Représentations et quasi-caractères de niveau 0 ; endoscopie

J.-L. Waldspurger

30 octobre 2018

Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle et soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On s'intéresse ici aux représentations admissibles et irréductibles de $G(F)$ dans des espaces vectoriels complexes. On note $Irr(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de ces représentations. Dans le cas où G est un groupe classique, on sait associer à toute $\pi \in Irr(G)$ un paramètre de Langlands, cela grâce aux résultats de Harris et Taylor, Henniart, Arthur et Mok. Dans le cas général, l'existence de ce paramètre reste conjecturale. Moy et Prasad ont défini le niveau de π. Notons $Irr(G)^0$ le sous-ensemble des représentations de niveau 0. Dans le cas où G est adjoint, Lusztig a défini un paramétrage de l'ensemble $Irr(G)^0$, qui est un bon candidat pour être celui de Langlands. L'hypothèse que G est adjoint a été récemment levée par Solleveld. Hormis le cas des groupes classiques, savoir quelles conditions caractérisent le paramétrage de Langlands n'est pas clair, du moins pour l'auteur. Il y a en tout cas une condition minimale : le paramétrage doit vérifier des conditions de compatibilité à l'endoscopie. D'où une question préalable que l'on formule ici en termes vagues : le niveau 0 se conserve-t-il par endoscopie ? Dans cet article, nous répondons positivement à cette question, pourvu que la caractéristique résiduelle p de F soit grande relativement à G (ou que G soit petit relativement à p, c'est une question de point de vue).

Pour tout ensemble X, notons $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel complexe de base X. En associant à toute représentation son caractère-distribution, on définit une injection $\Theta : \mathbb{C}[Irr(G)] \to I(G)^*$, où $I(G)^*$ est l'espace des distributions sur $G(F)$ invariantes par conjugaison. Définissons le projecteur de Bernstein $p^0 : \mathbb{C}[Irr(G)] \to \mathbb{C}[Irr(G)^0]$ qui annule toute représentation irréductible qui n'est pas de niveau 0.

Supposons d'abord que G est quasi-déployé. On sait définir le sous-espace $SI(G)^* \subset I(G)^*$ des distributions stables. On note $\mathbb{C}[Irr(G)]^{st}$ le sous-espace des $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)]$ telles que $\Theta_\pi \in SI(G)^*$ (ici, π n'est plus irréductible, c'est une combinaison linéaire à coefficients complexes de représentations irréductibles). Une conséquence de l'article [3] est qu'il existe une projection naturelle $p^{st} : \mathbb{C}[Irr(G)] \to \mathbb{C}[Irr(G)]^{st}$. Notre premier résultat est le

Théorème 1. *Supposons que G soit quasi-déployé et que l'hypothèse $(Hyp)_{endo}(G)$ soit vérifiée. Alors on a l'égalité $p^{st} \circ p^0 = p^0 \circ p^{st}$.*

Cf. le corollaire 7.7. L'hypothèse $(Hyp)_{endo}(G)$, précisément énoncée en 7.1, est l'hypothèse sur p évoquée plus haut. Grosso-modo, elle suppose $p \geq c(G)val_F(p)$, où $c(G)$

est un entier dépendant de G et val_F est la valuation usuelle de F.

Revenons au cas d'un groupe G quelconque. Soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique de G, cf. 7.1. Une telle donnée est un triplet dont l'un des termes est un groupe endoscopique G', qui est quasi-déployé sur F. En général, on doit fixer des données auxiliaires pour définir un facteur de transfert. Pour simplifier l'introduction, supposons que cela ne soit pas nécessaire et fixons un facteur de transfert défini sur un sous-ensemble de $G'(F) \times G(F)$. Toujours en conséquence de [3], il y a alors un homomorphisme de transfert spectral $transfert : \mathbb{C}[Irr(G')]^{st} \to \mathbb{C}[Irr(G)]$.

Théorème 2. *Supposons que l'hypothèse $(Hyp)_{endo}(G)$ soit vérifiée. Alors on a l'égalité $p^0 \circ transfert = transfert \circ p^0$.*

Cf. le théorème 7.10. Evidemment, le premier p^0 vit sur G et le second sur G'. Remarquons que ce dernier conserve l'espace $\mathbb{C}[Irr(G')]^{st}$ d'après le premier théorème.

L'application p^0 est un projecteur de Bernstein et il s'en déduit un tel projecteur sur divers objets, par exemple l'espace $C_c^\infty(G(F))$ des fonctions à valeurs complexes sur $G(F)$, localement constantes et à support compact. Les théorèmes ci-dessus ont des contreparties pour les espaces de fonctions, cf. 8.1 et 8.2.

La méthode utilisée pour prouver ces théorèmes est de caractériser les représentations de niveau 0 par le développement local de leurs caractères. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On sait définir l'exponentielle exp qui envoie un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$ sur un voisinage de 1 dans $G(F)$. Sous l'hypothèse $(Hyp)_{endo}(G)$, ces voisinages peuvent être choisis les plus gros possibles. A savoir l'ensemble $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ des éléments topologiquement nilpotents dans $\mathfrak{g}(F)$ et l'ensemble $G_{tu}(F)$ des éléments topologiquement unipotents dans $G(F)$. Il en est de même pour tout sous-groupe réductif connexe de G. Soit $D \in I(G)^*$ une distribution invariante et localement intégrable sur $G(F)$, donc associée à une fonction θ_D définie presque partout sur $G(F)$, invariante par conjugaison et localement intégrable. Nous dirons que D est un quasi-caractère si et seulement si θ_D vérifie la condition suivante. Soit $x \in G(F)$ un élément semi-simple, notons G_x la composante neutre de son commutant dans G. Alors il existe un voisinage $\mathfrak{V}_x$ de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$ de sorte que la fonction $X \mapsto \theta_D(xexp(X))$ définie presque partout sur $\mathfrak{V}_x$ soit combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes sur $\mathfrak{g}_x(F)$. Harish-Chandra a démontré que le caractère de toute représentation irréductible était un quasi-caractère (d'où la terminologie "quasi-caractère"). Appelons p'-élément un élément $\epsilon \in G(F)$ qui est semi-simple et vérifie la condition suivante. Fixons une extension finie F' de F contenant toutes les valeurs propres de l'opérateur $ad(\epsilon)$ agissant dans $\mathfrak{g}$ et notons Σ l'ensemble de ces valeurs propres. Notons aussi $|.|_{F'}$ la valeur absolue usuelle de F'. Alors, pour tout $\sigma \in \Sigma$ telle que $|\sigma|_{F'} = 1$, σ est une racine de l'unité d'ordre premier à p. Soit $D \in I(G)^*$ une distribution invariante localement intégrable. Nous dirons que D est un quasi-caractère de niveau 0 si et seulement si, pour tout p'-élément $\epsilon \in G(F)$, la fonction $X \mapsto \theta_D(\epsilon exp(X))$ définie presque partout sur $\mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$ est combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes sur $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$. Autrement dit, le développement est valable sur le plus gros voisinage possible dans $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$.

Théorème 3. *Soit $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)]$. Alors $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)^0]$ si et seulement si Θ_π est un quasi-caractère de niveau 0.*

Cf. 6.7. Le fait que le caractère d'une représentation de niveau 0 se développe sur de gros voisinages se trouvait déjà dans la littérature, par exemple dans des articles de S. Debacker, J.-L. Kim, F. Murnaghan. Mais je ne crois pas que l'on y trouvait la réciproque.

Il s'avère que cette caractérisation des représentations de niveau 0 "passe bien" à l'endoscopie et cela nous permet d'en déduire les théorèmes 1 et 2.

Pour démonstrer le théorème 3, on doit décrire l'espace des quasi-caractères de niveau 0. Pour que cette introduction reste d'une longueur raisonnable, donnons un simple exemple. Soit $\mathcal{F}$ un sommet de l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe adjoint de G. On lui associe un groupe parahorique $K_{\mathcal{F}}^0 \subset G(F)$. Notons $K_{\mathcal{F}}^+$ son plus grand sous-groupe distingué pro-p-unipotent. On sait qu'il existe un groupe réductif connexe $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ défini sur le corps résiduel k_F de F, de sorte que $K_{\mathcal{F}}^0/K_{\mathcal{F}}^+ \simeq \mathbf{G}_{\mathcal{F}}(k_F)$. Soit $f : \mathbf{G}_{\mathcal{F}}(k_F) \to \mathbb{C}$ une fonction invariante par conjugaison et cuspidale. Par l'isomorphisme précédent, on la considère comme une fonction sur $K_{\mathcal{F}}^0$, invariante par translations par $K_{\mathcal{F}}^+$, et on l'étend en une fonction sur $G(F)$, nulle hors de $K_{\mathcal{F}}^0$. Notons A_G le plus grand sous-tore central de G qui soit déployé sur F et fixons des mesures de Haar sur $G(F)$ et $A_G(F)$. On définit la distribution D_f qui, à une fonction $\varphi \in C_c^\infty(G(F))$, associe

$$D_f(\varphi) = \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \int_{G(F)} \varphi(g^{-1}xg)f(x)\,dx\,dg.$$

L'intégrale n'est pas absolument convergente mais converge dans l'ordre indiqué. On montre que D_f est un quasi-caractère de niveau 0. On généralise cette construction dans deux directions. D'une part en considérant non pas des groupes parahoriques mais des fixateurs de points de l'immeuble, qui donnent naissance à des groupes non connexes sur k_F. D'autre part, en induisant de telles distributions définies sur des groupes de Levi de G. On montre alors que tout quasi-caractère de niveau 0 est obtenue par cette construction convenablement généralisée, cf. 5.9. Ce qui relie les distributions ci-dessus aux représentations de niveau 0 est la formule calculant le caractère d'une telle représentation que l'on a obtenue dans un article antérieur, cf. [20].

Signalons un résultat curieux. Les constructions ci-dessus conduisent naturellement à la définition d'un sous-espace de l'espace des quasi-caractères de niveau 0, noté $D^G[\mathcal{D}_{cusp}(G)]$ dans l'article. Ce sous-espace est relié à celui des caractères des représentations de niveau 0 qui sont elliptiques au sens d'Arthur. Mais il ne lui est pas égal. On montre en 8.3 et 8.5 qu'il possède néanmoins les mêmes propriétés magiques de ces espaces de caractères, démontrées par Arthur dans [3]. A savoir que, dans le cas où G est quasi-déployé, leur stabilité se lit sur les éléments elliptiques du groupe et que, dans le cas général, le transfert entre tels quasi-caractères se lit lui-aussi sur les éléments elliptiques des groupes en question.

L'hypothèse $(Hyp)_{endo}(G)$ est utilisée de deux façons. D'une part, elle entraîne diverses propriétés concernant le groupe G. Par exemple, il existe une extension F' de F de degré fini et premier à p telle que G soit déployé sur F'. Ou bien, l'ordre du groupe des composantes connexes du centre de G est premier à p. Pour ces propriétés, une hypothèse plus faible serait suffisante. D'autre part, comme on l'a déjà dit, l'hypothèse $(Hyp)_{endo}(G)$ entraîne que l'exponentielle est définie sur les plus gros voisinages possibles. Pour certains groupes, on peut remplacer l'exponentielle par un substitut qui converge beaucoup mieux (par exemple $X \mapsto 1 + X$ pour le groupe $GL(n)$). De nouveau, on peut dans ce cas remplacer $(Hyp)_{endo}(G)$ par une hypothèse plus faible.

Les liens entre niveau, paramétrage et endoscopie ont fait l'objet de plusieurs travaux récents. Citons [15] et aussi [10] et [11], où l'auteur étudie des sous-catégories de celle des représentations de niveau 0.

1 Les données

1.1 Le corps local

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note $\mathfrak{o}_F$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{o}_F^\times$ le groupe des unités, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal, $k_F = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ le corps résiduel, p la caractéristque de k_F, $|.|_F$ la valeur absolue usuelle, val_F la valuation.

Fixons une clôture algébrique $\bar{F}$ de F, resp. $\bar{k}_F$ de k_F. Notons F^{nr} la plus grande extension non ramifiée de F contenue dans $\bar{F}$. On note Γ_F le groupe de Galois de $\bar{F}/F$ et I_F son sous-groupe d'inertie, c'est-à-dire le groupe de Galois de $\bar{F}/F^{nr}$.

1.2 Notations diverses

Quand un groupe abstrait H agit sur un ensemble X, on note X^H le sous-ensemble des points fixes. Si Y est un sous-ensemble de X, on note $Norm_H(Y)$ le sous-ensemble des éléments de H dont l'action conserve Y.

Si X est un ensemble, on note $\mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base X.

1.3 Groupes algébriques

Posons $K = F$ ou $K = k_F$. Soit H un groupe algébrique défini sur K. On note H^0 sa composante neutre et $Z(H)$ le centre de H. Les sous-groupes algébriques de H que l'on considérera seront implicitement supposés définis sur K, sauf mention explicite du contraire.

Supposons H connexe. On appelle Levi de H une composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de G (tous deux définis sur K comme on vient de le dire). On note $H_{AD} = H/Z(H)$ le groupe adjoint. Pour $x \in H$, on note x_{ad} son image dans H_{AD}, x_{ss} la partie semi-simple de x, $Z_H(x)$ le commutant de x dans H et $H_x = Z_H(x)^0$.

On utilise les notations d'Arthur concernant les Levi et paraboliques : si M est un Levi, $\mathcal{L}(M)$ est l'ensemble des Levi contenant M et $\mathcal{P}(M)$ est l'ensemble des sous-groupes paraboliques de H de composante de Levi M. Si P est un sous-groupe parabolique de H, on note U_P son radical unipotent.

Soit T un tore défini sur K. On note $X^*(T)$, resp. $X_*(T)$, les groupes de caractères algébriques de T, resp. de sous-groupes à un paramètre. Pour ces définitions, T est vu comme un tore sur la clôture algébrique $\bar{K}$, c'est-à-dire que les caractères ou cocaractères ne sont pas forcément définis sur K. Si T est défini sur F, on note $T(F)_c$ le plus grand sous-groupe compact de $T(F)$. La définition de $X^*(T)$ s'étend au cas où T est un groupe diagonalisable, c'est-à-dire un sous-groupe algébrique d'un tore.

Soit H un groupe réductif connexe défini sur K. On note A_H le plus grand sous-tore de $Z(H)$ qui soit défini et déployé sur K. On pose $a_H = dim(A_H)$ et $\mathcal{A}_H = X_*(A_H)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. On appelle sous-tore déployé maximal de H un sous-tore de H qui est déployé sur K et est maximal parmi les sous-tores déployés sur K. Ces sous-tores déployés maximaux sont en bijection avec les groupes de Levi minimaux de H : à un sous-tore A est associé son commutant $Z_H(A)$.

Soit H un groupe réductif connexe défini sur k_F. On appelle espace tordu sous H une variété algébrique $\tilde{H}$ définie sur k_F, munie de deux actions algébriques à droite et à gauche de H telles que, pour chacune des actions, $\tilde{H}$ soit un espace principal homogène sous H. On impose de plus ici que $\tilde{H}(k_F) \neq \emptyset$. Cette terminologie a été introduite par Labesse. Une partie de la théorie habituelle des groupes réductifs s'étend aux espaces tordus. Ainsi, on définit les notions de sous-espaces paraboliques ou d'espace de Levi. On envoie pour tout cela au premier chapitre de [14].

1.4 Le groupe G

On fixe pour tout l'article un groupe réductif connexe G défini sur F. Soit $N \geq 1$ un entier tel qu'il existe un plongement de G dans $GL(N)$. On impose l'hypothèse

$(Hyp)(G) : p \geq (2 + val_F(p))N$.

Cela entraîne qu'il existe une extension F' de F de degré premier à p telle que G soit déployé sur F'. Plus généralement, pour tout tore défini sur F de dimension inférieure ou égale au rang de G, il existe une telle extension telle que le tore soit déployé sur F'. L'hypothèse $(Hyp)(G)$ implique $Hyp(H)$ pour tout sous-groupe réductif connexe de G.

A partir du paragraphe 7.1, nous renforcerons cette hypothèse $(Hyp)(G)$ en une hypothèse $(Hyp)_{endo}(G)$.

On fixe un Levi minimal M_{min} de G. On pose simplement $A = A_{M_{min}}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{M_{min}}$, $\mathcal{L}_{min} = \mathcal{L}(M_{min})$. On définit $W^G = Norm_G(A)/M_{min}$.

Quand un objet a été défini relativement à notre groupe G, nous noterons souvent l'objet analogue défini relativement à un autre groupe H en ajoutant un exposant H dans la notation. Par exemple, si $M \in \mathcal{L}_{min}$, on note $\mathcal{L}^M_{min}$ le sous-ensemble des $L \in \mathcal{L}_{min}$ qui sont contenus dans M. Le groupe W^G agit sur $\mathcal{L}_{min}$. Pour $M \in \mathcal{L}_{min}$, on note $N_{W^G}(M)$ le fixateur de M dans W^G et $W^G(M) = N_{W^G}(M)/W^M$.

On munit $G(F)$ d'une mesure de Haar. Plus généralement, pour tout sous-groupe fermé J de $G(F)$, on suppose J muni d'une mesure de Haar.

2 L'immeuble de G

2.1 Facettes, groupes parahoriques

On note $Imm(G_{AD})$ l'immeuble de Bruhat-Tits sur F du groupe adjoint G_{AD}. Cet ensemble est réunion d'appartements associés aux sous-tores déployés maximaux de G ou encore aux Levi minimaux de G. On note $App(A_M)$ l'appartement associé à un tel Levi M. L'appartement $App(A_M)$ est un espace affine euclidien sous l'espace vectoriel réel $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$. Pour $x, y \in App(A_M)$, on note $x-y$ l'élément de $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$ tel que $x = y+(x-y)$.

L'immeuble se décompose aussi en réunion disjointe de facettes, chaque facette étant contenue dans (au moins) un appartement. On note $Fac(G)$ l'ensemble des facettes et $Fac(G, A)$ le sous-ensemble des facettes contenues dans $App(A)$. Le groupe $G(F)$ agit sur l'immeuble. Pour $\mathcal{F} \in Fac(G)$, notons $K^\dagger_{\mathcal{F}}$ le stabilisateur de $\mathcal{F}$ dans $G(F)$.

Introduisons le groupe $\hat{G}$ dual de Langlands de G. Modulo le choix d'une paire de Borel épinglée de $\hat{G}$, ce groupe est muni d'une action de Γ_F. Le groupe Γ_F/I_F agit sur $X^*(Z(\hat{G})^{I_F})$. Notons $\mathcal{N} = X^*(Z(\hat{G})^{I_F})^{\Gamma_F/I_F}$ le sous-groupe des invariants. Kottwitz a défini un homomorphisme surjectif $w_G : G(F) \to \mathcal{N}$.

Soit $\mathcal{F} \in Fac(G)$. Notons $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ l'image de $K^\dagger_{\mathcal{F}}$ par w_G et, pour tout $\nu \in \mathcal{N}$, notons $K^\nu_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des $g \in K^\dagger_{\mathcal{F}}$ tels que $w_G(g) = \nu$ (on a donc $K^\nu_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ si et seulement si $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$). L'ensemble $K^0_{\mathcal{F}}$ est le sous-groupe parahorique de $G(F)$ associé à $\mathcal{F}$, cf. [8] proposition 3. Notons $K^+_{\mathcal{F}}$ le plus grand sous-groupe distingué et pro-p-unipotent dans $K^0_{\mathcal{F}}$. Bruhat et Tits ont associé à $\mathcal{F}$ un schéma en groupes $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ défini sur $\mathfrak{o}_F$. On a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{o}_F) = K^0_{\mathcal{F}}$. Notons $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ la partie réductive de la fibre spéciale de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. C'est un groupe réductif connexe défini sur k_F et $K^0_{\mathcal{F}}/K^+_{\mathcal{F}}$ est isomorphe à $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(k_F)$, cf. [9] proposition 3.7. Pour $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, il existe un espace tordu $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$ sous $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ de sorte que $K^\nu_{\mathcal{F}}/K^+_{\mathcal{F}}$ s'identifie à $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}(k_F)$.

Le groupe $K^0_{\mathcal{F}}$ fixe tout point de $\mathcal{F}$. Pour $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, il existe une permutation isométrique $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ de $\mathcal{F}$ telle que tout élément de $K^\nu_{\mathcal{F}}$ agisse dans $\mathcal{F}$ par cette permutation. On note $\mathcal{F}^\nu$ le sous-ensemble des points fixes de $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ dans $\mathcal{F}$. Pour tout appartement contenant $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^\nu$ est l'intersection de $\mathcal{F}$ avec un sous-espace affine de cet appartement. Soit $x \in \mathcal{F}$. Alors le fixateur de x dans $G(F)$ est la réunion des $K^\nu_{\mathcal{F}}$ sur les $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ tels que $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ fixe x.

On note $Fac^*(G)$ l'ensemble des couples $(\mathcal{F},\nu)$, où $\mathcal{F} \in Fac(G)$ et $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$. On note $Fac^*_{max}(G)$ le sous-ensemble des $(\mathcal{F},\nu)$ tels que $\mathcal{F}^\nu$ est réduit à un point. On note $Fac^*(G,A)$ et $Fac^*_{max}(G,A)$ les sous-ensembles des $(\mathcal{F},\nu)$ tels que $\mathcal{F} \subset App(A)$.

Remarque. L'indice *max* est contestable puisqu'il s'agit de facettes de dimension minimale. Ce sont plutôt les groupes qui leur sont attachés qui sont maximaux. En tout cas, on conserve cette notation de [20] pour simplifier les références.

Du schéma en groupes $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ se déduit une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre de Lie $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ de $\mathfrak{g}_F$. On note $\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}}$ son radical pro-p-nilpotent. Le quotient $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}}$ s'identifie à l'espace des points sur k_F de la partie réductive de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

On peut aussi considérer l'immeuble étendu $Imm(G) = Imm(G_{AD}) \times \mathcal{A}_G$, qui est muni d'une action de $G(F)$. Pour $x = (y,a) \in Imm(G)$, avec $y \in Imm(G_{AD})$ et $a \in \mathcal{A}_G$, le fixateur de x dans $G(F)$ est le sous-groupe des éléments $g \in G(F)$ qui fixent y et tels que $w_G(g)$ appartienne au sous-groupe de torsion $\mathcal{N}_{tors}$ de $\mathcal{N}$.

2.2 Description des facettes

Pour $a \in A(F)$, on note $a_{\mathbb{Z}}$ l'élément de $X_*(A)$ tel que $< x^*, a_{\mathbb{Z}} >= -val_F(x^*(a))$ pour tout $x^* \in X^*(A)$. Le noyau de cet homomorphisme $a \mapsto a_{\mathbb{Z}}$ n'est autre que le plus grand sous-groupe compact $A(F)_c$ de $A(F)$. L'action sur l'immeuble du groupe $A(F)$ conserve $App(A)$. Pour $a \in A(F)$ et $x \in App(A)$, on a $ax = x + a_{\mathbb{Z}}$, où ici $X_*(A)$ est vu comme un sous-groupe de $\mathcal{A}$. L'action du groupe $Norm_G(A)(F)$ conserve aussi l'appartement $App(A)$. Notons $M_{min}(F)_c$ l'unique sous-groupe compact maximal de $M_{min}(F)$. L'action de $Norm_G(A)(F)$ se quotiente en une action du groupe $Norm_G(A)(F)/M_{min}(F)_c$.

Notons Σ l'ensemble des racines réduites de A dans G. Fixons un sommet spécial de $App(A)$ que l'on note 0 qui nous permet d'identifier $App(A)$ et $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$. A tout $\alpha \in \Sigma$ est associé un sous-ensemble Γ_α de $\mathbb{Q}$, qui est l'image réciproque dans $\mathbb{Q}$ d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Pour $c \in \Gamma_\alpha$, on note c^+ le plus petit élément de Γ_α strictement supérieur à c et c^- le plus grand élément de Γ_α strictement inférieur à c. On note $H_{\alpha,c}$ l'hyperplan affine de $App(A)$ défini par l'équation $\alpha(x) = c$. Alors la décomposition en facettes de $App(A)$ est définie par la famille d'hyperplans $(H_{\alpha,c})_{\alpha\in\Sigma,c\in\Gamma_\alpha}$. A toute facette $\mathcal{F} \in Fac(G,A)$ sont associés un sous-ensemble $\Sigma_{\mathcal{F}} \subset \Sigma$ et, pour tout $\alpha \in \Sigma$, un élément $c_{\alpha,\mathcal{F}}$ de sorte que $\mathcal{F}$ soit le sous-ensemble des éléments $x \in App(A)$ qui vérifient les relations

(1) $\alpha(x) = c_{\alpha,\mathcal{F}}$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}}$;

(2) $c_{\alpha,\mathcal{F}} < \alpha(x) < c^+_{\alpha,\mathcal{F}}$ pour tout $\alpha \in \Sigma - \Sigma_{\mathcal{F}}$.

Pour $\alpha \in \Sigma$, notons U_α le groupe radiciel associé à α. A tout $c \in \Gamma_\alpha$ est associé un sous-groupe ouvert compact $U_{\alpha,c}$ de $U_\alpha(F)$ de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(3) si $c, c' \in \Gamma_\alpha$ et $c < c'$, alors $U_{\alpha,c} \subsetneq U_{\alpha,c'}$;

(4) quelle que soit $\mathcal{F} \in Fac(G,A)$, on a $U_\alpha(F) \cap K^0_{\mathcal{F}} = U_{\alpha,c_{\alpha,\mathcal{F}}}$; on a $U_\alpha(F) \cap K^+_{\mathcal{F}} = U_{\alpha,c^-_{\alpha,\mathcal{F}}}$ si $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ et $U_\alpha(F) \cap K^+_{\mathcal{F}} = U_{\alpha,c_{\alpha,\mathcal{F}}}$ si $\alpha \notin \Sigma_{\mathcal{F}}$.

Notons $M_{min}(F)^\star = \{m \in M_{min}(F); w_G(m) = 0\}$. C'est un sous-groupe d'indice fini de $M_{min}(F)_c$. Pour toute facette $\mathcal{F} \in Fac(G,A)$, $K^0_{\mathcal{F}}$ est le sous-groupe de $G(F)$ engendré par les $U_\alpha(F) \cap K^0_{\mathcal{F}}$ et par le groupe $M_{min}(F)^\star$. Les $\mathfrak{o}_F$-algèbres $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}}$ admettent une description similaire. Il en résulte que les groupes $K^0_{\mathcal{F}}$ et les $\mathfrak{o}_F$-algèbres $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}}$ caractérisent les facettes. C'est-à-dire

(5) soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in Fac(G)$; supposons $K^0_{\mathcal{F}} = K^0_{\mathcal{F}'}$, ou $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}'}$ ou $\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}} = \mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}'}$; alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Pour $\mathcal{F} \in Fac(G,A)$, il existe un unique Levi $M_{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}_{min}$ tel que $\mathcal{A}_{M_{\mathcal{F}}}/\mathcal{A}_G$ soit l'espace vectoriel réel engendré par les $x - y$ pour $x, y \in \mathcal{F}$. Pour $(\mathcal{F}, \nu) \in Fac^*(G,A)$, il existe un unique Levi $M_{\mathcal{F},\nu} \in \mathcal{L}_{min}$ tel que $\mathcal{A}_{M_{\mathcal{F}}}/\mathcal{A}_G$ soit l'espace vectoriel réel engendré par les $x - y$ pour $x, y \in \mathcal{F}^\nu$. On a évidemment $M_{\mathcal{F}} \subset M_{\mathcal{F},\nu}$.

2.3 Groupes de Levi

Soit $M \in \mathcal{L}_{min}$. Considérons le sous-ensemble $Imm(G_{AD}, M)$ de $Imm(G_{AD})$ réunion des appartements $App(A_{M'})$ associés aux Levi minimaux M' contenus dans M. Le groupe $\mathcal{A}_M$ agit sur chacun de ces appartements et ces actions se recollent en une action sur la réunion. De plus, $Imm(G_{AD}, M)$ est conservé par l'action de $M(F)$. Le quotient de $Imm(G_{AD}, M)$ par l'action de $\mathcal{A}_M$, muni de son action de $M(F)$, s'identifie canoniquement à l'immeuble $Imm(M_{AD})$. En particulier, $App(A)/\mathcal{A}_M$ s'identifie à l'appartement $App^M(A)$ associé à M_{min} dans l'immeuble $Imm(M_{AD})$. On note $p_M : App(A) \to App^M(A)$ cette projection.

L'action sur l'immeuble du groupe $Norm_G(M)(F)$ conserve $Imm(G_{AD}, M)$ et se descend en une action sur $Imm(M_{AD})$. Cette action permute les élements de $Fac(M)$. Pour $\mathcal{F}_M \in Fac(M)$, on note $K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}}$ le sous-groupe des éléments de $Norm_G(M)(F)$ qui conservent $\mathcal{F}_M$. Il contient $K^\dagger_{\mathcal{F}_M}$ comme sous-groupe distingué.

Notons $Norm_G(M,A)$ le normalisateur commun de M et A dans G. L'action du groupe $Norm_G(M,A)(F)$ dans $Imm(M_{AD})$ conserve $App^M(A)$.

Pour $\mathcal{F} \in Fac(G,A)$, il existe une unique facette notée $\mathcal{F}^M \in Fac(M,A)$ telle que $p_M(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}^M$. Si $\mathcal{F}$ est décrit par les relations (1) et (2) de 2.2, $\mathcal{F}^M$ est l'ensemble des $x \in App^M(A)$ qui vérifient les relations

(1) $\alpha(x) = c_{\alpha,\mathcal{F}}$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}} \cap \Sigma^M$;

(2) $c_{\alpha,\mathcal{F}} < \alpha(x) < c_{\alpha,\mathcal{F}}$ pour tout $\alpha \in \Sigma^M - \Sigma_{\mathcal{F}} \cap \Sigma^M$.

De l'inclusion $Z(\hat{G}) \to Z(\hat{M})$ se déduit un homomorphisme naturel $\mathcal{N}^M \to \mathcal{N}$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M(F) & \to & G(F) \\ w_M \downarrow & & w_G \downarrow \\ \mathcal{N}^M & \to & \mathcal{N} \end{array}$$

est commutatif. Posons $M_{ad} = M/Z(G)$. On a aussi un homomorphisme naturel $\mathcal{N}^M \to \mathcal{N}^{M_{ad}}$. Notons $\mathcal{N}^M_{G-comp}$ l'image réciproque dans $\mathcal{N}^M$ du sous-groupe de torsion de $\mathcal{N}^{M_{ad}}$. Alors l'homomorphisme $\mathcal{N}^M \to \mathcal{N}$ se restreint en un homomorphisme injectif $\mathcal{N}^M_{G-comp} \to \mathcal{N}$, cf. [20] 6(1). On identifie $\mathcal{N}^M_{G-comp}$ à son image dans $\mathcal{N}$. On note $Fac^*_{G-comp}(M)$ le sous-ensemble des $(\mathcal{F}_M, \nu) \in Fac^*(M)$ tels que $\nu \in \mathcal{N}^M_{G-comp}$ (avec les variantes

$Fac^*_{max,G-comp}(M)$ etc...). Remarquons que, pour $(\mathcal{F}_M,\nu) \in Fac^*_{G-comp}(M)$ et pour $n \in K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}_M}$, la conjugaison par n conserve l'ensemble $K^{\nu}_{\mathcal{F}_M}$.

3 Espaces de fonctions et de distributions

3.1 Les espaces $I(G)$ et $I(G)^*$

Le groupe $G(F)$ agit sur l'espace $C_c^\infty(G(F))$ par conjugaison : pour $g \in G(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$, ${}^g f$ est la fonction $x \mapsto f(g^{-1}xg)$. On note $I(G)$ le quotient de $C_c^\infty(G(F))$ par le sous-espace complexe engendré par les ${}^g f - f$ pour $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $g \in G(F)$.

On note G_{reg} le sous-ensemble des éléments fortement réguliers de G. Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. Pour $x \in G_{reg}(F)$, on définit l'intégrale orbitale

$$I^G(x,f) = D^G(x)^{1/2} \int_{A_{G_x}(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}xg)\, dg,$$

où D^G est le discriminant de Weyl usuel. L'espace $I(G)$ est aussi le quotient de $C_c^\infty(G(F))$ par le sous-espace des $f \in C_c^\infty(G(F))$ telles que $I^G(x,f) = 0$ pour tout $x \in G_{reg}(F)$.

On appelle distribution invariante sur $G(F)$ une forme linéaire sur $C_c^\infty(G(F))$ qui se quotiente en une forme linéaire sur $I(G)$. On identifie une telle distribution à la forme linéaire quotient. On note $I(G)^*$ l'espace des distributions invariantes sur $G(F)$.

Soient M un Levi de G et $D^M \in I(M)^*$. On définit une distribution $Ind_M^G(D^M) \in I(G)^*$ de la façon suivante. On fixe un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$. Comme on l'a dit, des mesures de Haar sont fixées sur $M(F)$, $U_P(F)$ et $G(F)$. Il s'en déduit ce que l'on peut appeler une pseudo-mesure invariante à droite sur $P(F)\backslash G(F)$. Précisément, c'est une forme linéaire non pas sur $C_c^\infty(P(F)\backslash G(F))$ mais sur l'espace des fonctions localement constantes $\varphi : G(F) \to \mathbb{C}$ qui vérifient la relation $\varphi(mug) = \delta_P(m)\varphi(g)$ pour tous $m \in M(F)$, $u \in U_P(F)$ et $g \in G(F)$, où δ_P est le module usuel. Cette pseudo-mesure est caractérisée par l'égalité

$$\int_{G(F)} f(g)\, dg = \int_{P(F)\backslash G(F)} \int_{M(F)} \int_{U_P(F)} f(mug)\, du\, dm\, dg$$

pour tout $f \in C_c^\infty(G(F))$. On définit la fonction f_{U_P} sur $M(F)$ par

$$f_{U_P}(m) = \delta_P(m)^{1/2} \int_{U_P(F)} f(mu)\, du,$$

puis la distribution $Ind_M^G(D^M)$ par l'égalité

$$Ind_M^G(D^M)(f) = \int_{P(F)\backslash G(F)} D^M(({}^g f)_{U_P})\, dg.$$

Cela ne dépend pas du choix de P.

On dit que $x \in G_{reg}(F)$ est elliptique si le commutant T de x dans G est un tore elliptique modulo $Z(G)$, c'est-à-dire si $A_T = A_G$. On note $G_{ell}(F)$ le sous-ensemble des éléments elliptiques dans $G_{reg}(F)$ (la notation étant un peu abusive : il n'y a pas de sous-ensemble algébrique G_{ell} de G). On dit qu'une fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ est cuspidale si et seulement si les intégrales orbitales de f sont nulles en tout point $x \in G_{reg}(F) - G_{ell}(F)$.

Autrement dit si f est annulée par $Ind_M^G(D^M)$ pour tout Levi propre M et tout $D^M \in I(M)^*$. On note $C_{cusp}(G(F))$ l'espace des fonctions cuspidales et $I_{cusp}(G)$ son image dans $I(G)$.

On dit que f est très cuspidale si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique propre P de G, de composante de Levi M, la fonction f_{U_P} est nulle. En fait, $I_{cusp}(G)$ est aussi l'image dans $I(G)$ de l'espace engendré par les fonctions très cuspidales, cf. [19] lemme 2.7. Pour une fonction f très cuspidale, on définit une distribution $D_f \in I(G)^*$ par l'égalité

$$D_f(\varphi) = \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \int_{G(F)} \varphi(x^{-1}gx)f(g)\,dg\,dx.$$

La double intégrale n'est pas absolument convergente mais converge dans cet ordre, cf. [20] lemme 9.

3.2 Filtrations

On fixe un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{L}}_{min} \subset \mathcal{L}_{min}$ des classes de conjugaison de Levi de G. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, notons $\underline{\mathcal{L}}_{min}^n$ le sous-ensemble des $M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}$ tels que $a_M = n$ (on peut évidemment se limiter aux n appartenant à l'intervalle $\{a_G, ..., a_{M_{min}}\}$).

On définit une filtration sur $I(G)$ de la façon suivante. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $Fil^n I(G)$ l'image dans $I(G)$ du sous-espace des $f \in C_c^\infty(G(F))$ qui vérifient la condition : pour tout Levi M tel que $a_M > n$ et tout $m \in G_{reg}(F) \cap M(F)$, on a $I^G(m, f) = 0$. On a

$$Fil^{a_G - 1} I(G) = \{0\} \subset Fil^{a_G} I(G) = I_{cusp}(G) \subset ... \subset Fil^{a_{M_{min}}} I(G) = I(G),$$

et, en posant $Gr^n I(G) = Fil^n I(G)/Fil^{n-1} I(G)$, on a

$$Gr^n I(G) \simeq \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}^n} I_{cusp}(M)^{W^G(M)},$$

cf. 1.4 pour la définition du groupe $W^G(M)$, qui agit naturellement sur $I_{cusp}(M)$.

Notons $Ann^n I(G)^*$ l'annulateur de $Fil^{n-1} I(G)$ dans $I(G)^*$. On a

$$Ann^{a_{M_{min}}+1} I(G)^* = \{0\} \subset Ann^{a_{M_{min}}} I(G)^* \subset ... \subset Ann^{a_G} I(G)^* = I(G)^*,$$

et, en posant $Gr^n I(G)^* = Ann^n I(G)^*/Ann^{n+1} I(G)^*$, on a

$$(1) \qquad Gr^n I(G)^* \simeq \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}^n} I_{cusp}(M)^{*W^G(M)}.$$

On vérifie que $Ann^n I(G)^*$ est le sous-espace de $I(G)^*$ engendré par les distributions induites $Ind_M^G(I(M)^*)$ pour les Levi M de G tels que $a_M \geq n$. Pour $M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}^n$ et $d^M \in I(M)^*$, l'image de $Ind_M^G(d^M)$ dans $Gr^n I(G)^*$ est nulle dans les composantes $I_{cusp}(M')^{*W^G(M')}$ de (1) pour $M' \neq M$ et est l'image naturelle de d^M dans $I_{cusp}(M)^{*W^G(M)}$ (c'est-à-dire la restriction de d^M à $I_{cusp}(M)^{W^G(M)}$).

3.3 Eléments compacts et topologiquement unipotents

Soit $x \in G(F)$. On dit que x est compact si et seulement s'il est contenu dans un sous-groupe compact de $G(F)$, c'est-à-dire si l'adhérence $\overline{x^{\mathbb{Z}}}$ du groupe $x^{\mathbb{Z}}$ engendré par x est compacte. On dit qu'il est compact mod $Z(G)$ si et seulement si l'image x_{ad} de x dans $G_{AD}(F)$ est compacte. On dit que x est topologiquement unipotent si et seulement si $lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1$

Fixons un sous-tore maximal de G contenant la partie semi-simple x_{ss} de G et fixons une extension finie de F telle que T soit déployée sur F'. Alors :

x est compact si et seulement si $\chi(x_{ss}) \in \mathfrak{o}_{F'}^{\times}$ pour tout $\chi \in X^*(T)$; x est compact mod $Z(G)$ si et seulement si $\chi(x_{ss}) \in \mathfrak{o}_{F'}^{\times}$ pour tout $\chi \in X^*(T)$ tel que la restriction de χ à $Z(G)$ soit triviale ; x est topologiquement unipotent si et seulement si $\chi(x_{ss}) \in 1 + \mathfrak{p}_{F'}$ pour tout $\chi \in X^*(T)$.

D'autre part, x est compact mod $Z(G)$ si et seulement si il existe $\mathcal{F} \in Fac(G)$ tel que $x \in K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$. L'ensemble des éléments compacts, resp. compacts mod $Z(G)$, est un sous-ensemble ouvert et fermé de $G(F)$ invariant par conjugaison. Soit M un Levi de G, soit $(\mathcal{F}_M, \nu) \in Fac^*(M)$ et soit $x \in K_{\mathcal{F}_M}^{\nu}$. Alors x est compact mod $Z(G)$ si et seulement si $\nu \in \mathcal{N}_{G-comp}^{M}$.

On note $G_{comp}(F)$ l'ensemble des éléments de $G(F)$ qui sont compacts mod $Z(G)$ (il serait plus correct de le noter $G_{comp\, mod\, Z(G)}...$). On note $G_{tu}(F)$ l'ensemble des éléments topologiquement unipotents de $G(F)$. On note $I(G)_{comp}^*$ l'ensemble des distributions dont le support est contenu dans $G_{comp}(F)$.

3.4 Facettes, fonctions et distributions

Soit $(\mathcal{F}, \nu) \in Fac_{max}^*(G)$. On note $C_{cusp}(\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu})$ l'espace des fonctions sur $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}(k_F)$ qui sont invariantes par conjugaison par $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(k_F)$ et qui sont cuspidales. On munit cet espace du produit hermitien défini par

$$< f, f' >= |\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(k_F)|^{-1} \sum_{x \in \mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}(k_F)} \bar{f}(x) f'(x).$$

Il est défini positif. Soit $f \in C_{cusp}(\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu})$. L'espace $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}(k_F)$ s'identifie à $K_{\mathcal{F}}^{\nu}/K_{\mathcal{F}}^{+}$. On identifie f à une fonction sur ce quotient $K_{\mathcal{F}}^{\nu}/K_{\mathcal{F}}^{+}$, on la relève en une fonction sur $K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ puis on l'étend en une fonction sur $G(F)$ par 0 hors de $K_{\mathcal{F}}^{\nu}$. On note $f_{\mathcal{F}}$ la fonction ainsi obtenue. Elle est très cuspidale, cf. [20] lemme 10. On déduit de $f_{\mathcal{F}}$ une distribution $D_{f_{\mathcal{F}}}$, cf. 3.1, que l'on note simplement D_f. Cette distribution est à support compact mod $Z(G)$.

Notons $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)$ le sous-ensemble des familles

$$(f_{\mathcal{F},\nu})_{(\mathcal{F},\nu) \in Fac_{max}^*(G)} \in \prod_{(\mathcal{F},\nu) \in Fac_{max}^*(G)} C_{cusp}(\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu})$$

qui vérifient la condition : pour tout $\nu \in \mathcal{N}$, l'ensemble des $\mathcal{F}$ tels que $(\mathcal{F}, \nu) \in Fac_{max}^*(G)$ et $f_{\mathcal{F},\nu} \neq 0$ est fini.

Pour $\mathbf{f} = (f_{\mathcal{F},\nu})_{(\mathcal{F},\nu) \in Fac_{max}^*(G)} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)$, la somme $\sum_{\mathcal{F},\nu} D_{f_{\mathcal{F},\nu}}$ est définie. En effet, chaque $D_{f_{\mathcal{F},\nu}}$ est à support dans l'ouvert fermé $w_G^{-1}(\nu)$ et, pour tout ν, il n'y a qu'un nombre fini de $(\mathcal{F}, \nu')$ tels que $\nu' = \nu$ et $f_{\mathcal{F},\nu'} \neq 0$. Pour tout compact C de $G(F)$, il n'y a donc qu'un nombre fini de $(\mathcal{F}, \nu)$ tels que le support de $D_{f_{\mathcal{F},\nu}}$ coupe C. On pose $D_{\mathbf{f}} = \sum_{\mathcal{F},\nu} D_{f_{\mathcal{F},\nu}}$. Cela définit une application linéaire

$$D : \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G) \to I(G)_{comp}^*.$$

Remarque. Quand un élément de $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)$ sera noté $\mathbf{f}$, on notera son image $D_{\mathbf{f}}$ ou $D_{\mathbf{f}}^G$ comme ci-dessus. Quand l'élément sera noté plus symboliquement d, on notera son image $D[d]$ ou $D^G[d]$.

