Une remarque sur les systèmes de racines

J.-L. Waldspurger

23 septembre 2005

Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie et R un sous-ensemble de V. On suppose que R est un système de racines dans V (cf. [B], VI.1.1). On note W son groupe de Weyl et on fixe une forme bilinéaire symétrique $(.,.)$ sur V, définie positive et invariante par W. Pour tout $\alpha \in R$, on note s_α la réflexion appartenant à W associée à α, autrement dit la symétrie orthogonale d'ensemble de points fixes l'hyperplan orthogonal à α. Soit Δ une base de R (cf. [B] VI.1.5). On pose :

$$C^+ = \{v \in V; \forall \alpha \in \Delta, (\alpha, v) > 0\}.$$

On note ${}^+C$ le cône ouvert engendré par Δ, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \alpha$ à coefficients $x_\alpha > 0$. Pour tout sous-ensemble X de V, on note $\overline{X}$ sa clôture.

Il est bien connu que pour tout $w \in W$, on a l'inclusion :

$$(1-w)(C^+) \subseteq \overline{{}^+C}.$$

Indiquons rapidement la démonstration. On choisit une décomposition minimale $w = s_{\alpha_1} ... s_{\alpha_k}$ où les α_i appartiennent à Δ. On montre par récurrence sur k que, pour $v \in V$, on a l'égalité :

$$(1) \qquad (1-w)(v) = \sum_{i=1,...,k} 2\frac{(\alpha_i, v)}{(\alpha_i, \alpha_i)} s_{\alpha_1} ... s_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i).$$

Les racines intervenant dans cette expression sont positives (pour l'ordre défini par Δ) et, si v appartient à C^+, les coefficients sont > 0.

Le résultat suivant semble moins connu et le but de cette note est d'en donner une démonstration.

Proposition. *L'ensemble* $\overline{{}^+C}$ *est réunion disjointe des sous-ensembles* $(1-w)(C^+)$ *quand* w *parcourt* W.

La disjonction est facile. Soient $w, w' \in W$, $v, v' \in C^+$, supposons $(1-w)(v) = (1-w')(v')$. Posons $y = w^{-1}w'$. On a alors $v - v' = w(v - y(v'))$. Notons $O(V)$ le groupe orthogonal de V relatif à la forme bilinéaire $(.,.)$ et, pour tout $u \in V$, posons $||u|| = (u,u)^{1/2}$. Puisque w appartient à $O(V)$, l'égalité précédente entraîne $||v - v'|| = ||v - y(v')||$. Et puisque y appartient à $O(V)$, cette dernière entraîne $(v, v') = (v, y(v'))$, ou encore $(v, v' - y(v')) = 0$. Puisque v appartient à C^+ et $v' - y(v')$ à $\overline{{}^+C}$, cela n'est possible que si $v' = y(v')$. L'identité est le seul élément de W qui fixe un élément de C^+ (cf. [B] p.280). Donc $y = 1$ et $w = w'$.

Pour tout $w \in W$, posons $C_w = (1-w)(C^+)$. L'essentiel est donc de prouver l'inclusion :

$$\overline{{}^+C} \subseteq \bigcup_{w\in W} C_w.$$

Notons W_{reg} le sous-ensemble des éléments de w sans point fixe non nul. Il n'est pas vide. Par exemple, tout élément de Coxeter lui appartient. Rappelons qu'un élément de Coxeter est un élément qui s'écrit $s_{\alpha_1} ... s_{\alpha_k}$, où les α_i parcourent exactement Δ dans un ordre quelconque. Qu'un tel élément n'ait pas de point fixe non nul résulte aisément de la formule (1). On va d'abord prouver l'inclusion :

$$(2) \qquad \overline{{}^+C} \subseteq \bigcup_{w\in W_{reg}} \overline{C_w}.$$

Il suffit évidemment de prouver que ${}^+C$ est inclus dans cette réunion. Soit $v \in {}^+C$. Puisque les ensembles C_w sont des cônes et que W_{reg} n'est pas vide, on peut choisir $w_0 \in W_{reg}$ et $v_0 \in C_{w_0}$ de sorte que $v - v_0 \in {}^+C$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, notons H_α l'hyperplan orthogonal à α. Considérons les sous-espaces $(1-w)(H_\alpha \cap H_\beta)$ de V, pour $w \in W$, $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$. Ils sont en nombre fini et chacun d'eux est de codimension au moins 2. L'ensemble des $v' \in V$ tels que le segment joignant v' et v ne coupe aucun de ces sous-espaces, sauf peut-être en v, est donc un ouvert dense dans V. Puisque w_0 appartient à W_{reg}, C_{w_0} est ouvert et on peut modifier v_0 de sorte que le segment joignant v_0 à v ne coupe aucun des sous-espaces ci-dessus, sauf peut-être en v. Notons T ce segment, que l'on paramètre : pour $t \in [0,1]$, on pose $v_t = (1-t)v_0 + tv$. Posons :

$$T' = \bigcup_{w \in W_{reg}} \overline{C_w \cap T}.$$

On va montrer que $T' = T$, ce qui entraînera que v appartient à l'ensemble de droite de la relation (2), comme on veut le prouver. Notons δ le plus grand élément de $[0,1]$ tel que $v_t \in T'$ pour tout $t \in [0,\delta]$. On a $\delta > 0$ car T' contient le voisinage $C_{w_0} \cap T$ de v_0 dans T. Il s'agit de prouver que $\delta = 1$. Supposons $\delta \neq 1$. Puisque T' est réunion finie de clôtures d'intervalles ouverts (dans T), on peut trouver $w \in W_{reg}$ et $\epsilon > 0$ assez petit de sorte que :

- pour $t \in]\delta, \delta+\epsilon[$, $v_t \notin T'$;
- pour $t \in]\delta-\epsilon, \delta[$, $v_t \in C_w$.

Fixons de tels éléments. Posons $f = v - v_0$, soient e et u les éléments de V tels que $(1-w)(e) = f$ et $(1-w)(u) = v_\delta$. Pour $x \in]-\epsilon, \epsilon[$, on a $(1-w)(u+xe) = v_{\delta+x}$. Pour $x \in]-\epsilon, 0[$, $v_{\delta+x}$ appartient à C_w donc $u + xe$ appartient à C^+. Pour $x \in]0, \epsilon[$, $v_{\delta+x}$ n'appartient pas à C_w, donc $u + xe$ n'appartient pas à C^+. Il en résulte que $u \in \overline{C^+}$ mais $u \notin C^+$. Il y a une racine $\alpha \in \Delta$ telle que $(\alpha, u) = 0$. Cette racine est unique : sinon v_δ appartiendrait à un espace $(1-w)(H_\alpha \cap H_\beta)$ de la forme décrite plus haut, contrairement à l'hypothèse sur v_0. Soit a l'élément de V tel que $(1-w^{-1})(a) = \alpha$. Remarquons que l'on a l'égalité :

$$(3) \qquad (a, \alpha) = \frac{(\alpha, \alpha)}{2}.$$

En effet, parce que $w^{-1} \in O(V)$, l'égalité $w^{-1}(a) = a - \alpha$ entraîne $||a|| = ||a - \alpha||$, et cela entraîne (3). Posons $\sigma = ws_\alpha$. L'ensemble des points fixes de σ est l'ensemble des $z \in V$ tels que $s_\alpha(z) = w^{-1}(z)$, ou encore $z - s_\alpha(z) = (1-w^{-1})(z)$, ou encore $2\frac{(\alpha,z)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = (1-w^{-1})(z)$. Cet ensemble est inclus dans la droite portée par a et, inversement, la relation (3) montre que tout élément de cette droite vérifie la condition précédente. Cette droite est donc égale à l'ensemble des points fixes de σ. Puisque $(\alpha, u) = 0$, on a $s_\alpha(u) = u$, donc $(1-\sigma)(u) = (1-w)(u) = v_\delta$. On a aussi $(1-\sigma)(u + xa) = v_\delta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrons les propriétés :

- pour $x > 0$ assez petit, $u + xa$ appartient à C^+ ;
- il existe $x > 0$ tel que $u + xa$ n'appartient pas à C^+.

En effet, grâce à (3), on a $(\alpha, u + xa) > 0$ pour tout $x > 0$. Si $\beta \in \Delta$, $\beta \neq \alpha$, on a $(\beta, u) > 0$ donc aussi $(\beta, u + xa) > 0$ si x est assez petit. D'autre part, on a les égalités :

$$(a, f) = (a, (1-w)(e)) = ((1-w^{-1})(a), e) = (\alpha, e).$$

Puisque $u + xe \in C^+$ pour $x \in]-\epsilon, 0[$ tandis que $(\alpha, u) = 0$, on a $(\alpha, e) < 0$. Donc $(a, f) < 0$. Si $x > 0$ est assez grand, on a aussi $(u + xa, f) < 0$. Mais f appartient à ${}^+C$, cette inégalité entraîne donc $u + xa \notin C^+$.

Soit ξ le plus petit réel > 0 tel que $u + \xi a \notin C^+$. Posons $u' = u + \xi a$. On a $(1-\sigma)(u') = v_\delta$. On a $u' \in \overline{C^+}$ mais $u' \notin C^+$, il existe donc une racine $\beta \in \Delta$ tel que $(\beta, u') = 0$. Cette racine est unique pour la même raison que tout-à-l'heure. On a $(\beta, u' - xa) > 0$ pour $x > 0$ assez petit, tandis que $(\beta, u') = 0$, donc $(\beta, a) < 0$. Posons $w' = \sigma s_\beta$. L'ensemble des points fixes de w' est l'ensemble des $z \in V$ tels que $s_\beta(z) = \sigma^{-1}(z)$, ou encore $z - s_\beta(z) = (1-\sigma^{-1})(z)$, ou encore :

$$(4) \qquad 2\frac{(\beta,z)}{(\beta,\beta)}\beta = (1-\sigma^{-1})(z).$$

Parce que $\sigma \in O(V)$, l'image de $1-\sigma^{-1}$ est l'orthogonal du noyau de $1-\sigma$, et ce noyau est la droite portée par a. La relation $(\beta, a) < 0$ montre que β n'appartient pas à l'image de $1-\sigma^{-1}$. La relation (4) équivaut donc à la réunion des deux conditions $(1-\sigma^{-1})(z) = 0$ et $(\beta, z) = 0$. La première entraîne que z est proportionnel à a, la seconde entraîne alors $z = 0$. Cela prouve que w' n'a pas de point fixe non nul, i.e. $w' \in W_{reg}$. Soit $e' \in V$ tel que $(1-w')(e') = f$. Montrons que :

$$(5) \qquad (\beta, e') > 0.$$

Posons $c = \frac{(\beta,\beta)}{2(\beta,a)}$. On vérifie que $(1-w'^{-1})(ca) = \beta$. On calcule alors :

$$(\beta, e') = ((1-w'^{-1})(ca), e') = (ca, (1-w')(e')) = c(a,f).$$

On a déjà montré que c et (a,f) étaient tous deux < 0, d'où (5). Puisque $(\beta, u') = 0$, on a $s_\beta(u') = u'$ et $(1-w')(u') = (1-\sigma)(u') = v_\delta$. Pour tout $x \in]0, \epsilon[$, on a $(1-w')(u'+xe') = v_\delta + xf = v_{\delta+x}$. Grâce à (5) et à un raisonnement déjà fait, $u' + xe'$ appartient à C^+ si $x > 0$ est assez petit. Pour un tel x, on a donc $v_{\delta+x} \in C_{w'}$. Cela contredit la définition de δ. Cette contradiction achève de prouver l'inclusion (2).

Pour terminer la démonstration, on va utiliser un lemme pour lequel il convient de modifier nos données. On suppose le temps de ce lemme que V est sous-espace d'un espace vectoriel réel $\mathcal{V}$ de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, notée encore $(.,.)$, dont la restriction à V est la forme de départ. Tout élément du groupe orthogonal $O(V)$, et en particulier de son sous-groupe W, se prolonge naturellement en un élément de $O(\mathcal{V})$ fixant point par point l'orthogonal de V. Posons $\mathcal{C}^+ = \{v \in \mathcal{V}; \forall \alpha \in \Delta, (\alpha, v) > 0\}$.

Lemme. *Soit $\dot{g} \in O(\mathcal{V})$. Il existe un élément $w \in W$ tel que $w\dot{g}$ admette un point fixe dans $\mathcal{C}^+$. Cet élément w est unique.*

On prouvera ce lemme plus loin.

Introduisons les notations suivantes. Pour $v \in V$ (ou $v \in \mathcal{V}$ dans la situation du lemme), on note Δ_v le sous-ensemble des $\alpha \in \Delta$ tels que $(\alpha, v) = 0$, V_v le sous-espace de V engendré par Δ_v, $R_v = R \cap V_v$, W_v le groupe de Weyl du système de racines R_v. C'est le sous-groupe de W engendré par les symétries s_α pour $\alpha \in \Delta_v$. Tout élément de W_v fixe v.

Achevons la preuve de la proposition. Compte tenu de (2), il suffit de fixer $w \in W_{reg}$ et de prouver l'inclusion :

$$\overline{C_w} \subseteq \bigcup_{w' \in W} C_{w'}.$$

Fixons $w \in W_{reg}$ et $v \in \overline{C_w}$. On a l'égalité $\overline{C_w} = (1-w)(\overline{C^+})$. Soit $u \in \overline{C^+}$ tel que $(1-w)(u) = v$. On applique le lemme aux données indiquées ci-après. A gauche, on indique les objets tels qu'on les a notés pour énoncer le lemme, à droite les objets de la présente démonstration :

$$(\mathcal{V}, V, R, W, \dot{g}) \longleftrightarrow (V, V_u, R_u, W_u, w^{-1}).$$

Le lemme nous fournit un élément $w' \in W_u$ et un élément $z \in V$ tels que $w'w^{-1}(z) = z$ et $(\alpha, z) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_u$. Posons $y = ww'^{-1}$. Parce que w' appartient à W_u, il fixe u. On a donc $v = (1-w)(u) = (1-y)(u)$. On a aussi $v = (1-y)(u+xz)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par un raisonnement déjà fait, on a $u + xz \in C^+$ si x est > 0 et assez petit. Donc v appartient à C_y, ce qui achève la démonstration. □

Preuve du lemme. L'unicité de w se prouve par le même argument que nous avons utilisé pour prouver la disjonction des ensembles C_w. L'essentiel est de prouver l'existence. Posons $G = \{w\dot{g}; w \in W\}$. On va d'abord prouver :

(6) supposons que $\mathcal{V}$ est non nul et que $\dot{g}$ ne conserve aucun sous-espace non nul orthogonal à V ; alors il existe $g \in G$ tel que g admette un point fixe non nul dans $\overline{\mathcal{C}^+}$.

Remarquons que l'hypothèse sur $\dot{g}$ équivaut à la même hypothèse pour n'importe quel élément de G, i.e., quel que soit $g \in G$, g ne conserve aucun sous-espace non nul orthogonal à V. Posons $S = \{v \in \mathcal{V}; ||v|| = 1\}$, $\overline{S^+} = S \cap \overline{\mathcal{C}^+}$. L'ensemble G est fini et $\overline{S^+}$ est compact et non vide(d'après l'hypothèse $\mathcal{V} \neq \{0\}$). L'application :

$$\begin{array}{ccc} G \times \overline{S^+} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (g, v) & \mapsto & ||g(v) - v|| \end{array}$$

atteint donc son minimum. Notons m ce minimum et $\mathcal{M}$ le sous-ensemble des $(g, v) \in G \times \overline{S^+}$ tels que $||g(v) - v|| = m$. Montrons que :

(7) pour $(g, v) \in \mathcal{M}$ et $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_v$, on a $(\alpha, g(v)) \geq 0$.

Il suffit de calculer :

$$\begin{array}{rcl} ||s_\alpha g(v) - v||^2 & = & ||s_\alpha g(v)||^2 - 2(s_\alpha g(v), v) + ||v||^2, \\ & = & ||g(v)||^2 - 2(g(v) - 2\frac{(\alpha, g(v))}{(\alpha,\alpha)}\alpha, v) + ||v||^2, \\ & = & ||g(v)||^2 - 2(g(v), v) + ||v||^2 + 4\frac{(\alpha, g(v))(\alpha, v)}{(\alpha,\alpha)}, \\ & = & ||g(v) - v||^2 + 4\frac{(\alpha, g(v))(\alpha, v)}{(\alpha,\alpha)}, \\ & = & m^2 + 4\frac{(\alpha, g(v))(\alpha, v)}{(\alpha,\alpha)}. \end{array}$$

Par définition de m, cette expression doit être $\geq m^2$, donc $(\alpha, g(v))(\alpha, v) \geq 0$. L'hypothèse $\alpha \notin \Delta_v$ entraîne $(\alpha, v) > 0$, d'où la conclusion de (7).

Soit $(g, v) \in \mathcal{M}$. On sait que, pour tout $v' \in \mathcal{V}$, il existe $w \in W_v$ tel que $(\alpha, w(v')) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_v$ (cf. [B] VI.1.5). Soit donc $w \in W_v$ tel que $(\alpha, wg(v)) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_v$. On a $||wg(v) - v|| = ||wg(v) - w(v)|| = ||g(v) - v|| = m$. Donc (wg, v) appartient à $\mathcal{M}$. Grâce à la définition de w et à (7), on a de plus $(\alpha, wg(v)) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$, i.e. $wg(v) \in \overline{\mathcal{C}^+}$. On a aussi $wg(v) \in S$ donc $wg(v) \in \overline{S^+}$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des $(g, v) \in \mathcal{M}$ tels que $g(v)$ appartienne à $\overline{S^+}$. On vient de prouver que $\mathcal{N}$ était non vide.

Soit $(g, v) \in \mathcal{N}$. Supposons d'abord v et $g(v)$ linéairement indépendants. Notons P le plan qu'ils engendrent. L'ensemble $S \cap P$ est un cercle que l'on peut paramétrer de la façon usuelle par $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Plus précisément, introduisons un tel paramétrage :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \rightarrow & S \cap P \\ \theta & \mapsto & v(\theta), \end{array}$$

de sorte que $v(0) = v$ et $g(v)$ soit égal à $v(\mu)$ pour un réel $\mu \in]0, \pi[$ (c'est évidemment possible en tournant dans le bon sens). Notons $P^\perp$ l'orthogonal de P et Δ' le sous-ensemble des $\alpha \in \Delta$ qui n'appartiennent pas à $P^\perp$. Pour $\alpha \in \Delta'$, posons $D_\alpha = H_\alpha \cap P$ et $P_\alpha^+ = \{v' \in P; (\alpha, v') > 0\}$. L'ensemble P_α^+ est un demi-plan ouvert délimité par la droite D_α. Parce que $(g, v) \in \mathcal{N}$, v et $g(v)$ appartiennent tous deux à $\overline{P_\alpha^+}$ et l'un au moins appartient à P_α^+ (puisqu'ils ne sont pas proportionnels). On se convainc aisément que cela entraîne que, pour tout $\theta \in]0, \mu[$, $v(\theta)$ appartient à P_α^+. On a même un peu mieux. Notons μ_α le plus petit réel $\geq \mu$ tel que $v(\mu_\alpha) \in D_\alpha$. Alors :

(8) pour tout $\theta \in]0, \mu_\alpha[$, $v(\theta)$ appartient à P_α^+.

En tout cas, pour $\theta > 0$ assez petit, on a $(\alpha, v(\theta)) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta'$. On a aussi $(\alpha, v(\theta)) = 0$ pour $\alpha \in \Delta \setminus \Delta'$. Donc $v(\theta)$ appartient à $\overline{S^+}$. Par définition de m, on a alors :

$$||g(v(\theta)) - v(\theta)||^2 \geq m^2 = ||g(v) - v||.$$

Donc la dérivée du membre de gauche (vu comme fonction de θ) est ≥ 0 en $\theta = 0$. La valeur en 0 de la dérivée de $v(\theta)$ est $v(\frac{\pi}{2})$ et celle de la dérivée du membre de gauche ci-dessus est $2c$, où :

$$c = (g(v) - v, g(v(\frac{\pi}{2})) - v(\frac{\pi}{2})).$$

Puisque $v(\frac{\pi}{2})$ est orthogonal à v, $g(v(\frac{\pi}{2}))$ l'est à $g(v) = v(\mu)$. L'orthogonal de $v(\mu)$ est engendré par $v(\mu + \frac{\pi}{2})$ et $P^{\perp}$. Ecrivons $g(v(\frac{\pi}{2})) = xv(\mu + \frac{\pi}{2}) + v'$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $v' \in P^{\perp}$. On a $x^2 + ||v'||^2 = 1$, donc $|x| \leq 1$. On calcule :

$$c = (v(\mu) - v(0), xv(\mu + \frac{\pi}{2}) + v' - v(\frac{\pi}{2})) = -(v(\mu), v(\frac{\pi}{2})) - x(v(0), v(\mu + \frac{\pi}{2})).$$

Mais :

$$(v(0), v(\mu + \frac{\pi}{2})) = (v(-\frac{\pi}{2}), v(\mu)) = -(v(\mu), v(\frac{\pi}{2})).$$

D'où :

$$c = (x - 1)(v(\mu), v(\frac{\pi}{2})).$$

L'hypothèse $\mu \in]0, \pi[$ entraîne $(v(\mu), v(\frac{\pi}{2})) > 0$. Jointe aux relations $c \geq 0$, $|x| \leq 1$, cette inégalité entraîne $x = 1$. Alors $v' = 0$ et $g(v(\frac{\pi}{2})) = v(\mu + \frac{\pi}{2})$. Cela démontre que g conserve le plan P et se restreint à ce plan en la rotation d'angle μ. Il en résulte que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a l'égalité :

$$(9) \qquad ||g(v(\theta)) - v(\theta)|| = ||g(v) - v|| = m.$$

Remarquons que Δ' est non vide. Sinon P serait orthogonal à V et, puisque g conserve P, cela contredirait l'une de nos hypothèses. Soit alors $\beta \in \Delta'$ tel que μ_β soit minimal. Choisissons $\theta = \mu_\beta - \mu + \epsilon$, avec $\epsilon > 0$ assez petit. Il résulte de (8) et de la minimalité de μ_β que $v(\theta)$ appartient à P_α^+ pour tout $\alpha \in \Delta'$. Comme ci-dessus, cela entraîne $v(\theta) \in \overline{S^+}$. Grâce à (9), on a donc $(g, v(\theta)) \in \mathcal{M}$. Mais $g(v(\theta)) = v(\mu_\beta + \epsilon)$ et, puisque le cercle $S \cap P$ traverse la droite D_β justement au point $v(\mu_\beta)$, on a $(\beta, g(v(\theta))) < 0$. Cela contredit (7) (remarquons que $\beta \notin \Delta_{v(\theta)}$ puisque $v(\theta) \in P_\beta^+$). Cette contradiction démontre que v et $g(v)$ ne sont pas linéairement indépendants.

Puisque ces deux vecteurs appartiennent à S, on a donc $g(v) = \pm v$. Donc g conserve la droite portée par v et, d'après notre hypothèse, v n'est pas orthogonal à V. Autrement dit, $\Delta_v \neq \Delta$. Pour $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_v$, on a $(\alpha, v) > 0$ et, grâce à (7), $(\alpha, g(v)) \geq 0$. Jointes à la relation $g(v) = \pm v$, ces inégalités entraînent $g(v) = v$. Alors la conclusion de (6) est vérifiée.

Achevons la preuve du lemme. On raisonne par récurrence sur la somme des dimensions $dim(\mathcal{V}) + dim(V)$. C'est-à-dire que l'on suppose l'assertion de l'énoncé prouvée pour les données similaires $\mathcal{V}'$, V', Δ', $\dot{g}'$ telles que $dim(\mathcal{V}') + dim(V') < dim(\mathcal{V}) + dim(V)$. Le lemme est trivial si $\mathcal{V} = \{0\}$. Supposons $\mathcal{V} \neq \{0\}$. Supposons d'abord que $\dot{g}$ conserve un sous-espace non nul orthogonal à V. Notons $\mathcal{V}'$ l'orthogonal de ce sous-espace et $\dot{g}'$ la restriction de $\dot{g}$ à $\mathcal{V}'$. Utilisons l'hypothèse de récurrence pour les données $\mathcal{V}'$, V, Δ, $\dot{g}'$: on peut trouver $w \in W$ tel que $w\dot{g}'$ admette un point fixe dans l'analogue de $\mathcal{C}^+$ pour $\mathcal{V}'$. Mais cet analogue est égal à $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{V}'$ et $w\dot{g}$ admet ce même point pour point fixe. Supposons maintenant que $\dot{g}$ ne conserve aucun sous-espace non nul orthogonal à V. D'après (6), on peut choisir $v \in \overline{\mathcal{C}^+}$, non nul, et $w \in W$ tel que $w\dot{g}$ fixe v. Introduisons comme plus haut les ensembles Δ_v, W_v, V_v. D'après l'hypothèse sur $\dot{g}$, v n'est pas orthogonal à V, donc $V_v \neq V$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathcal{V}$, V_v, Δ_v, $w\dot{g}$, on peut choisir $w' \in W_v$ et $v' \in \mathcal{V}$ tels que $w'w\dot{g}$ fixe v' et $(\alpha, v') > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_v$. Puisque w' appartient à W_v, il fixe v. Alors $w'w\dot{g}$ fixe lui-aussi v et, plus généralement, toute combinaison linéaire de v et v'. Or, par un raisonnement déjà utilisé plusieurs fois, $v + xv'$ appartient à $\mathcal{C}^+$ si $x > 0$ est assez petit. Cela achève la preuve. $\square$

Bibliographie

[B] N. Bourbaki : *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5 et 6*, Hermann, 1968

Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr