pour toute représentation ρ de H, on définit $\theta(\rho)$ par : $V_{\theta(\rho)} = V_\rho$, $\theta(\rho)(h) = \rho(\theta^{-1}(h))$ pour tout $h \in H$. On a l'isomorphisme $\rho \simeq \theta(\rho)$ si et seulement si ρ se prolonge en une représentation de $H \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$. En effet, définir un prolongement revient à définir un automorphisme $\rho(\theta)$ de V_ρ tel que :

$$\rho(\theta(h)) \circ \rho(\theta) = \rho(\theta) \circ \rho(h)$$

pour tout $h \in H$. Supposons H fini et supposons donnée une représentation de dimension finie δ de $H \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$. Pour deux fonctions :

$$f, f' : H \rtimes \theta^{\mathbb{Z}} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell,$$

on pose :

$$(f,f')^\delta_{\theta-ell} = |H|^{-1} \sum_{h\in H} det(1-\delta(\theta h)|V_\delta) f(h^{-1}\theta^{-1}) f'(\theta h).$$

Pour simplifier, si ρ et ρ' sont deux représentations virtuelles de $H \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$, on pose $(\rho,\rho')^\delta_{\theta-ell} = (trace\,\rho, trace\,\rho')^\delta_{\theta-ell}$.

Si X est un ensemble et θ une bijection de X dans lui-même, on note X^θ le sous-ensemble des points fixes.

Soit X une variété algébrique sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. On identifie X à son ensemble de points sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. On parle de système local sur X, resp. de faisceau, de complexe, de faisceau pervers, sur X pour désigner un système local d'espaces vectoriels de dimension finie sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, resp. un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau constructible, resp. un élément de la catégorie dérivée des complexes bornés de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux constructibles, resp. un faisceau pervers dans cette catégorie. Soit K un complexe sur X. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^i(K)$. Soit de plus $f : Y \to X$, resp. $f : X \to Y$, un homomorphisme de variétés algébriques. On sait définir le complexe $f^*(K)$, resp. $f_*(K)$, sur Y. Si K est un faisceau ou un système local, il en est de même de $f^*(K)$. Si Y est une sous-variété de X et $f : Y \to X$ est l'injection canonique, on note plutôt $K_Y = f^*(K)$, ou même $K_y = f^*(K)$ dans le cas particulier où Y est réduit à un seul point y. Dans ce dernier cas, K_y est la fibre de K au point y. Si $U \subseteq X$ est une sous-variété lisse et localement fermée et si $\mathcal{L}$ est un système local sur U, on sait définir le prolongement d'intersection $IC(\bar{U}, \mathcal{L})[dim(U)]$ qui est un faisceau pervers sur X à support dans la clôture de Zariski $\bar{U}$ de U.

Soit G un groupe algébrique défini sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. On note G^0 sa composante neutre. Supposons G réductif et connexe. On appelle Lévi de G un sous-groupe algébrique M qui est une composante de Lévi d'un sous-groupe parabolique de G. Soit T un tore sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. On note $X_*(T)$ son groupe des cocaractères et on pose $X_*(T)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

On fixe désormais un groupe réductif et connexe G défini sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ et un automorphisme algébrique θ de G. On suppose :

- θ est quasi-semi-simple, c'est-à-dire préserve un couple (B, T) formé d'un sous-groupe de Borel B de G et d'un sous-tore maximal T de B ;

- θ est d'ordre fini ;

- p est bon pour G (cf. [C] page 28).

2. Systèmes locaux sur les orbites unipotentes

On note $I(G)$, ou simplement I, l'ensemble des couples $(U, \mathcal{E})$ où U est une orbite unipotente dans G et $\mathcal{E}$ est un système local G-équivariant et irréductible sur U. Soit $i = (U, \mathcal{E})$ un tel couple, fixons $u \in U$, posons $\mathcal{Z}_i = Z_G(u)/Z_G(u)^0$ et notons $z \mapsto \bar{z}$ la projection naturelle de $Z_G(u)$ dans $\mathcal{Z}_i$. La donnée du système local $\mathcal{E}$ est équivalente à celle d'une représentation irréductible (χ_i, V_i) de $\mathcal{Z}_i$. En effet, à une telle représentation on associe le système local :

$$\begin{array}{c} (G/Z_G(u)^0) \times_{\mathcal{Z}_i} V_i \\ \downarrow \\ G/Z_G(u) \simeq U \end{array}$$

où $(G/Z_G(u)^0) \times_{\mathcal{Z}_i} V_i$ est le quotient de $(G/Z_G(u)^0) \times V_i$ par la relation d'équivalence :

$$(gZ_G(u)^0 z, v) \sim (gZ_G(u)^0, \chi_i(\bar{z})(v))$$

pour tous $g \in G$, $z \in Z_G(u)$, $v \in V_i$.

L'automorphisme θ agit sur I par $(U, \mathcal{E}) \mapsto (\theta(U), (\theta^{-1})^*(\mathcal{E}))$. Soit $i = (U, \mathcal{E}) \in I^\theta$. Fixons u, (χ_i, V_i) comme ci-dessus. Puisque $U = \theta(U)$, on peut choisir $x \in G$ tel que $u = x\theta(u)x^{-1}$. Ce choix étant fait, l'automorphisme $Ad(x) \circ \theta$ de G conserve $Z_G(u)$ et se descend en un automorphisme de $\mathcal{Z}_i$ que l'on note θ_i. Choisir un isomorphisme de $(\theta^{-1})^*(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}$ revient à choisir un prolongement $\chi_{i,\theta}$ de χ_i à $\mathcal{Z}_i \rtimes \theta_i^{\mathbb{Z}}$. La traduction se fait de la façon suivante. Supposons fixé un prolongement $\chi_{i,\theta}$, posons $\Theta_i = \chi_{i,\theta}(\theta_i)$. Soit $g \in G$. La fibre de $\mathcal{E}$ au point gug^{-1} est l'espace :

$$(1) \qquad gZ_G(u)/Z_G(u)^0 \times_{\mathcal{Z}_i} V_i.$$

La fibre $(\theta^{-1})^*(\mathcal{E})$ au point gug^{-1} est celle de $\mathcal{E}$ en $\theta^{-1}(gug^{-1}) = \theta^{-1}(gx)u\theta^{-1}(gx)^{-1}$. C'est donc l'espace :

$$(2) \qquad \theta^{-1}(gx)Z_G(u)/Z_G(u)^0 \times_{\mathcal{Z}_i} V_i.$$

L'application $(h,v)\mapsto(\theta(h)x^{-1},\Theta_i(v))$ identifie l'espace (2) à l'espace (1).

Fixons un sous-groupe de Borel B_u de $Z_G(u)^0$ et un sous-tore maximal T_u de B_u. Notons Aut_u le groupe des automorphismes de $Z_G(u)^0$ et Inn_u le sous-groupe des automorphismes intérieurs. Comme on le sait, le groupe Aut_u agit sur $X_*(T_u)$: pour $\alpha\in Aut_u$, on choisit $z\in Z_G(u)^0$ tel que $\alpha\circ Ad(z)$ conserve B_u et T_u ; alors $\alpha\circ Ad(z)$ définit un automorphisme de $X_*(T_u)$ qui est par définition l'automorphisme que l'on associe à α. Cette action se quotiente en une action de Aut_u/Inn_u. Or $\mathcal{Z}_i\rtimes\theta_i^{\mathbb{Z}}$ s'envoie naturellement dans ce quotient : θ_i s'envoie sur l'image de l'automorphisme $Ad(x)\circ\theta$ et, pour $z\in Z_G(u)$, $\bar{z}$ s'envoie sur l'image de l'automorphisme $Ad(z)$. Donc $\mathcal{Z}_i\rtimes\theta_i^{\mathbb{Z}}$ agit sur $X_*(T_u)$, puis par tensorisation sur $X_*(T_u)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$. Cette action conserve le sous-espace $X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$. En posant $\mathcal{X}_i=X_*(T_u)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}/X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$, on obtient une représentation de $\mathcal{Z}_i\rtimes\theta_i^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{X}_i$ que l'on note δ_i.

Supposons maintenant que pour toute orbite unipotente U conservée par θ, on a fixé les éléments u et x ci-dessus (la définition de ces éléments ne fait pas intervenir le système local $\mathcal{E}$). Supposons que pour tout $i=(U,\mathcal{E})\in I^\theta$, on a fixé un isomorphisme de $(\theta^{-1})^*(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}$, autrement dit un prolongement $\chi_{i,\theta}$ de la représentation χ_i de $\mathcal{Z}_i$. Soient alors $i=(U,\mathcal{E})$ et $i'=(U',\mathcal{E}')$ deux éléments de I^θ. Si $U=U'$, on a $\mathcal{Z}_i=\mathcal{Z}_{i'}$, $\theta_i=\theta_{i'}$ et on sait définir le produit scalaire elliptique $(\chi_{i,\theta},\chi_{i',\theta})_{\theta_i-ell}^{\delta_i}$, cf. paragraphe 1. Pour simplifier, on le note simplement $(\chi_{i,\theta},\chi_{i',\theta})_{\theta-ell}$. On vérifie qu'il ne dépend pas des choix de u et x. Si $U\neq U'$, on pose :

$$(\chi_{i,\theta},\chi_{i',\theta})_{\theta-ell}=0.$$

On note $I_{cusp}(G)$ le sous-ensemble des $(U,\mathcal{E})\in I$ tels que $\mathcal{E}$ soit cuspidal ([L1], définition 2.4).

3. Faisceaux-caractères

Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des triplets $(M,U_c,\mathcal{E}_c)$ où M est un lévi de G et $(U_c,\mathcal{E}_c)$ est un élément de $I_{cusp}(M)$. Soit $j=(M,U_c,\mathcal{E}_c)$ un tel triplet. Notons $Z_{M,reg}^0$ l'ensemble des $z\in Z_M^0$ tels que $Z_G(z)=Z_M(z)$. Posons :

$$\hat{Y}_j=\{(g,\gamma)\in G\times G;\gamma^{-1}g\gamma\in Z_{M,reg}^0U_c\},$$

$$Y_j=\cup_{\gamma\in G}\gamma(Z_{M,reg}^0U_c)\gamma^{-1},$$

et notons $\tilde{Y}_j$ l'image de $\hat{Y}_j$ par l'application :

$$\begin{array}{cccc}\beta: & G\times G & \to & G\times G/M\\ & (g,\gamma) & \mapsto & (g,\gamma M).\end{array}$$

On a un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & \hat{Y}_j & & \\ & \beta\swarrow & & \searrow\alpha & \\ \tilde{Y}_j & & & & U_c\\ \downarrow\pi & & & & \\ Y_j & & & & \end{array}$$

où $\pi(g,\gamma M)=g$ et $\alpha(g,\gamma)$ est l'image dans U_c de $\gamma^{-1}g\gamma$ par la projection évidente $Z_{M,reg}^0U_c\to U_c$. Il existe un unique système local $\tilde{\mathcal{E}}_c$ sur $\tilde{Y}_j$ tel que $\beta^*(\tilde{\mathcal{E}}_c)\simeq\alpha^*(\mathcal{E}_c)$. La variété Y_j est lisse et π en est un revêtement. Alors $\pi_*(\tilde{\mathcal{E}}_c)$ est un système local sur Y_j. On pose :

$$K_j=IC(\bar{Y}_j,\pi_*(\tilde{\mathcal{E}}_c))[dim(Y_j)].$$

C'est un faisceau pervers semi-simple et G-équivariant. Posons $\mathcal{W}_j=Norm_G(M)/M$. Ce groupe agit sur K_j, on note r_j cette action. On ne rappelle pas la définition précise de cette action. Disons simplement que U_c est nécessairement invariante par l'action naturelle de $\mathcal{W}_j$ et qu'alors l'action r_j est issue de l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}_j \times \tilde{Y}_j & \to & \tilde{Y}_j \\ (w,(g,\gamma M)) & \mapsto & (g\gamma w^{-1}M). \end{array}$$

Les constructions ci-dessus sont dues à Lusztig. En [L1] théorème 6.5, il montre que K_j se décompose en somme directe :

$$(1) \qquad K_j = \oplus_{\rho\in\hat{\mathcal{W}}_j} V_\rho \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} A_{j,\rho},$$

de sorte que :

- pour tout ρ, $A_{j,\rho}$ est un faisceau pervers irréductible G-équivariant ;

- l'action r_j de $\mathcal{W}_j$ sur K_j résulte de son action sur chaque V_ρ.

Le groupe G agit par conjugaison sur $\mathcal{J}$. Notons J l'ensemble des orbites. Remarquons que :

(2) si deux éléments $j, j' \in \mathcal{J}$ ont même image dans J, il y a une bijection canonique entre $\hat{\mathcal{W}}_j$ et $\hat{\mathcal{W}}_{j'}$.

En effet, tout élément de G qui conjugue j en j' définit un isomorphisme entre $\mathcal{W}_j$ et $\mathcal{W}_{j'}$. Cet isomorphisme dépend du choix de l'élément de G mais changer d'élément ne fait que composer l'isomorphisme avec la conjugaison par un élément de l'un ou l'autre groupe. La bijection entre $\hat{\mathcal{W}}_j$ et $\hat{\mathcal{W}}_{j'}$ déduite de l'isomorphisme ne dépend donc d'aucun choix. $\square$

L'automorphisme θ agit sur $\mathcal{J}$ et J. Remarquons que :

(3) l'application naturelle $\mathcal{J}^\theta \to J^\theta$ est surjective.

Pour le voir, fixons un sous-groupe de Borel B de G et un sous-tore maximal T de B tous deux stables par θ (on a supposé θ quasi-semi-simple). Appelons couple standard une paire (M,P) formée d'un sous-groupe parabolique P de G contenant B et d'une composante de Lévi M de P contenant T. Soit $j = (M, U_c, \mathcal{E}_c) \in \mathcal{J}$ un élément dont l'image dans J est fixe par θ. Quitte à conjuguer j, on peut supposer que M fait partie d'un couple standard (M,P). D'après l'hypothèse sur j, on peut choisir $y \in G$ tel que $Ad(y)\circ\theta(j) = j$. Alors $Ad(y)\circ\theta(P)$ est un sous-groupe parabolique de composante de Lévi M. Mais le Lévi M a une forme très particulière : d'après [L1] théorème 9.2(a), tout sous-groupe parabolique de composante de Lévi M est conjugué à P par un élément de $Norm_G(M)$. On peut donc fixer $n \in Norm_G(M)$ tel que $Ad(ny)\circ\theta(P) = P$. Les couples (M,P) et $(\theta(M),\theta(P))$ sont tous deux standard et sont conjugués par ny. Ils sont donc égaux et ny appartient à M. Donc $y \in Norm_G(M)$. D'après [L1] théorème 9.2(b), on a alors $Ad(y^{-1})(j) = j$. Puisque $Ad(y)\circ\theta(j) = j$, cela entraîne que $j \in \mathcal{J}^\theta$. $\square$

Soit $j \in \mathcal{J}^\theta$. Alors θ agit naturellement sur $\mathcal{W}_j$ et $\hat{\mathcal{W}}_j$. De la même façon qu'en (2), on a :

(4) si deux éléments $j, j' \in \mathcal{J}^\theta$ ont même image dans J^θ, la bijection canonique entre $\hat{\mathcal{W}}_j$ et $\hat{\mathcal{W}}_{j'}$ entrelace les actions de θ.

Il résulte de (2) et (4) que l'on peut définir l'ensemble $\hat{\mathcal{W}}_j$ pour $j \in J$ et l'ensemble $\hat{\mathcal{W}}_j^\theta$ pour $j \in J^\theta$.

Soit $j \in J^\theta$ et, par abus de notations, notons encore $j = (M, U_c, \mathcal{E}_c)$ un élément de $\mathcal{J}^\theta$ le représentant. L'isomorphisme θ agit naturellement sur toutes les variétés que l'on a introduites. Fixons un isomorphisme de $(\theta^{-1})^*(\mathcal{E}_c)$ sur $\mathcal{E}_c$. Cet isomorphisme se transporte à chaque étape de la construction et il en résulte un isomorphisme $\Theta_{K_j} : (\theta^{-1})^*(K_j) \xrightarrow{\sim} K_j$. Celui-ci vérifie la relation :

$$r_j(\theta(w)) \circ \Theta_{K_j} = \Theta_{K_j} \circ (\theta^{-1})^*(r_j(w))$$

pour tout $w \in \mathcal{W}_j$. En utilisant (1), on voit que, pour tout $\rho \in \hat{\mathcal{W}}_j$, les faisceaux pervers $(\theta^{-1})^*(A_{j,\rho})$ et $A_{j,\theta(\rho)}$ sont isomorphes. Soit $\rho \in \hat{\mathcal{W}}_j$, fixons un isomorphisme $\Theta_{A_{j,\rho}}$: $(\theta^{-1})^*(A_{j,\rho}) \xrightarrow{\sim} A_{j,\theta(\rho)}$. Il existe un unique isomorphisme $\Theta_\rho : V_\rho \to V_{\theta(\rho)}$ tel que :

- pour tout $w \in \mathcal{W}_j$, $\Theta_\rho \circ \rho(w) = \theta(\rho)(\theta(w)) \circ \Theta_\rho$;

- la restriction de Θ_{K_j} à $V_\rho \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} A_{j,\rho}$ coïncide avec l'isomorphisme :

$$\Theta_\rho \otimes \Theta_{A_{j,\rho}} : V_\rho \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} A_{j,\rho} \to V_{\theta(\rho)} \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} A_{j,\theta(\rho)}.$$

En particulier, pour $\rho \in \hat{\mathcal{W}}_j^\theta$, Θ_ρ est un automorphisme de V_ρ qui permet de prolonger ρ en une représentation $\rho_{j,\theta}$ de $\mathcal{W}_j \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$ par $\rho_{j,\theta}(\theta) = \Theta_\rho$.

Posons $\mathcal{Y}_j = X_*(Z_M^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} / X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$. Le groupe $\mathcal{W}_j \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$ agit naturellement sur cet espace, on note δ_j cette action. Soient π, π' deux représentations virtuelles de $\mathcal{W}_j \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$. On a défini au paragraphe 1 le produit scalaire elliptique $(\pi, \pi')_{\theta-ell}^{\delta_j}$, que l'on note simplement $(\pi, \pi')_{\theta-ell}$. En particulier, soient $\rho, \rho' \in \hat{\mathcal{W}}_j^\theta$. Supposons choisis des isomorphismes $\Theta_{A_{j,\rho}}$ et $\Theta_{A_{j,\rho'}}$ dont on déduit des prolongements $\rho_{j,\theta}$ et $\rho'_{j,\theta}$. Dans la construction, on a choisi un relèvement de j dans $\mathcal{J}^\theta$ et un isomorphisme de $(\theta^{-1})^*(\mathcal{E}_c)$ sur $\mathcal{E}_c$. On vérifie que le produit scalaire elliptique $(\rho_{j,\theta}, \rho'_{j,\theta})_{\theta-ell}$ ne dépend pas de ces choix. En particulier, multiplier l'isomorphisme de $(\theta^{-1})^*(\mathcal{E}_c)$ sur $\mathcal{E}_c$ par un élément $\lambda \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ multiplie $\rho_{j,\theta}(\theta)$ et $\rho'_{j,\theta}(\theta)$ par ce même élément λ, ce qui ne modifie évidemment pas la formule finale.

4. Correspondance de Springer généralisée

Notons $\tilde{J}$ l'ensemble des couples (j, ρ) où $j \in J$ et $\rho \in \hat{\mathcal{W}}_j$. La correspondance de Springer généralisée affirme l'existence d'une bijection $\nu : I \to \tilde{J}$ caractérisée par la propriété suivante. Soient $i = (U, \mathcal{E}) \in I$, posons $\nu(i) = (j, \rho)$, $j = (M, U_c, \mathcal{E}_c)$ (plus exactement, ce triplet est un représentant de la classe j). Notons G_{un} la variété des éléments unipotents de G. Alors :

$$(A_{j,\rho})_{G_{un}}[-dim(Z_M^0)] \simeq IC(\bar{U}, \mathcal{E})[dim(U)].$$

En particulier, posons $a_i = -dim(U) - dim(Z_M^0)$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, on a l'isomorphisme :

$$(1) \qquad \mathcal{H}^m(A_{j,\rho})_U \simeq \begin{cases} 0, & si\ m \neq a_i, \\ \mathcal{E}, & si\ m = a_i. \end{cases}$$

La bijection ν commute à l'action de θ et se restreint en une bijection de I^θ sur $\tilde{J}^\theta$.

Supposons fixé, pour tout $(j, \rho) \in \tilde{J}^\theta$, un isomorphisme :

$$\Theta_{A_{j,\rho}} : (\theta^{-1})^*(A_{j,\rho}) \to A_{j,\rho}.$$

Comme on l'a dit au paragraphe 3, on en déduit un prolongement $\rho_{j,\theta}$ de ρ à $\mathcal{W}_j \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$. Grâce à (1), l'isomorphisme $\Theta_{A_{j,\rho}}$ détermine aussi un isomorphisme :

$$\Theta_{\mathcal{E}} : (\theta^{-1})^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$$

où $(U, \mathcal{E}) = \nu^{-1}(j, \rho)$. On dispose donc d'un tel isomorphisme pour tout $(U, \mathcal{E}) \in I^\theta$. Soient $i = (U, \mathcal{E})$, $i' = (U', \mathcal{E}')$ deux éléments de I^θ. Posons $\nu(i) = (j, \rho)$, $\nu(i') = (j', \rho')$. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Le faisceau $\mathcal{H}^{2m+a_{i'}}(A_{j',\rho'})_U$ se décompose en somme directe de systèmes locaux irréductibles et G-équivariants. Considérons l'espace :

$$H_{i,i'}^m = Hom(\mathcal{E}, \mathcal{H}^{2m+a_i}(A_{j',\rho'})_U).$$

On définit un automorphisme $\theta_{i,i'}^m$ de cet espace : pour $\varphi \in H_{i,i'}^m$, $\theta_{i,i'}^m(\varphi)$ est l'homomorphisme qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (\theta^{-1})^*(\mathcal{E}) & \stackrel{(\theta^{-1})^*(\varphi)}{\rightarrow} & (\theta^{-1})^*(\mathcal{H}^{2m+a_{i'}}(A_{j',\rho'})_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E} & \stackrel{\theta_{i,i'}^m(\varphi)}{\rightarrow} & \mathcal{H}^{2m+a_{i'}}(A_{j',\rho'})_U \end{array}$$

les flèches verticales étant $\Theta_{\mathcal{E}}$ et l'isomorphisme déduit par fonctorialité de $\Theta_{A_{j',\rho'}}$.

Soit maintenant $(j,\rho) \in \tilde{J}^\theta$. Pour $\rho' \in \hat{\mathcal{W}}_j^\theta$, on pose :

$$P_{j,\theta,\rho,\rho'} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} trace(\theta_{i,i'}^m),$$

où $i = \nu^{-1}(j,\rho)$, $i' = \nu^{-1}(j,\rho')$. On définit la représentation virtuelle de $\mathcal{W}_j \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$:

$$\boldsymbol{\rho}_{j,\theta} = \sum_{\rho'\in\hat{\mathcal{W}}_j^\theta} P_{j,\theta,\rho,\rho'}\rho'_{j,\theta}.$$

Remarquons que, pour $w \in \mathcal{W}_j$, la valeur $trace\,\boldsymbol{\rho}_{j,\theta}(\theta w)$ dépend seulement du choix de $\Theta_{A_{j,\rho}}$ et pas de ceux de $\Theta_{A_{j,\rho'}}$ pour $\rho' \neq \rho$. En effet, si on multiplie $\Theta_{A_{j,\rho'}}$ par $\lambda \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, on multiplie $\rho'_{j,\theta}(\theta w)$ par λ^{-1} et $P_{j,\theta,\rho,\rho'}$ par λ.

Soient enfin $(j,\rho),(j',\rho') \in \tilde{J}^\theta$. Si $j = j'$, on a défini au paragraphe 3 le produit $(\boldsymbol{\rho}_{j,\theta},\boldsymbol{\rho}'_{j,\theta})_{\theta-ell}$. Si $j \neq j'$, on pose simplement $(\boldsymbol{\rho}_{j,\theta},\boldsymbol{\rho}'_{j',\theta})_{\theta-ell} = 0$.

5. Le résultat

On suppose fixé, pour tout $(j,\rho) \in \tilde{J}^\theta$, un isomorphisme :

$$\Theta_{A_{j,\rho}} : (\theta^{-1})^*(A_{j,\rho}) \to A_{j,\rho}.$$

On peut donc définir $(\boldsymbol{\rho}_{j,\theta},\boldsymbol{\rho}'_{j',\theta})_{\theta-ell}$ pour tous $(j,\rho),(j',\rho') \in \tilde{J}^\theta$. On dispose aussi d'isomorphismes :

$$\Theta_{\mathcal{E}} : (\theta^{-1})^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$$

pour tout $(U,\mathcal{E}) \in I^\theta$, ce qui permet de définir $(\chi_{i,\theta},\chi_{i',\theta})_{\theta-ell}$ pour tous $i,i' \in I^\theta$.

Théorème. *Soient $i,i' \in I^\theta$, posons $\nu(i) = (j,\rho)$, $\nu(i') = (j',\rho')$. Alors on a l'égalité :*

$$(\chi_{i',\theta},\chi_{i,\theta})_{\theta-ell} = (\boldsymbol{\rho}_{j,\theta},\boldsymbol{\rho}'_{j',\theta})_{\theta-ell}.$$

Cette assertion ne dépend d'aucun choix. En effet, chacun des deux termes ne dépend que des choix de $\Theta_{A_{j,\rho}}$ et $\Theta_{A_{j',\rho'}}$. Mais modifier ces choix multiplie les deux termes par le même scalaire.

La démonstration est donnée dans les 6 paragraphes suivants.

6. Introduction du Frobenius

On fixe une puissance $q = p^r$ de sorte qu'il existe une structure de G sur $\mathbb{F}_q$ pour laquelle G soit déployé, θ soit défini sur $\mathbb{F}_q$ et tous les objets dont nous avons eu besoin (les u, x etc...) dans nos constructions soient eux-aussi définis sur $\mathbb{F}_q$. C'est loisible puisque ces objets sont en nombre fini. On note F_0 le Frobenius pour cette structure. En particulier, $I^{F_0} = I$, $J^{F_0} = J$, $\tilde{J}^{F_0} = \tilde{J}$.

Appliquons les définitions du paragraphe 24 de [L3]. Soit $j \in J$, que l'on représente par un triplet $(M,U_c,\mathcal{E}_c) \in \mathcal{J}$. On suppose les trois termes du triplet définis sur $\mathbb{F}_q$. Dans le cas où $j \in J^\theta$, on suppose de plus que le triplet est lui-aussi fixe par θ. On fixe un isomorphisme $\phi_{0,c} : F_0^*(\mathcal{E}_c) \to \mathcal{E}_c$ normalisé de sorte qu'il induise une application d'ordre fini sur la fibre de $\mathcal{E}_c$ au-dessus de tout point de $U_c^{F_0}$. On en déduit un isomorphisme $\phi_{0,K_j} : F_0^*(K_j) \to K_j$. Pour tout $\rho \in \hat{\mathcal{W}}_j$, on définit l'isomorphisme $\phi_{0,j,\rho} : F_0^*(A_{j,\rho}) \to A_{j,\rho}$ de sorte que ϕ_{0,K_j} se restreigne au facteur $V_\rho \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} A_{j,\rho}$ de K_j en l'isomorphisme $1 \otimes \phi_{0,j,\rho}$, où 1 est l'identité de V_ρ. Soit $i = (U,\mathcal{E}) = \nu^{-1}(j,\rho) \in I$. Notons r_i la dimension du support de $A_{j,\rho}$. On définit l'isomorphisme $\phi_{0,\mathcal{E}} : F_0^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ de sorte que, par l'isomorphisme 4(1), $q^{(a_i+r_i)/2}\phi_{0,\mathcal{E}}$ corresponde à l'isomorphisme déduit fonctoriellement de $\phi_{0,j,\rho}$. Soit u le point de U que l'on utilise dans les constructions du paragraphe 2. On suppose $u \in U^{F_0}$. Alors $\phi_{0,\mathcal{E}}$ définit un automorphisme $(\phi_{0,\mathcal{E}})_u$ de la fibre $\mathcal{E}_u$. D'après [L3] 24.2.4, cet automorphisme est d'ordre fini. Soit N un entier ≥ 1, remplaçons q^r par q^{rN}. Alors F_0 est remplacé par F_0^N et $(\phi_{0,\mathcal{E}})_u$ par $(\phi_{0,\mathcal{E}})_u^N$. Quitte à remplacer $q = p^r$ par $q = p^{rN}$ pour N assez divisible, on peut donc supposer que $(\phi_{0,\mathcal{E}})_u$ est l'identité.

Considérons maintenant un autre Frobenius $F = \theta^{-1} \circ F_0 = F_0 \circ \theta^{-1}$. On a les égalités $I^F = I^\theta$, $J^F = J^\theta$, $\tilde{J}^F = \tilde{J}^\theta$. Appliquons de nouveau les définitions du paragraphe 24 de [L3]. Soit $j \in J^\theta$ que l'on représente par le même triplet que ci-dessus (on a pris soin de le supposer fixe par θ). Fixons un isomorphisme $\Theta_c : (\theta^{-1})^*(\mathcal{E}_c) \to \mathcal{E}_c$, notons ϕ_c l'application composée :

$$F^*(\mathcal{E}_c) = (\theta^{-1})^* \circ F_0^*(\mathcal{E}_c) \stackrel{(\theta^{-1})^*(\phi_{0,c})}{\to} (\theta^{-1})^*(\mathcal{E}_c) \stackrel{\Theta_c}{\to} \mathcal{E}_c.$$

En choisissant correctement Θ_c, on peut supposer que ϕ_c vérifie la même condition de normalisation que $\phi_{0,c}$, à savoir ϕ_c induit une application d'ordre fini sur la fibre de $\mathcal{E}_c$ au-dessus de tout point de U_c^F. De Θ_c, resp. $\phi_{0,c}$, se déduisent des isomorphismes $\Theta_{K_j} : (\theta^{-1})^*(K_j) \to K_j$, resp. $\phi_{K_j} : F^*(K_j) \to K_j$. On a la même relation que ci-dessus, à savoir $\phi_{K_j} = \Theta_{K_j} \circ (\theta^{-1})^*(\phi_{0,K_j})$. Pour tout $\rho \in \hat{\mathcal{W}}_j^\theta$, on s'est donné un isomorphisme $\Theta_{A_{j,\rho}} : (\theta^{-1})^*(A_{j,\rho}) \to A_{j,\rho}$, dont se déduit un automorphisme Θ_ρ de V_ρ. Définissons $\phi_{j,\rho} : F^*(A_{j,\rho}) \to A_{j,\rho}$ par $\phi_{j,\rho} = \Theta_{A_{j,\rho}} \circ (\theta^{-1})^*(\phi_{0,j,\rho})$. En comparant nos définitions à celles de Lusztig, on voit que Θ_ρ est égal à l'opérateur $\sigma_{A_{j,\rho}}$ de [L2]10.4. La remarque qui suit l'énoncé de notre théorème montre que l'on est en droit de modifier $\Theta_{A_{j,\rho}}$. Quitte à modifier cet opérateur, on peut supposer que $\sigma_{A_{j,\rho}}$ vérifie les conditions de normalisation de [L3] 24.2. Enfin, soit $i = (U, \mathcal{E}) \in I$, posons $\nu(i) = (j, \rho)$. On définit l'isomorphisme $\phi_\mathcal{E} : F^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ de sorte que, par l'isomorphisme 4(1), $q^{(a_i+r_i)/2}\phi_\mathcal{E}$ corresponde à l'isomorphisme déduit fonctoriellement de $\phi_{j,\rho}$. On a aussi déduit de $\Theta_{A_{j,\rho}}$ un isomorphisme $\Theta_\mathcal{E} : (\theta^{-1})^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$. Il est clair que $\phi_\mathcal{E} = \Theta_\mathcal{E} \circ (\theta^{-1})^*(\phi_{0,\mathcal{E}})$.

Remarque. On aurait aussi bien pu définir ϕ_c comme l'application composée :

$$F^*(\mathcal{E}_c) = F_0^* \circ (\theta^{-1})^*(\mathcal{E}_c) \stackrel{F_0^*(\Theta_c)}{\to} F_0^*(\mathcal{E}_c) \stackrel{\phi_{0,c}}{\to} \mathcal{E}_c.$$

Quitte encore une fois à remplacer $q = p^r$ par $q = p^{rN}$ pour N assez divisible, on obtient en fait la même application. Cette deuxième formule pour ϕ_c conduit à des formules similaires pour les opérateurs ϕ_{K_j} etc... que l'on en déduit.

7. La matrice ω

Tous ces choix étant faits, Lusztig définit trois matrices carrées ω, P, λ, indexées par $I^F \times I^F$. Décrivons ω. Soient $i, i' \in I^F$, posons $\nu(i) = (j, \rho)$, $\nu(i') = (j', \rho')$ et introduisons le triplet $(M, U_c, \mathcal{E}_c)$ représentant j. Pour $w \in \mathcal{W}_j$, on définit un Lévi M^w de la façon suivante : on choisit $z \in G$ tel que $F(z)^{-1}z$ appartienne à $Norm_G(M)$ et ait w pour image dans $\mathcal{W}_j$; on pose $M^w = zMz^{-1}$. Alors ([L3] 24.3.4) :

- si $j \neq j'$, $\omega_{i,i'} = 0$;
- si $j = j'$,

$$\omega_{i,i'} = |\mathcal{W}_j|^{-1} q^{-dim(G)-(a_i+a_{i'})/2} |G^F| \sum_{w \in \mathcal{W}_j} |(Z^0_{M^w})^F|^{-1} trace(\rho(w)^{-1}\Theta_\rho^{-1}) trace(\Theta_{\rho'}\rho'(w)).$$

Dans la formule de Lusztig, on trouve $trace(\Theta_\rho^{-1}\rho(w)^{-1})trace(\rho'(w)\Theta_{\rho'})$. Il nous semble que le calcul conduit plus naturellement à la formule ci-dessus. Cela n'a d'ailleurs pas d'importance puisque $trace(XY) = trace(YX)$.