Le groupe $G(F)$ agit naturellement sur $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)$. Il est clair que, pour $\mathbf{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)$ et $g \in G(F)$, on a $D({}^g\mathbf{f} - \mathbf{f}) = 0$. Notons $\mathcal{D}_{cusp}(G)$ l'espace des coinvariants, c'est-à-dire le quotient de $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)$ par le sous-espace engendré par les ${}^g\mathbf{f} - \mathbf{f}$ pour $\mathbf{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)$ et $g \in G(F)$. Alors D se quotiente en une application linéaire

$$D : \mathcal{D}_{cusp}(G) \to I(G)^*_{comp}.$$

Notons $\boldsymbol{\mathcal{D}}(G)$ la somme directe des $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(M)$ où M parcourt les Levi de G. On définit une application linéaire

$$D^G : \boldsymbol{\mathcal{D}}(G) \to I(G)^*$$

qui, à $\sum_M d^M$, associe $\sum_M Ind_M^G(D^M[d^M])$. Le groupe $G(F)$ agit naturellement sur l'espace $\boldsymbol{\mathcal{D}}(G)$: un élément $g \in G(F)$ envoie un Levi M sur le Levi gMg^{-1}, une facette $(\mathcal{F}_M, \nu) \in Fac^*_{max}(M)$ sur une facette $(g\mathcal{F}_M, g\nu) \in Fac^*_{max}(gMg^{-1})$ et une fonction $f_{\mathcal{F}^M,\nu} \in C_{cusp}(\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}_M})$ sur une fonction ${}^g(f_{\mathcal{F}_M,\nu}) \in C_{cusp}((\mathbf{gMg^{-1}})^{g\nu}_{g\mathcal{F}_M})$. Il est clair que, pour $g \in G(F)$ et $\mathbf{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(G)$, on a $D^G[{}^g\mathbf{f} - \mathbf{f}] = 0$. On note $\mathcal{D}(G)$ l'espace des coinvariants pour cette action de $G(F)$ dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}(G)$. L'application précédente se quotiente en une application linéaire

$$D^G = \mathcal{D}(G) \to I(G)^*.$$

Remarquons que l'application $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(M) \to \boldsymbol{\mathcal{D}}(G) \to \mathcal{D}(G)$ se quotiente par $\mathcal{D}_{cusp}(M)$.

3.5 Variantes de $\mathcal{D}(G)$

Soit M un Levi de G. On note $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp,G-comp}(M)$ le sous-espace des éléments $\mathbf{f} = (f_{\mathcal{F}_M,\nu})_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac^*_{max}(M)}$ de $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(M)$ tels que $f_{\mathcal{F}_M,\nu} = 0$ si $\nu \notin \mathcal{N}^M_{G-comp}$. On note $\boldsymbol{\mathcal{D}}(G)$ la somme directe des $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp,G-comp}(M)$ où M parcourt les Levi de G. On définit comme dans le paragraphe précédent l'espace de coinvariants $\mathcal{D}_{G-comp}(G)$, qui s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}(G)$. L'application D^G se restreint en une application linéaire

$$D^G : \mathcal{D}_{G-comp}(G) \to I(G)^*_{G-comp}.$$

On note $\mathcal{D}_{cusp,G-comp}(M)$ l'image de $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp,G-comp}(M)$ dans $\mathcal{D}_{cusp}(M)$. Il y a une projection naturelle $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(M) \to \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp,G-comp}(M)$ qui, à $\mathbf{f} = (f_{\mathcal{F}_M,\nu})_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac^*_{max}(M)} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(M)$ associe $\mathbf{f} = (f_{\mathcal{F}_M,\nu})_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac^*_{max,G-comp}(M)} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(M)$. Cette projection se quotiente en une projection de $\mathcal{D}_{cusp}(M)$ sur $\mathcal{D}_{cusp,G-comp}(M)$.

Fixons $\nu \in \mathcal{N}$. Notons $I(G)^{*\nu}_{G-comp}$ le sous-espace des distributions invariantes à support contenu dans $G_{comp}(F) \cap w_G^{-1}(\nu)$. Pour un Levi M de G, notons $\boldsymbol{\mathcal{D}}^\nu_{cusp,G-comp}(M)$ le sous-espace des $\mathbf{f} = (f_{\mathcal{F}_M,\nu'})_{(\mathcal{F}_M,\nu')\in Fac^*_{max}(M)} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp,G-comp}(M)$ tels que $f_{\mathcal{F}_M,\nu'} = 0$ si $\nu' \neq \nu$. A l'aide de ces espaces, on définit comme ci-dessus un espace $\mathcal{D}^\nu_{G-comp}(G)$. On a des isomorphismes naturels

$$\mathcal{D}_{G-comp}(G) \simeq \prod_{\nu\in\mathcal{N}} \mathcal{D}^\nu_{G-comp}(G),$$

$$I(G)^*_{G-comp} \simeq \prod_{\nu\in\mathcal{N}} I(G)^{*\nu}_{G-comp},$$

et l'application D^G s'identifie au produit de ses restrictions

$$D^G : \mathcal{D}^\nu_{G-comp}(G) \to I(G)^{*\nu}_{G-comp}.$$

3.6 Calcul de $D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}})$

Soit $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G,A)$. On a défini le Levi $M_{\mathcal{F},\nu}\in\mathcal{L}_{min}$ au paragraphe 2.2. Posons simplement $M=M_{\mathcal{F},\nu}$. On associe à $\mathcal{F}$ la facette $\mathcal{F}^M\in Fac(M,A)$. L'élément ν appartient à $\mathcal{N}^M_{G-comp}(\mathcal{F}^M)$, $(\mathcal{F}^M,\nu)$ appartient à $Fac_{max}(M,A)$, $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ s'identifie à $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}$ et $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$ s'identifie à $\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}^M}$, cf. [20] lemme 6. Soit $f\in C_{cusp}(\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}^M})$. On identifie f à une fonction sur $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}(k_F)$, puis à une fonction sur $K^\nu_{\mathcal{F}}/K^+_{\mathcal{F}}$, que l'on relève en une fonction sur $K^\nu_{\mathcal{F}}$. On prolonge cette fonction en une fonction sur $G(F)$, nulle hors de $K^\nu_{\mathcal{F}}$. On note $f_{\mathcal{F}}$ la fonction sur $G(F)$ obtenue ainsi. Elle est par construction invariante par conjugaison par $K^0_{\mathcal{F}}$.

Soient $L\in\mathcal{L}_{min}$, $(\mathcal{F}',\nu')\in Fac^*_{max,G-comp}(L,A)$ et $f'\in C_{cusp}(\mathbf{L}^{\nu'}_{\mathcal{F}'})^{K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}'}}$. On a défini la distribution $D^G_{f'}=Ind^G_L(D^L_{f'})$ sur $G(F)$. Notons $N(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}')$ l'ensemble des $n\in Norm_G(A)(F)$ tels que $nMn^{-1}=L$ et $n\mathcal{F}^M=\mathcal{F}'$. Cet ensemble (qui peut être vide) est invariant à gauche par $A_L(F)(K^0_{\mathcal{F}'}\cap Norm_G(A)(F))$. On fixe un ensemble de représentants $\underline{N}(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}')$ du quotient

$$A_L(F)(K^0_{\mathcal{F}'}\cap Norm_G(A)(F))\backslash N(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}').$$

Proposition. *(i) $D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}})\neq 0$ seulement si $\nu=\nu'$ et $N(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}')\neq\emptyset$.*

(ii) Supposons $\nu=\nu'$ et $N(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}')\neq\emptyset$. Alors

$$D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}})=mes(K^0_{\mathcal{F}})mes(K^0_{\mathcal{F}'})mes(A_L(F)_c)^{-1}\sum_{n\in\underline{N}(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}')}<\overline{{}^nf},f'>.$$

Remarques. (1) La fonction ${}^nf$ est celle définie en 3.4.

(2) Si f' est invariante par $K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}'}$, la formule du (ii) se simplifie et devient

$$D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}})=mes(K^0_{\mathcal{F}})mes(K^0_{\mathcal{F}'})mes(A_L(F)_c)^{-1}[K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}'}:A_L(F)K^0_{\mathcal{F}'}]<\bar{f}',f>.$$

Preuve. Puisque f est à support dans $w_G^{-1}(\nu)$ et que $D^G_{f'}$ est à support dans $w_G^{-1}(\nu')$ il est clair que $D^G_{f'}(f)=0$ si $\nu\neq\nu'$. Supposons désormais $\nu=\nu'$.

Fixons un sous-groupe parabolique $Q\in\mathcal{P}(L)$. Commençons par calculer $f_{\mathcal{F},U_Q}$. On sait définir la facette $\mathcal{F}^L\in Imm(L_{AD})$. Si $M\subset L$, on a évidemment $(\mathcal{F}^L)^M=\mathcal{F}^M$ et la fonction $f_{\mathcal{F}^L}$ sur $L(F)$ est bien définie. Montrons que

(3) si $M\not\subset L$, $f_{\mathcal{F},U_Q}=0$; si $M\subset L$, $f_{\mathcal{F},U_Q}=mes(U_Q(F)\cap K^+_{\mathcal{F}})f_{\mathcal{F}^L}$.

Rappelons que, pour $l\in L(F)$, on a $f_{\mathcal{F},U_Q}(l)=\int_{U_Q(F)}f_{\mathcal{F}}(lu)\,du$. Le groupe Q, resp. L, détermine un sous-groupe parabolique $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$, resp. une composante de Levi $\mathbf{L}$ de $\mathbf{Q}$, de sorte que l'image de $Q(F)\cap K^0_{\mathcal{F}}$, resp. $L(F)\cap K^0_{\mathcal{F}}$, dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(k_F)$ soit $\mathbf{Q}(k_F)$, resp. $\mathbf{L}(k_F)$. Supposons que $f_{\mathcal{F},U_Q}\neq 0$. Alors $Q(F)\cap K^\nu_{\mathcal{F}}\neq\emptyset$ et il existe un sous-espace parabolique $\mathbf{Q}^\nu$ de $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$, associé au parabolique $\mathbf{Q}$, de sorte que l'image dans $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}(k_F)$ de $Q(F)\cap K^\nu_{\mathcal{F}}$ soit $\mathbf{Q}^\nu(k_F)$. Notons $\mathbf{L}^\nu$ le normalisateur de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{Q}^\nu$. Posons $V=U_Q(F)\cap K^0_{\mathcal{F}}$. Fixons $l\in L(F)$ tel que $f_{\mathcal{F},U_Q}(l)\neq 0$. On écrit

$$f_{\mathcal{F},U_Q}(l)=\int_{U_Q(F)/V}\int_V f_{\mathcal{F}}(luv)\,dv\,du.$$

Fixons $u \in U_Q(F)$ tel que l'intégrale intérieure soit non nulle. L'élément lu appartient à $Q(F)\cap K_{\mathcal{F}}^{\nu}$. Décomposons son image dans $\mathbf{Q}^{\nu}(k_F)$ en $\mathbf{lu}$ avec $\mathbf{l}\in \mathbf{L}^{\nu}(k_F)$ et $\mathbf{u}\in \mathbf{U_Q}(k_F)$. On voit alors que

$$\int_V f_{\mathcal{F}}(luv)\,dv = c\sum_{\mathbf{v}\in \mathbf{U_Q}(k_F)} f(\mathbf{lv}),$$

où $c>0$ est une constante provenant des mesures et où on a identifié f à une fonction sur $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}(k_F)$. Cette fonction est cuspidale. La somme ci-dessus est donc nulle si $\mathbf{Q}^{\nu}\neq \mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}$. Notre hypothèse de non-nullité implique donc $\mathbf{Q}^{\nu}=\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}$, d'où aussi $\mathbf{Q}=\mathbf{L}=\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. Le tore A détermine un sous-tore déployé maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. On a $X_*(A)\simeq X_*(\mathbf{A})$. Les sous-tores $A_{M_{\mathcal{F}}}$ et A_L déterminent des sous-tores $\mathbf{A}_{M_{\mathcal{F}}}$ et $\mathbf{A}_L$. Par définition de $M_{\mathcal{F}}$, $\mathbf{A}_{M_{\mathcal{F}}}$ est le plus grand sous-tore déployé contenu dans le centre de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. Par définition de $\mathbf{L}$, ce groupe est le commutant de $\mathbf{A}_L$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. L'égalité $\mathbf{L}=\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ entraîne donc $\mathbf{A}_L\subset \mathbf{A}_{M_{\mathcal{F}}}$. D'où aussi $A_L\subset A_{M_{\mathcal{F}}}$. Puisque $\mathbf{Q}^{\nu}=\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}$, on a $K_{\mathcal{F}}^{\nu}=(Q(F)\cap K_{\mathcal{F}}^{\nu})K_{\mathcal{F}}^{+}$. On a aussi $K_{\mathcal{F}}^{+}=(K_{\mathcal{F}}^{+}\cap Q(F))(K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_{\bar{Q}}(F))$, où $\bar{Q}$ est le parabolique de composante de Levi L opposé à Q. Donc $K_{\mathcal{F}}^{\nu}=(Q(F)\cap K_{\mathcal{F}}^{\nu})(K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_{\bar{Q}}(F))$. On sait que l'ensemble $K_{\mathcal{F}}^{\nu}\cap Norm_G(A)(F)$ est non vide. Mais un élément de $Norm_G(A)(F)$ qui appartient à $Q(F)U_{\bar{Q}}(F)$ appartient forcément à $Norm_L(A)(F)$. Soit donc $w\in K_{\mathcal{F}}^{\nu}\cap Norm_L(A)(F)$. Il agit naturellement dans A et conserve $A_{M_{\mathcal{F}}}$. Par définition de $M=M_{\mathcal{F},\nu}$, A_M est le plus grand sous-tore de $A_{M_{\mathcal{F}}}$ contenu dans l'ensemble des points fixes de l'action de w. Puisque $w\in L(F)$, ce sous-tore contient A_L. Donc $A_L\subset A_M$ et $M\subset L$. Cela démontre la première assertion de (3).

Supposons maintenant $M\subset L$. Alors, pour $l\in L(F)$ et $u\in U_Q(F)$, on a $lu\in K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ si et seulement si $l\in K_{\mathcal{F}^L}^{\nu}$ et $u\in U_Q(F)\cap K_{\mathcal{F}}^{+}$ (cela résulte de [20] lemme 6). On voit que la fonction $f_{\mathcal{F},U_Q}$ est à support dans $K_{\mathcal{F}^L}^{\nu}$ et que, pour un élément l de ce groupe, on a $f_{\mathcal{F},U_Q}(l)=mes(U_Q(F)\cap K_{\mathcal{F}}^{+})f(\bar{l})$, où $\bar{l}$ est l'image de l dans $\mathbf{L}_{\mathcal{F}^L}^{\nu}(k_F)\simeq \mathbf{M}_{\mathcal{F}^M}^{\nu}(k_F)$. Par définition de la fonction $f_{\mathcal{F}^L}$, on obtient la deuxième assertion de (3), ce qui achève la preuve de cette assertion.

Supposons maintenant $M\subset L$. Posons

$$I_{\mathcal{F}^L,\mathcal{F}'}(f,f')=\int_{L(F)} f_{\mathcal{F}^L}(l)f'_{\mathcal{F}'}(l)\,dl.$$

Montrons que

(4) si $\mathcal{F}^L\neq\mathcal{F}'$, $I_{\mathcal{F}^L,\mathcal{F}'}(f,f')=0$; si $\mathcal{F}^L=\mathcal{F}'$, alors $M=L$, $\mathcal{F}^M=\mathcal{F}'$ et $I_{\mathcal{F}^L,\mathcal{F}'}(f,f')=mes(K_{\mathcal{F}'}^{0})<\bar{f},f'>$.

Ici, tout se passe dans L, on peut aussi bien supposer $L=G$ pour simplifier les notations. On a donc $\mathcal{F}^L=\mathcal{F}$. Supposons $\mathcal{F}\neq\mathcal{F}'$. Dans l'appartement $App(A)$, fixons un segment $[x,x']$ joignant un point $x\in\mathcal{F}^{\nu}$ à un point $x'\in\mathcal{F}'^{\nu}$. L'hypothèse $\mathcal{F}\neq\mathcal{F}'$ entraîne que $x\neq x'$. Il y a une facette $\mathcal{F}''\in Fac(G,A)$ et un élément $x''\in]x,x'[$ tel que le segment $[x'',x'[$ soit contenu dans $\mathcal{F}''$. D'après ce que sont les supports de $f_{\mathcal{F}}$ et $f'_{\mathcal{F}'}$, on a

$$I_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(f,f')=\int_{K_{\mathcal{F}}^{\nu}\cap K_{\mathcal{F}'}^{\nu}} f_{\mathcal{F}}(g)f'_{\mathcal{F}'}(g)\,dg.$$

Si $K_{\mathcal{F}}^{\nu}\cap K_{\mathcal{F}'}^{\nu}=\emptyset$, cette intégrale est nulle et on a démontré la première assertion de (4). Sinon, considérons un élément $g\in K_{\mathcal{F}}^{\nu}\cap K_{\mathcal{F}'}^{\nu}$. L'action de g sur l'immeuble fixe x et x', donc aussi tout le segment $[x,x']$. En particulier, il fixe $[x'',x'[$, donc $g\in K_{\mathcal{F}''}^{\dagger}$. On a $w_G(g)=\nu$, donc $g\in K_{\mathcal{F}''}^{\nu}$. Alors $[x'',x'[\subset \mathcal{F}''^{\nu}$. Cela entraîne $\mathcal{F}''\neq\mathcal{F}'$ car l'hypothèse $(\mathcal{F}',\nu)\in Fac^*_{max}(G,A)$ (rappelons que l'on a supposé $L=G$) signifie que $\mathcal{F}'^{\nu}$ est réduit à un unique point, qui est donc x'. Le point x' est adhérent à $\mathcal{F}''$, donc toute la facette $\mathcal{F}'$ est contenue dans l'adhérence de $\mathcal{F}''$. On sait qu'alors il existe un sous-groupe parabolique propre $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}'}$ et un sous-espace parabolique $\mathbf{P}^\nu$ de $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}'}$ associé à $\mathbf{P}$, de sorte que l'image de $K^0_{\mathcal{F}''}\cap K^0_{\mathcal{F}'}$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}'}(k_F)$ soit $\mathbf{P}(k_F)$ et que l'image de $K^\nu_{\mathcal{F}''}\cap K^\nu_{\mathcal{F}'}$ dans $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}'}(k_F)$ soit $\mathbf{P}^\nu(k_F)$. Il est facile d'identifier l'ensemble $\mathbf{U_P}(k_F)$ en décrivant les facettes $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ comme en 2.2. On a forcément $\Sigma_{\mathcal{F}''}\subset\Sigma_{\mathcal{F}'}$, $c_{\alpha,\mathcal{F}''}=c_{\alpha,\mathcal{F}'}$ si $\alpha\in\Sigma_{\mathcal{F}''}$ et $c_{\alpha,\mathcal{F}''}=c_{\alpha,\mathcal{F}'}$ ou $c^-_{\alpha,\mathcal{F}'}$ si $\alpha\in\Sigma_{\mathcal{F}'}-\Sigma_{\mathcal{F}''}$. Notons Ξ l'ensemble des $\alpha\in\Sigma_{\mathcal{F}'}-\Sigma_{\mathcal{F}''}$ tels que $c_{\alpha,\mathcal{F}''}=c_{\alpha,\mathcal{F}'}$. Alors $\mathbf{U_P}(k_F)$ est l'image dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}'}(k_F)$ de $\prod_{\alpha\in\Xi}U_{\alpha,c_{\alpha,\mathcal{F}'}}$. Notons V ce dernier groupe. Il est inclus dans $K^0_{\mathcal{F}'}$. Montrons qu'il est inclus dans $K^+_{\mathcal{F}}$. En effet, soit $\alpha\in\Xi$. Les définitions entraînent que $\alpha(x'')>\alpha(x')=c_{\alpha,\mathcal{F}'}$. A fortiori, $\alpha(x)>\alpha(x')>c_{\alpha,\mathcal{F}'}$. Si $\alpha\in\Sigma_{\mathcal{F}}$, on a $c_{\alpha,\mathcal{F}}=\alpha(x)>c_{\alpha,\mathcal{F}'}$ donc $c^-_{\alpha,\mathcal{F}}\geq c_{\alpha,\mathcal{F}'}$ et $K^+_{\mathcal{F}}\cap U_\alpha(F)=U_{\alpha,c^-_{\alpha,\mathcal{F}}}\supset U_{\alpha,c_{\alpha,\mathcal{F}'}}$. Si $\alpha\notin\Sigma_{\mathcal{F}}$, $c_{\alpha,\mathcal{F}}$ est le plus grand élément de Γ_α qui soit strictement inférieur à $\alpha(x)$, donc $c_{\alpha,\mathcal{F}}\geq c_{\alpha,\mathcal{F}'}$. On a encore $K^+_{\mathcal{F}}\cap U_\alpha(F)=U_{\alpha,c_{\alpha,\mathcal{F}}}\supset U_{\alpha,c_{\alpha,\mathcal{F}'}}$. Cela démontre l'assertion. On peut alors écrire

$$I_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(f,f')=\int_{(K^\nu_{\mathcal{F}}\cap K^\nu_{\mathcal{F}'})/V}\int_V f_{\mathcal{F}}(gv)f'_{\mathcal{F}'}(gv)\,dv\,dg.$$

On vient de voir que $V\subset K^+_{\mathcal{F}}$ et $f_{\mathcal{F}}$ est invariante par ce groupe donc l'intégrale se récrit

$$I_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(f,f')=\int_{(K^\nu_{\mathcal{F}}\cap K^\nu_{\mathcal{F}'})/V} f_{\mathcal{F}}(g)\int_V f'_{\mathcal{F}'}(gv)\,dv\,dg.$$

Pour g intervenant dans cette intégrale, notons $\bar{g}$ son image dans $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}'}(k_F)$. On a en fait $\bar{g}\in\mathbf{P}^\nu(k_F)$. A une constante positive près provenant des mesures, l'intégrale intérieure n'est autre que

$$\sum_{\bar{u}\in\mathbf{U_P}(k_F)} f'(\bar{g}\bar{u}).$$

Ceci est nul car f' est cuspidale. Donc $I_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(f,f')=0$, ce qui démontre la première assertion de (4).

Supposons maintenant $\mathcal{F}=\mathcal{F}'$. Alors $M=M_{\mathcal{F},\nu}=M_{\mathcal{F}',\nu}=G$ puisque $(\mathcal{F}',\nu)\in Fac^*_{max}(G,A)$. D'où $\mathcal{F}^M=\mathcal{F}=\mathcal{F}'$. Un calcul immédiat donne la dernière formule de (4), ce qui démontre cette assertion.

Après ces préliminaires, démontrons la proposition. Notons N un ensemble de représentants du quotient

$$Norm_L(A)(F)\backslash Norm_G(A)(F)/(Norm_G(A)(F)\cap K^0_{\mathcal{F}}).$$

On sait que $G(F)$ est union disjointe des ensembles $L(F)nK^0_{\mathcal{F}}$ quand n décrit N. Fixons un sous-groupe parabolique $Q\in\mathcal{P}(L)$. On définit comme en 3.1 une pseudo-mesure sur $Q(F)\backslash G(F)$. Pour tout $n\in N$, introduisons la fonction φ_n sur $G(F)$ à support dans $Q(F)nK^0_{\mathcal{F}}$ telle que $\varphi(lunk)=\delta_Q(l)$ pour tous $l\in L(F)$, $u\in U_Q(F)$, $k\in K^0_{\mathcal{F}}$. On note m_n la valeur de son intégrale contre la pseudo-mesure sur $Q(F)\backslash G(F)$. Puisque $f_{\mathcal{F}}$ est invariante par $K^0_{\mathcal{F}}$, la définition de $D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}})$ se récrit

$$(5)\qquad D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}})=\sum_{n\in N}m_nD^L_{f'}((^n(f_{\mathcal{F}}))_{U_Q}).$$

Pour $n\in N^0$, l'action de n transporte $\mathcal{F}$ en une facette $n\mathcal{F}$, le Levi $M=M_{\mathcal{F},\nu}$ en le Levi $nMn^{-1}=M_{n\mathcal{F},\nu}$, la facette $\mathcal{F}^M$ en une facette $n\mathcal{F}^M\in Fac(nMn^{-1},A)$ et f en une fonction ${}^nf \in C_{cusp}((\mathbf{nMn^{-1}})^{\nu}_{n\mathcal{F}^M})$. On a ${}^n(f_{\mathcal{F}}) = ({}^nf)_{n\mathcal{F}}$. On applique (3) en y remplaçant $\mathcal{F}$ par $n\mathcal{F}$ et $f_{\mathcal{F}}$ par $({}^nf)_{n\mathcal{F}}$. Cette assertion nous dit que la contribution $D^L_{f'}(({}^nf_{\mathcal{F}})_{U_Q})$ de n à la formule (5) est nulle si $nMn^{-1} \not\subset L$. On note N^0 le sous-ensemble des $n \in N$ tels que $nMn^{-1} \subset L$. Pour $n \in N^0$, cette contribution est $mes(U_Q(F) \cap K^+_{n\mathcal{F}})D^L_{f'}(({}^nf)_{(n\mathcal{F})^L})$. Par définition, on a

$$(6) \qquad D^L_{f'}(({}^nf)_{(n\mathcal{F})^L}) = \int_{A_L(F)\backslash L(F)} \int_{L(F)} ({}^nf)_{(n\mathcal{F})^L}(x^{-1}lx)f'_{\mathcal{F}'}(l)\, dl\, dx.$$

Notons N'_n un ensemble de représentants du quotient

$$A_L(F)(K^0_{\mathcal{F}'} \cap Norm_L(A)(F))\backslash Norm_L(A)(F)/(K^0_{(n\mathcal{F})^L} \cap Norm_L(A)(F)).$$

On utilise maintenant la décomposition en union disjointe

$$L(F) = \sqcup_{n' \in N'_n} A_L(F)K^0_{\mathcal{F}'}n'K^0_{(n\mathcal{F})^L}.$$

Pour $n' \in N'_n$, notons $m'_{n'}$ la mesure de

$$A_L(F)\backslash A_L(F)K^0_{\mathcal{F}'}n'K^0_{(n\mathcal{F})^L}.$$

Puisque les fonctions $({}^nf)_{(n\mathcal{F})^L}$, resp. $f'_{\mathcal{F}'}$, sont invariantes par conjugaison par $K^0_{(n\mathcal{F})^L}$, resp. $K^0_{\mathcal{F}'}$, la formule (6) se récrit

$$D^L_{f'}(({}^nf)_{(n\mathcal{F})^L}) = \sum_{n' \in N'_n} m'_{n'} \int_{L(F)} {}^{n'}({}^nf)_{(n\mathcal{F})^L}(l)f'_{\mathcal{F}'}(l)\, dl.$$

Pour n' apparaissant ci-dessus, on a ${}^{n'}({}^nf)_{(n\mathcal{F})^L} = ({}^{n'n}f)_{(n'n\mathcal{F})^L}$ avec des définitions similaires aux précédentes. Remarquons que $M_{n'n\mathcal{F},\nu} = n'nM(n'n)^{-1}$. La formule ci-dessus se récrit

$$D^L_{f'}(({}^nf)_{(n\mathcal{F})^L}) = \sum_{n' \in N'_n} m'_{n'} I_{(n'n\mathcal{F})^L,\mathcal{F}'}({}^{n'n}f, f').$$

Pour tout n', on applique (4) en y remplaçant $\mathcal{F}$ par $n'n\mathcal{F}$ et f par ${}^{n'n}f$. Cette assertion nous permet de nous limiter aux n' tels que $n'nM(n'n)^{-1} = L$, $(n'n\mathcal{F})^L = n'n\mathcal{F}^M = \mathcal{F}'$. Notons N'^0_n l'ensemble des $n' \in N'_n$ vérifiant ces conditions. En utilisant la dernière assertion de (4), on obtient

$$D^L_{f'}(({}^nf)_{(n\mathcal{F})^L}) = \sum_{n' \in N'^0_n} m'_{n'} mes(K^0_{\mathcal{F}'}) < \overline{{}^{n'n}f}, f' > .$$

En rassemblant ces calculs, on obtient

$$(7) \qquad D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}}) = \sum_{n \in N^0} \sum_{n' \in N'^0_n} m_n mes(U_Q(F) \cap K^+_{n\mathcal{F}}) m'_{n'} mes(K^0_{\mathcal{F}'}) < \overline{{}^{n'n}f}, f' > .$$

On vérifie que l'application

$$\begin{array}{ccc} \{(n, n'); n \in N^0, n' \in N'^0_n\} & \to & Norm_G(A)(F) \\ (n, n') & \mapsto & n'n \end{array}$$

est une bijection de l'ensemble de départ sur le quotient

$$A_L(F)(K^0_{\mathcal{F}'}\cap Norm_G(A)(F))\backslash N(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}').$$

Si $N(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}')$ est vide, on a donc $D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}})=0$, ce qui démontre le (i) de l'énoncé. Supposons $N(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}')\neq\emptyset$. On peut supposer que $\underline{N}(M,\mathcal{F}^M,L,\mathcal{F}')$ est égal à l'ensemble des $n'n$ pour (n,n') comme ci-dessus. Pour un tel couple, on vérifie les propriétés suivantes

$K^0_{n\mathcal{F}}\cap Q(F)=(K^0_{n\mathcal{F}}\cap L(F))(K^0_{n\mathcal{F}}\cap U_Q(F))$, $K^0_{n\mathcal{F}}\cap L(F)=K^0_{(n\mathcal{F})^L}$, $K^0_{n\mathcal{F}}\cap U_Q(F)=K^+_{n\mathcal{F}}\cap U_Q(F)$, cf. [20] lemme 6 ;

$m_n=mes(K^0_{\mathcal{F}})mes(K^0_{(n\mathcal{F})^L})^{-1}mes(K^+_{n\mathcal{F}}\cap U_Q(F))^{-1}$;

$mes(K^0_{(n\mathcal{F})^L})=mes(K^0_{\mathcal{F}'})$;

$m'_{n'}=mes(A_L(F)\backslash A_L(F)K^0_{\mathcal{F}'})=mes(K^0_{\mathcal{F}'})mes(A_L(F)_c)^{-1}$.

En utilisant ces propriétés, la formule (7) devient celle du (ii) de l'énoncé. $\square$

3.7 Un espace de fonctions

Pour $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G)$, notons $C(\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}})$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}(k_F)$ et notons $\mathcal{E}^\nu_{\mathcal{F}}$ l'espace des fonctions sur $G(F)$, à support dans $K^\nu_{\mathcal{F}}$ et invariantes par multiplication à droite ou à gauche par $K^+_{\mathcal{F}}$. Ces espaces s'identifient comme en 3.4 : pour une fonction $f\in C(\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}})$, on identifie f à une fonction sur $K^\nu_{\mathcal{F}}/K^+_{\mathcal{F}}$, on la relève en une fonction sur $K^\nu_{\mathcal{F}}$ puis on l'étend en une fonction sur $G(F)$ par 0 hors de $K^\nu_{\mathcal{F}}$. On note $f_{\mathcal{F}}$ la fonction obtenue, qui appartient à $\mathcal{E}^\nu_{\mathcal{F}}$. On note $\mathcal{E}(G)$ le sous-espace de $C^\infty_c(G(F))$ engendré par les $\mathcal{E}^\nu_{\mathcal{F}}$ quand $(\mathcal{F},\nu)$ décrit $Fac^*(G)$. On note $I\mathcal{E}(G)$ l'image de $\mathcal{E}(G)$ dans $I(G)$.

Pour $M\in\underline{\mathcal{L}}_{min}$, le groupe $Norm_G(A)(F)\cap Norm_G(M)(F)$ agit sur l'ensemble $Fac^*_{max,G-comp}(M,A)$. Fixons un ensemble de représentants $\underline{Fac}^*_{max,G-comp}(M,A)$ des orbites. Pour chaque $(\mathcal{F}_M,\nu)\in\underline{Fac}^*_{max,G-comp}(M,A)$, le groupe $K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}_M}$ agit naturellement sur $\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}_M}(k_F)$ et sur l'espace de fonctions sur ce groupe. Cette action conserve l'espace $C_{cusp}(\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}_M})$ et on note $C_{cusp}(\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}_M})^{K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}_M}}$ le sous-espace des invariants. On pose

$$\mathcal{E}(G,M)=\sum_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in\underline{Fac}^*_{max,G-comp}(M,A)}C_{cusp}(\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}_M})^{K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}_M}}.$$

Pour tout $(\mathcal{F}_M,\nu)\in\underline{Fac}^*_{max,G-comp}(M,A)$, fixons une facette $\mathcal{F}^G_M\in Fac(G,A)$ telle que $(\mathcal{F}^G_M,\nu)\in Fac^*(G,A)$, $M_{\mathcal{F}^G_M,\nu}=M$ et $(\mathcal{F}^G_M)^M=\mathcal{F}_M$. C'est possible d'après [20] lemme 7. Pour $f\in C_{cusp}(\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}_M})^{K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}_M}}$, on a défini la fonction $f_{\mathcal{F}^G_M}$ sur $G(F)$. L'application $f\mapsto f_{\mathcal{F}^G_M}$ se prolonge par linéarité en une application de $\mathcal{E}(G,M)$ dans $\mathcal{E}(G)$. On note $e(G,M)$: $\mathcal{E}(G,M)\to I\mathcal{E}(G)$ la composée de cette application et de la projection $\mathcal{E}(G)\to I\mathcal{E}(G)$. On note $Im(e(G,M))$ l'image de $e(G,M)$.

Lemme. *On a l'égalité* $I\mathcal{E}=\sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}_{min}}Im(e(G,M))$.

Preuve. Soit $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G)$ et $f\in C(\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}})$. On veut prouver que l'image de $f_{\mathcal{F}}$ dans $I(G)$ appartient à la somme des $Im(e(G,M))$. On ne perd rien à supposer f invariante par conjugaison par $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(k_F)$. On sait que l'on peut écrire f comme somme finie de fonctions "induites" $Ind^{\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}}_{\mathbf{M}^\nu}(f_{\mathbf{M}^\nu})$ (la définition est rappelée en (1) ci-dessous), où

$\mathbf{M}^\nu$ est un espace de Levi de $\mathbf{G}^\nu$ et $f_{\mathbf{M}^\nu}$ est une fonction cuspidale sur $\mathbf{M}^\nu(k_F)$ invariante par conjugaison par $\mathbf{M}(k_F)$. On peut aussi bien supposer que f est l'une de ces fonctions induites, disons $f = Ind_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}(f')$. Fixons une telle fonction et un espace parabolique $\mathbf{P}^\nu$ de composante de Levi $\mathbf{M}^\nu$. Notons f'' la fonction sur $\mathbf{G}^\nu(k_F)$ qui est à support dans $\mathbf{P}^\nu(k_F)$ et vérifie $f''(mu) = f'(m)$ pour tous $m \in \mathbf{M}^\nu(k_F)$ et $u \in \mathbf{U_P}(k_F)$. Par définition, on a

$$(1) \qquad f(g) = |\mathbf{P}(k_F)|^{-1} \sum_{x \in \mathbf{G}(k_F)} f''(x^{-1}gx)$$

pour tout $g \in \mathbf{G}^\nu(k_F)$. Il en résulte que l'image de $f_{\mathcal{F}}$ dans $I(G)$ est proportionnelle à celle de $f''_{\mathcal{F}}$. Au sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ correspond une facette $\mathcal{F}' \in Fac(G)$ dont l'adhérence contient $\mathcal{F}$. On a encore $(\mathcal{F}', \nu) \in Fac^*(G)$ d'après l'existence d'un espace $\mathbf{P}^\nu$ de parabolique associé $\mathbf{P}$. On vérifie que $f''_{\mathcal{F}} = f'_{\mathcal{F}'}$. Cela nous ramène au problème de départ où l'on a remplacé $\mathcal{F}$ et f par $\mathcal{F}'$ et f'. En oubliant cette construction, on peut supposer f cuspidale.

On peut conjuguer $\mathcal{F}$ et f par un élément de $G(F)$, cela ne change pas l'image de $f_{\mathcal{F}}$ dans $I(G)$. On peut donc supposer $\mathcal{F} \in App(A)$. Posons $M = M_{\mathcal{F},\nu}$. On a défini la facette $\mathcal{F}^M \in Imm(M_{AD})$ associée à $\mathcal{F}$. On a $\nu \in \mathcal{N}^M_{G-comp}(\mathcal{F}^M)$ d'après le (i) du lemme 6 de [20]. La dernière assertion de ce lemme et l'égalité $M = M_{\mathcal{F},\nu}$ entraînent que $\mathcal{F}^{M,\nu}$ est réduit à un point, c'est-à-dire que $(\mathcal{F}^M, \nu) \in Fac^*_{max}(M, A)$. De nouveau, par conjugaison, on peut supposer $M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}$ et $(\mathcal{F}^M, \nu) \in \underline{Fac}^*_{max,G-comp}(M, A)$. Les espaces $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$ et $\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}^M}$ s'identifient, on peut considérer f comme un élément de $C_{cusp}(\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}^M})$. On peut moyenner f par l'action par conjugaison de $K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}^M}$, cela ne change pas l'image de $f_{\mathcal{F}}$ dans $I(G)$. Alors $f \in \mathcal{E}(G, M)$. A f, on a associé ci-dessus une fonction $f_{(\mathcal{F}^M)^G} \in \mathcal{E}(G)$. Pour achever la preuve, il suffit de prouver que $f_{\mathcal{F}}$ a même image dans $I(G)$ que $f_{(\mathcal{F}^M)^G}$. Notons simplement $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}^M)^G$. La facette $\mathcal{F}'$ vérifie exactement les mêmes propriétés que $\mathcal{F}$, à savoir $(\mathcal{F}', \nu) \in Fac^*(G, A)$, $M_{\mathcal{F}',\nu} = M$ et $\mathcal{F}'^M = \mathcal{F}^M$. Si $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, on a terminé : $f_{\mathcal{F}} = f_{\mathcal{F}'}$. Supposons $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$. Notons X l'image réciproque de $\mathcal{F}^{M,\nu}$ dans $Imm(G_{AD})$. C'est un espace affine sous $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$ puisque $\mathcal{F}^{M,\nu}$ est réduit à un point. Les ensembles $\mathcal{F}^\nu \cap X$ et $\mathcal{F}'^\nu \cap X$ sont ouverts dans X, cf. [20] lemme 7. Fixons des points $x \in \mathcal{F}^\nu \cap X$ et $x' \in \mathcal{F}'^\nu \cap X$. Le découpage de $App(A)$ en facettes induit un découpage du segment $[x, x']$ en points et segments ouverts. C'est-à-dire que l'on a des points x_i pour $i = 1, ..., n$, des facettes $\mathcal{F}_i$ pour $i = 1, ..., n-1$ et des facettes $\mathcal{F}''_i$ pour $i = 1, ..., n$ de sorte que

$[x, x_1[= [x, x'] \cap \mathcal{F}$, $]x_n, x'] = [x, x'] \cap \mathcal{F}'$;

$]x_i, x_{i+1}[= [x, x'] \cap \mathcal{F}_i$ pour $i = 1, ..., n-1$;

$\{x_i\} = [x, x'] \cap \mathcal{F}''_i$ pour $i = 1, ..., n$.

Un élément $k \in K^\nu_{\mathcal{F}^M}$ appartient à la fois à $K^\nu_{\mathcal{F}}$ et $K^\nu_{\mathcal{F}'}$. Donc son action sur $Imm(G)$ fixe tout le segment $[x, x']$. Il en résulte que ν appartient à $\mathcal{N}(\mathcal{F}_i)$ et à $\mathcal{N}(\mathcal{F}''_i)$ pour tout i et que l'on peut aussi bien ajouter des indices ν dans les égalités ci-dessus, par exemple $]x_i, x_{i+1}[= [x, x'] \cap \mathcal{F}^\nu_i$. On décrit les facettes comme en 2.2. Parce que $M = M_{\mathcal{F},\nu} \supset M_{\mathcal{F}}$, on a $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}^M}$ et $c_{\alpha,\mathcal{F}} = c_{\alpha,\mathcal{F}^M}$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}^M}$. Il en est de même en remplaçant $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}'$. Fixons $i = 1, ..., n-1$. L'ensemble $\Sigma_{\mathcal{F}_i}$ est celui des α tels que, pour un point $y \in \mathcal{F}_i$, ou pour tout point $y \in \mathcal{F}_i$, $\alpha(y)$ appartient à Γ_α. Puisque $[x, x'] \cap \mathcal{F}_i$ est ouvert dans $[x, x']$, il revient au même de dire que $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}} \cap \Sigma_{\mathcal{F}'}$ et $c_{\alpha,\mathcal{F}} = c_{\alpha,\mathcal{F}'}$. La description ci-dessus entraîne alors $\Sigma_{\mathcal{F}_i} = \Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}'} = \Sigma_{\mathcal{F}^M}$. Donc $M_{\mathcal{F}_i} = M_{\mathcal{F}}$. L'espace $\mathcal{A}_{M_{\mathcal{F}_i,\nu}}$ est le sous-espace des points fixes de l'action de l'élément k ci-dessus dans $\mathcal{A}_{M_{\mathcal{F}_i}}$. Il en est de même en remplaçant $\mathcal{F}_i$ par $\mathcal{F}$. Puisque $M_{\mathcal{F}_i} = M_{\mathcal{F}}$, cela entraîne $M_{\mathcal{F}_i,\nu} = M_{\mathcal{F},\nu} = M$. Enfin, on a évidemment $\mathcal{F}^M_i = \mathcal{F}^M$. Cela démontre que chaque facette $\mathcal{F}_i$ vérifie les mêmes conditions que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. On peut définir une fonction $f_{\mathcal{F}_i}$ pour tout i et il nous suffit de démontrer successivement que les fonctions $f_{\mathcal{F}}$, $f_{\mathcal{F}_1}$,..., $f_{\mathcal{F}_{n-1}}$ et $f_{\mathcal{F}'}$ ont même image dans $I(G)$. On est ramené au cas de facettes consécutives, autrement dit au cas $n=1$ dans notre construction. Notons simplement $\mathcal{F}''=\mathcal{F}''_1$. Les facettes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ déterminent des espaces paraboliques $\mathbf{P}^\nu$ et $\mathbf{P}'^\nu$ et $\mathcal{G}^\nu_{\mathcal{F}''}$. Ils ont un espace de Levi commun $\mathbf{M}^\nu$, qui est isomorphe à $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$ et à $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}'}$: $\mathbf{M}^\nu(k_F)$ est l'image de $K^\nu_{\mathcal{F}^M}\cap K^\nu_{\mathcal{F}''}$ dans $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}''}(k_F)$. Par la même construction que ci-dessus, les fonctions $f_{\mathcal{F}}$ et $f_{\mathcal{F}'}$ ont même image dans $I(G)$ que la fonction $f''_{\mathcal{F}''}$, où $f''=Ind_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}''}}(f)$, le point étant que cette induction ne dépend pas de l'espace parabolique choisi. Cela achève la démonstration. $\square$

3.8 Deux espaces en dualité

Pour $M\in\underline{\mathcal{L}}_{min}$, notons $\mathcal{D}_{G-comp}(G,M)$ l'image dans $\mathcal{D}_{G-comp}(G)$ de l'espace $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp,G-comp}(M)$. Si $M=G$, $\mathcal{D}_{G-comp}(G;G)$ est simplement l'espace $D_{cusp}(G)$ déjà défini. On a $\mathcal{D}_{G-comp}(G)=\sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}_{min}}\mathcal{D}_{G-comp}(G,M)$. Pour tout $M\in\mathcal{L}_{min}$, on vérifie que le sous-espace

$$(1)\qquad \prod_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in\underline{Fac}^*_{max,G-comp}(M,A)} C_{cusp}(\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}_M})^{K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}_M}}\subset\boldsymbol{\mathcal{D}}_{G-comp}(G)$$

s'envoie bijectivement sur $\mathcal{D}_{G-comp}(G,M)$.

Proposition. *(i) Pour tout $M\in\underline{\mathcal{L}}_{min}$, l'application $e(G,M)$ est injective et la restriction de l'application D^G à $\mathcal{D}_{G-comp}(G,M)$ est injective.*

(ii) $I\mathcal{E}$, resp. $D^G(\mathcal{D}_{G-comp}(G))$, est somme directe des $Im(e(G,M))$, resp. $D^G(\mathcal{D}_{G-comp}(G,M))$, quand M décrit $\underline{\mathcal{L}}_{min}$.

(iii) Soient $M,L\in\underline{\mathcal{L}}_{min}$. L'application

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{D}_{G-comp}(G,M) & \to & Im(e(G;L))^*\\ \mathbf{f} & \mapsto & (D^G_{\mathbf{f}})_{|Im(e(G;L))}\end{array}$$

est nulle si $M\neq L$ et est un isomorphisme si $M=L$.

Preuve. Tous ces espaces sont sommes ou produits d'espaces indexés par des couples $(\mathcal{F}_M,\nu)$. Pour des raisons de support, on peut fixer $\nu\in\mathcal{N}$ et remplacer tous les espaces par les sous-espaces analogues où on se limite au couples $(\mathcal{F}_M,\nu')$ tels que $\nu'=\nu$, cf. 3.5. On gagne que ces espaces sont de dimension finie. En fait, d'après (1), les espaces $\mathcal{D}_{G-comp}(G,M)$ et $\mathcal{E}(G,M)$ deviennent isomorphes. Fixons une base $(\mathbf{f}_{i,M})_{i=1,...,n_M}$ de $\mathcal{E}(G,M)$, réunion de bases orthogonales des espaces $C_{cusp}(\mathbf{M}^\nu_{\mathcal{F}_M})^{K^{\dagger,G}_{\mathcal{F}_M}}$ intervenant. En appliquant la proposition 3.6 et la remarque (2) qui la suit, on voit que la matrice

$$\left(D^G_{\mathbf{f}_{i,M}}(e(G,L)(\overline{\mathbf{f}_{j,L}}))\right)_{M,L\in\underline{\mathcal{L}}_{min},i=1,...,n_M,j=1,...,n_L}$$

est diagonale, de coefficients diagonaux non nuls. Compte tenu du lemme précédent, cela entraîne toutes les assertions de l'énoncé. $\square$

3.9 Un corollaire

Corollaire. *(i) L'application linéaire $D^G : \mathcal{D}_{G-comp}(G) \to I(G)^*$ est injective.*

(ii) L'application linéaire composée $\mathcal{D}_{cusp}(G) \stackrel{D^G}{\to} I(G)^* \to I_{cusp}(G)^*$ est injective.

Cela résulte de la proposition précédente, en se rappelant que $\mathcal{E}(G;G)$ est formé d'après sa définition de fonctions cuspidales. $\square$

3.10 Injectivité de D^G

Pour $M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}$, notons $\mathcal{D}(G,M)$ l'image dans $\mathcal{D}(G)$ de l'espace $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(M)$. On a $\mathcal{D}(G) = \sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}_{min}} \mathcal{D}(G,M)$.

Proposition. *(i) L'application $D^G : \mathcal{D}(G) \to I(G)^*$ est injective.*

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'espace $D^G(\mathcal{D}(G)) \cap Ann^n I(G)^*$ est égal à la somme des $D^G(\mathcal{D}(G,M))$ où M parcourt les éléments de $\underline{\mathcal{L}}_{min}$ tels que $a_M \geq n$.

Preuve. Notons $\mathcal{D}^n(G)$ la somme des $\mathcal{D}(G,M)$ où M parcourt l'ensemble de Levi indiqué ci-dessus. Par construction, on a

$$\mathcal{D}^n(G) = \mathcal{D}^{n+1}(G) + \sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n_{min}} \mathcal{D}(G,M).$$

Il résulte des définitions que, pour tout $M \in \underline{\mathcal{L}}^n_{min}$, $\mathcal{D}(G,M)$ est l'image naturelle dans $\mathcal{D}(G)$ de $\mathcal{D}_{cusp}(M)^{W^G(M)}$. On a aussi $D^G(\mathcal{D}^n(G)) \subset D^G(\mathcal{D}(G)) \cap Ann^n I(G)^*$. On en déduit une suite d'applications

$$\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n_{min}} \mathcal{D}_{cusp}(M)^{W^G(M)} \to \oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n_{min}} \mathcal{D}(G,M) \to \mathcal{D}^n(G)/\mathcal{D}^{n+1}(G) \stackrel{\delta^n}{\to}$$

$$(D^G(\mathcal{D}(G))\cap Ann^n I(G)^*)/(D^G(\mathcal{D}(G))\cap Ann^{n+1} I(G)^*) \to Gr^n I(G)^* \simeq \oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n_{min}} I_{cusp}(M)^{*W^G(M)}.$$

Le corollaire précédent, appliqué aux Levi $M \in \underline{\mathcal{L}}^n_{min}$, implique que l'application composée est injective. Les deux premières applications de la suite sont surjectives. Il en résulte que δ_n est injective. Pour $n = a_G$, on a $D^G(\mathcal{D}(G)) \cap Ann^{a_G} I(G)^* = D^G(\mathcal{D}(G)) = D^G(\mathcal{D}^n(G))$. L'injectivité de δ_n pour tout n entraîne alors par récurrence que, pour tout n, on a $D^G(\mathcal{D}(G))\cap Ann^n I(G)^* = D^G(\mathcal{D}^n(G))$ et $Ker(D^G) \subset \mathcal{D}^n(G)$. Pour $n = a_{M_{min}}+1$, cette dernière relation implique l'injectivité de D^G. $\square$

3.11 Variantes avec caractère central

Pour un groupe topologique abélien et localement compact X, nous appelons caractère de X un homomorphisme continu de X dans $\mathbb{C}^\times$. Soit ξ un caractère de $A_G(F)$. On note $C^\infty_{c,\xi}(G(F))$ l'espace des fonctions sur $G(F)$, à valeurs complexes, localement constantes, telles que $f(ag) = \xi(a)^{-1} f(g)$ pour tous $a \in A_G(F)$ et tout $g \in G(F)$ et telles que l'image dans $A_G(F)\backslash G(F)$ du support de f soit compacte. Pour $f \in C^\infty_c(G(F))$, notons f_ξ la fonction définie par $f_\xi(g) = \int_{A_G(F)} f(ag)\xi(a)\, da$. L'application linéaire $f \mapsto f_\xi$ est une surjection de $C^\infty_c(G(F))$ sur $C^\infty_{c,\xi}(G(F))$. De même que l'on a défini $I(G)$, on définit l'espace $I_\xi(G)$. L'action de $A_G(F)$ sur $C^\infty_c(G(F))$ se descend en une action sur

$I(G)$. Le groupe $A_G(F)$ agit dualement sur $I(G)^*$. L'espace $I_\xi(G)^*$ dual de $I_\xi(G)$ s'identifie au sous-espace des éléments de $I(G)^*$ qui se transforment selon ξ. Précisément, un élément d de ce sous-espace s'identifie à l'élément de $I_\xi(G)^*$ qui envoie f_ξ sur $d(f)$ pour tout $f \in C_c^\infty(G(F))$.

Soit $\mathcal{F} \in Fac(G)$. Le groupe $A_G(F)$ est contenu dans $K_\mathcal{F}^\dagger$. Il agit par multiplication sur ce groupe. La multiplication par $a \in A_G(F)$ envoie un sous-ensemble $K_\mathcal{F}^\nu$ sur $K_\mathcal{F}^{\nu+\nu_a}$, où on a posé $\nu_a = w_G(a)$. Si $(\mathcal{F}, \nu) \in Fac^*_{max}(G)$, on a aussi $(\mathcal{F}, \nu + \nu_a) \in Fac^*_{max}(G)$. Dans ce cas, la multiplication par a se descend en un isomorphisme encore noté $a : C_{cusp}(\mathbf{G}_\mathcal{F}^\nu) \to C_{cusp}(\mathbf{G}_\mathcal{F}^{\nu+\nu_a})$. Ces isomorphismes définissent une action de $A(F)$ sur l'espace $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)$ (on prendra soin de la distinguer de l'action par conjugaison, qui est triviale). L'action du sous-groupe $A_{G,tu}(F)$ est triviale. L'action se descend en une action sur $\mathcal{D}_{cusp}(G)$ que l'on note $(a, \mathbf{f}) \mapsto \mathbf{f}^a$. Soit ξ un caractère modérément ramifié de $A_G(F)$, c'est-à-dire trivial sur $A_{G,tu}(F)$. On note $\mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$ le sous-espace des éléments $\mathbf{f} \in \mathcal{D}_{cusp}(G)$ tels que $\mathbf{f}^a = \xi(a)\mathbf{f}$ pour tout $a \in A_G(F)$.

Plus généralement, on définit de même les variantes "à caractère central" de beaucoup d'objets déjà définis (au sens ci-dessus : il s'agit d'un caractère ξ de $A_G(F)$). On les note en ajoutant un indice ξ dans les notations. Notons en particulier l'égalité

(1) $D^G(\mathcal{D}(G)) \cap I(G)^*_\xi = D^G(\mathcal{D}_\xi(G))$,

qui résulte aisément de l'injectivité de D^G. Plus généralement, si $\xi_1, ..., \xi_n$ sont des caractères de $A_G(F)$,

(2) $D^G(\mathcal{D}(G)) \cap (\sum_{i=1,...,n} I(G)^*_{\xi_i}) = D^G(\sum_{i=1,...,n} \mathcal{D}_{\xi_i}(G))$.

Preuve. On peut supposer les ξ_i distincts. Par interpolation, si d appartient au membre de gauche, les composantes d_i de d dans chaque $I(G)^*_{\xi_i}$ sont combinaisons linéaires finies de translatés d^a pour des $a \in A_G(F)$. Or ces d^a appartiennent tous à $D^G(\mathcal{D}(G))$. Donc $d_i \in D^G(\mathcal{D}(G)) \cap I(G)^*_{\xi_i}$ et il reste à appliquer l'égalité (1). $\square$

4 Eléments compacts, p'-éléments

4.1 Retour sur les éléments topologiquement unipotents

Pour $x \in G_{tu}(F)$, l'homomorphisme $n \mapsto x^n$ de $\mathbb{Z}$ dans $G(F)$ se prolonge en un homomorphisme continu $z \mapsto x^z$ de $\mathbb{Z}_p$ dans $G(F)$. Il en résulte que,

(1) si $J \subset G(F)$ est un sous-groupe fermé et s'il existe un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $x^c \in J$, alors $x \in J$.

On a

(2) l'application naturelle $G_{tu}(F) \to G_{AD,tu}(F)$ est surjective ; ses fibres sont les orbites de l'action par multiplication de $(Z(G)^0)_{tu}(F)$ dans $G_{tu}(F)$.

Preuve. Notons $\pi : G \to G_{AD}$ l'homomorphisme naturel. L'hypothèse $(Hyp)(G)$ entraîne que $G_{AD}(F)/\pi(G(F))$ est d'ordre premier à p. Pour $y \in G_{AD,tu}(F)$, il y a donc un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $y^c \in \pi(G(F))$. D'après (1), y appartient à $\pi(G(F))$. Soit $x \in G(F)$ tel que $\pi(x) = y$. On décompose $x = x_{ss}x_u$, où x_{ss} est semi-simple, x_u est unipotent et x_{ss} et x_u commutent. Fixons un sous-tore maximal T de G tel que $x_{ss} \in T(F)$ et fixons une extension galoisienne finie F' de F, de degré d premier à p, de sorte que T soit déployé sur F'. Posons $T_{ad} = T/Z(G)$. L'élément $\pi(x_{ss})$ est topologiquement unipotent. La projection $T_{tu}(F') \to T_{ad,tu}(F')$ s'identifie à $X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} (1 + \mathfrak{p}_{F'}) \to X_*(T_{ad}) \otimes_\mathbb{Z} (1 + \mathfrak{p}_{F'})$. Elle est surjective car l'hypothèse $(Hyp)(G)$ implique que l'image de $X_*(T)$ dans $X_*(T_{ad})$ est un sous-groupe d'indice fini premier à p. On peut donc choisir $x_1 \in T_{tu}(F')$ tel que $\pi(x_1) = \pi(x_{ss})$. L'élément $x_2 = Norme_{F'/F}(x_1)$

appartient à $T_{tu}(F)$ et on a $\pi(x_2) = \pi(x_{ss}^d)$. D'après (1), cela implique qu'il existe $x_3 \in T_{tu}(F)$ tel que $\pi(x_3) = \pi(x_{ss})$. L'élément x_3x_u appartient à $G_{tu}(F)$ et vérifie $\pi(x_3x_u) = y$. Cela démontre la première assertion.

L'hypothèse $(Hyp)(G)$ entraîne que $Z(G)/Z(G)^0$ est d'ordre premier à p. La seconde assertion s'en déduit par le même argument qui prouvait ci-dessus que y appartenait à $\pi(G(F))$. $\square$

On a

(3) pour $x \in G_{tu}(F)$, l'image réciproque de $Z_{G_{AD}}(x_{ad})$ dans G est égale à $Z_G(x)$.

Preuve. Notons simplement $Z_G(x_{ad})$ cette image réciproque. Il est bien connu que $Z_G(x)$ est un sous-groupe distingué d'indice fini dans $Z_G(x_{ad})$ et l'hypothèse $(Hyp)(G)$ implique que cet indice est premier à p. Soit $g \in Z_G(x_{ad})$. Il existe donc un entier $c \geq 1$ premier à p tel que g^c commute à x. Puisque $g \in Z_G(x_{ad})$ il existe $z \in Z(G)$ tel que $g^{-1}xg = zx$. On a alors $z^c = 1$. Or, puisque x et $g^{-1}xg$ sont topologiquement unipotents, z est lui-aussi topologiquement unipotent. L'égalité $z^c = 1$ entraîne alors que $z = 1$, donc $g \in Z_G(x)$. $\square$

4.2 Eléments topologiquement nilpotents et exponentielle

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On appelle "conjugaison" par G l'action adjointe de G dans $\mathfrak{g}$. Pour $g \in G$, on note cette action de g, soit $ad(g)$, soit $X \mapsto gXg^{-1}$. On note $\mathfrak{g}_{reg}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$.

Soit $X \in \mathfrak{g}(F)$, fixons un sous-tore maximal T de G tel que $X_{ss} \in \mathfrak{t}(F)$ et fixons une extension finie F' de F telle que T soit déployé sur F'. L'élément X est dit topologiquement nilpotent si et seulement si $\chi(X_{ss}) \in \mathfrak{p}_{F'}$ pour tout $\chi \in X^*(T)$ (cela ne dépend pas du choix de T). Une autre caractérisation est la suivante. Fixons une sous-algèbre d'Iwahori $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ pour une facette $\mathcal{F} \in Fac(G)$ de dimension maximale. Notons $\mathfrak{u}$ son radical pro-p-nilpotent, c'est-à-dire $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ pour la même facette. Alors X est topologiquement nilpotent si et seulement si X est conjugué par un élément de $G(F)$ à un élément de $\mathfrak{u}(F)$. On note $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de $\mathfrak{g}(F)$.

On peut définir une application exponentielle exp qui envoie un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$ sur un voisinage de 1 dans $G(F)$ et qui est équivariante pour les actions par conjugaison de $G(F)$. Sous l'hypothèse $(Hyp)(G)$, ces voisinages sont les plus grands possibles, c'est-à-dire qu'on dispose de l'application exponentielle

$$exp : \mathfrak{g}_{tn}(F) \to G_{tu}(F)$$

équivariante pour les actions par conjugaison de $G(F)$ et qui un homéomorphisme entre les ensembles de départ et d'arrivée, cf. [6] appendice B pour cette propriété et celles ci-dessous.

Pour $\mathcal{F} \in Fac(G)$, l'exponentielle se restreint en des homéomorphismes de $\mathfrak{g}_{tn}(F) \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ sur $G_{tu}(F) \cap K_{\mathcal{F}}^0$ et de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ sur $K_{\mathcal{F}}^+$. Il s'en déduit une bijection

$$(\mathfrak{g}_{tn}(F) \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}})/\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+ \to (G_{tu}(F) \cap K_{\mathcal{F}}^0)/K_{\mathcal{F}}^+.$$

On peut prolonger les paires $K_{\mathcal{F}}^0 \supset K_{\mathcal{F}}^+$ et $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}} \supset \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ en des suites $(K_{\mathcal{F},n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n})_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que

$K_{\mathcal{F}}^0 = K_{\mathcal{F},0}$, $K_{\mathcal{F}}^+ = K_{\mathcal{F},1}$, $K_{\mathcal{F},n} \supset K_{\mathcal{F},n+1}$, $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_{\mathcal{F},n} = \{1\}$;

$\mathfrak{k}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F},0}$, $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+ = \mathfrak{k}_{\mathcal{F},1}$, $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n} \supset \mathfrak{k}_{\mathcal{F},n+1}$, $\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{k}_{\mathcal{F},n} = \{0\}$;

pour $n \geq 1$, $K_{\mathcal{F},n}$ est un sous-groupe distingué de $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ et $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n}$ est un $\mathfrak{o}_F$-idéal de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$;

pour $n \geq 1$, $K_{\mathcal{F},n} = exp(\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n})$ et l'exponentielle se réduit en un isomorphisme de groupes de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n}/\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n+1}$ sur $K_{\mathcal{F},n}/K_{\mathcal{F},n+1}$.

4.3 Eléments p'-compacts

Soit $x \in G(F)$. On dit que x est

p'-compact si et seulement s'il existe un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $x^c = 1$;

p'-compact mod $Z(G)$ si et seulement si l'image x_{ad} de x dans $G_{AD}(F)$ est p'-compacte.

Pour $x \in G(F)$, fixons un sous-tore maximal de G contenant x_{ss} et fixons une extension finie de F telle que T soit déployée sur F'. Alors :

x est p'-compact si et seulement $x = x_{ss}$ et il existe un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $\chi(x)^c = 1$ pour tout $\chi \in X^*(T)$;

x est p'-compact mod $Z(G)$ si et seulement $x = x_{ss}$ et il existe un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $\chi(x)^c = 1$ pour tout $\chi \in X^*(T)$ dont la restriction à $Z(G)$ est triviale.

Puisque les classes de conjugaison de sous-tores maximaux de G sont en nombre fini, on peut ci-dessus choisir F' indépendant de x. Puisque $F'^{\times}$ ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité, on voit qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison par $G(F)$ d'éléments p'-compacts. A fortiori, il existe un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $x^c = 1$ pour tout élément p'-compact de $G(F)$. On a

(1) tout élément compact $x \in G(F)$ s'écrit de façon unique $x = x_{p'}x_{tu}$, où $x_{p'}$ est p'-compact, $x_{tu} \in G_{tu}(F)$ et $x_{p'}$ et x_{tu} commutent ; de plus, $x_{p'}$ et x_{tu} appartiennent à $\overline{x^{\mathbb{Z}}}$.

Preuve. Pour c comme ci-dessus, il résulte de ce qui précède que x^c est topologiquement unipotent. Soit c' l'inverse de c dans $\mathbb{Z}_p$. On pose $x_{tu} = (x^c)^{c'}$ et $x_{p'} = xx_{tu}^{-1}$. Ces termes vérifient les conditions requises et on voit que ce sont les seules solutions possibles. $\square$

On déduit de (1) et de 4.1 (2) et (3) que

(2) tout élément $x \in G(F)$ compact mod $Z(G)$ s'écrit $x = x_{p'}x_{tu}$, où $x_{p'}$ est p'-compact, $x_{tu} \in G_{tu}(F)$ et $x_{p'}$ et x_{tu} commutent ; le groupe $(Z(G)^0)_{tu}(F)$ agit sur l'ensemble des solutions : un élément $z \in (Z(G)^0)_{tu}(F)$ envoie le couple $(x_{p'}, x_{tu})$ sur $(x_{p'}z^{-1}, x_{tu}z)$; les solutions forment une unique orbite pour cette action ; de plus, pour toute solution $(x_{p'}, x_{tu})$, les deux éléments $x_{p'}$ et x_{tu} appartiennent à l'adhérence du groupe $Z(G)(F)x^{\mathbb{Z}}$.

4.4 p'-éléments

Soit $x \in G$. On lui associe un sous-groupe parabolique $Q[x]$ de G et une composante de Levi $L[x]$ de $Q[x]$ de la façon suivante, cf. [4]. L'élément x_{ss} agit par conjugaison sur $\mathfrak{g}$. On fixe une extension galoisienne finie F' de F telle que toutes les valeurs propres appartiennent à $F'^{\times}$. On note Σ l'ensemble de ces valeurs propres et, pour $\sigma \in \Sigma$, $\mathfrak{g}_\sigma$ l'espace propre. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}[x]$ est la somme des $\mathfrak{g}_\sigma$ sur les $\sigma \in \Sigma$ telles que $|\sigma|_{F'} \leq 1$ et $\mathfrak{l}[x]$ est la somme des $\mathfrak{g}_\sigma$ sur les $\sigma \in \Sigma$ telles que $|\sigma|_{F'} = 1$. Le couple $(Q[x], L[x])$ étant uniquement défini et ne dépendant que de x_{ss}, il est défini sur F et conservé par $Z_G(x_{ss})$. Cela entraîne

(1) $Z_G(x_{ss}) \subset L[x]$, a fortiori $Z_G(x) \subset L[x]$ et $x \in L[x]$.

Par construction, x, vu comme élément de $L[x]$, est compact mod $Z(L[x])$ (on dira que x est compact dans $L[x]$ mod $Z(L[x])$). Le Levi $L[x]$ est le plus grand Levi L de G tel que x appartienne à L et que x soit compact dans L mod $Z(L)$.

Nous dirons que x est un p'-élément si et seulement si x est p'-compact dans $L[x]$ mod $Z(L[x])$. Avec les notations ci-dessus, cela équivaut à ce que $x = x_{ss}$ soit semi-simple et, pour tout $\sigma \in \Sigma$ telle que $|\sigma|_F = 1$, σ soit une racine de l'unité d'ordre premier à p. On note $G(F)_{p'}$ l'ensemble des p'-éléments de $G(F)$.

Lemme. *(i) Tout élément $x \in G(F)$ s'écrit $x = x_{p'}x_{tu}$ où $x_{p'}$ est un p'-élément, x_{tu} est topologiquement unipotent et $x_{p'}$ et x_{tu} commutent.*

(ii) Pour une telle décomposition, les éléments $x_{p'}$ et x_{tu} appartiennent à $L[x](F)$ et on a $L[x_{p'}] = L[x]$.

(iii) Pour une telle décomposition, on a $Z_G(x) = Z_G(x_{p'}) \cap Z_G(x_{tu})$ et $G_x = (G_{x_{p'}})_{x_{tu}}$.

(iv) La décomposition est unique modulo l'action de $(Z(L[x])^0)_{tu}(F)$ similaire à celle de 4.3(2).

Preuve. Considérons une décomposition $x = yx_{tu}$ où x_{tu} est topologiquement unipotent et y et x_{tu} commutent. Montrons que

(2) $y, x_{tu} \in L[x]$ et $L[x] = L[y]$.

Les éléments y et x_{tu} commutent à x et la première assertion résulte de (1). Notons ici x_{ad}, y_{ad} et $x_{tu,ad}$ les images de x, y et x_{tu} dans $L[x]_{AD}(F)$. L'adhérence $\overline{y_{ad}^{\mathbb{Z}}}$ du groupe engendré par y_{ad} est contenue dans le produit des deux groupes $\overline{x_{ad}^{\mathbb{Z}}}$ et $\overline{x_{tu,ad}^{\mathbb{Z}}}$. Ce dernier groupe est compact puisque x_{tu} est topologiquement unipotent. Le premier est compact par définition de $L[x]$. Donc $\overline{y_{ad}^{\mathbb{Z}}}$ est compacte, c'est-à-dire que y est compact mod $Z(L[x])$. Or $L[y]$ est le plus grand Levi L tel que $y \in L$ et y soit compact mod $Z(L)$. Donc $L[x] \subset L[y]$. On obtient l'inclusion opposée en échangeant les rôles de x et y (on a $y = xx_{tu}^{-1}$). Cela prouve (2).

On a vu que x appartenait à $L[x]$ et était compact mod $Z(L[x])$. En appliquant 4.3(2) dans le groupe $L[x]$, on obtient une décomposition $x = x_{p'}x_{tu}$ où $x_{p'}, x_{tu} \in L[x](F)$, $x_{p'}$ est p'-compact mod $Z(L[x])$, x_{tu} est topologiquement unipotent et $x_{p'}$ et x_{tu} commutent. D'après (2), on a $L[x_{p'}] = L[x]$, donc $x_{p'}$ est p'-compact mod $Z(L[x_{p'}])$, donc c'est un p'-élément. Cela démontre (i).

Pour une décomposition $x = x_{p'}x_{tu}$ comme en (i), les éléments $x_{p'}$ et x_{tu} commutent à x donc appartiennent à $L[x]$ d'après (1). Cela démontre la première assertion de (ii) et la seconde résulte de (2). En définitive, les décompositions $x = x_{p'}x_{tu}$ vérifiant (i) sont exactement les décompositions dans $L[x](F)$ où l'on impose que $x_{p'}$ est p'-compact mod $Z(L[x])$. Le (iv) résulte donc de 4.3(2) appliqué dans le groupe $L[x]$.

Pour (iii), les commutants $Z_G(x)$ et $Z_G(x_{p'})$ sont contenus dans $L[x]$ d'après (1) et la dernière assertion de (ii). On ne perd rien à supposer $L[x] = G$. Il est clair que $Z_G(x_{p'}) \cap Z_G(x_{tu}) \subset Z_G(x)$. L'image $x_{tu,ad}$ de x_{tu} dans G_{AD} appartient à l'adhérence du groupe engendré par x_{ad}. L'image g_{ad} d'un élément $g \in Z_G(x)$ commute donc à $x_{tu,ad}$. D'après 4.1(2), cela implique que $g \in Z_G(x_{tu})$. Alors g appartient forcément aussi à $Z_G(x_{p'})$. Cela démontre la première égalité de (iii). La composante neutre de $Z_G(x_{p'}) \cap Z_G(x_{tu})$ est clairement $(G_{x_{p'}})_{x_{tu}}$, d'où la seconde égalité. □

Pour $x \in G(F)$, appelons p'-décomposition de x une décomposition $x = x_{p'}x_{tu}$ vérifiant les conditions du (i) de l'énoncé.

4.5 Décomposition de $G(F)$ associée aux p'-éléments

Pour tout $\epsilon \in G(F)_{p'}$, posons $C(\epsilon) = \epsilon G_{\epsilon,tu}(F) = \epsilon\, exp(\mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F))$. Evidemment, l'action de $G(F)$ par conjugaison conserve $G(F)_{p'}$ et, pour $g \in G(F)$, on a $gC(\epsilon)g^{-1} = C(g\epsilon g^{-1})$. Posons

$$C_G(\epsilon) = \cup_{g \in G(F)} C(g^{-1}\epsilon g) = \cup_{g\in G(F)} g^{-1}C(\epsilon)g.$$

On a déjà utilisé le discriminant de Weyl $D^G(x)$ d'un élément $x \in G(F)$. Il y a de même un discriminant de Weyl $D^G(X)$ pour un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$.

Lemme. *(i) Pour $\epsilon \in G(F)_{p'}$, l'ensemble $C_G(\epsilon)$ est ouvert et fermé.*

(ii) Pour $\epsilon \in G(F)_{p'}$, il existe un nombre réel $d^G(\epsilon) > 0$ tel que, pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$, on ait

$$D^G(\epsilon exp(X)) = d^G(\epsilon)D^{G_\epsilon}(X).$$

(iii) On a les égalités

$$G(F) = \bigcup_{\epsilon \in G(F)_{p'}} C(\epsilon) = \bigcup_{\epsilon \in G(F)_{p'}} C_G(\epsilon).$$

(iv) Soient $\epsilon, \epsilon' \in G(F)_{p'}$. Alors $C(\epsilon) = C(\epsilon')$ ou $C(\epsilon) \cap C(\epsilon') = \emptyset$. L'égalité a lieu si et seulement s'il existe $z \in (Z_(L[\epsilon])^0)_{tu}(F)$ tel que $\epsilon' = \epsilon z$. Dans ce cas, on a $L[\epsilon] = L[\epsilon']$, $G_\epsilon = G_{\epsilon'}$ et $z \in G_{\epsilon,tu}(F)$.

Preuve. La propriété suivante est bien connue : soit $x \in G(F)$ un élément semi-simple ; alors il existe un voisinage V de 1 dans $G_x(F)$ tel que l'ensemble $\{g^{-1}xyg; y \in V, g \in G(F)\}$ soit ouvert et fermé. On voit que, pour $\epsilon \in G(F)_{p'}$, $C(\epsilon)$ est réunion finie de tels ensembles. D'où (i).

Les deux parties de la formule (ii) sont insensibles au remplacement de X par sa partie semi-simple. On peut donc supposer X semi-simple. On fixe un sous-tore maximal T de G_ϵ tel que $X \in \mathfrak{t}(F)$. On a aussi $\epsilon \in T(F)$ puisque T commute à ϵ. Fixons une extension finie F' de F telle que T soit déployé sur F'. On note Σ l'ensemble des racines de T dans G, $\Sigma^{L[\epsilon]}$, resp. Σ^{G_ϵ}, le sous-ensemble des racines dans $L[\epsilon]$, resp. G_ϵ. On a $\Sigma^{G_\epsilon} \subset \Sigma^{L[\epsilon]}$. Par définition,

$$D^G(\epsilon) = |\prod_{\alpha\in\Sigma}(1-\alpha(\epsilon exp(X)))|_F$$

$$D^{G_\epsilon}(X) = |\prod_{\alpha\in\Sigma^{G_\epsilon}} \alpha(X)|_F.$$

Puisque $exp(X)$ est topologiquement unipotent, $\alpha(exp(X))$ est un élément $1+\mathfrak{p}_{F'}$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. A fortiori $|\alpha(exp(X))|_{F'} = 1$. Si $\alpha \in \Sigma - \Sigma^{L[\epsilon]}$, on a $|\alpha(\epsilon)|_{F'} \neq 1$ par définition de $L[\epsilon]$. Puisque $|\alpha(exp(X))|_{F'} = 1$, on a $|1-\alpha(\epsilon exp(X))|_{F'} = |1-\alpha(\epsilon)|_{F'}$ qui est non nul. Si $\alpha \in \Sigma^{L[\epsilon]}$, $\alpha(\epsilon)$ est une racine de l'unité d'ordre premier à p puisque ϵ est p'-compact mod $Z(L[\epsilon])$. Cette racine est égale à 1 si et seulement si $\alpha \in \Sigma^{G_\epsilon}$. Si $\alpha \in \Sigma^{L[\epsilon]} - \Sigma^{G_\epsilon}$, on a $\alpha(\epsilon) \in \mathfrak{o}_{F'}^\times - (1+\mathfrak{p}_{F'})$ et $\alpha(exp(X)) \in 1+\mathfrak{p}_{F'}$ donc encore $|1-\alpha(\epsilon exp(X))|_{F'} = |1-\alpha(\epsilon)|_{F'} = 1$. Enfin, si $\alpha \in \Sigma^{G_\epsilon}$, on a $\alpha(\epsilon) = 1$ donc $|1-\alpha(\epsilon exp(X))|_{F'} = |1-\alpha(exp(X))|_{F'} = |1-exp(\alpha(X))|_{F'}$ avec $\alpha(X) \in \mathfrak{p}_{F'}$, donc $|1-\alpha(\epsilon exp(X))|_{F'} = |\alpha(X)|_{F'}$. L'assertion (ii) en résulte.

Le (i) du lemme 4.4 implique la première égalité du (iii) d'où trivialement la deuxième.

Soient $\epsilon, \epsilon' \in G(F)_{p'}$. Supposons $C(\epsilon) \cap C(\epsilon') \neq \emptyset$ et fixons x dans cette intersection. On peut écrire $x = \epsilon u = \epsilon' u'$ avec $u \in G_{\epsilon,tu}(F)$ et $u' \in G_{\epsilon',tu}(F)$. Ces deux décompositions sont des p'-décompositions. D'après le (iv) du lemme 4.4, il existe $z \in (Z(L[\epsilon])^0)_{tu}(F)$ tel que $\epsilon' = \epsilon z$. Inversement, s'il existe un tel z, l'assertion (2) de 4.4 appliquée à $x = \epsilon' = \epsilon z$ nous dit que $L[\epsilon] = L[\epsilon']$. D'après l'assertion (1) de 4.4, on a $G_\epsilon = L[\epsilon]_\epsilon$ et $G_{\epsilon'} = L[\epsilon']_{\epsilon'} = L[\epsilon]_{\epsilon'}$. Puisque $z \in Z(L[\epsilon])^0(F)$, l'égalité $\epsilon' = \epsilon z$ entraîne que $L[\epsilon]_{\epsilon'} = L[\epsilon]_\epsilon$ donc aussi $G_{\epsilon'} = G_\epsilon$. On a aussi $z \in G_{\epsilon,tu}(F)$ et on en déduit que $C(\epsilon') = \epsilon' G_{\epsilon',tu}(F) = \epsilon z G_{\epsilon,tu}(F) = \epsilon G_{\epsilon,tu}(F) = C(\epsilon)$. Cela démontre (iv). $\square$

4.6 Le cas d'un Levi

Soit M un Levi de G. On a dans M la même propriété que dans G, à savoir

$$M(F) = \bigcup_{\epsilon \in M(F)_{p'}} C^M(\epsilon),$$

où $C^M(\epsilon) = \epsilon exp(\mathfrak{m}_{\epsilon,tn}(F))$. Le lemme ci-dessous énonce une propriété plus fine.

Lemme. *Soit M un Levi de G. Alors*
(i) $G(F)_{p'} \cap M(F) \subset M(F)_{p'}$;
(ii) $M(F) = \bigcup_{\epsilon \in G(F)_{p'} \cap M(F)} C^M(\epsilon)$.

Preuve. Soit $\epsilon \in G(F)_{p'} \cap M(F)$. Pour démontrer que $\epsilon \in M(F)_{p'}$, on doit prouver que toute valeur propre de $ad(\epsilon)$ dans $\mathfrak{m}(F)$ qui est de valeur absolue 1 dans une extension convenable de F, est une racine de l'unité d'ordre premier à p. Mais une valeur propre de $ad(\epsilon)$ dans $\mathfrak{m}(F)$ est aussi une valeur propre de $ad(\epsilon)$ dans $\mathfrak{g}(F)$. La propriété voulue résulte du fait que $\epsilon \in G(F)_{p'}$.

Soit $x \in M(F)$. Ecrivons une p'-décomposition de x dans $G(F)$: $x = \epsilon exp(X)$, où $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$. On a $L[x] = L[\epsilon]$ d'après le (ii) du lemme 4.4. On a $A_M \subset G_x$ puisque $x \in M(F)$ et $G_x \subset L[x]$ d'après 4.4 (1). Donc $Z(L[\epsilon]) = Z(L[x])$ est contenu dans le commutant de A_M, qui est M. On fixe un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $\epsilon^c \in Z(L[\epsilon])(F)$. Alors $exp(cX) = x^c \epsilon^{-c}$ appartient à $M(F)$. Cela entraîne comme toujours $X \in \mathfrak{m}_{tn}(F)$ donc aussi $\epsilon = xexp(-X) \in M(F)$ et $X \in \mathfrak{m}_{\epsilon,tn}(F)$. La décomposition $x = \epsilon exp(X)$ montre que $x \in C^M(\epsilon)$. $\square$

4.7 Un lemme sur les classes de conjugaison et les éléments p'-compacts mod $Z(G)$

Lemme. *Soit $\epsilon \in G(F)$ un élément p'-compact mod $Z(G)$ et soit $\mathcal{F} \in Fac(G)$. Supposons $\epsilon \in K_{\mathcal{F}}^\dagger$. Soit $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F) \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. Alors, pour tout élément $x \in \epsilon exp(X) K_{\mathcal{F}}^+$, il existe $Y \in \mathfrak{g}_\epsilon(F) \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ tel que x soit conjugué à $\epsilon exp(X+Y)$ par un élément de $K_{\mathcal{F}}^+$.*

La preuve est standard, on la rappelle pour être complet.

Preuve. Fixons un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $\epsilon^c \in Z(G)(F)$. On introduit les deux polynômes

$$P(T) = c^{-1}(T^{c-1} + ... + T + 1),\ Q(T) = c^{-1}(1-T)(c-1+(c-2)T + ... + T^{c-2})$$

à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. On a $P(T)+Q(T)=1$. L'opérateur $ad(\epsilon)$ dans $\mathfrak{g}(F)$ est semi-simple et ses valeurs propres dans $\bar{F}$ sont des racines c-ièmes de l'unité. Alors l'espace $\mathfrak{g}$ se décompose en somme de l'espace propre associé à la racine 1, qui est $\mathfrak{g}_\epsilon$, et de l'espace somme des espaces propres associés aux racines différentes de 1, notons-le $\mathfrak{g}_{\neq 1}$. L'opérateur $P(ad(\epsilon))$, resp. $Q(ad(\epsilon))$, est le projecteur sur l'espace $\mathfrak{g}_\epsilon$, resp. $\mathfrak{g}_{\neq 1}$, relativement à cette décomposition. On introduit des suites $(K_{\mathcal{F},n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n})_{n\in\mathbb{N}}$ comme en 4.2. L'action $ad(\epsilon)$ par conjugaison conserve $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n}$ pour tout n. On a donc

$$\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n}=\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n,\epsilon}\oplus\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n,\neq 1},$$

où $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n,\epsilon}=\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n}\cap\mathfrak{g}_\epsilon(F)=P(ad(\epsilon))(\mathfrak{k}_{\mathcal{F}_n})$ et $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n,\neq 1}=\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n}\cap\mathfrak{g}_{\neq 1}(F)=Q(ad(\epsilon))(\mathfrak{k}_{\mathcal{F}_n})$. Posons $\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n}=\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n}/\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n+1}$. L'opérateur $ad(\epsilon)$ se réduit en un opérateur de cet espace, que l'on note encore $ad(\epsilon)$. On a encore

$$(1)\qquad \bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n}=\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n,\epsilon}\oplus\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n,\neq 1},$$

où $\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n,\epsilon}=\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n,\epsilon}/\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n+1,\epsilon}=P(ad(\epsilon))(\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n})$ et $\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n,\neq 1}=\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n,\neq 1}/\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n+1,\neq 1}=Q(ad(\epsilon))(\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n})$.

On va prouver par récurrence sur $n\geq 1$ qu'il existe $Y_n\in\mathfrak{g}_\epsilon(F)\cap\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$, $Z_n\in\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n}$ et $k_n\in K_{\mathcal{F}}^+$ tels que $k_n^{-1}xk_n=\epsilon exp(X+Y_n)exp(Z_n)$. Pour $n=1$, il suffit de prendre $Y_1=0$, $k_1=1$ et pour Z_1 l'élément de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ tel que $x=\epsilon exp(X)exp(Z_1)$. Supposons ces termes définis au rang n. Posons $x_n=\epsilon exp(X+Y_n)$. Notons $\bar{Z}_n$ la réduction de Z_n dans $\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n}$ et décomposons $\bar{Z}_n$ en $\bar{Z}_{n,\epsilon}+\bar{Z}_{n,\neq 1}$ conformément à la décomposition (1). Relevons $\bar{Z}_{n,\epsilon}$ en un élément $Y_n'\in\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n,\epsilon}$. Les opérateurs $ad(exp(X+Y_n))$ et $ad(x_n)$ conservent eux-aussi les espaces $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n'}$ pour tout n' et ils se descendent en des opérateurs sur $\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},n}$. Parce que $exp(X+Y_n)$ commute à ϵ, ces opérateurs commutent à $ad(\epsilon)$ donc préservent la décomposition (1). Sur l'espace $\bar{\mathfrak{k}}_{\mathcal{F},\neq 1}$, les valeurs propres de $ad(\epsilon)$ sont toutes différentes de 1 tandis que l'opérateur $ad(X+Y_n)$ est nilpotent. Il en résulte que $1-ad(x_n^{-1})$ est inversible sur cet espace. On peut donc fixer un élément $Y_n''\in\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n}$ tel que $\bar{Z}_{n,\neq 1}$ soit la réduction de $(1-ad(x_n^{-1})(Y_n'')$. Posons $h_n=exp(Y_n'')$. C'est un élément de $K_{\mathcal{F},n}$.On a

$$h_nx_nexp(Z_n)h_n^{-1}=x_nexp(ad(x_n^{-1})(Y_n''))exp(Z_n)exp(-Y_n'').$$

Mais on voit que $exp(ad(x_n^{-1})(Y_n''))exp(Z_n)exp(-Y_n'')\in exp(Y_n')K_{\mathcal{F},n+1}$. Il existe $Y_{n+1}\in\mathfrak{g}_\epsilon(F)\cap\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ tel que $exp(X+Y_n)exp(Y_n')=exp(X+Y_{n+1})$. En posant $k_{n+1}=h_nk_n$, on obtient $k_{n+1}^{-1}xk_{n+1}=\epsilon exp(X+Y_{n+1})z_{n+1}$ avec $z_{n+1}\in K_{\mathcal{F},n+1}$ et il reste à prendre pour Z_{n+1} l'élément de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},n+1}$ tel que $z_{n+1}=exp(Z_{n+1})$ pour obtenir les éléments cherchés au rang $n+1$.

On peut extraire des suites $(Y_n)_{n\geq 1}$ et $(k_n)_{n\geq 1}$ des sous-suites convergentes (en fait, on n'en a même pas besoin, les suites définies ci-dessus convergent). A la limite, on obtient des éléments $Y\in\mathfrak{g}_\epsilon(F)\cap\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ et $k\in K_{\mathcal{F}}^+$ tels que $k^{-1}xk=\epsilon exp(X+Y)$. Cela achève la preuve. □

4.8 Un lemme sur les éléments p'-compacts et les espaces de Levi

Lemme. *Soit $\epsilon\in G(F)$ un élément p'-compact mod $Z(G)$ et soit $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G)$. Supposons $\epsilon\in K_{\mathcal{F}}^\nu$. Notons $\bar{\epsilon}$ la réduction de ϵ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu(k_F)$. Soit $\mathbf{P}^\nu$ un espace parabolique de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu$. Supposons $\bar{\epsilon}\in\mathbf{P}^\nu(k_F)$. Alors il existe une composante de Levi $\mathbf{M}^\nu$ de $\mathbf{P}^\nu$ telle que $\bar{\epsilon}\in\mathbf{M}^\nu(k_F)$.*

La preuve s'inspire de celle du lemme 9 de [16].

Preuve. On note $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ associé à $\mathbf{P}^{\nu}$. L'espace $\mathfrak{u}_{\mathbf{P}}$ possède une filtration finie $(\mathfrak{u}_i)_{i=1,...,n}$ définie par récurrence par $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_{\mathbf{P}}$ et, pour $i \geq 1$, $\mathfrak{u}_{i+1}$ est l'espace engendré par les $[U_1, U_i]$ pour $U_1 \in \mathfrak{u}_1$ et $U_i \in \mathfrak{u}_i$. La filtration se termine par $\mathfrak{u}_n = \{0\}$. On note $\mathbf{U}_i = exp(\mathfrak{u}_i)$. Les $\mathbf{U}_i$ sont des sous-groupes distingués de $\mathbf{U}_{\mathbf{P}}$, les quotients $\mathbf{U}_i/\mathbf{U}_{i+1}$ sont abéliens et isomorphes aux $\mathfrak{u}_i/\mathfrak{u}_{i+1}$. On a $\mathbf{U}_n = \{1\}$. Nous allons prouver par récurrence sur i que

(1) il existe une composante de Levi $\mathbf{M}_i$ et un élément $u_i \in \mathbf{U}_i(k_F)$ tels que $ad(\bar{\epsilon})(\mathbf{M}_i) = ad(u_i)(\mathbf{M}_i)$.

Pour $i = 1$, on choisit pour $\mathbf{M}_1$ n'importe quelle composante de Levi de $\mathbf{P}$. Puisque $\bar{\epsilon} \in \mathbf{P}^{\nu}(k_F)$, $ad(\bar{\epsilon})(\mathbf{M}_1)$ est encore une telle composante de Levi de $\mathbf{P}$ et on sait que deux telles composantes sont conjugués par un élément de $\mathbf{U}_{\mathbf{P}}(k_F) = \mathbf{U}_1(k_F)$. On choisit pour u_1 l'élément qui conjugue $\mathbf{M}_1$ en $ad(\bar{\epsilon})(\mathbf{M}_1)$. Supposons le problème résolu au rang $i \geq 1$. Fixons un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $\epsilon^c \in Z(G)$. On voit par récurrence sur un entier $m \geq 1$ que

$$ad(\bar{\epsilon}^m)(\mathbf{M}_i) = ad(u_{i,m})(\mathbf{M}_i),$$

où $u_{i,m} = ad(\bar{\epsilon}^{m-1})(u_i)...ad(\bar{\epsilon})(u_i)u_i$. Pour $m = c$, on obtient $\mathbf{M}_i = ad(u_{i,c})(\mathbf{M}_i)$, donc $u_{i,c} = 1$. Remarquons que $ad(\bar{\epsilon})$ conserve la filtration $(\mathbf{U}_j)_{j=1,...,n}$. En notant X_i la réduction de u_i dans $\mathbf{U}_i(k_F)/\mathbf{U}_{i+1}(k_F)$ et en écrivant ce groupe additivement, on obtient

$$ad(\bar{\epsilon}^{c-1})(X_i) + ... + ad(\bar{\epsilon})(X_i) + X_i = 0.$$

Par le même argument que dans la preuve précédente, cela entraîne l'existence d'un élément $Y_i \in \mathbf{U}_i(k_F)/\mathbf{U}_{i+1}(k_F)$ tel que $X_i = Y_i - ad(\bar{\epsilon})(Y_i)$. On relève Y_i en $v_i \in \mathbf{U}_i(k_F)$ et on pose $\mathbf{M}_{i+1} = ad(v_i)(\mathbf{M}_i)$. On calcule

$$ad(\bar{\epsilon})(\mathbf{M}_{i+1}) = ad(u_{i+1})(\mathbf{M}_{i+1}),$$

où $u_{i+1} = ad(\bar{\epsilon})(v_i)u_i v_i^{-1}$. Par construction de v_i, on voit que $u_{i+1} \in \mathbf{U}_{i+1}(k_F)$, ce qui résout le problème en $i + 1$.

