Stabilisation de la formule des traces tordue IV : transfert spectral archimédien

J.-L. Waldspurger

4 février 2015

Introduction

Comme la référence [I], dont nous reprenons les notations, cet article contient des résultats préparatoires à la stabilisation de la formule des traces tordue. Il concerne exclusivement les groupes réels. La première section énonce un théorème de Paley-Wiener pour les fonctions C^∞ à support compact. Ce théorème est dû à Renard mais on en modifie quelque peu la formulation pour y faire apparaître les représentations elliptiques qui, depuis le travail qu'Arthur leur a consacré, sont devenus les blocs de base de ce type d'analyse harmonique. Dans les sections 2 et 3, on prouve les analogues dans le cas tordu, et sur le corps de base $\mathbb{R}$, des résultats contenus dans l'article [1] d'Arthur. A savoir les deux résultats suivants, exprimés ici de façon lapidaire. On considère un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$, où G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$, $\tilde{G}$ est un espace tordu sur G et $\mathbf{a}$ est un élément de $H^1(W_{\mathbb{R}};Z(\hat{G}))$ Supposons d'abord G quasi-déployé, $\tilde{G}$ à torsion intérieure et $\mathbf{a}=1$. Alors une combinaison linéaire finie de caractères de représentations elliptiques de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est stable sur les éléments réguliers elliptiques est stable partout. Dans le cas général, soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Considérons une combinaison linéaire finie Σ de caractères de représentations elliptiques de $\tilde{G}'(\mathbb{R})$ et une combinaison linéaire finie Π de caractères de ω-représentations elliptiques de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Supposons que Σ est stable et que la restriction de Π aux éléments réguliers elliptiques de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est égale à la même restriction du transfert de Σ. Alors Π est le transfert de Σ. On a négligé ici comme dans la suite de cette introduction le fait qu'en général, il faut remplacer $\tilde{G}'(\mathbb{R})$ par un espace auxiliaire $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$. Une première conséquence de ces résultats est une version "stable" du théorème de Paley-Wiener (théorème 2.3(ii)). Une deuxième est la définition du transfert spectral (corollaire 3.3). Une troisième conséquence est l'existence du transfert géométrique K-fini : si $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est K-finie, il existe une fonction $f'\in C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R}))$ qui est K'-finie et qui est un transfert de f, cf. corollaire 3.4. Tout cela est certainement conséquence des résultats beaucoup plus fins obtenus par Mezo dans son article récent [5]. Nos preuves sont très différentes. Elles s'appuient sur le théorème de Renard repris dans la première section, sur le résultat de Shelstad affirmant l'existence du transfert entre fonctions C^∞ à support compact et sur le résultat suivant : une combinaison linéaire finie de caractères de représentations tempérées de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est supertempérée si et seulement si toutes les représentations qui interviennent sont elliptiques. Dans le cas non tordu, ce résultat est dû à Harish-Chandra. Il vaut aussi d'après Herb sur un corps de base non-archimédien. Il a été récemment généralisé au cas tordu par Moeglin dans [6], que le corps de base soit réel ou non-archimédien.

1 Le théorème de Paley-Wiener pour les fonctions C^∞ à support compact

1.1 La situation

Dans cet article, le corps de base est $\mathbb{R}$. On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, où G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$, $\tilde{G}$ est un espace tordu sur G et $\mathbf{a}$ est un élément de $H^1(W_\mathbb{R}; Z(\hat{G}))$, cf. [I] 1.1 et 1.5. Le terme $\mathbf{a}$ détermine un caractère ω de $G(\mathbb{R})$. On suppose

• $\tilde{G}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$;

• l'automorphisme θ de $Z(G)$ est d'ordre fini ;

• ω est unitaire.

On fixe un espace de Levi minimal $\tilde{M}_0$ de $\tilde{G}$ et un sous-groupe compact maximal K de $G(\mathbb{R})$. On suppose que les algèbres de Lie $\mathfrak{k}$ de K et $\mathfrak{a}_{M_0}$ de A_{M_0} sont orthogonales pour la forme de Killing. Introduisons <u>la</u> paire de Borel (B^*, T^*) de G. On pose $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = X_*(T^*) \otimes \mathbb{R}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$. Soit $\tilde{S}$ un sous-tore tordu maximal de G défini sur $\mathbb{R}$. Le groupe $\Gamma_\mathbb{R} \simeq \{\pm 1\}$ agit sur $X_*(S)$ et sur $X_{*,\mathbb{Q}}(S) = X_*(S) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. De cette action se déduit une décomposition

$$X_{*,\mathbb{Q}}(S) = X_{*,\mathbb{Q}}(S)^+ \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(S)^-$$

où $\Gamma_\mathbb{R}$ agit trivialement sur le premier sous-espace et par le caractère non trivial sur le second. On en déduit une décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}(\mathbb{R}) = (X_*(S) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C})^{\Gamma_\mathbb{R}}$ en somme directe

$$\mathfrak{s}(\mathbb{R}) = X_{*,\mathbb{Q}}(S)^+ \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(S)^- \otimes_\mathbb{Q} i\mathbb{R}.$$

Modulo le choix d'un groupe de Borel contenant S et stable par $\tilde{S}$, on peut identifier $\mathfrak{s}$ à $\mathfrak{h}$. Le premier facteur ci-dessus s'identifie à un sous-espace de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ et le second s'identifie à un sous-espace de $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Si on prend pour $\tilde{S}$ un sous-tore tordu maximal de $\tilde{M}_0$, le premier facteur n'est autre que $\mathfrak{a}_{\tilde{M}_0}(\mathbb{R})$, qui s'identifie ainsi à un sous-espace de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

Le groupe $\Gamma_\mathbb{R}$ agit sur T^* donc aussi sur $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. On fixe sur $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive invariante par l'action du groupe de Weyl de G relatif à T^*, par celle de $\Gamma_\mathbb{R}$ et par l'automorphisme θ de T^*. Par dualité, on en déduit une telle forme sur le dual $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$. Il se déduit aussi de θ un automorphisme dual de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ que l'on note encore θ. Remarquons que $\mathfrak{a}_{M_0}(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathcal{A}_{M_0}$. Pour tout Levi M de G contenant M_0, $\mathcal{A}_M$ est un sous-espace de $\mathcal{A}_{M_0}$ et on munit cet espace de la restriction de la forme quadratique. Plus généralement, pour tout Levi M, on peut choisir $g \in G(\mathbb{R})$ tel que $g^{-1}Mg$ contienne M_0 et on munit $\mathcal{A}_M$ de la forme quadratique sur $\mathcal{A}_{g^{-1}Mg}$ transportée par l'isomorphisme ad_g. Cela ne dépend pas du choix de g. On munit tout sous-espace de $\mathcal{A}_M$ de la mesure de Haar associée à la restriction à ce sous-espace de cette forme quadratique.

On étend toutes ces formes quadratiques en des formes hermitiennes sur les complexifiés de nos espaces. Pour tout espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$, on note $V_\mathbb{C} = V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ son complexifié. On fait une exception pour l'espace $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ dont on note simplement $\mathfrak{h}$ le complexifié.

On note $\mathfrak{A}_G$, resp. $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$, la composante neutre pour la topologie réelle de $A_G(\mathbb{R})$, resp. $A_{\tilde{G}}(\mathbb{R})$. On sait que la restriction à $\mathfrak{A}_G$ de l'application $H_G : G(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_G$ est un isomorphisme. On munit $\mathfrak{A}_G$, resp $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$, de la mesure de Haar déduite par cet isomorphisme de celle fixée sur $\mathcal{A}_G$, resp. $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$.

L'homomorphisme $H_{\tilde{G}} : G(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ est le composé de H_G et de la projection $\mathcal{A}_G \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ sur les invariants par θ. On fixe arbitrairement une application encore notée

$H_{\tilde{G}}:\tilde{G}(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ telle que $H_{\tilde{G}}(g\gamma)=H_{\tilde{G}}(g)+H_{\tilde{G}}(\gamma)$ pour tous $g\in G(\mathbb{R})$ et $\gamma\in\tilde{G}(\mathbb{R})$. Notons $\tilde{G}(\mathbb{R})^1$ l'ensemble des $\gamma\in\tilde{G}(\mathbb{R})$ tels que $H_{\tilde{G}}(\gamma)=0$. On a des isomorphismes inverses l'un de l'autre

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{A}_{\tilde{G}}\times\tilde{G}(\mathbb{R})^1 \\ \gamma & \mapsto & (H_{\tilde{G}}(\gamma),exp(-H_{\tilde{G}}(\gamma))\gamma) \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\tilde{G}}\times\tilde{G}(\mathbb{R})^1 & \to & \tilde{G}(\mathbb{R}) \\ (H,\gamma^1) & \mapsto & e^H\gamma^1 \end{array}$$

On note $\Sigma(A_{\tilde{M}_0})$ l'ensemble des racines de $A_{\tilde{M}_0}$ dans $\mathfrak{g}$. Pour une telle racine α, on note $\mathfrak{u}_\alpha$ le sous-espace radiciel associé. Pour $\gamma\in\tilde{M}_0(\mathbb{R})$, ad_γ conserve ce sous-espace. Posons $W(\tilde{M}_0)=Norm_{G(\mathbb{R})}(\tilde{M}_0)/M_0(\mathbb{R})$.

Lemme. *(i) Il existe une unique application $H_{\tilde{M}_0}:\tilde{M}_0(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ vérifiant les trois conditions*

(a) $H_{\tilde{M}_0}(m\gamma)=H_{\tilde{M}_0}(m)+H_{\tilde{M}_0}(\gamma)$ pour tous $m\in M_0(\mathbb{R})$ et $\gamma\in\tilde{M}_0(\mathbb{R})$;

(b) la composée de $H_{\tilde{M}_0}$ et de la projection $\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}\to\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ est la restriction de $H_{\tilde{G}}$ à $\tilde{M}_0(\mathbb{R})$;

(c) $H_{\tilde{M}_0}(ad_n(\gamma))=w(H_{\tilde{M}_0}(\gamma))$, pour tous $\gamma\in\tilde{M}_0(\mathbb{R})$, $n\in Norm_{G(\mathbb{R})}(\tilde{M}_0)$, où w est l'image de n dans $W(\tilde{M}_0)$.

(ii) Cette application est aussi l'unique application $H_{\tilde{M}_0}:\tilde{M}_0(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ vérifiant les trois conditions (a), (b) et

(d) pour toute $\alpha\in\Sigma(A_{\tilde{M}_0})$ et tout $\gamma\in\tilde{M}_0(\mathbb{R})$, on a l'égalité

$$<\alpha,H_{\tilde{M}_0}(\gamma)>=\frac{log(|det((ad_\gamma)_{|\mathfrak{u}_\alpha})|)}{dim(\mathfrak{u}_\alpha)}.$$

Preuve. Notons $X^*(M_0)$ le groupe des caractères algébriques de M_0. Il est muni d'une action de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ et d'une action de θ. Le groupe $X^*(M_0)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\theta}$ s'identifie naturellement à un réseau de $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_0}$. Remarquons que l'application $H_{\tilde{M}_0}:M_0(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ se prolonge naturellement à $M_0(\mathbb{C})$: pour $x\in M_0(\mathbb{C})$, $H_{\tilde{M}_0}(x)$ est l'unique élément de $\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ tel que, pour tout $\chi\in X^*(M_0)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\theta}$, on ait l'égalité $<\chi,H_{\tilde{M}_0}(x)>=log(|\chi(x)|)$. Pour $\alpha\in\Sigma(A_{\tilde{M}_0})$, l'application $\chi_\alpha:x\mapsto det((ad_x)_{|\mathfrak{u}_\alpha})$ est un élément de $X^*(M_0)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\theta}$. Sa restriction à $A_{\tilde{M}_0}(\mathbb{C})$ est $dim(\mathfrak{u}_\alpha)\alpha$ (en notation additive). Il en résulte que, pour tout $x\in M_0(\mathbb{C})$, on a l'égalité

$$(1)\qquad <\alpha,H_{\tilde{M}_0}(x)>=\frac{log(|det((ad_x)_{|\mathfrak{u}_\alpha})|)}{dim(\mathfrak{u}_\alpha)}.$$

Montrons maintenant que :

(2) il existe une application $H_{\tilde{M}_0}:\tilde{M}_0(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ vérifiant la condition (d).

Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}=(B,T,(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G pour laquelle $\tilde{M}_0$ est standard. Fixons $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$. Pour $\gamma\in\tilde{M}_0(\mathbb{R})$, fixons un élément $t_\gamma\in T(\mathbb{C})$ tel que la partie semi-simple de γ soit conjuguée à $t_\gamma e$ par un élément de $M_0(\mathbb{C})$. Pour $\alpha\in\Sigma(A_{\tilde{M}_0})$, l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{u}_\alpha$ possède une base B telle que ad_e conserve $\pm B$. On en déduit que

$$\frac{log(|det((ad_\gamma)_{|\mathfrak{u}_\alpha})|)}{dim(\mathfrak{u}_\alpha)}=\frac{log(|det((ad_{t_\gamma})_{|\mathfrak{u}_\alpha})|)}{dim(\mathfrak{u}_\alpha)}.$$

D'après (1), ceci est égal à $<\alpha,H_{\tilde{M}_0}(t_\gamma)>$. L'application $\gamma\mapsto H_{\tilde{M}_0}(\gamma)=H_{\tilde{M}_0}(t_\gamma)$ vérifie donc (d), ce qui prouve (2).

Partant d'une application $H_{\tilde{M}_0}:\tilde{M}_0(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ vérifiant (d), on peut lui ajouter une application à valeurs dans $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ de sorte que (b) soit vérifiée. L'application obtenue est clairement unique. Soient $x\in M_0(\mathbb{R})$ et $\gamma\in\tilde{M}_0(\mathbb{R})$. En utilisant (d) et (1), on voit que l'on a l'égalité

$$<\alpha,H_{\tilde{M}_0}(x\gamma)>=<\alpha,H_{\tilde{M}_0}(x)>+<\alpha,H_{\tilde{M}_0}(\gamma)>$$

pour tout $\alpha\in\Sigma(A_{\tilde{M}_0})$. En tenant compte de (b), on obtient $H_{\tilde{M}_0}(x\gamma)=H_{\tilde{M}_0}(x)+H_{\tilde{M}_0}(\gamma)$, autrement dit (a) est vérifiée. Cela prouve le (ii) de l'énoncé.

En remplaçant γ par $ad_n(\gamma)$ dans la formule (d), où n est un élément de $Norm_{G(\mathbb{R})}(\tilde{M}_0)$, un calcul simple montre que l'application $H_{\tilde{M}_0}$ que l'on vient de construire vérifie aussi (c). Cette application vérifie donc les conditions du (i) de l'énoncé. Il reste à montrer que l'application est uniquement déterminée par ces dernières conditions. Si une application $H'_{\tilde{M}_0}$ vérifie les conditions (a), (b) et (c), la condition (a) entraîne qu'il existe $H\in\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ tel que $H'_{\tilde{M}_0}(\gamma)=H+H_{\tilde{M}_0}(\gamma)$ pour tout $\gamma\in\tilde{M}_0(\mathbb{R})$. La condition (c) entraîne que H est invariant par $W(\tilde{M}_0)$, donc appartient à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. La condition (b) entraîne alors que $H=0$. Cela achève de prouver le lemme. $\square$

On définit $H_{\tilde{M}_0}$ par les conditions du lemme. Plus généralement, pour tout $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on définit $H_{\tilde{M}}:\tilde{M}(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ comme l'unique application telle que

- $H_{\tilde{M}}(m\gamma)=H_{\tilde{M}}(m)+H_{\tilde{M}}(\gamma)$ pour tous $m\in M(\mathbb{R})$ et $\gamma\in\tilde{M}(\mathbb{R})$;
- la restriction de $H_{\tilde{M}}$ à $\tilde{M}_0(\mathbb{R})$ est la composée de $H_{\tilde{M}_0}$ et de la projection $\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}\to\mathcal{A}_{\tilde{M}}$.

La théorie est vide si ω n'est pas trivial sur $Z(G)^\theta(\mathbb{R})$. Nous ne supposons toutefois pas que ω est trivial sur ce groupe car l'inconvénient de cette hypothèse est qu'elle ne se conserve pas si l'on remplace $\tilde{G}$ par un espace de Levi $\tilde{M}$. Par contre, nous supposerons que ω est trivial sur la composante neutre de $Z(G)^\theta(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle. Cette hypothèse se conserve si l'on remplace $\tilde{G}$ par un espace de Levi $\tilde{M}$.

1.2 Rappels sur les ω-représentations

Rappelons qu'une ω-représentation (admissible) de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est un couple $(\pi,\tilde{\pi})$, où π est une représentation admissible de $G(\mathbb{R})$ dans un espace complexe V et $\tilde{\pi}$ est une application de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ dans le groupe des automorphismes de V qui vérifie la condition $\tilde{\pi}(g\gamma g')=\pi(g)\tilde{\pi}(\gamma)\pi(g')\omega(g')$ pour tous $g,g'\in G(\mathbb{R})$ et $\gamma\in\tilde{G}(\mathbb{R})$. On supposera toujours π de longueur finie. En pratique, on notera simplement $\tilde{\pi}$ la ω-représentation, la représentation π de $G(\mathbb{R})$ étant sous-entendue.

A une telle ω-représentation est associé son caractère, qui est une forme linéaire sur $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, que l'on note

$$\mathbf{f}\mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\mathbf{f}).$$

Précisément, pour une fonction $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et une mesure de Haar dg sur $G(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur $\tilde{\pi}(f\otimes dg)=\int_{\tilde{G}(\mathbb{R})}\tilde{\pi}(\gamma)f(\gamma)\,d\gamma$ (la mesure $d\gamma$ étant naturellement associée à dg) ; alors

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},f\otimes dg)=trace(\tilde{\pi}(f\otimes dg)).$$

Cette distribution est continue quand on munit $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ de sa topologie usuelle. Elle se factorise en une forme linéaire continue sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Ici, $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$

désigne l'espace des ω-intégrales orbitales sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Il est muni d'après Bouaziz d'une topologie (cf. [I] 5.2) pour laquelle l'application naturelle $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ est continue et ouverte ([7] théorème 9.4). On note $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ l'espace engendré par les distributions $I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},.)$, quand $\tilde{\pi}$ décrit les ω-représentations de longueur finie, tensorisé par $Mes(G(\mathbb{R}))$. Ainsi, ces distributions appartiennent à $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. On note $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ le sous-espace de $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ qui, après tensorisation par $Mes(G(\mathbb{R}))^*$, est engendré par les caractères de représentations tempérées.

Pour $\lambda\in\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ et pour une ω-représentation $(\pi,\tilde{\pi})$, on définit $(\pi_\lambda,\tilde{\pi}_\lambda)$ par $\pi_\lambda(g) = e^{<\lambda,H_{\tilde{G}}(g)>}\pi(g)$ et $\tilde{\pi}_\lambda(\gamma)=e^{<\lambda,H_{\tilde{G}}(\gamma)>}\tilde{\pi}(\gamma)$. L'action ainsi obtenue de $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ sur l'ensemble des ω-représentations (à isomorphisme près) est libre.