Supposons $j = j'$, soit $w \in \mathcal{W}_j$. On vérifie que $X_*(Z^0_{M^w})$ muni de l'action naturelle de F s'identifie à $X_*(Z^0_M)$ muni de l'action de $w^{-1}F$, ou encore de $w^{-1}\theta^{-1}F_0$. Notons Δ_j la représentation naturelle de $\mathcal{W}_j \rtimes \theta^\mathbb{Z}$ dans $X_*(Z^0_M)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$. Grâce à [C] proposition 3.2.2, on a donc :

$$|(Z^0_{M^w})^F| = det(q - \Delta_j(\theta w)|X_*(Z^0_M)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}).$$

L'automorphisme $\Delta_j(\theta w)$ conserve le sous-espace $X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$. Sa restriction à ce sous-espace est indépendante de w comme de j, on la note $\Delta(\theta)$. En se rappelant la définition de la représentation $(\delta_j, \mathcal{Y}_j)$, cf. paragraphe 3, on obtient :

$$|(Z_{M^w}^0)^F| = det(q - \Delta(\theta)|X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell})det(q - \delta_j(\theta w)|\mathcal{Y}_j),$$

et la formule devient :

$$(1) \qquad \omega_{i,i'} = |\mathcal{W}_j|^{-1}q^{-dim(G)-(a_i+a_{i'})/2}|G^F|det(q - \Delta(\theta)|X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell})^{-1}$$
$$\sum_{w\in\mathcal{W}_j} det(q - \delta_j(\theta w)|\mathcal{Y}_j)^{-1}trace\,\rho_{j,\theta}(w^{-1}\theta^{-1})trace\,\rho'_{j,\theta}(\theta w).$$

8. La matrice P

Soient $i, i' \in I^F$, écrivons $i = (U, \mathcal{E})$ et $\nu(i') = (j', \rho')$. Notons I_i l'ensemble des $i'' = (U'', \mathcal{E}'') \in I$ tels que $U'' = U$. Pour $u \in U^F$, on a l'égalité :

$$(1) \qquad \sum_{m\in\mathbb{Z}} trace(\phi_{j',\rho'}|\mathcal{H}^{2m+a_{i'}}(A_{j',\rho'})_u)q^{-(a_{i'}+r_{i'})/2} = \sum_{i''=(U,\mathcal{E}'')\in I_i^F} P_{i'',i'}trace(\phi_{\mathcal{E}''}|\mathcal{E}''_u)$$

cf. [L3] 24.2.9 et théorème 24.8(a). Pour $m \in \mathbb{Z}$, écrivons :

$$\mathcal{H}^{2m+a_{i'}}(A_{j',\rho'})_U = \oplus_{i''=(U,\mathcal{E}'')\in I_i}(\mathcal{E}'' \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} H^m_{i'',i'}).$$

Le Frobenius $\phi_{j',\rho'}$ permute les différentes composantes de cette décomposition. Celles qui ne sont pas fixes ne contribuent pas à la trace. Les composantes fixes sont celles indexées par I_i^F. Sur une telle composante, $\phi_{j',\rho'}$ agit comme $\phi_{\mathcal{E}''} \otimes \psi^m_{i'',i'}$, où $\psi^m_{i'',i'}$ est l'automorphisme de $H^m_{i'',i'}$ défini de la façon suivante. Pour $\varphi \in H^m_{i'',i'}$, $\psi^m_{i'',i'}(\varphi)$ est l'homomorphisme qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F^*(\mathcal{E}'') & \xrightarrow{F^*(\varphi)} & F^*(\mathcal{H}^{2m+a_{i'}}(A_{j',\rho'})_U) \\ \phi_{\mathcal{E}''} \downarrow & & \downarrow \phi_{j',\rho'} \\ \mathcal{E}'' & \xrightarrow{\psi^m_{i'',i'}(\varphi)} & \mathcal{H}^{2m+a_{i'}}(A_{j',\rho'})_U. \end{array}$$

Alors :

$$trace(\phi_{j',\rho'}|\mathcal{H}^{2m+a_{i'}}(A_{j',\rho'})_u) = \sum_{i''=(U,\mathcal{E}'')\in I_i^F} trace(\psi^m_{i'',i'})trace(\phi_{\mathcal{E}''}|\mathcal{E}''_u).$$

La famille de fonctions sur U^F : $u \mapsto trace(\phi_{\mathcal{E}''}|\mathcal{E}''_u)$, pour $i'' = (U, \mathcal{E}'') \in I_i^F$, est linéairement indépendante. En comparant l'expression ci-dessus avec (1), on obtient en particulier :

$$P_{i,i'} = q^{-(a_{i'}+r_{i'})/2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} trace(\psi^m_{i,i'}).$$

En remplaçant F par F_0 dans les constructions ci-dessus, on définit pour tout $m \in \mathbb{Z}$ un automorphisme $\psi^m_{0,i,i'}$ de $H^m_{i,i'}$. D'après la définition de nos Frobenius, on a l'égalité :

$$\psi^m_{i,i'} = \theta^m_{i,i'} \circ \psi^m_{0,i,i'}.$$

Remarquons qu'en utilisant l'autre définition des Frobenius (cf. remarque de la fin du paragraphe 6), on obtient la formule :

$$\psi^m_{i,i'} = \psi^m_{0,i,i'} \circ \theta^m_{i,i'}.$$

Donc les automorphismes $\theta^m_{i,i'}$ et $\psi^m_{0,i,i'}$ commutent. Or Lusztig démontre que toutes les valeurs propres de $\psi^m_{0,i,i'}$ sont égales à q^m ([L3], preuve du théorème 24.8). On en déduit l'égalité :

$$trace(\psi^m_{i,i'}) = q^m trace(\theta^m_{i,i'}),$$

d'où :

$$(2) \qquad P_{i,i'} = q^{-(a_{i'}+r_{i'})/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^m trace(\theta^m_{i,i'}).$$

Rappelons d'autre part le résultat suivant ([L3] théorème 24.4(a)), où l'on note $(j,\rho) = \nu(i)$:

$$(3) \qquad si\ j \neq j',\ P_{i,i'} = 0.$$

9. La matrice λ

Soient $i = (U,\mathcal{E})$, $i' = (U',\mathcal{E}')$ deux éléments de I^F. Si $U \neq U'$, $\lambda_{i,i'} = 0$. Supposons $U = U'$, définissons des fonctions Y_i et $\tilde{Y}_{i'}$ sur U^F par :

$$Y_i(y) = trace(\phi_{\mathcal{E}}|\mathcal{E}_y),\ \tilde{Y}_{i'}(y) = trace(\phi^{-1}_{\mathcal{E}'}|\mathcal{E}'_y),$$

pour tout $y \in U^F$. Alors ([L3] 24.3.1) :

$$\lambda_{i,i'} = \sum_{y\in U^F} Y_i(y)\tilde{Y}_{i'}(y).$$

Reprenons les constructions du paragraphe 2. Le point u appartient à U^{F_0}. Par définition de x, on a $F^{-1}(u) = \theta(u) = x^{-1}ux$. Pour $g \in G$, on a les équivalences :

$$gug^{-1} \in U^F \ \Leftrightarrow\ F^{-1}(gug^{-1}) = gug^{-1} \ \Leftrightarrow\ g^{-1}F^{-1}(g)x^{-1} \in Z_G(u).$$

Posons $X = \{g \in G; g^{-1}F^{-1}(g)x^{-1} \in Z_G(u)\}$. Cet ensemble est stable par multiplication à droite par $Z_G(u)$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} X/Z_G(u) & \to & U^F \\ gZ_G(u) & \mapsto & gug^{-1} \end{array}$$

est bijective. L'application :

$$\begin{array}{ccc} X/Z_G(u)^0 & \to & U^F \\ gZ_G(u)^0 & \mapsto & gug^{-1} \end{array}$$

est donc surjective, à fibres de cardinal $|\mathcal{Z}_i|$. D'où l'égalité :

$$\lambda_{i,i'} = |\mathcal{Z}_i|^{-1} \sum_{gZ_G(u)^0\in X/Z_G(u)^0} Y_i(gug^{-1})\tilde{Y}_i(gug^{-1}).$$

Soit $g \in X$, posons $y = gug^{-1}$. On a l'égalité :

$$(1) \qquad \mathcal{E}_y = gZ_G(u)/Z_G(u)^0 \times_{\mathcal{Z}_i} V_i.$$

Définissons l'automorphisme :

$$\begin{array}{cccc} \psi: & gZ_G(u)/Z_G(u)^0 \times_{\mathcal{Z}_i} V_i & \to & gZ_G(u)/Z_G(u)^0 \times_{\mathcal{Z}_i} V_i \\ & (hZ_G(u)^0, v) & \mapsto & (F^{-1}(h)x^{-1}Z_G(u)^0, \Theta_i(v)) \end{array}$$

En utilisant la définition de l'isomorphisme $\Theta_{\mathcal{E}}$ et la condition de normalisation, à savoir que $\phi_{0,\mathcal{E}}$ agit trivialement sur $\mathcal{E}_u$, on vérifie que l'égalité (1) identifie les applications $\phi_{\mathcal{E}}$ (agissant sur $\mathcal{E}_y$) et ψ. Notons $\bar{z}$ l'image de $g^{-1}F^{-1}(g)x^{-1}$ dans $\mathcal{Z}_i$. Définissons l'application :

$$\begin{array}{cccc} \alpha: & V_i & \to & gZ_G(u)/Z_G(u)^0 \times_{\mathcal{Z}_i} V_i \\ & v & \mapsto & (gZ_G(u)^0, \chi_i(\bar{z})(v)) = (F^{-1}(g)x^{-1}Z_G(u)^0, v). \end{array}$$

On vérifie que $\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha = \Theta_i \circ \chi_i(\bar{z})$. On en déduit :

$$Y_i(y) = trace(\psi) = trace(\Theta_i \circ \chi_i(\bar{z})) = trace\,\chi_{i,\theta}(\theta_i\bar{z}).$$

Un calcul analogue conduit à l'égalité :

$$\tilde{Y}_{i'}(y) = trace\,\chi_{i'}(\bar{z}^{-1}\theta_i^{-1}).$$

Notons $\zeta : X \to \mathcal{Z}_i$ l'application qui à g associe l'image de $g^{-1}F^{-1}(g)x^{-1}$ dans $\mathcal{Z}_i$. Les fibres de ζ sont stables par multiplication par $Z_G(u)^0$. Les calculs ci-dessus conduisent à l'égalité :

$$\lambda_{i,i'} = |\mathcal{Z}_i|^{-1} \sum_{\bar{z}\in\mathcal{Z}_i} |\zeta^{-1}(\bar{z})/Z_G(u)^0| trace\,\chi_{i,\theta}(\theta_i\bar{z}) trace\,\chi_{i',\theta}(\bar{z}^{-1}\theta_i^{-1}).$$

Fixons $\bar{z} \in \mathcal{Z}_i$ et calculons $\zeta^{-1}(\bar{z})$. D'après le théorème de Lang, ζ est surjective. On choisit $g \in X$ tel que $\zeta(g) = \bar{z}$ et on pose $z = g^{-1}F(g)x^{-1}$. Montrons que :

$$(2) \qquad \zeta^{-1}(\bar{z}) = G^F g Z_G(u)^0.$$

Il est clair que l'ensemble de droite est inclus dans celui de gauche. Soit $h \in \zeta^{-1}(\bar{z})$. Notons k l'élément de $Z_G(u)^0$ tel que $h^{-1}F^{-1}(h)x^{-1} = zk$. Introduisons l'automorphisme $\varphi_{\bar{z}} = Ad(x) \circ \theta \circ Ad(z)$ de G. Il conserve $Z_G(u)$ et $Z_G(u)^0$. Définissons le Frobenius $\phi_{\bar{z}} = \varphi_{\bar{z}}^{-1} \circ F_0$ de $Z_G(u)^0$. Par le théorème de Lang, on peut fixer $\ell \in Z_G(u)^0$ tel que $\ell^{-1}\phi_{\bar{z}}^{-1}(\ell) = k$. Posons $m = gz\ell z^{-1}$. On a les égalités :

$$m^{-1}F^{-1}(m)x^{-1} = z\ell^{-1}z^{-1}g^{-1}F^{-1}(g)F^{-1}(z)F^{-1}(\ell)F^{-1}(z^{-1})x^{-1},$$

$$z^{-1}g^{-1}F^{-1}(g) = x,$$

d'où :

$$m^{-1}F^{-1}(m)x^{-1} = z\ell^{-1}xF^{-1}(z)F^{-1}(\ell)F^{-1}(z^{-1})x^{-1}.$$

Mais :

$$xF^{-1}(z)F^{-1}(\ell)F^{-1}(z^{-1})x^{-1} = Ad(x) \circ F^{-1} \circ Ad(z)(\ell) = Ad(x) \circ F_0^{-1} \circ \theta \circ Ad(z)(\ell)$$

$$= F_0^{-1} \circ Ad(x) \circ \theta \circ Ad(z)(\ell) = \phi_{\bar{z}}^{-1}(\ell)$$

(pour l'avant-dernière égalité, on utilise l'appartenance de x à G^{F_0}). D'où :

$$m^{-1}F^{-1}(m)x^{-1} = z\ell^{-1}\phi_{\bar{z}}^{-1}(\ell) = zk = h^{-1}F^{-1}(h)x^{-1}.$$

Alors $F^{-1}(hm^{-1}) = hm^{-1}$, i.e. $h \in G^F m$. Puisque $\ell \in Z_G(u)^0$, on a aussi $z\ell z^{-1} \in Z_G(u)^0$, donc $m \in gZ_G(u)^0$. Alors $h \in G^F g Z_G(u)^0$ et cela démontre (2). □

Il résulte de (2) que :

$$|\zeta^{-1}(\bar{z})/Z_G(u)^0| = |G^F||(gZ_G(u)^0g^{-1})^F|^{-1}.$$

Le même calcul que ci-dessus montre que l'application :

$$\begin{array}{ccc} Z_G(u)^0 & \to & gZ_G(u)^0g^{-1} \\ \ell & \mapsto & gz\ell z^{-1}g^{-1} \end{array}$$

entrelace le Frobenius $\phi_{\bar{z}}$ sur $Z_G(u)^0$ avec le Frobenius F sur $gZ_G(u)^0g^{-1}$. On a donc :

$$|(gZ_G(u)^0g^{-1})^F| = |(Z_G(u)^0)^{\phi_{\bar{z}}}|.$$

On a fixé un sous-groupe de Borel B_u de $Z_G(u)^0$ et un tore maximal T_u de B_u. Ils sont stables par F_0. Comme au paragraphe 2, il est loisible de modifier $\varphi_{\bar{z}}$ par un automorphisme intérieur de $Z_G(u)^0$ et de supposer que $\varphi_{\bar{z}}$ conserve T_u et B_u. Alors $\phi_{\bar{z}}$ conserve aussi T_u et B_u et il existe un polynôme $P_{\bar{z}}(T)$ indépendant de q tel que :

$$|(Z_G(u)^0)^{\phi_{\bar{z}}}| = P_{\bar{z}}(q)|T_u^{\phi_{\bar{z}}}|.$$

Ce polynôme est le produit du polynôme de Poincaré de la partie réductive de $Z_G(u)^0$, munie de $\phi_{\bar{z}}$, et de T^d, où d est la dimension du radical unipotent de B_u. Notons $\boldsymbol{\varphi}_{\bar{z}}$ l'automorphisme de $X_*(T_u)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ déduit de $\varphi_{\bar{z}}$. D'après [C] proposition 3.2.2 et parce que F_0 agit trivialement sur $X_*(T_u)$, on a l'égalité :

$$|T_u^{\phi_{\bar{z}}}| = det(q - \boldsymbol{\varphi}_{\bar{z}}|X_*(T_u)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}).$$

L'automorphisme $\boldsymbol{\varphi}_{\bar{z}}$ conserve le sous-espace $X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ et y agit comme $\Delta(\theta)$, cf. paragraphe 7. Il se quotiente en l'automorphisme $\delta_i(\theta_i\bar{z})$ de $\mathcal{X}_i$, cf. paragraphe 2. D'où l'égalité :

$$|T_u^{\phi_{\bar{z}}}| = det(q - \Delta(\theta)|X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell})det(q - \delta_i(\theta_i\bar{z})|\mathcal{X}_i).$$

On obtient finalement :

$$\lambda_{i,i'} = |\mathcal{Z}_i|^{-1}|G^F|det(q - \Delta(\theta)|X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell})^{-1} \sum_{\bar{z}\in\mathcal{Z}_i} P_{\bar{z}}(q)^{-1}det(q - \delta_i(\theta_i\bar{z})|\mathcal{X}_i)^{-1}$$

$$trace\,\chi_{i,\theta}(\theta_i\bar{z})trace\,\chi_{i',\theta}(\bar{z}^{-1}\theta_i^{-1}).$$

10. Inversion des matrices

Le théorème 24.4(b) de [L3] affirme l'égalité matricielle ${}^tP\lambda P = \omega$. Toutes ces matrices sont inversibles, cette égalité équivaut à $P\omega^{-1t}P = \lambda^{-1}$.

Calculons ω^{-1}. La matrice ω est composée de "blocs diagonaux" indexés par J^F. On peut fixer $j \in J^F$ et inverser le bloc correspondant. A un changement d'indices près, les termes du bloc sont indexés par $\hat{\mathcal{W}}_j^\theta \times \hat{\mathcal{W}}_j^\theta$ et le terme indexé par ρ, ρ' vaut :

$$\omega_{\rho,\rho'} = |\mathcal{W}_j|^{-1} \sum_{w\in\mathcal{W}_j} c(\theta w)trace\,\rho_{j,\theta}(w^{-1}\theta^{-1})trace\,\rho'_{j,\theta}(\theta w),$$

avec des coefficients $c(\theta w)$ calculés en 7(1). Ceux-ci sont tous non nuls et invariants par conjugaison par $\mathcal{W}_j$, c'est-à-dire que $c(\theta w) = c(v\theta wv^{-1}) = c(\theta\theta^{-1}(v)wv^{-1})$ pour tous $v, w \in \mathcal{W}_j$. Rappelons les relations suivantes :

- pour $\rho, \rho' \in \hat{\mathcal{W}}_j^\theta$,

$$|\mathcal{W}_j|^{-1} \sum_{w\in\mathcal{W}_j} trace\,\rho_{j,\theta}(w^{-1}\theta^{-1})trace\,\rho'_{j,\theta}(\theta w) = \delta_{\rho,\rho'},$$

où $\delta_{\rho,\rho'}$ est le symbole de Kronecker ;

- pour $w \in \mathcal{W}_j$, posons $C(\theta w) = \{v\theta wv^{-1}; v \in \mathcal{W}_j\} \subset \mathcal{W}_j \rtimes \theta^{\mathbb{Z}}$; pour $w, w' \in \mathcal{W}_j$, on a l'égalité :

$$\sum_{\rho\in\hat{\mathcal{W}}_j^\theta} trace\,\rho_{j,\theta}(w^{-1}\theta^{-1})trace\,\rho_{j,\theta}(\theta w') = \begin{cases} |\mathcal{W}_j||C(\theta w)|^{-1}, & si\ \theta w' \in C(\theta w), \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Ces relations sont bien connues quand on oublie l'automorphisme θ ([Se] théorème 3 et proposition 7) et s'étendent facilement à notre situation. Pour $\rho, \rho' \in \hat{\mathcal{W}}_j^\theta$, posons :

$$\bar{\omega}_{\rho,\rho'} = |\mathcal{W}_j|^{-1} \sum_{w\in\mathcal{W}_j} c(\theta w)^{-1}trace\,\rho_{j,\theta}(w^{-1}\theta^{-1})trace\,\rho'_{j,\theta}(\theta w).$$

Cela définit une matrice indexée par $\hat{\mathcal{W}}_j^\theta \times \hat{\mathcal{W}}_j^\theta$. A l'aide des propriétés ci-dessus, on vérifie qu'elle est l'inverse du bloc de ω que l'on a considéré. En revenant aux indexations initiales, définissons une matrice $\bar{\omega}$ indexée par $I^F \times I^F$ de la façon suivante. Soient $i, i' \in I^F$, posons $\nu(i) = (j, \rho)$, $\nu(i') = (j', \rho')$. Si $j \neq j'$, $\bar{\omega}_{i,i'} = 0$. Si $j = j'$,

$$\bar{\omega}_{i,i'} = |\mathcal{W}_j|^{-1}q^{dim(G)+(a_i+a_{i'})/2}|G^F|^{-1}det(q - \Delta(\theta)|X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}) \sum_{w\in\mathcal{W}_j} det(q - \delta_j(\theta w)|\mathcal{Y}_j)$$

$$trace\, \rho_{j,\theta}(w^{-1}\theta^{-1}) trace\, \rho'_{j,\theta}(\theta w).$$

Alors $\bar{\omega} = \omega^{-1}$.

Un même raisonnement permet de calculer l'inverse de la matrice λ. Définissons une matrice $\bar{\lambda}$ indexée par $I^F \times I^F$ de la façon suivante. Soient $i = (U, \mathcal{E})$, $i' = (U', \mathcal{E}')$ deux éléments de I^F. Si $U \neq U'$, $\bar{\lambda}_{i,i'} = 0$. Si $U = U'$,

$$\bar{\lambda}_{i,i'} = |\mathcal{Z}_i|^{-1}|G^F|^{-1} det(q - \Delta(\theta)|X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}) \sum_{\bar{z} \in \mathcal{Z}_i} P_{\bar{z}}(q) det(q - \delta_i(\theta_i \bar{z})|\mathcal{X}_i)$$

$$trace\, \chi_{i,\theta}(\theta_i \bar{z}) trace\, \chi_{i',\theta}(\bar{z}^{-1}\theta_i^{-1}).$$

Alors $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$.

11. Fin de la preuve

On a donc l'égalité $P\bar{\omega}^t P = \bar{\lambda}$. On remarque que $|G^F|^{-1} det(q - \Delta(\theta)|X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell})$ intervient en facteur dans tous les coefficients de $\bar{\omega}$ et $\bar{\lambda}$. On peut diviser ces coefficients par ce facteur. Après cette division, on constate que tous les coefficients de nos matrices sont polynomiaux en q. On peut considérer notre égalité comme l'égalité des valeurs en q de deux matrices dont les coefficients sont des polynômes. Dans notre raisonnement, on peut remplacer q par une puissance q^N quelconque. Cela montre que les deux matrices sont égales (dans l'ensemble des matrices dont les coefficients sont des polynômes). La conséquence est que l'égalité reste vraie si l'on remplace q par n'importe quel élément de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. On va calculer les valeurs de nos matrices en $q = 1$, que l'on note $\tilde{\lambda}$, $\tilde{P}$ et $\tilde{\omega}$ (rappelons que l'on s'est au préalable débarrassé des facteurs $|G^F|^{-1} det(q - \Delta(\theta)|X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell})$).

Soient $i = (U, \mathcal{E})$, $i' = (U', \mathcal{E}')$ deux éléments de I^F, supposons $U = U'$. Soit $\bar{z} \in \mathcal{Z}_i$. Pour $q = 1$, le terme $det(q - \delta_i(\theta_i \bar{z})|\mathcal{X}_i)$ devient $det(1 - \delta_i(\theta_i \bar{z})|\mathcal{X}_i)$. Supposons ce dernier terme non nul et reprenons les notations du paragraphe 9. Cette non nullité signifie que les points fixes de l'action du Frobenius $\phi_{\bar{z}}$ dans $X_*(T_u)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ sont contenus dans $X_*(Z_G^0)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$. Autrement dit le tore T_u, muni du Frobenius $\phi_{\bar{z}}$, est anisotrope modulo Z_G^0. On peut décomposer $Z_G(u)^0$ en produit $Z_G(u)^0_{red} Z_G(u)^0_{unip}$, où $Z_G(u)^0_{unip}$ est le radical unipotent de $Z_G(u)^0$ et $Z_G(u)^0_{red}$ est un groupe réductif contenant T_u. Cette décomposition est stable par $\phi_{\bar{z}}$. Le tore T_u, muni du Frobenius $\phi_{\bar{z}}$, étant anisotrope modulo Z_G^0, l'est a fortiori modulo le centre de $Z_G(u)^0_{red}$. Mais il est contenu dans le sous-groupe de Borel $B_u \cap Z_G(u)^0_{red}$, lequel est stable par $\phi_{\bar{z}}$. Ces deux propriétés entraînent que $T_u = Z_G(u)^0_{red}$. Alors le polynôme $P_{\bar{z}}(q)$ est simplement q^d, où d est la dimension de $Z_G(u)^0_{unip}$. Sa valeur en $q = 1$ est 1 et la valeur en $q = 1$ de $P_{\bar{z}}(q) det(q - \delta_i(\theta_i \bar{z})|\mathcal{X}_i)$ est $det(1 - \delta_i(\theta_i \bar{z})|\mathcal{X}_i)$. On a supposé ce terme non nul, mais le résultat reste évidemment valable s'il l'est. On obtient alors l'égalité :

$$(1) \qquad \tilde{\lambda}_{i,i'} = (\chi_{i',\theta}, \chi_{i,\theta})_{\theta-ell}.$$

On a supposé $U = U'$, mais cette égalité reste vraie si cette hypothèse n'est pas vérifiée, les deux membres étant nuls.

Soient $i, i' \in I^F$, posons $\nu(i) = (j, \rho)$, $\nu(i') = (j', \rho')$. En utilisant la formule 7(1) et les définitions, on voit que :

$$\tilde{\omega}_{i,i'} = \begin{cases} 0, & si\ j \neq j', \\ (\rho_{j,\theta}, \rho'_{j,\theta})_{\theta-ell}, & si\ j = j'. \end{cases}$$

En utilisant 8(2), 8(3) et les définitions, on voit de même que :

$$\tilde{P}_{i,i'} = \begin{cases} 0, & , si\ j \neq j', \\ P_{j,\theta,\rho,\rho'}, & si\ j = j'. \end{cases}$$

On calcule alors :
$$(\tilde{P}\tilde{\omega}^t\tilde{P})_{i,i'} = \begin{cases} 0, & si\ j \neq j', \\ (\boldsymbol{\rho}_{j,\theta}, \boldsymbol{\rho}'_{j,\theta})_{\theta-ell}, & si\ j = j', \end{cases}$$
ou encore uniformément :
$$(\tilde{P}\tilde{\omega}^t\tilde{P})_{i,i'} = (\boldsymbol{\rho}_{j,\theta}, \boldsymbol{\rho}'_{j',\theta})_{\theta-ell},$$
avec la définition que l'on a posée à la fin du paragraphe 4. Le théorème résulte de cette égalité, de l'égalité (1) et de l'égalité $\tilde{\lambda} = \tilde{P}\tilde{\omega}^t\tilde{P}$. $\square$

12. Quelques définitions combinatoires

Dans la suite de l'article, le corps des coefficients est celui des complexes. Comme on l'a dit dans l'introduction, les résultats des paragraphes précédents se transfèrent à cette situation en fixant un isomorphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ sur $\mathbb{C}$.

Soit r un entier ≥ 0. On note $\mathcal{P}(r)$ l'ensemble des partitions de r, c'est-à-dire des suites $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$ d'entiers ≥ 0 telles que :

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ...$;
- $\lambda_h = 0$ pour tout h assez grand ;
- $r = \lambda_1 + \lambda_2 + ...$

Posons $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour $\lambda \in \mathcal{P}(r)$, on définit la fonction $mult_\lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ par :
$$mult_\lambda(k) = |\{h \in \mathbb{N}^*; \lambda_h = k\}|.$$
On note $Jord(\lambda)$ le sous-ensemble des $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $mult_\lambda(k) \geq 1$, $Jord_{pair}(\lambda)$, resp. $Jord_{impair}(\lambda)$, le sous-ensemble des éléments pairs, resp. impairs, de $Jord(\lambda)$ et, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, $Jord^m(\lambda)$ le sous-ensemble des $k \in Jord(\lambda)$ tels que $mult_\lambda(k) = m$. On dit que λ est symplectique, resp. orthogonale, si $mult_\lambda$ prend des valeurs paires sur $Jord_{impair}(\lambda)$, resp. $Jord_{pair}(\lambda)$.

Supposons $r \geq 1$. On note $O(r)$ le groupe orthogonal d'un espace de dimension r sur $\bar{\mathbb{F}}_p$, muni d'une forme quadratique non dégénérée. On note $SO(r)$ son sous-groupe spécial orthogonal. Si r est pair, on note $Sp(r)$ le groupe symplectique d'un espace de dimension r sur $\bar{\mathbb{F}}_p$, muni d'une forme symplectique non dégénérée.

Supposons toujours $r \geq 1$. On note W_r le groupe de Weyl d'un système de racines de type B_r ou C_r. On le munit de son ensemble de générateurs usuel $\{s_1, ..., s_r\}$. On note δ_r la représentation naturelle de W_r dans $\mathbb{R}^r$. Pour deux fonctions $f, f' : W_r \to \mathbb{C}$, on pose simplement :
$$(f, f')_{ell} = |W_r|^{-1} \sum_{w \in W_r} det(1 - \delta_r(w))\bar{f}(w)f'(w).$$
On note W_r^D le groupe de Weyl d'un système de racines de type D_r. On l'identifie au sous-groupe de W_r engendré par $\{s_1, ..., s_{r-1}, s_r s_{r-1} s_r\}$. Rappelons que les représentations irréductibles de W_r sont paramétrées par les couples (α, β), où α, resp. β, est une partition d'un entier a, resp. b, de sorte que $a + b = r$, cf. [C] proposition 11.4.2. Introduisons la relation d'équivalence sur l'ensemble de ces couples pour laquelle la classe de (α, β) est l'ensemble $\{(\alpha, \beta), (\beta, \alpha)\}$. A toute représentation irréductible de W_r^D est associée une classe d'équivalence. Il ne s'agit pas tout-à-fait d'un paramétrage car une classe formée d'un seul couple (α, α) est associée à deux représentations de W_r^D, dont les induites à W_r sont irréductibles et isomorphes (et bien sûr paramétrées par (α, α)). Soient $\rho \in \hat{W}_r^D$ et (α, β) un élément de la classe associée, supposons $\alpha \neq \beta$. Cela équivaut à ce que ρ se prolonge en une représentation de W_r, et alors ρ se prolonge de deux façons distinctes. Quitte à échanger α et β, on peut supposer que α est plus grand que β pour l'ordre lexicographique. On note alors $\rho^\sharp$, resp. $\rho^\flat$, la représentation irréductible de W_r paramétrée par (α, β), resp. (β, α). Ce sont les deux représentations de W_r prolongeant ρ.

Par convention, si $r = 0$, on pose $O(0) = SO(0) = Sp(0) = W_0 = \{1\}$.

13. Le cas symplectique

Soit r un entier pair ≥ 2. On suppose $p \neq 2$ et on va expliciter nos résultats pour le groupe $G = Sp(r)$ muni de l'automorphisme θ trivial. Il est clair que l'on peut oublier θ dans toutes nos constructions. On simplifie les notations en y supprimant toutes les occurences de θ.

D'après [L1] 10.4, l'ensemble J s'identifie à celui des entiers $h \in \mathbb{N}$ tels que $h(h+1) \leq r$. A un tel entier h, on associe un Lévi $M \simeq (\bar{\mathbb{F}}_p^\times)^{n(h)} \times Sp(h(h+1))$, où $n(h) = \frac{r-h(h+1)}{2}$. L'ensemble $I_{cusp}(M)$ est réduit à un unique élément $(U_c, \mathcal{E}_c)$. L'élément j de J associé à h est alors la classe de conjugaison de $(M, U_c, \mathcal{E}_c)$. Dorénavant, on remplace dans les notations chaque $j \in J$ par l'entier h qui lui est associé. D'après [L1] paragraphe 12, on a $\mathcal{W}_h = W_{n(h)}$. Alors $\tilde{J}$ s'identifie à l'ensemble des couples (h, ρ), où h est comme ci-dessus et $\rho \in \hat{W}_{n(h)}$.

Pour $(h, \rho) \in \tilde{J}$, on a construit au paragraphe 4 une représentation virtuelle $\boldsymbol{\rho}_h$ de $W_{n(h)}$. On ne peut guère l'expliciter davantage, bien qu'elle soit en principe calculable, cf. [L3] paragraphe 24.10. Remarquons toutefois que les coefficients $P_{h,\rho,\rho'}$ sont des entiers ≥ 0, donc $\boldsymbol{\rho}_h$ est somme à coefficients entiers ≥ 0 de représentations irréductibles de $W_{n(h)}$. Par définition, pour $(h, \rho), (h', \rho') \in \tilde{J}$, on a l'égalité :

$$(\boldsymbol{\rho}_h, \boldsymbol{\rho}'_{h'})_{ell} = \begin{cases} 0, & si\ h \neq h' \\ (trace\, \boldsymbol{\rho}_h, trace\, \boldsymbol{\rho}'_h)_{ell}, & si\ h = h', \end{cases}$$

ce dernier terme étant calculé dans $W_{n(h)}$. Remarquons que la conjugaison complexe introduite dans la définition du produit scalaire elliptique pour $W_{n(h)}$ est insignifiante puisque $trace\, \boldsymbol{\rho}_h$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Q}$.

L'ensemble des orbites unipotentes de G est paramétré par l'ensemble des partitions symplectiques de r : à une orbite, on associe la partition formée des dimensions de ses blocs de Jordan. Soient U une orbite unipotente, λ sa partition associée et u un élément de U. Alors le quotient réductif de $Z_G(u)$ s'identifie à :

$$\left(\prod_{k \in Jord_{pair}(\lambda)} O(mult_\lambda(k))\right) \times \left(\prod_{k \in Jord_{impair}(\lambda)} Sp(mult_\lambda(k))\right).$$

Le groupe $Z_G(u)/Z_G(u)^0$ s'identifie à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord_{pair}(\lambda)}$. L'ensemble des systèmes locaux G-équivariants et irréductibles sur U s'identifie au groupe des caractères de ce groupe, i.e. à $\{\pm 1\}^{Jord_{pair}(\lambda)}$. Finalement I s'identifie à l'ensemble des couples (λ, ϵ) formés d'une partition symplectique λ de r et d'un élément $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord_{pair}(\lambda)}$.

Soient $i = (\lambda, \epsilon)$ et $i' = (\lambda', \epsilon')$ deux éléments de I. Considérons la condition :

(1) $\lambda = \lambda'$, $Jord(\lambda) = Jord_{pair}(\lambda)$, $Jord^m(\lambda) = \emptyset$ pour tout $m \geq 3$ et les restrictions de ϵ et ϵ' à $Jord^1(\lambda)$ sont égales.

Si elle n'est pas vérifiée, on pose $((\lambda, \epsilon), (\lambda', \epsilon'))_{ell} = 0$. Si elle l'est, on pose :

$$((\lambda, \epsilon), (\lambda', \epsilon'))_{ell} = \prod_{k \in Jord^2(\lambda)} \epsilon(k)\epsilon'(k).$$

Montrons que :

(2) le terme $(\chi_i, \chi_{i'})_{ell}$ défini au paragraphe 2 est égal à $((\lambda, \epsilon), (\lambda', \epsilon'))_{ell}$.

Si $\lambda \neq \lambda'$, les deux termes sont nuls par définition. Supposons $\lambda = \lambda'$ et utilisons les notations du paragraphe 2. On a décrit ci-dessus le quotient réductif de $Z_G(u)$. Un tore maximal T_u de $Z_G(u)^0$ s'identifie à un produit $\prod_{k \in Jord(\lambda)} T_k$, où :

- pour tout $k \in Jord_{impair}(\lambda)$, T_k est un tore maximal de $Sp(mult_\lambda(k))$;

- pour tout $k \in Jord_{pair}(\lambda)$, T_k est un tore maximal de $SO(mult_\lambda(k))$.

Soit $\bar{z} \in \mathcal{Z}_i = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord_{pair}(\lambda)}$. Pour $k \in Jord(\lambda)$, cet élément $\bar{z}$ agit sur $X_*(T_k)$ de la façon suivante :

- par l'identité si $k \in Jord_{impair}(\lambda)$ ou si $\bar{z}(k) = 0$;

- par l'automorphisme extérieur défini par un élément de $O(mult_\lambda(k)) \setminus SO(mult_\lambda(k))$ si $k \in Jord_{pair}(\lambda)$ et $\bar{z}(k) = 1$.

On s'intéresse aux $\bar{z}$ tels que $det(1 - \delta_i(\bar{z})|\mathcal{X}_i) \neq 0$, autrement dit tels que $\bar{z}$ agisse sur $X_*(T_u)$ sans point fixe non nul. D'après la description ci-dessus, cela équivaut à la réunion des deux conditions :

(3) $Jord_{impair}(\lambda) = \emptyset$ et $Jord^m(\lambda) = \emptyset$ pour tout $m \geq 3$;

(4) $\bar{z}(k) = 1$ pour tout $k \in Jord^2(\lambda)$

(remarquons que, si $k \in Jord_{pair}(\lambda)$ vérifie $mult_\lambda(k) = 1$, T_k est un tore de $SO(1)$, i.e. $T_k = \{1\}$ et toute action sur ce tore est triviale). Si (3) n'est pas vérifiée, aucun $\bar{z}$ ne vérifie les conditions requises et $(\chi_i, \chi_{i'})_{ell} = 0$. Mais (1) n'est pas vérifiée non plus et $((\lambda, \epsilon), (\lambda', \epsilon'))_{ell} = 0$. Supposons (3) vérifiée. Décomposons $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord_{pair}(\lambda)}$ en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord^2(\lambda)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord^1(\lambda)}$ et notons $\bar{z}^2$ l'élément de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord^2(\lambda)}$ tel que $\bar{z}^2(k) = 1$ pour tout $k \in Jord^2(\lambda)$. On peut se limiter au sous-ensemble des $\bar{z}$ vérifiant (4). Cet ensemble est égal à $\{\bar{z}^2\} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord^1(\lambda)}$. Soit $\bar{z}^1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord^1(\lambda)}$, posons $\bar{z} = (\bar{z}^2, \bar{z}^1)$. L'opérateur $1 - \delta_i(\bar{z})$ agit :

- par multiplication par 2 sur $X_*(T_k)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ si $k \in Jord^2(\lambda)$;

- par l'identité sur $X_*(T_k)_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} = \{0\}$ si $k \in Jord^1(\lambda)$.

Donc $det(1 - \delta_i(\bar{z})|\mathcal{X}_i) = 2^{|Jord^2(\lambda)|}$. D'autre part, $|\mathcal{Z}_i| = 2^{|Jord(\lambda)|}$,

$$\chi_i(\bar{z}) = \left(\prod_{k \in Jord^2(\lambda)} \epsilon(k) \right) \left(\prod_{k \in Jord^1(\lambda)} \epsilon(k)^{\bar{z}^1(k)} \right),$$

et une formule analogue vaut pour $\chi_{i'}(\bar{z})$. On obtient :

$$(\chi_i, \chi_{i'})_{ell} = 2^{-|Jord^1(\lambda)|} \left(\prod_{k \in Jord^2(\lambda)} \epsilon(k)\epsilon'(k) \right) \sum_{\bar{z}^1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord^1(\lambda)}} \prod_{k \in Jord^1(\lambda)} (\epsilon(k)\epsilon'(k))^{\bar{z}^1(k)}.$$

Grâce à la formule d'orthogonalité des caractères, appliquée au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord^1(\lambda)}$, ceci est nul si les restrictions de ϵ et ϵ' à $Jord^1(\lambda)$ sont distinctes, i.e. si (1) n'est pas vérifiée. Sinon, c'est égal à $\prod_{k \in Jord^2(\lambda)} \epsilon(k)\epsilon'(k)$, i.e. à $((\lambda, \epsilon), (\lambda', \epsilon'))_{ell}$. Cela démontre (2).

Avec les définitions ci-dessus, notre théorème s'écrit :

Corollaire. *Soient $(\lambda, \epsilon), (\lambda', \epsilon') \in I$, posons $(h, \rho) = \nu(\lambda, \epsilon)$, $(h', \rho') = \nu(\lambda', \epsilon')$. Alors on a l'égalité :*

$$((\lambda, \epsilon), (\lambda', \epsilon'))_{ell} = \begin{cases} 0, & si\ h \neq h' \\ (trace\, \boldsymbol{\rho}_h, trace\, \boldsymbol{\rho}'_h)_{ell}, & si\ h = h', \end{cases}$$

14. Le cas orthogonal

Soit r un entier ≥ 1. On suppose $p \neq 2$. Considérons le groupe $SO(r)$. On note θ^+ l'automorphisme identité de ce groupe. On fixe un élément d'ordre 2 de $O(r) \setminus SO(r)$ et on note θ^- l'automorphisme de $SO(r)$ égal à la conjugaison par cet élément. Evidemment $\theta^+ = \theta^-$ si r est impair et la considération de θ^- n'a d'intérêt que si r est pair. On va expliciter nos résultats pour le groupe $SO(r)$ muni soit de $\theta = \theta^+$, soit, dans le cas où r est pair, de $\theta = \theta^-$.

D'après [L1] 10.6, J est paramétré par l'ensemble des entiers $h \in \mathbb{N}$ tels que $h \equiv r\ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $h^2 \leq r$. A un tel entier h, on associe un Lévi $M \simeq (\bar{\mathbb{F}}_p^\times)^{n(h)} \times SO(h^2)$, où $n(h) = \frac{r-h^2}{2}$. L'ensemble $I_{cusp}(M)$ est réduit à un unique élément $(U_c, \mathcal{E}_c)$. L'élément de J associé à h est alors la classe de conjugaison de $(M, U_c, \mathcal{E}_c)$. Dorénavant, on remplace dans les notations chaque $j \in J$ par l'entier h qui lui est associé. D'après [L1] paragraphe 13, on a $\mathcal{W}_h = W_{n(h)}$ si $h \neq 0$, $\mathcal{W}_h = W^D_{n(0)} = W^D_{r/2}$ si $h = 0$. Donc $\tilde{J}$ est l'ensemble des couples (h, ρ) où $h \in J$ et $\rho \in \hat{W}_{n(h)}$ si $h \neq 0$, $\rho \in \hat{W}^D_{r/2}$ si $h = 0$. L'automorphisme θ agit trivialement sur J. Soit $h \in J$. Alors θ agit trivialement sur $\mathcal{W}_h$ sauf dans le cas où $h = 0$ et $\theta = \theta^-$. Dans ce cas, en faisant des choix convenables, θ^- agit sur $W^D_{r/2}$ par conjugaison par l'élément $s_{r/2}$ de $W_{r/2}\setminus W^D_{r/2}$. Si $\theta=\theta^+$, on a $\tilde{J}^\theta=\tilde{J}$. Si r est pair et $\theta=\theta^-$, $\tilde{J}^\theta$ est obtenu en supprimant de $\tilde{J}$ les couples $(0,\rho)$ pour les $\rho\in\hat{W}^D_{r/2}$ qui ne se prolongent pas en une représentation de $W_{r/2}$.

Soit $(h,\rho)\in\tilde{J}^\theta$. Si $\theta=\theta^+$ ou $h\neq 0$, on peut choisir les isomorphismes Θ_{K_h} et $\Theta_{A_{h,\rho}}$ de sorte que Θ_ρ soit l'identité. Si $\theta=\theta^-$ et $h=0$, on peut les choisir de sorte que $\Theta_\rho=\rho^\sharp(s_{r/2})$, cf. paragraphe 12 pour la définition de $\rho^\sharp$. Soit $\rho'\in\hat{\mathcal{W}}^\theta_h$. On a défini un coefficient $P_{h,\theta,\rho,\rho'}$. C'est un entier et même un entier ≥ 0 si $\theta=\theta^+$. On définit une fonction $f_{h,\theta,\rho}$ sur $W_{n(h)}$ par les égalités suivantes, où toutes les sommes portent sur $\rho'\in\hat{\mathcal{W}}^\theta_h$:

- si $h\neq 0$, $f_{h,\theta,\rho}=\sum_{\rho'}P_{h,\theta,\rho,\rho'}trace\,\rho'$;

- si $h=0$ et $\theta=\theta^+$,

$$f_{0,\theta^+,\rho}(w)=\begin{cases}\sum_{\rho'}P_{0,\theta^+,\rho,\rho'}trace\,\rho'(w), & pour\ w\in W^D_{r/2},\\ 0, & pour\ w\in W_{r/2}\setminus W^D_{r/2};\end{cases}$$

- si $h=0$ et $\theta=\theta^-$,

$$f_{0,\theta^-,\rho}(w)=\begin{cases}0, & pour\ w\in W^D_{r/2}\\ \sum_{\rho'}P_{0,\theta^-,\rho,\rho'}trace\,\rho'^\sharp(w), & pour\ w\in W_{r/2}\setminus W^D_{r/2}.\end{cases}$$

Soient alors (h,ρ), (h',ρ') deux éléments de $\tilde{J}^\theta$. On a l'égalité :

$$(1)\qquad (\boldsymbol{\rho}_{h,\theta},\boldsymbol{\rho}'_{h',\theta})_{\theta-ell}=\begin{cases}0, & si\ h\neq h',\\ (f_{h,\theta,\rho},f_{h,\theta,\rho'})_{ell}, & si\ h=h'\neq 0,\\ 2(f_{0,\theta,\rho},f_{0,\theta,\rho'})_{ell}, & si\ h=h'=0.\end{cases}$$

A droite, il s'agit du produit scalaire défini au paragraphe 12 de fonctions définies sur $W_{n(h)}$. Si $h=h'=0$, un facteur 2 s'introduit car on divise par $|\mathcal{W}_0|=|W^D_{r/2}|$ dans la définition du membre de gauche tandis que l'on divise par $|W_{r/2}|$ dans celle du membre de droite.

Disons qu'une partition orthogonale λ de r est exceptionnelle si $Jord_{impair}(\lambda)=\emptyset$. Ce n'est possible que si r est divisible par 4. L'ensemble des orbites unipotentes de $SO(r)$ est presque paramétré par l'ensemble des partitions orthogonales de r. Le "presque" vient de ce qu'une partition exceptionnelle paramètre deux orbites qui sont conjuguées dans $O(r)$. Soient U une orbite unipotente, λ sa partition associée et u un élément de U. Alors le quotient réductif de $Z_G(u)$ s'identifie au sous-groupe des éléments de :

$$\left(\prod_{k\in Jord_{impair}(\lambda)}O(mult_\lambda(k))\right)\times\left(\prod_{k\in Jord_{pair}(\lambda)}Sp(mult_\lambda(k))\right)$$

dont le produit des déterminants vaut 1. Pour tout ensemble fini, notons $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X_0$ le sous-ensemble des $z\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$ tels que $\sum_{x\in X}z(x)=0$ et $\{\pm1\}^X/\Delta$ le quotient de $\{\pm1\}^X$ par l'image de l'homomorphisme diagonal $\{\pm1\}\to\{\pm1\}^X$. Si λ est exceptionnelle, $Z_G(u)/Z_G(u)^0=\{1\}$. Sinon, $Z_G(u)/Z_G(u)^0$ s'identifie à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^{Jord_{impair}(\lambda)}$. Son groupe des caractères est :

$$\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}/\Delta.$$

On peut alors identifier I à l'ensemble formé :

- des couples (λ,ϵ) où λ est une partition orthogonale de r non exceptionnelle et $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}/\Delta$;

- des couples (λ,ϵ) où λ est une partition orthogonale exceptionnelle de r et $\epsilon\in\{\pm1\}$.

On a adopté une notation uniforme mais, dans le second cas, ϵ ne se réfère pas à un système local. C'est juste un symbole paramétrant de façon arbitraire les deux orbites associées à λ.

La correspondance de Springer généralisée associe à un couple $(\lambda,\epsilon)\in I$ un couple $(h,\rho)\in J$. Nous aurons besoin du résultat suivant. Soit λ une partition orthogonale non exceptionnelle de r. Notons $k_1>...>k_t$ les éléments $k\in Jord_{impair}(\lambda)$ tels que $mult_\lambda(k)$ soit impair. Soit $\check{\epsilon}\in\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}$, posons :

$$N(\check{\epsilon})=\sum_{s=1,...,t;\check{\epsilon}(k_s)=-1}(-1)^s.$$

Notons ϵ l'image de $\check{\epsilon}$ dans $\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}/\Delta$ et $(h,\rho)=\nu(\lambda,\epsilon)$. Alors on a l'égalité :

$$h=\begin{cases}|2N(\check{\epsilon})+1|, & si\ r\ est\ impair,\\ |2N(\check{\epsilon})|, & si\ r\ est\ pair\end{cases}$$

([W2] lemme XI.4). Inversement, soit $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}/\Delta$, posons $(h,\rho)=\nu(\lambda,\epsilon)$. Si $h\neq0$, on note $\epsilon^\sharp$ l'unique relèvement de ϵ dans $\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}$ tel que :

$$h=\begin{cases}2N(\epsilon^\sharp)+1, & si\ r\ est\ impair,\\ 2N(\epsilon^\sharp), & si\ r\ est\ pair.\end{cases}$$

Si $\theta=\theta^+$, on a $I=I^\theta$. Pour tout $i\in I$, θ_i agit trivialement sur $\mathcal{X}_i$ et $\mathcal{Z}_i$ et l'opérateur $\Theta_i=\chi_{i,\theta}(\theta_i)$ est l'identité.

Supposons r pair et $\theta=\theta^-$. Alors I^{θ^-} est obtenu en supprimant de I les (λ,ϵ) pour λ exceptionnelle. Soit $(\lambda,\epsilon)\in I^{\theta^-}$. Notons k_{max} le plus grand élément de $Jord_{impair}(\lambda)$. On peut effectuer les différents choix de sorte que les actions de θ_i sur $\mathcal{X}_i$ et $\mathcal{Z}_i$ soient égales à celles déduites de la conjugaison par un élément de $O(mult_\lambda(k_{max}))\setminus SO(mult_\lambda(k_{max}))$. En particulier, l'action sur $\mathcal{Z}_i$ est triviale. Posons $(h,\rho)=\nu(\lambda,\epsilon)$. Le choix que l'on a fait de l'opérateur $\Theta_{A_{h,\rho}}$ détermine l'opérateur $\Theta_i=\chi_{i,\theta}(\theta_i)$. Remarquons que Θ_i est une homothétie puisque χ_i est de dimension 1, et que l'on peut donc l'identifier au rapport de cette homothétie. Le calcul de ce scalaire est un ingrédient de celui des fonctions de Green, lequel a été effectué par Shoji ([Sh]). On a repris ce calcul en [W2] proposition VIII.12. Le résultat est le suivant :

- si $h\neq0$, $\Theta_i=\epsilon^\sharp(k_{max})$;
- si $h=0$, $\Theta_i=1$.

Soient $i=(\lambda,\epsilon)$, $i'=(\lambda',\epsilon')$ deux éléments de I^θ. Considérons la condition :

(3) $\lambda=\lambda'$, $Jord(\lambda)=Jord_{impair}(\lambda)$, $Jord^m(\lambda)=\emptyset$ pour tout $m\geq3$ et les images naturelles de ϵ et ϵ' dans $\{\pm1\}^{Jord^1(\lambda)}/\Delta$ sont égales.

Remarquons que la deuxième condition interdit à λ d'être exceptionnelle. Donc ϵ et ϵ' sont des éléments de $\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}/\Delta$, ce qui donne un sens à la dernière condition. Si la condition (3) n'est pas vérifiée, on pose :

$$((\lambda,\epsilon),(\lambda',\epsilon'))_{\theta-ell}=0.$$

Si elle l'est, on choisit des relèvements $\check{\epsilon}$ et $\check{\epsilon}'$ de ϵ et ϵ' dans $\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}$ qui coïncident sur $Jord^1(\lambda)$. Notons $(h,\rho)=\nu(i)$, $(h',\rho')=\nu(i')$. Il résulte de (2) que $h=h'$. Comme ci-dessus, on note k_{max} le plus grand élément de $Jord_{impair}(\lambda)$ et on pose :

$$((\lambda,\epsilon),(\lambda',\epsilon'))_{\theta-ell}=\begin{cases}\prod_{k\in Jord^2(\lambda)}\check{\epsilon}(k)\check{\epsilon}'(k), & si\ \theta=\theta^+\ et\ Jord^1(\lambda)\neq\emptyset\\ & ou\ si\ \theta=\theta^-\ et\ h\neq0,\\ 2\prod_{k\in Jord^2(\lambda)}\check{\epsilon}(k)\check{\epsilon}'(k), & si\ \theta=\theta^+,\ Jord^1(\lambda)=\emptyset\\ & et\ |Jord^2(\lambda)|\ est\ pair,\\ 0, & si\ \theta=\theta^+,\ Jord^1(\lambda)=\emptyset\\ & et\ |Jord^2(\lambda)|\ est\ impair\ ou\ si\ \theta=\theta^-,\\ & Jord^1(\lambda)=\emptyset\ et\ |Jord^2(\lambda)|\ est\ pair,\\ \check{\epsilon}(k_{max})\check{\epsilon}'(k_{max})\prod_{k\in Jord^2(\lambda)}\check{\epsilon}(k)\check{\epsilon}'(k), & si\ \theta=\theta^-,\ h=0\ et\ Jord^1(\lambda)\neq\emptyset,\\ 2\check{\epsilon}(k_{max})\check{\epsilon}'(k_{max})\prod_{k\in Jord^2(\lambda)}\check{\epsilon}(k)\check{\epsilon}'(k), & si\ \theta=\theta^-,\ Jord^1(\lambda)=\emptyset\\ & et\ |Jord^2(\lambda)|\ est\ impair.\end{cases}$$

Un raisonnement à peine plus compliqué qu'en 13(2) montre que l'on a l'égalité :

$$(\chi_{i,\theta},\chi_{i',\theta})_{\theta-ell}=((\lambda,\epsilon),(\lambda',\epsilon'))_{\theta-ell}.$$

Le théorème affirme donc l'égalité de $((\lambda,\epsilon),(\lambda',\epsilon'))_{\theta-ell}$ et de l'expression (1) où $(h,\rho)=\nu(i)$ et $(h',\rho')=\nu(i')$. On va en donner une autre formulation à peu près équivalente.

Notons $\check{I}$ l'ensemble des couples $(\lambda,\check{\epsilon})$, où λ est une partition orthogonale de r et $\check{\epsilon}\in\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}$. Notons $\check{J}$ l'ensemble des couples $(\check{h},\rho)$ formés d'un élément $\check{h}\in\mathbb{Z}$ tel que $\check{h}\equiv r\ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $|\check{h}|^2\leq r$ et d'une représentation $\rho\in\hat{W}_{n(\check{h})}$, où $n(\check{h})=\frac{r-\check{h}^2}{2}$. On définit une application $\check{\nu}:\check{I}\to\check{J}$ de la façon suivante. Soit $(\lambda,\check{\epsilon})\in\check{I}$, supposons d'abord λ non exceptionnelle. Notons ϵ l'image de $\check{\epsilon}$ dans $\{\pm1\}^{Jord_{impair}(\lambda)}/\Delta$ et $(h,\rho)=\nu(\lambda,\epsilon)$. Posons :

$$\check{h}=\begin{cases}2N(\check{\epsilon})+1, & si\ r\ est\ impair,\\ 2N(\check{\epsilon}), & si\ r\ est\ pair.\end{cases}$$

On a donc $h=|\check{h}|$. Si $h\neq0$, on pose $\check{\nu}(\lambda,\check{\epsilon})=(\check{h},\rho)$. Supposons $h=0$, notons de nouveau k_{max} le plus grand élément de $Jord_{impair}(\lambda)$. On pose :

$$\check{\nu}(\lambda,\check{\epsilon})=\begin{cases}(0,\rho^\sharp), & si\ \check{\epsilon}(k_{max})=1,\\ (0,\rho^\flat), & si\ \check{\epsilon}(k_{max})=-1\end{cases}$$

(cf. paragraphe 12 pour les définitions de $\rho^\sharp$ et $\rho^\flat$). Supposons maintenant λ exceptionnelle (alors $\check{\epsilon}=\emptyset$). Pour $\epsilon\in\{\pm1\}$, posons $\nu(\lambda,\epsilon)=(0,\rho_\epsilon)$. Les représentations ρ_1 et ρ_{-1} de $W^D_{r/2}$ ont même induite à $W_{r/2}$. Notons ρ cette induite. On pose $\check{\nu}(\lambda,\check{\epsilon})=(0,\rho)$. Cela achève la définition de l'application $\check{\nu}$. Celle-ci est bijective.

Soient $(\check{h},\rho)\in\check{J}$ et ρ' une autre représentation irréductible de $W_{n(\check{h})}$. Nous allons définir un nombre $P_{\check{h},\rho,\rho'}$. Si $\check{h}>0$ ou $\check{h}$ impair, on pose $P_{\check{h},\rho,\rho'}=P_{|\check{h}|,\theta^+,\rho,\rho'}$. Si $\check{h}<0$ et $\check{h}$ pair, on pose $P_{\check{h},\rho,\rho'}=P_{|\check{h}|,\theta^-,\rho,\rho'}$. Si $\check{h}=0$, on distingue différents cas. Notons ρ_0 la restriction de ρ à $W^D_{r/2}$. Il y a trois cas :

(I) ρ_0 irréductible et $\rho=\rho_0^\sharp$;

(II) ρ_0 irréductible et $\rho=\rho_0^\flat$;

(III) ρ_0 se décompose en deux sous-modules irréductibles ρ_1 et ρ_2.

On distingue des cas similaires (I'), (II'), (III') relativement à ρ'. Si l'on est dans l'un des cas (III) ou (III'), on pose :

$$P_{0,\rho,\rho'}=\frac{1}{2}\sum_{\rho_i,\rho'_j}P_{0,\theta^+,\rho_i,\rho'_j}$$

où :

- les ρ_i parcourent l'ensemble $\{\rho_0\}$ dans les cas (I) et (II) et l'ensemble $\{\rho_1,\rho_2\}$ dans le cas (III) ;

- les ρ'_j parcourent l'ensemble $\{\rho'_0\}$ dans les cas (I') et (II') et l'ensemble $\{\rho'_1,\rho'_2\}$ dans le cas (III').

Si l'on est à la fois dans l'un des cas (I) ou (II) et dans l'un des cas (I') ou (II'), on pose :

$$P_{0,\rho,\rho'}=\frac{1}{2}(P_{0,\theta^+,\rho_0,\rho'_0}+\eta P_{0,\theta^-,\rho_0,\rho'_0}),$$

où $\eta=1$ dans les cas (I) (I') (c'est-à-dire que (I) et (I') sont tous deux vérifiés) ou (II) (II') et $\eta=-1$ dans les cas (I) (II') ou (II) (I').

On vérifie que $P_{\check{h},\rho,\rho'}$ est un entier. On pose :

$$\boldsymbol{\rho}_{\check{h}}=\sum_{\rho'\in W_{n(\check{h})}}P_{\check{h},\rho,\rho'}\rho'.$$

C'est une représentation virtuelle de $W_{n(\check{h})}$.

Soient $(\lambda,\check{\epsilon})$, $(\lambda',\check{\epsilon}')$ deux éléments de $\check{I}$. Considérons la condition :

(4) $\lambda=\lambda'$, $Jord(\lambda)=Jord_{impair}(\lambda)$, $Jord^m(\lambda)=\emptyset$ pour tout $m\geq 3$ et les restrictions de $\check{\epsilon}$ et $\check{\epsilon}'$ à $\{\pm1\}^{Jord^1(\lambda)}$ sont égales.

Si elle n'est pas vérifiée, on pose $((\lambda,\check{\epsilon}),(\lambda',\check{\epsilon}'))_{ell}=0$. Si elle l'est, on pose :

$$((\lambda,\check{\epsilon}),(\lambda',\check{\epsilon}'))_{ell}=\prod_{k\in Jord^2(\lambda)}\check{\epsilon}(k)\check{\epsilon}'(k).$$

Notre résultat peut se reformuler ainsi :

Corollaire. *Soient* $(\lambda,\check{\epsilon})$, $(\lambda',\check{\epsilon}')$ *deux éléments de* $\check{I}$, *posons* $(\check{h},\rho)=\check{\nu}(\lambda,\check{\epsilon})$, $(\check{h}',\rho')=\check{\nu}(\lambda',\check{\epsilon}')$. *Alors on a l'égalité :*

$$((\lambda,\check{\epsilon}),(\lambda',\check{\epsilon}'))_{ell}=\begin{cases}0, & si\ \check{h}\neq\check{h}',\\ (\boldsymbol{\rho}_{\check{h}},\boldsymbol{\rho}'_{\check{h}'})_{ell}, & si\ \check{h}=\check{h}'.\end{cases}$$

Cet énoncé est un peu moins précis que le théorème puisqu'il ne voit les objets qu'à conjugaison par $O(r)$ près.

Bibliographie

[A] J. Arthur :*On elliptic characters*, Acta math 171 (1993), p.73-138

[C] R. Carter : *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience 1993

[L1] G. Lusztig : *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Inventiones Math. 75 (1984), p.205-272

[L3] ———— : *Character sheaves II*, Advances in Math. 57 (1985), p.226-265

[L3] ———— :*Character sheaves V*, Advances in Math. 61 (1986), p.103-155

[R] M. Reeder : *Euler-Poincaré pairings and elliptic representations of Weyl groups and p-adic groups*, Compositio Math. 129 (2001), p.149-181

[S] J.-P. Serre : *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann 1971

[Sh] T. Shoji : *On the Green polynomials of classical groups*, Inventiones Math. 74 (1983), p. 239-267

[W1] J.-L. Waldspurger : *Le groupe* GL_N *tordu, sur un corps p-adique, 2ème partie*, prépublication 2005

[W2] ———————— : *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque 269 (2001)

CNRS-Institut de mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
e-mail waldspur@math.jussieu.fr