Pour $i = n$, le Levi $\mathbf{M} = \mathbf{M}_n$ est conservé par $ad(\bar{\epsilon})$. Alors $\mathbf{M}^{\nu} = \bar{\epsilon}\mathbf{M}$ est une composante de Levi de $\mathbf{P}^{\nu}$ contenant $\bar{\epsilon}$. $\square$

4.9 Points fixes dans $Imm(G_{AD})$ d'un élément p'-compact mod $Z(G)$

Soit $\epsilon \in G(F)$ un élément p'-compact mod $Z(G)$. Notons M le commutant dans G du tore déployé A_{G_ϵ}. C'est un Levi de G. On a $\epsilon \in M$ et $G_\epsilon \subset M$ (ϵ et G_ϵ commutent à A_{G_ϵ}). On a aussi $A_M = A_{G_\epsilon}$. En effet, puisque $G_\epsilon \subset M$, on a $A_{G_\epsilon} \subset M$ et, puisque M commute à A_{G_ϵ} par construction de M, on a $A_{G_\epsilon} \subset A_M$. Inversement, puisque $\epsilon \in M$, on a $A_M \subset G_\epsilon$ et, puisque A_M commute à M, donc aussi au sous-ensemble G_ϵ, on a $A_M \subset A_{G_\epsilon}$. Notons J la réunion dans $Imm(G_{AD})$ des appartements $App(A_{M'})$ associés aux Levi minimaux M' de M. L'action de $M(F)$ sur $Imm(G_{AD})$ conserve le sous-ensemble J, il en est donc de même des actions de ϵ et de $G_\epsilon(F)$. L'espace vectoriel $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$ agit naturellement sur J (il agit sur chaque $App(A_{M'})$ et ces actions se recollent). Cette action commute à celles de ϵ et de $G_\epsilon(F)$. Notons $Imm(G_{AD})^\epsilon$ et J^ϵ les sous-ensembles de points fixes de l'action de ϵ dans $Imm(G_{AD})$, resp. J. L'ensemble J^ϵ est stable par l'action de $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$.

On note $J^\epsilon/(\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G)$ l'ensemble quotient. L'action de $G_\epsilon(F)$ se descend en une action sur ce quotient.

Proposition. *(i) On a l'égalité* $Imm(G_{AD})^\epsilon = J^\epsilon$.

(ii) L'ensemble $J^\epsilon/(\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G)$ *muni de son action de* $G_\epsilon(F)$ *s'identifie canoniquement à* $Imm(G_{\epsilon,AD})$.

(iii) Soit $\mathcal{F} \in Fac(G)$ *telle que* $\mathcal{F}\cap Imm(G_{AD})^\epsilon \neq \emptyset$. *Alors l'image de* $\mathcal{F}\cap Imm(G_{AD})^\epsilon$ *est contenue dans une facette* $\mathcal{F}' \in Fac(G_\epsilon)$. *L'action naturelle de* ϵ *sur* $K^0_{\mathcal{F}}$ *se descend en une action algébrique sur* $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ *et le groupe* $\mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'}$ *s'identifie à la composante neutre* $\mathbf{G}^{\epsilon,0}_{\mathcal{F}}$ *du sous-groupe des points fixes* $\mathbf{G}^\epsilon_{\mathcal{F}}$ *par cette action. Le groupe* $K^0_{\mathcal{F}'}$ *est le groupe des* $g \in G_\epsilon(F) \cap K^0_{\mathcal{F}}$ *tels que* $w_{G_\epsilon}(g) = 0$. *On a* $K^+_{\mathcal{F}'} = G_\epsilon(F) \cap K^+_{\mathcal{F}}$, $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}'} = \mathfrak{g}_\epsilon(F) \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$, $\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}'} = \mathfrak{g}_\epsilon(F) \cap \mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}}$.

Preuve. Dans la seconde preuve du théorème 1.9 de [17], G. Prasad et J.-K. Yu démontrent que $Imm(G_{AD})^\epsilon = J^\epsilon$ et que cet ensemble, muni de son action de $G_\epsilon(F)$, s'identifie à l'immeuble étendu du groupe $G_{\epsilon,ad} = G_\epsilon/Z(G)$. L'identification est canonique à translations près par les éléments de $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$. Cela équivaut aux assertions (i) et (ii). Soit $\mathcal{F} \in Fac(G)$ telle que $\mathcal{F} \cap Imm(G_{AD})^\epsilon \neq \emptyset$. Soit $x \in \mathcal{F} \cap Imm(G_{AD})^\epsilon \neq \emptyset$, notons y son image dans $Imm(G_{\epsilon,AD})$. Soit $\mathcal{F}' \in Fac(G_\epsilon)$ la facette à laquelle appartient y. Plongeons les immeubles pour les groupes adjoints dans les immeubles étendus. Comme on le sait, on peut définir un schéma en groupes $\mathcal{G}_x$ défini sur $\mathfrak{o}_F$ vérifiant entre autres que $\mathcal{G}(\mathfrak{o}_F)$ est le sous-groupe des éléments de $G(F)$ dont l'action sur l'immeuble étendu $Imm(G)$ fixe x. On sait que la partie réductive de la composante neutre de sa fibre spéciale n'est autre que $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. Dans le paragraphe 3 de [16], cf. en particulier les définitions de 3.1 de cette référence, Prasad montre que ϵ agit naturellement sur $\mathcal{G}_x$ et il définit la composante neutre $\mathcal{G}^{\epsilon,0}_x$ du sous-schéma des points fixes $\mathcal{G}^\epsilon_x$. Il prouve que la composante neutre $\mathcal{G}^0_{\epsilon,y}$ de $\mathcal{G}_{\epsilon,y}$ s'identifie à ce schéma $\mathcal{G}^{\epsilon,0}_x$. En passant aux parties réductives des fibres spéciales, on obtient que $\mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'}$ s'identifie à $\mathbf{G}^{\epsilon,0}_{\mathcal{F}}$. Cela entraîne

(1) $K^0_{\mathcal{F}'} \subset K^0_{\mathcal{F}} \cap G_\epsilon(F)$.

En passant aux algèbres de Lie, l'égalité $\mathcal{G}^0_{\epsilon,y} = \mathcal{G}^{\epsilon,0}_x$ entraîne aussi

(2) $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}'} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}} \cap \mathfrak{g}_\epsilon(F)$, $\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}'} = \mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}} \cap \mathfrak{g}_\epsilon(F)$.

L'égalité

(3) $K^+_{\mathcal{F}'} = K^+_{\mathcal{F}} \cap G_\epsilon(F)$

se déduit par l'exponentielle de la seconde égalité de (2).

On peut préciser (1). D'après la définition de $K^0_{\mathcal{F}'}$, $K^0_{\mathcal{F}'}$ est contenu dans l'ensemble des $g \in K^0_{\mathcal{F}} \cap G_\epsilon(F)$ tels que $w_{G_\epsilon}(g) = 0$. Inversement, un tel g fixe x donc aussi y (la projection de $Imm(G_{AD})^\epsilon$ sur $Imm(G_{\epsilon,AD})$ étant compatible avec l'action de $G_\epsilon(F)$). Donc $g \in K^\dagger_{\mathcal{F}'}$. Puisque $w_{G_\epsilon}(g) = 0$, on a $g \in K^0_{\mathcal{F}'}$. Cela démontre l'assertion de l'énoncé concernant $K^0_{\mathcal{F}'}$. Mais alors, ce groupe ne dépend pas de x et, d'après 2.2 (5), cela entraîne que $\mathcal{F}'$ est uniquement déterminée, ce qui est la première assertion de (iii). $\square$

5 Quasi-caractères

5.1 Transformées de Fourier et intégrales orbitales

Plusieurs notions que l'on a introduites sur le groupe $G(F)$ ont des analogues sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(F)$. Pour $f \in C^\infty_c(\mathfrak{g}(F))$ et $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on définit l'intégrale orbitale

$I^G(X,f)$. On définit aussi l'espace $I(\mathfrak{g})$ quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions dont toutes les intégrales orbitales sont nulles.

On fixe un caractère continu ψ de F de conducteur $\mathfrak{p}_F$ et une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $<.,.>$ sur $\mathfrak{g}(F)$, invariante par conjugaison par $G(F)$. On sait que l'on peut la choisir telle que, pour toute $\mathcal{F}\in Fac(G)$, $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ soit le "dual" de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ est l'ensemble des $X\in\mathfrak{g}(F)$ tels que $<X,Y>\in\mathfrak{p}_F$ pour tout $Y\in\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. On suppose qu'il en est ainsi. On définit la transformation de Fourier $f\mapsto\hat{f}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par

$$\hat{f}(X)=\int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\psi(<X,Y>)\,dY,$$

où dY est la mesure auto-duale. La transformation $f\mapsto\hat{f}$ de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ se descend en une transformation de $I(\mathfrak{g})$.

Notons $Nil(\mathfrak{g})$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}(F)$. Pour tout $\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g})$, on fixe une mesure sur $\mathcal{O}$ invariante par conjugaison. Cela permet de définir l'intégrale orbitale $I_{\mathcal{O}}$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, puis sa transformée de Fourier $f\mapsto I_{\mathcal{O}}(\hat{f})$. Notons $\mathfrak{g}_{reg}$ l'ensemble des éléments semi-simples et réguliers de $\mathfrak{g}$. D'après Harish-Chandra, il existe une fonction $\hat{j}(\mathcal{O})$ localement intégrable sur $\mathfrak{g}(F)$ et localement constante sur $\mathfrak{g}_{reg}(F)$, de sorte que

$$I_{\mathcal{O}}(\hat{f})=\int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\hat{j}(\mathcal{O},Y)\,dY$$

pour toute $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$.

Notons E l'espace des fonctions sur $\mathfrak{o}_F$ engendré par les fonctions $\lambda\mapsto|\lambda|^n$ pour $n\in\mathbb{Z}$. Il est immédiat que, si deux éléments de E coïncident sur $\mathfrak{p}_F^n$ pour un entier $n\geq 0$, alors, ils sont égaux.

On sait que, pour tout $\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g})$ et pour tout $Y\in\mathfrak{g}_{reg}(F)$, la fonction $\lambda\mapsto\hat{j}(\mathcal{O},\lambda^2Y)$, définie sur $\mathfrak{o}_F$, appartient à E.

5.2 Quasi-caractères et quasi-caractères de niveau 0

Si θ est une fonction localement intégrable sur $G(F)$ et invariante par conjugaison, il lui est associée la distribution invariante D sur $G(F)$ définie par

$$D(f)=\int_{G(F)} f(g)\theta(g)\,dg.$$

On appelle quasi-caractère de $G(F)$ une distribution invariante D sur $G(F)$ associée à une fonction θ_D sur $G(F)$ localement intégrable et invariante par conjugaison, qui vérifie la propriété suivante :

(1) pour tout $x\in G(F)$ semi-simple, il existe un voisinage $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$ et, pour tout $\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_x)$, il existe un nombre complexe $c_{D,\mathcal{O}}$ de sorte que, pour presque tout $Y\in\mathfrak{V}$, on ait l'égalité

$$\theta_D(xexp(Y))=\sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_x)} c_{D,\mathcal{O}}\hat{j}(\mathcal{O},Y).$$

Remarques. (2) Le voisinage $\mathfrak{V}$ n'est évidemment pas uniquement déterminé, par contre les constantes $c_{D,\mathcal{O}}$ le sont car les fonctions $\hat{j}(\mathcal{O})$ sont linéairement indépendantes dans tout voisinage de 0.

(3) Appliquée à x fortement régulier, cette propriété implique que, quitte à modifier θ_D sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer θ_D définie et localement constante sur $G_{reg}(F)$.

(4) La condition que θ_D est localement intégrable est redondante car une fonction invariante par conjugaison et vérifiant la condition (1) est automatiquement localement intégrable.

(5) Soit $D \in I(G)^*$ et soit α une fonction sur $G(F)$, localement constante et invariante par conjugaison. On définit la distribution αD par $(\alpha D)(f) = D(\alpha f)$. Si D est un quasi-caractère, alors αD l'est aussi.

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. On a défini la distribution D_f en 3.1. On a

(6) D_f est un quasi-caractère.

Cf. [18] 5.9. La fonction θ_{D_f} se calcule de la façon suivante. Soit $x \in G_{reg}(F)$. Notons M^x le commutant de A_{G_x} dans G. C'est le plus petit Levi M' tel que $x \in M'(F)$. De plus x est elliptique dans $M^x(F)$. On sait définir l'intégrale orbitale pondérée

$$J_{M^x}^G(x,f) = D^G(x)^{1/2} \int_{A_{M^x}(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}xg) v_{M^x}(g)\, dg.$$

Le poids v_{M^x} est calculé relativement à un sous-groupe compact spécial de $G(F)$ fixé, cf. [1], mais, parce que f est très cuspidale, l'intégrale ci-dessus ne dépend pas de ce choix, cf. [18] lemme 5.2. Pour tout tore déployé A', posons $m(A') = mes(A'(F)_c)$. D'après [20] 9(1), on a alors

$$(7) \qquad \theta_{D_f}(x) = (-1)^{a_{M^x}-a_G} D^G(x)^{-1/2} m(A_{M^x}) m(A_G)^{-1} J_{M^x}^G(x,f).$$

On appelle quasi-caractère de niveau 0 une distribution invariante D associée à une fonction θ_D sur $G(F)$ localement intégrable et invariante par conjugaison, qui vérifie la condition

(8) pour tout $\epsilon \in G(F)_{p'}$, pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)$, il existe un nombre complexe $c_{D,\mathcal{O}}$ de sorte que, pour presque tout $Y \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$, on ait l'égalité

$$\theta_D(\epsilon exp(Y)) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)} c_{D,\mathcal{O}} \hat{j}(\mathcal{O}, Y).$$

On a des variantes de ces définitions pour l'algèbre de Lie. Soit D une distribution invariante sur $\mathfrak{g}(F)$ associée à une fonction θ_D sur $\mathfrak{g}(F)$ localement intégrable et invariante par conjugaison. On dit que D est un quasi-caractère si θ_D vérifie la condition

(9) pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ semi-simple, il existe un voisinage $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{g}_X(F)$ et, pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_X)$, il existe un nombre complexe $c_{D,\mathcal{O}}$ de sorte que, pour presque tout $Y \in \mathfrak{V}$, on ait l'égalité

$$\theta_D(X+Y) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_X)} c_{D,\mathcal{O}} \hat{j}(\mathcal{O}, Y).$$

On dit que c'est un quasi-caractère de niveau 0 si θ_D est à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ et que, pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})$, il existe un nombre complexe $c_{D,\mathcal{O}}$ de sorte que, pour presque tout $Y \in \mathfrak{g}_{tn}(F)$, on ait l'égalité

$$\theta_D(Y) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g})} c_{D,\mathcal{O}} \hat{j}(\mathcal{O}, Y).$$

Si $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ est une fonction très cuspidale, on définit la distribution D_f sur $\mathfrak{g}(F)$ comme on l'a fait sur le groupe. Cette distribution est un quasi-caractère.

Lemme. *(i) Tout quasi-caractère sur $G(F)$, resp. $\mathfrak{g}(F)$, de niveau 0 est un quasi-caractère.*

(ii) soit D un quasi-caractère sur $G(F)$; alors D est de niveau 0 si et seulement si, pour tout $\epsilon \in G(F)_{p'}$ et presque tout $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$, la fonction $\lambda \mapsto \theta_D(\epsilon exp(\lambda^2 X))$ définie sur $\mathfrak{o}_F$ appartient à E, cf. 5.1 .

(iii) Fixons une décomposition $G(F) = \bigcup_{\epsilon\in B} C_G(\epsilon)$, où B est un sous-ensemble de $G(F)_{p'}$. Soit D une distribution invariante associée à une fonction θ_D qui vérifie la condition (8) restreinte aux $\epsilon \in B$. Alors D est un quasi-caractère.

Preuve. Il résulte de [18] lemme 6.3(iii) que, pour tout quasi-caractère D de niveau 0 sur $\mathfrak{g}(F)$, il existe une fonction très cuspidale f telle que D coïncide avec D_f sur $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Puisque D_f est un quasi-caractère, D l'est aussi, cf. remarque (6).

Soit maintenant D un quasi-caractère de niveau 0 sur $G(F)$. Soit $x \in G(F)$ un élément semi-simple. Ecrivons une p'-décomposition $x = \epsilon exp(X)$ avec $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$. Soit $Y \in \mathfrak{g}_x(F)$. D'après 4.4(1), on a $Y \in \mathfrak{g}_\epsilon(F)$ et Y commute à X. Donc $xexp(Y) = \epsilon exp(X+Y)$. Si Y est assez petit, $X+Y$ est topologiquement nilpotent. Par hypothèse sur D, on a donc

$$\theta_D(xexp(Y)) = \theta_D(\epsilon exp(X+Y)) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)} c(D,\mathcal{O})\hat{j}(\mathcal{O}, X+Y).$$

Notons D' le quasi-caractère de niveau 0 sur $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$ dont la fonction $\theta_{D'}$ associée est définie par

$$\theta_{D'}(Z) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)} c(D,\mathcal{O})\hat{j}(\mathcal{O}, Z)$$

pour $Z \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$. On vient de voir que c'est un quasi-caractère. L'hypothèse que x est semi-simple implique que X l'est aussi. Il existe donc un voisinage $\mathfrak{V}$ de 0 dans $(\mathfrak{g}_\epsilon)_X(F)$ tel que, pour presque tout $Y \in \mathfrak{V}$, on ait l'égalité

$$\theta_{D'}(X+Y) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil((\mathfrak{g}_\epsilon)_X)} c_{D',\mathcal{O}}\hat{j}(\mathcal{O}, Y).$$

Autrement dit, $\theta_D(xexp(Y))$ est égal à l'expression de droite pour presque tout $Y \in \mathfrak{V}$. Puisque $(\mathfrak{g}_\epsilon)_X = \mathfrak{g}_x$, c'est exactement la condition (1) requise. Donc D est un quasi-caractère, ce qui démontre (i).

Soit D un quasi-caractère sur $G(F)$. Si D est de niveau 0, la propriété énoncée au (ii) résulte de ce que les fonctions $\lambda \mapsto \hat{j}(\mathcal{O}, \lambda^2 X)$ appartiennent à E. Inversement, supposons la propriété en question vérifiée. Soit $\epsilon \in G(F)_{p'}$, fixons un voisinage $\mathfrak{V}$ et des constantes $c_{D,\mathcal{O}}$, de sorte que (1) soit vérifiée. Soit $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$ et supposons $\epsilon exp(\lambda X) \in G_{reg}$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{o}_F$ (ceci est vérifié pour presque tout X). Les fonctions

$$\lambda \mapsto \theta(\epsilon exp(\lambda^2 X))$$

et

$$\lambda \mapsto \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)} c_{D,\mathcal{O}}\hat{j}(\mathcal{O}, \lambda^2 X)$$

appartiennent toutes deux à E (la première par hypothèse). Pour un entier n assez grand, $\lambda^2 X$ appartient à $\mathfrak{V}$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{p}_F^n$, donc les deux fonctions coïncident sur $\mathfrak{p}_F^n$. Elles sont alors égales. Pour $\lambda = 1$, cela démontre l'égalité

$$\theta_D(\epsilon exp(X)) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)} c_{D,\mathcal{O}}\hat{j}(\mathcal{O}, X)$$

et cela pour presque tout $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$. Donc D est un quasi-caractère de niveau 0, ce qui démontre (ii).

Pour (iii), il s'agit de voir que (8) est aussi vérifiée pour $\epsilon \in G(F)_{p'} - B$. Ce problème étant insensible à la conjugaison par $G(F)$, on peut supposer que $\epsilon \in C(\epsilon')$ pour un $\epsilon' \in B$. Ecrivons $\epsilon = \epsilon' exp(Z)$, avec $Z \in \mathfrak{g}_{\epsilon',tn}(F)$. D'après le (iv) du lemme 7.6, on a $G_\epsilon = G_{\epsilon'}$ et Z est un élément central dans $\mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$. Pour $Y \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$, on a alors $\epsilon exp(Y) = \epsilon' exp(Z + Y)$ et, en appliquant l'hypothèse (8) pour ϵ', on a

$$\theta_D(\epsilon exp(Y)) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)} c_{D,\mathcal{O}}\hat{j}(\mathcal{O}, Z + Y).$$

Mais les fonctions $\hat{j}(\mathcal{O})$ sont invariantes par translations par tout élément central dans $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$. Le Z disparaît de l'expression ci-dessus et on aboutit à une expression comme en (8) de $\theta_D(\epsilon exp(Y))$. $\square$

Remarque. Cette preuve et la remarque (4) entraînent qu'une fonction θ_D invariante par conjugaison par $G(F)$ et vérifiant la condition (8) est forcément localement intégrable.

5.3 Induction de quasi-caractères

Lemme. *Soient M un Levi de G et D^M un quasi-caractère de $M(F)$. Posons $D = Ind_M^G(D^M)$.*

(i) La distribution D est un quasi-caractère.

(ii) Si D^M est de niveau 0, D est de niveau 0.

Preuve. Le (i) est démontré dans [19] lemme 2.3.

On note θ_{D^M} la fonction associée à D^M. Pour $x \in G_{reg}(F)$, l'ensemble $\{g^{-1}xg; g \in G(F) \cap M(F)$ se décompose en un nombre fini de classes de conjugaison par $M(F)$. Fixons un ensemble $X_M(x)$ de représentants de ces classes. Par un calcul d'intégration facile, D est associé à la fonction θ_D définie sur $G_{reg}(F)$ par la formule

$$(1) \qquad \theta_D(x) = \sum_{y\in X_M(x)} D^G(x)^{-1/2} D^M(y)^{1/2}\theta_{D^M}(y).$$

Soit $\epsilon \in G(F)_{p'}$ et $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$. Posons $x = \epsilon exp(X)$ et supposons $x \in G_{reg}(F)$. Pour tout $y \in X_M(x)$, soit $g_y \in G(F)$ tel que $g_y^{-1}xg_y = y$. Posons $\epsilon_y = g_y^{-1}\epsilon g_y$ et $X_y = g_y^{-1}\epsilon g_y$. On a $y = \epsilon_y exp(X_y)$ et ceci est une p'-décomposition de y. Le groupe A_M commute à y puisque $y \in M(F)$. Il commute à ϵ_y et X_y d'après 4.4 (1). Donc $\epsilon_y \in M(F)$ et $X_y \in \mathfrak{m}_{\epsilon_y}(F)$. De plus ϵ_y est un p'-élément dans $M(F)$ d'après le (i) du lemme 4.6. Soit $\lambda \in F^\times$ tel que λX soit encore topologiquement nilpotent. Posons $x' = \epsilon exp(\lambda X)$.

L'élément x' appartient encore à $G_{reg}(F)$. Les éléments $\epsilon_y exp(\lambda X_y) = g_y^{-1}x'g_y$ sont tous des éléments de $M(F)$ conjugués à x' par un élément de $G(F)$. Montrons que

(2) si $y, y' \in X_M(x)$, avec $y \neq y'$, alors $\epsilon_y exp(\lambda X_y)$ et $\epsilon_{y'} exp(\lambda X_{y'})$ ne sont pas conjugués par un élément de $M(F)$.

Supposons qu'il existe $m \in M(F)$ tel que $m^{-1}\epsilon_y exp(\lambda X_y)m = \epsilon_{y'} exp(\lambda X_{y'})$. En posant $h = g_y m g_{y'}^{-1}$, on a alors $h^{-1}x'h = x'$. Puisque $x' \in G_{reg}(F)$, on a $h \in G_{x'}(F)$, d'où $h \in G_\epsilon(F)$ d'après le (iii) du lemme 4.4. On voit alors que $m^{-1}\epsilon_y m = \epsilon_{y'}$, d'où aussi $m^{-1}\lambda X_y m = \lambda X_{y'}$. Il en résulte que $m^{-1}X_y m = X_{y'}$, puis que $m^{-1}ym = y'$. Mais cela est contradictoire avec la définition de $X_M(x)$, ce qui démontre (2).

En conséquence de (2), l'ensemble $X_M(x')$ a au moins autant d'éléments que $X_M(x)$. La situation étant symétrique en x et x', ces deux ensembles ont même nombre d'éléments. Alors (2) nous dit que l'on peut choisir pour $X_M(x')$ l'ensemble $\{\epsilon_y exp(\lambda X_y); y \in X_M(x)\}$. On remplace maintenant λ par λ^2, avec $\lambda \in \mathfrak{o}_F$. L'égalité (1) pour $\epsilon exp(\lambda^2 X)$ devient

$$\theta_D(\epsilon exp(\lambda^2 X)) = \sum_{y \in X_M(x)} D^G(\epsilon exp(\lambda^2 X))^{-1/2} D^M(\epsilon_y exp(\lambda^2 X_y))^{1/2} \theta_{D^M}(\epsilon_y exp(\lambda^2 X_y)).$$

D'après le (ii) du lemme 7.6, cela se récrit

$$\theta_D(\epsilon exp(\lambda^2 X)) = \sum_{y \in X_M(x)} d^G(\epsilon_y)^{-1/2} D^{G_{\epsilon_y}}(\lambda^2 X)^{-1/2} d^M(\epsilon_y)^{1/2} D^{M_{\epsilon_y}}(\lambda^2 X_y)^{1/2} \theta_{D^M}(\epsilon_y exp(\lambda^2 X_y)).$$

Comme fonction de λ, le terme $D^{G_{\epsilon_y}}(\lambda^2 X)^{-1/2}$, resp. $D^{M_{\epsilon_y}}(\lambda^2 X_y)^{1/2}$, est produit d'une constante et d'une puissance entière de $|\lambda|_F$. Si D^M est de niveau 0, le terme $\theta_{D^M}(\epsilon_y exp(\lambda^2 X_y))$ appartient à E d'après le (ii) du lemme 5.2. Donc la fonction $\lambda \mapsto \theta_D(\epsilon exp(\lambda^2 X))$ appartient à E, ce qui prouve que D est un quasi-caractère de niveau 0 d'après le même lemme. $\square$

Un cas particulier de la formule (1) nous servira plus tard. Supposons $x \in G_{reg}(F) \cap M_{ell}(F)$. Fixons un ensemble de représentants $\underline{N}(M)$ du quotient $Norm_G(M)(F)/M(F)$. On vérifie que l'on peut choisir pour ensemble $X_M(x)$ l'ensemble $X_M(x) = \{n^{-1}xn; n \in \underline{N}(M)\}$. On a aussi $D^M(n^{-1}xn) = D^M(x)$ pour tout n. La formule devient

$$(3) \qquad \theta_D(x) = D^G(x)^{-1/2} D^M(x)^{1/2} \sum_{n \in \underline{N}(M)} \theta_{D^M}(n^{-1}xn).$$

5.4 L'espace $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$

Soit $\mathcal{F} \in Fac(G)$. On note $\mathbf{g}_\mathcal{F}$ l'algèbre de Lie du groupe $\mathbf{G}_\mathcal{F}$ et $\mathbf{g}_{\mathcal{F},nil}$ son sous-ensemble des éléments nilpotents. On note $C_{cusp}(\mathbf{g}_{\mathcal{F},nil})$ l'espace des fonctions sur $\mathbf{g}_\mathcal{F}(k_F)$, à valeurs complexes, à support nilpotent, qui sont invariantes par conjugaison par $\mathbf{G}_\mathcal{F}(k_F)$ et cuspidales. On note $Fac_{max}(G)$ l'ensemble des facettes réduites à un point (c'est-à-dire les sommets de l'immeuble).

A l'aide de ces objets, on définit des espaces $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g})$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ de façon similaire à ceux de 2.1. On pose

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}) = \sum_{\mathcal{F} \in Fac_{max}(G)} C_{cusp}(\mathbf{g}_{\mathcal{F},nil}),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathfrak{g}) = \oplus_M \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{m}),$$

où M parcourt les Levi de G. Le groupe $G(F)$ agit naturellement sur ces espaces et on note $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ les espaces de coinvariants. On définit une application linéaire $D^G : \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathfrak{g}) \to I(\mathfrak{g})^*$: pour un Levi M, une facette $\mathcal{F}_M \in Fac_{max}(M)$ et une fonction $f \in C_{cusp}(\boldsymbol{\mathfrak{m}}_{\mathcal{F}_M,nil})$, on relève f en une fonction $f_{\mathcal{F}_M}$ sur $M(F)$ qui est très cuspidale et on pose $D^G_f = Ind^G_M(D^M_{f_{\mathcal{F}_M}})$. L'application D^G se quotiente en une application définie sur $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$.

Proposition. *(i) L'application $D^G : \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \to I(\mathfrak{g})^*$ est injective.*

(ii) Son image est l'espace des quasi-caractères de niveau 0 sur $\mathfrak{g}(F)$.

Preuve. Pour $\mathcal{F} \in Fac(G)$, notons $\mathcal{E}_{\mathcal{F},nil}$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}(F)$ à valeurs complexes à support dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}} \cap \mathfrak{g}_{tn}(F)$ et invariantes par translations par $\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}}$. Notons $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ le sous-espace de $C^\infty_c(\mathfrak{g}(F))$ engendré par les $\mathcal{E}_{\mathcal{F},nil}$ pour $\mathcal{F} \in Fac(G)$. On note $I\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ son image dans $I(\mathfrak{g})$. Les démonstrations des paragraphes 3.6 à 3.9 qui concernent des fonctions sur $G(F)$ s'adaptent à l'algèbre de Lie et conduisent aux mêmes conclusions :

(1) la composée de D^G et de la restriction $I(\mathfrak{g})^* \to I\mathcal{E}(\mathfrak{g})^*$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ sur cet espace ;

(2) l'application linéaire composée $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}) \stackrel{D^G}{\to} I(\mathfrak{g})^* \to I_{cusp}(\mathfrak{g})^*$ est injective.

L'assertion (1) entraîne que D^G est injective.

Notons $\mathcal{H}$ le sous-espace de $C^\infty_c(\mathfrak{g}(F)$ engendré par les fonctions f pour lesquelles il existe une sous-algèbre d'Iwahori $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ de sorte que f soit invariante par $\mathfrak{b}$. En notant $\mathfrak{u}$ le radical pro-p-nilpotent de $\mathfrak{b}$, cette invariance équivaut à ce que $\hat{f}$ soit à support dans $\mathfrak{u}$. En se rappelant que $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ est l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}(F)$ tels qu'il existe une telle algèbre $\mathfrak{u}$ de sorte que $X \in \mathfrak{u}$, on voit facilement que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des fonctions f tels que le support de $\hat{f}$ soit contenu dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Remarquons que, pour $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$, le support de f est contenu dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$, donc $\hat{f} \in \mathcal{H}$. Notons $I\mathcal{H}$ l'image de $\mathcal{H}$ dans $I(\mathfrak{g})$ et $\hat{I}\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ l'image de $I\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ par transformation de Fourier.

Rappelons qu'un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ est dit entier s'il existe une facette $\mathcal{F} \in Fac(G)$ de sorte que $X \in \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. Notons $I(\mathfrak{g})^*_{ent}$ l'espace des distributions invariantes sur $\mathfrak{g}(F)$ à support entier.

Soient M un Levi de G, $\mathcal{F}_M \in Fac_{max}(M)$ et $f \in C_{cusp}(\boldsymbol{\mathfrak{m}}_{\mathcal{F}_M,nil})$. On a $D^G_f = Ind^G_M(D^M_{f_{\mathcal{F}_M}})$. On vérifie que la transformée de Fourier $\hat{D}^G_f$ de la distribution D^G_f est égale à $Ind^G_M(D^M_{\hat{f}_{\mathcal{F}_M}})$. La fonction $\hat{f}_{\mathcal{F}_M}$ étant à support dans $k_{\mathcal{F}_M}$ donc entier, on a $\hat{D}^G_f \in I(\mathfrak{g})^*_{ent}$. On note $\hat{D}^G(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$ l'image de $D^G(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$ par transformée de Fourier.

Notons $i : \mathbb{C}[Nil(\mathfrak{g}] \to I(\mathfrak{g})^*$ l'application qui, à une orbite nilpotente $\mathcal{O}$, associe l'intégrale orbitale $I_{\mathcal{O}}$. Son image est bien sûr contenue dans $I(\mathfrak{g})^*_{ent}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & I\mathcal{H}^* & & \\ & & & res \nearrow & & \searrow r & \\ \hat{D}^G(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) & \stackrel{j}{\to} & I(\mathfrak{g})^*_{ent} & & p_1 \uparrow & & \hat{I}\mathcal{E}(\mathfrak{g}) \\ & & & i \nwarrow & & \nearrow p_2 & \\ & & & & \mathbb{C}[Nil(\mathfrak{g})] & & \end{array}$$

L'application j est l'injection naturelle. Les applications res et r sont les restrictions. Les applications p_1 et p_2 sont celles qui rendent le diagramme commutatif. Dans [5] théorème 2.1.5, Debacker a prouvé les assertions suivantes :

(3) les applications res et p_1 ont même image ;

(4) p_1 et p_2 sont injectives.

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$. Par construction, $D^G_{\mathbf{f}}$ est à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Pour prouver que $D^G_{\mathbf{f}}$ est un quasi-caractère de niveau 0, il suffit de prouver que $D^G_{\mathbf{f}}$ coïncide sur cet ensemble avec une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes. D'après ce que l'on a dit ci-dessus, il suffit de prouver que $\hat{D}^G_{\mathbf{f}}$ coïncide sur $\mathcal{H}$ avec une combinaison linéaire d'intégrales orbitales nilpotentes. Autrement dit, il suffit de prouver que $res \circ j(\hat{D}^G_{\mathbf{f}})$ appartient à l'image de p_1. Cela résulte de (3).

Inversement, soit d un quasi-caractère de niveau 0. Notons $\hat{d}_1 \in I\mathcal{H}^*$ la restriction de $\hat{d}$ à $I\mathcal{H}$. Le quasi-caractère d coïncide sur $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ avec une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes. Donc $\hat{d}$ coïncide sur $\mathcal{H}$ avec une combinaison linéaire d'intégrales orbitales nilpotentes. C'est-à-dire que $\hat{d}_1$ appartient à l'image de p_1. Soit $N_1 \in \mathbb{C}[Nil(\mathfrak{g})]$ tel que $\hat{d}_1 = p_1(N_1)$. Par transformation de Fourier, l'assertion (1) dit que l'application $r \circ res \circ j$ est un isomorphisme. Il existe donc $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ tel que $r(\hat{d}_1) = r \circ res \circ j(\hat{D}^G_{\mathbf{f}})$. D'après (3), il existe $N_2 \in \mathbb{C}[Nil(\mathfrak{g})]$ tel que $res \circ j(\hat{D}^G_{\mathbf{f}}) = p_1(N_2)$. On a alors

$$p_2(N_2) = r \circ p_1(N_2) = r \circ res \circ j(\hat{D}^G_{\mathbf{f}}) = r(\hat{d}_1) = r \circ p_1(N_1) = p_2(N_1).$$

D'après (4), cela entraîne $N_1 = N_2$. D'où

$$\hat{d}_1 = p_1(N_1) = p_1(N_2) = res \circ j(\hat{D}^G_{\mathbf{f}}).$$

Autrement dit, les distributions $\hat{d}$ et $\hat{D}^G_{\mathbf{f}}$ coïncident sur $\mathcal{H}$. Donc d et $D^G_{\mathbf{f}}$ coïncident sur $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Mais elles sont toutes deux à support dans cet ensemble. Donc $d = D^G_{\mathbf{f}}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

5.5 Filtrations sur l'algèbre de Lie

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $Fil^n I(\mathfrak{g})$ l'image dans $I(\mathfrak{g})$ du sous-espace des $f \in C^\infty_c(\mathfrak{g}(F))$ qui vérifient la condition : pour tout Levi M tel que $dim(A_M) > n$ et tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F) \cap \mathfrak{m}(F)$, on a $I^G(X, f) = 0$. On a

$$Fil^{a_G - 1} I(\mathfrak{g}) = \{0\} \subset Fil^{a_G} I(\mathfrak{g}) = I_{cusp}(\mathfrak{g}) \subset ... \subset Fil^{a_{M_{min}}} I(\mathfrak{g}) = I(\mathfrak{g}),$$

et, en posant $Gr^n I(\mathfrak{g}) = Fil^n I(\mathfrak{g})/Fil^{n-1} I(\mathfrak{g})$, on a

$$Gr^n I(\mathfrak{g}) \simeq \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}^n} I_{cusp}(\mathfrak{m})^{W^G(M)}.$$

Notons $Ann^n I(\mathfrak{g})^*$ l'annulateur de $Fil^{n-1} I(\mathfrak{g})$ dans $I(\mathfrak{g})^*$. On a

$$Ann^{a_{M_{min}}+1} I(\mathfrak{g})^* = \{0\} \subset Ann^{a_{M_{min}}} I(\mathfrak{g})^* \subset ... \subset Ann^{a_G} I(\mathfrak{g})^* = I(\mathfrak{g})^*,$$

et, en posant $Gr^n I(\mathfrak{g})^* = Ann^n I(\mathfrak{g})^*/Ann^{n+1} I(\mathfrak{g})^*$,

$$(1) \qquad Gr^n I(\mathfrak{g})^* \simeq \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}^n} I_{cusp}(\mathfrak{m})^{*W^G(M)}.$$

Notons $Qc_0(\mathfrak{g})$ l'espace des quasi-caractères de niveau 0 sur $\mathfrak{g}(F)$. Notons $Qc^n_0(\mathfrak{g})$ la somme des $Ind^G_M(Qc_0(\mathfrak{m}))$ sur les Levi M tels que $dim(A_M) \geq n$. Notons aussi $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$ la somme des images dans $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ des $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{m})$ sur les mêmes Levi M.

Lemme. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité*

$$Qc_0^n(\mathfrak{g}) = Qc_0(\mathfrak{g}) \cap Ann^n I(\mathfrak{g})^* = D^G(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})),$$

et l'isomorphisme

$$Qc_0^n(\mathfrak{g})/Q_0^{n+1}(\mathfrak{g})^* \simeq \oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n} D^M(\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{m})^{W^G(M)}).$$

Preuve. L'égalité $Qc_0^n(\mathfrak{g}) = D^G(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}))$ résulte des définitions et de la proposition 5.4 appliquée aux Levi M tels que $dim(A_M) \geq n$. Notons $I(\mathfrak{g})^*_{nil}$ le sous-espace des distributions sur $\mathfrak{g}(F)$ à support nilpotent. Autrement dit $I(\mathfrak{g})^*_{nil} = i(\mathbb{C}[Nil])$ avec les notations de la preuve précédente. On a prouvé en [14] proposition I.5.3 que $I(\mathfrak{g})^*_{nil} \cap Ann^n I(\mathfrak{g})^*$ était la somme des $Ind_M^G(I(\mathfrak{m})^*_{nil})$ où M parcourt les Levi tels que $dim(A_M) \geq n$. Les filtrations sont invariantes par transformées de Fourier. Cela résulte de ce que, pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, tout Levi M et tout $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, $I^G(X, \hat{f})$ ne dépend que des $I^G(Y, f)$ pour $Y \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Notons $\hat{I}(\mathfrak{g})^*_{nil}$ l'image de $I(\mathfrak{g})^*_{nil}$ par transformée de Fourier. On obtient que $\hat{I}(\mathfrak{g})^*_{nil} \cap Ann^n I(\mathfrak{g})^*$ est la somme des $Ind_M^G(\hat{I}(\mathfrak{m})^*_{nil})$ où M parcourt les Levi tels que $dim(A_M) \geq n$. Soit $d \in Qc_0(\mathfrak{g}) \cap Ann^n I(\mathfrak{g})^*$. Par définition d'un quasi-caractère de niveau 0, d est la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ d'un élément $d_0 \in \hat{I}(\mathfrak{g})^*_{nil}$. Puisque $d \in Ann^n I(\mathfrak{g})^*$, d_0 annule tout élément de $Fil^{n-1} I(\mathfrak{g})$ à support topologiquement nilpotent. L'espace $Fil^{n-1} I(\mathfrak{g})$ est invariant par l'action de $F^\times$ par homothétie. Puisque $\hat{I}(\mathfrak{g})^*_{nil}$ est engendré par des éléments homogènes, sinon par l'action de $F^\times$, du moins par l'action du sous-groupe des carrés, dire que d_0 annule tout élément de $Fil^{n-1} I(\mathfrak{g})$ à support topologiquement nilpotent équivaut à dire qu'il annule tout $Fil^{n-1} I(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire que $d_0 \in \hat{I}(\mathfrak{g})^*_{nil} \cap Ann^n I(\mathfrak{g})^*$. Donc $d_0 = \sum_M Ind_M^G(d_{M,0})$, où l'on somme sur les Levi M tels que $dim(A_M) \geq n$ et où $d_{M,0}$ est un certain élément de $\hat{I}(\mathfrak{m})^*_{nil}$. Donc $d = \sum_M Ind_M^G(d_M)$, où d_M est la restriction de $d_{M,0}$ à $\mathfrak{m}_{tn}(F)$. Cet élément d_M appartient à $Qc_0(\mathfrak{m})$. Donc $d \in Qc_0^n(\mathfrak{g})$. Cela démontre l'inclusion $Qc_0(\mathfrak{g}) \cap Ann^n I(\mathfrak{g})^* \subset Qc_0^n(\mathfrak{g})$ et l'inclusion opposée est évidente.

On a

$$Qc_0^n(\mathfrak{g})/Qc_0^{n+1}(\mathfrak{g})^* = D^G(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}))/D^G(\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}))$$

et, d'après ce que l'on vient de prouver, cet espace s'envoie injectivement dans $Gr^n I(\mathfrak{g})^*$. Par définition, $D^G(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}))$ est la somme de $D^G(\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}))$ et de $D^G(\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n}\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{m}))$. Ce dernier espace a donc même image dans $Gr^n I(\mathfrak{g})^*$ que $Qc_0^n(\mathfrak{g})/Qc_0^{n+1}(\mathfrak{g})^*$. Soit $M \in \underline{\mathcal{L}}^n$ et $\mathbf{f} \in \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{m})$. L'image de $D^G_{\mathbf{f}}$ dans $Gr^n I(\mathfrak{g})^*$ est nulle dans les composantes $I_{cusp}(\mathfrak{m}')^{*W^G(M')}$ de la décomposition (1) pour $M' \neq M$ et est l'image naturelle de $D^M_{\mathbf{f}}$ dans $I_{cusp}(\mathfrak{m})^{*W^G(M)}$ pour $M' = M$ (c'est-à-dire l'image de $D^M_{\mathbf{f}}$ dans $I_{cusp}(\mathfrak{m})^*$ que l'on restreint au sous-espace $I_{cusp}(\mathfrak{m})^{W^G(M)}$). En moyennant sur le groupe $W^G(M)$, on obtient que $Qc_0^n(\mathfrak{g})/Qc_0^{n+1}(\mathfrak{g})^*$ s'identifie à la somme des images de $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{m})^{W^G(M)}$ dans $I_{cusp}(\mathfrak{m})^{*W^G(M)}$. D'après le (2) de 5.4, $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{m})^{W^G(M)}$ s'envoie injectivement dans $I_{cusp}(\mathfrak{m})^{*W^G(M)}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

5.6 Un premier théorème

Théorème. *L'image de l'application $D^G : \mathcal{D}(G) \to I(G)^*$ est formée de quasi-caractères de niveau 0 sur $G(F)$.*

Preuve. En vertu du (ii) du lemme 5.3, il suffit de prouver que, pour tout élément $\mathbf{f} \in \mathcal{D}_{cusp}(G)$, $D^G_{\mathbf{f}}$ est un quasi-caractère de niveau 0 sur $G(F)$. La famille $\mathbf{f}$ peut être infinie mais la définition des quasi-caractères de niveau 0 est locale et, localement, seuls un nombre fini de fonctions de la famille $\mathbf{f}$ interviennent. On peut donc aussi bien supposer qu'il y a une seule fonction. C'est-à-dire que l'on peut fixer $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*_{max}(G)$ et $f \in C_{cusp}(\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}})$ et supposer que $\mathbf{f}$ est réduit à l'unique fonction f. On a alors $D^G_{\mathbf{f}} = D^G_{f_{\mathcal{F}}}$. C'est un quasi-caractère d'après 5.2 (6). On note θ sa fonction localement intégrable associée. Soit ϵ un élément p'-compact de $G(F)$. On doit calculer $\theta(\epsilon exp(X))$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$ tel que $\epsilon exp(X)$ soit fortement régulier. On peut évidemment supposer $\nu = w_G(\epsilon)$, sinon cette fonction est nulle. Fixons X. Notons T le commutant de X dans G_ϵ, qui est aussi le commutant de $\epsilon exp(X)$ dans G. Notons M le commutant de A_T dans G. C'est un Levi de G contenant ϵ et $exp(X)$ d'après le (iii) du lemme 4.4. On pose $M_\epsilon = G_\epsilon \cap M$. C'est un Levi de G_ϵ et on a $X \in \mathfrak{m}_\epsilon(F)$. L'élément X est elliptique dans $\mathfrak{m}_\epsilon(F)$ et $\epsilon exp(X)$ est elliptique dans $M(F)$. Notons que $A_T = A_{M_\epsilon} = A_M$. D'après 5.2 (7), on a

(1) $$\theta(\epsilon exp(X)) = (-1)^{a_M - a_G} D^G(\epsilon exp(X))^{-1/2} m(A_M) m(A_G)^{-1} J^G_M(\epsilon exp(X), f_{\mathcal{F}})$$
$$= (-1)^{a_M - a_G} m(A_M) m(A_G)^{-1} \int_{A_M(F)\backslash G(F)} f_{\mathcal{F}}(g^{-1}\epsilon exp(X) g) v_M(g)\, dg.$$

Pour $g \in G(F)$, on a

(2) $g^{-1}\epsilon exp(X) g \in K^\nu_{\mathcal{F}}$ si et seulement si $g^{-1}\epsilon g \in K^\nu_{\mathcal{F}}$ et $g^{-1}exp(X)g \in K^0_{\mathcal{F}}$.

En effet, soit $c \geq 1$ un entier premier à p tel que $\epsilon^c \in Z(G)(F)$. Supposons $g^{-1}\epsilon exp(X) g \in K^\nu_{\mathcal{F}}$. Alors $g^{-1}\epsilon^c exp(cX) g \in K^\dagger_{\mathcal{F}}$. On a aussi $g^{-1}\epsilon^c g \in Z(G)(F) \subset K^\dagger_{\mathcal{F}}$. Donc $g^{-1}exp(cX)g \in K^\dagger_{\mathcal{F}}$. Il en résulte que $g^{-1}exp(X)g \in K^\dagger_{\mathcal{F}}$ et, puisque c'est un élément topologiquement unipotent, on a forcément $g^{-1}exp(X)g \in K^0_{\mathcal{F}}$. Puisque $g^{-1}\epsilon exp(X) g \in K^\nu_{\mathcal{F}}$, cela entraîne $g^{-1}\epsilon g \in K^\nu_{\mathcal{F}}$. La réciproque est évidente. D'où (2).

On a aussi :

(3) la classe de conjugaison par $G(F)$ de ϵ coupe $K^\nu_{\mathcal{F}}$ en un nombre fini de classes de conjugaison par $K^0_{\mathcal{F}}$.

En effet, notons $Cl(\epsilon)$ cette classe de conjugaison par $G(F)$. C'est un sous-ensemble fermé de $G(F)$, donc son intersection avec $K^\nu_{\mathcal{F}}$ est compacte. On sait que l'application

$$\begin{array}{ccc} Z_G(\epsilon)(F)\backslash G(F) & \to & Cl(\epsilon) \\ g & \mapsto & g^{-1}\epsilon g \end{array}$$

est un homéomorphisme. Puisque les orbites de l'action de $K^\nu_{\mathcal{F}}$ sur l'ensemble de départ sont ouvertes, il en est de même de celles sur l'ensemble d'arrivée. Puisque $Cl(\epsilon) \cap K^\nu_{\mathcal{F}}$ est compact, il n'y a donc qu'un nombre fini de telles orbites, d'où (3).

Notons Γ_ϵ l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $g^{-1}\epsilon g \in K^\nu_{\mathcal{F}}$. En conséquence de (3), l'ensemble $G_\epsilon(F)\backslash\Gamma_\epsilon/K^0_{\mathcal{F}}$ est fini. Fixons-en un ensemble de représentants $\boldsymbol{\gamma}$. Pour tout $\gamma \in \boldsymbol{\gamma}$, définissons comme en 3.4 la facette $\gamma\mathcal{F}$ et posons

$$m_\gamma = mes(G_\epsilon(F) \cap K^0_{\gamma\mathcal{F}})^{-1},$$

la mesure étant calculée relativement à la mesure implicitement fixée sur $G_\epsilon(F)$. On vérifie la formule d'intégration

$$\int_{A_M(F)\backslash\Gamma_\epsilon} \varphi(g)\, dg = \sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}} m_\gamma \int_{A_M(F)\backslash G_\epsilon(F)} \int_{K^0_{\mathcal{F}}} \varphi(g\gamma k)\, dk\, dg$$

pour toute fonction intégrable φ sur $A_M(F)\backslash\Gamma_\epsilon$. On applique cela à la fonction $\varphi(g) = f_{\mathcal{F}}(g^{-1}\epsilon exp(X)g)v_M(g)$. La fonction $f_{\mathcal{F}}$ est invariante par conjugaison par $K^0_{\mathcal{F}}$. On voit que $f_{\mathcal{F}}(k^{-1}\gamma^{-1}g^{-1}\epsilon exp(X)g\gamma k) = ({}^\gamma f)_{\gamma\mathcal{F}}(\epsilon exp(g^{-1}Xg))$ pour tous $\gamma \in \boldsymbol{\gamma}$, $g \in G_\epsilon(F)$ et $k \in K^0_{\mathcal{F}}$. Pour de mêmes γ et g, posons

$$v_{M,\gamma}(g) = \int_{K^0_{\mathcal{F}}} v_M(g\gamma k)\, dk.$$

Grâce à (1) et (2) et à l'égalité $A_{M_\epsilon} = A_M$, on obtient

$$(4) \qquad \theta(\epsilon exp(X)) = (-1)^{a_{M_\epsilon}-a_G} m(A_{M_\epsilon})m(A_G)^{-1}\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}} m_\gamma$$

$$\int_{A_{M_\epsilon}(F)\backslash G_\epsilon(F)} ({}^\gamma f)_{\gamma\mathcal{F}}(\epsilon exp(g^{-1}Xg))v_{M,\gamma}(g)\, dg.$$

Fixons $\gamma \in \boldsymbol{\gamma}$ et simplifions provisoirement la notation en supposant $\gamma = 1$. Par définition de $\boldsymbol{\gamma}$, on a $\epsilon \in K^\nu_{\mathcal{F}}$. Introduisons la facette $\mathcal{F}' \in Imm(G_{\epsilon,AD})$ associée à $\mathcal{F}$, cf. proposition 4.9 (iii). Le groupe $\mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'}$ est la composante neutre de $(\mathbf{G}_{\mathcal{F}})^\epsilon$. Notons $\bar\epsilon$ la réduction de ϵ dans $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}(k_F)$ et f' la fonction sur $\mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'}(k_F)$, à support unipotent, définie par $f'(x) = f(\bar\epsilon x)$, pour tout élément unipotent $x \in \mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'}(k_F)$. De f' se déduit une fonction $f'_{\mathcal{F}'}$ sur $G_\epsilon(F)$. Pour $y \in K^0_{\mathcal{F}}\cap G_\epsilon(F)$, la réduction $\bar y$ de y dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(k_F)$ appartient à $(\mathbf{G}_{\mathcal{F}})^\epsilon(k_F)$. Mais, si y est topologiquement unipotent, on peut remplacer dans cette relation le groupe $(\mathbf{G}_{\mathcal{F}})^\epsilon$ par sa composante neutre $\mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'}$. De plus cette réduction $\bar y$ est unipotente. On voit alors que, pour $g \in G_\epsilon(F)$, on a l'égalité

(5) $f_{\mathcal{F}}(\epsilon exp(g^{-1}Xg)) = f'_{\mathcal{F}'}(exp(g^{-1}Xg))$.

Montrons que

(6) si $dim(A_{G_\epsilon}) > dim(A_G)$ ou si $\mathcal{F}'$ n'est pas réduit à un point, $f' = 0$.

Notons $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$ le plus grand sous-tore central et déployé de $\mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'}$. Notons $\mathbf{M}'$ son commutant dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$, qui est un Levi de ce groupe. Fixons un élément $x_* \in X_*(\mathbf{A}_{\mathcal{F}'})$ en position générale, notons $\mathbf{P}'$ le sous-groupe de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathbf{M}'$ et par les groupes radiciels relatifs à l'action de $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$ associés aux racines α telles que $<\alpha, x_*>> 0$. C'est un élément de $\mathcal{P}(\mathbf{M}')$. Le tore $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$ est contenu dans l'ensemble des points fixes de l'action de $\bar\epsilon$ sur $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. Il en résulte que cette action conserve $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{P}'$. Alors $\mathbf{P}'^\nu = \epsilon\mathbf{P}'$ est un espace parabolique de $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$ d'espace de Levi $\mathbf{M}'^\nu = \epsilon\mathbf{M}'$. Sur la clôture algébrique $\bar k_F$, les valeurs propres de l'action de $\bar\epsilon$ dans $\mathfrak{u}_{\mathbf{P}'}$ sont des racines de l'unité, puisque ϵ est p'-compact mod $Z(G)$. L'espace des points fixes de l'action de $\bar\epsilon$ dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ est $\mathfrak{g}_{\epsilon,\mathcal{F}'}$, qui est inclus dans $\mathfrak{m}'$ par définition de $\mathbf{M}'$. Donc les valeurs propres de l'action de $\bar\epsilon$ dans $\mathfrak{u}_{\mathbf{P}'}$ sont toutes différentes de 1. Il en résulte aisément que, pour tout élément unipotent $\bar n \in \mathbf{M}'(k_F)$, l'action $1 - ad(\bar\epsilon\bar n)$ dans $\mathfrak{u}_{\mathbf{P}'}(k_F)$ est un isomorphisme. Pour un tel élément $\bar n$, il s'en déduit l'égalité

$$\sum_{\bar u\in\mathbf{U}_{\mathbf{P}'}(k_F)} f(\bar\epsilon\bar n\bar u) = \sum_{\bar u\in\mathbf{U}_{\mathbf{P}'}(k_F)} f(\bar u^{-1}\bar\epsilon\bar n\bar u).$$

Puisque f est invariante par conjugaison, le membre de droite n'est autre que $|\mathbf{U}_{\mathbf{P}'}(k_F)|f(\bar\epsilon\bar n)$. Supposons que $\mathbf{P}'^\nu$ soit un espace parabolique propre de $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$. Alors le membre de gauche est nul puisque f est cuspidale et invariante par conjugaison. Dans ce cas $f(\bar\epsilon\bar n) = 0$. A fortiori, cela est vrai pour tout élément unipotent $\bar n \in \mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'}(k_F)$, auquel cas $f(\bar\epsilon\bar n) = f'(\bar n)$. D'où $f' = 0$. Pour achever la preuve de (6), il reste à prouver que, sous les hypothèses de cette assertion, l'espace parabolique $\mathbf{P}'^{\nu}$ est propre, ou encore que $\mathbf{M}' \neq \mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. On démontre la contraposée de cette assertion. Supposons donc $\mathbf{M}' = \mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. Notons $\mathbf{A}_{\mathcal{F}}$ le plus grand sous-tore central déployé dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ et notons $\mathbf{A}_{\mathcal{F}}^{\nu}$ le plus grand sous-tore contenu dans l'ensemble des points fixes de l'action de $\bar{\epsilon}$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{F}}$. L'hypothèse $\mathbf{M}' = \mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ signifie que $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'} \subset \mathbf{A}_{\mathcal{F}}$. Puisque $\bar{\epsilon}$ agit trivialement sur $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$, cela entraîne $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'} \subset \mathbf{A}_{\mathcal{F}}^{\nu}$ d'où l'égalité $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'} = \mathbf{A}_{\mathcal{F}}^{\nu}$ car l'inclusion opposée est immédiate. Puisque $(\mathcal{F}, \nu) \in Fac_{max}(G)$, on a $dim(\mathbf{A}_{\mathcal{F}}^{\nu}) = dim(A_G)$. D'où $dim(\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}) = dim(A_G)$. Or on a évidemment $dim(\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}) \geq dim(A_{G_\epsilon}) \geq dim(A_G)$. Ces trois dimensions sont donc égales. L'égalité $dim(\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}) = dim(A_{G_\epsilon})$ équivaut à ce que $\mathcal{F}'$ soit réduit à un point. L'égalité des trois dimensions précédentes est donc le contraire de l'hypothèse de (6), ce qui achève la démonstration de cette assertion.

Supposons maintenant que $dim(A_{G_\epsilon}) = dim(A_G)$ et que $\mathcal{F}'$ soit réduit à un point, c'est-à-dire $\mathcal{F}' \in Fac_{max}(G_\epsilon)$. Montrons que

(7) f' est cuspidale.

Fixons un sous-groupe parabolique propre $\mathbf{P}'_\epsilon$ de $\mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'}$ de composante de Levi $\mathbf{M}'_\epsilon$. Notons $\mathbf{A}'$ le plus grand sous-tore central déployé de $\mathbf{M}'_\epsilon$ et $\mathbf{M}'$ le commutant de $\mathbf{A}'$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. Fixons un élément $x_* \in X_*(\mathbf{A}')$ tel que $<\alpha, x_*>> 0$ pour toute racine α de $\mathbf{A}'$ dans $\mathfrak{u}_{\mathbf{P}'_\epsilon}$. On définit un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}'$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ par la condition : $\mathfrak{u}_{\mathbf{P}'}$ est la somme des espaces radiciels associés aux racines α de $\mathbf{A}'$ dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ telles que $<\alpha, x_*>> 0$. En supposant x_* en position générale, $\mathbf{P}'$ a pour composante de Levi $\mathbf{M}'$ et on a $\mathbf{P}' \cap \mathbf{G}_{\epsilon,\mathcal{F}'} = \mathbf{P}'_\epsilon$. De plus $\mathbf{P}'$ est propre puisque $\mathbf{P}'_\epsilon$ l'est. L'argument est maintenant similaire à celui de la preuve de (6). L'ensemble $\mathbf{P}'^{\nu} = \bar{\epsilon}\mathbf{P}'$ est un espace parabolique de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}$ d'espace de Levi $\mathbf{M}'^{\nu} = \bar{\epsilon}\mathbf{M}'$. Pour un élément unipotent $\bar{n} \in \mathbf{M}'_\epsilon(k_F)$, on a les égalités

$$\sum_{\bar{u} \in \mathbf{U}_{\mathbf{P}'_\epsilon}(k_F)} f'(\bar{n}\bar{u}) = \sum_{\bar{u} \in \mathbf{U}_{\mathbf{P}'_\epsilon}(k_F)} f(\bar{\epsilon}\bar{n}\bar{u})$$

$$= |\mathbf{U}_{\mathbf{P}'}(k_F)|^{-1} \sum_{\bar{x} \in \mathbf{U}_{\mathbf{P}'}(k_F)} \sum_{\bar{u} \in \mathbf{U}_{\mathbf{P}'_\epsilon}(k_F)} f(\bar{x}\bar{\epsilon}\bar{n}\bar{u}\bar{x}^{-1}) = |\mathbf{U}_{\mathbf{P}'}(k_F)|^{-1}|\mathbf{U}_{\mathbf{P}'_\epsilon}(k_F| \sum_{\bar{x} \in \mathbf{U}_{\mathbf{P}'}(k_F)} f(\bar{\epsilon}\bar{n}\bar{x})$$

et cette dernière expression est nulle car f est cuspidale. La nullité de la première expression signifie que f' l'est. D'où (7).

Rétablissons le γ que l'on avait supposé égal à 1 pour simplifier la notation. On note $\mathcal{F}'_\gamma$ la facette de $Imm(G_{\epsilon,AD})$ que l'on avait notée $\mathcal{F}'$ et $({}^\gamma f)'$ l'analogue de f' pour la fonction ${}^\gamma f$. On note $\boldsymbol{\gamma}_{max}$ le sous-ensemble des $\gamma \in \boldsymbol{\gamma}$ tels que $\mathcal{F}'_\gamma$ soit réduit à un point. Si $dim(A_{G_\epsilon}) > dim(A_G)$, l'assertion (6) et la formule (4) impliquent que $\theta(\epsilon exp(X)) = 0$ et on a terminé. Supposons désormais $dim(A_{G_\epsilon}) = dim(A_G)$. Alors les assertions (5) et (6) entraînent que la formule (4) se transforme en

$$(8) \qquad \theta(\epsilon exp(X)) = (-1)^{a_{M_\epsilon} - a_G} m(A_{M_\epsilon}) m(A_G)^{-1} \sum_{\gamma \in \boldsymbol{\gamma}_{max}} m_\gamma$$

$$\int_{A_{M_\epsilon}(F) \backslash G_\epsilon(F)} ({}^\gamma f)'_{\mathcal{F}'_\gamma}(exp(g^{-1}Xg)) v_{M,\gamma}(g)\, dg.$$

Fixons $\gamma \in \boldsymbol{\gamma}_{max}$ et calculons $v_{M,\gamma}(g)$ pour $g \in G_\epsilon(F)$. Le poids v_M est calculé grâce au choix d'un sous-groupe compact spécial de $G(F)$. Fixons aussi un tel sous-groupe compact K_ϵ du groupe $G_\epsilon(F)$, qui permet de définir un poids v_{M_ϵ}. Une formule d'Arthur, que l'on a reprise en [18] lemme 3.3, dit que, pour $g \in G_\epsilon(F)$, $v_{M,\gamma}(g) - v_{M_\epsilon}(g)$ est une somme finie de termes $v'_{Q_\epsilon}(g)$, où Q_ϵ est un sous-groupe parabolique propre de G_ϵ

contenant M_ϵ et v'_{Q_ϵ} est une fonction localement intégrable sur $G_\epsilon(F)$ invariante à gauche par $M_\epsilon(F)$ et par $U_{Q_\epsilon}(F)$. Pour de telles données, notons L_ϵ la composante de Levi de Q_ϵ contenant M_ϵ. En utilisant la décomposition d'Iwasawa, on calcule

$$\int_{A_{M_\epsilon}(F)\backslash G_\epsilon(F)} ({}^\gamma f)'_{\mathcal{F}'_\gamma}(exp(g^{-1}Xg))v'_{Q_\epsilon}(g)\,dg =$$

$$c\int_{K_\epsilon}\int_{A_{M_\epsilon}(F)\backslash L_\epsilon(F)}\int_{U_{Q_\epsilon}(F)} ({}^\gamma f)'_{\mathcal{F}'_\gamma}(k^{-1}u^{-1}l^{-1}exp(X)luk)v'_{Q_\epsilon}(lk)\,du\,dl\,dk,$$

où $c>0$ ne dépend que des mesures de Haar. Puisque X est régulier, l'intégrale intérieure en u se transforme en

$$c(X)\int_{U_{Q_\epsilon}(F)} ({}^\gamma f)'_{\mathcal{F}'_\gamma}(k^{-1}l^{-1}exp(X)luk)\,du,$$

où $c(X)>0$ est un certain déterminant. Or cette intégrale est nulle car $({}^\gamma f)'_{\mathcal{F}'_\gamma}$ est très cuspidale. Les fonctions v'_{Q_ϵ} ne contribuent donc pas à la formule (8) et on peut récrire cette formule

$$\theta(\epsilon exp(X)) = (-1)^{a_{M_\epsilon}-a_G}m(A_{M_\epsilon})m(A_G)^{-1}\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}_{max}} m_\gamma$$

$$\int_{A_{M_\epsilon}(F)\backslash G_\epsilon(F)} ({}^\gamma f)'_{\mathcal{F}'_\gamma}(exp(g^{-1}Xg))v_{M_\epsilon}(g)\,dg.$$

En comparant avec 5.2 (7), on obtient

$$\theta(\epsilon exp(X)) = (-1)^{a_{G_\epsilon}-a_G}m(A_{G_\epsilon})m(A_G)^{-1}\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}_{max}} m_\gamma\theta_\gamma(exp(X)),$$

où on a noté θ_γ la fonction associée au quasi-caractère $D^{G_\epsilon}_{({}^\gamma f)'}$. Pour tout $\gamma\in\boldsymbol{\gamma}_{max}$, notons φ_γ la fonction sur $\mathfrak{g}_{\epsilon,\mathcal{F}'_\gamma}(k_F)$, à support unipotent, telle que $\varphi_\gamma(Y) = ({}^\gamma f)'(exp(Y))$ pour tout élément unipotent $Y\in\mathfrak{g}_{\epsilon,\mathcal{F}'_\gamma}(k_F)$. Il est clair que la fonction $Y\mapsto\theta_\gamma(exp(Y))$, définie sur $\mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$, n'est autre que la fonction associée à la distribution $D^{G_\epsilon}_{\varphi_\gamma}$ sur $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$. Notons θ_{φ_γ} cette fonction. On obtient la formule finale

$$(9)\qquad \theta(\epsilon exp(X)) = (-1)^{a_{G_\epsilon}-a_G}m(A_{G_\epsilon})m(A_G)^{-1}\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}_{max}} m_\gamma\theta_{\varphi_\gamma}(X).$$

On applique le (ii) de la proposition 5.4. Il entraîne que chaque fonction θ_{φ_γ} est combinaison linéaire de fonctions $Y\mapsto\hat{j}(\mathcal{O},Y)$ où $\mathcal{O}$ parcourt les orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$. Il en est donc de même de la fonction $X\mapsto\theta(\epsilon exp(X))$. Cela signifie que D^G_f est un quasi-caractère de niveau 0 sur $G(F)$. $\square$

5.7 Restriction d'un quasi-caractère sur $G(F)$ de niveau 0 aux éléments elliptiques

Soit D un quasi-caractère sur $G(F)$, notons θ_D sa fonction associée. Disons que D est de niveau 0 sur les elliptiques si et seulement si θ_D vérifie la condition suivante :

(1) pour tout élément $\epsilon \in G(F)$ qui est p'-compact mod $Z(G)$ et pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$ tel que $\epsilon exp(X) \in G_{ell}(F)$, la fonction $\lambda \mapsto \theta_D(\epsilon exp(\lambda^2 X))$ sur $\mathfrak{o}_F$ appartient à E.

Remarques (2) Pour $\epsilon \in G(F)_{p'}$ et $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$, $\epsilon exp(X)$ ne peut être elliptique que si $A_{G_\epsilon} = A_G$. A fortiori, ϵ est p'-compact.

(3) La même preuve qu'au (ii) du lemme 5.2 montre que (1) équivaut à la condition :

pour tout élément $\epsilon \in G(F)$ qui est p'-compact mod $Z(G)$ et pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)$, il existe $c_{D,\mathcal{O}} \in \mathbb{C}$ de sorte que, pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$ tel que $\epsilon exp(X) \in G_{ell}(F)$, on ait l'égalité

$$\theta_D(\epsilon exp(X)) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)} c_{D,\mathcal{O}} \hat{j}(\mathcal{O}, X).$$

(4) Compte tenu de la remarque précédente, la même preuve qu'au (iii) du lemme 5.2 montre que, si B est un sous-ensemble de $G(F)_{p'}$ tel que $G(F) = \cup_{\epsilon \in B} C_G(\epsilon)$, alors D est un quasi-caractère de niveau 0 sur les elliptiques si et seulement si la condition (1) est vérifiée pour tout $\epsilon \in B$.

Proposition. *Soit D un quasi-caractère sur $G(F)$ de niveau 0 sur les elliptiques. Alors il existe $\mathbf{f} \in \mathcal{D}_{cusp}(G)$ tel que D coïncide avec $D^G_{\mathbf{f}}$ sur $G_{ell}(F)$.*

Preuve. Comme on l'a vu dans 3.5, l'espace $\mathcal{D}_{cusp}(G)$ se décompose en produit d'espaces indexés par $\mathcal{N}$. Il en est de même de l'espace des quasi-caractères de niveau 0 sur les elliptiques. On peut donc fixer $\nu \in \mathcal{N}$ et supposer que D est à support dans $w_G^{-1}(\nu)$. L'intersection $w_G^{-1}(\nu) \cap G_{ell}(F)$ est contenue dans une réunion finie d'ensembles $C_G(\epsilon)$, où ϵ est p'-compact mod $Z(G)$. Ces ensembles sont disjoints ou confondus et ils sont ouverts et fermés. On peut fixer un élément p'-compact mod $Z(G)$, supposer que D est à support dans $C_G(\epsilon)$ et prouver :

(5) il existe $\mathbf{f} \in C_{cusp}(G)$ tel que $D^G_{\mathbf{f}}$ soit à support dans $C_G(\epsilon)$ et coïncide avec D sur $C_G(\epsilon) \cap G_{ell}(F)$.

Comme on l'a dit dans la remarque (2), on peut supposer $A_{G_\epsilon} = A_G$, sinon la solution de (5) est triviale.

Ecrivons comme dans la remarque (3)

$$\theta_D(\epsilon exp(X)) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_\epsilon)} c_{D,\mathcal{O}} \hat{j}(\mathcal{O}, X)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$ tel que $\epsilon exp(X) \in G_{ell}(F)$. Notons τ la fonction sur $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$, à support topologiquement nilpotent, qui est égale sur cet ensemble au membre de droite ci-dessus. En la moyennant sur le groupe $Z_G(\epsilon)(F)/G_\epsilon(F)$, on peut la supposer invariante par $Z_G(\epsilon)(F)$. La fonction τ est la fonction associée à un quasi-caractère de niveau 0 sur $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$. Celui-ci est de la forme $D^{G_\epsilon}_{\boldsymbol{\varphi}}$ pour un élément $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_\epsilon)$ d'après le (ii) de la proposition 5.4. Si on se restreint aux éléments elliptiques, les distributions induites disparaissent. Donc il existe $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}_\epsilon)$ tel que τ coïncide avec $\theta_{D^{G_\epsilon}_{\boldsymbol{\varphi}}}$ sur $\mathfrak{g}_{\epsilon,ell}(F)$. Fixons un tel $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_b)_{b \in B}$, où B est un sous-ensemble fini de $Fac_{max}(G_\epsilon)$. Puisque $A_{G_\epsilon} = A_G$, $Imm(G_{\epsilon,AD})$ s'identifie à $Imm(G_{AD})^\epsilon$, cf. 4.9. Pour tout $b \in B$, il y a donc une unique facette $\mathcal{F}_b \in Imm(G_{AD})$ telle que $\mathcal{F}_b \cap Imm(G_{AD})^\epsilon = b$. On a $\epsilon \in K^\nu_{\mathcal{F}_b}$ et $\mathcal{F}^\nu_b$ est réduit à un point, autrement dit $(\mathcal{F}_b, \nu) \in Fac^*_{max}(G)$. De la fonction φ_b, on déduit une fonction f_b sur $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}_b}(k_F)$ de la façon suivante. Par l'exponentielle, on identifie φ_b à une fonction $f_{b,1}$ sur $\mathbf{G}_{\epsilon,b}(k_F)$ à support nilpotent, telle que $f_{b,1}(exp(X)) = \varphi_b(X)$ pour tout élément nilpotent $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,b}(k_F)$. En notant $\bar{\epsilon}$ la réduction de ϵ dans $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}_b}(k_F)$, on définit une fonction $f_{b,2}$ sur $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}_b}(k_F)$, à support dans $\bar{\epsilon}\mathbf{G}_{\epsilon,b}(k_F)$, telle que $f_{b,2}(\bar{\epsilon}x) = f_{b,1}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{G}_{\epsilon,b}(k_F)$. Enfin, on pose

$$f_b(x) = |\mathbf{G}_{\mathcal{F}_b}(k_F)|^{-1} \sum_{y \in \mathbf{G}_{\mathcal{F}_b}(k_F)} f_{b,2}(y^{-1}xy)$$

pour tout $x \in \mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}_b}(k_F)$. Montrons que

(6) $f_b \in C_{cusp}(\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}_b})$.

On doit prouver que, pour tout espace parabolique propre $\mathbf{P}^{\nu}$ de $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}_b}$ et pour tout $x \in \mathbf{P}^{\nu}(k_F)$, on a

$$\sum_{u \in \mathbf{U}_{\mathbf{P}}(k_F)} f_b(xu) = 0.$$

Il suffit de prouver que, pour tout espace parabolique propre $\mathbf{P}^{\nu}$ de $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}_b}$ et pour tout $x \in \mathbf{P}^{\nu}(k_F)$, on a

$$(7) \qquad \sum_{u \in \mathbf{U}_{\mathbf{P}}(k_F)} f_{b,2}(xu) = 0.$$

En effet, la première assertion pour $\mathbf{P}^{\nu}$ résulte de la seconde appliquée à chaque espace $y^{-1}\mathbf{P}^{\nu}y$ pour $y \in \mathbf{G}_{\mathcal{F}_b}(k_F)$. Fixons donc $\mathbf{P}^{\nu}$. Si $\mathbf{P}^{\nu}(k_F)$ ne coupe pas le support de $f_{b,2}$, l'assertion (7) est claire. Supposons que $\mathbf{P}^{\nu}(k_F)$ coupe ce support. Il existe donc un élément nilpotent $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,b}(k_F)$ tel que $\bar{\epsilon}exp(X) \in \mathbf{P}^{\nu}(k_F)$. Puisque $\bar{\epsilon}$ et $exp(X)$ commutent, puisque $ad(\bar{\epsilon})$ est d'ordre premier à p tandis que $ad(exp(X))$ est d'ordre une puissance de p, $ad(\bar{\epsilon})$ appartient au groupe engendré par $ad(\bar{\epsilon}exp(X))$. Ce dernier opérateur conserve $\mathbf{P}$, donc $ad(\bar{\epsilon})$ conserve lui-aussi $\mathbf{P}$, c'est-à-dire $\bar{\epsilon} \in \mathbf{P}^{\nu}(k_F)$. D'après le lemme 6.6, on peut fixer une composante de Levi $\mathbf{M}^{\nu}$ de $\mathbf{P}^{\nu}$ qui contient $\bar{\epsilon}$. Notons $\mathbf{M}_{\epsilon}$ et $\mathbf{P}_{\epsilon}$ les composantes neutres des groupes des points fixes de l'opérateur $ad(\bar{\epsilon})$ dans $\mathbf{M}$ et $\mathbf{P}$. Le groupe $\mathbf{P}_{\epsilon}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}_{\epsilon,b}$ et $\mathbf{M}_{\epsilon}$ en est une composante de Levi. Montrons que

(8) $\mathbf{P}_{\epsilon} \neq \mathbf{G}_{\epsilon,b}$.

Notons $\mathbf{A}_{\mathbf{M}}$, resp. $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_b}$ le plus grand sous-tore central déployé de $\mathbf{M}$, resp. $\mathbf{G}_{\mathbf{F}_b}$. Notons $\mathbf{A}_{\mathbf{M},\epsilon}$, resp. $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_b,\epsilon}$, la composante neutre du sous-groupe des points fixes de l'opérateur $ad(\bar{\epsilon})$ dans $\mathbf{A}_{\mathbf{M}}$, resp. $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_b}$. Puisque $\mathbf{P}^{\nu}$ est propre, $\mathbf{A}_{\mathbf{M},\epsilon}$ contient strictement $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_b,\epsilon}$. Donc $dim(\mathbf{A}_{\mathbf{M},\epsilon}) > dim(\mathbf{A}_{\mathcal{F}_b,\epsilon}) \geq dim(A_G)$. Le tore $\mathbf{A}_{\mathbf{M},\epsilon}$ est contenu dans le plus grand sous-tore central déployé $\mathbf{A}_{\mathbf{M}_{\epsilon}}$ de $\mathbf{M}_{\epsilon}$. Donc $dim(\mathbf{A}_{\mathbf{M}_{\epsilon}}) > dim(A_G)$. On a supposé $dim(A_G) = dim(A_{G_{\epsilon}})$ et on a $dim(A_{G_{\epsilon}}) = dim(\mathbf{A}_{\mathbf{G}_{\epsilon,b}})$ puisque b est un sommet de $Imm(G_{\epsilon,AD})$. Donc $dim(\mathbf{A}_{\mathbf{M}_{\epsilon}}) > dim(\mathbf{A}_{\mathbf{G}_{\epsilon,b}})$, ce qui signifie que $\mathbf{M}_{\epsilon}$ est un Levi propre de $\mathbf{G}_{\epsilon,b}$. Cela démontre (8).

On peut dans (7) se restreindre au cas où $x \in \mathbf{M}^{\nu}(k_F)$, c'est-à-dire $x = \bar{\epsilon}m$ avec $m \in \mathbf{M}(k_F)$. Montrons que

(9) si $m \notin exp(\mathfrak{m}_{\epsilon,nil})(k_F)$, l'ensemble des $u \in \mathbf{U}_{\mathbf{P}}(k_F)$ tels que xu appartient au support de $f_{b,2}$ est vide; si $m = exp(Y)$ avec $Y \in \mathfrak{m}_{\epsilon,nil}(k_F)$, alors cet ensemble est contenu dans celui des $exp(N)$ pour $N \in \mathfrak{u}_{\mathbf{P}_{\epsilon}}(k_F)$.

Dire que xu appartient au support de $f_{b,2}$ implique que $xu = \epsilon exp(X)$ avec $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,b,nil}(k_F)$, ou encore $mu = exp(X)$. Si on applique $ad(\bar{\epsilon})$ à cette égalité, puisque X commute à $\bar{\epsilon}$ et que $ad(\bar{\epsilon})$ conserve $\mathbf{M}$ et $\mathbf{U}_{\mathbf{P}}$, on obtient $mu = ad(\bar{\epsilon})(m)ad(\bar{\epsilon})(u)$, ce qui entraîne $m = ad(\bar{\epsilon})(m)$ et $u = ad(\bar{\epsilon})(u)$. Cette dernière relation implique que $u = exp(N)$

pour un $N \in \mathfrak{u}_{\mathbf{P}_\epsilon}(k_F)$. La première, jointe au fait que m est forcément unipotent (puisque $exp(X)$ l'est), entraîne que $m = exp(Y)$ pour un $Y \in \mathfrak{m}_{\epsilon,nil}(k_F)$. Cela démontre (9).

On peut donc supposer $m = exp(Y)$ avec $Y \in \mathfrak{m}_{\epsilon,nil}(k_F)$. Il résulte de (9) et de la définition de $f_{b,2}$ que

$$\sum_{u\in \mathbf{U}_{\mathbf{P}}(k_F)} f_{b,2}(xu) = \sum_{N\in \mathfrak{u}_{\mathbf{P}_\epsilon}(k_F)} \varphi_b(Y+N).$$

Puisque $\mathbf{P}_\epsilon$ est un sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{G}_{\epsilon,b}$, ceci est nul puisque φ_b est cuspidale. Cela achève la preuve de (6).

On définit la distribution $D^G_{f_b}$. Notons θ_b sa fonction associée. Il est clair que son support est contenu dans la réunion des conjugués du support de f_b. D'après la construction de cette fonction et le lemme 4.7, ce support est contenu dans l'ensemble des $k^{-1}C(\epsilon)k$ pour $k \in K^0_{\mathcal{F}_b}$. Donc le support de θ_b est contenu dans $C_G(\epsilon)$ et il nous suffit de calculer $\theta_b(\epsilon exp(X))$ pour $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$. C'est le calcul que l'on a fait dans le paragraphe précédent. L'ensemble Γ_ϵ contient $Z_G(\epsilon)(F)K^0_{\mathcal{F}_b}$. Montrons que

(10) on peut remplacer l'ensemble Γ_ϵ par $Z_G(\epsilon)(F)K^0_{\mathcal{F}_b}$.

Il suffit de montrer que, si $\gamma \in \Gamma_\epsilon - Z_G(\epsilon)(F)K^0_{\mathcal{F}_b}$ et si $g \in G_\epsilon(F)\gamma K^0_{\mathcal{F}_b}$, $g^{-1}\epsilon exp(X)g$ n'appartient pas au support de f_b. Supposons que $g^{-1}\epsilon exp(X)g$ appartienne à ce support. Comme on l'a dit ci-dessus, il existe donc $k \in K^0_{\mathcal{F}_b}$ et $Y \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$ tels que $g^{-1}\epsilon exp(X)g = k^{-1}\epsilon exp(Y)k$. En fixant un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $\epsilon^c \in Z(G)(F)$, et en élevant l'égalité précédente à la puissance c, on obtient $exp(cg^{-1}Xg) = exp(ck^{-1}Yk)$, d'où $exp(g^{-1}Xg) = exp(k^{-1}Yk)$, d'où aussi $g^{-1}\epsilon g = k^{-1}\epsilon k$. Mais alors $gk^{-1} \in Z_G(\epsilon)(F)$ et $\gamma \in Z_G(\epsilon)(F)K^0_{\mathcal{F}_b}$ contrairement à l'hypothèse. Cela démontre (10).

On peut donc supposer $\boldsymbol{\gamma} \subset Z_G(\epsilon)(F)$. On modifie légèrement les calculs du paragraphe précédent en remarquant que la contribution d'un $\gamma \in Z_G(\epsilon)(F)$ à $\theta_b(\epsilon exp(X))$ est égale à celle de $\gamma = 1$, où l'on remplace X par $\gamma^{-1}X\gamma$. L'assertion (9) de 5.6 devient

$$\theta_b(\epsilon exp(X)) = c_b|\boldsymbol{\gamma}|^{-1}\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}}\theta_{\varphi_b}(\gamma^{-1}X\gamma),$$

où c_b est une certaine constante non nulle. On pose $\mathbf{f} = (c_b^{-1}f_b)_{b\in B}$. C'est un élément de $\mathcal{D}_{cusp}(G)$. D'après les calculs ci-dessus, $D^G_{\mathbf{f}}$ est à support dans $C_G(\epsilon)$ et, en notant θ' sa fonction associée, on a

$$\begin{aligned}\theta'(\epsilon exp(X)) &= |\boldsymbol{\gamma}|^{-1}\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}}\sum_{b\in B}\theta_{\varphi_b}(\gamma^{-1}X\gamma)\\ &= |\boldsymbol{\gamma}|^{-1}\sum_{\gamma\in\boldsymbol{\gamma}}\tau(\gamma^{-1}X\gamma)\\ &= \tau(X),\end{aligned}$$

puisque la fonction τ est invariante par $Z_G(\epsilon)(F)$. Donc $\theta'(\epsilon exp(X)) = \theta_D(\epsilon exp(X))$ si $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$ et $\epsilon exp(X) \in G_{ell}(F)$. Cela prouve (5) et la proposition. $\square$

5.8 Filtration sur le groupe et quasi-caractères

Notons $Qc(G)$ l'espace des quasi-caractères sur $G(F)$. Notons $Qc^n(G)$ la somme des $Ind^G_M(Qc(M))$ sur les Levi M tels que $dim(A_M) \geq n$.

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité $Qc^n(G) = Qc(G) \cap Ann^n I(G)^*$.*

Preuve. L'inclusion $Qc^n(G) \subset Qc(G) \cap Ann^n I(G)^*$ est évidente. Soit $D \in Qc(G) \cap Ann^n I(G)^*$, notons θ sa fonction associée. L'hypothèse que D appartient à $Ann^n I(G)^*$ signifie que, pour tout Levi M tel que $dim(A_M) < n$ et tout $m \in M_{ell}(F) \cap G_{reg}(F)$, on a $\theta(m) = 0$. Pour $M \in \underline{\mathcal{L}}^n$, notons θ_M la fonction définie presque partout sur $M(F)$ par $\theta_M(x) = D^G(x)^{1/2} D^M(x)^{-1/2} \theta(x)$ pour $x \in M(F)$. Notons D_M la distribution qui s'en déduit. Par l'isomorphisme (1) de 3.2, D s'envoie sur la somme des restrictions des D_M à $I_{cusp}(M)^{W^G(M)}$. Montrons que

(2) il existe un quasi-caractère $D'_M \in Qc(M)$ tel que D_M et D'_M aient même restriction à $I_{cusp}(M)$.

Commençons par fixer un élément semi-simple $x \in M(F)$ et prouvons que

(3) il existe un voisinage $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{m}_x(F)$ et, pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{m}_x)$, il existe un nombre complexe $c_{D,\mathcal{O}}$ de sorte que, pour presque tout $Y \in \mathfrak{V}$ tel que $xexp(Y)$ soit elliptique dans $M(F)$, on ait l'égalité

$$\theta_M(xexp(Y)) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{m}_x)} c_{D,\mathcal{O}} \hat{j}(\mathcal{O}, Y).$$

Si $dim(A_{M_x}) > dim(A_M)$, un tel élément $xexp(Y)$ n'est jamais elliptique dans $M(F)$ et l'assertion est triviale. Supposons $dim(A_{M_x}) = dim(A_M) = n$. Puisque D est un quasi-caractère, on peut en tout cas fixer un voisinage $\mathfrak{V}'$ de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$ et, pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_x)$, un nombre complexe $c'_{D,\mathcal{O}}$ de sorte que, pour presque tout $Y \in \mathfrak{V}'$, on ait l'égalité

$$(4) \qquad \theta(xexp(Y)) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}_x)} c'_{D,\mathcal{O}} \hat{j}(\mathcal{O}, Y).$$

Notons τ la fonction du membre de droite, qui est définie presque partout sur $\mathfrak{g}_x(F)$. Soit L^x un Levi de G_x tel que $dim(A_{L^x}) < n$ et soit $Y \in \mathfrak{l}^x_{ell}(F) \cap \mathfrak{V}'$. On note L le commutant de A_{L^x} dans G. Alors $x \in L(F)$, $L_x = L^x$, $A_L = A_{L^x}$ et $xexp(Y)$ est elliptique dans $L(F)$. Puisque $dim(A_L) < n$, $\theta(xexp(Y)) = 0$. Donc $\tau(Y) = 0$. Puisque τ est combinaison linéaire de fonctions homogènes pour l'action de $F^{\times,2}$ par homothéties, on peut supprimer ci-dessus la restriction : $Y \in \mathfrak{V}'$. La restriction de τ à $\mathfrak{g}_{x,tn}(F)$ est donc la fonction associée à un élément de $Qc_0(\mathfrak{g}_x) \cap Ann^n I(\mathfrak{g}_x)^*$, avec les notations de 5.5. D'après le lemme de ce paragraphe, on peut écrire cet élément comme somme sur les $L^x \in \underline{\mathcal{L}}^{G_x,n}$ de distributions $Ind_{L^x}^{G_x}(d_{L^x})$, où $d_{L^x} \in Qc(\mathfrak{l}^x)$. On peut supposer que $M_x \in \underline{\mathcal{L}}^{G_x,n}$ et que d_{M_x} est invariante par $W^{G_x}(M_x)$. Notons τ_x la fonction associée à d_{M_x}. En utilisant 5.3 (3), on vérifie que l'on a l'égalité

$$\tau(Y) = cD^{G_Y}(Y)^{-1/2} D^{M_Y}(Y)^{1/2} \tau_x(Y)$$

pour presque tout $Y \in \mathfrak{m}_{x,ell}(F) \cap \mathfrak{m}_{x,tn}(F)$, où $c = |W^{G_x}(M_x)|$. D'autre part, si $\mathfrak{V}'$ est assez petit, il existe $c' > 0$ tel que $D^G(xexp(Y))^{1/2} D^M(xexp(Y))^{-1/2} = c' D^{G_Y}(Y)^{1/2} D^{M_Y}(Y)^{-1/2}$ pour tout $Y \in \mathfrak{V}' \cap \mathfrak{m}_x(F)$ tel que $xexp(Y) \in G_{reg}(F)$. L'égalité précédente devient

$$\theta_M(xexp(Y)) = cc'\tau_x(Y)$$

pour presque tout $Y \in \mathfrak{V}' \cap \mathfrak{m}_{x,ell}(F) \cap \mathfrak{m}_{x,tn}(F)$. Cette fonction est de la forme du membre de droite de l'égalité de l'assertion (3). En prenant $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' \cap \mathfrak{m}_x(F)$, cela résout cette assertion (3).

On peut supposer que le membre de droite de l'égalité de cette assertion est invariant par l'action du groupe $Norm_{G_x}(M_x)(F)$. Posons $V_x = \{m^{-1}xexp(Y)m; m \in M(F), Y \in$

$\mathfrak{V}\}$. Quitte à restreindre $\mathfrak{V}$, cet ensemble est ouvert et fermé dans $M(F)$. On définit un quasi-caractère d_x de $M(F)$, à support dans V_x, dont la fonction associée vérifie

$$\theta_{d_x}(m^{-1}xexp(Y)m) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{m}_x)} c_{D,\mathcal{O}}\hat{j}(\mathcal{O}, Y)$$

pour tout $m \in M(F)$ et $Y \in \mathfrak{V}$. Cette fonction coïncide avec θ_M sur $V_x \cap M_{ell}(F)$. On construit ces ensembles V_x et ces quasi-caractères d_x pour tout élément semi-simple $x \in M(F)$. La réunion des V_x est $M(F)$ tout entier, on peut en extraire un recouvrement localement fini $M(F) = \cup_{j\in J}V_{x_j}$. Il existe une famille $(\alpha_j)_{j\in J}$, où α_j est une fonction localement constante sur $M(F)$, invariante par conjugaison et à support dans V_{x_j}, de sorte que $\sum_{j\in J}\alpha_j(m) = 1$ pour tout $m \in M(F)$. En utilisant la remarque (5) de 5.2, la distribution

$$D'_M = \sum_{j\in J}\alpha_j d_{x_j}$$

est bien définie puisque le recouvrement est localement fini, c'est un quasi-caractère et elle coïncide avec D_M sur les éléments elliptiques de $M(F)$, donc elle a même restriction que D_M à $I_{cusp}(M)$. Cela démontre (2).

La distribution

$$\sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n}|W^G(M)|^{-1}Ind_M^G(D'_M)$$

appartient à $Qc^n(G)$ et, d'après 3.2, son image dans $Gr^nI(G)^*$ est égale à celle de D. Cela démontre l'inclusion

$$Qc(G) \cap Ann^nI(G)^* \subset (Qc(G) \cap Ann^{n+1}I(G)^*) + Qc^n(G).$$

L'inclusion $Qc(G)\cap Ann^nI(G)^* \subset Qc^n(G)$ s'en déduit par récurrence descendante sur n. Cela démontre la proposition.$\square$

5.9 Un deuxième théorème

Notons $Qc_0(G)$ l'espace des quasi-caractères de niveau 0 sur $G(F)$.

Théorème. *L'application $D^G : \mathcal{D}(G) \to I(G)^*$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(G)$ sur $Qc_0(G)$.*

Preuve. Compte tenu du théorème 5.6, il suffit de prouver que $Qc_0(G)$ est contenu dans l'image de l'application D^G. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Prouvons que

(1) $Qc_0(G) \cap Ann^nI(G)^*$ est contenu dans la somme de $D^G(\mathcal{D}^n(G))$ et de $Qc_0(G) \cap Ann^{n+1}I(G)^*$.

Remarquons que $D^G(\mathcal{D}^n(G))$ est contenu dans $Qc_0(G)\cap Ann^nI(G)^*$ d'après 5.6. Soit $D \in Qc_0(G) \cap Ann^nI(G)^*$. Pour $M \in \underline{\mathcal{L}}^n_{min}$, on a défini dans le paragraphe précédent la distribution D_M sur $M(F)$, de fonction associée θ_M, et on a prouvé l'existence d'un quasi-caractère D'_M sur $M(F)$ qui coïncidaient avec D_M sur $M_{ell}(F)$. Montrons que

(2) D'_M est de niveau 0 sur les elliptiques.

D'après les remarques (2) et (4) de 5.7 et le lemme 4.6, on peut fixer $\epsilon \in G(F)_{p'}\cap M(F)$ et démontrer que, pour tout $X \in \mathfrak{m}_{\epsilon,tn}(F)$ tel que $\epsilon exp(X) \in M_{ell}(F)$, la fonction $\lambda \mapsto \theta_{D'_M}(\epsilon exp(\lambda^2X))$ appartient à E. Pour un tel X, on a par définition

$$\theta_{D'_M}(\epsilon exp(\lambda^2X)) = \theta_M(\epsilon exp(\lambda^2X)) = D^G(\epsilon exp(\lambda^2X))^{1/2}D^M(\epsilon exp(\lambda^2X))^{-1/2}\theta_D(\epsilon exp(\lambda^2X)).$$

D'après le (ii) du lemme 7.6, la fonction $\lambda \mapsto D^G(\epsilon exp(\lambda^2 X))^{1/2} D^M(\epsilon exp(\lambda^2 X))^{-1/2}$ est produit d'une constante et d'une puissance entière de $|\lambda|$. Puisque $D \in Qc_0(G)$, la fonction $\lambda \mapsto \theta_D(\epsilon exp(\lambda^2 X))$ appartient à E. Il en résulte que la fonction $\lambda \mapsto \theta_{D'_M}(\epsilon exp(\lambda^2 X))$ appartient à E, d'où (2).

D'après la proposition 5.7, il existe donc $D''_M \in D^M(\mathcal{D}_{cusp}(M))$ tel que D''_M coïncide avec D'_M sur $M_{ell}(F)$, donc aussi avec D_M. La distribution

$$\sum_{M \in \underline{\mathcal{L}}^n} |W^G(M)|^{-1} Ind_M^G(D''_M)$$

appartient alors à $D^G(\mathcal{D}^n(G))$ et son image dans $Gr^n I(G)^*$ est égale à celle de D. Cela prouve (1).

Pour $n = a_{M_{min}} + 1$, on a $Qc_0(G) \cap Ann^n I(G)^* = \{0\} = D^G(\mathcal{D}^n(G))$. Grâce à (1), on démontre par récurrence descendante que $Qc_0(G) \cap Ann^n I(G)^* = D^G(\mathcal{D}^n(G))$ pour tout n. Pour $n = a_G$, cela démontre l'égalité $Qc_0(G) = D^G(\mathcal{D}(G))$. $\square$

6 Représentations et représentations de niveau 0

6.1 Représentations de niveau 0

Notons $Irr(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations lisses irréductibles de $G(F)$ (dans des espaces complexes). Une telle représentation π, dans un espace V, est dite de niveau 0 si et seulement s'il existe une facette $\mathcal{F} \in Fac(G)$ telle que l'espace des invariants $V^{K_{\mathcal{F}}^+}$ soit non nul. On note $Irr(G)^0$ le sous-ensemble des (classes d'isomorphismes de) représentations de niveau 0 et $Irr(G)^{>0}$ celui des représentations qui ne sont pas de niveau 0. On note p^0 la projection $\mathbb{C}[Irr(G)] \to \mathbb{C}[Irr(G)^0]$ qui annule $\mathbb{C}[Irr(G)^{>0}]$. On sait que p^0 est associée à l'action d'un idempotent du centre de Bernstein. Il se déduit de cet idempotent une action sur divers objets, par exemple $C_c^\infty(G(F))$, que l'on note encore p^0. On sait que p^0 commute, en un sens compréhensible, aux opérations d'induction et de passage au module de Jacquet : par exemple, si P est un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M et si $\pi^M \in Irr(M)$, alors $p^0(Ind_P^G(\pi^M)) = Ind_P^G(p^0(\pi^M))$.

On note $Temp(G)$ le sous-ensemble de $Irr(G)$ des représentations tempérées et on pose $Temp(G)^0 = Temp(G) \cap Irr(G)^0$.

Si ξ est un caractère de $A_G(F)$, on note $Irr(G)_\xi$ le sous-ensemble de $Irr(G)$ des représentations dont le caractère central coïncide avec ξ sur $A_G(F)$. On définit de même $Irr(G)^0_\xi$, $Temp(G)_\xi$ etc... Evidemment, $Irr(G)^0_\xi$ est vide si ξ n'est pas modérément ramifié et $Temp(G)_\xi$ est vide si ξ n'est pas unitaire.

Pour toute représentation irréductible π, on note Θ_π son caractère-distribution. D'après Harish-Chandra, c'est un quasi-caractère. On note θ_π sa fonction associée. Par linéarité, l'application $\pi \mapsto \Theta_\pi$ se prolonge en une application

$$\Theta : \mathbb{C}[Irr(G)] \to I(G)^*$$

qui est injective.

6.2 Représentations elliptiques

Arthur a défini un ensemble de "représentations elliptiques", cf. [2] paragraphe 3. Une telle représentation est une combinaison linéaire finie, à coefficients dans $\mathbb{C}$, de représentations irréductibles tempérées. Sa définition dépend de divers choix, en particulier de normalisations d'opérateurs d'entrelacement. Nous supposons ces choix fixés et nous notons $Ell(G)$ l'ensemble des représentations elliptiques. C'est un ensemble linéairement indépendant. L'espace $\mathbb{C}[Ell(G)]$ ne dépend pas des choix. Pour un Levi $M \in \mathcal{L}_{min}$, le sous-espace $\mathbb{C}[Ell(M)] \subset \mathbb{C}[Temp(M)]$ est invariant par l'action naturelle du groupe $W^G(M)$ sur $\mathbb{C}[Temp(M)]$. On note $\mathbb{C}[Ell(M)]^{W^G(M)}$ le sous-espace des invariants. On a alors la décomposition en somme directe

$$\mathbb{C}[Temp(G)] = \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}} Ind_M^G(\mathbb{C}[Ell(M)]^{W^G(M)}).$$

Introduisons l'application d'Harish-Chandra $H_G : G(F) \to \mathcal{A}_G$, notons $\mathcal{A}_G^*$ l'espace vectoriel réel dual de $\mathcal{A}_G$ et $\mathcal{A}_{G,\mathbb{C}}^*$ son complexifié. Un élément $\chi \in \mathcal{A}_{G,\mathbb{C}}^*$ définit un caractère de $G(F)$, que l'on note encore χ, défini par $\chi(g) = exp(<\chi, H_G(g)>)$. Si $\pi \in Irr(G)$, on note π_χ la représentation $\pi_\chi(g) = \chi(g)\pi(g)$. Si $\chi \in i\mathcal{A}_G^*$, cette opération $\pi \mapsto \pi_\chi$ conserve l'espace $\mathbb{C}[Ell(G)]$. On note $Ell(G)_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des π_χ pour $\pi \in Ell(G)$ et $\chi \in \mathcal{A}_G^*$. On a alors la décomposition plus générale

$$(1) \qquad \mathbb{C}[Irr(G)] = \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}} Ind_M^G(\mathbb{C}[Ell(M)_{\mathbb{R}}]^{W^G(M)}).$$

Via l'injection Θ, cette décomposition est compatible avec la filtration de $I(G)^*$ définie en 3.2. C'est-à-dire que, pour $n \in \mathbb{Z}$, l'intersection de $Ann^n I(G)^*$ et de l'image de Θ est égale à l'image par cette injection de la sous-somme de l'expression ci-dessus, où on limite la sommation aux M tels que $dim(A_M) \geq n$. En particulier, l'application composée

$$(2) \qquad \mathbb{C}[Ell(G)_{\mathbb{R}}] \stackrel{\Theta}{\to} I(G)^* \to I_{cusp}(G)^*$$

est injective.

En fait, chaque représentation elliptique est combinaison linéaire de sous-représentations d'une même induite d'une série discrète d'un Levi de G. Il en résulte d'une part que toute représentation elliptique admet un caractère central. D'autre part que ou bien toutes ces composantes sont de niveau 0, ou bien aucune ne l'est. On note $Ell(G)^0$, resp. $Ell(G)^{>0}$, les représentations elliptiques du premier cas, resp. du second. Puisque p^0 "commute" à l'induction, on obtient des variantes des égalités précédentes telles que

$$(3) \qquad \mathbb{C}[Temp(G)^0] = \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}} Ind_M^G(\mathbb{C}[Ell(M)^0]^{W^G(M)});$$

$$\mathbb{C}[Irr(G)^0] = \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}} Ind_M^G(\mathbb{C}[Ell(M)_{\mathbb{R}}^0]^{W^G(M)});$$

$$\mathbb{C}[Irr(G)^{>0}] = \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}} Ind_M^G(\mathbb{C}[Ell(M)_{\mathbb{R}}^{>0}]^{W^G(M)}).$$

Il y a aussi des variantes de ces égalités en imposant que toutes les représentations se transforment selon un caractère fixé ξ de $A_G(F)$.

6.3 Le résultat de [20]

Soit $\pi \in Irr(G)^0$. En [20], on a associé à π un élément de $\mathcal{D}_{cusp}(G)$ que l'on avait noté $\Theta_{\pi,cusp}^G$. On modifie légèrement la définition en y incluant les mesures $mes(A_G(F)\backslash K_{\mathcal{F}}^\dagger)^{-1}$ qui intervenaient dans les formules de cette référence. On note $\Delta_{\pi,cusp}^G$ l'élément de $\mathcal{D}_{cusp}(G)$ ainsi obtenu.

Soit M un Levi de G. Choisissons un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$. On associe au module de Jacquet π_P un élément $\Delta_{\pi_P,cusp}^M$. Notons $\Delta_{\pi_M,cusp,G-comp}^M$ sa projection dans

$\mathcal{D}_{cusp,G-comp}(M)$, autrement dit sa restriction au sous-ensemble des éléments de $M(F)$ qui sont compacts mod $Z(G)$. Elle ne dépend pas du choix de P.

Le résultat principal de [20] est que

(1) Θ_π coïncide sur $G_{comp}(F)$ avec la distribution

$$\sum_{M\in\mathcal{L}_{min}} |W^M||W^G|^{-1}D^G[\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp}].$$

Autrement dit, notons Δ_π l'image naturelle de

$$\sum_{M\in\mathcal{L}_{min}} |W^M||W^G|^{-1}\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp}$$

dans $\mathcal{D}_{G-comp}(G)$. Alors Θ_π coïncide avec $D^G[\Delta_\pi]$ sur $G_{comp}(F)$. On prolonge $\pi\mapsto\Delta_\pi$ par linéarité en une application

$$\Delta : \mathbb{C}[Irr(G)^0] \to \mathcal{D}_{G-comp}(G).$$

Remarque. La somme intervenant dans (1) peut se récrire

$$(2) \qquad \sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}_{min}} |W^G(M)|^{-1}D^G[\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp}].$$

6.4 Surjectivité

Soit ξ un caractère unitaire et modérément ramifié de $A_G(F)$. L'application Δ se restreint en une application linéaire $\mathbb{C}[Temp(G)^0_\xi] \to \mathcal{D}_{G-comp,\xi}(G)$.

Lemme. *(i) L'application* $\Delta : \mathbb{C}[Temp(G)^0_\xi] \to \mathcal{D}_{G-comp,\xi}(G)$ *est surjective.*

(ii) L'application $\Delta_{cusp} : \mathbb{C}[Ell(G)^0_\xi] \to \mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$ *est bijective.*

Preuve. Notons ici q_ξ la projection de $C^\infty_c(G(F))$ dans $C^\infty_{c,\xi}(G(F))$ ou de $I(G)$ dans $I_\xi(G)$. On a le diagramme naturel

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}_{G-comp,\xi}(G) \arrow[dd, "D^G"] \arrow[dr, "p_1"] & \\ \mathbb{C}[Temp(G)^0_\xi] \arrow[ur, "\Delta^G"] \arrow[dr, "\Theta"'] & & (q_\xi(I\mathcal{E}(G)))^* \\ & I_\xi(G)^* \arrow[ur, "p_2"'] & \end{tikzcd}$$

L'application p_2 est la restriction et $p_1 = p_2\circ D^G$. Le triangle de droite est donc commutatif. Celui de gauche l'est d'après 6.3(1). Montrons que

(1) $p_2\circ\Theta$ est surjective.

Notons que l'espace $(q_\xi(I\mathcal{E}(G)))^*$ est de dimension finie. Chaque élément de $\mathcal{E}(G)$ est invariant par un groupe $K^+_{\mathcal{F}}$ pour une certaine facette $\mathcal{F}\in Fac(G)$. Donc $\mathcal{E}(G)$ est annulé par toute représentation qui n'est pas de niveau 0. D'après le théorème de Paley-Wiener (avec caractère central), l'application $\mathbb{C}[Temp(G)_\xi] \to (q_\xi(I\mathcal{E}(G)))^*$ similaire à $p_2\circ\Theta$ est surjective. D'après la propriété précédente, on peut aussi bien remplacer $Temp(G)_\xi$ par $Temp(G)^0_\xi$, d'où (1).

Une variante avec caractère central de la proposition 3.8 nous dit que l'application p_1 est un isomorphisme. Alors le (i) de l'énoncé se déduit de (1).

En utilisant 6.3 (1), l'injectivité de l'application du (ii) se déduit de celle de l'application (2) de 6.2 D'après le (i) déjà démontré et la relation (3) de 6.2, pour démontrer la surjectivité de l'application du (ii), il reste à prouver que, si M est un Levi propre de G, si $\pi^M \in \mathbb{C}[Ell(M)^0_\xi]$ et si l'on note $\pi = Ind_M^G(\pi^M)$, alors $\Delta^G_{\pi,cusp} = 0$. La projection $I(G)^* \to I_{cusp}(G)^*$ annule toutes les distributions dont le support ne coupe pas $G(F)_{comp}$, car tout élément elliptique régulier est compact mod $Z(G)$. La projection de Θ_π est donc égale à celle de $D^G[\Delta^G_\pi]$. Cette projection $I(G)^* \to I_{cusp}(G)^*$ annule aussi toutes les distributions induites à partir d'un Levi propre. Il en résulte que la projection de Θ_π est nulle et que la projection de $D^G[\Delta^G_\pi]$ est égale à celle de $D^G[\Delta^G_{\pi,cusp}]$. Donc la projection dans $I_{cusp}(G)^*$ de $D^G[\Delta^G_{\pi,cusp}]$ est nulle. D'après le (ii) du corollaire 3.9, on a donc $\Delta^G_{\pi,cusp} = 0$, ce qui achève la démonstration. $\square$

6.5 Produit scalaire elliptique

Fixons un caractère unitaire ξ de $A_G(F)$. L'espace

$$\mathbb{C}[Temp(G)_\xi] = \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}} Ind_M^G(\mathbb{C}[Ell(M)_\xi]^{W^G(M)})$$

est muni d'un produit scalaire elliptique noté $< ., >_{ell}$, cf. [2] paragraphe 6. Les composantes ci-dessus indexées par un Levi propre sont dans le noyau de ce produit. Par contre, le produit se restreint en un produit hermitien défini positif sur $\mathbb{C}[Ell(G)_\xi]$, pour lequel $Ell(G)_\xi$ est une base orthonormale. Rappelons la définition du produit scalaire. Fixons un ensemble $\mathcal{T}_{ell}$ de représentants des classes de conjugaison de sous-tores elliptiques maximaux de G. Pour $T \in \mathcal{T}_{ell}$, on pose $W(T) = Norm_G(T)(F)/T(F)$ et on munit $A_G(F)\backslash T(F)$ de la mesure de Haar de masse totale 1. Pour $\pi, \pi' \in \mathbb{C}[Temp(G)_\xi]$, on a alors

$$(1) \qquad < \pi, \pi' >_{ell} = \sum_{T \in \mathcal{T}_{ell}} |W(T)|^{-1} \int_{A_G(F)\backslash T(F)} \overline{\theta_\pi(t)} \theta_{\pi'}(t) D^G(t)\, dt.$$

Remarquons que ceci ne dépend d'aucune mesure.

On va munir $\mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$ d'un produit scalaire que l'on appelle aussi elliptique. Pour $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in Fac(G)$, notons $N(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $g\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ et fixons un ensemble de représentants $\underline{N}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ du quotient

$$A_G(F) K^0_{\mathcal{F}'} \backslash N(\mathcal{F}, \mathcal{F}').$$

On a établi en 3.5 une décomposition

$$(2) \qquad \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G) = \prod_{\nu \in \mathcal{N}} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)^\nu.$$

On écrit $\mathbf{f} = \prod_{\nu \in \mathcal{F}} \mathbf{f}^\nu$ la décomposition d'un élément $\mathbf{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)$. Fixons $\nu \in \mathcal{N}$. Soient $(\mathcal{F}, \nu), (\mathcal{F}', \nu) \in Fac^*_{max}(G)$ et soient $f \in C_{cusp}(\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}})$ et $f' \in C_{cusp}(\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}'})$. On pose

$$< f, f' >_{ell} = mes(A_G(F)\backslash A_G(F) K^0_{\mathcal{F}})^2 \sum_{g \in \underline{N}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')} < {}^g f, f' > .$$

Ce produit se prolonge par linéarité en un produit sur $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(G)^\nu$. Soient $\mathbf{f},\mathbf{f}'\in\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp,\xi}(G)$. On voit que $<\mathbf{f}^{\nu+\nu'},\mathbf{f}'^{\nu+\nu'}>=<\mathbf{f}^\nu,\mathbf{f}'^\nu>$ pour tout $\nu\in\mathcal{N}$ et tout $\nu'\in w_G(A_G(F))$. On pose

$$<\mathbf{f},\mathbf{f}'>_{ell}=\sum_{\nu\in\mathcal{N}/w_G(A_G(F))}<\mathbf{f}^\nu,\mathbf{f}'^\nu>_{ell}.$$

On vérifie que, pour $g\in G(F)$, $<{}^g\mathbf{f},\mathbf{f}'>_{ell}=<\mathbf{f},\mathbf{f}'>_{ell}$. C'est-à-dire que ${}^g\mathbf{f}-\mathbf{f}$ appartient au noyau du produit scalaire elliptique. Celui-ci se descend donc en un produit sur $\mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$.

Proposition. *L'application*

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[Ell(G)^0_\xi] & \to & \mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)\\ \pi & \mapsto & \Delta^G_{\pi,cusp}\end{array}$$

est un isomorphisme isométrique pour les produits scalaires elliptiques.

Preuve. On peut supposer que l'ensemble de représentants $\underline{Fax}^*_{max}(G,A)$ est stable par l'opération $(\mathcal{F},\nu)\mapsto(\mathcal{F},\nu+\nu')$ pour tout $\nu'\in w_G(A_G(F))$. Représentons $\Delta^G_{\pi,cusp}$ comme un élément de $\prod_{(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A)}C_{cusp}(\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}})^{K^\dagger_{\mathcal{F}}}$, cf. 3.8. On note $(f_{\pi,\mathcal{F},\nu})_{(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A)}$ cet élément. Soit $T\in\mathcal{T}_{ell}$ et $t\in T(F)\cap G_{reg}(F)$. D'après [20] 18(3), on a l'égalité

$$\theta_\pi(t)=D^G(t)^{-1/2}\sum_{(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A)}I^G(t,f_{\pi,\mathcal{F},\nu}).$$

On a identifié ici l'élément $f_{\pi,\mathcal{F},\nu}$ à la fonction $(f_{\pi,\mathcal{F},\nu})_{\mathcal{F}}$. La somme est finie car les termes ne sont non nuls que si $\nu=w_G(t)$.

Remarque. La formule de la référence contient un terme $mes(A_G(F)\backslash K^\dagger_{\mathcal{F}})^{-1}$ que l'on a incorporé à la définition de $f_{\pi,\mathcal{F},\nu}$.

Fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{N}}$ des orbites dans $\mathcal{N}$ pour l'action de $w_G(A_G(F))$ par addition. Notons $\underline{Fac}^*_{max}(G,A;\underline{\mathcal{N}})$ le sous-ensemble des éléments $(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A)$ tels que $\nu\in\underline{\mathcal{N}}$. La formule ci-dessus se récrit

$$\theta_\pi(t)=D^G(t)^{-1/2}\sum_{(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A;\underline{\mathcal{N}})}\sum_{\nu'\in w_G(A_G(F))}I^G(t,f_{\pi,\mathcal{F},\nu+\nu'}).$$

Parce que la restriction à $A_G(F)$ du caractère central de π est ξ, on voit que la somme intérieure n'est autre que

$$mes(A_G(F)_c)^{-1}\int_{A_G(F)}I^G(ta,f_{\pi,\mathcal{F},\nu})\xi(a)^{-1}\,da.$$

D'où

$$\theta_\pi(t)=mes(A_G(F)_c)^{-1}\int_{A_G(F)}D^G(ta)^{-1/2}\sum_{(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A;\underline{\mathcal{N}})}I^G(ta,f_{\pi,\mathcal{F},\nu})\xi(a)^{-1}\,da.$$

La formule (1) devient

$$<\pi,\pi'>_{ell}=mes(A_G(F)_c)^{-1}\sum_{(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A;\underline{\mathcal{N}})}$$

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}}|W(T)|^{-1}\int_{T(F)}D^G(t)^{1/2}I^G(t,\overline{f_{\pi,\mathcal{F},\nu}})\theta_{\pi'}(t)\,dt.$$

Les fonctions $f_{\pi,\mathcal{F},\nu}$ sont cuspidales, leurs intégrales orbitales sont nulles hors des éléments elliptiques. La formule de Weyl conduit donc à l'égalité

$$<\pi,\pi'>_{ell}=mes(A_G(F)_c)^{-1}\sum_{(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A;\underline{\mathcal{N}})}\Theta_{\pi'}(\overline{f_{\pi,\mathcal{F},\nu}}).$$

Fixons $(\mathcal{F},\nu)$ intervenant ci-dessus. Puisque la fonction $f_{\pi,\mathcal{F},\nu}$ est à support compact mod $Z(G)$, on peut exprimer $\Theta_{\pi'}(\overline{f_{\pi,\mathcal{F},\nu}})$ à l'aide de $\Delta_{\pi'}$. Puisque la fonction $f_{\pi,\mathcal{F},\nu}$ est cuspidale, les distributions induites ne comptent pas, d'où

$$\Theta_{\pi'}(\overline{f_{\pi,\mathcal{F},\nu}})=D^G[\Delta^G_{\pi',cusp}](\overline{f_{\pi,\mathcal{F},\nu}}).$$

Ceci est calculé par la proposition 3.6 et la remarque (2) qui la suit. On obtient

$$\Theta_{\pi'}(\overline{f_{\pi,\mathcal{F},\nu}})=c_{\mathcal{F}}<f_{\pi,\mathcal{F},\nu},f_{\pi',\mathcal{F},\nu}>,$$

où

$$c_{\mathcal{F}}=mes(K^0_{\mathcal{F}})^2mes(A_G(F)_c)^{-1}[K^\dagger_{\mathcal{F}}:A_G(F)K^0_{\mathcal{F}}].$$

De la même façon, on a

$$<f_{\pi,\mathcal{F},\nu},f_{\pi',\mathcal{F},\nu}>_{ell}=d_{\mathcal{F}}<f_{\pi,\mathcal{F},\nu},f_{\pi',\mathcal{F},\nu}>,$$

où

$$d_{\mathcal{F}}=mes(A_G(F)\backslash A_G(F)K^0_{\mathcal{F}})^2[K^\dagger_{\mathcal{F}}:A_G(F)K^0_{\mathcal{F}}].$$

D'où

$$\Theta_{\pi'}(\overline{f_{\pi,\mathcal{F},\nu}})=c_{\mathcal{F}}d_{\mathcal{F}}^{-1}<f_{\pi,\mathcal{F},\nu},f_{\pi',\mathcal{F},\nu}>_{ell},$$

puis

$$<\pi,\pi'>_{ell}=mes(A_G(F)_c)^{-1}\sum_{(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A;\underline{\mathcal{N}})}c_{\mathcal{F}}d_{\mathcal{F}}^{-1}<f_{\pi,\mathcal{F},\nu},f_{\pi',\mathcal{F},\nu}>_{ell}.$$

On vérifie que

$$mes(A_G(F)_c)^{-1}c_{\mathcal{F}}d_{\mathcal{F}}=1.$$

D'où

$$<\pi,\pi'>_{ell}=\sum_{(\mathcal{F},\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(G,A;\underline{\mathcal{N}})}<f_{\pi,\mathcal{F},\nu},f_{\pi',\mathcal{F},\nu}>_{ell}.$$

Par définition, la membre de droite n'est autre que $<\Delta^G_{\pi,cusp},\Delta^G_{\pi',cusp}>$. Cela démontre que l'application de l'énoncé est isométrique. Elle est bijective d'après le (ii) du lemme 6.4. Cela achève la démonstration. $\square$

6.6 Un lemme préliminaire

Rappelons que l'on a défini en 5.7 la notion de quasi-caractère sur $G(F)$ de niveau 0 sur les elliptiques.

Lemme. *Soit $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)_{\mathbb{R}}]$. Supposons que Θ_π soit un quasi-caractère de niveau 0 sur les elliptiques. Alors π appartient à $\mathbb{C}[Ell(G)^0_{\mathbb{R}}]$.*

Preuve. On peut décomposer la représentation π en $\pi = \sum_{i=1,\dots,h} \pi_i$ où chaque π_i est combinaison linéaire de représentations irréductibles dont le caractère central se restreint à $A_G(F)$ en un même caractère ξ_i. On suppose les ξ_i tous distincts. Par interpolation, on peut trouver une famille de nombres complexes $(c_j)_{j=1,\dots,h}$ et une famille $(a_j)_{j=1,\dots,h}$ d'éléments de $A_G(F)$ de sorte que

$$\Theta_{\pi_i}(g) = \sum_{j=1,\dots,h} c_j \Theta_\pi(a_j g)$$

pour tout $g \in G(F)$. Puisque Θ_π est un quasi-caractère de niveau 0 sur les elliptiques, cette formule entraîne que Θ_{π_i} l'est aussi. Cela nous ramène au cas où π elle-même est combinaison linéaire de représentations irréductibles dont le caractère central se restreint à $A_G(F)$ en un même caractère que l'on note ξ. On peut aussi tordre le problème par un élément $\chi \in \mathcal{A}_G^*$: Θ_{π_χ} est encore un quasi-caractère de niveau 0 sur les elliptiques et, si l'on prouve que π_χ appartient à $\mathbb{C}[Ell(G)^0_{\mathbb{R}}]$, la même assertion s'ensuit pour π. On peut donc supposer ξ unitaire. D'après la proposition 5.7, il existe $d' \in \mathcal{D}_{cusp}(G)$ tel que Θ_π coïncide avec $D^G[d']$ sur $G_{ell}(F)$. Rappelons que $A_G(F)$ agit naturellement sur $\mathcal{D}_{cusp}(G)$. On note $(a,\delta) \mapsto \delta^a$ cette action. L'élément d' n'a pas forcément de caractère central pour l'action de $A_G(F)$ mais on peut le remplacer par un élément qui admet ξ pour tel caractère central. En effet, on peut d'abord remplacer d' par l'intégrale $\int_{A_G(F)_c} \xi(a)^{-1} d'^a \, da$. Cela ne modifie pas la propriété ci-dessus puisque π se transforme par $A_G(F)$ selon ξ. Mais cela assure que $A_G(F)_c$ agit sur d' selon le caractère ξ. Utilisons la décomposition (2) de 6.5 et écrivons $d' = \prod_{\nu \in \mathcal{N}} d'^\nu$. Pour tout $\nu \in \mathcal{N}$, $D^G(d'^\nu)$ est à support dans $w_G^{-1}(\nu)$ et coïncide avec Θ_π sur $G_{ell}(F) \cap w_G^{-1}(\nu)$. Fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{N}}$ des orbites de l'action par addition de $w_G(A_G(F))$ dans $\mathcal{N}$. On voit qu'il existe un unique $d \in \mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$ tel que $d^\nu = d'^\nu$ pour tout $\nu \in \underline{\mathcal{N}}$. Puisque π se transforme par $A_G(F)$ selon ξ, Θ_π coïncide avec $D^G(d)$ sur $G_{ell}(F)$. D'après le (ii) du lemme 6.4, il existe $\pi^0 \in \mathbb{C}[Ell(G)^0_\xi]$ tel que $\Delta_{cusp}(\pi^0) = d$. Alors, d'après l'assertion (1) de 6.3, Θ_{π^0} coïncide sur $G_{ell}(F)$ avec $D^G(d)$, donc aussi avec Θ_π. D'après l'injectivité de l'application (2) de 6.2, on a $\pi = \pi^0$, ce qui achève la démonstration. $\square$

6.7 Caractérisation des représentations de niveau 0

Théorème. *Soit $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)]$. Alors $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)^0]$ si et seulement si Θ_π est un quasi-caractère de niveau 0 sur $G(F)$.*

Preuve. Supposons $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)^0]$. D'après 6.3 (1) et le théorème 5.6, Θ_π coïncide avec un quasi-caractère de niveau 0 sur les éléments de $G(F)$ qui sont compacts mod $Z(G)$. Soit $\epsilon \in G(F)_{p'}$, supposons que ϵ n'est pas compact mod $Z(G)$. Alors $L[\epsilon]$ est un Levi propre et on a $L[\epsilon exp(X)] = L[\epsilon]$ et $Q[\epsilon exp(X)] = Q[\epsilon]$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$.

D'après le théorème 5.2 de [4], on a $\theta_\pi(\epsilon exp(X)) = \delta_{Q[\epsilon]}(\epsilon exp(X))^{1/2}\theta_{\pi_{Q[\epsilon]}}(\epsilon exp(X))$ pour tout X comme ci-dessus. Un même calcul qu'au (ii) du lemme 7.6 montre que $\delta_{Q[\epsilon]}(\epsilon exp(X)) = \delta_{Q[\epsilon]}(\epsilon)$. La représentation $\pi_{Q[\epsilon]}$ est de niveau 0. Puisque $L[\epsilon] \subsetneq G$, on peut raisonner par récurrence sur le rang semi-simple de G et supposé prouvé que $\Theta_{\pi_{Q[\epsilon]}}$ est un quasi-caractère de niveau 0 sur $L[\epsilon](F)$. Autrement dit que, pour des constantes $c_{\mathcal{O}}$ convenables, on a

$$\theta_{\pi_{Q[\epsilon]}}(\epsilon exp(X)) = \sum_{\mathcal{O}\in Nil(\mathfrak{l}[\epsilon]_\epsilon)} c_{\mathcal{O}}\hat{j}(\mathcal{O}, X)$$

pour tout X comme ci-dessus. Puisque $\mathfrak{l}[\epsilon]_\epsilon = \mathfrak{g}_\epsilon$, on en déduit un développement analogue de $\theta_\pi(\epsilon exp(X))$. Donc Θ_π coïncide avec un quasi-caractère de niveau 0 sur $C_G(\epsilon)$. Ceci est donc vrai pour tout $\epsilon \in G(F)_{p'}$ et cela signifie que Θ_π est un quasi-caractère de niveau 0.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons $\mathbb{C}[Irr(G)]^n$ la sous-somme de l'expression 6.2 (1) où l'on somme sur les Levi $M \in \underline{\mathcal{L}}^m_{min}$ pour $m \geq n$. On va prouver

(1) soit $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)]^n$; supposons que Θ_π est un quasi-caractère de niveau 0 sur $G(F)$; alors π appartient à la somme de $\mathbb{C}[Irr(G)]^{n+1}$ et de

$$\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n_{min}} Ind^G_M(\mathbb{C}[Ell(M)^0_{\mathbb{R}}]^{W^G(M)}.$$

Ecrivons $\pi = \sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}_{min}} Ind^G_M(\pi^M)$, où $\pi^M \in \mathbb{C}[Ell(M)_{\mathbb{R}}]^{W^G(M)}$ et $\pi^M = 0$ si $a_M < n$. Le caractère Θ_π appartient à $Qc_0(G)$ par hypothèse donc à $Qc_0(G)\cap Ann^n I(G)^*$. D'après le (ii) de la proposition 3.10 et le théorème 5.9, cet espace a même image dans $Gr^n I(G)^*$ que

$$\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n_{min}} Ind^G_M(D^M(\mathcal{D}_{cusp}(M)^{W^G(M)})).$$

Autrement dit, pour tout $M \in \underline{\mathcal{L}}^n_{min}$, on peut fixer $d^M \in \mathcal{D}_{cusp}(M)^{W^G(M)}$ tel que Θ_{π^M} coïncide avec $D^M(d^M)$ sur les éléments elliptiques de $M(F)$. A fortiori, π^M est un quasi-caractère sur $M(F)$ de niveau 0 sur les elliptiques. D'après le lemme 6.6, π^M appartient à $\mathbb{C}[Ell(M)^0_{\mathbb{R}}]$ et donc aussi à $\mathbb{C}[Ell(M)^0_{\mathbb{R}}]^{W^G(M)}$. Posons $\sigma = \sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n_{min}} Ind^G_M(\pi^M)$. Alors Θ_π et Θ_σ ont même image dans $Gr^n I(G)^*$. Donc $\pi-\sigma$ appartient à $\mathbb{C}[Irr(G)]^{n+1}$. Puisque σ appartient au dernier espace indiqué dans l'assertion (1), cela démontre cette assertion.

D'après le sens "seulement si" déjà démontré du théorème, l'assertion (1) implique le sens "si" par récurrence descendante sur n. □

7 Endoscopie

7.1 Données endoscopiques

On note W_F le groupe de Weil de F. Il contient le groupe d'inertie I_F. On note I^s_F le groupe d'inertie sauvage de F, c'est-à-dire le p-Sylow du groupe I_F.

La théorie de l'endoscopie a été développée par Langlands et ses successeurs. Nous ne la reprendrons pas et nous adopterons sa formulation telle qu'elle figure dans [14]. Une donnée endoscopique de G est un triplet $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$, où G' est un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur F, $\mathcal{G}'$ est un sous-groupe du L-groupe ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_F$ et s est un élément semi-simple du groupe complexe $\hat{G}$. Le groupe $\hat{G}'$ s'identifie à la composante neutre $Z_{\hat{G}}(s)^0$ du commutant $Z_{\hat{G}}(s)$. On dit que la donnée est elliptique si et seulement si $Z(\hat{G})^\Gamma$ est un sous-groupe d'indice fini de $Z(\hat{G}')^\Gamma$.

L'hypothèse $(Hyp)(G)$ a les conséquences suivantes :

(1) il existe une extension de F de degré premier à p telle que le groupe G' soit déployé sur cette extension ;

(2) $W_F \cap \mathcal{G}'$ est un sous-groupe de W_F d'indice fini premier à p.

Preuve. Le (1) résulte de ce que le rang de G' est le même que celui de G et que l'on a déjà remarqué que, pour tout tore sur F de dimension inférieure ou égale à ce rang, il existe une extension F' de F de degré premier à p telle que ce tore soit déployé sur F'. Pour (2), fixons une telle extension galoisienne F' de F de degré premier à p, telle que G' soit déployé sur F. L'action de $\Gamma_{F'}$ sur $\hat{G}'$ est triviale, a fortiori l'action de $\Gamma_{F'}$ sur $\hat{G}$ est triviale. Le noyau de l'homomorphisme naturel $W_F \to Gal(F'/F)$ est $W_{F'}$. Par définition, la projection $\mathcal{G}' \to W_F$ est scindée, c'est-à-dire que l'on peut fixer un homomorphisme continu $i : W_F \to \mathcal{G}'$ qui est une section de cette projection. Pour $w \in W_F$, écrivons $i(w) = (j(w), w)$. La restriction de j à $W_{F'}$ est un caractère de ce groupe à valeurs dans $Z_{\hat{G}}(s)$. Notons W^1 le sous-groupe des $w \in W_{F'}$ tels que $j(w) \in Z_{\hat{G}}(s)^0$. L'hypothèse $(Hyp)(G)$ implique que $Z_{\hat{G}}(s)^0$ est un sous-groupe de $Z_{\hat{G}}(s)$ d'indice premier à p. Donc W^1 est d'indice fini premier à p dans $W_{F'}$, donc aussi dans W_F. Pour $w \in W^1$, on a $(1, w) = j(w)^{-1} i(w)$ et ce terme appartient à $\mathcal{G}'$ puisque $j(w) \in Z_{\hat{G}}(s)^0 = \hat{G}' \subset \mathcal{G}'$. Donc $W^1 \subset W_F \cap \mathcal{G}'$ et (2) est démontré. $\square$

On a besoin de munir toute donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ de données auxiliaires $G'_1, C_1, \hat{\xi}_1$, cf. [14] I.2.1. Le tore $C_1(F)$ est naturellement muni d'un caractère $\lambda_1 : C_1(F) \to \mathbb{C}^\times$. Il y a une notion d'unitarité pour de telles données, cf. loc. cit. I.7.1, qui implique que λ_1 est unitaire. Nous dirons que les données auxiliaires sont modérément ramifiées si et seulement si elles vérifient les conditions suivantes :

(3) G'_1 et C_1 sont déployés sur une extension de F de degré premier à p ;

(4) on a $\hat{\xi}_1(1, w) = (1, w)$ pour tout $w \in I_F^s$.

Lemme. *Sous notre hypothèse $(Hyp)(G)$, il existe des données auxiliaires modérément ramifiées et unitaires.*

Preuve. Choisir une suite

$$1 \to C_1 \to G'_1 \to G' \to 1$$

équivaut à choisir une suite duale

$$1 \to \hat{G}' \to \hat{G}'_1 \to \hat{C}_1 \to 1$$

Pour celle-ci, il y a le choix standard suivant. Fixons une paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T})$ de $\hat{G}'$ préservée par l'action galoisienne. On pose $\hat{G}'_1 = (\hat{G}' \times \hat{T})/diag(Z(\hat{G}'))$, où $diag$ est le plongement diagonal. Le centre de $\hat{G}'_1$ est isomorphe à $\hat{T}$, donc est connexe. Le tore $\hat{C}_1$ est $\hat{T}/Z(\hat{G})$ et on sait bien que c'est un tore induit. Si F' est une extension finie de F de degré à p sur laquelle G' est déployé, les actions galoisiennes sur $\hat{G}'_1$ et $\hat{C}_1$ sont triviales sur $\Gamma_{F'}$. Dualement, C_1 est déployé sur F' et, puisque G' l'est aussi, G'_1 l'est également.

Pour construire $\hat{\xi}_1$ vérifiant (4), le mieux est de reprendre la preuve de Langlands [12] lemme 4. On s'aperçoit qu'il y a un unique argument à préciser. La clé de la preuve est que, quand $S_2 \to S_1$ est une injection de tores définis sur F, tout caractère $\chi_2 : S_2(F) \to \mathbb{C}^\times$ se prolonge en un caractère $\chi_1 : S_1(F) \to \mathbb{C}^\times$ (rappelons que, pour nous, caractère signifie homomorphisme continu). On doit préciser que tout caractère modérément ramifié χ_2 se prolonge en un caractère modérément ramifié χ_1. Le sous-groupe $S_{1,tu}(F)$ de $S_1(F)$ est compact, donc le produit $S_2(F)S_{1,tu}(F)$ est fermé dans

$S_1(F)$. Puisque χ_2 est modérément ramifié, il est trivial sur $S_{2,tu}(F) = S_2(F) \cap S_{1,tu}(F)$. Donc on peut prolonger χ_2 en un caractère $\chi' : S_2(F)S_{1,tu}(F) \to \mathbb{C}^\times$ qui est trivial sur $S_{1,tu}(F)$. Puisque $S_2(F)S_{1,tu}(F)$ est fermé dans $S_1(F)$, on peut ensuite prolonger χ' en un caractère $\chi_1 : S_1(F) \to \mathbb{C}^\times$. Il est encore trivial sur $S_{1,tu}(F)$, c'est-à-dire qu'il est modérément ramifié.

Avec ce complément,la preuve de [12] permet de construire $\hat{\xi}_1$ vérifiant (4). Le même argument qu'en [14] I.7.1(3) permet de le modifier afin d'assurer que les données sont unitaires. $\square$

On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{E}(G)$ des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G. Pour tout $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s) \in \mathcal{E}(G)$, on fixe des données auxiliaires $G'_1, C_1, \hat{\xi}_1$. On suppose que ces données auxiliaires sont modérément ramifiées et unitaires. On peut alors fixer un facteur de transfert unitaire Δ_1. Signalons que, pour nous, ce facteur ne contient pas le terme Δ_{IV} de [13], que nous avons incorporé à la définition des intégrales orbitales en suivant Arthur. Il n'est pas clair que l'hypothèse $(Hyp)(G)$ que nous avons posée entraîne $(Hyp)(G')$ pour tout groupe endoscopique G' de G, et encore moins qu'elle entraîne $(Hyp)(G'_1)$ pour un groupe auxiliaire G'_1. Nous renforçons l'hypothèse $(Hyp)(G)$ en l'hypothèse suivante :

$(Hyp)_{endo}(G)$: l'hypothèse $(Hyp)(G)$ est vérifiée ; pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$, les hypothèses $(Hyp)(G')$ et $(Hyp)(G'_1)$ sont vérifiées.

Toute donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ de G apparaît comme une "donnée de Levi" d'une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}''$. Les données auxiliaires que l'on a fixées pour cette dernière se restreignent en des données auxiliaires pour $\mathbf{G}'$. Les hypothèses $(Hyp)(G'')$ et $(Hyp)(G''_1)$ entraînent $(Hyp)(G')$ et $(Hyp)(G'_1)$ puisque G', resp. G'_1, est un groupe de Levi de G'', resp. G''_1. En conséquence, l'hypothèse $(Hyp)_{endo}(G)$ implique que, pour toute donnée endoscopique (pas forcément elliptique), on peut supposer fixées des données auxiliaires $G'_1, C_1, \hat{\xi}_1$ modérément ramifiées et unitaires, de sorte que $(Hyp)(G')$ et $(Hyp)(G'_1)$ soient vérifiées. On suppose aussi fixé un facteur de transfert unitaire Δ_1.

7.2 Représentations de niveau 0 et données auxiliaires

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de G. On s'intéresse exclusivement aux représentations irréductibles de $G'_1(F)$ dont le caractère central coïncide avec λ_1 sur $C_1(F)$. On note $Irr(G'_1)_{\lambda_1}$ l'ensemble de ces représentations, avec les variantes $Temp(G'_1)_{\lambda_1}$, $Irr(G'_1)^0_{\lambda_1}$ etc... Ces ensembles dépendent du choix des données auxiliaires. Pour que les résultats qui suivent aient vraiment un sens, il vaut mieux qu'ils n'en dépendent pas trop. Selon le formalisme que l'on a développé en [14], pour deux choix de données auxiliaires, il y a une bijection canonique entre les ensembles associés à chacune des données. Expliquons cela. Choisissons d'autres données auxiliaires modérément ramifiées $(G'_2, C_2, \hat{\xi}_2)$. Notons G'_{12} le produit fibré de G'_1 et G'_2 au-dessus de G'. On a deux suites exactes

$$1 \to C_2 \to G'_{12} \to G'_1 \to 1, \;\; 1 \to C_1 \to G'_{12} \to G'_2 \to 1.$$

On a introduit en [14] I.2.5 un homomorphisme $\lambda_{12} : G'_{12}(F) \to \mathbb{C}^\times$. Sa restriction à $C_1(F) \times C_2(F)$ est le produit des caractères λ_1 et λ_2^{-1}. Soit $\pi_1 \in Irr(G'_1)_{\lambda_1}$, réalisée dans un espace complexe V. Par la première suite ci-dessus, π_1 se relève en une représentation π_{12} de $G'_{12}(F)$. La restriction à $C_1(F)$, resp. $C_2(F)$, de son caractère central est λ_1, resp. 1. Posons $\pi_{21} = \lambda_{12}^{-1} \otimes \pi_{12}$. Alors la restriction à $C_1(F)$, resp. $C_2(F)$, du caractère central de π_{21} est 1, resp. λ_2. La représentation π_{21} se descend par la deuxième suite ci-dessus en une représentation π_2 de $G'_2(F)$ dans V dont le caractère central coïncide avec λ_2 sur

$C_2(F)$. L'application $\pi_1 \mapsto \pi_2$ est une bijection de $Irr(G'_1)_{\lambda_1}$ sur $Irr(G'_2)_{\lambda_2}$. Parce que λ_1 et λ_2 sont unitaires, le caractère λ_{12} l'est aussi et la bijection envoie $Temp(G'_1)_{\lambda_1}$ sur $Temp(G'_2)_{\lambda_2}$. Parce que les données auxiliaires sont modérément ramifiées, le caractère λ_{12} est "modérément ramifié" au sens que sa restriction à l'ensemble $G'_{12,tu}(F)$ est triviale. Remarquons de plus que $Imm(G'_{1,AD}) = Imm(G'_{AD}) = Imm(G'_{2,AD})$. Une facette $\mathcal{F} \in Fac(G')$ détermine un sous-groupe $K^+_{\mathcal{F}}$ de $G'(F)$ et des sous-groupes similaires dans $G'_1(F)$ et $G'_2(F)$, que l'on note $K^+_{1,\mathcal{F}}$ et $K^+_{2,\mathcal{F}}$. On voit que si π_1 admet des invariants non nuls par le sous-groupe $K^+_{1,\mathcal{F}}$, alors π_2 admet des invariants non nuls par le sous-groupe $K^+_{2,\mathcal{F}}$. La bijection envoie donc $Irr(G'_1)^0_{\lambda_1}$ sur $Irr(G'_2)^0_{\lambda_2}$.

7.3 Correspondance entre éléments semi-simples

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de G. On définit comme en [14] I.1.10 une correspondance entre classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples dans $G'(F)$ et $G(F)$ (on parlera aussi bien d'une correspondance entre éléments semi-simples dans $G'(F)$ et $G(F)$). Soient $x' \in G'_{reg}(F)$ et $x \in G_{reg}(F)$ deux éléments qui se correspondent. Notons T' et T les commutants de x' dans G' et de x dans G. Ce sont des tores et il y a un unique isomorphisme $\xi_{T,T'} : T \to T'$ défini sur F de sorte que $\xi_{T,T'}(x) = x'$, cf. loc. cit.. D'où un isomorphisme encore noté $\xi_{T,T'} : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}'$.

Lemme. *(i) Si $x = \epsilon exp(X)$ est une p'-décomposition de x, alors $x' = \xi_{T,T'}(\epsilon)exp(\xi_{T,T'}(X))$ est une p'-décomposition de x'.*

(ii) Soit $x = \epsilon exp(X)$ une p'-décomposition de x. Pour tout $\lambda \in F^\times$ tel que $\lambda X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$, $\xi_{T,T'}(\epsilon)exp(\xi_{T,T'}(\lambda X))$ est un élément de $G'_{reg}(F)$ qui correspond à $\epsilon exp(\lambda X)$.

(iii) Supposons $\mathbf{G}'$ elliptique. Alors x est compact mod $Z(G)$ si et seulement si x' est compact mod $Z(G')$. Si ces conditions sont réalisées, l'application $(\epsilon, X) \mapsto (\epsilon', X') = (\xi_{T,T'}(\epsilon), \xi_{T,T'}(X))$ réalise une bijection entre les p'-décompositions $x = \epsilon exp(X)$ de x et les p'-décompositions $x' = \epsilon' exp(X')$ de x'.

Preuve. Puisque $\xi_{T,T'}$ est un isomorphisme, l'élément $\xi_{T,T'}(X)$ est topologiquement nilpotent. Posons $\epsilon' = \xi_{T,T'}(\epsilon)$, introduisons le Levi $L[\epsilon]$ de G et le Levi similaire $L'[\epsilon']$ de G'. Notons Σ l'ensemble de racines de T dans G, Σ' celui des racines de T' dans G' et $\Sigma^{L[\epsilon]}$ et $\Sigma^{L'[\epsilon']}$ les sous-ensembles des racines dans $L[\epsilon]$, resp. $L'[\epsilon']$. L'isomorphisme $\xi_{T,T'}$ transporte Σ en un sous-ensemble de $X^*(T')$ et on sait que $\Sigma' \subset \xi_{T,T'}(\Sigma)$. Il résulte alors des définitions que $\Sigma^{L'[\epsilon']} = \Sigma' \cap \xi_{T,T'}(\Sigma^{L[\epsilon]})$. D'où $\xi_{T,T'}(Z(L[\epsilon])) \subset Z(L'[\epsilon'])$. Il existe un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $\epsilon^c \in Z(L[\epsilon])$. Cela entraîne $(\epsilon')^c \in Z(L'[\epsilon'])$. Donc ϵ' est un p'-élément dans $G'(F)$. Cela démontre le (i).

Le (ii) est immédiat.

Supposons $\mathbf{G}'$ elliptique. Alors $Z(G)(F)$ est un sous-groupe d'indice fini de $Z(G')(F)$ et la première assertion du (iii) en résulte. Compte tenu de (i), il reste à voir que, si x' est compact mod $Z(G')$ et si $x' = \epsilon' exp(X')$ est une p'-décomposition de x', alors $x = \xi^{-1}_{T,T'}(\epsilon')exp(\xi^{-1}_{T,T'}(X'))$ est une p'-décomposition de x. Comme ci-dessus, $\xi^{-1}_{T,T'}(X')$ est topologiquement nilpotent. Puisque x' est compact mod $Z(G')$, ϵ' est p'-compact. Mais l'hypothèse $(Hyp)(G)$ entraîne que l'indice de $Z(G)(F)$ dans $Z(G')(F)$ est d'ordre premier à p. Il en résulte que $\xi^{-1}_{T,T'}(\epsilon')$ est p'-compact mod $Z(G)$, ce qui achève la preuve. $\square$

7.4 Facteur de transfert

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de G. Rappelons que le facteur de transfert est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbf{D}_1$ des couples (x_1', x) tels que : $x_1' \in G'_{1,reg}(F)$, $x \in G_{reg}(F)$ et, en notant x' l'image de x_1' dans $G'(F)$, les classes de conjugaison stable de x' et de x se correspondent. Considérons un tel couple et fixons une une p'-décomposition $x = \epsilon exp(X)$. Par le (i) du lemme 7.3, on en déduit une p'-décomposition $x' = \epsilon' exp(X')$. L'application $\mathfrak{g}'_{1,tn}(F) \to \mathfrak{g}'_{tn}(F)$ est surjective. Fixons $X_1' \in \mathfrak{g}'_{1,tn}(F)$ au-dessus de X'. Définissons $\epsilon_1' \in G_1'(F)$ par l'égalité $x_1' = \epsilon_1' exp(X_1')$. On voit que ϵ_1' est un p'-élément, donc que l'égalité $x_1' = \epsilon_1' exp(X_1')$ est une p'-décomposition. Pour $\lambda \in \mathfrak{o}_F - \{0\}$, le couple $(\epsilon_1' exp(\lambda X_1'), \epsilon exp(\lambda X))$ appartient encore à l'ensemble de définition $\mathbf{D}_1$ du facteur de transfert.

Lemme. *Pour tout $\lambda \in \mathfrak{o}_F - \{0\}$, on a l'égalité*

$$\Delta_1(\epsilon_1' exp(\lambda^2 X_1'), \epsilon exp(\lambda^2 X)) = \Delta_1(\epsilon_1' exp(X_1'), \epsilon exp(X)).$$

Preuve. Notons T, T' et T_1' les commutants de x, x' et x_1' dans G, G' et G_1'. Pour calculer le facteur de transfert, on peut choisir des χ-data modérément ramifiées. Les termes Δ_I et $\Delta_{III,1}$ de [13] ne dépendent que des tores T et T_1'. Le terme $\Delta_{III,2}$ est la valeur en x_1' d'un caractère de $T_1'(F)$. Celui-ci est construit à l'aide des χ-data et est modérément ramifié. Donc $\Delta_{III,2}(\epsilon_1' exp(X_1'), \epsilon exp(X))$ ne dépend pas du couple (X_1', X). Il reste le terme Δ_{II}. Un calcul similaire à celui de [19] montre que, comme fonction de (X_1', X), $\Delta_{II}(\epsilon_1' exp(X_1'), \epsilon exp(X))$ est proportionnel au terme analogue $\Delta_{II}(X', X)$ défini sur les algèbres de Lie, cf. [21] 2.3. D'après le lemme 3.2.1 de [7], la fonction $\lambda \mapsto \Delta_{II}(\lambda X', \lambda X)$ définie sur $F^\times$ est un caractère quadratique. Elle est donc constante sur les carrés. Le lemme en résulte. $\square$

7.5 Actions des centres

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s) \in \mathcal{E}(G)$. Puisque cette donnée est elliptique, le groupe $Z(G)(F)$ s'identifie à un sous-groupe d'indice fini de $Z(G')(F)$. Grâce à l'hypothèse $(Hyp)(G)$, cet indice est premier à p. Il en résulte une égalité $Z(G)_{tu}(F) = Z(G')_{tu}(F)$. D'autre part, le sous-groupe $A_G(F) \subset Z(G)(F)$ est égal au sous-groupe $A_{G'}(F) \subset Z(G')(F)$. Le groupe $A_{G_1'}(F)$ s'envoie surjectivement sur $A_{G'}(F)$ (parce que C_1 est un tore induit). Notons $\mathcal{Z}_1$ le groupe des $z_1' \in Z(G_1')(F)$ tels que l'image de z_1' dans $Z(G')(F)$ appartienne à $Z(G)(F)$. Ce groupe contient le groupe engendré par $C_1(F)$, $A_{G_1'}(F)$ et $Z(G_1')_{tu}(F)$. Pour tout couple $(x_1', x) \in \mathbf{D}_1$ et pour tout $z_1' \in \mathcal{Z}_1$, le couple $(z_1' x_1', zx)$ appartient aussi à $\mathbf{D}_1$, où z est l'image de z_1' dans $Z(G)(F)$. D'après [13] lemme 4.4.A, il existe un caractère ζ_1 de $\mathcal{Z}_1$ de sorte que, pour $(x_1', x) \in \mathbf{D}_1$, on ait l'égalité

$$\Delta_1(z_1' x_1', zx) = \zeta(z_1')\Delta_1(x_1', x).$$

Ce caractère coïncide avec λ_1^{-1} sur $C_1(F)$. Grâce à l'hypothèse $(Hyp)_{endo}(G)$, on a

(1) le caractère ζ_1 est trivial sur le sous-ensemble $Z(G_1')_{tu}(F)$ de $\mathcal{Z}_1$.

La preuve est similaire à celle du lemme précédent.

7.6 Décomposition de $\mathbb{C}[Ell(G)]$

Il y a une décomposition

$$I_{cusp}(G) = \oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)} I_{cusp}(G)_{\mathbf{G}'}$$

où chaque facteur $I_{cusp}(G)_{\mathbf{G}'}$ est le sous-espace des $f \in I_{cusp}(G)$ dont les transferts à tout $\mathbf{G}'' \neq \mathbf{G}'$ sont nuls, cf. [14] proposition I.4.11. Fixons un caractère unitaire ξ de $A_G(F)$. Il y a une variante de la décomposition ci-dessus où l'on impose que les fonctions se transforment selon ce caractère ξ. Dualement, il y a une décomposition

$$(1) \qquad \mathbb{C}[Ell(G)_\xi] = \oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)} \mathbb{C}[Ell(G)_\xi]_{\mathbf{G}'}.$$

Elle est orthogonale pour le produit scalaire elliptique. Pour $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)_\xi]$, notons $\pi = \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)} \pi_{\mathbf{G}'}$ l'écriture de π selon cette décomposition.

Proposition. *(i) Si $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)^0_\xi]$, alors $\pi_{\mathbf{G}'} \in \mathbb{C}[Ell(G)^0_\xi]$ pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$.*
(ii) Si $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)^{>0}_\xi]$, alors $\pi_{\mathbf{G}'} \in \mathbb{C}[Ell(G)^{>0}_\xi]$ pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$.

Preuve. Soient $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)_\xi]$ et $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$. Soit $x \in G_{ell}(F)$. On sait que les classes de conjugaison par $G(F)$ contenues dans la classe de conjugaison stable de x forment un espace principal homogène sous l'action d'un groupe abélien fini $K(x)$. Pour $k \in K(x)$, notons kx un représentant de l'image par k de la classe de conjugaison de x (on choisit $1x = x$). Notons $K(x)^\vee$ le groupe des caractères de $K(x)$. Chaque $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$ détermine un sous-ensemble $K(x)^\vee_{\mathbf{G}'}$ de $K(x)^\vee$ et $K(x)^\vee$ est union disjointe des $K(x)^\vee_{\mathbf{G}'}$ quand $\mathbf{G}'$ décrit $\mathcal{E}(G)$. Pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$, on a alors l'égalité

$$(2) \qquad \theta_{\pi_{\mathbf{G}'}}(x) = |K(x)|^{-1} \sum_{\kappa \in K(x)^\vee_{\mathbf{G}'}} \sum_{k \in K(x)} \kappa(k)\theta_\pi(kx).$$

Soient $\epsilon \in G(F)$ un élément p'-compact mod $Z(G)$ et $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$. Posons $x = \epsilon exp(X)$ et supposons $x \in G_{ell}(F)$. Pour tout $k \in K(x)$, fixons $g_k \in G(\bar{F})$ tel que $kx = g_k^{-1} x g_k$. Posons $\epsilon_k = g_k^{-1}\epsilon g_k$ et $X_k = g_k^{-1} X g_k$. Alors $x_k = \epsilon_k exp(X_k)$ est une p'-décomposition de x_k. Soit $\lambda \in \mathfrak{o}_F - \{0\}$, posons $y = \epsilon exp(\lambda^2 X)$. On a $K(x) = K(y)$ et on voit comme dans la preuve du lemme 5.3 que l'on peut choisir $y_k = \epsilon_k exp(\lambda^2 X_k)$ pour tout $k \in K(y)$. L'égalité (2) pour y devient

$$\theta_{\pi_{\mathbf{G}'}}(\epsilon exp(\lambda^2 X)) = |K(x)|^{-1} \sum_{\kappa \in K(x)^\vee_{\mathbf{G}'}} \sum_{k \in K(x)} \kappa(k)\theta_\pi(\epsilon_k exp(\lambda^2 X)).$$

Supposons $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)^0_\xi]$. Comme fonctions de λ, les termes du membre de droite appartiennent à E. Donc aussi la fonction $\lambda \mapsto \theta_{\pi_{\mathbf{G}'}}(\epsilon exp(\lambda^2 X))$. C'est-à-dire que $\theta_{\pi_{\mathbf{G}'}}$ est un quasi-caractère de niveau 0 sur les elliptiques. D'après le lemme 6.6, $\pi_{\mathbf{G}'}$ appartient à $\mathbb{C}[Ell(G)^0_\xi]$. Cela démontre le (i) de l'énoncé.

Supposons $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)^{>0}_\xi]$, soit $\sigma \in \mathbb{C}[Ell(G)^0_\xi]$. Parce que la décomposition (1) est orthogonale, on a

$$< \pi_{\mathbf{G}'}, \sigma >_{ell} = < \pi_{\mathbf{G}'}, \sigma_{\mathbf{G}'} >_{ell} = < \pi, \sigma_{\mathbf{G}'} >_{ell} .$$

On vient de prouver que $\sigma_{\mathbf{G}'}$ était de niveau 0. Donc le produit de droite est nul. Il en estde même de celui de gauche. Cela étant vrai pour tout $\sigma \in \mathbb{C}[Ell(G)^0_\xi]$, cela entraîne $\pi_{\mathbf{G}'} \in \mathbb{C}[Ell(G)^{>0}_\xi]$. $\square$

7.7 Le cas quasi-déployé

Supposons G quasi-déployé. On note $SI(G)$ le quotient de $C_c^\infty(G(F))$ par le sous-espace des fonctions dont toutes les intégrales orbitales stables sont nulles. En identifiant les intégrales orbitales à des formes linéaires sur $I(G)$, c'est aussi le quotient de $I(G)$ par le sous-espace des éléments dont toutes les intégrales orbitales stables sont nulles. Notons $SI(G)^*$ l'espace des distributions stables sur $G(F)$, c'est-à-dire le dual de $SI(G)$. On note $\mathbb{C}[Irr(G)]^{st}$ le sous-espace des $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)]$ telles que $\Theta_\pi \in SI(G)^*$. On définit de même des espaces $\mathbb{C}[Ell(G)]^{st}$ etc...

On définit une projection linéaire $p^{st} : \mathbb{C}[Irr(G)] \to \mathbb{C}[Irr(G)]^{st}$ de la façon suivante. Il y a une donnée endoscopique elliptique maximale $\mathbf{G} = (G, {}^LG, 1)$ que l'on suppose appartenir à $\mathcal{E}(G)$. Dans la décomposition (1) de 7.6, on a l'égalité $\mathbb{C}[Ell(G)_\xi]^{st} = \mathbb{C}[Ell(G)_\xi]_{\mathbf{G}}$. Alors $p^{st} : \mathbb{C}[Ell(G)_\xi] \to \mathbb{C}[Ell(G)_\xi]^{st}$ est la projection associée à cette décomposition (1) de 7.6, c'est-à-dire qu'elle annule les composantes $\mathbb{C}[Ell(G)_\xi]_{\mathbf{G}'}$ pour $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$. Plus généralement, le sous-espace $\mathbb{C}[Ell(G)_{\mathbb{R}}]^{st}$ est engendré par les π_χ, où π parcourt $\mathbb{C}[Ell(G)_\xi]^{st}$, ξ parcourt le groupe des carcatères unitaires de $A_G(F)$ et χ parcourt $\mathcal{A}_G^*$. On définit $p^{st} : \mathbb{C}[Ell(G)_{\mathbb{R}}] \to \mathbb{C}[Ell(G)_{\mathbb{R}}]^{st}$ de sorte que, si $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)_\xi]$ et $\chi \in \mathcal{A}_G^*$, on ait $p^{st}(\pi_\chi) = p^{st}(\pi)_\chi$. On a l'égalité suivante, similaire à 6.2 (1) :

$$(1) \qquad \mathbb{C}[Irr(G)]^{st} = \oplus_{M \in \mathfrak{L}_{min}} Ind_M^G(\mathbb{C}[Ell(M)_{\mathbb{R}}]^{st, W^G(M)}).$$

Des projections que l'on vient de définir pour chaque Levi se déduit alors la projection p^{st} cherchée.

Corollaire. *(i) Pour $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)^0]$, on a $p^{st}(\pi) \in \mathbb{C}[Irr(G)^0]^{st}$. Pour $\pi \in \mathbb{C}[Irr(G)^{>0}]$, on a $p^{st}(\pi) \in \mathbb{C}[Irr(G)^{>0}]^{st}$.*

(ii) On a l'égalité $p^0 \circ p^{st} = p^{st} \circ p^0$.

Preuve. Le (i) résulte immédiatement de la proposition 7.6 et le (ii) est équivalent au (i). □

7.8 Un premier résultat de transfert

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s) \in \mathcal{E}(G)$. On note $SI_{\lambda_1}(G_1)$ la variante de $SI(G_1)$ où l'on impose que les fonctions se transforment par translations par $C_1(F)$ selon le caractère λ_1^{-1}. On définit de façon similaire $SI_{\lambda_1}(G_1)^*$ (c'est le dual de $SI_{\lambda_1}(G_1)$). On note $Aut(\mathbf{G}')$ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{G}'$, cf. [14] I.1.5. Ce groupe agit naturellement sur $SI_{\lambda_1}(G_1)$ et $SI_{\lambda_1}(G_1)^*$, cf. [14] I.2.6.

Remarque. La définition adoptée ici et dans [14] n'est pas celle que l'on trouve dans d'autres références. Elle diffère de la définition adoptée notamment par Arthur par torsion par un caractère de sorte que le facteur Δ_1 soit invariant par cette action. Cela explique la disparition dans nos formules des caractères que l'on trouve dans celles d'Arthur.

On sait définir un transfert $I(G) \to SI_{\lambda_1}(G_1)$, dont l'image est contenue dans le sous-espace des invariants par $Aut(\mathbf{G}')$. Une conséquence de [3] est qu'il existe dualement une application linéaire de transfert spectral

$$transfert : \mathbb{C}[Irr(G_1)_{\lambda_1}]^{st} \to \mathbb{C}[Irr(G)].$$

Elle est invariante par l'action de $Aut(\mathbf{G}')$, c'est-à-dire qu'elle se factorise en

$$transfert : \mathbb{C}[Irr(G_1)_{\lambda_1}]^{st} \to \mathbb{C}[Irr(G_1)_{\lambda_1}]^{st,Aut(\mathbf{G}')} \to \mathbb{C}[Irr(G)],$$

où la première application est la projection naturelle.

Proposition. *Cette application $transfert$ envoie $\mathbb{C}[Irr(G_1)^0_{\lambda_1}]^{st}$ dans $\mathbb{C}[Irr(G)^0]$.*

Preuve. Soit $\pi' \in \mathbb{C}[Irr(G_1)^0_{\lambda_1}]^{st}$, posons $\pi = transfert(\pi')$. Soit $\epsilon \in G(F)_{p'}$ et soit $X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$. Posons $x = \epsilon exp(X)$ et supposons $x \in G_{reg}(F)$. Fixons un ensemble de représentants $X^{\mathbf{G}'}(x)$ des classes de conjugaison stable dans $G'(F)$ qui correspondent à celle de x dans $G(F)$. Pour tout $x' \in X^{\mathbf{G}'}(x)$, on fixe un relèvement x'_1 de x' dans $G'_1(F)$. Par définition, on a l'égalité

$$(1) \qquad \theta_\pi(x)D^G(x)^{1/2} = \sum_{x' \in X^{\mathbf{G}'}(x)} \Delta_1(x'_1, x)\theta_{\pi'}(x'_1)D^{G'}(x')^{1/2}.$$

On note T le commutant de x dans G et, pour tout $x' \in X^{\mathbf{G}'}(x)$, on note $T_{x'}$ celui de x' dans G'. On a des isomorphismes $\xi_{T,T_{x'}} : T \to T_{x'}$, cf. 7.3. On pose $\epsilon_{x'} = \xi_{T,T_{x'}}(\epsilon)$, $X_{x'} = \xi_{T,T_{x'}}(X)$. Alors $x' = \epsilon_{x'}exp(X_{x'})$ est une p'-décomposition. On fixe un relèvement $X_{1,x'}$ de $X_{x'}$ dans $\mathfrak{g}'_{1,tn}(F)$ et un relèvement $\epsilon_{1,x'}$ de $\epsilon_{x'}$ dans $G'_1(F)$ de sorte que $x'_1 = \epsilon_{1,x'}exp(X_{1,x'})$. Soit $\lambda \in F^\times$ tel que $\lambda X \in \mathfrak{g}_{\epsilon,tn}(F)$, posons $y = \epsilon exp(\lambda X)$. Alors, pour tout $x' \in X^{\mathbf{G}'}(x)$, l'élément $\epsilon_{x'}exp(\lambda X_{x'})$ correspond à y. Montrons que

(2) si $x', x'' \in X^{\mathbf{G}'}(x)$ et $x' \neq x''$, alors $\epsilon_{x'}exp(\lambda X_{x'})$ n'est pas stablement conjugué à $\epsilon_{x''}exp(\lambda X_{x''})$.

Supposons qu'ils sont stablement conjugués. Il existe alors $h \in G'(\bar{F})$ tel que $h^{-1}\epsilon_{x'}exp(\lambda X_{x'})h = \epsilon_{x''}exp(\lambda X_{x''})$. Puisque les éléments en question sont fortement réguliers, l'opérateur de conjugaison par h se restreint en un isomorphisme $Int_h : T_{x''} \to T_{x'}$. Le composé $\Xi = \xi^{-1}_{T,T_{x'}} \circ Int_h \circ \xi_{T,T_{x''}}$ est un automorphisme de T fixant y. De plus, par construction des isomorphismes $\xi_{T,T_{x'}}$ et $\xi_{T,T_{x''}}$, Ξ est forcément de la forme $Int_{h'}$ pour un élément $h' \in Norm_G(T)(\bar{F})$. Puisqu'il fixe y et que y est fortement régulier, c'est l'identité. Mais alors $Int_h(\epsilon_{x''}) = \epsilon_{x'}$, $Int_h(X_{x''}) = X_{x'}$ donc $h^{-1}x'h = x''$, ce qui contredit la définition de $X^{\mathbf{G}'}(x)$. Cela démontre (2).

Cette assertion entraîne que $X^{\mathbf{G}'}(y)$ a au moins autant d'éléments que $X^{\mathbf{G}'}(x)$. La situation étant symétrique en x et y, ces ensembles ont même nombre d'éléments. Alors (2) entraîne que l'on peut choisir pour $X^{\mathbf{G}'}(y)$ l'ensemble des $\epsilon_{x'}exp(\lambda X_{x'})$ pour $x' \in X^{\mathbf{G}'}(x)$. On applique cela en remplaçant λ par λ^2 pour $\lambda \in \mathfrak{o}_F - \{0\}$. L'égalité (1) pour $y = \epsilon exp(\lambda^2 X)$ devient

$$(3) \qquad \theta_\pi(\epsilon exp(\lambda^2X))D^G(\epsilon exp(\lambda^2X))^{1/2} = \sum_{x' \in X^{\mathbf{G}'}(x)} \Delta_1(\epsilon_{1,x'}exp(\lambda^2X_{1,x'}), \epsilon exp(\lambda^2X))$$

$$\theta_{\pi'}(\epsilon_{1,x'}exp(\lambda^2X_{1,x'}))D^{G'}(\epsilon_{x'}exp(\lambda^2X_{x'}))^{1/2}.$$

On considère ces termes comme des fonctions de λ. Comme on l'a dit plusieurs fois, les discriminants de Weyl contribuent par des puissances de $|\lambda|_F$. D'après le lemme 7.4, le facteur de transfert est constant. Puisque π' est de niveau 0, le théorème 6.7 dit que $\Theta_{\pi'}$ est un quasi-caractère de niveau 0. Donc les termes $\theta_{\pi'}(\epsilon_{1,x'}exp(\lambda^2X_{1,x'}))$ appartiennent à E. Donc $\lambda \mapsto \theta_\pi(\epsilon exp(\lambda^2X))$ appartient à E, c'est-à-dire que Θ_π est un quasi-caractère de niveau 0. D'après le même théorème 6.7, π appartient à $\mathbb{C}[Irr(G)^0]$.□

7.9 Une réciproque partielle

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s) \in \mathcal{E}(G)$. L'application *transfert* se restreint en une application linéaire

$$transfert_{ell} : \mathbb{C}[Ell(G_1)_{\lambda_1}]^{st} \to \mathbb{C}[Ell(G)].$$

Proposition. *Soit $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)^0]$. Supposons que π appartienne à l'image de l'application $transfert_{ell}$. Alors il existe $\pi' \in \mathbb{C}[Ell(G_1)^0_{\lambda_1}]^{st}$ telle que $transfert_{ell}(\pi') = \pi$.*

Preuve. Fixons $\sigma' \in \mathbb{C}[Ell(G_1)_{\lambda_1}]^{st}$ tel que $transfert_{ell}(\sigma') = \pi$. Décomposons σ' en somme $\sum_{i=1,\dots,h} \sigma'_i$, où σ'_i est une combinaison linéaire de représentations elliptiques de $G'_1(F)$ dont le caractère central se restreint en un même caractère ξ'_i de $A_{G'_1}(F)$. On suppose les ξ'_i distincts. On a introduit un caractère ζ_1 en 7.5. Le caractère $\xi'_i(\zeta_1)_{|A_{G'_1}(F)}$ de $A_{G'_1}(F)$ se factorise par la projection $A_{G'_1}(F) \to A_G(F)$ en un caractère ξ_i de ce dernier groupe et les caractères ξ_i sont tous distincts. On a l'égalité $\pi = \sum_{i=1,\dots,h} transfert_{ell}(\sigma'_i)$ et, puisque π est de niveau 0, on en déduit par interpolation que toutes les composantes $transfert_{ell}(\sigma'_i)$ sont de niveau 0. On peut remplacer π par chacune de ces composantes et cela ramène le problème au cas où $A_{G'_1}(F)$ agit sur σ' selon un caractère ξ'. Ensuite, on peut encore tordre σ' par un élément de $\mathcal{A}^*_{G'_1}$ et supposer que ξ' est unitaire.

Pour tout élément $\epsilon_1 \in G'_1(F)$ qui est p'-compact mod $Z(G'_1)$, fixons un voisinage $\mathfrak{V}_{\epsilon_1}$ de 0 dans $\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1}(F)$ et une famille $(c_{\epsilon_1,\mathcal{O}})_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1})}$ de nombres complexes de sorte que, pour tout $X_1 \in \mathfrak{V}_{\epsilon_1}$ tel que $\epsilon_1 exp(X_1) \in G'_{1,reg}(F)$, on ait l'égalité

$$(1) \qquad \theta_{\sigma'}(\epsilon_1 exp(X_1)) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1})} c_{\epsilon_1,\mathcal{O}} \hat{j}(\mathcal{O}, X_1).$$

Le voisinage $\mathfrak{V}_{\epsilon_1}$ n'est pas uniquement déterminé mais les nombres complexes $c_{\epsilon_1,\mathcal{O}}$ le sont. Soit $z_1 \in Z(G'_1)_{tu}(F)$. On peut remplacer ϵ_1 par $\epsilon_1 z_1$. Cela ne change pas l'ensemble $Nil(\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1})$. Montrons que :

(2) pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1})$, la fonction $z_1 \mapsto c_{\epsilon_1 z_1,\mathcal{O}}$ est localement constante ;

(3) on peut choisir les voisinages $\mathfrak{V}_{\epsilon_1}$ de sorte que la fonction $z_1 \mapsto \mathfrak{V}_{\epsilon_1 z_1}$ soit localement constante.

En effet, choisissons un sous-groupe $\mathfrak{Y}_{\epsilon_1} \subset \mathfrak{g}_{\epsilon_1}(F)$ de sorte que $\mathfrak{Y}_{\epsilon_1} + \mathfrak{V}_{\epsilon_1} \subset \mathfrak{V}_{\epsilon_1}$. On vérifie que, si $z_1 \in \mathfrak{Y}_{\epsilon_1}$, on peut choisir $\mathfrak{V}_{\epsilon_1 z_1} = \mathfrak{V}_{\epsilon_1}$ et que l'on a $c_{\epsilon_1 z_1,\mathcal{O}} = c_{\epsilon_1,\mathcal{O}}$ pour tout $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1})$. Cela prouve (2) et (3).

Puisque $Z(G'_1)_{tu}(F)$ est compact, l'assertion (3) se renforce immédiatement en : on peut choisir les voisinages $\mathfrak{V}_{\epsilon_1}$ de sorte que $\mathfrak{V}_{\epsilon_1 z_1} = \mathfrak{V}_{\epsilon_1}$ pour tout $z_1 \in Z(G'_1)_{tu}(F)$. On suppose désormais qu'il en est ainsi. Pour $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1})$, posons

$$\bar{c}_{\epsilon_1,\mathcal{O}} = mes(Z(G'_1)_{tu}(F))^{-1} \int_{Z(G'_1)_{tu}(F)} c_{\epsilon_1 z_1,\mathcal{O}} \, dz_1.$$

On a $\bar{c}_{\epsilon_1 z_1,\mathcal{O}} = \bar{c}_{\epsilon_1,\mathcal{O}}$ pour tout $z_1 \in Z(G'_1)_{tu}(F)$. On définit une fonction τ sur $G'_{1,reg}(F)$, à support contenu dans l'ensemble $G'_{1,comp}(F)$ des éléments de $G'_1(F)$ qui sont compacts mod $Z(G'_1)$ de la façon suivante. Pour $x_1 \in G'_{1,comp}(F) \cap G'_{1,reg}(F)$, on choisit une p'-décomposition $x_1 = \epsilon_1 exp(X_1)$. L'élément ϵ_1 est p'-compact mod $Z(G'_1)$. On pose

$$\tau(x_1) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1})} \bar{c}_{\epsilon_1,\mathcal{O}} \hat{j}(\mathcal{O}, X_1).$$

Cela ne dépend pas de la p'-décomposition choisie car, d'après 4.3(2), toute autre décomposition est de la forme $x_1 = (\epsilon_1 exp(Z_1))exp(X_1 - Z_1)$, avec $Z_1 \in \mathfrak{z}(G'_1)_{tn}(F)$ et on a fait ce qu'il fallait pour que la formule ci-dessus soit insensible à un tel changement. Il résulte de cette définition que, pour tout élément $\epsilon_1 \in G'_1(F)$ qui est p'-compact mod $Z(G'_1)$ et pour tout $X_1 \in \mathfrak{V}_{\epsilon_1}$ tel que $\epsilon_1 exp(X_1) \in G_{1,reg}(F)$, on a l'égalité

$$(4) \qquad \tau(\epsilon_1 exp(X_1)) = mes(Z(G'_1)_{tu}(F))^{-1} \int_{Z(G'_1)_{tu}(F)} \theta_{\sigma'}(\epsilon_1 z_1 exp(X_1))\, dz_1.$$

Montrons que

(5) la fonction τ est constante sur les classes de conjugaison stable.

Soient $x_1, x_2 \in G_{1,reg}(F)$ que l'on suppose stablement conjugués. On fixe $h \in G_{1,reg}(\bar{F})$ tel que $x_2 = h^{-1}x_1 h$. On choisit une p'-décomposition $x_1 = \epsilon_1 exp(X_1)$. Posons $\epsilon_2 = h^{-1}\epsilon_1 h$ et $X_2 = h^{-1}X_1 h$. Alors $x_2 = \epsilon_2 exp(X_2)$ et cette égalité est une p'-décomposition. On veut prouver que $\tau(x_1) = \tau(x_2)$. Remarquons que, ou bien x_1 et x_2 sont tous deux compacts mod $Z(G'_1)$, ou bien aucun d'eux ne l'est. Dans le second cas, on a $\tau(x_1) = \tau(x_2) = 0$. Supposons que x_1 et x_2 sont compacts mod $Z(G'_1)$. Pour $\lambda \in \mathfrak{o}_F - \{0\}$, les éléments $\epsilon_1 exp(\lambda^2 X_1)$ et $\epsilon_2 exp(\lambda^2 X_2)$ sont encore stablement conjugués. Si $val_F(\lambda)$ est assez grand, on a $\lambda^2 X_1 \in \mathfrak{V}_{\epsilon_1}$ et $\lambda^2 X_2 \in \mathfrak{V}_{\epsilon_2}$, donc $\tau(\epsilon_1 exp(\lambda^2 X_1))$ et $\tau(\epsilon_2 exp(\lambda^2 X_2))$ sont calculés par la formule (4). Pour $z_1 \in Z(G'_1)_{tu}(F)$, les éléments $\epsilon_1 z_1 exp(\lambda^2 X_1)$ et $\epsilon_2 z_1 exp(\lambda^2 X_2)$ sont encore stablement conjugués. Puisque σ' est stable, on a donc

$$\theta_{\sigma'}(\epsilon_1 z_1 exp(\lambda^2 X_1)) = \theta_{\sigma'}(\epsilon_2 z_1 exp(\lambda^2 X_2)).$$

La formule (4) entraîne alors l'égalité $\tau(\epsilon_1 exp(\lambda^2 X_1)) = \tau(\epsilon_2 exp(\lambda^2 X_2))$. Cela est vrai pour $val_F(\lambda)$ assez grande. Mais, comme fonctions de λ, les deux termes de cette égalité appartiennent à E. Ils sont donc égaux pour tout λ. En $\lambda = 1$, cela entraîne l'égalité cherchée $\tau(x_1) = \tau(x_2)$ qui prouve (5).

En particulier, τ est invariante par conjugaison. Alors τ est la fonction associée à un quasi-caractère sur $G'_1(F)$ de niveau 0. Comme $\Theta_{\sigma'}$, ce quasi-caractère se transforme par $A_{G'_1}(F)$ selon le caractère ξ et par $C_1(F)$ selon λ_1. D'après le théorème 5.9, il existe un élément $d_1 \in \mathcal{D}_{comp}(G'_1)$ tel que ce quasi-caractère soit égal à $D^{G'_1}[d_1]$. Notons $d_{1,cusp}$ la composante cuspidale de d_1. Cet élément conserve les mêmes propriétés que ci-dessus de transformation par $A_{G'_1}(F)$ et $C_1(F)$. On note π' l'élément de $\mathbb{C}[Ell(G'_1)^0_{\xi'}]$ tel que $\Delta_{cusp}(\pi') = d_{1,cusp}$, cf. le (ii) du lemme 6.4. Par définition, $\theta_{\pi'}$ coïncide avec τ sur $G'_{1,ell}(F)$ et cette fonction est invariante par conjugaison stable. Parce que π' est elliptique, cela entraîne que π' est stable, c'est-à-dire $\pi' \in \mathbb{C}[Ell(G'_1)^0_{\xi'}]^{st}$, cf. [3] théorème 6.1. Il est clair que la restriction à $C_1(F)$ du caractère central de π' est λ_1.

Pour prouver la proposition, il suffit de prouver que $transfert_{ell}(\pi') = \pi$. Or π et π' sont elliptiques. D'après [3] théorème 6.2, il suffit de prouver que $transfert_{ell}(\pi')$ et π coïncident sur $G_{ell}(F)$. C'est-à-dire qu'en posant $\Pi = transfert_{ell}(\pi')$, il suffit de prouver

(6) pour tout $x \in G_{ell}(F)$, on a l'égalité $\theta_\Pi(x) = \theta_\pi(x)$.

On fixe une p'-décomposition $x = \epsilon exp(X)$. Soit $\lambda \in \mathfrak{o}_F - \{0\}$. L'égalité (3) de 7.8 dit que

$$\theta_\Pi(\epsilon exp(\lambda^2 X)) D^G(\epsilon exp(X))^{1/2} = \sum_{x' \in X^{\mathbf{G}'}(x)} \Delta_1(\epsilon_{1,x'} exp(\lambda^2 X_{1,x'}), \epsilon exp(\lambda^2 X))$$

$$\theta_{\pi'}(\epsilon_{1,x'} exp(\lambda^2 X_{1,x'})) D^{G'}(\epsilon_{x'} exp(\lambda^2 X_{x'}))^{1/2}.$$

Les éléments intervenant à droite sont elliptiques, on peut remplacer la fonction $\theta_{\pi'}$ par τ. Si val_F est assez grand, on utilise (4) et on obtient

$$\theta_\Pi(\epsilon exp(\lambda^2 X))D^G(\epsilon exp(X))^{1/2} = mes(Z(G'_1)_{tu}(F))^{-1}\int_{Z(G'_1)_{tu}(F)}\sum_{x'\in X^{\mathbf{G}'}(x)}$$

$$\Delta_1(\epsilon_{1,x'}exp(\lambda^2 X_{1,x'}),\epsilon exp(\lambda^2 X))\theta_{\sigma'}(\epsilon_{1,x'}z_1 exp(\lambda^2 X_{1,x'}))D^{G'}(\epsilon_{x'}exp(\lambda^2 X_{x'}))^{1/2}\,dz_1.$$

Notons z et z' les images de z_1 dans $Z(G)_{tu}(F)$ et $Z(G')_{tu}(F)$. D'après 7.5 (1), on peut remplacer ci-dessus $\Delta_1(\epsilon_{1,x'}exp(\lambda^2 X_{1,x'}),\epsilon exp(\lambda^2 X))$ par $\Delta_1(\epsilon_{1,x'}z_1 exp(\lambda^2 X_{1,x'}),\epsilon z exp(\lambda^2 X))$. On peut aussi remplacer $D^{G'}(\epsilon_{x'}exp(\lambda^2 X_{x'}))$ par $D^{G'}(\epsilon_{x'}z'exp(\lambda^2 X_{x'}))$. On obtient

(7) $$\theta_\Pi(\epsilon exp(\lambda^2 X))D^G(\epsilon exp(X))^{1/2} = mes(Z(G'_1)_{tu}(F))^{-1}\int_{Z(G'_1)_{tu}(F)} B(z_1)\,dz_1,$$

où

$$B(z_1) = \sum_{x'\in X^{\mathbf{G}'}(x)}\Delta_1(\epsilon_{1,x'}z_1 exp(\lambda^2 X_{1,x'}),\epsilon z exp(\lambda^2 X))$$

$$\theta_{\sigma'}(\epsilon_{1,x'}z_1 exp(\lambda^2 X_{1,x'}))D^{G'}(\epsilon_{x'}z'exp(\lambda^2 X_{x'}))^{1/2}.$$

Il est clair que $B(z_1)$ est le membre de droite de la formule (3) de 7.8 appliquée à la représentation σ', pour le point $\epsilon z exp(\lambda^2 X)$ de $G(F)$. Puisque $\pi = transfert_{ell}(\sigma')$, on obtient

$$B(z_1) = \theta_\pi(\epsilon z exp(\lambda^2 X))D^G(\epsilon z exp(\lambda^2 X))^{1/2}.$$

Le z disparaît du discriminant de Weyl. Il disparaît aussi du premier terme car π est de niveau 0 par hypothèse. D'où

$$B(z_1) = \theta_\pi(\epsilon exp(\lambda^2 X))D^G(\epsilon exp(\lambda^2 X))^{1/2},$$

puis, d'après (7),

$$\theta_\Pi(\epsilon exp(\lambda^2 X)) = \theta_\pi(\epsilon exp(\lambda^2 X)).$$

On a supposé $val_F(\lambda)$ assez grande. Mais, puisque π' est de niveau 0, Π l'est aussi d'après la proposition 7.8. Il en est de même pour π par hypothèse. Les deux membres de la formule ci-dessus appartiennent donc à E. Etant égaux pour $val_F(\lambda)$ assez grande, ils sont égaux pour tout λ. En $\lambda = 1$, cela prouve (6) et la proposition. □

7.10 Le théorème principal

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s) \in \mathcal{E}(G)$.

Théorème. *L'application*

$$transfert : \mathbb{C}[Irr(G_1)_{\lambda_1}]^{st} \to \mathbb{C}[Irr(G)]$$

vérifie l'égalité $p^0 \circ transfert = transfert \circ p^0$.

Remarque. Les deux p^0 de l'égalité ne sont pas les mêmes : le premier vit sur le groupe G et le second sur G'_1.

Preuve. On a l'égalité

$$(1) \qquad \mathbb{C}[Irr(G_1)_{\lambda_1}]^{st} = \oplus_{M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min}} Ind_{M'_1}^{G'_1}(\mathbb{C}[Ell(M'_1)_{\mathbb{R},\lambda_1}]^{st, W^{G'}(M')}),$$

cf. 7.7 (1), dont on a adapté les notations de façon que l'on espère compréhensible. En particulier, chaque Levi M' de G' détermine un unique Levi M'_1 de G'_1 (son image réciproque dans ce groupe). Notons $\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$ l'ensemble des éléments de $\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min}$ qui sont "relevants" pour G (dans le cas où G est quasi-déployé, tout élément de $\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min}$ est relevant). Il y a une application naturelle de $\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$ dans $\underline{\mathcal{L}}^{G}_{min}$, cf. [14] 1.3.4. Si $M' \mapsto M$ par cette application, il se déduit de $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', s^M)$ de M, qui est elliptique. Soit $M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$, notons $M \in \underline{\mathcal{L}}^{G}_{min}$ le Levi qui lui correspond. On a l'égalité $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_{M'}$. L'application $transfert_{ell} : \mathbb{C}[Ell(M'_1)_{\lambda_1}]^{st} \to \mathbb{C}[Ell(M)]$ se prolonge en une application linéaire $\mathbb{C}[Ell(M'_1)_{\mathbb{R},\lambda_1}]^{st} \to \mathbb{C}[Ell(M)_{\mathbb{R}}]$ compatible aux opérateurs de torsion par des éléments $\chi \in \mathcal{A}^*_M = \mathcal{A}^*_{M'}$. On la compose avec la projection naturelle sur les invariants par $W^G(M)$ et on obtient par restriction une application linéaire

$$\mathbb{C}[Ell(M'_1)_{\mathbb{R},\lambda_1}]^{st, W^{G'}(M')} \to \mathbb{C}[Ell(M)_{\mathbb{R}}]^{W^G(M)}.$$

Le transfert commute à l'induction et on en déduit une application linéaire de l'espace $Ind_{M'_1}^{G'_1}(\mathbb{C}[Ell(M'_1)_{\mathbb{R},\lambda_1}]^{st, W^{G'}(M')})$ dans le membre de droite de la relation (1) de 6.2, c'est-à-dire dans $\mathbb{C}[Irr(G)]$. Si maintenant $M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min} - \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$, on envoie l'espace $Ind_{M'_1}^{G'_1}(\mathbb{C}[Ell(M'_1)_{\mathbb{R},\lambda_1}]^{st, W^{G'}(M')})$ dans $\mathbb{C}[Irr(G)]$ par l'application nulle. La somme des applications ainsi définies sur tout $M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}$ est une application linéaire du membre de droite de (1) ci-dessus dans $\mathbb{C}[Irr(G)]$. C'est l'application $transfert$. Il résulte de ces considérations que, pour démontrer le théorème, il suffit de prouver l'égalité analogue pour les applications $transfert_{ell}$ associés aux différents Levi de G' qui sont relevants pour G. On ne perd rien à considérer seulement l'application $transfert_{ell}$ associée à G' lui-même. C'est-à-dire qu'il suffit de prouver

(2) on a l'égalité $p^0 \circ transfert_{ell} = transfert_{ell} \circ p^0$.

Comme dans le corollaire 7.7, cela équivaut aux deux assertions

(3) si $\pi' \in \mathbb{C}[Ell(G'_1)^0_{\lambda_1}]^{st}$, on a $transfert_{ell}(\pi') \in \mathbb{C}[Ell(G)^0]$;

(4) si $\pi' \in \mathbb{C}[Ell(G'_1)_{\lambda_1}]^{st}$ vérifie $p^0(\pi') = 0$, alors $p^0 \circ transfert_{ell}(\pi') = 0$.

La proposition 7.8 est justement l'assertion (3). Démontrons (4). Comme toujours, on peut décomposer π' en $\sum_{i=1,\dots,h} \pi'_i$ où π'_i est une combinaison linéaire de représentations elliptiques de $G'_1(F)$ dont le caractère central se restreint en un même caractère unitaire ξ'_i de $A_{G'_1}(F)$. Ces représentations vérifient les mêmes hypothèses que π' et il suffit de prouver que $p^0 \circ transfert_{ell}(\pi'_i) = 0$ pour tout i. En oubliant cette construction, on peut fixer un caractère unitaire ξ' de $A_{G'_1}(F)$ et supposer que $\pi' \in \mathbb{C}[Ell(G'_1)_{\xi',\lambda_1}]^{st}$. Le caractère ξ' détermine un caractère ξ de $A_G(F)$ comme on l'a vu dans la preuve de 7.9 et l'application $transfert_{ell}$ envoie $\mathbb{C}[Ell(G'_1)_{\xi',\lambda_1}]^{st}$ dans $\mathbb{C}[Ell(G)_{\xi}]$. L'action du groupe $Aut(\mathbf{G})$ conserve le premier espace : elle préserve le caractère ξ' car celui-ci est uniquement déterminé par ξ. On peut remplacer π' par sa projection sur le sous-espace des invariants, cela ne change pas $transfert_{ell}(\pi')$. Cela ne modifie pas non plus la condition $p^0(\pi') = 0$ car l'action de $Aut(\mathbf{G}')$ conserve le sous-espace $\mathbb{C}[Ell(G'_1)^0_{\xi',\lambda_1}]^{st}$. Bref, on peut supposer $\pi' \in \mathbb{C}[Ell(G'_1)_{\xi',\lambda_1}]^{st, Aut(\mathbf{G}')}$. On pose $\pi = transfert_{ell}(\pi')$. Il faut maintenant se rappeler la décomposition (1) de 7.6. L'application $transfert_{ell}$ se restreint en un isomorphisme

$$\mathbb{C}[Ell(G'_1)_{\xi',\lambda_1}]^{st, Aut(\mathbf{G}')} \to \mathbb{C}[Ell(G)_{\xi}]_{\mathbf{G}'}$$

qui est une similitude pour les produits scalaires elliptiques. On note c le rapport de similitude. En particulier, $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)_\xi]_{\mathbf{G}'}$. Il résulte de la proposition 7.6 que $p^0(\pi)$ appartient aussi à $\mathbb{C}[Ell(G)_\xi]_{\mathbf{G}'}$, donc appartient à l'image de $transfert_{ell}$. D'après la proposition 7.9, il existe $\pi'^0 \in \mathbb{C}[Ell(G_1)^0_{\lambda_1}]^{st}$ telle que $transfert_{ell}(\pi'^0) = p^0(\pi)$. Les mêmes arguments que ci-dessus permettent de supposer que $\pi'^0 \in \mathbb{C}[Ell(G'_1)^0_{\xi',\lambda_1}]^{st,Aut(\mathbf{G}')}$. Parce que p^0 est une projection orthogonale, on a $< p^0(\pi), p^0(\pi) >_{ell} = < p^0(\pi), \pi >_{ell}$. Donc

$$< p^0(\pi), p^0(\pi) >_{ell} = < transfert_{ell}(\pi'^0), transfert_{ell}(\pi') >_{ell}$$

$$= c^{-1} < \pi'^0, \pi' >_{ell} = c^{-1} < \pi'^0, p^0(\pi') >_{ell},$$

toujours parce que p^0 est une projection orthogonale. Puisque $p^0(\pi') = 0$, cela entraîne $< p^0(\pi), p^0(\pi) >_{ell} = 0$, d'où $p^0(\pi) = 0$. Cela achève la preuve de (4) et du théorème. $\square$

8 Quelques conséquences

8.1 Le cas quasi-déployé derechef

Supposons G quasi-déployé.

Corollaire. *La projection de Bernstein p^0 de $I(G)$ se quotiente en une projection p^0 de $SI(G)$.*

Preuve. Notons $I^{inst}(G)$ le noyau de la projection $I(G) \to SI(G)$. On doit prouver que p^0 conserve ce sous-espace. C'est-à-dire, soit $f \in I^{inst}(G)$, on doit prouver que $p^0(f) \in I^{inst}(G)$. Il suffit pour cela de prouver que, pour tout $\pi^{st} \in \mathbb{C}[Irr(G)]^{st}$, on a $\Theta_{\pi^{st}}(p^0(f)) = 0$. D'après les propriétés des projecteurs de Bernstein, on a

$$\Theta_{\pi^{st}}(p^0(f)) = \Theta_{p^0(\pi^{st})}(f).$$

D'après le (ii) du corollaire 7.7, on a $p^0(\pi^{st}) = p^0 \circ p^{st}(\pi^{st}) = p^{st} \circ p^0(\pi^{st})$. Donc $p^0(\pi^{st}) \in \mathbb{C}[Irr(G)]^{st}$. Alors $\Theta_{p^0(\pi^{st})}(f) = 0$ puisque $f \in I^{inst}(G)$. $\square$

8.2 Transfert de fonctions

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s) \in \mathcal{E}(G)$.

Corollaire. *L'application $transfert : I(G) \to SI_{\lambda_1}(G_1)$ vérifie l'égalité $p^0 \circ transfert = transfert \circ p^0$.*

Cela se déduit du théorème 7.10 comme le corollaire précédent se déduisait du corollaire 7.7.

8.3 Stabilité dans l'espace $\mathcal{D}_{cusp}$

Supposons G quasi-déployé. Disons qu'un élément $d \in \mathcal{D}_{cusp}(G)$ est stable si la distribution $D^G[d]$ l'est et qu'il est stable sur les elliptiques si la distribution $D^G[d]$ l'est, c'est-à-dire si $\theta_{D^G[d]}$ est constante sur les classes de conjugaison stable contenues dans $G_{ell}(F)$. On note $\mathcal{D}_{cusp}(G)^{st}$ le sous-espace des éléments stables dans $\mathcal{D}_{cusp}(G)$.

Proposition. *Soit $d \in \mathcal{D}_{cusp}(G)$. Alors d est stable si et seulement si d est stable sur les elliptiques.*

Preuve. Utilisons la décomposition $\mathcal{D}_{cusp}(G) = \prod_{\nu \in \mathcal{N}} \mathcal{D}_{cusp}(G)^{\nu}$. Il est clair que d est stable, resp. stable sur les elliptiques, si et seulement si chaque composante d^{ν} est stable, resp. stable sur les elliptiques. On peut donc fixer $\nu \in \mathcal{N}$ et supposer $d \in \mathcal{D}_{cusp}(G)^{\nu}$. Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des restrictions à $A_G(F)_c$ de caractères modérément ramifiés de $A_G(F)$. Pour $\xi \in \mathcal{X}$, posons $d_{\xi} = mes(A_G(F)_c)^{-1} \int_{A_G(F)_c} \xi(a)^{-1} d^a \, da$. Alors $d = \sum_{\xi \in \mathcal{X}} d_{\xi}$. De nouveau, d est stable, resp. stable sur les elliptiques, si et seulement si chaque composante d_{ξ} est stable, resp. stable sur les elliptiques. On peut fixer $\xi \in \mathcal{X}$ et supposer que d se transforme par $A_G(F)_c$ selon ξ. Prolongeons ξ en un caractère unitaire de $A_G(F)$. Alors il existe un unique $\mathbf{d} \in \mathcal{D}_{cusp}(G)$ tel que :

$\mathbf{d} \in \mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$, c'est-à-dire $\mathbf{d}$ se transforme par $A_G(F)$ selon ξ ;

pour $\nu' \in \mathcal{N}$, la composante $\mathbf{d}^{\nu'}$ est nulle si $\nu' \notin \nu + w_G(A_G(F))$;

$\mathbf{d}^{\nu} = d^{\nu}$.

On voit que d est stable, resp. stable sur les elliptiques, si et seulement si $\mathbf{d}$ l'est. En oubliant cette construction, on peut fixer un caractère unitaire ξ de $A_G(F)$ et supposer $d \in \mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$. D'après le (ii) du lemme 6.4, il existe un unique $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)^0_{\xi}]$ telle que $\Delta_{cusp}(\pi) = d$. Alors, d'après 6.3 (1), Θ_{π} est stable sur les elliptiques. D'après [3] théorème 6.1, π est stable. Soient $M \in \mathcal{L}_{min}$ et $P \in \mathcal{P}(M)$. Puisque π est stable, il en est de même du module de Jacquet π_P. D'après 6.3 (1), $\Delta^M_{\pi_P,cusp}$ est stable sur les elliptiques. A fortiori, sa projection $\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp}$ dans $\mathcal{D}_{cusp,G-comp}(M)$ est stable sur les elliptiques (cette projection consiste à restreindre le support à un sous-ensemble invariant par conjugaison stable). Supposons que M est un Levi propre. On peut raisonner par récurrence et supposer notre proposition déjà démontrée pour M. Donc $\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp}$ est stable. C'est-à-dire que $D^M(\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp})$ est une distribution stable sur $M(F)$. La stabilité se conserve par induction donc $D^G(\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp})$ est une distribution stable sur $G(F)$. La formule 6.3 (1) exprime alors $D^G[d]$ comme la différence entre Θ_{π} qui est stable et la somme sur les $M \neq G$ de distributions stables. Donc $D^G[d]$ est stable et d l'est alors par définition. $\square$

8.4 Transfert et module de Jacquet

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s) \in \mathcal{E}(G)$. On a rappelé dans la preuve du théorème 7.10 l'existence d'une application

(1) $\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel} \to \underline{\mathcal{L}}^{G}_{min}$.

On note simplement $M' \mapsto M$ cette application. Rappelons quelques-unes de ses propriétés. Elles sont "bien connues des spécialistes", bien que nous n'en ayons pas trouvé d'énoncé clair dans la littérature ([14] est très incomplet).

Si $M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$ s'envoie sur $M \in \underline{\mathcal{L}}^{G}_{min}$, M' est complété en une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', s^M)$ de M, qui est elliptique. En particulier, il y a un isomorphisme $A_{M'} \simeq A_M$. Les racines de $A_{M'}$ dans G' sont aussi des racines de A_M dans G. Ainsi, la chambre dans $\mathcal{A}^*_M$ associée à un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$ est contenue dans la chambre dans $\mathcal{A}^*_{M'}$ associée à un certain sous-groupe parabolique de composante de Levi M', que l'on note P'_P.

On sait définir une correspondance entre classes de conjugaison stable dans $G'_{reg}(F)$ et dans $G_{reg}(F)$. On définit de même à l'aide de $\mathbf{M}'$ une correspondance entre classes de conjugaison stable dans $M'_{reg}(F)$ et dans $M_{reg}(F)$. Appelons correspondance pour $\mathbf{G}'$ la première et correspondance pour $\mathbf{M}'$ la seconde. On a

(2) soient $x' \in M'(F)$ et $x \in M(F) \cap G_{reg}(F)$; supposons que x et x' se correspondent pour $\mathbf{M}'$; alors ils se correspondent pour $\mathbf{G}'$.

Signalons que la réciproque est fausse. Des données auxiliaires que l'on a fixées pour $\mathbf{G}'$ se déduisent des données pour $\mathbf{M}'$. En particulier M'_1 est l'image réciproque de M' dans G'_1. On a fixé un facteur de transfert pour la donnée $\mathbf{G}'$, notons-le plus précisément $\Delta_1^{\mathbf{G}'}$. On peut fixer un facteur de transfert $\Delta_1^{\mathbf{M}'}$ pour la donnée $\mathbf{M}'$ de sorte que

(3) pour x, x' comme en (2) et pour $x'_1 \in M'_1(F)$ au-dessus de x', on ait $\Delta_1^{\mathbf{M}'}(x'_1, x) = \Delta_1^{\mathbf{G}'}(x'_1, x)$.

Il existe un plongement $W^{G'}(M') \to W^G(M)$ vérifiant la condition suivante. Soient $n' \in Norm_{G'}(M')(F)$ et $n \in Norm_G(M)(F)$. Supposons que l'image de n' dans $W^{G'}(M')$ s'envoie par ce plongement sur l'image de n dans $W^G(M)$. On a

(4) soient $x' \in M'(F)$ et $x \in M(F) \cap G_{reg}(F)$; alors x et x' se correspondent pour $\mathbf{M}'$ si et seulement si $n'x'n'^{-1}$ et nxn^{-1} se correspondent pour $\mathbf{M}'$.

Considérons maintenant un Levi $M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min} - \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$. On a

(5) pour $x' \in M'(F) \cap G'_{reg}(F)$, il n'existe pas de $x \in G_{reg}(F)$ correspondant à x' pour $\mathbf{G}'$.

Soit $\pi' \in \mathbb{C}[Irr(G')]^{st}$, posons $\pi = transfert(\pi')$. Soient $M \in \underline{\mathcal{L}}_{min}$ et $P \in \mathcal{P}(M)$. Notons π_P le module de Jacquet normalisé de π relatif à P et $\Theta_{\pi_P|ell}$ la restriction de Θ_{π_P} à $M_{ell}(F)$.

Lemme. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$\Theta_{\pi_P|ell} = \sum_{M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min}; M' \mapsto M} |W^{G'}(M')|^{-1} \sum_{w \in W^G(M)} w^{-1} \circ transfert(\Theta_{\pi'_{P'_{w(P)}}|ell}).$$

Preuve. Soit $x \in M_{ell}(F)$. Notons $X^{\mathbf{G}'}(x)$ l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $G'(F)$ qui correspondent à celle de x pour $\mathbf{G}'$. Pour $M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$ tel que $M' \mapsto M$, notons $X^{\mathbf{M}'}(x)$ l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $M'_{reg}(F)$ qui correspondent à celle de x pour $\mathbf{M}'$. Relevons tout élément de $W^G(M)$ en un élément de $Norm_G(M)(F)$ et identifions $W^G(M)$ à l'ensemble de ces éléments. On va prouver

(6) toute classe $C^{\mathbf{M}'} \in \cup_{w \in W^G(M)} X^{\mathbf{M}'}(wxw^{-1})$ est contenue dans une classe appartenant à $X^{\mathbf{G}'}(x)$;

on note $\iota^{\mathbf{M}'} : \cup_{w \in W^G(M)} X^{\mathbf{M}'}(wxw^{-1}) \to X^{\mathbf{G}'}(x)$ l'application qui, à un élément $C^{\mathbf{M}'}$ de l'ensemble de départ, associe la classe qui la contient ;

(7) la fibre de $\iota^{\mathbf{M}'}$ au-dessus de tout élément de son image a $|W^{G'}(M')|$ éléments ;

(8) pour deux éléments $M'_1, M'_2 \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$ tels que $M'_1 \neq M'_2$ et $M'_1, M'_2 \mapsto M$, les images de $\iota^{\mathbf{M}'_1}$ et $\iota^{\mathbf{M}'_2}$ sont disjointes ;

(9) $X^{\mathbf{G}'}(x)$ est réunion des images des $\iota^{\mathbf{M}'}$ quand M' décrit les éléments de $\underline{\mathcal{L}}_{min,G-rel}$ tels que $M' \mapsto M$.

Démontrons (6). Soient $w \in W^G(M)$, $C^{\mathbf{M}'} \in X^{\mathbf{M}'}(wxw^{-1})$ et $x' \in C^{\mathbf{M}'}$. Alors x' correspond à wxw^{-1} pour $\mathbf{M}'$ donc aussi pour $\mathbf{G}'$. Puisque wxw^{-1} est conjugué à x par un élément de $G(F)$, x' correspond aussi à x pour $\mathbf{G}'$. Par définition, x' appartient donc à une unique classe $C^{\mathbf{G}'} \in X^{\mathbf{G}'}(x)$ et alors $C^{\mathbf{M}'} \subset C^{\mathbf{G}'}$.

Commençons la preuve de (7). Soient $w \in W^G(M)$, $C^{\mathbf{M}'} \in X^{\mathbf{M}'}(wxw^{-1})$ et $x' \in C^{\mathbf{M}'}$. On identifie comme ci-dessus $W^{G'}(M')$ à un sous-ensemble de $Norm_{G'}(M')(F)$. Pour $w' \in W^{G'}(M')$, $w'x'w'^{-1}$ correspond à $w'wx(w'w)^{-1}$ d'après (4). Donc $w'x'w'^{-1}$

appartient à une unique classe $w'(C^{\mathbf{M}'}) \in X^{\mathbf{M}'}(w'wx(w'w)^{-1})$ et on voit qu'elle ne dépend pas du choix de x'. Par construction, $w'x'w'^{-1}$ et x' sont stablement conjugués dans $G'(F)$ donc $C^{\mathbf{M}'}$ et $w'(C^{\mathbf{M}'})$ ont la même image par $\iota^{\mathbf{M}'}$. Montrons que, si $w' \neq 1$ (dans $W^{G'}(M')$), les deux classes $C^{\mathbf{M}'}$ et $w'(C^{\mathbf{M}'})$ sont distinctes. Sinon, il existe $m' \in M'(\bar{F})$ tel que $m'w'x'w'^{-1}m'^{-1} = x'$. Puisque x' est régulier dans $G'(F)$ (parce qu'il correspond à x par $\mathbf{G}'$ et x est régulier dans G), cela entraîne $m'w' \in G'_{x'}(\bar{F}) \subset M'(\bar{F})$. Alors $w' \in M'(\bar{F})$, d'où $w' = 1$ dans $W^{G'}(M')$, contrairement à l'hypothèse. Cela démontre que le groupe $W^{G'}(M')$ agit librement sur l'espace de départ de $\iota^{\mathbf{M}'}$ et que chaque orbite est contenue dans une fibre de cette application.

On va démontrer la réciproque et en même temps la relation (8). Pour $i = 1,2$, soient $M'_i \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$, $w_i \in W^G(M)$, $C_i^{\mathbf{M}'_i} \in X^{\mathbf{M}'_i}(w_ixw_i^{-1})$ et $x'_i \in C_i^{\mathbf{M}'_i}$. Notons T'_i le commutant de x'_i dans G'. Supposons que $\iota^{\mathbf{M}'_1}(C_1^{\mathbf{M}'_1}) = \iota^{\mathbf{M}'_2}(C_2^{\mathbf{M}'_2})$. Alors x'_1 et x'_2 sont stablement conjugués dans $G'(F)$. C'est-à-dire qu'il existe $h \in G'(\bar{F})$ tel que $x'_2 = hx'_1h^{-1}$. Puisque x'_1 et x'_2 appartiennent à $G'_{reg}(F)$, on a

(10) $\sigma(h) \in hT'_1(\bar{F})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

Cela implique $hA_{T'_1}h^{-1} = A_{T'_2}$. Pour $i = 1,2$, x'_i correspond pour $\mathbf{M}'_i$ à $w_ixw_i^{-1}$ qui est par hypothèse elliptique dans $M(F)$. Donc x'_i est elliptique dans $M'_i(F)$, ce qui entraîne $A_{T'_i} = A_{M'_i}$. Il en résulte que $hA_{M'_1}h^{-1} = A_{M'_2}$. Donc la conjugaison par h envoie le commutant M'_1 de $A_{M'_1}$ sur le commutant M'_2 de $A_{M'_2}$. Soit $P'_1 \in \mathcal{P}(M'_1)$, posons $P'_2 = hP'_1h^{-1}$. Alors (10) implique que P'_2 est défini sur F et $P'_2 \in \mathcal{P}(M'_2)$. De telles paires (M'_1, P'_1) et (M'_2, P'_2) qui sont conjugués par un élément de $G'(\bar{F})$ le sont par un élément de $G'(F)$. Par définition de $\underline{\mathcal{L}}_{min}$, on a donc $M'_1 = M'_2$. Cela démontre (8). Continuons le calcul en posant simplement $M' = M'_1 = M'_2$. On a maintenant $h \in Norm_{G'}(M')(\bar{F})$. La relation (10) entraîne que l'image de h dans $Norm_{G'}(M')(\bar{F})/M'(\bar{F})$ est fixée par Γ_F. On sait qu'alors cette image est aussi celle d'un élément $u \in Norm_{G'}(M')(F)$. Autrement dit, on peut écrire $h = um'$, où $u \in Norm_{G'}(M')(F)$ et $m' \in M'(\bar{F})$. En notant encore u l'image de u dans $W^{G'}(M')$, on montre facilement que $C_2^{\mathbf{M}'}$ est alors l'image de $C_1^{\mathbf{M}'}$ par l'action de u. Cela démontre que les fibres de l'application $\iota^{\mathbf{M}'}$ sont exactement les orbites de l'action du groupe $W^{G'}(M')$ sur l'espace de départ de $\iota^{\mathbf{M}'}$. D'où (7).

Démontrons (9). Soient $C^{\mathbf{G}'} \in X^{\mathbf{G}'}(x)$ et $x' \in C^{\mathbf{G}'}$. Quitte à conjuguer x', on peut supposer qu'il existe un Levi $M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min}$ tel que $x' \in M'_{ell}(F)$. D'après (5), M' appartient à $\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$. Soit $\underline{M}$ l'image de M' dans $\underline{\mathcal{L}}_{min}$ par l'application (1). Parce que $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $\underline{M}$ et que x' est elliptique dans M', on sait que x' correspond pour $\mathbf{M}'$ à un élément $y \in \underline{M}_{ell}(F)$. D'après (2), x' correspond aussi à y pour $\mathbf{G}'$. Cela entraîne que x et y sont stablement conjugués dans $G(F)$. Le même raisonnement que dans la deuxième partie de la preuve de (7) montre alors d'une part que $\underline{M} = M$ donc $M' \mapsto M$, d'autre part que la classe de conjugaison stable de y dans $M(F)$ est l'image de celle de x par un élément $w \in W^G(M)$. Il en résulte que la classe de conjugaison stable $C^{\mathbf{M}'}$ de x' appartient à $X^{\mathbf{M}'}(wxw^{-1})$. D'où (10).

Maintenant, on note pour simplifier $w(x) = wxw^{-1}$ et on identifie les ensembles $X^{\mathbf{G}'}(x)$ et $X^{\mathbf{M}'}(w(x))$ à des ensembles de représentants des classes en question. En conséquence des propriétés ci-dessus, l'égalité 7.8(1) peut se récrire

$$\theta_\pi(x)D^G(x)^{1/2} = \sum_{M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}; M' \mapsto M} |W^{G'}(M')|^{-1} \sum_{w \in W^G(M)}$$

$$\sum_{x' \in X^{\mathbf{M}'}(w(x))} \Delta_1^{\mathbf{M}'}(x'_1, w(x))\theta_{\pi'}(x'_1)D^{G'}(x')^{1/2}.$$

Soit $a \in A_M(F)$. Pour tout $M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$ tel que $M' \mapsto M$, et tout $w \in W^G(M)$, $w(a)$ s'identifie à un élément $a_w^{M'} \in A_{M'}(F)$, que l'on relève en un élément $a_{w,1}^{M'} \in A_{M'_1}(F)$. En remplaçant x par ax dans la formule ci-dessus, on obtient

$$(11) \qquad \theta_\pi(ax)D^G(ax)^{1/2} = \sum_{M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}; M' \mapsto M} |W^{G'}(M')|^{-1} \sum_{w \in W^G(M)}$$

$$\sum_{x' \in X^{\mathbf{M}'}(w(x))} \Delta_1^{\mathbf{M}'}(a_{w,1}^{M'}x'_1, w(ax))\theta_{\pi'}(a_{w,1}^{M'}x'_1)D^{G'}(a_w^{M'}x')^{1/2}.$$

Supposons $|\alpha(a)|_F$ assez petit pour toute racine α de A_M dans l'algèbre de Lie de U_P. Casselman a prouvé qu'alors $\theta_\pi(ax) = \delta_P(ax)^{1/2}\theta_{\pi_P}(ax)$, cf. [4] théorème 5.2. On voit que, sous la même hypothèse sur a, on a $\delta_P(ax)^{1/2}D^G(ax)^{1/2} = D^M(ax)^{1/2}$. Le membre de gauche de (11) devient $\theta_{\pi_P}(ax)D^M(ax)^{1/2}$. Pour M' et w intervenant ci-dessus, on voit que $a_w^{M'}$ vérifie que $|\alpha(a_w^{M'})|_F$ est petit pour toute racine α de $A_{M'}$ dans $P'_{w(P)}$. Le même argument transforme le membre de droite de (11) et on obtient

$$(12) \qquad \theta_{\pi_P}(ax)D^M(ax)^{1/2} = \sum_{M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}; M' \mapsto M} |W^{G'}(M')|^{-1} \sum_{w \in W^G(M)}$$

$$\sum_{x' \in X^{\mathbf{M}'}(w(x))} \Delta_1^{\mathbf{M}'}(a_{w,1}^{M'}x'_1, w(ax))\theta_{\pi'_{P'_{w(P)}}}(a_{w,1}^{M'}x'_1)D^{M'}(a_w^{M'}x')^{1/2}.$$

Chaque terme est défini pour tout $a \in A_M(F)$. En décomposant $\pi_{P'}$ en représentations irréductibles, on voit que le membre de gauche est une combinaison linéaire de caractères de $A_M(F)$. Il en est de même du membre de droite (on utilise 7.5 pour les facteurs de transfert). On vient de voir que les deux membres étaient égaux pour a dans un certain cône ouvert. Il en résulte qu'ils sont partout égaux. On peut donc remplacer a par (1) dans l'égalité précédente. Pour M' et w intervenant ci-dessus, posons $\pi_{M',w} = transfert(\pi'_{P'_{w(P)}})$. On reconnaît la somme intérieure du membre de droite de (12) (pour $a = 1$), c'est $\theta_{\pi_{M',w}}(w(x))D^M(w(x))^{1/2}$. On a $D^M(w(x))^{1/2} = D^M(x)^{1/2}$ et l'égalité (12) se transforme en

$$\theta_\pi(x) = \sum_{M' \in \underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}; M' \mapsto M} |W^{G'}(M')|^{-1} \sum_{w \in W^G(M)} \theta_{\pi_{M',w}}(w(x)).$$

Ceci est équivalent à l'égalité de l'énoncé. $\square$

8.5 L'espace $\mathcal{D}_{cusp}(G)$ et le transfert

Proposition. *Soient $d \in \mathcal{D}_{cusp}(G)$ et, pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$, soit $d^{\mathbf{G}'} \in \mathcal{D}_{cusp,\lambda_1}(G'_1)^{st}$. Supposons que $D^G[d]$ coïncide avec $\sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)} transfert(D^{G'_1}[d^{\mathbf{G}'}])$ sur $G_{ell}(F)$. Alors $D^G[d] = \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)} transfert(D^{G'_1}[d^{\mathbf{G}'}])$.*

Preuve. Soit $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$. Des injections naturelles $Z(\hat{G}) \to Z(\hat{G}') \to Z(\hat{G}'_1)$ se déduisent des homomorphismes

(1) $\mathcal{N}^{G'_1} \to \mathcal{N}^{G'} \to \mathcal{N}$.

Pour $\nu \in \mathcal{N}$, on définit la composante d^{ν} de d comme dans le paragraphe précédent. On définit $d^{\mathbf{G}',\nu}$ comme le produit des composantes $d^{\mathbf{G}',\nu'}$ sur les $\nu' \in \mathcal{N}^{G'_1}$ qui s'envoient sur ν par la suite ci-dessus. La famille $((d^{\mathbf{G}'})_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)}, d)$ vérifie l'hypothèse ou la conclusion de la proposition si et seulement si chaque famille $((d^{\mathbf{G}',\nu})_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)}, d^{\nu})$ les vérifie. On peut donc fixer $\nu \in \mathcal{N}$ et supposer $d \in \mathcal{D}_{cusp}(G)^{\nu}$. Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des restrictions à $A_G(F)_c$ de caractères modérément ramifiés de $A_G(F)$. Pour $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$, cet ensemble s'identifie à celui des restrictions à $A_{G'_1}(F)_c$ de caractères modérément ramifiés de $A_{G'_1}(F)$ qui coïncident avec λ_1 sur $A_{G'_1}(F)\cap C_1(F)$: à $\xi \in \mathcal{X}$, on associe d'abord l'image réciproque de ξ par la surjection $A_{G'_1}(F)_c \to A_G(F)_c$, puis le produit $\xi^{\mathbf{G}'}$ de ce caractère par la restriction de ζ_1 à $A_{G'_1}(F)_c$. Ainsi, comme dans le paragraphe précédent, on associe à d, resp. $d^{\mathbf{G}'}$, des composantes d_{ξ}, resp. $d^{\mathbf{G}'}_{\xi^{\mathbf{G}'}}$, pour $\xi \in \mathcal{X}$. La famille $((d^{\mathbf{G}'})_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)}, d)$ vérifie l'hypothèse ou la conclusion de la proposition si et seulement si chaque famille $((d^{\mathbf{G}'}_{\xi^{\mathbf{G}'}})_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)}, d_{\xi})$ les vérifie. On peut fixer $\xi \in \mathcal{X}$ et supposer que $d = d_{\xi}$ et $d^{\mathbf{G}'} = d^{\mathbf{G}'}_{\xi^{\mathbf{G}'}}$ pour tout $\mathbf{G}'$. Prolongeons ξ en un caractère unitaire de $A_G(F)$, qui s'identifie comme ci-dessus pour tout $\mathbf{G}'$ à un caractère $\xi^{\mathbf{G}'}$ de $A_{G'_1}(F)$ dont la restriction à $A_{G'_1}(F)\cap C_1(F)$ coïncide avec la restriction de λ_1. On construit un élément $\mathbf{d} \in \mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$ comme dans le paragraphe précédent et de façon similaire des éléments $\mathbf{d}^{\mathbf{G}'} \in \mathcal{D}_{cusp,\lambda_1,\xi^{\mathbf{G}'}}(G'_1)$. La famille $((d^{\mathbf{G}'})_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)}, d)$ vérifie l'hypothèse ou la conclusion de la proposition si et seulement si la famille $((\mathbf{d}^{\mathbf{G}'})_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)}, \mathbf{d})$ les vérifient. En résumé, on peut fixer un caractère unitaire ξ de $A_G(F)$, qui détermine pour tout $\mathbf{G}'$ un tel caractère $\xi^{\mathbf{G}'}$ de $A_{G'_1}(F)$, et supposer $d \in \mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$ et $d^{\mathbf{G}'} \in \mathcal{D}_{cusp,\lambda_1,\xi^{\mathbf{G}'}}(G'_1)$ pour tout $\mathbf{G}'$.

A ce point, on peut simplifier le problème en se ramenant au cas où une unique donnée $\mathbf{G}'$ intervient. Pour cela, on introduit la représentation $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)^0_{\xi}]$ telle que $\Delta_{cusp}(\pi) = d$. On utilise la décomposition (1) de 7.6 et on écrit conformément $\pi = \sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)} \pi_{\mathbf{G}'}$. On sait que $\pi_{\mathbf{G}'}$ vérifie les mêmes propriétés que π d'après la proposition 7.6. On note $d_{\mathbf{G}'} = \Delta_{cusp}(\pi_{\mathbf{G}'})$. On a $d = \sum_{\mathbf{G}'} d_{\mathbf{G}'}$. On voit que si $((d^{\mathbf{G}'})_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)}, d)$ vérifie l'hypothèse de l'énoncé, alors, pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G)$, $D^G[d_{\mathbf{G}'}]$ coïncide sur $G_{ell}(F)$ avec $transfert(D^{G'_1}[d^{\mathbf{G}'}])$. Inversement, si $D^G[d_{\mathbf{G}'}] = transfert(D^{G'_1}[d^{\mathbf{G}'}])$ pour tout $\mathbf{G}'$, la conclusion de l'énoncé est vérifiée. Cela nous ramène au cas où la famille $(d^{\mathbf{G}'})_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)}$ a au plus une composante non nulle. On note désormais $\mathbf{G}'$ l'indice de cette composante et on note $(d', d) \in \mathcal{D}_{cusp,\lambda_1;\xi'}(G'_1)^{st} \times \mathcal{D}_{cusp,\xi}(G)$ le couple auquel se réduisent les données de départ.

On introduit la représentation $\pi \in \mathbb{C}[Ell(G)^0_{\xi}]$ telle que $\Delta_{\pi,cusp} = d$ et la représentation $\pi' \in \mathbb{C}[Ell(G'_1)^0_{\lambda_1,\xi'}]^{st}$ telle que $\Delta^{G'_1}_{\pi',cusp} = d'$. Alors, d'après 6.3 (1), Θ_{π} coïncide avec $\Theta_{transfert(\pi')}$ sur les elliptiques. D'après [3] théorème 6.2, $\pi = transfert(\pi')$. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$. D'après 6.3 (1), le lemme 8.4 entraîne que $D^M[\Delta^M_{\pi_P,cusp}]$ coïncide sur $M_{ell}(F)$ avec

$$\text{(3)} \qquad \sum_{M'\in\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel};M'\mapsto M} |W^{G'}(M')|^{-1} \sum_{w\in W^G(M)} w^{-1}\circ transfert(D^{M'_1}[\Delta^{M'_1}_{\pi'_{P'_{w(P)}},cusp}]).$$

Remarquons que, pour M' et w intervenant ci-dessus, on peut transformer la donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ de M en une donnée $w^{-1}(\mathbf{M}')$. Le terme que l'on somme peut se récrire $transfert(D^{w^{-1}(M'_1)}[d^{w^{-1}(M'_1)}])$ pour un élément convenable $d^{w^{-1}(M'_1)} \in \mathcal{D}_{cusp,w^{-1}(\lambda_1)}(w^{-1}(M'_1))$. C'est-à-dire que la somme (3) est de la même forme que celle qui intervient dans l'énoncé de la proposition. Supposons $M \neq G$. En raisonnant par récurrence, on suppose notre proposition prouvée pour M. Alors $D^M[\Delta^M_{\pi_P,cusp}]$ est égal à (3). Pour un couple $(x'_1, x) \in G'_{1,reg}(F) \times G_{reg}(F)$ d'éléments qui se correspondent, x est compact mod $Z(G)$ si et seulement si x'_1 est compact mod $Z(G'_1)$: cela parce que $Z(G)(F)$ est un sous-groupe de $Z(G')(F)$ d'indice fini. Restreindre $D^M[\Delta^M_{\pi_P,cusp}]$ à $M(F)\cap G_{comp}(F)$ équivaut à restreindre chaque terme de (3) indexé par M' à $M'(F)\cap G'_{1,comp}(F)$. Après restriction à $M(F)\cap G_{comp}(F)$, on sait que le terme $\Delta^M_{\pi_P,cusp}$ ne dépend plus de P. Il en est de même des termes intervenant dans (3). On obtient que $D^M[\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp}]$ est égal à

$$\sum_{M'\in\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel};M'\mapsto M}|W^{G'}(M')|^{-1}\sum_{w\in W^G(M)}w^{-1}\circ transfert(D^{M'_1}[\Delta^{M'_1}_{\pi'_{M'},cusp,G'_1-comp}]).$$

Induisons à G. Evidemment, l'induction est insensible à la torsion par un élément de W^G. Les w disparaissent de la formule et la somme en w est remplacée par la multiplication par $|W^G(M)|$. D'autre part, l'induction commute au transfert. On obtient

$$(4)\qquad D^G[\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp}]=\sum_{M'\in\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel};M'\mapsto M}|W^{G'}(M')|^{-1}|W^G(M)|$$

$$transfert(D^{G'_1}[\Delta^{M'_1}_{\pi'_{M'},cusp,G'_1-comp}]).$$

On utilise l'égalité 6.3 (2) qui peut se récrire

$$D^G[d]=\Theta_{\pi|G_{comp}(F)}-\sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}_{min},M\neq G}|W^G(M)|^{-1}D^G[\Delta^M_{\pi_M,cusp,G-comp}],$$

où $\Theta_{\pi|G_{comp}(F)}$ est la restriction de Θ_π à $G_{comp}(F)$. En utilisant (4), on obtient

$$D^G[d]=\Theta_{\pi|G_{comp}(F)}-\sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}_{min},M\neq G}\ \sum_{M'\in\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel};M'\mapsto M}|W^{G'}(M')|^{-1}transfert(D^{G'_1}[\Delta^{M'_1}_{\pi'_{M'},cusp,G'_1-comp}])$$

$$=\Theta_{\pi|G_{comp}(F)}-\sum_{M'\in\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel};M'\neq G'}|W^{G'}(M')|^{-1}transfert(D^{G'_1}[\Delta^{M'_1}_{\pi'_{M'},cusp,G'_1-comp}]).$$

On peut remplacer l'ensemble de sommation $\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min,G-rel}$ par $\underline{\mathcal{L}}^{G'}_{min}$: pour un Levi non relevant, le terme que l'on somme est nul. En utilisant de nouveau 6.3 (2) cette fois dans G'_1, on obtient

$$D^G[d]=\Theta_{\pi|G_{comp}(F)}+transfert(D^{G'_1}[d']-\Theta_{\pi'|G'_{1,comp}(F)}).$$

On a déjà dit que, grâce à Arthur, on avait $\pi=transfert(\pi')$ donc les termes $\Theta_{\pi|G_{comp}(F)}$ et $transfert(\Theta_{\pi'|G'_{1,comp}(F)})$ disparaissent. D'où

$$D^G[d]=transfert(D^{G'_1}[d']),$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Références

[1] J. Arthur : *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 56 (1988), p. 223-293

[2] J. Arthur : *On elliptic tempered characters*, Acta Math. 171 (1993), p. 73-138

[3] J. Arthur : *On local character relations*, Selecta Math. 2 (1996), p. 501-579

[4] W. Casselman : *Characters and Jacquet modules*, Math. Ann. 230 (1977), p. 101-105

[5] S. DeBacker : *Homogeneity results for invariant distributions of a reductive p-adic groups*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 35 (2002), p. 391-422

[6] S. DeBacker, M. Reeder : *Depth-zero supercuspidal L-packets and their stability*, Annals of Mah. 169 (2009), p. 795-901

[7] A. Ferrari : *Théorème de l'indice et formule des traces*, manuscripta math. 124 (2007), p. 363-390

[8] T. Haines, M. Rapoport : *On parahoric subgroups*, appendice à G.Pappas, M. Rapoport *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. in Math. 219 (2008), p. 118-198

[9] G. Henniart, M.-F. Vignéras : *A Satake isomorphism for representations mod p of reductive groups over local fields*, Journal für die r. und ang. Math. 701 (2015), p. 33-75

[10] T. Lanard : *Sur les ℓ-blocs de niveau zéro des groupes p-adiques*, Compositio Math. 154 (2018), p. 1473-1507

[11] T. Lanard : *Sur les ℓ-blocs de niveau zéro des groupes p-adiques II*, arXiv RT 1806.09543

[12] R. P. Langlands : *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Can. J. Math. XXXI (1979), p. 700-725

[13] R. P. Langlands, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278 (1987), p. 219-271

[14] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Stabilisation de la formule des traces tordue*, volume 1, Progress in Math. 316, Birkhäuser 2016

[15] M. Oi : *Depth preserving property of the local Langlands correspondence for quasi-split classical groups in a large residual characteristic*, arXiv NT 1804.10901

[16] G. Prasad : *Finite group actions on reductive groups and buildings and tamely-ramified descent in Bruhat-Tits theory*, arXiv RT 1705.02906

[17] G. Prasad, J.-K. Yu : *On finite groups actions on reductive groups and buildings*, Invent. Math. 147 (2002), p. 545-560

[18] J.-L. Waldspurger : *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad*, Compositio Math. 146 (2010), p. 1180-1290

[19] J.-L. Waldspurger : *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, 2^e partie : extension aux représentations tempérées*, Astérisque 346 (2012), p. 171-312

[20] J.-L. Waldspurger : *Caractères de représentations de niveau* 0, Ann. de la Fac. Sc. de Toulouse 27 (2018), p. 925-984

[21] J.-L. Waldspurger : *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. 105 (1997), p. 153-236

jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr
CNRS- Institut de Mathématiques de Jussieu- Paris rive gauche
4 place Jussieu
Boîte courrier 247
75252 Paris Cedex 05