Notons $\mathfrak{Z}(G)$ le centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $G(\mathbb{R})$. On considère qu'il agit sur les espaces de fonctions sur $G(\mathbb{R})$ via l'action par translations à gauche de $G(\mathbb{R})$, et qu'il agit sur les espaces de distributions par dualité, c'est-à-dire par la formule $(ZD)(f)=D(Zf)$ pour une distribution D, une fonction f et un élément $Z\in\mathfrak{Z}(G)$. Comme on sait, $\mathfrak{Z}(G)$ est isomorphe à $Sym(\mathfrak{h})^W$, ou encore à l'algèbre des polynômes invariants par W sur $\mathfrak{h}^*$. Notons $\mathfrak{h}_Z$ la partie centrale de $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire $\mathfrak{h}_Z = X_*(Z(G)^0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$. On a dualement un sous-espace $\mathfrak{h}_Z^*\subset\mathfrak{h}^*$. Au caractère ω est associé un caractère infinitésimal de $\mathfrak{Z}(G)$, qui est l'évaluation en un point $\mu(\omega)\in\mathfrak{h}_Z^*$. L'hypothèse que ω est trivial sur la composante neutre de $Z(G;\mathbb{R})^\theta$ pour la topologie réelle implique que $\mu(\omega)$ appartient au sous-espace $(1-\theta)(\mathfrak{h}_Z^*)$. Il existe un unique point $\tilde{\mu}(\omega)$ dans ce sous-espace tel que $\mu(\omega)=(\theta^{-1}-1)(\tilde{\mu}(\omega))$. Considérons l'espace affine $\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$. Il est invariant par l'action de W^θ. Notons $Pol(\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*})$ l'algèbre des polynômes sur cet espace affine. Par restriction, tout élément de $\mathfrak{Z}(G)$ définit un élément de $Pol(\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*})^{W^\theta}$. On a

(1) l'application $\mathfrak{Z}(G)\to Pol(\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*})^{W^\theta}$ est un homomorphisme d'algèbres surjectif.

Preuve. Parce que $\tilde{\mu}(\omega)$ est central, il existe un unique automorphisme ι' de $\mathfrak{Z}(G)$ qui, à un élément $X\in\mathfrak{h}\subset\mathfrak{Z}(G)$, associe l'élément $X+<X,\tilde{\mu}(\omega)>$. Pour des éléments $Z\in\mathfrak{Z}(G)$ et $\lambda\in\mathfrak{h}^{\theta,*}$, évaluer Z en $\tilde{\mu}(\omega)+\lambda$ revient à évaluer $\iota'(Z)$ en λ. Cela ramène l'assertion au cas où $\tilde{\mu}(\omega)=0$. C'est alors le théorème 5 de [4]. $\square$

Soit $(\pi,\tilde{\pi})$ une ω-représentation, supposons π irréductible. A π est associé son caractère infinitésimal, qui est paramétré par une orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action de W. On note $\mu(\pi)$ ou $\mu(\tilde{\pi})$ cette orbite. Parce que π se prolonge en une ω-représentation, on a l'égalité $\mu(\pi)+\mu(\omega)=\theta^{-1}(\mu(\pi))$. L'ensemble $\mu(\pi)-\tilde{\mu}(\omega)$ est alors une W-orbite qui est invariante par θ. On vérifie que l'intersection d'une telle orbite avec $\mathfrak{h}^{\theta,*}$ est non vide et est une seule orbite sous l'action de W^θ. Autrement dit, l'ensemble

$$(\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*})\cap\mu(\tilde{\pi}).$$

est une unique orbite sous l'action de W^θ dans l'espace affine $\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$.

Si $(\pi,\tilde{\pi})$ est une ω-représentation de longueur finie et si toutes les composantes irréductibles de π ont un même paramètre μ, on pose $\mu(\tilde{\pi})=\mu$. Plus généralement, on dira qu'un élément de $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ est de paramètre μ si, modulo le choix d'une mesure de Haar, c'est une combinaison linéaire de caractères de représentations irréductibles $\tilde{\pi}$ dont le paramètre est μ. On note $D_{spec,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ le sous-espace des éléments de paramètre μ.

On a défini en [9] 6.2 l'ensemble $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$. Il est formé de triplets $\boldsymbol{\tau}=(M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}})$, où M est un Levi de G contenant M_0, σ est une représentation irréductible de la série discrète de $M(\mathbb{R})$ et $\tilde{\boldsymbol{r}}$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ défini en [9] 2.8. Ces éléments sont soumis à des conditions telles qu'à $\boldsymbol{\tau}$ est associée une représentation "elliptique" $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Deux triplets peuvent être conjugués par $G(\mathbb{R})$ et donnent dans ce cas la même représentation de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. D'autre part, le groupe $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$, donc sur $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ par $z(M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}}) = (M, \sigma, z\tilde{\boldsymbol{r}})$. On a $\tilde{\pi}_{z\boldsymbol{\tau}} = z\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ (on rappelle que, dans notre situation tordue, les "représentations" peuvent être multipliées par un nombre complexe). Pour un couple (M, σ) comme ci-dessus et pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, on définit la représentation σ_λ. La restriction à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ de cette action de $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ s'étend en une action $\boldsymbol{\tau} \mapsto \boldsymbol{\tau}_\lambda$ de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ sur $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$. On a $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_\lambda} = (\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_\lambda$.

Pour M et σ comme ci-dessus, σ possède un caractère central χ_σ et un caractère central infinitésimal qui est paramétré par une orbite $\mu(\sigma)$ du groupe de Weyl W^M dans $\mathfrak{h}^*$, plus précisément dans $\mathfrak{h}^{M,*}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{a}^*_M(\mathbb{R})$. Pour $\boldsymbol{\tau} = (M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}}) \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$, on note $\mu(\boldsymbol{\tau})$ la W-orbite engendrée par $\mu(\sigma)$. On note $\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega)$ le sous-ensemble des $\boldsymbol{\tau} = (M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}}) \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ tels que χ_σ soit trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. Tout élément de $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ s'écrit de façon unique $\boldsymbol{\tau}_\lambda$ pour un couple $(\boldsymbol{\tau}, \lambda) \in \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega) \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$. On note $D_{ell}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, resp. $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, le sous-espace de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ engendré par les caractères des représentations $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$, resp. $\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega)$. Pour toute W-orbite μ dans $\mathfrak{h}^*$, on définit les espaces $D_{ell,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, resp. $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, en se limitant aux $\boldsymbol{\tau}$ tels que $\mu(\boldsymbol{\tau}) = \mu$. On a $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) = D_{ell,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ si la projection de μ dans $\mathfrak{a}^*_{\tilde{G}}(\mathbb{C})$ est nulle. Sinon, $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) = 0$.

On note $D_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ le sous-espace de $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ engendré par les caractères de représentations $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_\lambda$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ et $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$. On a l'égalité

$$(2) \qquad D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) = \Big(\oplus_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{L}(\mathbb{R}), \omega))\Big)^{W(\tilde{M}_0)}.$$

1.3 Espaces de Paley-Wiener

On considère les données suivantes :

- E est un ensemble ;
- D est un entier positif ou nul ;
- $d : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction ;
- pour tout $e \in E$, V_e est un espace vectoriel réel de dimension inférieure ou égale à D muni d'une forme quadratique définie positive.

L'espace dual V_e^* est donc lui-aussi muni d'une telle forme. On prolonge ces formes en des formes hermitiennes sur $V_{e,\mathbb{C}}$ et $V^*_{e,\mathbb{C}}$.

Pour tout réel $r > 0$, notons PW^r l'espace des familles $\mathbf{f} = (f_e)_{e \in E}$, où, pour tout $e \in E$, f_e est une fonction entière sur $V^*_{e,\mathbb{C}}$, qui vérifient la condition

(1) pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que, pour tout $e \in E$ et tout $\lambda \in V^*_{e,\mathbb{C}}$, on ait l'inégalité

$$|f_e(\lambda)| \leq C_N(1 + d(e) + |\lambda|)^{-N} e^{r|Re(\lambda)|}.$$

On munit cet espace de la famille de semi-normes

$$\mathcal{N}^r_N(\mathbf{f}) = sup_{e \in E, \lambda \in V^*_{e,\mathbb{C}}}(1 + d(e) + |\lambda|)^N e^{-r|Re(\lambda)|}|f_e(\lambda)|$$

pour $N \in \mathbb{N}$. C'est un espace de Fréchet. Pour $r < r'$, l'injection $PW^r \to PW^{r'}$ est continue et on note PW la limite inductive des PW^r, muni de la topologie limite inductive.

Pour tout réel $r > 0$, notons $\underline{PW}^r$ l'espace des familles $\mathbf{f} = (f_e)_{e\in E}$, où, pour tout $e \in E$, f_e est une fonction entière sur $V^*_{e,\mathbb{C}}$, qui vérifient les conditions

(2) pour tout N et tout $e \in E$, il existe $C_N(e) > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in V^*_{e,\mathbb{C}}$, on ait l'inégalité

$$|f_e(\lambda)| \leq C_N(e)(1 + |\lambda|)^{-N} e^{r|Re(\lambda)|};$$

(3) pour tout N, il existe $\underline{C}_N > 0$ tel que, pour tout $e \in E$ et tout $\lambda \in iV^*_e$, on ait l'inégalité

$$|f_e(\lambda)| \leq \underline{C}_N(1 + d(e) + |\lambda|)^{-N}.$$

On munit $\underline{PW}^r$ de la famille de semi-normes

$$\underline{\mathcal{N}}_N(\mathbf{f}) = sup_{e\in E,\lambda\in iV^*_e}(1 + d(e) + |\lambda|)^N |f_e(\lambda)|$$

pour $N \in \mathbb{N}$. De nouveau, on note $\underline{PW}$ la limite inductive des $\underline{PW}^r$ munie de la topologie limite inductive.

Il est clair que, pour tout r, PW^r est inclus dans $\underline{PW}^r$ et que cette injection est continue. D'où une injection continue $PW \subset \underline{PW}$.

Lemme. *Cette application est bijective et c'est un homéomorphisme.*

Remarque. Ce lemme est élémentaire. On n'en donne une preuve que pour la commodité du rédacteur.

Preuve. On peut décomposer E en union finie disjointe de sous-ensembles sur lesquels la fonction $e \mapsto dim(V_e)$ est constante. On voit qu'il suffit de démontrer le lemme analogue obtenu en remplaçant E par un tel sous-ensemble. En oubliant cela, on peut supposer que l'espace V_e, muni de sa forme quadratique, est constant et on l'identifie à un espace fixe V. Pour simplifier, on identifie V à son dual V^* à l'aide de la forme quadratique. On considère donc que f_e est définie sur $V_\mathbb{C}$ pour tout e.

Fixons $\epsilon > 0$. On va montrer que, pour tout $r > 0$, $\underline{PW}^r$ est inclus dans $PW^{r+\epsilon}$ et que cette injection est continue. Pour cela, fixons $r > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. On va prouver plus précisément qu'il existe $c > 0$ (dépendant de N, r et ϵ) tel que, pour tout $\mathbf{f} \in \underline{PW}^r$, on ait l'inégalité

$$(4) \qquad \mathcal{N}^{r+\epsilon}_N(\mathbf{f}) \leq c\underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f}).$$

Soit $\mathbf{f} = (f_e)_{e\in E} \in \underline{PW}^r$. Pour tout $e \in E$, on définit une fonction φ_e sur V par

$$(5) \qquad \varphi_e(x) = \int_{iV} f_e(\lambda)e^{-2\pi(x,\lambda)}\, d\lambda.$$

La condition (2) entraîne que la fonction φ_e est C^∞ et, par un procédé usuel de déplacement de contour, que cette fonction est à support dans l'ensemble des $x \in V$ tels que $|x| \leq r/2\pi$. Par inversion de Fourier, on a

$$(6) \qquad f_e(\lambda) = \int_V \varphi_e(x)e^{2\pi(x,\lambda)}\, dx$$

pour $\lambda \in iV$ et cette égalité persiste pour tout $\lambda \in V_\mathbb{C}$ par continuation holomorphe. On veut majorer l'expression

$$(1 + d(e) + |\lambda|)^N e^{-(r+\epsilon)|Re(\lambda)|}|f_e(\lambda)|$$

pour tout $e \in E$ et tout $\lambda \in V_{\mathbb{C}}$. On a tout d'abord

$$(1 + d(e) + |\lambda|)^N \leq (1 + d(e))^N (1 + |\lambda|)^N$$

car $1 + x + y \leq (1 + x)(1 + y)$ pour tous $x, y \geq 0$. On a

$$(1 + |\lambda|)^N \leq 2^N (1 + |\lambda|^2)^N = 2^N (1 + |Im(\lambda)|^2 + |Re(\lambda)|^2)^N$$

car $1 + x \leq 2(1 + x^2)$ pour tout $x \geq 0$. Introduisons des coordonnées sur V relatives à une base orthogonale. On a

$$1+|Im(\lambda)|^2+|Re(\lambda)|^2 = 1+\sum_{j=1,\ldots,D}(Im(\lambda_j)^2+Re(\lambda_j)^2) = 1+\sum_{j=1,\ldots,D}(-\lambda_j^2+2\lambda_j Re(\lambda_j)).$$

Ainsi $(1+|Im(\lambda)|^2+|Re(\lambda)|^2)^N$ s'exprime comme combinaison linéaire finie de produits de monômes de degré au plus $2N$ en les λ_j et de monômes de degré au plus N en les $Re(\lambda_j)$. On peut aussi bien fixer deux tels monômes $P(\lambda)$ et $Q(Re(\lambda))$ et majorer

$$(1 + d(e))^N |P(\lambda)||Q(Re(\lambda))|e^{-(r+\epsilon)|Re(\lambda)|}|f_e(\lambda)|.$$

Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$|Q(Re(\lambda))| \leq c_1(1 + |Re(\lambda)|)^N$$

et $(1 + x)^N e^{-\epsilon x} \leq c_2$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi l'expression précédente est majorée par le produit d'une constante et de

$$(7) \qquad (1 + d(e))^N |P(\lambda)|e^{-r|Re(\lambda)|}|f_e(\lambda)|.$$

Par les règles usuelles de dérivation, on déduit de (5) et (6) l'existence d'un opérateur différentiel à coefficients constants ∂_P sur V, d'ordre au plus $2N$, tel que

$$(8) \qquad P(\lambda)f_e(\lambda) = \int_V \partial_P \varphi_e(x)e^{2\pi(x,\lambda)}\, dx$$

et

$$(9) \qquad \partial_P \varphi_e(x) = \int_{iV} P(\lambda)f_e(\lambda)e^{-2\pi(x,\lambda)}\, d\lambda.$$

Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que

$$|P(\lambda)| \leq c_3(1 + |\lambda|)^{2N}.$$

Alors, pour $\lambda \in iV$,

$$|P(\lambda)f_e(\lambda)| \leq c_3 \underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f})(1 + |\lambda|)^{2N}(1 + d(e) + |\lambda|)^{-4N-4D}.$$

On utilise que $(1 + x + y) \geq (1 + x)^{1/2}(1 + y)^{1/2}$ pour tous $x, y \geq 0$ et on obtient

$$|P(\lambda)f_e(\lambda)| \leq c_3 \underline{\mathcal{N}}_{4N+4}(\mathbf{f})(1 + |\lambda|)^{-2D}(1 + d(e))^{-2N-2D}.$$

La fonction $\lambda \mapsto (1+|\lambda|)^{-2D}$ est intégrable sur iV. Grâce à (9), on en déduit l'existence de $c_4 > 0$ tel que

$$\partial_P \varphi_e(x) \leq c_4 \underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f})(1 + d(e))^{-2N-2D}$$

pour tout $x \in V$. Grâce à (8) et à la propriété du support de φ_e, on obtient une constante $c_5 > 0$ telle que

$$|P(\lambda)f_e(\lambda)| \leq c_5 \underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f})(1 + d(e))^{-2N-2D}e^{r|Re(\lambda)|}$$

pour tout $\lambda \in V_{\mathbb{C}}$. Alors, l'expression (7) est bornée par le produit d'une constante et de $\underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f})$. Cela prouve la majoration (4) et le lemme. $\square$

Ce lemme étant démontré, on n'aura plus besoin de distinguer PW de $\underline{PW}$ et on ne conservera que la notation PW.

1.4 Enoncé du théorème

On définit une fonction $d : \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ par $d(\boldsymbol{\tau}) = |\mu(\boldsymbol{\tau})|$, où l'on désigne ainsi la norme pour la forme hermitienne fixée sur $\mathfrak{h}$ d'un élément quelconque de $\mu(\boldsymbol{\tau})$. On définit l'espace $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ comme celui des fonctions $\varphi : \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega) \to \mathbb{C}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) si deux éléments $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\tau}'$ de $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ sont conjugués par $G(\mathbb{R})$, alors $\varphi(\boldsymbol{\tau}) = \varphi(\boldsymbol{\tau}')$;

(2) pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ et $z \in \mathbb{U}$, on a $\varphi(z\boldsymbol{\tau}) = z\varphi(\boldsymbol{\tau})$;

(3) pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$, la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\boldsymbol{\tau}_{\lambda})$ sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ s'étend en une fonction entière $\varphi_{\boldsymbol{\tau}}$ sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$;

(4) fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega)$ de représentants des classes d'équivalence dans $\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega)$ pour l'équivalence engendrée par la conjugaison par $G(\mathbb{R})$ et par l'action de $\mathbb{U}$; alors la famille $(\varphi_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)}$ appartient à l'espace de Paley-Wiener défini en 1.3 relatif à l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega)$ muni de la fonction d.

Le groupe $W(\tilde{M}_0)$ agit naturellement dans

$$\oplus_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW^{\infty}_{ell}(\tilde{L}, \omega).$$

On note $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega)$ le sous-espace des invariants.

Remarque. On peut se limiter aux $\tilde{L}$ tels que la restriction de ω à $Z(L;\mathbb{R})^{\theta}$ est triviale. Pour les autres, les espaces correspondants sont nuls pour la simple raison que les ensembles $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{L}, \omega)$ sont vides : il n'y a pas de ω-représentations de $\tilde{L}(\mathbb{R})$.

Soit $\mathbf{f} \in C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{L}, \omega)$, posons $\varphi_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\tau}) = I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}) = trace(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}))$. On peut aussi dire que $\varphi_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\tau}) = I^{\tilde{G}}(Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}), \mathbf{f}) = trace(Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})(\mathbf{f}))$, où $\tilde{Q}$ est un espace parabolique quelconque de composante de Levi $\tilde{L}$. On a ainsi défini une application linéaire qui, à $\mathbf{f} \in C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, associe une famille de fonctions sur $\sqcup_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} \mathcal{E}_{ell}(\tilde{L}, \omega)$. Elle se quotiente en une application linéaire sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

Théorème. *Cette application est un homéomorphisme de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ sur $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega)$.*

Ce théorème est prouvé par Renard ([7] théorème 17.5). La formulation de Renard étant largement différente de la nôtre, nous montrerons dans les deux paragraphes suivants pourquoi l'énoncé de Renard implique l'énoncé ci-dessus.

Rappelons pour mémoire le résultat de Delorme et Mezo. On note $C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$ l'espace des éléments de $C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui sont K-finis à droite et à gauche. On note $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K)$ son image dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Notons $PW_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ le sous-espace des familles $(\varphi_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)} \in PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ telles que $\varphi_{\boldsymbol{\tau}} = 0$ pour presque tout $\boldsymbol{\tau}$. En supprimant les exposants $^{\infty}$, on définit comme ci-dessus l'espace $PW(\tilde{G}, \omega)$, qui est un sous-espace de $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega)$. Alors l'application du théorème se restreint en un isomorphisme de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K)$ sur $PW(\tilde{G}, \omega)$.

1.5 La transition entre le théorème de Renard et le théorème 1.4

On suppose $\omega = 1$. On oublie les questions de mesures en fixant des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. Considérons un sous-ensemble Ω de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est réunion de composantes connexes pour la topologie réelle et qui est engendré par conjugaison sous $G(\mathbb{R})$ par une seule telle composante. Il peut n'exister aucun sous-tore tordu maximal elliptique $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$ tel que $\tilde{T}(\mathbb{R})\cap\Omega$ soit non vide. Supposons qu'il en existe un. Alors il n'en existe qu'un, à conjugaison près par $G(\mathbb{R})$ ([7] lemme 12.12). Fixons un tel tore tordu $\tilde{T}$. Notons $\mathfrak{t}^{\theta,\tilde{G}}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\tilde{G}}$ dans $\mathfrak{t}^{\theta}$. Renard introduit un certain sous-ensemble de $i\mathfrak{t}^{\theta,\tilde{G}}(\mathbb{R})$, notons-le $H^*(\Omega)$.

Remarque. Plus précisément, Renard introduit un tel sous-ensemble sur lequel agit un certain groupe de Weyl. Les constructions de Renard pour deux éléments conjugués par ce groupe sont essentiellement les mêmes. Aussi, nous prendrons pour $H^*(\Omega)$ un ensemble de représentants des orbites dans l'ensemble de Renard pour l'action de ce groupe.

Pour $h^* \in H^*(\Omega)$, il définit une distribution Θ_{Ω,h^*} sur Ω qui vérifie de nombreuses propriétés. C'est une distribution propre pour l'action de $\mathfrak{Z}(G)$, donc il lui est associée une W-orbite $\mu(h^*)$ dans $\mathfrak{h}^*$. D'après [7] paragraphe 18, c'est la restriction à Ω d'un élément de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On peut donc tensoriser la distribution Θ_{Ω,h^*} par un élément $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$: on note $\Theta_{\Omega,h^*,\lambda}$ la distribution obtenue. Notons $E^{\tilde{G}}_{ell}$ l'ensemble des paires (Ω, h^*), où Ω parcourt les sous-ensembles de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions ci-dessus et h^* parcourt $H^*(\Omega)$. Remarquons qu'il n'y a qu'un nombre fini de Ω puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes pour la topologie réelle. On définit une fonction d sur $E^{\tilde{G}}_{ell}$: pour $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$, $d(\Omega, h^*) = |\mu(h^*)|$. On introduit l'espace de Paley-Wiener associé à cet ensemble $E^{\tilde{G}}_{ell}$ et à cette fonction d. Notons-le $PW'_{ell}(\tilde{G})$. De nouveau, le groupe $W(\tilde{M}_0)$ agit naturellement sur

$$\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW'_{ell}(\tilde{L}).$$

On note $PW'(\tilde{G})$ le sous-espace des invariants. On pose $E = \cup_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} E^{\tilde{L}}_{ell}$.

Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et pour $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{L}}$, on définit une fonction φ_{Ω,h^*} sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ par $\varphi_{\Omega,h^*}(\lambda) = \Theta_{\Omega,h^*,\lambda}(f_{\tilde{L}})$. Renard démontre que l'application qui, à f, associe la famille de fonctions $(\varphi_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E}$ se quotiente en un homéomorphisme de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW'(\tilde{G})$.

D'après [3] corollaire 14.5, le groupe Π des composantes connexes de $G(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle est un groupe abélien fini, en fait une puissance de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est muni d'un automorphisme θ, égal à l'automorphisme déduit de ad_γ pour n'importe quel $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. Notons Ω_G la réunion des composantes appartenant au sous-groupe $(1-\theta)(\Pi)$. Alors tout ensemble Ω intervenant ci-dessus est une unique classe modulo Ω_G, à droite ou à gauche. Notons Ξ le groupe des caractères de $G(\mathbb{R})$ triviaux sur Ω_G. Pour Ω intervenant ci-dessus et pour $\xi \in \Xi$, notons $\tilde{\xi}_\Omega$ l'unique fonction sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ telle que $\tilde{\xi}_\Omega(g\gamma) = \xi(g)$ pour tous $g \in G(\mathbb{R})$ et $\gamma \in \Omega$. La fonction caractéristique de Ω est égale à

$$|\Xi|^{-1}\sum_{\xi\in\Xi}\tilde{\xi}_\Omega.$$

Soit $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$. Comme on l'a dit, la distribution Θ_{Ω,h^*} est la restriction à Ω d'un élément de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, que l'on peut écrire $\sum_{i\in I} c_i\tilde{\pi}_i$, où I est un ensemble fini d'indices et, pour tout $i \in I$, c_i est un coefficient complexe et $\tilde{\pi}_i$ est une représentation irréductible et tempérée. On a alors l'égalité

$$\Theta_{\Omega,h^*} = |\Xi|^{-1} \sum_{\xi \in \Xi} \sum_{i \in I} c_i \tilde{\xi}_\Omega \tilde{\pi}_i,$$

où le produit $\tilde{\xi}_\Omega \tilde{\pi}_i$ se définit de façon évidente. Il est clair que $\tilde{\xi}_\Omega \tilde{\pi}_i$ est encore une représentation tempérée et irréductible. Cela nous débarrasse du passage par la restriction à Ω : la distribution Θ_{Ω,h^*} s'identifie à un élément de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On la note désormais $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, f)$ pour un certain élément $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Soit $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$ et soit comme ci-dessus $\tilde{T}$ un tore tordu maximal elliptique tel que $\tilde{T}(\mathbb{R})$ coupe Ω. Alors Renard calcule le caractère de $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$ ([7] 15.17). Fixons $\gamma \in \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \Omega$. Tout élément de cette intersection est conjugué à un élément de $exp(\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R}))\gamma$. En un point $exp(X)\gamma$, avec $X \in \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$, c'est le produit d'un module explicite avec une combinaison linéaire finie explicite de $e^{<w(h^*),X>}$, pour certains $w \in W$. Il en résulte d'abord que

(1) $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ admet un caractère central pour l'action de $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ et que celui-ci est trivial.

Rappelons que l'on peut définir le produit scalaire elliptique $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)_{ell}$ de deux représentations $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ se tranformant trivialement sous l'action de $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$, cf. [9] 7.3. Montrons que

(2) pour deux éléments distincts (Ω_1, h_1^*) et $(\Omega_2, h_2^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$, on a l'égalité $(\tilde{\pi}_{\Omega_1,h_1^*}, \tilde{\pi}_{\Omega_2,h_2^*})_{ell} = 0$;

(3) quand (Ω, h^*) parcourt $E^{\tilde{G}}_{ell}$, les produits $(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*})$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs réelles strictement positives.

Preuve de (2). Si Ω_1 est distinct de Ω_2, les caractères sont de supports disjoints. Si $\Omega_1 = \Omega_2$, le produit elliptique est, à une constante près, l'intégrale sur un unique $\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta)(T(\mathbb{R}))$ du produit d'un certain module, du caractère de $\tilde{\pi}_{\Omega_2,h_2^*}$ et du conjugué du caractère de $\tilde{\pi}_{\Omega_1,h_1^*}$. D'après le résultat évoqué ci-dessus, c'est une combinaison linéaire finie d'intégrales sur $exp(\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R}))$ de fonctions du type $exp(X) \mapsto e^{<w_2(h_2^*)-w_1(h_1^*),X>}$. L'intégrale d'une telle fonction n'est non nulle que si $w_2(h_2^*) = w_1(h_1^*)$. Une telle égalité (où ne peuvent intervenir que certains éléments du groupe de Weyl) entraîne que $h_1^* = h_2^*$ (pour h_1^* et h_2^* dans notre ensemble $H^*(\Omega_1)$, cf. remarque ci-dessus).

Preuve de (3). Le même raisonnement montre que, si le caractère de $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ en un point $exp(X)\gamma$ s'écrit comme produit d'un module explicite et de $\sum_w c_w e^{<w(h^*),X>}$, alors

$$(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*}) = m \sum_w |c_w|^2,$$

où m est une constante ne dépendant que des mesures. Or les constantes c_w intervenant en [7] 15.17 sont de modules 1. La somme ci-dessus est donc m fois le nombre d'éléments de l'ensemble de sommation. Ce dernier étant un sous-ensemble de W, l'assertion s'ensuit.

Renard démontre une propriété supplémentaire de ses distributions. Le théorème [7] 15.18 signifie que

(4) pour tout $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$, $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ est supertempérée.

On renvoie à [6] pour cette notion. Or, dans [6], Moeglin démontre qu'un élément de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui est supertempéré est combinaison linéaire de caractères de représentations elliptiques. En joignant ce dernier résultat à (1), on obtient que $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*} \in D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ pour tout $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$.

Pour tout $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$, on peut donc exprimer $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ comme combinaison linéaire des $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ (rappelons que $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ est un ensemble de représentants fixé en 1.4). Plus précisément, pour toute W-orbite dans $\mathfrak{h}^*$, notons $E^{\tilde{G}}_{ell,\mu}$, resp. $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$, le sous-ensemble des $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$, resp. des $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$, tels que le caractère infinitésimal de $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$, resp. $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$, soit de paramètre μ. Comme on l'a dit, $E^{\tilde{G}}_{ell}$ est réunion des $E^{\tilde{G}}_{ell,\mu}$ et, de même, $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ est réunion des $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$. L'écriture d'un élément de $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dans la base $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ est compatible avec l'action de $\mathfrak{Z}(G)$. Donc, pour tout μ et tout $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell,\mu}$, $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ est combinaison linéaire des $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$. Notons que, d'après sa construction, l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$ est fini et son nombre d'éléments est borné indépendamment de μ. Montrons que

(5) la famille $(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E^{\tilde{G}}_{ell}}$ est une base de $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Il est clair par (2) et (3) qu'elle est libre. On peut fixer μ et prouver que l'espace engendré par $(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E^{\tilde{G}}_{ell,\mu}}$ contient $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$. Notons $PW^{\infty}_{ell,\mu}(\tilde{G})$ le sous-espace de $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$ formé des familles $(\varphi_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})}$ telles que $\varphi_{\boldsymbol{\tau}} = 0$ si $\mu(\boldsymbol{\tau}) \neq \mu$. Notons $PW'_{ell,\mu}(\tilde{G})$ le sous-espace de $PW'_{ell}(\tilde{G})$ formé des familles $(\varphi_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E^{\tilde{G}}_{ell}}$ telles que $\varphi_{\Omega,h^*} = 0$ si $(\Omega, h^*) \notin E^{\tilde{G}}_{ell,\mu}$. Il est clair que l'inclusion de l'espace engendré par les $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ pour $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell,\mu}$ dans celui engendré par les $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$ induit une projection $PW^{\infty}_{ell,\mu}(\tilde{G}) \to PW'_{ell,\mu}(\tilde{G})$. L'inclusion précédente est surjective si et seulement si cette projection est injective. Supposons que ce ne soit pas le cas. En utilisant le théorème de Paley-Wiener pour les fonctions K-finies ([4] repris en [9] 6.2), on peut construire une fonction K-finie $f \in C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dont l'image dans $PW^{\infty}(\tilde{G})$ est non nulle mais appartient au noyau de la projection. La première propriété implique que l'image de f dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est non nulle. La seconde entraîne que son image dans $PW'(\tilde{G})$ est nulle. D'après le théorème de Renard, l'image de f dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est nulle. Cette contradiction prouve (5). $\square$.

On a donc deux matrices de changement de base $(a_{(\Omega,h^*),\boldsymbol{\tau}})_{(\Omega,h^*)\in E^{\tilde{G}}_{ell},\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})}$ et $(b_{\boldsymbol{\tau},(\Omega,h^*)})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G}),(\Omega,h^*)\in E^{\tilde{G}}_{ell}}$, inverses l'une de l'autre, qui font passer de la base $(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E^{\tilde{G}}_{ell}}$ de $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ à la base $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})}$. Comme on l'a dit ci-dessus, ces matrices induisent pour tout μ un isomorphisme de $PW^{\infty}_{ell,\mu}(\tilde{G})$ sur $PW'_{ell,\mu}(\tilde{G})$. Pour prouver que ces isomorphismes se globalisent en un isomorphisme de $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$ sur $PW'_{ell}(\tilde{G})$, on voit qu'il suffit de prouver que les matrices de changement de base vérifient les deux propriétés suivantes :

(6) il existe un entier N tel que, pour tout $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$, l'ensemble des $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ tels que $a_{(\Omega,h^*),\boldsymbol{\tau}} \neq 0$ a au plus N éléments et, pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$, l'ensemble des $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$ tels que $b_{\boldsymbol{\tau},(\Omega,h^*)} \neq 0$ a au plus N éléments ;

(7) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$ et $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$, on a $|a_{(\Omega,h^*),\boldsymbol{\tau}}| \leq C$ et $|b_{\boldsymbol{\tau},(\Omega,h^*)}| \leq C$.

Les matrices se décomposent en blocs selon les paramètres μ. L'assertion (6) résulte alors de ce que l'on a déjà dit : le nombre d'éléments de $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$ est borné indépendamment de μ. La base $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})}$ vérifie des propriétés analogues à (2) et (3), à savoir :

(8) pour deux éléments distincts $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, on a $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_1}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_2})_{ell} = 0$;

(9) quand $\boldsymbol{\tau}$ parcourt $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$, les produits $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{ell}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs réelles strictement positives.

Cela résulte de [9] théorème 7.3. Il résulte de (2) et (8) que les coefficients de nos matrices sont des rapports

$$\frac{(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{ell}}{(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{ell}}$$

ou

$$\frac{(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{ell}}{(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{ell}}.$$

Ils sont bornés par

$$\frac{(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{ell}^{1/2}}{(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{ell}^{1/2}}$$

ou par l'inverse de ce rapport. Ces deux rapports sont bornés d'après (3) et (9).

En conclusion, le changement de base identifie $PW'_{ell}(\tilde{G})$ et $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$. Il en résulte une identification de $PW'(\tilde{G})$ avec $PW^{\infty}(\tilde{G})$. Il est clair que l'application du théorème 1.4 est la composée de l'application de Renard de $C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dans $PW'(\tilde{G})$ avec cet isomorphisme entre les deux espaces de Paley-Wiener. Le théorème 1.4 résulte ainsi de celui de Renard.

1.6 Extension au cas $\omega \neq 1$

La méthode est la même qu'en [9] 6.3. On suppose d'abord qu'il existe un caractère μ de $G(\mathbb{R})$ tel que $\omega = \mu \circ (1-\theta)$. On fixe un élément $\gamma_0 \in \tilde{M}_0(\mathbb{R})$ et on note $\mathbf{1}$ le caractère trivial de $G(\mathbb{R})$. A toute ω-représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on associe la $\mathbf{1}$-représentation $\tilde{\pi}_1$ définie par $\tilde{\pi}_1(g\gamma_0) = \mu(g)\tilde{\pi}(g\gamma_0)$ pour tout $g \in G(\mathbb{R})$. C'est une bijection. Construisons un espace $\mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$ comme on a construit $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega)$, en oubliant les conditions de convergence. La bijection précédente induit un isomorphisme de $\mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$ sur $\mathcal{F}(\tilde{G}, \mathbf{1})$, qui se restreint en un homéomorphisme de $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega) \to PW^{\infty}(\tilde{G}, \mathbf{1})$. On définit d'autre part une application

$$\begin{array}{ccc} C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R})) & \to & C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \\ f & \mapsto & f_1 \end{array}$$

par $f_1(g\gamma_0) = \mu(g)^{-1} f(g\gamma_0)$. Notons $pw_{\tilde{G},\omega} : C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to \mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$ l'application du théorème 1.4 pour le caractère ω. Le théorème affirme que son image est $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega)$ et que $pw_{\tilde{G},\omega}$ se factorise en un homéomorphisme de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ sur cette image. On vérifie que $pw_{\tilde{G},\omega}$ est la composée de l'application précédente, de $pw_{\tilde{G},\mathbf{1}}$ et de l'isomorphisme inverse $\mathcal{F}(\tilde{G}, \mathbf{1}) \to \mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$. Il est alors facile de déduire les propriétés requises de l'application $pw_{\tilde{G},\omega}$ de celles déjà connues de l'application $pw_{\tilde{G},\mathbf{1}}$.

Dans le cas général, on peut évidemment supposer ω trivial sur $Z(G)^{\theta}(\mathbb{R})$ (sinon le théorème affirme que $\{0\}$ est homéomorphe à $\{0\}$). On introduit un couple $(G', \tilde{G}')$ comme en [9] 2.4. On a une suite exacte

$$1 \to C \to G' \stackrel{p}{\to} G \to 1$$

où C est un tore central. On a une application $\tilde{p} : \tilde{G}' \to \tilde{G}$ compatible avec p. L'application $G'(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R})$ est surjective. Enfin, il existe un caractère μ' de $G'(\mathbb{R})$ tel que $\omega \circ p = \mu' \circ (1-\theta')$ (où θ' est l'analogue de θ pour $(G', \tilde{G}')$). Notons que θ' n'est pas trivial sur C en général. Une ω-représentation de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ s'identifie à une $\omega \circ p$-représentation $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{G}'(\mathbb{R})$ telle que la représentation sous-jacente π' ait un caractère central trivial sur $C(\mathbb{R})$. Cette identification induit une application $\mathcal{F}(\tilde{G}', \omega \circ p) \to \mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$. On voit que cette application se restreint en une application continue $PW^\infty(\tilde{G}', \omega\circ p) \to PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$. On peut construire une section de ces applications de la façon suivante. Fixons une fonction φ_C sur $\mathcal{A}^{\theta',*}_{C,\mathbb{C}}$ qui est de Paley-Wiener et telle que $\varphi_C(0) = 1$. Soit $\boldsymbol{\varphi}$ un élément de $\mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$. C'est donc une collection de fonctions $\varphi_{\tilde{L},\boldsymbol{\tau}}$, où $\tilde{L}$ parcourt $\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\boldsymbol{\tau}$ parcourt $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$, cette collection étant soumise à une condition d'invariance par $W(\tilde{M}_0)$. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Soit $\tilde{L}'$ son image réciproque dans $\tilde{G}'$. On peut supposer que $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$ s'identifie à un sous-ensemble de $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L}', \omega \circ p)$. On peut identifier $\mathcal{A}^*_{\tilde{L}'}$ à $\mathcal{A}^*_{\tilde{L}} \oplus \mathcal{A}^{\theta',*}_C$. Pour $\boldsymbol{\tau}' \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L}', \omega \circ p) - \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$, on pose $\varphi'_{\tilde{L}',\boldsymbol{\tau}'} = 0$. Pour $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$, on définit une fonction $\varphi'_{\tilde{L}',\boldsymbol{\tau}}$ sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L}',\mathbb{C}}$ par

$$\varphi'_{\tilde{L}',\boldsymbol{\tau}}(\lambda_C + \lambda_{\tilde{L}}) = \varphi_C(\lambda_C)\varphi_{\tilde{L},\boldsymbol{\tau}}(\lambda_{\tilde{L}})$$

pour tous $\lambda_C \in \mathcal{A}^{\theta',*}_{C,\mathbb{C}}$ et $\lambda_{\tilde{L}} \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$. La collection $\boldsymbol{\varphi}'$ de ces fonctions $\varphi'_{\tilde{L}',\boldsymbol{\tau}'}$ appartient à $\mathcal{F}(\tilde{G}', \omega\circ p)$. Il est clair que l'application $\boldsymbol{\varphi} \mapsto \boldsymbol{\varphi}'$ est une section de l'application $\mathcal{F}(\tilde{G}', \omega\circ p) \to \mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$ ci-dessus et qu'elle envoie continuement $PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$ dans $PW^\infty(\tilde{G}', \omega\circ p)$. D'autre part, on définit une application

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R})) & \to & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \\ f' & \mapsto & f \end{array}$$

par

$$f(\gamma) = \int_{C(\mathbb{R})} f(c\gamma')\, dc,$$

où γ' est un relèvement quelconque de γ dans $\tilde{G}'(\mathbb{R})$. Cette application est continue et admet clairement une section continue.

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R})) & \stackrel{f'\mapsto f}{\to} & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \\ \downarrow pw_{\tilde{G}',\omega\circ p} & & \downarrow pw_{\tilde{G},\omega} \\ \mathcal{F}(\tilde{G}', \omega \circ p) & \to & \mathcal{F}(\tilde{G}, \omega) \end{array}$$

On connaît déjà le théorème pour $(G', \tilde{G}')$ et pour le caractère $\omega\circ p$, puisque celui-ci est de la forme $\mu'\circ(1-\theta')$. Parce que l'application horizontale du haut est surjective, que l'application $pw_{\tilde{G}',\omega\circ p}$ a pour image $PW^\infty(\tilde{G}', \omega\circ p)$ et que l'application horizontale du bas envoie ce dernier espace sur $PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$, on voit que $pw_{\tilde{G},\omega}$ envoie surjectivement $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$. Parce que l'application horizontale du haut admet une section continue, la continuité de l'application $pw_{\tilde{G},\omega} : C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$ résulte de celle de l'application similaire $pw_{\tilde{G}',\omega\circ p}$ et de celle de l'application $PW^\infty(\tilde{G}', \omega \circ p) \to PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$. Comme on l'a déjà dit, l'application $pw_{\tilde{G},\omega}$ se factorise par $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Parce que l'application $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ est ouverte, notre application continue $pw_{\tilde{G},\omega}$ se factorise en une application continue

$$(1) \qquad I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \to PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$$

qui est encore surjective. On sait par ailleurs qu'elle est injective ([9] théorème 5.5), donc bijective. Il reste à prouver que l'application réciproque est continue. On voit aisément que le diagramme ci-dessus se factorise en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R})) & \stackrel{f'\mapsto f}{\to} & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I(\tilde{G}'(\mathbb{R}),\omega\circ p) & \to & I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ PW^\infty(\tilde{G}',\omega\circ p) & \to & PW^\infty(\tilde{G},\omega) \end{array}$$

L'application horizontale du milieu est continue car l'application du haut l'est, l'application verticale du haut à droite est continue et l'application verticale du haut à gauche est ouverte. L'application verticale du bas à gauche est un homéomorphisme. Puisque l'application horizontale du bas admet une section continue, il en est de même de l'application verticale du bas à droite. C'est-à-dire que l'inverse de l'application (1) est continue. Cela achève la preuve.

2 Stabilité

2.1 Quelques considérations formelles

Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. On doit fixer une application $H_{\tilde{G}'}:\tilde{G}'(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{G}'}=\mathcal{A}_{G'}$ comme en 1.1. Supposons que $\mathbf{G}'$ est elliptique. On a alors un isomorphisme $\xi:\mathcal{A}_{\tilde{G}}\simeq\mathcal{A}_{\tilde{G}'}$ et

(1) il existe une unique application $H_{\tilde{G}'}:\tilde{G}'(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{G}'}$ telle que

(i) $H_{\tilde{G}'}(y\delta)=H_{G'}(y)+H_{\tilde{G}'}(\delta)$ pour tous $y\in G'(\mathbb{R})$ et $\delta\in\tilde{G}'(\mathbb{R})$;

(ii) on a $H_{\tilde{G}'}(\delta)=\xi(H_{\tilde{G}}(\gamma))$ pour tout couple $(\delta,\gamma)\in\tilde{G}'(\mathbb{R})\times\tilde{G}(\mathbb{R})$ d'éléments semi-simples qui se correspondent.

Preuve. Fixons des éléments semi-simples $\underline{\delta}\in\tilde{G}'(\mathbb{R})$ et $\underline{\gamma}\in\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui se correspondent. On définit $H_{\tilde{G}'}$ comme l'unique application vérifiant (i) et telle que $H_{\tilde{G}'}(\underline{\delta})=\xi(H_{\tilde{G}}(\underline{\gamma}))$. On doit montrer que cette application vérifie (ii). Fixons un diagramme $(\underline{\delta},\underline{B}',\underline{T}',\underline{B},\underline{T},\underline{\gamma})$. Notons $\underline{\xi}:\underline{T}\to\underline{T}'$ l'homomorphisme qui s'en déduit. Complétons nos paires de Borel en des paires de Borel épinglées $\underline{\mathcal{E}}$ et $\underline{\mathcal{E}}'$. Ecrivons $\underline{\gamma}=\underline{t}\underline{e}$, avec $\underline{t}\in\underline{T}$ et $\underline{e}\in Z(\tilde{G},\underline{\mathcal{E}})$, notons $\underline{e}'$ l'image naturelle de $\underline{e}$ dans $Z(\tilde{G}',\underline{\mathcal{E}}')$, écrivons $\underline{\delta}=\underline{t}'\underline{e}'$ avec $\underline{t}'\in\underline{T}'$. On a alors $\xi(\underline{t})=\underline{t}'$. Considérons un autre diagramme quelconque $(\delta,B',T',B,T,\gamma)$. Fixons des éléments $x\in G$ et $y\in G'$ tels que $ad_x(\underline{B},\underline{T})=(B,T)$ et $ad_y(\underline{B}',\underline{T}')=(B',T')$. Posons $e=ad_x(\underline{e})$ et $e'=ad_y(\underline{e}')$. On écrit $\gamma=te$ et $\delta=t'e'$, avec $t\in T$ et $t'\in T'$. On a $\xi(t)=t'$, où $\xi:T\to T'$ est déduit du diagramme. On a $\gamma=ad_x(u\underline{e})$ et $\delta=ad_y(u'\underline{e}')$, où $u=ad_{x^{-1}}(t)$ et $u'=ad_{y^{-1}}(t')$. Puisque $ad_{y^{-1}}\circ\xi\circ ad_x=\underline{\xi}$, on a $\underline{\xi}(u)=u'$. Ecrivons $\gamma=g\underline{\gamma}$ et $\delta=g'\underline{\delta}$ avec $g\in G(\mathbb{R})$ et $g'\in G'(\mathbb{R})$. Pour prouver (ii), on doit prouver que $\xi(H_{\tilde{G}}(g))=H_{\tilde{G}'}(g')$. Pour cela, il suffit de prouver que tout caractère $\chi'\in X^*(G')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ prend la même valeur sur les deux termes. Rappelons que $X^*(G')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\simeq X^*(G)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\theta}$. Précisément, cet isomorphisme associe à $\chi'\in X^*(G')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ l'unique élément $\chi\in X^*(G)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\theta}$ tel que $\chi'\circ\underline{\xi}=\chi$ sur $\underline{T}$. Soit $\chi'\in X^*(G')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ et χ l'élément associé. On calcule $g=xu\theta(x)^{-1}(\underline{t})^{-1}$ (où $\theta=ad_{\underline{e}}$) et $g'=yu'y^{-1}(\underline{t}')^{-1}$. D'où

$$\chi'(H_{\tilde{G}'}(g'))=log(|\chi'(g')|_{\mathbb{R}})=log(|\chi'(u'(\underline{t}')^{-1})|_{\mathbb{R}}),$$

$$\chi'\circ\xi(H_{\tilde{G}}(g))=\chi(H_{\tilde{G}}(g))=log(|\chi(u(\underline{t})^{-1})|_{\mathbb{R}}).$$

Puisque $\underline{\xi}(u(\underline{t})^{-1}) = u'(\underline{t}')^{-1}$, ces deux expressions sont égales, ce qui prouve (1). $\square$

Dans le cas où $\mathbf{G}'$ est elliptique, on identifie $\mathcal{A}_{\tilde{G}'}$ à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ par ξ et on choisit pour $H_{\tilde{G}'}$ l'application définie par (1).

On a expliqué en [I] 2.5 comment définir des espaces $C_c^\infty(\mathbf{G}')$, $I(\mathbf{G}')$, $SI(\mathbf{G}')$. Cette construction s'adapte aux espaces de distributions définis en 1.2. Précisément, on a défini en [I] 2.1 et 2.5 la notion de données auxiliaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$, Δ_1 On n'utilisera ici que des données auxiliaires unitaires, cf. [I] 7.1. Considérons de telles données. Notons $D_{spec,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$ le sous-espace de $D_{spec}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$ engendré par les caractères de représentations $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$ de $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$ (pour le caractère trivial de $G'_1(\mathbb{R})$) telles que le caractère central de π_1 coïncide avec λ_1 sur $C_1(\mathbb{R})$. Considérons une telle représentation $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$ et d'autres données auxiliaires G'_2,..., Δ_2. On définit une représentation $(\pi_2, \tilde{\pi}_2)$ de $\tilde{G}'_2(\mathbb{R})$, agissant dans le même espace que $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$, par les formules

$$\pi_2(x_2) = \lambda_{12}(x_1, x_2)^{-1}\pi_1(x_1),\ \tilde{\pi}_2(\delta_2) = \tilde{\lambda}_{12}(\delta_1, \delta_2)^{-1}\tilde{\pi}_1(\delta_1)$$

pour $x_2 \in G'_2(\mathbb{R})$ et $\delta_2 \in \tilde{G}'_2(\mathbb{R})$, où x_1 est un élément quelconque de $G'_1(\mathbb{R})$ qui a même projection que x_2 dans $G'(\mathbb{R})$, où δ_1 est un élément quelconque de $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$ qui a même projection que δ_2 dans $\tilde{G}'(\mathbb{R})$ et où λ_{12} et $\tilde{\lambda}_{12}$ sont les fonctions définies en [I] 2.5. Alors le caractère central de π_2 coïncide avec λ_2 sur $C_2(\mathbb{R})$. L'application qui, au caractère de $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$, associe celui de $(\pi_2, \tilde{\pi}_2)$, se prolonge en un isomorphisme de $D_{spec,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$ sur $D_{spec,\lambda_2}(\tilde{G}'_2(\mathbb{R}))$. En recollant par ces isomorphismes canoniques les espaces $D_{spec,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$ associés à toutes les données auxiliaires possibles, on obtient un espace que l'on notera $D_{spec}(\mathbf{G}')$. On définit de même le sous-espace $D_{temp}(\mathbf{G}')$. On vérifie que l'application ci-dessus qui, à $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$, associe $(\pi_2, \tilde{\pi}_2)$, envoie une représentation elliptique sur une représentation elliptique. Il lui est associé une bijection de $\mathcal{E}_{ell,\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ sur $\mathcal{E}_{ell,\lambda_2}(\tilde{G}'_2)$, les indices λ_1 et λ_2 signifiant que l'on se restreint aux éléments dont le caractère central se restreint à $C_1(\mathbb{R})$, resp. $C_2(\mathbb{R})$, en le caractère λ_1, resp. λ_2. On en déduit comme ci-dessus par recollement un ensemble $\mathcal{E}_{ell}(\mathbf{G}')$ et un espace $D_{ell}(\mathbf{G}')$.

Remarque. Le corps de base est ici $\mathbb{R}$, mais les constructions ci-dessus valent aussi sur un corps de base local non-archimédien.

Considérons de nouveau des données auxiliaires G'_1, ..., Δ_1. Introduisons les espaces $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}'_1$ et $\mathfrak{h}_{C_1}$ analogues de $\mathfrak{h}$ pour les groupes G', G'_1 et C_1. On a une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{h}'^* \to \mathfrak{h}'^*_1 \to \mathfrak{h}^*_{C_1} \to 0$$

Au caractère λ_1 est associé un paramètre $\mu(\lambda_1) \in \mathfrak{h}^*_{C_1}$. Soit $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$ une représentation irréductible de $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$ dont le caractère central coïncide avec λ_1 sur $C_1(\mathbb{R})$. Alors son paramètre $\mu(\tilde{\pi}_1)$ est une $W^{G'}$-orbite incluse dans l'ensemble $\mathfrak{h}'^*_{1,\lambda_1}$ des éléments de $\mathfrak{h}'^*_1$ qui se projettent sur $\mu(\lambda_1)$. Cet ensemble est un espace affine sous $\mathfrak{h}'^*$. Quand on change de données auxiliaires, ces espaces affines se recollent. En effet, avec les notations ci-dessus, λ_{12} est un caractère du produit fibré de G'_1 et G'_2 au-dessus de G'. Il lui est associé un paramètre

$$\mu(\lambda_{12}) \in \mathfrak{h}'^*_{12} = (\mathfrak{h}'^*_1 \times \mathfrak{h}'^*_2)/diag_-(\mathfrak{h}'^*)$$

(on note $diag_-$ le plongement antidiagonal). La projection de $\mu(\lambda_{12})$ dans $\mathfrak{h}_{C_1} \times \mathfrak{h}_{C_2}$ est $(\mu(\lambda_1), -\mu(\lambda_2))$. Soit alors $\mu_1 \in \mathfrak{h}'^*_{1,\lambda_1}$. Il existe un unique élément $\mu_2 \in \mathfrak{h}'^*_{2,\lambda_2}$ tel que $(\mu_1, -\mu_2)$ se projette sur $\mu(\lambda_{12})$ dans $\mathfrak{h}'^*_{12}$. Le recollement associe μ_2 à μ_1. Par recollement, on obtient un espace affine sous $\mathfrak{h}'^*$ que nous noterons $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$. On ne peut pas recoller les algèbres $\mathfrak{Z}(G'_1)$, mais on peut recoller leurs quotients $\mathfrak{Z}(G'_1)/I(\lambda_1)$, où $I(\lambda_1)$ est l'idéal bilatère engendré par les $X- < X, \mu(\lambda_1) >$ pour $X \in \mathfrak{h}_{C_1}$. On obtient une algèbre notée $\mathfrak{Z}(\mathbf{G}')$, qui s'identifie à l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$ invariants par $W^{G'}$. Cette algèbre agit naturellement sur $C_c^\infty(\mathbf{G}')$.

On a défini en 1.2 l'espace affine $\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$. Il s'identifie à $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$ par la construction suivante. Notons que $\mathfrak{h}'$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{h}^\theta$ (l'identification dépend de choix de paires de Borel mais changer ces choix ne modifie l'identification que par l'action d'un élément de W^θ, ce qui nous importe peu). Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1. On a défini en [I] 2.8 un élément b que l'on peut considérer comme un élément de

$$(1)\qquad (\mathfrak{h}_1'^{*}\times\mathfrak{h}^*)/diag_-(\mathfrak{h}'^*).$$

On vérifie que sa projection dans $\mathfrak{h}^*_{C_1}\times(1-\theta)(\mathfrak{h}^*)$ n'est autre que $(-\mu(\lambda_1),\tilde{\mu}(\omega))$. Pour $\mu\in\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$, il existe un unique $\mu_1\in\mathfrak{h}'^{*}_{1,\lambda_1}$ tel que $(-\mu_1,\mu)$ se projette sur b dans l'espace (1). L'application $\mu\mapsto\mu_1$ fournit l'isomorphisme cherché. Modulo cet isomorphisme, on a un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{Z}(G)&\to&\mathfrak{Z}(\mathbf{G}')\\ z&\mapsto&z^{\mathbf{G}'}\end{array}$$

Un élément z de $\mathfrak{Z}(G)$ définit par restriction un polynôme invariant par W^θ sur $\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$, qui s'identifie à un polynôme $z^{\mathbf{G}'}$ invariant par $W^{G'}\subset W^\theta$ sur $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$. Le corollaire [I] 2.8 se reformule de la façon suivante.

Lemme. *Soient $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, $\mathbf{f}'\in C_c^\infty(\mathbf{G}')\otimes Mes(G'(\mathbb{R}))$ et $z\in\mathfrak{Z}(G)$. Supposons que $\mathbf{f}'$ soit un transfert de $\mathbf{f}$. Alors $z^{\mathbf{G}'}\mathbf{f}'$ est un transfert de $z\mathbf{f}$.*

Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1. On a introduit ci-dessus un élément b de l'espace (1). Son opposé $-b$ se projette sur un élément de $(\mathfrak{a}^*_{G'_1}\times\mathfrak{a}^*_{\tilde{G}})/diag_-(\mathfrak{a}^*_{\tilde{G}})\simeq\mathfrak{a}^*_{G'_1}$. Cet élément définit un caractère $\lambda_{\mathfrak{A},1}$ de $\mathfrak{A}_{G'_1}$, qui a même restriction à $\mathfrak{A}_{C_1}$ que λ_1. Pour simplifier, fixons des mesures de Haar sur $G(\mathbb{R})$ et $G'_1(\mathbb{R})$. Soit $a\in\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ et $a_1\in\mathfrak{A}_{G'_1}$ ayant même projection dans $\mathfrak{A}_{G'}$. Soient $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $f_1\in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$. Notons $f_1^{a_1}$, resp. f^a, les fonctions définies par $f_1^{a_1}(\delta_1)=f_1(a_1\delta_1)$, resp. $f^a(\gamma)=f(a\gamma)$. La relation suivante est une conséquence des calculs de [I] 2.8 :

(2) si f_1 est un transfert de f, alors $\lambda_{\mathfrak{A},1}(a_1)f_1^{a_1}$ est un transfert de f^a.

Notons $\mathcal{E}_{ell,\lambda_{\mathfrak{A},1},\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ le sous-ensemble des $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}_{ell,\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ tels que la restriction à $\mathfrak{A}_{G'_1}$ du caractère central de $\boldsymbol{\tau}$ soit égale à $\lambda_{\mathfrak{A},1}$. On note de même $D_{ell,\lambda_{\mathfrak{A},1},\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ le sous-espace de $D_{ell,\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ engendré par les caractères des $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}_{ell,\lambda_{\mathfrak{A},1},\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$. Quand on fait varier les données auxiliaires, on vérifie que ces objets se recollent en des objets que l'on note $\mathcal{E}_{ell,0}(\mathbf{G}')$ et $D_{ell,0}(\mathbf{G}')$. Il est utile de remarquer que l'on peut choisir des données auxiliaires de sorte que $\lambda_{\mathfrak{A},1}$ soit trivial. En effet, via la projection naturelle $G'_1(\mathbb{R})\to\mathfrak{A}_{G'_1}$, ce caractère s'étend en un caractère de $G'_1(\mathbb{R})$. Celui-ci détermine un cocycle $\zeta:W_{\mathbb{R}}\to Z(\hat{G}'_1)$. On définit un nouveau plongement $\hat{\xi}'_1:\mathcal{G}'\to{}^LG'_1$ par $\hat{\xi}'_1(g,w)=\zeta(w)^{-1}\hat{\xi}_1(g,w)$ pour tout $(g,w)\in\mathcal{G}'$. On voit que, si l'on remplace $\hat{\xi}_1$ par ce nouveau plongement, $\lambda_{\mathfrak{A},1}$ devient trivial.

2.2 Les espaces $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$

Pour simplifier les notations, on fixe dorénavant des mesures de Haar sur tous les groupes rencontrés. Le théorème 1.4 entraîne que $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ est isomorphe à l'espace $PW^\infty_{ell}(\tilde{G},\omega)$. Rappelons que l'on note $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ l'espace des éléments de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui sont K-finis à droite et à gauche. Notons $C_{cusp}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ le sous-espace des fonctions cuspidales et $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$ son image dans $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Le théorème de Delorme et Mezo (repris en [9] 6.2) entraîne que $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$ s'identifie au sous-espace $PW_{ell}(\tilde{G},\omega)$ des familles $(\varphi_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)}$ telles que $\varphi_{\boldsymbol{\tau}}=0$ pour presque tout $\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$.

On peut modifier les définitions des espaces de Paley-Wiener de la façon suivante. On a défini l'espace $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ engendré par les caractères des représentations $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$. Il est muni du produit elliptique, qui est hermitien et défini positif. Pour une W-orbite μ dans $\mathfrak{h}^*$, on a défini le sous-espace $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ engendré par les caractères des $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ comme ci-dessus telles que $\mu(\boldsymbol{\tau})=\mu$. Ce sont des espaces de dimension finie uniformément bornée. Considérons une base B de $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ qui est réunion de bases B_μ des sous-espaces $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, qui est orthogonale pour le produit hermitien et qui vérifie la condition

(1) quand $\tilde{\pi}$ décrit B, les produits $(\tilde{\pi},\tilde{\pi})_{ell}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

On construit un espace de Paley-Wiener comme en 1.3, associé à l'ensemble B muni de la fonction d qui vaut $|\mu|$ sur chaque B_μ, les espaces V étant tous égaux à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. La même preuve qu'en 1.5 montre que cet espace s'identifie à $PW_{ell}^\infty(\tilde{G},\omega)$. On peut donc considérer un élément de cet espace comme une collection de fonctions $(\varphi_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$.

Tout ceci s'adapte si l'on remplace les espaces de fonctions sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ par des espaces de fonctions invariantes par $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. Par exemple, l'espace $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ s'identifie à l'espace $PW_{ell,0}^\infty(\tilde{G},\omega)$ des familles $(f_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}\in\mathbb{C}^B$ tels que, pour tout entier N, il existe $C_N>0$ de sorte que

$$|f_{\tilde{\pi}}|\leq C_N(1+|\mu(\tilde{\pi})|)^{-N}$$

pour tout $\tilde{\pi}\in B$. Le sous-espace $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega,K)$ s'identifie au sous-espace $PW_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$ des familles presque toutes nulles. Notons que $\mathfrak{Z}(G)$ agit naturellement sur ces espaces. En particulier, pour $(f_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$ comme ci-dessus et pour $z\in\mathfrak{Z}(G)$, on a

$$z(f_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}=(z(\mu(\tilde{\pi}))f_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}.$$

On voit que le sous-espace $PW_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$ coïncide avec celui des éléments $\mathfrak{Z}(G)$-finis de $PW_{ell,0}^\infty(\tilde{G},\omega)$.

La formule des traces locale munit $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ d'un produit hermitien défini positif. Pour $f,f'\in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$, on a simplement

$$(f,f')=\sum_{\tilde{T}}\int_{\tilde{T}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}(1-\theta)(T(\mathbb{R}))}\overline{I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)}I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f')\,d\gamma,$$

où l'on somme sur les classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ de tores tordus maximaux elliptiques et où les mesures sont convenablement normalisées. La théorie des pseudo-coefficients nous dit qu'il existe un isomorphisme antilinéaire

$$\begin{array}{ccc} D_{ell,0}(\tilde{G},\omega) & \to & I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega,K)\\ \tilde{\pi} & \mapsto & f[\tilde{\pi}]\end{array}$$

tel que, pour tout $f\in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ et tout $\tilde{\pi}\in D_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$, on ait l'égalité $I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\omega,f)=(\bar{f}[\tilde{\pi}],f)$. C'est une isométrie en ce sens que $(\tilde{\pi}_1,\tilde{\pi}_2)_{ell}=(f[\tilde{\pi}_2],f[\tilde{\pi}_1])$.

Notons ι l'antiautomorphisme antilinéaire de l'algèbre enveloppante de $G(\mathbb{R})$ qui prolonge antilinéairement l'application $X\mapsto -X$ de l'algèbre de Lie. Il se restreint en un automorphisme antilinéaire de $\mathfrak{Z}(G)$. En considérant $\mathfrak{Z}(G)$ comme l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{h}^*$ invariants par W, on a $(\iota(z))(\lambda) = \overline{z(-\bar{\lambda})}$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}(G)$ et tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. L'isométrie ci-dessus vérifie la relation $f[z\tilde{\pi}] = \iota(z)(f[\tilde{\pi}])$. Pour toute W-orbite μ dans $\mathfrak{h}^*$, elle identifie $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G},\omega)$ avec le sous-espace $I_{cusp,-\bar{\mu}}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ des éléments $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ tels que $zf = z(-\bar{\mu})f$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}(G)$.

On suppose pour la suite de la section que $(G,\tilde{G},\omega)$ **est quasi-déployé et à torsion intérieure.**

On note $I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ le noyau de l'application naturelle $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On a introduit en [I] 4.14 le sous-espace $I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ des éléments dont les intégrales orbitales sont constantes sur toute classe de conjugaison stable formée d'éléments elliptiques fortement réguliers. On a montré que, par l'application naturelle ci-dessus, il s'envoyait bijectivement sur $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Il en résulte que l'on a la décomposition

$$I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})) = I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \oplus I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})).$$

Il est clair que chacun des sous-espaces est invariant par l'action de $\mathfrak{Z}(G)$. Des définitions et propriétés analogues valent pour les fonctions invariantes par $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$: on a

$$I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}) = I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}) \oplus I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}).$$

Il résulte de la définition du produit hermitien ci-dessus que la décomposition est orthogonale. La projection sur chacun des sous-espaces d'un élément $\mathfrak{Z}(G)$-fini l'est aussi. On a donc une décomposition similaire

$$I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},K) = I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},K) \oplus I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},K)$$

où les sous-espaces sont les intersections des précédents avec $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},K)$. Via l'isomorphisme $\tilde{\pi} \mapsto f[\tilde{\pi}]$, on obtient une décomposition

$$D_{ell,0}(\tilde{G}) = D^{st}_{ell,0}(\tilde{G}) \oplus D^{inst}_{ell,0}(\tilde{G}).$$

Pour chaque W-orbite μ dans $\mathfrak{h}^*$, elle se raffine en une décomposition

$$D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}) = D^{st}_{ell,0,\mu}(\tilde{G}) \oplus D^{inst}_{ell,0,\mu}(\tilde{G}).$$

Pour chaque μ, fixons des bases orthonormées B^{st}_{μ} et B^{inst}_{μ} de chacun des sous-espaces ci-dessus. Notons B^{st} la réunion des B^{st}_{μ} et B^{inst} celle des B^{inst}_{μ}. Notons enfin $B = B^{st} \cup B^{inst}$. Réalisons comme plus haut notre espace $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$ à l'aide de cette base B. Notons $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$, resp. $PW^{\infty,inst}_{ell}(\tilde{G})$ le sous-espace des $(\varphi_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$ tels que $\varphi_{\tilde{\pi}} = 0$ si $\tilde{\pi} \in B^{inst}$, resp. $\tilde{\pi} \in B^{st}$. Rappelons enfin que les espaces $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sont munis de topologies ([I] 5.3, qui reprenait Bouaziz et Renard).

Lemme. *Via l'isomorphisme de $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$, les espaces $I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ s'identifient respectivement à $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$ et $PW^{\infty,inst}_{ell}(\tilde{G})$. La projection de $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$ se quotiente en un homéomorphisme de $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$.*

Preuve. Notons $pw : I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$ notre isomorphisme. Soit $\tilde{\pi} \in B$, considérons un élément $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ tel que $pw(f) = (\varphi_{\tilde{\pi}'})_{\tilde{\pi}'\in B}$ vérifie $\varphi_{\tilde{\pi}'} = 0$ pour $\tilde{\pi}' \neq \tilde{\pi}$. On va prouver que

(2) si $\tilde{\pi} \in B^{st}$, resp. $\tilde{\pi} \in B^{inst}$, alors $f \in I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, resp. $f \in I_{cusp}^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Soit ϕ la fonction sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ (que l'on identifie à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ via l'exponentielle) dont la transformée de Fourier est la restriction de $\varphi_{\tilde{\pi}}$ à $i\mathcal{A}_{\tilde{G}}^*$. Elle est C^∞ et à support compact. On définit une fonction f' sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ par $f'(\gamma) = (\tilde{\pi}, \tilde{\pi})_{ell}^{-1}\phi(H_{\tilde{G}}(\gamma))f[\tilde{\pi}](\gamma)$. C'est un élément de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Pour tout $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ fortement régulier, on a l'égalité

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, f') = (\tilde{\pi}, \tilde{\pi})_{ell}^{-1}\phi(H_{\tilde{G}}(\gamma))I^{\tilde{G}}(\gamma, f[\tilde{\pi}]).$$

Il en résulte que ces intégrales orbitales sont nulles si γ n'est pas elliptique et qu'elles ont les mêmes propriétés de stabilité que celles de $f[\tilde{\pi}]$. Donc l'image de f' dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ appartient à $I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ si $\tilde{\pi} \in B^{st}$, à $I_{cusp}^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ si $\tilde{\pi} \in B^{inst}$.

Pour $\tilde{\pi}' \in B$ et $\lambda \in \mathcal{A}_{\tilde{G},\mathbb{C}}^*$, on a

$$\tilde{\pi}'_\lambda(f') = \int_{\tilde{G}(\mathbb{R})} \tilde{\pi}'_\lambda(\gamma) f'(\gamma)\, d\gamma$$

$$= (\tilde{\pi}, \tilde{\pi})_{ell}^{-1} \int_{\tilde{G}(\mathbb{R})^1} \int_{\mathcal{A}_{\tilde{G}}} \tilde{\pi}'(\gamma^1) e^{<H,\lambda>} f[\tilde{\pi}](\gamma^1)\phi(H)\, dH\, d\gamma^1$$

$$= (\tilde{\pi}, \tilde{\pi})_{ell}^{-1}\varphi_{\tilde{\pi}}(\lambda)\tilde{\pi}'(f[\tilde{\pi}]).$$

Il en résulte que

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}'_\lambda, f') = \begin{cases} 0, & \text{si } \tilde{\pi}' \neq \tilde{\pi}, \\ \varphi_{\tilde{\pi}}(\lambda), & \text{si } \tilde{\pi}' = \tilde{\pi}. \end{cases}$$

Autrement dit, l'image de f' dans $PW_{ell}^\infty(\tilde{G})$ coïncide avec celle de f. Donc f est l'image de f' dans $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. L'assertion (2) en résulte.

Soit maintenant $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ telle que $pw(f) \in PW_{ell}^{\infty,st}(\tilde{G})$. Ecrivons B^{st} comme réunion croissante de sous-ensembles finis B_i, pour $i \in \mathbb{N}$. Ecrivons $pw(f) = (\varphi_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$. Pour tout i, soit $f_i \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ l'élément tel que, en posant $pw(f_i) = (\varphi_{i,\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$, on ait $\varphi_{i,\tilde{\pi}} = \varphi_{\tilde{\pi}}$ si $\tilde{\pi} \in B_i$, $\varphi_{i,\tilde{\pi}} = 0$ sinon. D'après (2), f_i appartient à $I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Parce que pw est un homéomorphisme, f est la limite des f_i. Il est clair par définition que $I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R})$ est un sous-espace fermé. Il en résulte que $f \in I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Donc $pw^{-1}(PW_{ell}^{\infty,st}(\tilde{G})) \subset I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On prouve de même que $pw^{-1}(PW_{ell}^{\infty,inst}(\tilde{G})) \subset I_{cusp}^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Puisque la somme de $PW_{ell}^{\infty,st}(\tilde{G})$ et de $PW_{ell}^{\infty,inst}(\tilde{G})$ est l'espace $PW_{ell}^\infty(\tilde{G})$ tout entier et que l'intersection de $I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $I_{cusp}^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est clairement réduite à 0, les inclusions précédentes sont des égalités. Cela prouve les premières assertions du lemme. La dernière en résulte immédiatement. $\square$

2.3 Un théorème de Paley-Wiener décrivant l'espace $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$

Considérons l'espace

$$\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW_{ell}^\infty(\tilde{L}).$$

Par les constructions du paragraphe précédent, on peut le décomposer en somme directe

$$\left(\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW_{ell}^{\infty,st}(\tilde{L})\right) \oplus \left(\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW_{ell}^{\infty,inst}(\tilde{L})\right).$$

Le groupe $W(\tilde{M}_0)$ agit sur l'espace total. On vérifie que cette action conserve les deux composantes ci-dessus. On peut donc définir $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ et $PW^{\infty,inst}(\tilde{G})$ comme les sous-espaces des invariants par $W(\tilde{M}_0)$ dans chacune des composantes. Notons $\underline{pw}^{st}$ le composé de l'isomorphisme $pw : I(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^{\infty}(\tilde{G})$ et de la projection sur $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$. Supposons prouvé que, pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, tout $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ et tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f_{\tilde{L}})$ soit stable. Alors $\underline{pw}^{st}$ se quotiente en un homomorphisme continu $pw^{st} : SI(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^{\infty,st}(\tilde{G})$. Remarquons que l'hypothèse que l'on vient de faire résulte de l'hypothèse plus simple que, pour tout $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$ est stable. En effet, la tensorisation par un élément $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ respecte la stabilité. Comme toujours, on suppose par récurrence que les propriétés vraies pour $\tilde{G}$ le sont aussi pour les groupes tordus plus petits, donc pour les espaces de Levi. Donc, pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, tout $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ et tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ sur $I(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ est stable. Mais l'induction conserve la stabilité. Donc la distribution $f \mapsto I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f_{\tilde{L}})$ est stable.

Théorème. *(i) Pour tout $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$ est stable.*

(ii) L'application linéaire $pw^{st} : SI(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ est un homéomorphisme.

Dans le paragraphe suivant, on ramènera le théorème à une autre assertion qui sera prouvée en 2.7.

2.4 Un résultat d'instabilité

Notons

$$sym^W : \oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW^{\infty}_{ell}(\tilde{L}) \to PW^{\infty}(\tilde{G})$$

l'application de symétrisation $sym^W(\varphi) = \sum_{w\in W(\tilde{M}_0)} w(\varphi)$. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. On munit $D_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ d'une base $B(\tilde{L})$ ayant les mêmes propriétés que la base B de 2.2. En particulier, $B(\tilde{L})$ est réunion de $B^{st}(\tilde{L})$ et $B^{inst}(\tilde{L})$. On réalise l'espace $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{L})$ en utilisant cette base $B(\tilde{L})$. Fixons $\tilde{\pi} \in B(\tilde{L})$. On note $PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L})$ le sous-espace des $(\varphi_{\tilde{\pi}'})_{\tilde{\pi}'\in B(\tilde{L})} \in PW^{\infty}_{ell}(\tilde{L})$ tels que $\varphi_{\tilde{\pi}'} = 0$ si $\tilde{\pi}' \neq \tilde{\pi}$. C'est un unique espace de fonctions de Paley-Wiener sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$.

Proposition. *Pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et tout $\tilde{\pi} \in B^{inst}(\tilde{L})$, l'espace $pw^{-1}\circ sym^W(PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L}))$ est inclus dans $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.*

Montrons que cette proposition entraîne le théorème. Elle entraîne

(1) l'espace $pw^{-1}(PW^{\infty,inst}(\tilde{G}))$ est inclus dans $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

En effet, le même raisonnement que dans la preuve du lemme 2.2 montre que tout élément $f \in pw^{-1}(PW^{\infty,inst}(\tilde{G}))$ est limite d'une suite d'éléments f_i qui sont combinaisons linéaires finies d'éléments de $pw^{-1}\circ sym^W(PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L})$, pour des couples $(\tilde{L}, \tilde{\pi})$ vérifiant les hypothèses de la proposition. Puisque $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est fermé, cette proposition entraîne qu'un tel f appartient à cet espace.

On a mieux :

(2) $pw^{-1}(PW^{\infty,inst}(\tilde{G}))$ est égal à $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Preuve. Soit $f \in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On peut décomposer f en $f = f' + f''$, où $pw(f') \in PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ et $pw(f'') \in PW^{\infty,inst}(\tilde{G})$. L'assertion (1) entraîne que f'' appartient à $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, donc f' aussi. Il suffit de prouver que $f' = 0$. En oubliant cela, on considère

$f \in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ tel que $pw(f) \in PW^{\infty,st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et on veut prouver que $f = 0$. Par récurrence, on peut admettre l'assertion (i) du théorème pour tout espace de Levi propre $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$. Soit $\tilde{L}$ un tel espace de Levi, soit $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ et soit $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$. Comme on l'a expliqué dans le paragraphe précédent, la distribution $f' \mapsto I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f'_{\tilde{L}})$ est stable. Elle annule donc f. Il en résulte que $pw(f)$ n'a de composantes non nulles que dans les $PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{G})$ pour $\tilde{\pi} \in B^{st}(\tilde{G})$. Autrement dit, $pw(f)$ appartient au sous-espace $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. A fortiori, f est cuspidale. Mais alors, le lemme 2.2 entraîne que $f = 0$. $\square$

Soit $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Par définition de l'application pw, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$ annule l'espace $pw^{-1}(PW^{\infty,inst}(\tilde{G}))$. D'après (2), elle annule $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, ce qui signifie qu'elle est stable. Cela prouve l'assertion (i) du théorème. L'assertion (2) entraîne aussi que l'application $\underline{pw}^{st}$ a pour noyau $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, donc que pw^{st} est injective. Elle est surjective puisque $\overline{pw}$ l'est. Enfin, pw^{st} admet une section continue, à savoir l'application composée

$$PW^{\infty,st}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \stackrel{pw^{-1}}{\to} I(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to SI(\tilde{G}(\mathbb{R})).$$

Donc pw^{st} est un homéomorphisme. Cela prouve le théorème.

Commençons la preuve de la proposition. Si $\tilde{L} = \tilde{G}$, l'assertion résulte du lemme 2.2. On suppose donc $\tilde{L}$ propre et on raisonne par récurrence sur $a_{\tilde{L}} = dim(\mathcal{A}_{\tilde{L}})$ en supposant la proposition démontrée pour tout couple $(\tilde{L}', \tilde{\pi}')$ analogue à $(\tilde{L}, \tilde{\pi})$ tel que $a_{\tilde{L}'} < a_{\tilde{L}}$. On note simplement $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions de Paley-Wiener sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ et on identifie $PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L})$ à $\mathcal{F}$. Pour $\varphi \in \mathcal{F}$, on pose $f_\varphi = pw^{-1} \circ sym^W(\varphi)$. Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ un espace de Levi propre de $\tilde{G}$. En notant $pw^{\tilde{M}}$ l'analogue de pw pour l'espace $\tilde{M}$, le terme $pw^{\tilde{M}}(f_{\varphi,\tilde{M}})$ se déduit aisément de $pw(f_\varphi)$. On voit qu'il n'a de composantes non nulles que dans les sous-espaces $PW^{\infty,inst}_{ell,0}(\tilde{L}')$ pour des $\tilde{L}' \subset \tilde{M}$ conjugués à $\tilde{L}$. En appliquant le théorème par récurrence à $\tilde{M}$, on voit que $f_{\varphi,\tilde{M}}$ appartient à $I^{inst}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$. Cela étant vrai pour tout $\tilde{M}$ propre, les intégrales orbitales stables de f_φ sont donc nulles sur tout élément fortement régulier non elliptique de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Donc l'image de f_φ dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ appartient au sous-espace $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. D'après le lemme 2.2, il existe un unique $f^{st}_\varphi \in I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui a même image que f_φ dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Il s'agit de prouver que f^{st}_φ est nul. Toujours d'après le lemme 2.2, on peut fixer $\tilde{\sigma}_0 \in B^{st}(\tilde{G})$, $\lambda_0 \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$, poser $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma_{0,\lambda_0}}$ et prouver que $I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f^{st}_\varphi) = 0$. Pour $\varphi \in \mathcal{F}$, posons $\ell(\varphi) = I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f^{st}_\varphi)$. Etudions l'application linéaire ℓ sur $\mathcal{F}$. Rappelons que $\mathfrak{Z}(G)$ agit naturellement sur $\mathcal{F}$: pour $z \in \mathfrak{Z}(G)$, $\varphi \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$, on a $(z\varphi)(\lambda) = z(\mu(\tilde{\pi}) + \lambda)\varphi(\lambda)$. Parce que f^{st}_φ est uniquement déterminé, l'application $\varphi \mapsto f^{st}_\varphi$ est équivariante pour les actions de $\mathfrak{Z}(G)$. Pour $z \in \mathfrak{Z}(G)$, on a donc

$$\ell(z\varphi) = I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, z(f^{st}_\varphi)) = I^{\tilde{G}}(z\tilde{\sigma}, f^{st}_\varphi) = z(\mu(\tilde{\sigma}))I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f^{st}_\varphi) = z(\mu(\tilde{\sigma}))\ell(\varphi).$$

Notons J l'idéal des éléments $z \in \mathfrak{Z}(G)$ tels que $z(\mu(\tilde{\sigma})) = 0$. Alors ℓ annule $J\mathcal{F}$. Les lemmes des deux paragraphes suivants nous permettrons de préciser cet ensemble $J\mathcal{F}$.

2.5 Un lemme sur les fonctions de Paley-Wiener

On conserve les notations précédentes. Rappelons que $\mu(\tilde{\pi})$ est une W^L-orbite dans $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ et que $\mu(\tilde{\sigma})$ est une W-orbite dans $\mathfrak{h}^*$. Si l'intersection $(\mu(\tilde{\pi}) + \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}) \cap \mu(\tilde{\sigma})$ est non vide, on note $(\lambda_i)_{i=1,...,m}$ la famille finie d'éléments de $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ tels que cette intersection soit la réunion des $\mu(\tilde{\pi})+\lambda_i$ pour $i=1,...,m$.

Lemme. *(i) Si $(\mu(\tilde{\pi})+\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}})\cap\mu(\tilde{\sigma})=\emptyset$, on a l'égalité $J\mathcal{F}=\mathcal{F}$.*

(ii) Si cette intersection est non vide, il existe un entier $N\geq 1$ tel que $J\mathcal{F}$ contienne toute fonction $\varphi\in\mathcal{F}$ qui s'annule à l'ordre au moins N en chaque point λ_i pour $i=1,...,m$.

Preuve de (i). On va montrer qu'il existe $z\in J$ tel que sa restriction à $\mu(\tilde{\pi})+\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ soit constante de valeur 1. L'assertion en résulte puisqu'alors $\varphi=z\varphi$ pour tout $\varphi\in\mathcal{F}$. Notons Y la projection de $\mu(\tilde{\sigma})$ sur $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ L'hypothèse signifie que $\mu(\tilde{\pi})\cap Y=\emptyset$. Pour tout $x\in\mu(\tilde{\pi})$, on peut alors trouver un polynôme q_x de degré 1 sur $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ tel que $q_x(x)=0$ et $q_x(y)\neq 0$ pour tout $y\in Y$. Posons $q=\prod_{x\in\mu(\tilde{\pi})}q_x$. Considérons q comme un polynôme sur $\mathfrak{h}^*$ via la projection $\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$. Définissons un polynôme z_0 par $z_0(\nu)=\prod_{w\in W}q(w\nu)$. Il est invariant par W donc appartient à $\mathfrak{Z}(G)$. Il s'annule sur $\mu(\tilde{\pi})+\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ car le polynôme q lui-même s'annule sur cet ensemble. Pour $\nu\in\mu(\tilde{\sigma})$ et $w\in W$, $w\nu$ appartient aussi à $\mu(\tilde{\sigma})$ et se projette sur $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ en un point $y\in Y$. On a alors $q(w\nu)=q(y)\neq 0$. Donc $z_0(\nu)\neq 0$, ce que l'on peut noter $z_0(\mu(\tilde{\sigma}))\neq 0$ puisque z_0 est invariant par W. Posons $z=1-z_0(\mu(\tilde{\sigma}))^{-1}z_0$. Cet élément répond à la question.

Preuve de (ii). Notons $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes sur $\mathfrak{h}^*$. On montre d'abord

(1) il existe un entier $N\geq 1$ tel que tout élément de $\mathcal{P}$ qui s'annule à l'ordre au moins N en tout point de $\mu(\tilde{\sigma})$ appartient à $J\mathcal{P}$.

Rappelons que $\mathfrak{Z}(G)$ est le sous-espace des invariants par W dans $\mathcal{P}$. Comme on sait, on peut fixer un sous-ensemble $(h_w)_{w\in W}$ de $\mathcal{P}$ tel que tout élément $Q\in\mathcal{P}$ s'écrive de façon unique $Q=\sum_{w\in W}h_wQ_w$, avec $Q_w\in\mathfrak{Z}(G)$. On peut de plus fixer un élément non nul $D\in\mathcal{P}$ et une matrice $(D_{w,w'})_{w,w'\in W}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ de sorte que, pour tout $w\in W$ et tout $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, on ait l'égalité

$$D(\lambda)Q_w(\lambda)=\sum_{w'\in W}D_{w,w'}(\lambda)Q(w'\lambda).$$

On renvoie pour cela à [2] preuve de la proposition 3.3. Notons $N-1$ le maximum des ordres d'annulation de D aux différents points de $\mu(\tilde{\sigma})$. Il résulte de la formule ci-dessus que, si Q s'annule à l'ordre N en tout point de $\mu(\tilde{\sigma})$, alors chaque Q_w s'annule sur $\mu(\tilde{\sigma})$. Puisque $Q_w\in\mathfrak{Z}(G)$, cela signifie que $Q_w\in J$. Mais alors $Q=\sum_{w\in W}h_wQ_w$ appartient à $J\mathcal{P}$. Cela prouve (1).

Notons $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions de Paley-Wiener sur $\mathfrak{h}^*$. Soit Y un ensemble fini d'éléments de $\mathfrak{h}^*$ et soit $\mathbf{n}=(n_y)_{y\in Y}$ une famille d'entiers naturels. Notons $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}$, resp. $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}$, l'espace des éléments de $\mathcal{H}$, resp. $\mathcal{P}$, qui s'annulent en tout point $y\in Y$ à l'ordre au moins n_y. On va montrer

(2) on a l'égalité $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}=\mathcal{P}_{\mathbf{n}}\mathcal{H}$.

C'est trivial si tous les n_y sont nuls. Supposons qu'il existe un y pour lequel $n_y>0$, fixons-en un que l'on note y_0. Notons $\mathbf{n}'=(n'_y)_{y\in Y}$, où $n'_y=n_y$ si $y\neq y_0$ et $n'_{y_0}=n_{y_0}-1$. Notons $\mathcal{P}_{y_0}$ l'espace des polynômes qui s'annulent en y_0. L'assertion (2) résulte par récurrence de l'assertion

(3) on a l'égalité $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}=\mathcal{P}_{y_0}\mathcal{H}_{\mathbf{n}'}$.

On ne perd rien à supposer $y_0=0$. On peut fixer un système de coordonnées sur $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ de sorte que les coordonnées $y_1,...,y_n$ de y soient toutes non nulles pour $y\in Y$, $y\neq 0$.

On écrit tout élément de $\mathfrak{h}^*$ sous la forme $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$. Fixons une fonction de Paley-Wiener h sur $\mathbb{C}$ telle que $h(0) = 1$ et h s'annule à l'ordre au moins n_y en tout y_i, pour $y \in Y - \{0\}$ et $i = 1, ..., n$. Soit $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathbf{n}}$. Pour $i = 1, ..., n$, introduisons la fonction ϕ_i sur $\mathfrak{h}^*$ définie par

$$\phi_i(\nu) = \varphi(0, ..., 0, \nu_i, ..., \nu_n) \prod_{j=1,...,i-1} h(\nu_j).$$

Elle est de Paley-Wiener. Elle s'annule à l'ordre au moins n_0 en 0 car il en est ainsi du premier facteur. Le deuxième facteur s'annule à l'ordre au moins $(i-1)n_y$ en tout point $y \in Y - \{0\}$. Si $i \geq 2$, ϕ_i s'annule donc à l'ordre au moins n_y en un tel point. Si $i = 1$, on a simplement $\phi_1 = \varphi$ et cette propriété est encore vérifiée par hypothèse. Donc $\phi_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{n}}$. Par construction, pour $i = 1, ..., n-1$, la fonction $\phi_i - \phi_{i+1}$ s'annule sur l'hyperplan $\nu_i = 0$. En posant $\phi_{n+1} = 0$, il en est de même de la fonction $\phi_n - \phi_{n+1}$ car φ s'annule en 0. On sait qu'une fonction de Paley-Wiener qui s'annule sur un tel hyperplan $\nu_i = 0$ est divisible dans $\mathcal{H}$ par ν_i. Il existe donc pour tout $i = 1, ..., n$ un élément $\varphi_i \in \mathcal{H}$ tel que $\nu_i \varphi_i(\nu) = \phi_i(\nu) - \phi_{i+1}(\nu)$. Il est clair que φ_i appartient à $\mathcal{H}_{\mathbf{n}'}$. On a d'autre part l'égalité

$$\sum_{i=1,...,n} \nu_i \varphi_i(\nu) = \phi_1(\nu) - \phi_{n+1}(\nu) = \varphi(\nu),$$

ce qui réalise φ comme un élément de $\mathcal{P}_0 \mathcal{H}_{\mathbf{n}'}$. Cela prouve (3) et (2).

En appliquant (2) à l'ensemble $Y = \mu(\tilde{\sigma})$ et à la famille $\mathbf{n} = (n_y)_{y \in Y}$ telle que n_y soit pour tout y un entier vérifiant la relation (1), on obtient

(4) il existe un entier N tel que toute fonction $\varphi \in \mathcal{H}$ qui s'annule à l'ordre au moins N en tout point de $\mu(\tilde{\sigma})$ appartienne à $J\mathcal{H}$.

Fixons un tel entier N. Notons maintenant Y l'ensemble des projections dans $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ des éléments de $\mu(\tilde{\sigma})$. Il contient $\mu(\tilde{\pi})$ par hypothèse. Fixons une fonction de Paley-Wiener h sur $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ qui vaut 1 en tout point de $\mu(\tilde{\pi})$ et qui s'annule à l'ordre au moins N en tout point de $Y - \mu(\tilde{\pi})$. Soit $\varphi \in \mathcal{F}$ s'annulant à l'ordre au moins N en tout λ_i, $i = 1, ..., m$. Définissons une fonction φ' sur $\mathfrak{h}^*$ par $\varphi'(\lambda^{\tilde{L}} + \lambda_{\tilde{L}}) = h(\lambda^{\tilde{L}})\varphi(\lambda_{\tilde{L}})$, pour $\lambda^{\tilde{L}} \in \mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ et $\lambda_{\tilde{L}} \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$. C'est un élément de $\mathcal{H}$ qui s'annule à l'ordre au moins N en tout point de $\mu(\tilde{\sigma})$. Appliquant (4), on peut l'écrire

$$\varphi' = \sum_{j=1,...,k} z_j \varphi'_j,$$

où les z_j appartiennent à J et les φ'_j appartiennent à $\mathcal{H}$. On fixe un élément $x_0 \in \mu(\tilde{\pi})$ et on définit pour tout j une fonction φ_j sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ par $\varphi_j(\lambda) = \varphi'_j(x_0 + \lambda)$. C'est un élément de $\mathcal{F}$. Pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$, on a l'égalité

$$\varphi(\lambda) = \varphi'(x_0 + \lambda) = \sum_{j=1,...,k} z_j(\mu(\tilde{\pi}) + \lambda)\varphi_j(\lambda).$$

Autrement dit, $\varphi = \sum_{j=1,...,k} z_j \varphi_j$ et φ appartient à $J\mathcal{F}$. Cela achève la preuve. $\square$

Puisque notre forme linéaire ℓ annule $J\mathcal{F}$, il s'ensuit du (i) du lemme que $\ell = 0$ si $(\mu(\tilde{\pi}) + \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}) \cap \mu(\tilde{\sigma}) = \emptyset$. Puisqu'on veut justement prouver que ℓ est nulle, on a terminé dans ce cas. On suppose dans la suite que $(\mu(\tilde{\pi}) + \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}) \cap \mu(\tilde{\sigma}) \neq \emptyset$. En conséquence du (ii) du lemme, on a

(5) pour $i=1,...,m$, il existe un opérateur différentiel D_i sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ tel que

$$\ell(\varphi)=\sum_{i=1,...,m}(D_i\varphi)(\lambda_i)$$

pour tout $\varphi\in\mathcal{F}$.

2.6 Fonctions f_φ à support assez régulier

Soit $\varphi\in\mathcal{F}$. Introduisons la fonction ϕ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ dont la transformée de Fourier est la restriction de φ à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$. On introduit la fonction $f^{\tilde{L}}_\varphi$ sur $\tilde{L}(\mathbb{R})$ définie par $f^{\tilde{L}}_\varphi(\gamma)=\phi(H_{\tilde{L}}(\gamma))f[\tilde{\pi}](\gamma)$ pour tout $\gamma\in\tilde{L}(\mathbb{R})$. On a vu dans la preuve du lemme 2.2 que cette fonction appartient à $C^\infty_{cusp}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ et que, en notant encore $f^{\tilde{L}}_\varphi$ son image dans $I(\tilde{L}(\mathbb{R}))$, $pw^{\tilde{L}}(f^{\tilde{L}}_\varphi)$ est l'élément de $PW^\infty_{ell}(\tilde{L})$ dont les composantes sont nulles pour $\tilde{\pi}'\in B(\tilde{L})-\{\tilde{\pi}\}$ et dont la composante sur $\tilde{\pi}$ est φ. Introduisons l'espace

$$(1)\qquad \oplus_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0);a_{\tilde{M}}=a_{\tilde{L}}}I_{cusp}(\tilde{M}(\mathbb{R})).$$

Le groupe $W(\tilde{M}_0)$ y agit naturellement et on a montré en [I] 4.2 que le sous-espace des invariants était le gradué $Gr^{a_{\tilde{L}}}I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ d'ordre $a_{\tilde{L}}$ d'une certaine filtration $(\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(\mathbb{R})))_{n=a_{\tilde{M}_0},...,a_{\tilde{G}}}$ de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ (la notation $\mathcal{F}$ pour cette filtration n'a rien à voir avec notre espace de Paley-Wiener). On peut considérer $f^{\tilde{L}}_\varphi$ comme un élément de l'espace (1). Posons

$$f^{a_{\tilde{L}}}_\varphi=\sum_{w\in W(\tilde{M}_0)}w(f^{\tilde{L}}_\varphi).$$

On voit alors que f_φ est un élément du terme $\mathcal{F}^{a_{\tilde{L}}}I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ de notre filtration et que son image dans $Gr^{a_{\tilde{L}}}I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est $f^{a_{\tilde{L}}}_\varphi$. Donc, pour un espace de Levi $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et pour un élément $\gamma\in\tilde{M}(\mathbb{R})$ elliptique dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on a les égalités suivantes

(2) si $a_{\tilde{M}}>a_{\tilde{L}}$ ou si $a_{\tilde{M}}=a_{\tilde{L}}$ et $\tilde{M}$ n'est pas conjugué à $\tilde{L}$, $I^{\tilde{G}}(\gamma,f_\varphi)=0$;

(3) si $\tilde{M}=\tilde{L}$,

$$I^{\tilde{G}}(\gamma,f_\varphi)=\sum_{w\in W(\tilde{L})}I^{\tilde{L}}(w(\gamma),f^{\tilde{L}}_\varphi)=\sum_{w\in W(\tilde{L})}\phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma)))I^{\tilde{L}}(w\gamma,f[\tilde{\pi}]),$$

où $W(\tilde{L})=Norm_{\tilde{G}(\mathbb{R})}(\tilde{L})/L(\mathbb{R})$.

Supposons que

(4) le support de $f^{\tilde{L}}_\varphi$ soit formé d'éléments $\gamma\in\tilde{L}(\mathbb{R})$ qui sont $\tilde{G}$-équisinguliers, c'est-à-dire tels que $L_\gamma=G_\gamma$.

Dans ce cas, on peut trouver un voisinage compact U_1 dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$ de ce support et un voisinage compact U_2 de U_1 tels que tout élément de U_2 soit conjugué par $G(\mathbb{R})$ à un élément de $\tilde{L}(\mathbb{R})$. On peut trouver une fonction h sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est invariante par conjugaison par $G(\mathbb{R})$, qui vaut 1 sur U_1 et qui vaut 0 sur tout élément $\gamma\in\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui n'est pas conjugué à un élément de U_2. Posons $g_\varphi=hf_\varphi$. Cette fonction vérifie des propriétés analogues à (2) et (3). La propriété de h entraîne que l'on a aussi $I^{\tilde{G}}(\gamma,g_\varphi)=0$ pour $\tilde{M}$ et γ comme plus haut, si $a_{\tilde{M}}<a_{\tilde{L}}$. En définitive, pour un espace de Levi $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et

pour un élément $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$ elliptique dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on a les égalités suivantes

(5) si $\tilde{M}$ n'est pas conjugué à $\tilde{L}$, $I^{\tilde{G}}(\gamma, g_\varphi) = 0$;

(6) si $\tilde{M} = \tilde{L}$,

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, g_\varphi) = \sum_{w \in W(\tilde{L})} \phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma)))I^{\tilde{L}}(w\gamma, f[\tilde{\pi}]).$$

De ces formules et de l'instabilité de $\tilde{\pi}$ résulte que $g_\varphi \in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. De la comparaison de (2) et (3) d'une part, de (5) et (6) d'autre part, résulte que, pour tout $n \geq a_{\tilde{L}}$, les composantes dans

$$(7) \qquad (\oplus_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0); a_{\tilde{M}} = n} PW_{ell}^\infty(\tilde{M}))^{W(\tilde{M}_0)}$$

de $pw(g_\varphi)$ et de $pw(f_\varphi)$ sont égales. Elles sont donc nulles si $n > a_{\tilde{L}}$ et égales à $sym^W(\varphi)$ si $n = a_{\tilde{L}}$. Supposons $a_{\tilde{G}} < n < a_{\tilde{L}}$. On peut admettre le théorème 2.3 par récurrence pour les $\tilde{M}$ tels que $a_{\tilde{M}} = n$. C'est-à-dire que $\tilde{\pi}'$ est stable pour tout $\tilde{\pi}' \in B^{st}(\tilde{M})$. L'instabilité de g_φ implique alors que la composante de $pw(g_\varphi)$ dans l'espace (7) appartient au sous-espace

$$(\oplus_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0); a_{\tilde{M}} = n} PW_{ell}^{\infty, inst}(\tilde{M}))^{W(\tilde{M}_0)}.$$

On a posé une hypothèse de récurrence au début de la preuve de la proposition 2.4. Elle nous dit que l'image par pw^{-1} de l'espace ci-dessus est inclus dans $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R})$. Reste le cas où $n = a_{\tilde{G}}$. L'espace (7) se réduit à $PW_{ell}^\infty(\tilde{G})$, que l'on peut décomposer en $PW_{ell}^{\infty,st}(\tilde{G}) \oplus PW_{ell}^{\infty,inst}(\tilde{G})$. On note $pw_{ell}^{st}(g_\varphi)$ et $pw_{ell}^{inst}(g_\varphi)$ les projections de $pw(g_\varphi)$ dans chacun de ces sous-espaces. Le lemme 2.2 nous dit que $pw_{ell}^{st}(g_\varphi)$ appartient à $I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ tandis que $pw_{ell}^{inst}(g_\varphi)$ appartient à $I_{cusp}^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R})$. Posons $g_\varphi^{st} = pw^{-1}(pw_{ell}^{st}(g_\varphi))$. Cela prouve que

$$g_\varphi \in f_\varphi + g_\varphi^{st} + I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R})).$$

Puisque g_φ appartient elle-même à $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, on obtient

$$f_\varphi + g_\varphi^{st} \in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R})).$$

En se rappelant la définition de f_φ^{st}, on obtient $f_\varphi^{st} = -g_\varphi^{st}$. Alors

$$\ell(\varphi) = I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f_\varphi^{st}) = -I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, g_\varphi^{st}) = -I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, g_\varphi),$$

la dernière égalité résultant de la définition de g_φ^{st}. Comme on sait, le caractère de $\tilde{\sigma}$ est donné par une fonction localement intégrable $\Theta_{\tilde{\sigma}}$ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Notons $\tilde{T}$ un tore tordu maximal elliptique de $\tilde{L}$ (l'existence de $\tilde{\pi} \in D_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ implique l'existence d'un tel tore). Parce que l'on est dans une situation à torsion intérieure, on sait qu'il n'y en a qu'un, à conjugaison près par $L(\mathbb{R})$ et on peut supposer que tout élément de $W(\tilde{L})$ conserve ce tore tordu. L'égalité précédente et les relations (5) et (6) entraînent l'égalité

$$\ell(\varphi) = -c \sum_{w \in W(\tilde{L})} \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \Theta_{\tilde{\sigma}}(\gamma) \phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma))) I^{\tilde{L}}(w\gamma, f[\tilde{\pi}])\, d\gamma,$$

la constante $c > 0$ ne dépendant que des mesures. Puisque $\Theta_{\tilde{\sigma}}$ est invariant par $W(\tilde{M}_0)$, cette expression se simplifie d'ailleurs en

$$\ell(\varphi) = -c|W(\tilde{L})| \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \Theta_{\tilde{\sigma}}(\gamma) \phi(H_{\tilde{L}}(\gamma)) I^{\tilde{L}}(\gamma, f[\tilde{\pi}])\, d\gamma.$$

En se rappelant la décomposition $\tilde{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_{\tilde{L}} \times \tilde{L}(\mathbb{R})^1$ et en posant $\tilde{T}(\mathbb{R})^1 = \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \tilde{L}(\mathbb{R})^1$, on obtient

$$(8) \qquad \ell(\varphi) = -c|W(\tilde{L})| \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})^1} \int_{\mathcal{A}_{\tilde{L}}} D^{\tilde{G}}(exp(H)\gamma^1)^{1/2}$$

$$\Theta_{\tilde{\sigma}}(exp(H)\gamma^1)\phi(H) I^{\tilde{L}}(\gamma^1, f[\tilde{\pi}])\, dH\, d\gamma^1.$$

2.7 Utilisation de la propriété : une représentation elliptique est supertempérée

Fixons $\varphi \in \mathcal{F}$. Pour $X \in \mathcal{A}_{\tilde{L}}$, définissons la fonction $\varphi_X \in \mathcal{F}$ par $\varphi_X(\lambda) = e^{<X,\lambda>}\varphi(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$. Si ϕ, resp. ϕ_X, est la fonction sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ dont la transformée de Fourier est la restriction de φ, resp. φ_X, à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$, on a $\phi_X(H) = \phi(H - X)$. Donc, φ étant fixé, la fonction f_{φ_X} vérifie l'hypothèse (4) du paragraphe précédent pour tout X assez grand. Fixons un réel $\epsilon > 0$ assez petit et un réel $C > 0$. On suppose que C est assez grand, cette notion étant précisée au cours de la suite de la démonstration. Considérons le domaine $\mathcal{D}$ des $X \in \mathcal{A}_{\tilde{L}}$ qui vérifient les deux conditions

(1) $|X| > C$;

(2) pour tout $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{L}})$, $|\alpha(X)| > \epsilon |X|$.

On suppose C assez grand pour que f_{φ_X} vérifie l'hypothèse (4) du paragraphe précédent pour tout $X \in \mathcal{D}$. Soit $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{L})$, notons $\Delta_{\tilde{P}}$ la base de $\Sigma(A_{\tilde{L}})$ associée à $\tilde{P}$ et $\mathcal{C}_{\tilde{P}} \subset \mathcal{A}_{\tilde{L}}$ la chambre positive associée à $\tilde{P}$. Supposons $X \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_{\tilde{P}}$. On peut appliquer la formule (8) du paragraphe précédent, qui, par changement de variable $H \mapsto H + X$, nous donne

$$(3) \qquad \ell(\varphi_X) = -c|W(\tilde{L})| \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})^1} \int_{\mathcal{A}_{\tilde{L}}} D^{\tilde{G}}(exp(H+X)\gamma^1)^{1/2}$$

$$\Theta_{\tilde{\sigma}}(exp(H+X)\gamma^1)\phi(H) I^{\tilde{L}}(\gamma^1, f[\tilde{\pi}])\, dH\, d\gamma^1.$$

Puisque ϕ est à support compact, on a $H + X \in \mathcal{C}_{\tilde{P}}$ si $\phi(H) \neq 0$, pourvu que C soit assez grand. On sait que l'on peut alors développer $D^{\tilde{G}}(exp(H+X)\gamma^1)^{1/2}\Theta_{\tilde{\sigma}}(exp(H+X)\gamma^1)$ comme somme finie

$$\sum_{j=1,\dots,k} r_j(H+X) e^{<H+X,\nu_j>}\Theta_j(\gamma^1),$$

où les r_j sont des polynômes, les ν_j sont des éléments de $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ et les Θ_j sont des fonctions bornées sur $\tilde{T}(\mathbb{R})^1$, C^∞ sur le sous-ensemble des éléments réguliers. On se rappelle que $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{0,\lambda_0}$, où $\lambda_0 \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ et $\tilde{\sigma}_0$ est une représentation elliptique. Moeglin a prouvé que $\tilde{\sigma}_0$ était supertempérée ([6]). Il en résulte que les $Re(\nu_j)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients négatifs ou nuls des éléments de $\Delta_{\tilde{P}}$, l'un au moins des coefficients étant strictement négatif. Il résulte alors de la formule (3) que $lim_{X \in \mathcal{D}\cap\mathcal{C}_{\tilde{P}}, |X|\to\infty}\ell(\varphi_X) = 0$. Cela étant vrai pour tout $\tilde{P}$, on a plus simplement $lim_{X\in\mathcal{D},|X|\to\infty}\ell(\varphi_X) = 0$. Mais il résulte de 2.5(5) et de la définition de φ_X que $\ell(\varphi_X)$ est un polynôme exponentiel en X, c'est-à-dire que

$$\ell(\varphi_X) = \sum_{i=1,\dots,m} q_i(X) e^{<X,\lambda_i>},$$

pour des éléments λ_i de $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ et des polynômes q_i. Notons que cette égalité est cette fois vraie pour tout X. Le lemme ci-dessous (appliqué à l'ouvert U des éléments de $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ qui vérifient (2)) entraîne que ce polynôme exponentiel est identiquement nul. En particulier, pour $X=0$, $\ell(\varphi)=0$. Cela achève la preuve de la proposition 2.4 et du théorème 2.3.

Lemme. *Soit V un espace euclidien (de dimension finie), soit U un ouvert de V invariant par multiplication par $\mathbb{R}^\times$ et soit f un polynôme exponentiel sur V. Supposons $lim_{X\in U,|X|\to\infty}f(X)=0$. Alors $f=0$.*

Preuve. On écrit comme ci-dessus

$$f(X)=\sum_{i=1,...,m} q_i(X)e^{<X,\lambda_i>}$$

où les λ_i sont distincts et les q_i sont non nuls. Si f n'est pas nul (i.e. $m\geq 1$), on peut trouver un élément $X_0\neq 0$ de U tel que les produits $<X_0,\lambda_i>$ soient deux-à-deux distincts et $q_i(X_0)\neq 0$ pour tout i. La restriction f_D de f à la droite D passant par X_0 est alors un polynôme exponentiel non nul qui vérifie $lim_{|X|\to\infty}f_D(X)=0$. Cette construction nous ramène au cas où V est une droite, auquel cas l'assertion est un simple exercice que l'on laisse au lecteur. $\square$

2.8 L'espace $D^{st}_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$

On note $D^{st}_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ le sous-espace des éléments de $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui sont des distributions stables, c'est-à-dire qui annulent $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Le corollaire suivant résulte immédiatement du théorème 2.3 et des relations 1.2(2) et 2.4(2).

Corollaire. *On a l'égalité*

$$D^{st}_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}))=\left(\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{L}(\mathbb{R})))\right)^{W(\tilde{M}_0)}.$$

2.9 L'espace $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$

On note $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ l'image de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$. On fixe des bases $B(\tilde{L})$ comme en 2.4. On note $PW^{st}(\tilde{G})$ le sous-espace de $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ formé des familles $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$ telles que l'ensemble des $(\tilde{L},\tilde{\pi})$ pour lesquels $\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}\neq 0$ est fini.

Corollaire. *L'application pw^{st} se restreint en un isomorphisme de $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ sur $PW^{st}(\tilde{G})$.*

Preuve. D'après le théorème de Delorme et Mezo, $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ s'envoie par pw sur $PW(\tilde{G})$. La projection dans $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ de cet espace est égale à $PW^{st}(\tilde{G})$. Donc pw^{st} se restreint en une surjection de $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ sur $PW^{st}(\tilde{G})$. Cette restriction est évidemment injective puisque pw^{st} l'est. $\square$

3 Transfert

3.1 Définition d'un transfert spectral elliptique

On revient au cas où $(G,\tilde{G},\omega)$ est quelconque. Comme on l'a dit en 2.2, on fixe des mesures de Haar sur tous les groupes qui apparaissent. Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(G,\tilde{G},\omega)$. Shelstad a prouvé l'existence du transfert

$$\begin{array}{ccc} I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) & \to & SI(\mathbf{G}') \\ f & \mapsto & f^{\mathbf{G}'} \end{array}$$

cf. [8]. Il envoie $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ dans $SI_{cusp}(\mathbf{G}')$. Soit $\tilde{\sigma}\in D^{st}_{ell,0}(\mathbf{G}')$, cf. 2.1. Considérons l'application linéaire sur $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ définie par $f\mapsto S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},f^{\mathbf{G}'})$. Le lemme 2.1 et le fait que $\tilde{\sigma}$ est $\mathfrak{Z}(\mathbf{G}')$-finie implique que cette forme linéaire est elle-même $\mathfrak{Z}(G)$-finie. On a défini l'espace $D^{st}_{ell,0}(\mathbf{G}')$ de sorte que cette forme linéaire se factorise en une forme linéaire sur $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$, cf. 2.1(2). Il existe donc un élément $\tilde{\tau}\in D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, nécessairement unique, tel que

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau},f)=S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},f^{\mathbf{G}'})$$

pour tout $f\in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Plus généralement, pour $\tilde{\sigma}$ comme ci-dessus et pour $\lambda\in\mathcal{A}^*_{\tilde{G}',\mathbb{C}}\simeq\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, on a

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau}_\lambda,f)=S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}_\lambda,f^{\mathbf{G}'})$$

pour tout $f\in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. En précisant le raisonnement ci-dessus, on voit qu'avec les définitions de 2.1, on a l'inclusion $\mu(\tilde{\sigma}_\lambda)\subset\mu(\tilde{\tau}_\lambda)\cap(\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*})$ (le premier ensemble est une orbite pour l'action de $W^{G'}$, le second une orbite pour l'action de W^θ).

On appelle transfert spectral elliptique l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} D^{st}_{ell}(\mathbf{G}') & \to & D_{ell}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \\ \tilde{\sigma}_\lambda & \mapsto & \tilde{\tau}_\lambda \end{array}$$

où ici, λ appartient à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$.

3.2 Le théorème

Les données sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

Théorème. *Soit $\tilde{\sigma}\in D^{st}_{ell}(\mathbf{G}')$, notons $\tilde{\tau}\in D_{ell}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ son transfert spectral elliptique. Alors $\tilde{\tau}$ est le transfert de $\tilde{\sigma}$, c'est-à-dire que l'on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau},f)=S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},f^{\mathbf{G}'})$$

pour tout $f\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$.

Preuve. Pour tout $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on fixe une base orthonormée $B(\tilde{L})$ de $D_{ell,0}(\tilde{L},\omega)$ et on réalise l'espace $PW^\infty_{ell}(\tilde{L},\omega)$ à l'aide de cette base. Les deux membres de l'égalité de l'énoncé sont continus en f. Grâce au théorème de Paley-Wiener, il suffit de fixer $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})$ et de prouver que cette égalité est vérifiée pour $f\in pw^{-1}\circ$

$sym^W(PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L},\omega))$, où on utilise les mêmes notations qu'en 2.4. C'est vrai par définition du transfert spectral elliptique si $\tilde{L}=\tilde{G}$. On suppose donc $\tilde{L}\neq\tilde{G}$ et on raisonne par récurrence sur $a_{\tilde{L}}$. Puisque $\tilde{\tau}$ est elliptique et $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, on a $I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau},f)=0$ pour tout $f\in pw^{-1}\circ sym^W(PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L},\omega))$. Il s'agit de prouver que l'on a aussi $S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},f^{\mathbf{G}'})=0$. On utilise les mêmes notations qu'en 2.4 : on note $\mathcal{F}=PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L},\omega)$ et $f_\varphi=pw^{-1}\circ sym^W(\varphi)$ pour $\varphi\in\mathcal{F}$. On définit l'application linéaire ℓ sur $\mathcal{F}$ par $\ell(\varphi)=S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},(f_\varphi)^{\mathbf{G}'})$. On a défini la $W^{G'}$-orbite $\mu(\tilde{\sigma})$ dans $\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$. On note simplement $\mu_{\tilde{\sigma}}$ la W-orbite qu'elle engendre dans $\mathfrak{h}^*$. Le lemme 2.1 entraîne que l'on a l'égalité

$$\ell(z\varphi)=z(\mu_{\tilde{\sigma}})\ell(\varphi)$$

pour tout $\varphi\in\mathcal{F}$ et $z\in\mathfrak{Z}(G)$. Le lemme 2.5 a de nouveau les conséquences suivantes :

(1) si $(\mu(\tilde{\pi})+\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}})\cap\mu_{\tilde{\sigma}}=\emptyset$, alors $\ell=0$.

Dans ce cas, on a fini. Supposons au contraire que $(\mu(\tilde{\pi})+\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}})\cap\mu_{\tilde{\sigma}}\neq\emptyset$. Alors

(2) il y a un nombre fini de points $\lambda_i\in\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$, pour $i=1,...,m$, et, pour tout i, un opérateur différentiel D_i de sorte que

$$\ell(\varphi)=\sum_{i=1,...,m}(D_i\varphi)(\lambda_i).$$

Soit $\varphi\in\mathcal{F}$. On introduit comme en 2.6 une fonction $f_\varphi^{\tilde{L}}\in I_{cusp}(\tilde{L}(\mathbb{R}),\omega)$. Supposons que le support de cette fonction vérifie la condition 2.6(4). On construit alors l'élément $g_\varphi\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ qui vérifie des égalités analogues à 2.6(5) et (6). Précisément, pour un espace de Levi $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et un élément $\gamma\in\tilde{M}(\mathbb{R})$ elliptique dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on a

(3) si $\tilde{M}$ n'est pas conjugué à $\tilde{L}$, $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,g_\varphi)=0$;

(4) si $\tilde{M}=\tilde{L}$,

$$I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,g_\varphi)=\sum_{w\in W(\tilde{L})}\phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma)))I^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,w^{-1}(f[\tilde{\pi}])).$$

L'image g_φ est somme de f_φ et de termes $g_{\varphi,n}$, pour $n=a_{\tilde{G}},...,a_{\tilde{L}}-1$, où $pw(g_{\varphi,n})$ appartient à

$$(\oplus_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0);a_{\tilde{M}}=n}PW^\infty_{ell}(\tilde{M},\omega))^{W(\tilde{M}_0)}$$

Parce que l'application $f\mapsto S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},f)$ est continue, l'hypothèse de récurrence nous dit que $S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},g^{\mathbf{G}'}_{\varphi,n})=0$ pour tout $n=a_{\tilde{G}}+1,...,a_{\tilde{L}}-1$. En posant simplement $g_{\varphi,ell}=g_{\varphi,a_{\tilde{G}}}$, on obtient

$$(5)\qquad \ell(\varphi)=S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},f_\varphi^{\mathbf{G}'})=S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},g_\varphi^{\mathbf{G}'})-S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},g^{\mathbf{G}'}_{\varphi,ell}).$$

Puisque $g_{\varphi,ell}$ est cuspidale, la définition du transfert spectral elliptique nous permet de récrire

$$\ell(\varphi)=S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},g_\varphi^{\mathbf{G}'})-I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau},g_{\varphi,ell})=S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma},g_\varphi^{\mathbf{G}'})-I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau},g_\varphi).$$

On fixe $\varphi\in\mathcal{F}$. Soit $X\in\mathcal{A}_{\tilde{L}}$. On définit la fonction φ_X comme en 2.7. Pour un domaine $\mathcal{D}$ comme dans ce paragraphe, la fonction φ_X vérifie la condition 2.6(4) pour $X\in\mathcal{D}$. Parce que $\tilde{\tau}$ est elliptique, donc supertempérée, le même raisonnement qu'en 2.7 montre que

$$(6)\qquad lim_{X\in\mathcal{D};|X|\to\infty}I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau},g_{\varphi_X})=0.$$

A l'aide des formules (3) et (4), on calcule aisément les intégrales orbitales stables de la fonction $g_{\varphi_X}^{\mathbf{G}'}$. On fixe des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 pour $\mathbf{G}'$, en supposant pour simplifier que le caractère $\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}}$ de 2.1 est trivial. Soit $\tilde{L}'$ un espace de Levi de $\tilde{G}'$. Notons $\tilde{L}'_1$ son image réciproque dans $\tilde{G}'_1$. Soit $\delta_1 \in \tilde{L}'_1(\mathbb{R})$ un élément $\tilde{G}$-régulier et elliptique dans $\tilde{L}'_1(\mathbb{R})$. Il lui correspond un sous-ensemble de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est soit vide, soit une classe de conjugaison stable d'éléments fortement réguliers. Si cet ensemble ne contient aucun élément elliptique de $\tilde{L}(\mathbb{R})$, il résulte de (3) que

$$S_{\lambda_1}^{G'_1}(\delta_1, g_{\varphi_X}^{\tilde{G}'_1}) = 0.$$

Supposons qu'il corresponde à δ_1 un élément $\gamma \in \tilde{L}(\mathbb{R})$ qui est elliptique. Cela entraîne que les espaces $\mathcal{A}_{\tilde{L}'}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ sont isomorphes et que $H_{\tilde{L}}(\gamma) = H_{\tilde{L}'}(\delta)$ (cf. 2.1). Fixons un ensemble de représentants $(\gamma_j)_{j=1,...,k}$ des classes de conjugaison par $L(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de γ dans $\tilde{L}(\mathbb{R})$. On sait que c'est aussi un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de γ dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$. De plus, $H_{\tilde{L}}(\gamma_j) = H_{\tilde{L}}(\gamma)$ pour tout j. On a alors

$$S_{\lambda_1}^{G'_1}(\delta_1, g_{\varphi_X}^{\tilde{G}'_1}) = \sum_{j=1,...,k} [Z_G(\gamma_j; \mathbb{R}) : G_{\gamma_j}(\mathbb{R})]^{-1} \Delta_1(\delta_1, \gamma_j)$$

$$\sum_{w \in W(\tilde{L})} \phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma_j)) - X) I^{\tilde{L}}(\gamma_j, \omega, w^{-1}(f[\tilde{\pi}])).$$

Pour tout $w \in W(\tilde{L})$, notons g_w le transfert dans $SI_{\lambda_{\mathfrak{A},1},\lambda_1}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R}))$ de la fonction $w^{-1}(f[\tilde{\pi}])$ (les indices signifient qu'il s'agit de fonctions se transformant selon le caractère λ_1 de $C_1(\mathbb{R})$ et selon le caractère $\lambda_{\mathfrak{A},1}$ de $\mathfrak{A}_{\tilde{L}'_1}$, cf. 2.1 pour la définition de ce caractère). On obtient l'égalité

$$S_{\lambda_1}^{G'_1}(\delta_1, g_{\varphi_X}^{\tilde{G}'_1}) = \sum_{w \in W(\tilde{L})} \phi(w(H_{\tilde{L}'}(\delta)) - X) S_{\lambda_1}^{\tilde{G}'_1}(\delta_1, g_w).$$

A l'aide de ces formules, on peut adapter la preuve de 2.7 : le fait que $\tilde{\sigma}$ soit supertempéré entraîne que

$$lim_{X \in \mathcal{D}; |X| \to \infty} S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, g_{\varphi_X}^{\mathbf{G}'}) = 0.$$

Grâce à (5) et (6), cela entraîne

$$lim_{X \in \mathcal{D}; |X| \to \infty} \ell(\varphi_X) = 0.$$

De nouveau, le lemme 2.7 montre que cette relation est contradictoire avec (2), sauf si $\ell = 0$. Cela démontre cette nullité et le théorème.

3.3 Le transfert spectral

Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 pour notre donnée endoscopique $\mathbf{G}'$. On a la variante du corollaire 2.8, avec des notations évidentes :

$$D_{spec,\lambda_1}^{st}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R})) = \left(\oplus_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}'_0)} Ind_{\tilde{L}'_1}^{\tilde{G}'_1} (D_{ell,\lambda_1,\mathbb{C}}^{st}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R}))) \right)^{W^{G'}(\tilde{M}'_0)}.$$

Quand on fait varier les données auxiliaires, on a une petite difficulté. Soit $\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}'_0)$. Deux cas se présentent. Si $\tilde{L}'$ est relevant pour $\tilde{G}$, les espaces $D^{st}_{ell,\lambda_1,\mathbb{C}}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R}))$ se recollent naturellement en un espace que l'on peut noter $D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}')$. Si $\tilde{L}'$ n'est pas relevant, il n'y a pas de recollement intrinsèque (c'est-à-dire ne dépendant que de $\tilde{L}'$ et pas du groupe ambiant $\tilde{G}'$) entre ces espaces. Par contre, les espaces induits $Ind_{\tilde{L}'_1}^{\tilde{G}'_1}(D^{st}_{ell,\lambda_1,\mathbb{C}}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R})))$ se recollent. Cela ne nous gêne pas trop car il est clair que les transferts à $\tilde{G}(\mathbb{R})$ des éléments de ces espaces sont nuls. Notons $\mathcal{L}^{\tilde{G}}(\tilde{M}'_0)$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{L}(\tilde{M}'_0)$ qui sont relevants pour $\tilde{G}$. Notons $D^{st,\tilde{G}-nul}_{spec}(\mathbf{G}')$ la somme des images dans $D^{st}_{spec}(\mathbf{G}')$ des espaces $Ind_{\tilde{L}'_1}^{\tilde{G}'_1}(D^{st}_{ell,\lambda_1,\mathbb{C}}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R})))$ pour les $\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}'_0) - \mathcal{L}^{\tilde{G}}(\tilde{M}'_0)$. On a alors

$$D^{st}_{spec}(\mathbf{G}') = \Big(\oplus_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}(\tilde{M}'_0)} Ind_{\mathbf{L}'}^{\mathbf{G}'}(D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}'))\Big)^{W^{G'}(\tilde{M}'_0)} \oplus D^{st,\tilde{G}-nul}_{spec}(\mathbf{G}').$$

On définit une application linéaire, que par anticipation, on note

$$transfert : D^{st}_{spec}(\mathbf{G}') \to D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$$

de la façon suivante. Elle est nulle sur $D^{st,\tilde{G}-nul}_{spec}(\mathbf{G}')$. Soit $\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}(\tilde{M}'_0)$. On peut identifier $\mathbf{L}'$ à une donnée endoscopique de $(L, \tilde{L}, \mathbf{a})$, où $\tilde{L}$ est un élément de $\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. On a le transfert spectral elliptique, qui se prolonge en une application linéaire $D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}') \to D_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{L}(\mathbb{R}), \omega)$. Par induction, on en déduit une application linéaire

$$Ind_{\mathbf{L}'}^{\mathbf{G}'}(D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}')) \to Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{L}(\mathbb{R}), \omega)).$$

Le dernier espace s'envoie naturellement dans $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Alors l'application $transfert$ coïncide sur $Ind_{\mathbf{L}'}^{\mathbf{G}'}(D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}'))$ avec le composé des deux applications précédentes. Puisque le transfert commute à l'induction, le corollaire suivant résulte immédiatement du théorème 3.2.

Corollaire. *L'application $transfert$ est bien le transfert endoscopique, c'est-à-dire que, pour tout $\tilde{\sigma} \in D^{st}_{spec}(\mathbf{G}')$ et tout $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}(transfert(\tilde{\sigma}), f) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, f^{\mathbf{G}'}).$$

Remarque. Si l'on rétablit plus canoniquement les espaces de mesures, l'application transfert devient une application linéaire

$$transfert : D^{st}_{spec}(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(\mathbb{R}))^* \to D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*.$$

3.4 Transfert K-fini

Soit Ω un ensemble fini de K-types, c'est-à-dire de représentations irréductibles de K. Pour une fonction f sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ et pour $k \in K$, notons $\lambda_k(f)$, resp. $\rho_k(f)$, la fonction $\gamma \mapsto f(k^{-1}\gamma)$, resp. $\gamma \mapsto f(\gamma k)$. On dit que f se transforme à gauche, resp. à droite selon Ω si la représentation de K dans l'ensemble de fonctions $\{\lambda_k(f); k \in K\}$, resp.

$\{\rho_k(f); k\in K\}$, se décompose en représentations irréductibles appartenant à Ω. On note $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)$ l'espace des fonctions qui se transforment à droite et à gauche selon Ω. On note $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,\Omega)$ son image dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. L'espace $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ est la réunion des $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)$ quand Ω parcourt tous les ensembles finis de K-types.

Soit $(\pi,\tilde{\pi})$ une ω-représentation telle que π soit irréductible ou, plus généralement telle que π soit de longueur finie et que toutes ses composantes irréductibles aient un même paramètre infinitésimal. Notons μ ce paramètre, qui est une orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action de W. On a vu en 1.2 que l'intersection $(\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*})\cap\mu$ était une unique orbite sous l'action de W^θ. Notons-la $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})$. Soient maintenant $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\pi}\in\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{L},\omega)$. A $\tilde{\pi}$ est associée comme on vient de le dire une orbite $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})\subset\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$ pour l'action de $W^{L,\theta}$. Notons $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})^G$ l'orbite pour l'action de W^θ engendrée par $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})$. Appelons "type spectral" une orbite dans $\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$ pour l'action de W^θ. Réalisons l'espace $PW^\infty(\tilde{G},\omega)$ en fixant des bases comme en 2.2. Pour $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on note $B(\tilde{L})$ la base fixée de $D_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}),\omega)$. Pour un type spectral $\tilde{\mu}$, définissons le sous-espace $PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})$ des familles $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$ appartenant à $PW^\infty(\tilde{G},\omega)$ vérifiant la condition suivante :

- pour $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})$, on a $\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}=0$ si $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})^G\neq\tilde{\mu}$.

Il est clair que $PW(\tilde{G},\omega)$ est la somme directe des $PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})$ sur tous les types spectraux $\tilde{\mu}$ (et $PW^\infty(\tilde{G},\omega)$ est le complété de cette somme). Plus généralement, pour un ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux, notons $PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})$ la somme des $PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})$ pour $\tilde{\mu}\in\Omega^{pw}$. Le théorème de Delorme et Mezo affirme précisément que

(1) pour tout ensemble fini Ω de K-types, il existe un ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux tel que $pw_{\tilde{G},\omega}(I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,\Omega))\subset PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})$;

(2) pour tout ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux, il existe un ensemble fini Ω de K-types tel que $PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})\subset pw_{\tilde{G},\omega}(I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,\Omega)$.

Dans le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, on a les variantes stables $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)$ et $PW^{st}(\tilde{G},\Omega^{pw})$. En reprenant la preuve du corollaire 2.9, on obtient des variantes de (1) et (2) pour ces variantes stables.

Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 pour notre donnée endoscopique $\mathbf{G}'$. On fixe un sous-groupe compact maximal K'_1 de $G'_1(\mathbb{R})$. Les constructions ci-dessus s'adaptent à ces données auxiliaires, en considérant alors des fonctions et des représentations qui se transforment selon le caractère λ_1 de $C_1(\mathbb{R})$. Il convient peut-être de parler alors de λ_1-type spectral

Corollaire. *(i) Pour toute fonction $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui est K-finie, le transfert $f^{\mathbf{G}'}$ est l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'une fonction K'_1-finie dans $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$.*

(ii) Soit Ω un ensemble fini de K-types. Alors il existe un ensemble fini Ω'_1 de K'_1-types tel que, pour tout $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)$, le transfert $f^{\mathbf{G}'}$ est l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'un élément de $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}),\Omega'_1)$.

(iii) Soit Ω'_1 un ensemble fini de K'_1-types. Alors il existe un ensemble fini Ω de K-types de sorte que la condition suivante soit vérifiée. Soit $f_0\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, supposons que son transfert $f_0^{\mathbf{G}'}$ soit l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'un élément de $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}),\Omega'_1)$. Alors il existe $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)$ tel que $f^{\mathbf{G}'}=f_0^{\mathbf{G}'}$.

Preuve. Evidemment, (i) résulte de (ii). Le transfert s'identifie à une application linéaire

$$transfert : PW^\infty(\tilde{G},\omega)\to PW_{\lambda_1}^{\infty,st}(\tilde{G}'_1).$$

Notons Im son image. Grâce aux propriétés (1) et (2) ci-dessus et à leurs analogues stables, les assertions (ii) et (iii) résultent des propriétés suivantes

(3) soit Ω^{pw} un ensemble fini de types spectraux pour $\tilde{G}$; alors il existe un ensemble fini Ω'^{pw} de λ_1-types spectraux pour $\tilde{G}'_1$ de sorte que

$$transfert(PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw}))\subset PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,\Omega'^{pw});$$

(4) soit Ω'^{pw} un ensemble fini de λ_1-types spectraux pour $\tilde{G}'_1$; alors il existe un ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux pour $\tilde{G}$ de sorte que

$$Im\cap PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,\Omega'^{pw})\subset transfert(PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})).$$

Un λ_1-type spectral $\tilde{\mu}'$ pour $\tilde{G}'_1$ est une orbite pour l'action de $W^{G'}$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$. Cet ensemble est isomorphe à $\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$, l'isomorphisme étant compatible avec les actions de $W^{G'}$ et W^{θ} et le plongement de $W^{G'}$ dans W^{θ}. On peut donc définir l'orbite pour W^{θ} engendrée par $\tilde{\mu}'$, que l'on note $(\tilde{\mu}')^G$. On obtient une application $q:\tilde{\mu}'\mapsto(\tilde{\mu}')^G$ de l'ensemble des λ_1-types spectraux pour $\tilde{G}'_1$ dans l'ensemble des types spectraux pour $\tilde{G}$. Cette application est à fibres finies. Montrons que

(5) pour tout type spectral $\tilde{\mu}$ pour $\tilde{G}$, on a l'inclusion

$$transfert(PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})\subset PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,q^{-1}(\tilde{\mu})).$$

Soit $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$ un élément de $PW^{\infty}(\tilde{G},\omega)$, notons $(\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1})_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0),\tilde{\sigma}_1\in B^{st}(\tilde{L}'_1)}$ son transfert (avec une notation évidente). D'après le corollaire 3.3, on a la description suivante. Soit $\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0)$. Si $\tilde{L}'$ ne correspond pas à un espace de Levi de $\tilde{G}$, alors $\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1}=0$ pour tout $\tilde{\sigma}_1$. Supposons que $\tilde{L}'$ soit associé à un espace de Levi $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Pour $\tilde{\sigma}_1\in B^{st}(\tilde{L}'_1)$, on peut écrire $transfert(\tilde{\sigma}_1)$ comme une combinaison linéaire finie d'éléments de la base $B(\tilde{L})$:

$$transfert(\tilde{\sigma}_1)=\sum_{\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}c_{\tilde{\pi}}\tilde{\pi}.$$

On a alors

$$\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1}=\sum_{\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}c_{\tilde{\pi}}\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}.$$

Par compatibilité du transfert avec les actions des centres de l'algèbre enveloppante, on sait que les éléments $\tilde{\pi}$ qui apparaissent ont un caractère central paramétré par la W^L-orbite dans $\mathfrak{h}^*$ engendrée par la $W^{L'}$-orbite $\mu(\tilde{\sigma}_1)$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}\simeq\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$. Il en résulte que $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})=(\tilde{\mu}(\tilde{\sigma}_1))^G$. Supposons que la famille $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$ appartienne à $PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})$. Si $\tilde{\mu}(\tilde{\sigma}_1)\not\in q^{-1}(\tilde{\mu})$, le coefficient $c_{\tilde{\pi}}$ est nul ou $\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}$ est nul. Donc $\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1}=0$. Cela prouve que la famille $(\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1})_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0),\tilde{\sigma}_1\in B^{st}(\tilde{L}'_1)}$ appartient à $PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,q^{-1}(\tilde{\mu}))$. D'où (5).

L'assertion (3) en résulte immédiatement : il suffit de prendre pour Ω'^{pw} la réunion des $q^{-1}(\tilde{\mu})$ pour $\mu\in\Omega^{pw}$.

Pour tout type spectral $\tilde{\mu}$ pour $\tilde{G}$, on a défini $PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})$ comme un sous-espace de $PW^{\infty}(\tilde{G},\omega)$. On a un projecteur $p_{\tilde{\mu}}:PW^{\infty}(\tilde{G},\omega)\to PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})$. Il associe à une famille $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$ la famille $(\varphi'_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$, où

$$\varphi'_{\tilde{L},\tilde{\pi}}=\begin{cases}\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}, & \text{si } \tilde{\mu}(\tilde{\pi})=\tilde{\mu};\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Plus généralement, on a un projecteur $p_{\Omega^{pw}} : PW^{\infty}(\tilde{G},\omega) \to PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})$ pour tout ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux. La preuve de (5) prouve plus généralement que, pour tout tel ensemble, on a

$$transfert \circ p_{\Omega^{pw}} = p_{q^{-1}(\Omega^{pw})} \circ transfert.$$

Soit Ω'^{pw} un ensemble fini de λ_1-types spectraux pour $\tilde{G}'_1$, posons $\Omega^{pw} = q(\Omega'^{pw})$. Soit $\boldsymbol{\varphi}' \in Im \cap PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,\Omega'^{pw})$. Introduisons un élément $\boldsymbol{\varphi} \in PW^{\infty}(\tilde{G},\omega)$ tel que $transfert(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}'$. Parce que $\boldsymbol{\varphi}' \in PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,\Omega'^{pw})$, on a $p_{q^{-1}(\Omega^{pw})}(\boldsymbol{\varphi}') = \boldsymbol{\varphi}'$. Donc

$$\boldsymbol{\varphi}' = p_{q^{-1}(\Omega^{pw})}(\boldsymbol{\varphi}') = p_{q^{-1}(\Omega^{pw})} \circ transfert(\boldsymbol{\varphi}) = transfert \circ p_{\Omega^{pw}}(\boldsymbol{\varphi}).$$

Donc $\boldsymbol{\varphi}'$ est le transfert de l'élément $p_{\Omega^{pw}}(\boldsymbol{\varphi}) \in PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})$. Cela prouve (4) et le corollaire. $\square$

3.5 Transfert K-fini, version générale

Considérons dans ce paragraphe un K-espace $K\tilde{G}$, cf. [I] 1.11. On fixe pour chaque composante connexe $K\tilde{G}_p$ un espace de Levi minimal $\tilde{M}_{p,0}$ et un sous-groupe compact maximal K_p de $G_p(\mathbb{R})$ en bonne position relativement à $\tilde{M}_{p,0}$. Les définitions du paragraphe précédent se généralisent immédiatement. Un ensemble fini de K-types est la réunion disjointe d'ensembles finis de K_p-types. On a une application de transfert

$$I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \to \oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{G}').$$

On renvoie à [I] 4.11 pour les notations (on a supprimé les espaces de mesures, les mesures étant fixées depuis 2.2). Pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 et un sous-groupe compact maximal $K^{G'_1}$ de $G'_1(\mathbb{R})$.

Corollaire. *(i) Soit Ω un ensemble fini de K-types. Alors il existe pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ un ensemble fini de $K^{G'_1}$-types $\Omega^{G'_1}$ de sorte que, pour tout $f \in C_c^{\infty}(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,\Omega)$ et tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, le transfert $f^{\mathbf{G}'}$ soit l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'un élément de $C^{\infty}_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}),\Omega^{G'_1})$.*

(ii) Pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, soit $\Omega^{G'_1}$ un ensemble fini de $K^{G'_1}$-types. Alors il existe un ensemble fini Ω de K-types de sorte que la condition suivante soit vérifiée. Soit $f_0 \in C_c^{\infty}(K\tilde{G}(\mathbb{R}))$, supposons que, pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, le transfert $f^{\mathbf{G}'}$ soit l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'un élément de $C^{\infty}_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}),\Omega^{G'_1})$. Alors il existe un élément $f \in C_c^{\infty}(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)$ tel que $f^{\mathbf{G}'} = f_0^{\mathbf{G}'}$ pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$.

Preuve. Le (i) se déduit immédiatement du (ii) du corollaire précédent. Le (ii) se prouve de la même façon que le (iii) de ce corollaire. On laisse les détails au lecteur. $\square$

3.6 Le cas du corps de base $\mathbb{C}$

Dans tout l'article, le corps de base était $\mathbb{R}$. Remplaçons-le maintenant par $\mathbb{C}$. Les mêmes définitions et théorèmes restent valables. En effet, considérons un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ défini sur $\mathbb{C}$. Par restriction des scalaires, on en déduit un triplet $(G_{\mathbb{R}},\tilde{G}_{\mathbb{R}},\mathbf{a}_{\mathbb{R}})$ sur $\mathbb{R}$. Il suffit alors d'appliquer les théorèmes à ce triplet. En fait, le cas complexe est beaucoup plus simple. Il n'y a de fonctions cuspidales sur $\tilde{G}(\mathbb{C})$ que si G est un tore. Le groupe G est forcément déployé. Dans le cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est à torsion intérieure, on a l'égalité $SI(\tilde{G}(\mathbb{C})) = I(\tilde{G}(\mathbb{C}))$.

Références

[1] J. Arthur *On local character relations*, Selecta Math. 2 (1996), p. 501-579

[2] G. Barbançon, M. Raïs : *Sur le théorème de Hilbert différentiablle pour les groupes linéaires finis (d'après E. Noether)*, Ann. Sc. ENS 16 (1983), p. 355-373

[3] A. Borel, J. Tits : *Groupes réductifs*, Publ. Math. IHES 27 (1965), p. 55-150

[4] P. Delorme, P. Mezo : *A twisted invariant Paley-Wiener theorem for real reductive groups*, Duke Math. J. 144 (2008), p.341-380

[5] P. Mezo : *Spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups*, prépublication 2013

[6] C. Moeglin : *Représentations elliptiques ; caractérisation et formules de transfert de caractères*, prépublication 2013

[7] D. Renard : *Intégrales orbitales tordues sur les groupes de Lie réductifs réels*, J. Funct. Analysis 145 (1997), p. 374- 454

[8] D. Shelstad : *On geometric transfer in real twisted endoscopy*, Annals of Math. 176 (2012), p. 1919-1985

[9] J.-L. Waldspurger : *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012
[I] ——————————- : *Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local*, prépublication 2014

Institut de Mathématiques de Jussieu -CNRS
2 place Jussieu 75005 Paris
e-mail : jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr