Stabilisation de la formule des traces tordue IX : propriétés des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes sur le corps réel

J.-L. Waldspurger

21 avril 2015

Introduction

Dans l'article précédent [VIII], on a établi le résultat suivant. Soient F un corps local non-archimédien de caractéristique nulle, G un groupe réductif connexe défini sur F, $\tilde{G}$ un espace tordu sous G et $\mathbf{a}$ un élément de $H^1(W_F; Z(\hat{G}))$ auquel est associé un caractère ω de $G(F)$, lequel est supposé unitaire. Soit de plus $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, nulle au voisinage de certaines classes de conjugaison dites exceptionnelles, il existe une fonction cuspidale $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ sur $\tilde{M}(F)$ telle que

$$I^{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{\tilde{M}}(f)) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, \omega, f) - I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$$

pour tout $\gamma \in \tilde{M}(F)$ qui est fortement régulier dans $\tilde{G}$. On renvoie aux articles précédents pour les définitions de ces termes. La fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ est localement constante mais on n'a pas prouvé qu'elle était à support compact. Mais elle est "de Schwartz" en un sens que l'on a défini en [VIII] (en fait, on prouvera ultérieurement que $\epsilon_{\tilde{M}}(f) = 0$ mais ce n'est pas encore d'actualité).

Dans le présent article, on se propose de démontrer essentiellement le même résultat, le corps de base étant maintenant $\mathbb{R}$. Ce changement de corps de base induit plusieurs différences. D'abord, on doit souvent travailler non pas avec un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, mais avec $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$, où $K\tilde{G}$ est un K-espace tordu, cf. [I] 1.11. On considère un K-espace de Levi $K\tilde{M}$ de $K\tilde{G}$ et on va construire une application $f \mapsto \epsilon_{K\tilde{M}}(f)$. L'introduction des K-espaces n'est qu'une complication mineure. Plus sérieusement, pour que l'application $f \mapsto \epsilon_{K\tilde{M}}(f)$ soit utilisable, on doit montrer qu'elle vérifie des propriétés supplémentaires. D'une part, elle doit être équivariante en un sens facile à préciser pour l'action du centre $\mathfrak{Z}(G)$ de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G. D'autre part, on définit facilement la notion de fonction K-finie sur $K\tilde{G}(\mathbb{R})$ ou de fonction K^M-finie sur $K\tilde{M}(\mathbb{R})$. Si f est K-finie, la fonction $\epsilon_{K\tilde{M}}(f)$ doit être K^M-finie. En fait, l'action de $\mathfrak{Z}(G)$ comme les questions de K-finitude vont intervenir non seulement dans le résultat mais dans la construction elle-même de l'application $\epsilon_{K\tilde{M}}$. En particulier, $\epsilon_{K\tilde{M}}(f)$ n'est définie que pour une fonction f qui est K-finie. Il y a enfin une dernière différence avec le cas non-archimédien, qui porte sur les propriétés des caractères pondérés. Dans une série d'articles, Arthur avait défini ceux-ci en utilisant des opérateurs d'entrelacement normalisés. En conséquence, ces opérateurs, que l'on peut faire dépendre d'une variable parcourant un espace vectoriel complexe, étaient méromorphes avec un nombre fini d'hyperplans polaires. Dans l'article [4], Arthur a introduit une nouvelle définition des caractères pondérés. Pour stabiliser ceux-ci, il est nécessaire d'utiliser cette nouvelle définition. Fâcheusement, sur le corps de base réel, ces nouveaux opérateurs peuvent avoir un nombre infini d'hyperplans polaires, parce qu'il intervient des fonctions Γ qui ont une infinité de pôles. Cela conduit à modifier substantiellement la construction de l'application $\epsilon_{K\tilde{M}}$.

Dans les deux premières sections de l'article, on étudie comment se transforment sous l'action de $\mathfrak{Z}(G)$ les intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes et leurs avatars endoscopiques. Ces actions se réalisent par des opérateurs différentiels et on montre que ces opérateurs sont les mêmes pour les deux types d'intégrales. Il s'agit de la version tordue du résultat qu'Arthur démontre dans [2]. Notre démonstration est différente de celle d'Arthur. Elle consiste à prouver d'abord l'égalité des opérateurs différentiels associés à l'élément de Casimir de $\mathfrak{Z}(G)$, ce que l'on fait par un calcul explicite. On montre ensuite que, pour un élément général de $\mathfrak{Z}(G)$, les opérateurs différentiels associés à cet élément vérifient des propriétés formelles de commutation aux mêmes opérateurs associés au Casimir. Ces propriétés sont suffisamment fortes pour que l'égalité prouvée par ces derniers se propage en l'égalité des opérateurs différentiels associés à un élément quelconque de $\mathfrak{Z}(G)$.

La section 3 traite des majorations locales vérifiées par les intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes et leurs avatars endoscopiques. Pour les premières, on dispose des majorations établies par Arthur dans [1]. On montre que celles-ci sont aussi vérifiées par les variantes endoscopiques.

La section 4 étudie les sauts des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes et de leurs avatars endoscopiques. De nouveau, ces sauts sont connus grâce à Arthur pour les premiers types d'intégrales. On montre que les avatars endoscopiques satisfont les mêmes relations de sauts. La démonstration ressemble beaucoup à celle de Shelstad concernant les intégrales orbitales non pondérées, cf. [17], ainsi qu'à celle de l'article [7] d'Arthur.

Dans la section 5, on définit les variantes "compactes" des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes. Ici, on peut travailler de nouveau avec un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Pour $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$ qui est fortement régulier dans $\tilde{G}$ et pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, on note ${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ cette intégrale. Elle a beaucoup de propriétés communes avec l'intégrale plus usuelle $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$. Mais, pour f fixée, elle est à support compact en $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$, à conjugaison près par $M(\mathbb{R})$. Pour définir ${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$, on ne peut pas utiliser la même construction que dans le cas non-archimédien (cette dernière était directement tirée d'Arthur). La possible infinité des hyperplans polaires des caractères pondérés invalide cette construction. On commence par définir de nouveaux caractères pondérés en supprimant dans la définition de [4] les fonctions Γ qui peuvent créer une infinité de pôles. Ces nouveaux termes n'ont plus qu'un nombre fini d'hyperplans polaires. La définition est adaptée pour que ces nouveaux termes se stabilisent aussi aisément que ceux définis par Arthur. On doit avouer que cette définition est un peu artificielle. On pourrait sans doute la rendre plus conceptuelle en utilisant les récents résultats de Mezo ([15]). Notre unique excuse pour ne pas utiliser ceux-ci est que l'on a commencé ce travail alors que l'article de Mezo n'était pas encore disponible. Dans une seconde étape, on reprend la construction du cas non-archimédien, en l'appliquant à nos nouveaux caractères pondérés.

Les sections 6 et 7 sont consacrés à la stabilisation des intégrales ${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$. La méthode est similaire à celle du cas non-archimédien.

Dans la section 8, on construit l'application $\epsilon_{K\tilde{M}}$ qui est le but principal de l'article. Sa définition est similaire à celle du cas non-archimédien. Montrer que l'application ainsi construite est équivariante pour les actions de $\mathfrak{Z}(G)$ est facile en utilisant les résultats des deux premières sections. Par contre, prouver qu'elle conserve la K-finitude nécessite du travail supplémentaire. On utilise pour cela la version symétrique de la formule des traces locale, développée dans [8] dans le cas non tordu et étendue au cas général dans [16]. Celle-ci permet d'exprimer $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ en termes de l'image de f dans l'espace de Paley-Wiener. C'est-à-dire que l'on obtient grosso-modo une expression

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=\int \xi(\gamma,\tilde{\pi})I^{K\tilde{G}}(\tilde{\pi},f)d\tilde{\pi},$$

où $\tilde{\pi}$ parcourt les ω-représentations tempérées de $K\tilde{G}(\mathbb{R})$. La fonction $(\gamma,\tilde{\pi})\mapsto\xi(\gamma,\tilde{\pi})$ possède des singularités qui sont assez raisonnables. Un résultat analogue vaut pour l'intégrale endoscopique $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma,\omega,f)$ donc aussi pour $I^{K\tilde{M}}(\gamma,\omega,\epsilon_{K\tilde{M}}(f))$. De ce résultat et de l'équivariance pour les actions de $\mathfrak{Z}(G)$ se déduit la conservation de la K-finitude par des méthodes standard.

Notons que $\epsilon_{K\tilde{M}}(f)$ est définie pour tout f : contrairement au cas non-archimédien, on n'impose pas que f s'annule au voisinage des classes de conjugaison exceptionnelles.

Dans tout l'article, le corps de base est $\mathbb{R}$ mais nos résultats s'étendent au cas du corps de base $\mathbb{C}$. On renvoie à [V] section 7 pour la justification élémentaire de cette affirmation.

1 Stabilisation d'une famille d'équations différentielles

1.1 Opérateurs différentiels

Dans cette section, le corps de base est $\mathbb{R}$. Soit $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet comme en [IV] 1.1. Fixons un tore tordu maximal $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$. On note θ l'automorphisme ad_γ de T pour n'importe quel élément $\gamma\in\tilde{T}$. On suppose que ω est trivial sur $T(\mathbb{R})^\theta$. On pose $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}=\tilde{T}\cap\tilde{G}_{reg}$.

Tout élément $H\in\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ définit un opérateur différentiel ∂_H sur $T(\mathbb{R})$. Précisément, nous privilégions les actions à gauche. C'est-à-dire que, pour une fonction f sur $T(\mathbb{R})$ on a $(\partial_H f)(t)=\frac{d}{dx}f(exp(-xH)t)_{|x=0}$. L'application $H\mapsto\partial_H$ s'étend linéairement à $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}(\mathbb{C})$, puis s'étend en un isomorphisme noté ∂ de l'algèbre $Sym(\mathfrak{t})$ sur l'algèbre des opérateurs différentiels sur $T(\mathbb{R})$ invariants par translations à gauche par $T(\mathbb{R})$. En fixant un élément $\gamma\in\tilde{T}(\mathbb{R})$, on peut identifier $T(\mathbb{R})$ à $\tilde{T}(\mathbb{R})$ par $t\mapsto t\gamma$. Ainsi $Sym(\mathfrak{t})$ est aussi isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$ invariants par translations à gauche par $T(\mathbb{R})$.

Notons $C^\infty(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ l'espace des fonctions $\varphi:\tilde{T}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ qui sont C^∞ et vérifient la relation $\varphi(t^{-1}\gamma t)=\omega(t^{-1})\varphi(\gamma)$ pour tous $\gamma\in\tilde{T}(\mathbb{R})$ et $t\in T(\mathbb{R})$. Un opérateur différentiel sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$ invariant par translations à gauche par $T(\mathbb{R})$ conserve cet espace. On note $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ l'espace des restrictions à $C^\infty(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ d'opérateurs différentiels invariants par translations à gauche. On a introduit en [IV] 1.2 un élément $\tilde{\mu}(\omega)\in\mathfrak{h}^*$. L'espace $\mathfrak{h}^*$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{t}^*$, on peut donc considérer que $\tilde{\mu}(\omega)$ appartient à $\mathfrak{t}^*$. C'est un élément central, invariant par le groupe de Weyl W de $T(\mathbb{C})$ dans $G(\mathbb{C})$. Pour $H\in(1-\theta)(\mathfrak{t})$ et $\varphi\in C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, on a l'égalité $\partial_H\varphi=<H,\tilde{\mu}(\omega)>\varphi$. Notons $I_{\theta,\omega}$ l'idéal de $Sym(\mathfrak{t})$ engendré par les $H-<H,\tilde{\mu}(\omega)>$

pour $H \in (1-\theta)(\mathfrak{t})$ et notons $Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}$ le quotient $Sym(\mathfrak{t})/I_{\theta,\omega}$. L'application $H \mapsto \partial_H$ se quotiente en un isomorphisme de $Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}$ sur $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. Afin de ne pas surcharger les notations, pour $H \in Sym(\mathfrak{t})$, on notera encore ∂_H l'image de cet opérateur dans $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. Remarquons que $Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}$ s'identifie à l'algèbre des polynômes sur l'espace affine $\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{t}^{*,\theta}$. Remarquons aussi que l'homomorphisme naturel $Sym(\mathfrak{t}^\theta) \to Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}$ est un isomorphisme.

En remplaçant $\tilde{T}(\mathbb{R})$ par $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$, on définit comme ci-dessus l'espace $C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. Notons $C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{inv}$ l'espace des fonctions $\varphi : \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ qui sont C^∞ et vérifient la relation $\varphi(t^{-1}\gamma t) = \varphi(\gamma)$ pour tous $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ et $t \in T(\mathbb{R})$. On pose

$$Diff^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv} = C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{inv} \otimes_{\mathbb{C}} Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}.$$

Cet espace agit naturellement sur $C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$: pour $\varphi' \in C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{inv}$, $D \in Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ et $\varphi \in C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, $(\varphi' \otimes D)(\varphi)$ est la fonction définie par $((\varphi' \otimes D)(\varphi))(\gamma) = \varphi'(\gamma)(D\varphi)(\gamma)$. Il est clair que l'on peut munir $Diff^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ d'une unique structure d'algèbre telle que cette action devienne une action d'algèbres. On note $(D, D') \mapsto D \circ D'$ le produit pour cette structure.

Notation. Un élément $\delta \in Diff^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ sera plutôt considéré comme une fonction C^∞ de $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ dans $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. On notera $\delta(\gamma)$ sa valeur en un point γ. Pour $\varphi \in C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, on notera $\delta(\gamma)\varphi(\gamma)$ la valeur en γ de la fonction $\delta\varphi$.

Les ensembles $T(\mathbb{C})$ et $\tilde{T}(\mathbb{C})$ sont des variétés algébriques complexes. On peut donc parler de fonctions polynomiales, rationnelles, holomorphes ou méromorphes sur ces ensembles. Par exemple, l'espace des polynômes sur $T(\mathbb{C})$ est engendré linéairement par les caractères algébriques, c'est-à-dire les éléments de $X^*(T)$. Introduisons le tore $T' = T/(1-\theta)(T)$ et l'espace $\tilde{T}' = \tilde{T}/(1-\theta)(T)$. On peut de même définir les espaces de fonctions polynomiales, rationnelles etc... sur $T'(\mathbb{C})$ ou $\tilde{T}'(\mathbb{C})$. L'ensemble $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}$ est invariant par conjugaison par T, donc aussi par produit avec $(1-\theta)(T)$. Cela permet d'introduire le sous-ensemble $\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg} = \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}/(1-\theta)(T)$ de $\tilde{T}'$. On appelle fonction rationnelle régulière sur $\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$ une fonction rationnelle sur $\tilde{T}'(\mathbb{C})$ qui n'a pas de pôle dans $\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. Notons $Pol(\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C}))$ l'espace de ces fonctions. La restriction de $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$ à $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ définit une application

$$Pol(\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})) \to C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{inv}.$$

Elle est injective. Son image est conservée par l'action de tout opérateur différentiel sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$ invariant par translations à gauche. Posons

$$Diff^{reg}(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv} = Pol(\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})) \otimes_{\mathbb{C}} Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}.$$

L'application ci-dessus permet d'identifier cet espace à une sous-algèbre de $Diff^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$.

1.2 Les équations différentielles

Pour la suite de la section, on fixe un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et un sous-tore tordu maximal $\tilde{T}$ de $\tilde{M}$. On suppose que ω est trivial sur $T(\mathbb{R})^\theta$.

Rappelons que l'on note $\mathfrak{U}(G)$ l'algèbre enveloppante de la complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et que l'on note $\mathfrak{Z}(G)$ le centre de $\mathfrak{U}(G)$. On dispose d'homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}(G) & \to & \mathfrak{Z}(M), \\ z & \mapsto & z_M, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}(G) & \to & \mathfrak{Z}(T) \\ z & \mapsto & z_T. \end{array}$$

L'algèbre $\mathfrak{Z}(T)$ s'identifie à $Sym(\mathfrak{t})$. L'homomorphisme $z \mapsto z_T$ identifie $\mathfrak{Z}(G)$ à la sous-algèbre des invariants $Sym(\mathfrak{t})^W$, où W est le groupe de Weyl de G relatif à T. L'algèbre $\mathfrak{U}(G)$ agit sur $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ via les translations à gauche. Il s'en déduit une action de $\mathfrak{Z}(G)$ sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Cette action se quotiente en l'action d'une algèbre quotient $\mathfrak{Z}(G)_{\theta,\omega}$. Celle-ci est isomorphe à $Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}^{W^\theta}$.

Pour simplifier, on fixe des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. Pour $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R}) \cap \tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$ et pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, on sait définir l'intégrale orbitale pondérée ω-équivariante $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$, cf. [20] 6.5. La fonction $\gamma \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ appartient à $C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$.

Arthur démontre en [1] proposition 11.1 et [2] paragraphe 1 qu'il existe une unique application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}(G) & \to & Diff^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv} \\ z & \mapsto & \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(z) \end{array}$$

qui vérifie la propriété suivante :

- pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, tout $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ et tout $z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R})$, on a l'égalité

$$(1) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, zf) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, z_{\tilde{L}}) I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f).$$

On a noté $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, z_{\tilde{L}})$ la valeur au point γ de $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(z_{\tilde{L}})$ et on a utilisé la notation introduite dans le paragraphe précédent.

On vérifie formellement que $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(z)$ ne dépend que de l'image de z dans $\mathfrak{Z}(G)_{\theta,\omega}$. On pourra donc considérer que $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(z)$ est défini pour $z \in \mathfrak{Z}(G)_{\theta,\omega}$.

D'autre part, d'après [1] lemme 12.4,

(2) si $\tilde{M} = \tilde{G}$, on a simplement $\delta_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}(\gamma, z) = \partial_{z_T}$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}(G)$ et tout $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$.

Montrons que

(3) pour $z, z' \in \mathfrak{Z}(G)$, on a l'égalité

$$\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(zz') = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(z_{\tilde{L}}) \circ \delta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(z').$$

Preuve. Notons $\underline{\delta}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(zz')$ le membre de droite de cette égalité. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, notons $\psi_{\tilde{M}}(f)$ la fonction $\gamma \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$. L'égalité (1) prend la forme

$$(4) \qquad \psi_{\tilde{M}}(zf) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(z_{\tilde{L}}) \psi_{\tilde{L}}(f).$$

Remplaçons dans cette égalité f par $z'f$. Développons ensuite chaque terme $\psi_{\tilde{L}}(z'f)$ par la même égalité où l'on remplace z par z' et $\tilde{M}$ par $\tilde{L}$. On obtient facilement l'égalité

$$\psi_{\tilde{M}}(zz'f) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \underline{\delta}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}((zz')_{\tilde{L}}) \psi_{\tilde{L}}(f).$$

En raisonnant par récurrence, on peut supposer que

$$\underline{\delta}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}((zz')_{\tilde{L}}) = \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}((zz')_{\tilde{L}})$$

pour tout $\tilde{L} \neq \tilde{G}$. En comparant l'égalité précédente avec l'égalité (1) où z est remmplacé par zz', on en déduit l'égalité

$$(5) \qquad (\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(zz') - \underline{\delta}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(zz'))\psi_{\tilde{G}}(f) = 0.$$

Soit $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$. L'espaces des germes au point γ des fonctions $\psi_{\tilde{G}}(f)$ quand f décrit $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est égal à celui des germes des fonctions φ pour $\varphi \in C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. On en déduit que 0 est le seul élément de $Diff^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ qui annule toute fonction $\psi_{\tilde{G}}(f)$. L'égalité (5) entraîne alors la conclusion de (3). □

1.3 Propriétés des opérateurs $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(z)$

On note $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans G. A tout élément $\alpha \in \Sigma(T)$, on associe le plus petit entier $n_\alpha \geq 1$ tel que $\theta^{n_\alpha}(\alpha) = \alpha$. On définit un élément $N\alpha \in X^*(T)$ par $N\alpha = \sum_{k=0,\dots n_\alpha-1} \theta^k(\alpha)$. Il se descend en un élément de $X^*(T')$. On pose $\alpha_{T'} = N\alpha$ si α est de type 1 ou 3, $\alpha_{T'} = 2N\alpha$ si α est de type 2 (cf. [I] 1.6). On pose $\Sigma(T') = \{\alpha_{T'}; \alpha \in \Sigma(T)\}$. C'est un système de racines en général non réduit. Fixons un sous-groupe de Borel B de G de tore maximal T et invariant par θ. Notons Δ la base de $\Sigma(T)$ associée à B. On dira qu'une suite $(t'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $T'(\mathbb{C})$ tend vers l'infini selon Δ si et seulement si, $lim_{k\to\infty}|\alpha_{T'}(t'_k)| = \infty$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Considérons une fonction $\varphi : \tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ et un nombre complexe c. Introduisons la condition

(1) pour tout $\gamma' \in \tilde{T}'(\mathbb{C})$ et pour toute suite $(t'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $T'(\mathbb{C})$ tendant vers l'infini selon Δ et telle que $t'_k\gamma' \in \tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$ pour tout k, on a $lim_{k\to\infty}\varphi(t'_k\gamma') = c$.

On peut remplacer "pour tout $\gamma' \in \tilde{T}'(\mathbb{C})$" par "il existe $\gamma' \in \tilde{T}'(\mathbb{C})$ tel que...", on obtient une condition équivalente. On notera $lim_{\gamma'\to_\Delta\infty}\varphi(\gamma') = c$ si cette condition est vérifiée.

Fixons une base $\mathcal{B}$ de $Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}$. Pour tout $z \in \mathfrak{Z}(G)$, l'opérateur $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(z)$ s'écrit de façon unique comme une somme finie

$$\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(z) = \sum_{U\in\mathcal{B}} q_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(U; z)\partial_U,$$

où les $q_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(U; z)$ sont des éléments de $C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. On note $q_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(U; \gamma, z)$ la valeur de cette fonction en un point γ.

Proposition. *Supposons $\tilde{M} \neq \tilde{G}$. Soient $z \in \mathfrak{Z}(G)$ et $U \in \mathcal{B}$.*

(i) La fonction $q_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(U; z)$ est la restriction à $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ d'une fonction rationnelle régulière sur $\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$, que l'on note encore $q_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(U; z)$.

(ii) Pour toute base Δ de $\Sigma(T)$, on a $lim_{\gamma'\to_\Delta\infty}q_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(U; \gamma', z) = 0$.

Cette proposition sera prouvée en 1.5. Remarquons que le (i) est vrai aussi si $\tilde{M} = \tilde{G}$ en vertu de 1.2(2).

1.4 Rappels sur l'action adjointe

Pour deux racines $\alpha,\beta\in\Sigma(T)$, disons qu'elles sont dans la même orbite si et seulement s'il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $\beta=\theta^m\alpha$. On note (α) l'orbite de α. Fixons un ensemble de représentants $\Sigma(T)_\theta\subset\Sigma(T)$ des orbites. On complète (B,T) en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ en fixant des éléments non nuls $E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ pour $\alpha\in\Delta$, où $\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}$ est la droite radicielle associée à α. On fixe $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ et on définit l'automorphisme $\theta=ad_e$ de G. Pour $\alpha\in\Sigma(T)_\theta$, fixons un élément non nul E_α de $\mathfrak{g}_\alpha$. On suppose que c'est l'élément déjà fixé si $\alpha\in\Delta$. Pour $m=1,...,n_\alpha-1$, posons $E_{\theta^m\alpha}=\theta^m(E_\alpha)$. C'est un élément non nul de $\mathfrak{g}_{\theta^m\alpha}$. D'après [12] 1.3, on a $\theta^{n_\alpha}(E_\alpha)=\epsilon_\alpha E_\alpha$, où $\epsilon_\alpha=1$ si α est de type 1 ou 2 et $\epsilon_\alpha=-1$ si α est de type 3. Soit $\gamma\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. On écrit $\gamma=t_\gamma e$, avec $t_\gamma\in T$. On pose $(\alpha)(\gamma)=\epsilon_\alpha\prod_{m=0,...,n_\alpha-1}\theta^m(\alpha)(t_\gamma)$. On en fixe une racine n_α-ième $\nu_{(\alpha)}(\gamma)$ et on note $\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}$ le groupe des racines n_α-ièmes de 1. Pour $\zeta\in\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}$, posons

$$E((\alpha),\gamma,\zeta)=\sum_{m=0,...,n_\alpha-1}\nu_{(\alpha)}(\gamma)^{-m}\zeta^{-m}(\prod_{j=0,...,m}\theta^j(\alpha)(t_\gamma))E_{\theta^m(\alpha)}.$$

On vérifie que $ad_\gamma(E((\alpha),\gamma,\zeta))=\nu_{(\alpha)}(\gamma)\zeta E((\alpha),\gamma,\zeta)$. La famille $(E(\alpha),\gamma,\zeta))_{\zeta\in\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}}$ est une base de l'espace $\mathfrak{g}_{(\alpha)}=\sum_{m=0,...,n_\alpha-1}\mathfrak{g}_{\theta^m(\alpha)}$. Notons $\mathfrak{q}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les algèbres de Lie des radicaux unipotents de B et du sous-groupe de Borel opposé $\bar{B}$. La famille $(E(\alpha),\gamma,\zeta))_{\alpha\in\Sigma(T)_\theta,\zeta\in\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}}$ est une base de $\mathfrak{q}$.

Si l'on remplace γ par $t\gamma$, avec $t\in T^{\theta,0}$, on peut supposer $\nu_{(\alpha)}(t\gamma)=\alpha_{res}(t)\nu_{(\alpha)}(\gamma)$, où α_{res} est la restriction de α à $T^{\theta,0}$. On a alors $E((\alpha),t\gamma,\zeta)=E((\alpha),\gamma,\zeta)$. Les familles ci-dessus sont donc indépendantes de t. Remarquons que $E((\alpha),\gamma,\zeta)$ est vecteur propre pour l'action $ad_{t\gamma}$, de valeur propre $\zeta\alpha_{res}(t)\nu_{(\alpha)}(\gamma)$ et est aussi vecteur propre pour l'action ad_t, de valeur propre $\alpha_{res}(t)$.

Posons

$$D_\star^{\tilde{G}}(\gamma)=\prod_{\alpha\in\Sigma(T)_\theta}\prod_{\zeta\in\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}}(1-\zeta\nu_{(\alpha)}(\gamma))=\prod_{\alpha\in\Sigma(T)_\theta}(1-(\alpha)(\gamma)).$$

Remarque. Ce terme est défini pour $\gamma\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$ et appartient à $\mathbb{C}^\times$. Il appartient à $\mathbb{R}^\times$ si $\gamma\in\tilde{T}(\mathbb{R})$. En [I] 2.4, on a défini un terme $D^{\tilde{G}}(\gamma)$ pour $\gamma\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$. On a l'égalité

$$D^{\tilde{G}}(\gamma)=|D_\star^{\tilde{G}}(\gamma)det((1-\theta)_{\mathfrak{t}/\mathfrak{t}^\theta})|_{\mathbb{R}}.$$

Puisque la restriction de $D_\star^{\tilde{G}}$ à $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ est à valeurs réelles non nulles, on peut choisir une racine carrée $(D_\star^{\tilde{G}})^{1/2}$ qui soit une fonction C^∞ sur $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$. Pour $H\in Sym(\mathfrak{t})$ ou $H\in Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}$, on définit l'opérateur $\partial_{H,\star}\in Diff^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg})^{\omega-inv}$ par l'égalité

$$\partial_{H,\star}=(D_\star^{\tilde{G}})^{1/2}\circ\partial_H\circ(D_\star^{\tilde{G}})^{-1/2}.$$

Cela ne dépend pas du choix de la racine carrée $(D_\star^{\tilde{G}})^{1/2}$. Ecrivons

$$\partial_{H,\star}=\sum_{U\in\mathcal{B}}b(U;H)\partial_U.$$

Les termes $b(U;H)$ sont des éléments de $C^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. On note $b(U;\gamma,H)$ leurs valeurs en un point γ.

Lemme. *Soient $H \in Sym(\mathfrak{t})$ et $U \in \mathcal{B}$. Alors la fonction $b(U;H)$ est combinaison linéaire de produits de fonctions $\gamma \mapsto \frac{1}{(1-(\alpha)(\gamma))^m}$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \Sigma(T)_\theta$, $\alpha > 0$.*

Preuve. Supposons d'abord $H \in \mathfrak{t}$. Pour $\alpha \in \Sigma(T)_\theta$ et $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$, on calcule

$$(1) \qquad \partial_H(\alpha)(\gamma) = - < N\alpha, H > (\alpha)(\gamma).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on en déduit l'égalité

$$(2) \qquad \partial_H \frac{1}{(1-(\alpha)(\gamma))^m} = \frac{-m < N\alpha, H > (\alpha)(\gamma)}{(1-(\alpha)(\gamma))^{m+1}} = \frac{m < N\alpha, H >}{(1-(\alpha)(\gamma))^m} - \frac{m < N\alpha, H >}{(1-(\alpha)(\gamma))^{m+1}}.$$

En introduisant l'ordre sur les racines relatif à la base Δ fixée, on peut récrire

$$D_\star^{\tilde{G}}(\gamma) = \prod_{\alpha \in \Sigma(T)_\theta, \alpha > 0} (1-(\alpha)(\gamma))(1-(\alpha)(\gamma)^{-1}) = \prod_{\alpha \in \Sigma(T)_\theta, \alpha > 0} -(\alpha)(\gamma)^{-1}(1-(\alpha)(\gamma))^2.$$

Fixons γ. Pour γ' voisin de γ, on peut choisir des racines carrées $(\alpha)(\gamma')^{1/2}$ qui sont C^∞ en γ'. On peut supposer que

$$D_\star^{\tilde{G}}(\gamma')^{1/2} = \prod_{\alpha \in \Sigma(T)_\theta, \alpha > 0} i(\alpha)(\gamma')^{-1/2}(1-(\alpha)(\gamma'))$$

au voisinage de γ, où i est une racine carrée de -1. En utilisant cette formule et la relation (1), on obtient

$$(3) \qquad \partial_{H,\star}(\gamma) = \partial_H + \sum_{\alpha \in \Sigma(T)_\theta, \alpha > 0} < N\alpha, H > (\frac{1}{2} - \frac{1}{1-(\alpha)(\gamma)}).$$

Cela vérifie le lemme pour $H \in \mathfrak{t}$.

En raisonnant par récurrence sur le dégré de H, il reste à vérifier l'assertion suivante. Soient $H \in \mathfrak{t}$ et $H' \in Sym(\mathfrak{t})$. Supposons que le lemme soit vérifié pour H'. Alors il l'est pour HH'. La formule (2) montre que ∂_H conserve l'ensemble des fonctions qui sont combinaisons linéaires de produits de fonctions $\gamma \mapsto \frac{1}{(1-(\alpha)(\gamma))^m}$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \Sigma(T)_\theta$, $\alpha > 0$. L'assertion résulte alors facilement de (3). $\square$

1.5 Une application d'Harish-Chandra

Notons $Tens(\mathfrak{q})$ l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{q}$. Il contient le sous-espace $Sym(\mathfrak{q})$. Soit $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. On définit une application linéaire

$$\Gamma_\gamma : Tens(\mathfrak{q}) \otimes_{\mathbb{C}} Sym(\mathfrak{t}) \to \mathfrak{U}(G)$$

par

$$(1) \qquad \Gamma_\gamma(X_1...X_a \otimes H) = (R_{ad_\gamma(X_1)} - L_{X_1})...(R_{ad_\gamma(X_a)} - L_{X_a})H$$

pour $X_1, ..., X_a \in \mathfrak{q}$ et $U \in Sym(\mathfrak{t})$. On a noté L_X et R_X les applications $Y \mapsto XY$ et $Y \mapsto YX$ de $\mathfrak{U}(G)$ dans lui-même. D'après [10] lemme 22, cette application se restreint en un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$Sym(\mathfrak{q}) \otimes_{\mathbb{C}} Sym(\mathfrak{t}) \to \mathfrak{U}(G).$$

Fixons des bases $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $Sym(\mathfrak{q})$ et $(H_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de $Sym(\mathfrak{t})$. Pour tout $V \in \mathfrak{U}(G)$ et tout $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$, on peut écrire de façon unique

$$(2) \qquad V = \sum_{k,l} a_{k,l}(\gamma, V)\Gamma_\gamma(Y_k \otimes H_l)$$

où $a_{k,l}(\gamma, V) \in \mathbb{C}$ et $a_{k,l}(\gamma, V) = 0$ pour presque tout (k, l).

Remarques. (3) Les preuves de Harish-Chandra concernent le cas non tordu, mais leur extension au cas tordu est immédiate. On les reprendra d'ailleurs partiellement ci-dessous.

(4) Ici et dans la suite, il y a de légères différences avec les références citées dues au fait que nous provilégions les actions par translations à gauche alors que les auteurs cités utilisent les translations à droite.

Supposons que $Y_0 = 1$ tandis que le terme constant de Y_k est nul si $k \geq 1$.

Lemme. *Soient $V \in \mathfrak{U}(G)$ et $k, l \in \mathbb{N}$.*

(i) La fonction $\gamma \mapsto a_{k,l}(\gamma, V)$ est rationnelle sur $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. Plus précisément, il existe un entier $n_{k,l} \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $\gamma \mapsto D_\star^{\tilde{G}}(\gamma)^{n_{k,l}} a_{k,l}(\gamma, V)$ se prolonge en un polynôme sur $\tilde{T}(\mathbb{C})$.

(ii) Supposons que $k \geq 1$ et que V est invariant par l'action adjointe de $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$. Soient $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$, Δ une base de $\Sigma(T)$ et $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$. On suppose que $t_j\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$ pour tout j et que l'image de la suite dans $T'(\mathbb{C})$ tend vers l'infini selon Δ. Alors $lim_{j\to\infty} a_{k,l}(t_j\gamma, V) = 0$.

Preuve. Si on change les bases $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(H_l)_{l\in\mathbb{N}}$ en d'autres bases $(Y'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(H'_l)_{l\in\mathbb{N}}$, on obtient de nouveaux coefficients $a'_{k,l}(\gamma, V)$ qui se déduisent des précédents par un système d'équations linéaires. Il est clair que les assertions de l'énoncé pour ces nouveaux coefficients sont équivalentes aux mêmes assertions pour les anciens. On a donc le choix des bases $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(H_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Fixons $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. La fonction $t \mapsto a_{k,l}(t\gamma, V)$ est définie pour presque tout $t \in T(\mathbb{C})$ (précisément pour les t tels que $t\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$). On la restreint à $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$. On va commencer par prouver

(5) la fonction $t \mapsto a_{k,l}(t\gamma, V)$ est rationnelle sur $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$; il existe un entier $n_{k,l} \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $t \mapsto D_\star^{\tilde{G}}(t\gamma)^{n_{k,l}} a_{k,l}(t\gamma, V)$ soit régulière sur $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$.

Comme ci-dessus, cette assertion ne dépend pas du choix des bases. En conséquence, on suppose que $(H_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est formé d'éléments homogènes et que la base $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est formée des symétrisés des éléments $E((\alpha), \gamma, \zeta)$ introduits dans le paragraphe précédents. Rappelons que l'homomorphisme de symétrisation identifie $Sym(\mathfrak{q})$ à un sous-espace de $\mathfrak{U}(G)$ et que, modulo cette identification, on a l'isomorphisme $\mathfrak{U}(G) = Sym(\mathfrak{t}) \otimes_{\mathbb{C}} Sym(\mathfrak{q})$. Ainsi, la famille $(H_l Y_k)_{k,l\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathfrak{U}(G)$. Elle est formée de vecteurs propres pour l'action de $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$. Par linéarité, on peut supposer que V est l'un de ces éléments de base $H_{l_0} Y_{k_0}$, et on peut raisonner par récurrence sur le degré de cet élément. Ecrivons simplement $Y = Y_{k_0}$, $H = H_{l_0}$. Si $k_0 = 0$, on a simplement $V = \Gamma_{t\gamma}(Y_0 \otimes H)$ pour tout $t \in T^{\theta,0}(\mathbb{C})$ et l'assertion (5) est claire. Remarquons que V est invariant par l'action adjointe de $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$ et que l'assertion (ii) du lemme est tout aussi claire. Supposons $k_0 \geq 1$. L'élément Y est le symétrisé de $X_1 ... X_a$, où chaque X_i est un élément $E((\alpha), \gamma, \zeta)$. Ainsi, pour chaque $i = 1, ..., a$, il existe une racine $\alpha_i \in \Sigma(T)$ et un élément $\nu_i \in \mathbb{C}^\times$ de sorte que $ad_t(X_i)=\alpha_{i,res}(t)X_i$ pour tout $t\in T^{\theta,0}(\mathbb{C})$ et $ad_\gamma(X_i)=\nu_iX_i$. On a

$$\Gamma_{t\gamma}(X_1...X_a\otimes H)=(R_{ad_{t\gamma}(X_1)}-L_{X_1})...(R_{ad_{t\gamma}(X_a)}-L_{X_a})H$$

$$=(R_{ad_{t\gamma}(X_1)}-R_{X_1}+R_{X_1}-L_{X_1})...(R_{ad_{t\gamma}(X_a)}-R_{X_a}+R_{X_a}-L_{X_a})H$$

$$=(c_1(t)R_{X_1}+R_{X_1}-L_{X_1})...(c_a(t)R_{X_a}+R_{X_a}-L_{X_a})H,$$

où $c_i(t)=\nu_i\alpha_{i,res}(t)-1$. On développe cette expression en séparant les termes $c_i(t)R_{X_i}$ des $R_{X_i}-L_{X_i}$. Ces deux opérateurs envoient un vecteur propre pour l'action adjointe de $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$ sur un tel vecteur propre. De plus, le second opérateur fait baisser strictement le degré. On obtient une expression

$$\Gamma_{t\gamma}(X_1...X_a\otimes H)=(\prod_{i=1,...,a}c_i(t))HX_a...X_1+\sum_{b=0,...,a-1}\sum_{1\leq i_1<...i_b\leq a}(\prod_{j=1,...,b}c_{i_j}(t))V_{i_1,...,i_b},$$

où les $V_{i_1,...,i_b}$ sont des éléments de $\mathfrak{U}(G)$ de degré strictement inférieur à celui de V et qui sont propres pour l'action adjointe de $T^{\theta,0}$. En symétrisant, on obtient une formule analogue

$$\Gamma_{t\gamma}(Y\otimes H)=(\prod_{i=1,...,a}c_i(t))V+\sum_{b=0,...,a-1}\sum_{1\leq i_1<...i_b\leq a}(\prod_{j=1,...,b}c_{i_j}(t))V'_{i_1,...,i_b},$$

ou encore

$$V=(\prod_{i=1,...,a}c_i(t))^{-1}\Gamma_{t\gamma}(Y\otimes H)-\sum_{b=0,...,a-1}\sum_{1\leq i_1<...i_b\leq a}(\prod_{i=1,...,a;i\neq i_1,...,i_b}c_i(t))^{-1}V'_{i_1,...,i_b}. \tag{6}$$

Pour tous $k,l\in\mathbb{N}$, posons

$$a'_{k,l}(t\gamma;V)=\sum_{b=0,...,a-1}\sum_{1\leq i_1<...i_b\leq a}(\prod_{i=1,...,a;i\neq i_1,...,i_b}c_i(t))^{-1}a_{k,l}(t\gamma;V'_{i_1,...,i_b}).$$

Alors

$$a_{k,l}(t\gamma;V)=\left\{\begin{array}{ll}-a'_{k,l}(t\gamma;V); & \text{si } (k,l)\neq(k_0,l_0),\\ (\prod_{i=1,...,a}c_i(t))^{-1}-a'_{k_0,l_0}(t\gamma;V), & \text{si } (k,l)=(k_0,l_0).\end{array}\right. \tag{7}$$

Pour tout $i=1,...,a$, la fonction $c_i(t)$ est une fonction rationnelle sur $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$. La fonction $D^{\tilde{G}}_\star(t\gamma)c_i(t)^{-1}$ est régulière sur cet ensemble. Jointe aux propriétés des $a_{k,l}(t\gamma;V'_{i_1,...,i_b})$ connues par récurrence, cette propriété entraîne que $a_{k,l}(t\gamma;V)$ est aussi une fonction rationnelle sur $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$ et qu'il existe un entier $n_{k,l}\in\mathbb{N}$ tel que $D_{\tilde{G}}(t\gamma)^{n_{k,l}}a_{k,l}(t\gamma;V)$ est régulière sur cet ensemble. Cela prouve (5).

Prouvons maintenant le (ii) de l'énoncé. On reprend le calcul ci-dessus en supposant $V=H_{l_0}Y_{k_0}=HY$. On a déjà remarqué que (ii) était vérifiée si $k_0=0$. On suppose $k_0\geq1$. Puisque V est invariant par l'action adjointe de $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$, on a

(8) $\sum_{i=1,...,a}\alpha_{i,res}=0$.

Il est clair sur la définition (1) qu'alors $\Gamma_{t\gamma}(Y\otimes H)$ est aussi invariant par l'action adjointe de $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$. Puisque les $V'_{i_1,...,i_b}$ sont propres pour cette action, on peut aussi bien supprimer de la formule (6) ceux qui ne sont pas invariants. Les éléments restants vérifient alors le (ii) de l'énoncé par récurrence. On a

$$lim_{j\to\infty}c_i(t_j)^{-1}=\left\{\begin{array}{ll}0, & \text{si } \alpha_i>0,\\ -1, & \text{si } \alpha_i<0,\end{array}\right. \tag{9}$$

où la positivité des racines est relative à Δ. Des propriétés des $a_{k,l}(t\gamma;V'_{i_1,\dots,i_b})$ connues par récurrence résulte alors que, si $k\geq 1$, on a $lim_{j\to\infty}a'_{k,l}(t_j\gamma;V)=0$. Pour conclure, il reste à prouver que $lim_{j\to\infty}(\prod_{i=1,\dots,a}c_i(t_j))^{-1}=0$. Mais cela résulte de (8) et (9), car (8) assure qu'il y a au moins un i tel que $\alpha_i>0$. Cela prouve le (ii) de l'énoncé.

Venons-en à la preuve du (i). De nouveau, on a le choix de la base. On suppose maintenant que H_l est homogène pour tout l et que Y_k est propre pour l'action de $T(\mathbb{C})$, de caractère propre y_k. Par linéarité, on peut aussi supposer que V est propre pour cette action, de caractère propre v. Pour $\gamma\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$ et $t\in T(\mathbb{C})$, on déduit de (2) l'égalité

$$ad_t(V)=\sum_{k,l}a_{k,l}(\gamma,V)\Gamma_{ad_t(\gamma)}(ad_t(Y_k)\otimes ad_t(H_l)),$$

ou encore

$$V=\sum_{k,l}a_{k,l}(\gamma,V)v(t)^{-1}y_k(t)\Gamma_{(1-\theta)(t)\gamma}(Y_k\otimes H_l).$$

En comparant avec (2) appliquée à $(1-\theta)(t)\gamma$, on obtient

$$(10)\qquad a_{k,l}((1-\theta)(t)\gamma,V)=v(t)^{-1}y_k(t)a_{k,l}(\gamma,V).$$

Ceci implique que $a_{k,l}(\gamma,V)=0$ si les restrictions de v et y_k à $T^\theta(\mathbb{C})$ sont différentes. Supposons qu'elles soient égales. Alors le caractère $v^{-1}y_k$ se descend en un caractère de $(1-\theta)(T(\mathbb{C}))$ que l'on note y'_k. Fixons $\gamma_0\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. L'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc}(1-\theta)(T(\mathbb{C}))\times T^{\theta,0}(\mathbb{C}) & \to & \tilde{T}(\mathbb{C})\\ (t_1,t_2) & \mapsto & t_1t_2\gamma_0\end{array}$$

est surjectif. Soit $n_{k,l}$ un entier vérifiant (5). La fonction $\gamma\mapsto D^{\tilde{G}}_\star(\gamma)^{n_{k,l}}a_{k,l}(\gamma,V)$ se relève en une fonction sur $(1-\theta)(T(\mathbb{C}))\times T^{\theta,0}(\mathbb{C})$. En un point (t_1,t_2), celle-ci vaut $y'_k(t_1)D^{\tilde{G}}_\star(t_2\gamma_0)^{n_{k,l}}a_{k,l}(t_2\gamma_0,V)$. L'assertion (5) entraîne que cette fonction se prolonge en une fonction polynomiale sur $(1-\theta)(T(\mathbb{C}))\times T^{\theta,0}(\mathbb{C})$. Donc la fonction $\gamma\mapsto D^{\tilde{G}}_\star(\gamma)^{n_{k,l}}a_{k,l}(\gamma,V)$ se prolonge elle aussi en une fonction polynomiale sur $\tilde{T}(\mathbb{C})$. $\square$

Les fonctions $\gamma\mapsto a_{k,l}(\gamma,V)$ sont rationnelles. On sait qu'en tout γ, il n'y a qu'un nombre fini de couples (k,l) pour lesquels $a_{k,l}(\gamma,V)\neq 0$. Il en résulte qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples (k,l) pour lesquels la fonction $\gamma\mapsto a_{k,l}(\gamma,V)$ n'est pas nulle.

1.6 Preuve de la proposition 1.3

On va rappeler la construction de nos opérateurs différentiels, d'après [1] paragraphe 12. Soit $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$. Notons M^1 la composante neutre de l'intersection des noyaux des caractères de M appartenant à $X^*(M)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\theta}$. Notons $\mathfrak{m}^1$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{p}^1$ la somme de $\mathfrak{m}^1$ et du radical nilpotent de $\mathfrak{p}$. Notons $\mathfrak{u}_{\bar{P}}$ le radical nilpotent de l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique opposé $\bar{P}$ et notons $\mathfrak{U}_{\bar{P}}$ la sous-algèbre qu'il engendre dans $\mathfrak{U}(G)$. On a la décompositon en somme directe

$$\mathfrak{U}(G)=\mathfrak{p}^1\mathfrak{U}(G)\oplus Sym(\mathfrak{a}_{\tilde{M}})\mathfrak{U}_{\bar{P}}\mathfrak{u}_{\bar{P}}\oplus Sym(\mathfrak{a}_{\tilde{M}}).$$

Elle est compatible à l'action adjointe de T. Pour tout $Y\in\mathfrak{U}(G)$, écrivons $Y=Y'+Y''+\mu_{\tilde{P}}(Y)$ conformément à cette décomposition ci-dessus. Notons d la différence des dimensions de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. Notons $\mu_{\tilde{P},d}(Y)$ la composante homogène de degré d de $\mu_{\tilde{P}}(Y)$.

On peut considérer $Sym(\mathfrak{a}_{\tilde{M}})$ comme l'algèbre des polynômes sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. Pour $\nu \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, notons $< \mu_{\tilde{P},d}(Y), \nu >$ la valeur en ν du polynôme associé à $\mu_{\tilde{P},d}(Y)$. Posons

$$c^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Y) = \sum_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})} < \mu_{\tilde{P},d}(Y), \nu > \epsilon^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(\nu),$$

où ν est un élément assez régulier de $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ et $\epsilon^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}$ est la fonction usuelle de la théorie des $(\tilde{G}, \tilde{M})$-familles (la notation d'Arthur est $(\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{P}})^{-1}$; notre notation est reprise de [14] p. 28). L'expression ci-dessus ne dépend pas de ν.

Comme dans le paragraphe précédent, fixons des bases $(H_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de $Sym(\mathfrak{t})$ et $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $Sym(\mathfrak{q})$. On suppose que H_l est homogène pour tout l, que $Y_0 = 1$ et que, pour $k \geq 1$, Y_k est de terme constant nul et est propre pour l'action adjointe de $T(\mathbb{C})$, de caractère propre y_k.

Soient $z \in \mathfrak{Z}(G)$ et $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$. D'après [1] lemme 12.1, on a l'égalité

$$(1) \qquad \delta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, z) = \sum_{k\geq 1, l\geq 0} c^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Y_k) a_{k,l}(\gamma, z)\partial_{H_l,\star}(\gamma).$$

Puisque la projection $Y \mapsto \mu_{\tilde{P}}(Y)$ est équivariante pour les actions de T, on a $\mu_{\tilde{P}}(Y_k) = 0$ si $y_k \neq 1$. A fortiori, le terme indexé par (k, l) dans la somme ci-dessus est nul si $y_k \neq 1$. En utilisant les notations de 1.4, on obtient

$$\delta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, z) = \sum_{U\in\mathcal{B}} \sum_{k\geq 1; y_k=1} \sum_{l\geq 0} c^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Y_k) a_{k,l}(\gamma, z) b(U; \gamma, H_l)\partial_U.$$

Donc, pour tout $U \in \mathcal{B}$,

$$(2) \qquad q^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(U; \gamma, z) = \sum_{k\geq 1; y_k=1} \sum_{l\geq 0} c^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Y_k) a_{k,l}(\gamma, z) b(U; \gamma, H_l).$$

Fixons $U \in \mathcal{B}$. Considérons un couple (k, l) intervenant ci-dessus. Le terme $a_{k,l}(\gamma, z)$ est défini pour $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. Puisque $y_k = 1$ et que z est invariante par l'action adjointe de $T(\mathbb{C})$, le lemme 1.5(i) et la relation 1.5(10) entraînent que $\gamma \mapsto a_{k,l}(\gamma, z)$ se quotiente en une fonction rationnelle régulière sur $\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. Le lemme 1.4 montre qu'il en est de même de la fonction $\gamma \mapsto b(U; \gamma, H_l)$. Donc la fonction $\gamma \mapsto q^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(U; \gamma, z)$ se prolonge en une fonction rationnelle régulière sur $\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$.

Fixons γ. L'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} T^{\theta,0}(\mathbb{C}) & \to & \tilde{T}'(\mathbb{C}) \\ t & \mapsto & t\gamma \end{array}$$

est surjectif. Pour démontrer le (ii) de la proposition 1.3, il suffit de prouver la propriété (3) suivante. Fixons une base Δ de $\Sigma(T)$ et une suite $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $T^{\theta,0}(\mathbb{C})$. Supposons que $t_j\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$ pour tout j et que l'image de la suite $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $T'(\mathbb{C})$ tend vers l'infini selon Δ. Alors on a

(3) $lim_{j\to\infty} q^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(U; t_j\gamma, z) = 0$.

Considérons un couple (k, l) intervenant dans (2). Puisque $k \geq 1$, le lemme 1.5(ii) implique que $lim_{j\to\infty} a_{k,l}(t_j\gamma, z) = 0$. D'après le lemme 1.4, le terme $b(U; t_j\gamma, H_l)$ est combinaison linéaire de produits de termes $(1-(\alpha)(\gamma)\alpha_{res}(t_j)^{n_\alpha})^{-m}$ pour des $\alpha \in \Sigma(T)_\theta$,

$\alpha > 0$ et des $m \in \mathbb{N}$. Un tel produit a une limite quand j tend vers l'infini : sa limite est nulle sauf si la fonction est constante. Ces résultats et la formule (2) impliquent (3), ce qui achève la démonstration de la proposition. $\square$

Une conséquence formelle de la formule (1) et de l'algébricité des constructions est le comportement de nos opérateurs différentiels par conjugaison. Enonçons cette propriété sous la forme générale qui nous servira plus loin. Supposons que $\tilde{G}$ soit une composante connexe d'un K-espace $K\tilde{G}$, cf. [I] 1.11, et que $\tilde{M}$ soit une composante connexe d'un K-espace de Levi $K\tilde{M}$, cf. [I] 3.5. Disons que $\tilde{G}$ et $\tilde{M}$ sont les composantes $\tilde{G}_p$ et $\tilde{M}_p$. Soit $q \in \Pi^{\tilde{M}}$. On a alors une composante $\tilde{G}_q$ de $K\tilde{G}$, une composante $\tilde{M}_q$ de $K\tilde{M}$ et un isomorphisme $\tilde{\phi}_{p,q} : \tilde{G}_q \to \tilde{G}_p$ défini sur $\mathbb{C}$ qui envoie $\tilde{M}_q$ sur $\tilde{M}_p$. Supposons donné un sous-tore maximal $\tilde{T}_q$ de $\tilde{M}_q$ et un élément $x \in M_p$ tel que $ad_x \circ \tilde{\phi}_{p,q}(\tilde{T}_q) = \tilde{T}$. On note $\tilde{\iota} : \tilde{T}_q \to \tilde{T}$ la restriction de $ad_x \circ \tilde{\phi}_{p,q}$. On suppose que $\tilde{\iota}$ est défini sur $\mathbb{R}$. Les centres $\mathfrak{Z}(G)$ et $\mathfrak{Z}(G_q)$ s'identifient. On peut donc définir $\delta_{\tilde{M}_q}^{\tilde{G}_q}(\gamma_q, z)$ pour $\gamma_q \in \tilde{T}_{q,\tilde{G}_q-reg}(\mathbb{R})$. On a alors l'égalité

$$(4) \qquad \tilde{\iota} \circ \delta_{\tilde{M}_q}^{\tilde{G}_q}(\gamma_q, z) \circ \tilde{\iota}^{-1} = \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\iota}(\gamma_q), z)$$

pour tout $\gamma_q \in \tilde{T}_{q,\tilde{G}_q-reg}(\mathbb{R})$.

1.7 L'opérateur de Casimir

On a fixé en [IV] 1.1 une forme bilinéaire sur $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ définie positive, invariante par le groupe de Weyl W et par θ. On la prolonge en une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire sur $\mathfrak{t}$. On peut alors identifier le dual $\mathfrak{t}^*$ à $\mathfrak{t}$. Pour $X \in X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \subset \mathfrak{t}$ ou $X \in X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \subset \mathfrak{t}^*$, on a $(X, X) \geq 0$ et on note $|X|$ la racine carrée positive ou nulle de (X, X).

D'autre part, la forme sur $\mathfrak{t}$ se prolonge en une unique forme $\mathbb{C}$-bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ invariante par l'action adjointe de G. Elle est aussi invariante par ad_γ pour tout $\gamma \in \tilde{G}$. On la note $(.,.)$. De cette forme se déduit un élément de Casimir $\Omega \in \mathfrak{Z}(G)$, cf. [18] I.2.3. Fixons une base $(H_j)_{i=1,\dots,n}$ de $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Supposons-la orthonormée. On a fixé en 1.4 des éléments E_α pour $\alpha \in \Sigma(T)$. On a forcément $(E_\alpha, E_\beta) = 0$ si $\beta \neq -\alpha$ et on peut supposer $(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. Alors

$$\Omega = (\sum_{j=1,\dots,n} H_j^2) + (\sum_{\alpha \in \Sigma(T), \alpha > 0} E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha).$$

On calcule classiquement

$$(1) \qquad \Omega_T = \sum_{j=1,\dots,n} H_j^2 - \rho_B(H_j)^2,$$

où ρ_B est la demi-somme des racines positives.

Notons plus précisément $\Sigma^G(T)$ l'ensemble noté jusqu'alors $\Sigma(T)$. L'ensemble $\Sigma^M(T)$ est invariant par θ et on peut supposer $\Sigma^M(T)_\theta \subset \Sigma^G(T)_\theta$. Ainsi $\Sigma^G(T)_\theta - \Sigma^M(T)_\theta$ est un ensemble de représentants des orbites dans $\Sigma^G(T) - \Sigma^M(T)$. On peut aussi supposer que $\Sigma^G(T)_\theta$ est invariant par $\alpha \mapsto -\alpha$ et que $\nu_{(-\alpha)}(\gamma) = \nu_{(\alpha)}(\gamma)^{-1}$ pour tout $\gamma \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. Posons $d = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$. Supposons $d \geq 1$. Définissons la fonction $C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ sur $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$ par

- si $d \geq 2$, $C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} = 0$;

- si $d=1$,

$$C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma)=-\sum_{\alpha\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta}|(N\alpha)_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}|n_\alpha(1-(\alpha)(\gamma))^{-1}(1-(\alpha)(\gamma)^{-1})^{-1}.$$

Le terme $(\alpha)(\gamma)$ a été défini en 1.4. On a noté $(N\alpha)_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}$ la projection orthogonale de $N\alpha$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, ce dernier espace s'identifiant à un sous-espace de $\mathfrak{t}$.

Proposition. *On suppose $d\geq 1$. Alors, pour tout $\gamma\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$, l'opérateur $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\Omega)$ est la multiplication par $C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma)$.*

Preuve. Soit $\gamma\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}$. Utilisons les éléments $E((\alpha),\gamma,\zeta)$ de 1.4. On vérifie que, pour tout $\alpha\in\Sigma(T)_\theta$, on a l'égalité

$$\sum_{m=0,\dots,n_\alpha-1}E_{\theta^m(\alpha)}E_{-\theta^m(\alpha)}=n_\alpha^{-1}\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}}E((\alpha),\gamma,\zeta)E((-\alpha),\gamma,\zeta^{-1}).$$

Ainsi

$$\Omega=(\sum_{j=1,\dots,n}H_j^2)+\sum_{\alpha\in\Sigma(T)_\theta,\alpha>0}n_\alpha^{-1}\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}}Y((\alpha),\gamma,\zeta),$$

où

$$Y((\alpha),\gamma,\zeta)=E((\alpha),\gamma,\zeta)E((-\alpha),\gamma,\zeta^{-1})+E((-\alpha),\gamma,\zeta^{-1})E((\alpha),\gamma,\zeta).$$

Pour tous α, ζ, on calcule

$$\Gamma_\gamma(Y((\alpha),\gamma,\zeta)\otimes 1)=(1-\nu_{(\alpha)}(\gamma)\zeta)(1-\nu_{(\alpha)}(\gamma)^{-1}\zeta^{-1})Y((\alpha),\gamma,\zeta)$$
$$+(\nu_{(\alpha)}(\gamma)\zeta-\nu_{(\alpha)}(\gamma)^{-1}\zeta^{-1})[E((\alpha),\gamma,\zeta),E((-\alpha),\gamma,\zeta^{-1})].$$

Le dernier terme appartient à $\mathfrak{t}$ puisqu'il est fixe par ad_γ. On en déduit

$$\Omega=U+\sum_{\alpha\in\Sigma(T)_\theta,\alpha>0}n_\alpha^{-1}$$

$$\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}}(1-\nu_{(\alpha)}(\gamma)\zeta)^{-1}(1-\nu_{(\alpha)}(\gamma)^{-1}\zeta^{-1})^{-1}\Gamma_\gamma(Y((\alpha),\gamma,\zeta)\otimes 1),$$

avec $U\in Sym(\mathfrak{t})$. En appliquant 1.6(1), on obtient que $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\Omega)$ est la multiplication par

$$(2)\qquad \sum_{\alpha\in\Sigma(T)_\theta,\alpha>0}n_\alpha^{-1}\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}}(1-\nu_{(\alpha)}(\gamma)\zeta)^{-1}(1-\nu_{(\alpha)}(\gamma)^{-1}\zeta^{-1})^{-1}c_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Y((\alpha),\gamma,\zeta)).$$

Soit $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$, $\alpha\in\Sigma(T)_\theta$ et $\zeta\in\boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}$. Si $\alpha\in\Sigma^M(T)$, on a $E(\pm(\alpha),\gamma,\zeta)\in\mathfrak{p}^1$ et $\mu_{\tilde{P}}(Y((\alpha),\gamma,\zeta))=0$. Supposons $\alpha\not\in\Sigma^M(T)$. Soit $\xi\in\{\pm 1\}$ tel que $\xi\alpha$ soit positif pour P. Alors $E(\xi(\alpha),\gamma,\zeta)\in\mathfrak{p}^1$ et on calcule

$$\mu_{\tilde{P}}(Y((\alpha),\gamma,\zeta))=\xi[E(-(\alpha),\gamma,\zeta^{-1}),E((\alpha),\gamma,\zeta)].$$

Puisqu'on a déjà remarqué que ce terme appartenait à $\mathfrak{t}$, on le calcule facilement :

$$\mu_{\tilde{P}}(Y((\alpha),\gamma,\zeta))=\xi\sum_{m=0,\dots,n_\alpha}[E_{-\theta^m(\alpha)},E_{\theta^m(\alpha)}].$$

Soit $\beta \in \Sigma(T)$. Parce que notre forme bilinéaire est invariante par l'action adjointe, on a

$$([E_{-\beta}, H], E_\beta) + (H, [E_{-\beta}, E_\beta]) = 0$$

pour tout $H \in \mathfrak{t}$. On a aussi $[E_{-\beta}, H] = \beta(H)E_{-\beta}$. Puisqu'on a choisi nos éléments de sorte que $(E_{-\beta}, E_\beta) = 1$, on obtient $(H, [E_{-\beta}, E_\beta]) = -\beta(H)$. Modulo notre identification de $\mathfrak{t}^*$ à $\mathfrak{t}$, on obtient $[E_{-\beta}, E_\beta] = -\beta$. D'où

$$\mu_{\tilde{P}}(Y((\alpha), \gamma, \zeta)) = -\xi \sum_{m=0,\dots,n_\alpha} \theta^m(\alpha) = -\xi N\alpha.$$

Ce terme est homogène de degré 1. Si $d \geq 2$, on en déduit $c_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Y((\alpha), \gamma, \zeta)) = 0$ ce qui démontre l'énoncé dans ce cas. Supposons $d = 1$. Fixons $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$ et un élément $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ positif pour P et tel que $|X| = 1$. Il résulte des définitions que

$$c_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Y((\alpha), \gamma, \zeta)) = 2(\mu_{\tilde{P}}(Y((\alpha), \gamma, \zeta), X)) = -2\xi(N\alpha, X).$$

Il résulte de la définition de X que ceci est égal à $-2|(N\alpha)_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}|$. Cela transforme (2) en

$$-2 \sum_{\alpha \in \Sigma^G(T)_\theta - \Sigma^M(T)_\theta, \alpha > 0} |(N\alpha)_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}| n_\alpha^{-1} \sum_{\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}} (1 - \nu_{(\alpha)}(\gamma)\zeta)^{-1}(1 - \nu_{(\alpha)}(\gamma)^{-1}\zeta^{-1})^{-1}.$$

On montre aisément l'égalité des fractions rationnelles en x :

$$n_\alpha^{-1} \sum_{\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_{n_\alpha}} (1 - x\zeta)^{-1}(1 - x^{-1}\zeta^{-1})^{-1} = n_\alpha(1 - x^{n_\alpha})^{-1}(1 - x^{-n_\alpha})^{-1}.$$

On se rappelle que $\nu_{(\alpha)}(\gamma)^{n_\alpha} = (\alpha)(\gamma)$. Alors l'expression ci-dessus devient

$$-2 \sum_{\alpha \in \Sigma^G(T)_\theta - \Sigma^M(T)_\theta, \alpha > 0} |(N\alpha)_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}| n_\alpha (1 - (\alpha)(\gamma))^{-1}(1 - (\alpha)(\gamma)^{-1})^{-1}.$$

Les expressions étant symétriques en α et $-\alpha$, on peut supprimer le facteur 2 en supprimant la restriction $\alpha > 0$ dans la sommation. Le terme ci-dessus devient $C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma)$. Cela prouve la proposition. □

Remarque. L'algèbre $\mathfrak{Z}(G)$ contient $Sym(\mathfrak{z}(G))$, où $\mathfrak{z}(G)$ est l'algèbre de Lie du centre de G. Il résulte facilement de 1.6(1) que, pour $d \geq 1$, on a $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, z) = 0$ pour $z \in Sym(\mathfrak{z}(G))$. La proposition précédente reste vraie si l'on remplace Ω par n'importe quel élément de $\Omega + Sym(\mathfrak{z}(G))$.

1.8 Variante avec caractère central

On suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On considère des extensions compatibles

$$1 \to C_\natural \to G_\natural \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_\natural \to \tilde{G}$$

où $C_\natural$ est un tore central induit et où $\tilde{G}_\natural$ est encore à torsion intérieure. Soit $\lambda_\natural$ un caractère de $C_\natural(\mathbb{R})$. On note $\tilde{M}_\natural$ et $\tilde{T}_\natural$ les images réciproques dans $\tilde{G}_\natural$ de $\tilde{M}$ et $\tilde{T}$.

Puisqu'il n'y a pas de torsion, on note simplement $Diff^{cst}(\tilde{T}_\natural(\mathbb{R}))$ l'algèbre notée $Diff^{cst}(\tilde{T}_\natural(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ en 1.1. Elle agit sur l'espace des fonctions C^∞ sur $\tilde{T}_\natural(\mathbb{R})$. Restreignons-nous aux fonctions f qui vérifient pour tout $\gamma_\natural \in \tilde{T}_\natural(\mathbb{R})$ la propriété

(1) $f(\gamma_\natural c)=\lambda_\natural(c)^{-1}f(\gamma_\natural)$ pour tout $c\in C_\natural(\mathbb{R})$.
Alors l'action de $Diff^{cst}(\tilde{T}_\natural(\mathbb{R}))$ se quotiente en une action d'une algèbre quotient $Diff^{cst}(\tilde{T}_\natural(\mathbb{R}))_{\lambda_\natural}$.

Notons $\mu(\lambda_\natural)\in\mathfrak{c}_\natural^*$ le paramètre de $\lambda_\natural$ (c'est-à-dire que $\lambda_\natural(exp(H))=e^{<H,\mu(\lambda_\natural)>}$ pour $H\in\mathfrak{c}_\natural(\mathbb{R})$ assez proche de 0). Notons $I_{\lambda_\natural}$ l'idéal de $Sym(\mathfrak{t}_\natural)$ engendré par les $H+<H,\mu(\lambda_\natural)>$ pour $H\in\mathfrak{c}_\natural$. Posons $Sym(\mathfrak{t}_\natural)_{\lambda_\natural}=Sym(\mathfrak{t}_\natural)/I_{\lambda_\natural}$. Introduisons l'ensemble $\mathfrak{t}^*_{\natural,\lambda_\natural}$ des éléments de $\mathfrak{t}_\natural^*$ qui se projettent sur $\mu(\lambda_\natural)\in\mathfrak{c}_\natural^*$. C'est un espace affine sous $\mathfrak{t}^*$ et $Sym(\mathfrak{t}_\natural)_{\lambda_\natural}$ s'identifie à l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{t}^*_{\natural,\lambda_\natural}$. L'application $H\mapsto\partial_H$ se quotiente en un isomorphisme noté de même de $Sym(\mathfrak{t}_\natural)_{\lambda_\natural}$ sur $Diff^{cst}(\tilde{T}_\natural(\mathbb{R}))_{\lambda_\natural}$.

Rappelons que l'on note $C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ l'espace des fonctions f sur $\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})$ qui sont C^∞, à support compact modulo $C_\natural(\mathbb{R})$ et qui vérifient la condition (1) pour tous $\gamma_\natural\in\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})$. On note $I_{\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ le quotient de $C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ par le sous-espace des fonctions dont les orbitales orbitales sont nulles en tout point fortement régulier. L'action de $\mathfrak{Z}(G_\natural)$ sur $C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ ou $I_{\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ se quotiente en l'action d'une algèbre quotient $\mathfrak{Z}(G_\natural)_{\lambda_\natural}$. Celle-ci est isomorphe à $Sym(\mathfrak{t}_\natural)^W_{\lambda_\natural}$.

Soient $\gamma_\natural\in\tilde{T}_{\natural,\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ et $f\in C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$. Rappelons que l'on définit $I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma_\natural,f)$ de la façon suivante (cf. [II] 1.10). On fixe une fonction $\dot{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ telle que

$$f(\gamma_\natural)=\int_{C_\natural(\mathbb{R})}\dot{f}(c\gamma_\natural)\lambda_\natural(c)\,dc.$$

Alors

$$I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma_\natural,f)=\int_{C_\natural(\mathbb{R})}I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\gamma_\natural,\dot{f}^c)\lambda_\natural(c)\,dc,$$

où $\dot{f}^c$ est définie par $\dot{f}^c(\gamma'_\natural)=\dot{f}(c\gamma'_\natural)$. En appliquant 1.2, on a pour $z\in\mathfrak{Z}(G_\natural)$ une égalité

$$(2)\qquad I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma_\natural,zf)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\delta^{\tilde{L}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\gamma_\natural,z_{L_\natural})I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{L}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma_\natural,f).$$

Puisque les opérateurs différentiels s'appliquent ici à des fonctions vérifiant (1), on peut les remplacer par leurs images dans l'espace $Diff^{cst}(\tilde{T}_\natural(\mathbb{R}))_{\lambda_\natural}$. On note $\delta^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma_\natural,z)$ l'image de $\delta^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\gamma_\natural,z)$ dans cet espace. Il résulte formellement de l'égalité (2) que

- $\delta^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma_\natural,z)$ ne dépend que de l'image de z dans $\mathfrak{Z}(G_\natural)_{\lambda_\natural}$;
- $\delta^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma_\natural,z)$ ne dépend que de l'image $\gamma\in\tilde{T}(\mathbb{R})$ de $\gamma_\natural$.

On peut donc noter $\delta^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma,z)$ notre opérateur. Il est défini pour $\gamma\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ et $z\in\mathfrak{Z}(\tilde{G})_{\lambda_\natural}$ et prend ses valeurs dans $Diff^{cst}(\tilde{T}_\natural(\mathbb{R}))_{\lambda_\natural}$. La proposition 1.3 reste vraie pour ces opérateurs. En particulier, la fonction $\gamma\mapsto\delta^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma,z)$ est rationnelle et régulière. Posons

$$Diff^{reg}(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))_{\lambda_\natural}=Pol(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C}))\otimes_{\mathbb{C}}Diff^{cst}(\tilde{T}_\natural(\mathbb{R}))_{\lambda_\natural}.$$

On a alors un élément $\delta^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(z)\in Diff^{reg}(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))_{\lambda_\natural}$ dont la valeur en un point γ est $\delta^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\gamma,z)$.

On a muni $X_*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ d'une forme quadratique définie positive. Fixons un scindage d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_\natural=\mathfrak{c}_\natural\oplus\mathfrak{g}$, dont on déduit une égalité

$$X_*(T_\natural)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}=X_*(C_\natural)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\oplus X_*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}.$$

Munissons le premier facteur d'une forme quadratique définie positive et munissons l'espace total de la forme somme directe des formes sur les deux facteurs. On dira que cettte dernière forme est compatible avec celle sur $X_*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. On définit alors l'opérateur de Casimir $\Omega^{\tilde{G}_\natural}$. Il dépend des constructions ci-dessus, mais la classe $\Omega^{\tilde{G}_\natural}+Sym(\mathfrak{z}(G_\natural))$ n'en dépend pas. Pour tout élément z de cette classe, l'opérateur $\delta_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\gamma,z)$ est donné par la formule de la proposition 1.7 (pourvu que $d\geq 1$).

Considérons d'autres données

$$1\to C_\flat\to G_\flat\to G\to 1 \text{ et } \tilde{G}_\flat\to\tilde{G}$$

ainsi qu'un caractère $\lambda_\flat$ de $C_\flat(\mathbb{R})$ vérifiant les mêmes conditions que précédemment. On introduit les produits fibrés $G_{\natural,\flat}$ et $\tilde{G}_{\natural,\flat}$ de $G_\natural$ et $G_\flat$ au-dessus de G, resp. de $\tilde{G}_\natural$ et $\tilde{G}_\flat$ au-dessus de $\tilde{G}$. On suppose donnés un caractère $\lambda_{\natural,\flat}$ de $G_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$ et une fonction $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}$ sur $\tilde{G}_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$ tels que

- $\lambda_{\natural,\flat}(c_\natural x_\natural,c_\flat x_\flat)=\lambda_\natural(c_\natural)\lambda_\flat(c_\flat)^{-1}\lambda_{\natural,\flat}(x_\natural,x_\flat)$ pour tous $(x_\natural,x_\flat)\in G_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$, $c_\natural\in C_\natural(\mathbb{R})$, $c_\flat\in C_\flat(\mathbb{R})$;

- $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}(x_\natural\gamma_\natural,x_\flat\gamma_\flat)=\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}(\gamma_\natural,\gamma_\flat)\lambda_{\natural,\flat}(x_\natural,x_\flat)$ pour tous $(\gamma_\natural,\gamma_\flat)\in\tilde{G}_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$ et $(x_\natural,x_\flat)\in G_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$.

On définit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc}C_{c,\lambda_\natural}^\infty(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})) & \to & C_{c,\flat}^\infty(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R}))\\ f_\natural & \mapsto & f_\flat\end{array}$$

par $f_\flat(\gamma_\flat)=\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}(\gamma_\natural,\gamma_\flat)f_\natural(\gamma_\natural)$ où $\gamma_\natural$ est n'importe quel élément de $\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})$ tel que $(\gamma_\natural,\gamma_\flat)\in\tilde{G}_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$. On a de même un isomorphisme entre l'espace des fonctions sur $\tilde{T}_\natural(\mathbb{R})$ vérifiant (1) et l'espace de fonctions analogue sur $\tilde{T}_\flat(\mathbb{R})$. De cet isomorphisme se déduit un isomorphisme

$$(3)\qquad Diff^{cst}(\tilde{T}_\natural(\mathbb{R}))_{\lambda_\natural}\simeq Diff^{cst}(\tilde{T}_\flat(\mathbb{R}))_\flat.$$

Au caractère $\lambda_{\natural,\flat}$ est associé un paramètre $\mu(\lambda_{\natural,\flat})\in\mathfrak{t}_{\natural,\flat}^*$, où $T_{\natural,\flat}$ est l'image réciproque de T dans $G_{\natural,\flat}$. On a

$$\mathfrak{t}_{\natural,\flat}^*=(\mathfrak{t}_\natural^*\oplus\mathfrak{t}_\flat^*)/diag_-(\mathfrak{t}^*).$$

La projection de $\mu(\lambda_{\natural,\flat})$ dans $\mathfrak{c}_\natural^*\oplus\mathfrak{c}_\flat^*$ est $(\mu(\lambda_\natural),-\mu(\lambda_\flat))$. Pour $\nu_\natural\in\mathfrak{t}_{\natural,\lambda_\natural}^*$ il existe un unique $\nu_\flat\in\mathfrak{t}_{\flat,\lambda_\flat}^*$ tel que $(-\nu_\natural,\nu_\flat)$ ait pour projection $\mu(\lambda_{\natural,\flat})$ dans $\mathfrak{t}_{\natural,\flat}^*$. L'application $\nu_\natural\mapsto\nu_\flat$ est un isomorphisme de $\mathfrak{t}_{\natural,\lambda_\natural}^*$ sur $\mathfrak{t}_{\flat,\lambda_\flat}^*$. Il est compatible à (3) et au fait que les algèbres d'opérateurs différentiels s'identifient à des algèbres de polynômes sur ces deux espaces affines. Il s'en déduit un isomorphisme

$$(4)\qquad\mathfrak{Z}(G_\natural)_{\lambda_\natural}\simeq\mathfrak{Z}(G_\flat)_{\lambda_\flat}.$$

Il est formel de vérifier que, si $z_\natural$ et $z_\flat$ se correspondent par (4), alors $\delta_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\gamma,z_\natural)$ et $\delta_{\tilde{M}_\flat,\lambda_\flat}^{\tilde{G}_\flat}(\gamma,z_\flat)$ se correspondent par (3). Remarquons que l'image dans $\mathfrak{Z}(G_\natural)_{\lambda_\natural}$ de la classe $\Omega^{\tilde{G}_\natural}+Sym(\mathfrak{z}(G_\natural))$ correspond par (4) à l'image dans $\mathfrak{Z}(G_\flat)_{\lambda_\flat}$ de la classe $\Omega^{\tilde{G}_\flat}+Sym(\mathfrak{z}(G_\flat))$.

Revenons au cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quelconque. Considérons des données endoscopiques $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ et $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. Supposons que M' s'identifie à un Levi de G' et que $\mathbf{M}'$ soit la donnée déduite de $\mathbf{G}'$ via cette identification (cf. [I] 3.4). Supposons aussi que $\mathbf{M}'$ soit relevante (donc aussi $\mathbf{G}'$). Fixons des données auxiliaires $G'_1,\tilde{G}'_1,C_1,\hat{\xi}_1,\Delta_1$ pour $\mathbf{G}'$, qui se restreignent en des données auxiliaires $M'_1,...,\Delta_1$ pour $\mathbf{M}'$. Soient $\gamma_0\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ et $\delta_0\in\tilde{M}'(\mathbb{R})$ correspondant à γ_0. Notons $\tilde{T}'$ le sous-tore tordu maximal de $\tilde{M}'$ tel que $\delta\in\tilde{T}'(\mathbb{R})$. Alors on dispose d'un isomorphisme $\xi:T/(1-\theta)(T)\simeq T'$ dont on déduit un isomorphisme $\tilde{\xi}:\tilde{T}/(1-\theta)(T)\simeq\tilde{T}'$ tel que $\tilde{\xi}(t\gamma_0)=\xi(t)\delta_0$. Modulo ces isomorphismes, les notations T' et $\tilde{T}'$ sont cohérentes avec celles du paragraphe 1.1.

Pour $z'_1\in\mathfrak{Z}(G'_1)_{\lambda_1}$ et $\delta\in\tilde{T}'_{\tilde{G}'-reg}(\mathbb{R})$, on construit comme plus haut l'opérateur $\delta^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}'_1,\lambda_1}(\delta,z'_1)\in Diff^{cst}(\tilde{T}'_1(\mathbb{R}))_{\lambda_1}$. Faisons varier les données auxiliaires. Les algèbres $\mathfrak{Z}(G'_1)_{\lambda_1}$ se recollent en une algèbre que l'on a notée $\mathfrak{Z}(\mathbf{G}')$ en [IV] 2.1. Les espaces affines $\mathfrak{t}'^{*}_{1,\lambda_1}$ se recollent en un espace affine isomorphe à $\mathfrak{t}^*_{\theta,\omega}$, cf. [IV] 2.1. Donc les algèbres $Diff^{cst}(\tilde{T}'_1(\mathbb{R}))_{\lambda_1}$ se recollent en une algèbre isomorphe à $Diff(\tilde{T}(\mathbb{R}))_{\theta,\omega}$. D'après les considérations ci-dessus, pour $z'\in\mathfrak{Z}(\mathbf{G}')$, les opérateurs $\delta^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}'_1,\lambda_1}(\delta,z'_1)$ (où z'_1 correspond à z') se recollent en un opérateur que l'on peut noter $\delta^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\delta,z')\in Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))_{\theta,\omega}$. Les algèbres de fonctions rationnelles et régulières $Pol(\tilde{T}'_{1,\tilde{G}'-reg}(\mathbb{C}))$ se recollent aussi en une sous-algèbre de l'algèbre notée $Pol(\tilde{T}'_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C}))$ en 1.1. Ce n'est pas forcément cette algèbre tout entière car la condition de régularité relative à $\tilde{G}'$ est plus faible que celle relative à $\tilde{G}$. En tout cas, les termes $\delta^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}'_1,\lambda_1}(z'_1)$ se recollent en un élément $\delta^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(z')\in Diff^{reg}(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$.

2 Versions stables et endoscopiques des opérateurs différentiels

2.1 Version stable des opérateurs différentiels

On suppose dans ce paragraphe $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On fixe comme en 1.1 un espace de Levi $\tilde{M}$ et un sous-tore tordu maximal $\tilde{T}$ de $\tilde{M}$, ainsi que des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. On sait définir $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},f)$ pour une distribution stable $\boldsymbol{\delta}$ sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ à support $\tilde{G}$-régulier et pour $f\in C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, cf. [V] 1.4. A un élément $\delta\in\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ est associée une telle distribution $\boldsymbol{\delta}$, à savoir l'intégrale orbitale stable sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ associée à la classe de conjugaison stable de δ. On pose simplement $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\delta,f)=S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},f)$. Ce terme devient ainsi une fonction de δ, qui est clairement C^∞ sur $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$.

Proposition. *Il existe une unique application linéaire*

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{Z}(G) & \to & Diff^{reg}(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))\\ z & \mapsto & S\delta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(z)\end{array}$$

qui vérifie la propriété suivante

- *pour tout* $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, *tout* $\delta \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ *et tout* $z \in \mathfrak{Z}(G)$, *on a l'égalité*

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, zf) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\delta, z_L) S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\delta, f).$$

Preuve. Soit $\delta \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$. On va commencer par définir les opérateurs $S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z)$ et on montrera ensuite qu'ils vérifient les propriétés requises. Soit $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, $s \neq 1$. On fixe des données auxiliaires $G_1'(s), ..., \Delta_1(s)$ pour $\mathbf{G}'(s)$. L'élément z détermine un élément $z^{\mathbf{G}'(s)} \in \mathfrak{Z}(\mathbf{G}'(s))$, cf. [III] 2.1. Fixons un élément $z_1(s) \in \mathfrak{Z}(G_1'(s))$ d'image $z^{\mathbf{G}'(s)}$ dans $\mathfrak{Z}(\mathbf{G}'(s))$. Notons $\tilde{M}_1(s)$ et $\tilde{T}_1(s)$ les images réciproques de $\tilde{M}$ et $\tilde{T}$ dans $\tilde{G}_1'(s)$. Soit $\delta \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ et fixons un élément $\delta_1(s) \in \tilde{T}_1(s)$ se projetant sur δ. Puisque $dim(G_{1,SC}'(s)) < dim(G_{SC})$, on peut supposer la proposition connue pour $\tilde{G}_1'(s)$. On dispose donc d'un opérateur $S\delta_{\tilde{M}_1(s)}^{\tilde{G}_1'(s)}(\delta_1(s), z_1(s))$. Les mêmes formalités que l'on a développées en 1.8 pour les opérateurs $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, z)$ s'appliquent. On est dans le cas particulier simple où la donnée endoscopique de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a}_M)$ est la donnée endoscopique maximale $\mathbf{M} = (M, {}^LM, 1)$. On voit que, quand on fait varier les données auxiliaires, les opérateurs $S\delta_{\tilde{M}_1(s)}^{\tilde{G}_1'(s)}(\delta_1(s), z_1(s))$ se recollent en des opérateurs $S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta, z^{\mathbf{G}'(s)}) \in Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))$. On dispose aussi de l'opérateur $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z)$ de 1.2. On définit alors

$$(1) \qquad S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z) = \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta, z^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Par récurrence, pour $s \neq 1$, l'application $\delta \mapsto S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta, z^{\mathbf{G}'(s)})$ est la restriction d'une fonction rationnelle et régulière sur $\tilde{T}_{\tilde{G}'(s)-reg}(\mathbb{C})$, a fortiori sur $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. Il en est de même de $\delta \mapsto \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z)$ d'après la proposition 1.3. Donc $\delta \mapsto S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z)$ est la restriction d'une fonction rationnelle et régulière sur $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$.

Posons

$$\Lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, f) = \sum_{\gamma\in\dot{\mathcal{X}}(\delta)} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, f),$$

où $\dot{\mathcal{X}}(\delta)$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $M(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de δ. Par définition

$$(2) \qquad S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, zf) = \Lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, zf) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta, (zf)^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Cette formule requiert une explication. On a défini l'espace de distributions stables $D_{g\acute{e}om}^{st}(\mathbf{M})$ par recollement des espaces $D_{g\acute{e}om,\lambda_1}^{st}(\tilde{M}_1(\mathbb{R}))$ pour les différentes données auxiliaires M_1, $\tilde{M}_1$ etc... Mais pour notre donnée $\mathbf{M}$, on peut prendre pour données auxiliaires les données triviales $M_1 = M$, $\tilde{M}_1 = \tilde{M}$ etc... L'élément δ ayant déjà été identifié à une distribution stable sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$, il s'identifie aussi à un élément de $D_{g\acute{e}om}^{st}(\mathbf{M})$. Cela donne un sens à la formule (2) ci-dessus.

Etudions $\Lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, zf)$. Fixons δ. Pour tout $\gamma \in \dot{\mathcal{X}}(\delta)$, il existe un tore tordu $\tilde{T}_\gamma$ et un élément $x_\gamma \in M$ tel que $ad_{x_\gamma}(\tilde{T}) = \tilde{T}_\gamma$, $ad_{x_\gamma}(\delta) = \gamma$ et l'isomorphisme $ad_{x_\gamma} : \tilde{T} \to \tilde{T}_\gamma$ soit défini sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\delta' \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$, on peut supposer

$$\dot{\mathcal{X}}(\delta') = \{ad_{x_\gamma}(\delta'); \gamma \in \dot{\mathcal{X}}(\delta)\}.$$

Alors
$$\Lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta',f)=\sum_{\gamma\in\dot{\mathcal{X}}(\delta)}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(ad_{x_\gamma}(\delta'),f).$$
Remplaçons z par zf. En appliquant 1.2, on obtient
$$\Lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta,zf)=\sum_{\gamma\in\dot{\mathcal{X}}(\delta)}\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(ad_{x_\gamma}(\delta),z_L)I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(ad_{x_\gamma}(\delta),f),$$
où le terme $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(ad_{x_\gamma}(\delta),z_L)I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(ad_{x_\gamma}(\delta),f)$ est ici la valeur en $\gamma'=ad_{x_\gamma}(\delta)$ de la fonction $\gamma'\mapsto\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma',z_L)I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma',f)$ définie sur $\tilde{T}_\gamma(\mathbb{R})$. La propriété 1.6(4) implique qu'il revient au même d'évaluer d'appliquer l'opérateur $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\delta',z_L)$ à la fonction $\delta'\mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(ad_{x_\gamma}(\delta'),f)$, puis dévaluer la fonction obtenue en δ. On obtient alors l'égalité
$$(3)\qquad\Lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta,zf)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\delta,z_L)\Lambda_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\delta,f).$$
Fixons $s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_\mathbb{R}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_\mathbb{R}}$, $s\neq1$. Comme plus haut, on fixe des données auxiliaires $G_1'(s),...,\Delta_1(s)$ pour $\mathbf{G}'(s)$ ainsi que des éléments $z_1(s)\in\mathfrak{Z}(G_1'(s))$ d'image $z^{\mathbf{G}'(s)}$ dans $\mathfrak{Z}(\mathbf{G}'(s))$ et $\delta_1(s)\in\tilde{T}_1(s)$ se projetant sur δ. En tant qu'élément de $D_{géom}^{st}(\mathbf{M})$, δ s'identifie à un certain multiple de la distribution stable associée à $\delta_1(s)$, disons que c'est $c_1(s)$ fois cette distribution. Identifions aussi $f^{\mathbf{G}'}$ à un élément $f^{\tilde{G}_1'(s)}\in C_{c,\lambda_1(s)}^\infty(\tilde{G}_1'(s;\mathbb{R}))$. Alors
$$S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta,(zf)^{\mathbf{G}'(s)})=c_1(s)S_{\tilde{M}_1(s)}^{\tilde{G}_1'(s)}(\delta_1(s),z_1(s)f^{\tilde{G}_1'(s)}).$$
Puisque $dim(G_{1,SC}'(s))<dim(G_{SC})$, on peut appliquer la proposition par récurrence. On obtient l'égalité
$$S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta,(zf)^{\mathbf{G}'(s)})=c_1(s)\sum_{\tilde{L}_{1,s}'\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(s)}(\tilde{M})}S\delta_{\tilde{M}_1(s)}^{\tilde{L}_{1,s}'}(\delta_1(s),z_1(s)_{L_{1,s}'})S_{\tilde{L}_{1,s}'}^{\tilde{G}_1'(s)}(\delta_1(s),f^{\tilde{G}_1'(s)}).$$
Comme on l'a dit plus haut, quand on fait varier les données auxiliaires, les opérateurs $S\delta_{\tilde{M}_1(s)}^{\tilde{G}_1'(s)}(\delta_1(s),z_1(s))$ se recollent en des opérateurs $S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta,z^{\mathbf{G}'(s)})\in Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))$. L'égalité ci-dessus se récrit
$$(4)\qquad S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta,(zf)^{\mathbf{G}'(s)})=\sum_{\tilde{L}_s'\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(s)}(\tilde{M})}S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}'(s)}(\delta,(z^{\mathbf{G}'(s)})_{\mathbf{L}'(s)})S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta,f^{\mathbf{G}'(s)}).$$
On sait que $\tilde{L}_s'$ détermine un espace de Levi $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$ et une donnée endoscopique de $(L,\tilde{L})$. On a noté $\mathbf{L}'(s)$ cette donnée endoscopique.

Maintenant, la preuve reprend celle de la proposition 2.5 de [II]. On insère la formule (4) dans la somme en s de (2). Chaque couple $(s,\tilde{L}_s')$ détermine un espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ et, comme on vient de le dire, une donnée endoscopique $\mathbf{L}'(s)$ de $\tilde{L}$, dont la classe ne dépend que de l'image de s dans $Z(\hat{M})^{\Gamma_\mathbb{R}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_\mathbb{R}}$. Le terme $(z^{\mathbf{G}'(s)})_{\mathbf{L}_s'})$ est égal à $(z_L)^{\mathbf{L}'(s)}$. La somme en s de (2) se transforme en
$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_\mathbb{R}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_\mathbb{R}},\mathbf{L}'(s)\text{ elliptique}}\sum_{t\in sZ(\hat{L})^{\Gamma_\mathbb{R}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_\mathbb{R}},t\neq1}i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(t))$$

$$S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}'(s)}(\delta,(z_L)^{\mathbf{L}'(s)})S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(t)}(\delta,f^{\mathbf{G}'(t)}).$$

Remarquons que la somme en $\tilde{L}$ et s est en fait limitée à $(\tilde{L},s)\neq(\tilde{G},1)$ puisque pour ce terme exceptionnel, la somme en t est vide. L'opérateur $S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\delta,z^{\mathbf{G}})$ correspondant au couple $(\tilde{G},1)$ n'intervient donc pas (ce qui est heureux puisqu'on ne l'a pas encore défini). Mais, pour la commodité du calcul qui suit, il convient de poser formellement $S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\delta,z^{\mathbf{G}})=S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta,z)$. Pour s,t intervenant ci-dessus, on vérifie l'égalité

$$i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(t))=i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(s))i_{\tilde{L}'(s)}(\tilde{G},\tilde{G}'(t)).$$

De plus, la non-nullité du membre de droite ci-dessus implique l'ellipticité de $\mathbf{L}'(s)$. La somme ci-dessus devient

$$(5)\qquad \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(s))X(\tilde{L},s),$$

où $X(\tilde{L},s)$ s'obtient en appliquant l'opérateur différentiel $S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}'(s)}(\delta,(z_L)^{\mathbf{L}'(s)})$ à la fonction de δ

$$(6)\qquad \sum_{t\in sZ(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}^{\Gamma_{\mathbb{R}}},t\neq 1}i_{\tilde{L}'(s)}(\tilde{G},\tilde{G}'(t))S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(t)}(\delta,f^{\mathbf{G}'(t)}).$$

Supposons d'abord $\tilde{L}\neq\tilde{M}$ et $s\neq 1$. Dans la formule (6), la restriction $t\neq 1$ est superflue et (6) n'est autre que $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(s),\delta,f)$. Le transfert de δ vu comme une distribution stable n'est autre que la somme des intégrales orbitales sur les éléments de $\dot{\mathcal{X}}(\delta)$. On a prouvé en [V] proposition 1.13 l'égalité $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(s),\delta,f)=\Lambda_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\delta,f)$. Supposons maintenant $\tilde{L}\neq\tilde{M}$ et $s=1$. Alors (6) est égal à $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L},\delta,f)-S_{\tilde{L}}(\delta,f)$. Ou encore, par le même argument, à $\Lambda_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\delta,f)-S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\delta,f)$. Si enfin $\tilde{L}=\tilde{M}$, la somme (6) est encore égale à $\Lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta,f)-S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta,f)$: c'est la formule (1) pour $z=1$. Remarquons que la contribution des termes pour lesquels $s=1$ se simplifie : on a simplement $i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(1))=i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L})=1$ et $S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}'(1)}(\delta,(z_L)^{\mathbf{L}'(1)})=S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\delta,z_L)$. On transforme (5) conformément à ces calculs. On obtient

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(s))S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}'(s)}(\delta,(z_L)^{\mathbf{L}'(s)})\Lambda_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\delta,f)$$
$$-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\delta,z_L)S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\delta,f).$$

En utilisant la formule (1) en y remplaçant $\tilde{G}$ par $\tilde{L}$, la première somme ci-dessus devient simplement

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\delta,z_L)\Lambda_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\delta,f),$$

ce qui est le membre de droite de (3). En appliquant (3), on obtient que (5) est égal à

$$\Lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta,zf)-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\delta,z_L)S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\delta,f).$$

On se rappelle que (5) est la somme en s intervenant dans (2) et que, dans cette formule, elle est affectée du signe $-$. En appliquant la formule ci-dessus, la formule (1) devient celle de l'énoncé. $\square$

2.2 Propriétés des versions stables des opérateurs différentiels

On conserve la situation du paragraphe précédent. La formule de définition (1) de ce paragraphe et une récurrence immédiate montrent que les opérateurs $S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z)$ vérifient une proposition analogue à 1.3.

On a

(1) si $\tilde{M} = \tilde{G}$, alors $S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z) = \partial_{z_T}$.

En effet, la définition 2.1(1) donne simplement $S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z) = \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, z)$, d'où le résultat d'après 1.2(2).

Comme en 1.6, introduisons l'opérateur de Casimir Ω. Posons $d = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}} = a_M - a_G$ et supposons $d \geq 1$. Supposons d'abord $d = 1$. Remarquons que, dans notre situation à torsion intérieure, la définition de la fonction $C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ de 1.7 se simplifie. On a simplement

$$(2) \qquad C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta) = -\sum_{\alpha \in \Sigma^G(T) - \Sigma^M(T)} |\alpha_{|\mathcal{A}_M}|(1 - \alpha(\delta))^{-1}(1 - \alpha(\delta)^{-1})^{-1}.$$

On a noté simplement $\alpha(\delta)$ le terme $\alpha(t_\delta)$, où t_δ est défini en 1.4. Une définition équivalente dans notre situation à torsion intérieure est d'envoyer δ en un élément $\delta_{ad} \in T_{ad} \subset G_{AD}$ et de poser $\alpha(\delta) = \alpha(\delta_{ad})$. Introduisons comme toujours une paire de Borel épinglée de $\hat{G}$ pour laquelle on réalise $\hat{M}$ comme un Levi standard. On note $\hat{T}$ le tore de cette paire. Il y a une bijection $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ de $\Sigma^G(T)$ sur $\Sigma^{\hat{G}}(\hat{T})$, qui se restreint en une bijection de $\Sigma^G(T) - \Sigma^M(T)$ sur $\Sigma^{\hat{G}}(\hat{T}) - \Sigma^{\hat{M}}(\hat{T})$. Puisque $d = 1$, les restrictions à $Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ d'éléments de $\Sigma^{\hat{G}}(\hat{T}) - \Sigma^{\hat{M}}(\hat{T})$ sont toutes proportionnelles. Précisément, pour $\beta \in \Sigma^{\hat{G}}(\hat{T}) - \Sigma^{\hat{M}}(\hat{T})$, notons β_* sa restriction à $Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. On peut fixer $\beta_1 \in \Sigma^{\hat{G}}(\hat{T}) - \Sigma^{\hat{M}}(\hat{T})$ et un entier $N \geq 1$ tels que l'ensemble des β_* pour $\beta \in \Sigma^{\hat{G}}(\hat{T}) - \Sigma^{\hat{M}}(\hat{T})$ soit exactement l'ensemble $\{\pm k\beta_{1,*}; k = 1, ..., N\}$. Pour tout $\beta \in \Sigma^{\hat{G}}(\hat{T}) - \Sigma^{\hat{M}}(\hat{T})$, on note $k^{\hat{G}}(\beta) \in \mathbb{N}$ l'entier tel que $\beta_* = \pm k^{\hat{G}}(\beta)\beta_{1,*}$. On définit une fonction $SC_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ sur $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}$ par

$$(3) \qquad SC_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta) = -\sum_{\alpha \in \Sigma^G(T) - \Sigma^M(T)} k^{\hat{G}}(\hat{\alpha})^{-1}|\alpha_{|\mathcal{A}_M}|(1 - \alpha(\delta))^{-1}(1 - \alpha(\delta)^{-1})^{-1}.$$

Si maintenant $d \geq 2$, on pose $SC_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} = 0$.

Proposition. *On suppose $d \geq 1$. Alors, pour tout $\delta \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$, l'opérateur $S\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, \Omega)$ est la multiplication par $SC_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta)$.*

Preuve. On va plutôt prouver que cela est vrai quand on remplace Ω par n'importe quel élément $\underline{\Omega} \in \Omega + Sym(\mathfrak{z}(G))$. Utilisons la définition 2.1(1) pour $z = \Omega$. Le premier terme $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, \underline{\Omega})$ est la multiplication par $C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta)$, cf. la remarque de 1.7. Soit $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ avec $s \neq 1$. On introduit des données auxiliaires $G'_1(s), ..., \Delta_1(s)$. En notant $\tilde{T}_1(s)$ l'image réciproque de $\tilde{T} \subset \tilde{M} \subset \tilde{G}'(s)$ dans $\tilde{G}'_1(s)$, on fixe une forme quadratique définie positive sur $X_*(T_1(s)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ compatible avec celle déjà fixée sur $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, au sens expliqué en 1.8. On introduit l'opérateur de Casimir $\Omega^{G'_1(s)}$ relatif à cette forme. Il n'est pas vrai en général que l'image de $\Omega^{G'_1(s)}$ dans $\mathfrak{Z}(\mathbf{G}'(s))$ soit égale à celle de $\Omega = \Omega^G$. Mais on vérifie facilement que l'image de l'espace affine $\Omega^{G'_1(s)} + Sym(\mathfrak{z}(G'_1(s)))$ contient celle de l'espace affine $\Omega^G + Sym(\mathfrak{z}(G))$. On peut donc choisir $\underline{\Omega}^{G'_1(s)} \in \Omega^{G'_1(s)} + Sym(\mathfrak{z}(G'_1(s)))$ dont l'image dans $\mathfrak{Z}(\mathbf{G}'(s))$ soit égale à celle de

$\underline{\Omega}$. Pour $\delta_1 \in \tilde{T}_1(s;\mathbb{R})$ au-dessus de δ, l'opérateur $\delta_{\tilde{M}_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(\delta_1, \underline{\Omega}^{G'_1(s)})$ est la multiplication par $SC_{\tilde{M}_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(\delta_1)$. Ce terme coïncide avec $SC_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\delta)$. On obtient que $S\delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta, \underline{\Omega}^{\mathbf{G}'(s)})$ est la multiplication par $SC_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\delta)$. En revenant à la définition 2.1(1), on voit que, pour prouver la proposition, il suffit de prouver l'égalité

$$SC_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta) = C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) SC_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\delta),$$

ou encore

$$(4) \qquad C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta) = \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) SC_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\delta).$$

Cela est clair si $d \geq 2$: tout est nul. Supposons $d = 1$. Pour tout s, l'ensemble $\Sigma^{G'(s)}$ est un sous-ensemble de Σ^G. Tous les termes sont donc des sommes sur l'ensemble $\Sigma^G(T) - \Sigma^M(T)$. On peut fixer un élément α de cet ensemble et montrer que le terme indexé par α dans le membre de gauche de (4) est égal à la somme des termes indexés par α dans le membre de droite. Dans chacun de ces termes apparaît un facteur commun $-|\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}|(1-\alpha(\delta))^{-1}(1-\alpha(\delta)^{-1})^{-1}$. On peut se limiter aux autres termes. D'après les formules (2) et (3), l'égalité restant à prouver se réduit à

$$(5) \qquad 1 = \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, \alpha \in \Sigma^{G'(s)}(T)} k^{\hat{G}'(s)}(\hat{\alpha})^{-1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)).$$

Fixons $\beta_1 \in \Sigma^{\hat{G}} - \Sigma^{\hat{M}}$ dont la restriction $\beta_{1,*}$ à $Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ soit indivisible. Quitte à changer β_1 en $-\beta_1$, on peut supposer que $\hat{\alpha}_* = k^{\hat{G}}(\hat{\alpha})\beta_{1,*}$. L'application $s \mapsto \beta_1(s)$ identifie $Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ à $\mathbb{C}^\times$. Pour $\alpha' \in \Sigma^G(T) - \Sigma^M(T)$, on a $\alpha' \in \Sigma^{G'(s)}(T)$ si et seulement si $\beta_1(s)^{k^{\hat{G}}(\alpha')} = 1$. Il en résulte d'abord que la somme sur s de l'expression (5) s'identifie à une somme sur $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_k$, où $k = k^{\hat{G}}(\alpha)$ et $\boldsymbol{\zeta}_k$ est le groupe des racines k-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}^\times$. Ensuite, soit $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_k$ et soit s tel que $\beta_1(s) = \zeta$. Notons $l(\zeta)$ l'ordre de ζ. Il divise k. Le calcul ci-dessus montre que $\Sigma^{G(s)}(T) - \Sigma^M(T)$ est formé des $\alpha' \in \Sigma^G(T) - \Sigma^M(T)$ tels que $\hat{\alpha}'_* \in l(\zeta)\mathbb{Z}\beta_{1,*}$. Cela entraîne que $k^{\hat{G}'(s)}(\alpha) = k/l(\zeta)$ et que $(Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \cap Z(\hat{G}'(s)))/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ s'identifie au groupe des $\zeta' \in \mathbb{C}^\times$ tels que $(\zeta')^{l(\zeta)} = 1$. Ce groupe a $l(\zeta)$ élements. Par construction de $G'(s)$, les actions galoisiennes sur $Z(\hat{G}'(s))$ et sur $Z(\hat{M})$ s'identifient sur $Z(\hat{G}'(s)) \cap Z(\hat{M})$. Le groupe précédent est donc égal à $Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. En se rappelant la définition de $i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s))$ ([II] 1.10), on obtient $i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) = l(\zeta)^{-1}$. L'égalité (5) à prouver se récrit

$$1 = \sum_{\zeta \in \boldsymbol{\zeta}_k} \frac{l(\zeta)}{k} l(\zeta)^{-1}.$$

Cette égalité est évidente. $\square$

2.3 Variante endoscopique des opérateurs différentiels

Au lieu d'un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, on considère maintenant un triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ comme en [I] 1.11. On fixe un K-espace de Levi minimal $K\tilde{M}_0$. Soit $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$, cf. [I] 3.5. Au lieu d'un tore tordu $\tilde{T}$, on fixe des familles finies $(\tilde{T}_i)_{i \in I}$ et $(\tilde{\iota}_{i,j})_{i,j \in I}$ vérifiant les conditions suivantes (on renvoie à [I] 1.11 et [I] 3.5 pour les notations). On peut supposer que $\tilde{\phi}_{p,q}(\tilde{M}_q) = \tilde{M}_p$ pour tous $p, q \in \Pi^M$. Pour tout $i \in I$, il existe $p(i) \in \Pi^M$ tel que $\tilde{T}_i$ soit un sous-tore tordu maximal de $\tilde{M}_{p(i)}$. Pour deux éléments $i, j \in I$, $\tilde{\iota}_{i,j}$ est un isomorphisme défini sur $\mathbb{R}$ de $\tilde{T}_j$ sur $\tilde{T}_i$. On suppose qu'il existe $x_{i,j} \in M_{p(i)}$ tel que $\tilde{\iota}_{i,j}$ soit la restriction de $ad_{x_{i,j}} \circ \tilde{\phi}_{p(i),p(j)}$. On note $\iota_{i,j} : T_j \to T_i$ la restriction de $ad_{x_{i,j}} \circ \phi_{p(i),p(j)}$, qui est un isomorphisme défini sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\tilde{\iota}_{i,j} \circ \tilde{\iota}_{j,k} = \tilde{\iota}_{i,k}$ pour tous $i, j, k \in I$. On suppose enfin que, pour tout $i \in I$ et tout $\gamma \in \tilde{T}_i(\mathbb{R})$ qui est fortement régulier dans $\tilde{M}_{p(i)}$, l'ensemble $\{\tilde{\iota}_{j,i}(\gamma); j \in I\}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de γ dans $K\tilde{M}(\mathbb{R})$.

Remarque. Pour tout $p \in \Pi^M$ et tout sous-tore tordu maximal $\tilde{T}$ de $\tilde{M}_p$, on peut compléter $\tilde{T}$ en une famille $(\tilde{T}_i)_{i\in I}$ et définir une famille d'isomorphismes $(\tilde{\iota}_{i,j})_{i,j\in I}$ de sorte que les conditions ci-dessus soient vérifiées.

On note $\tilde{T}$ l'ensemble des familles $\gamma_I = (\gamma_i)_{i\in I}$ telles que, pour tout $i \in I$, $\gamma_i \in \tilde{T}_i$ et, pour tous $i, j \in I$, on ait $\gamma_i = \tilde{\iota}_{i,j}(\gamma_j)$. On définit le sous-ensemble évident $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}$. Pour $i \in I$, on a introduit en 1.1 divers espaces de fonctions ou opérateurs différentiels $C_c^\infty(\tilde{T}_{i,\tilde{G}_i-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, $Diff^{cst}(\tilde{T}_i(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ etc... Pour $i, j \in I$, les isomorphismes $\tilde{\iota}_{i,j}$ identifient les espaces indexés par i à ceux indexés par j. On note simplement ces espaces $C_c^\infty(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ etc... Pour chacun de ces espaces, disons pour l'espace E, on note $Mat_I(E)$ l'espace des matrices carrées $I \times I$ à coefficients dans E.

De nouveau, on fixe des mesures sur tous les groupes intervenant. On suppose que les mesures sur les $G_p(\mathbb{R})$ sont cohérentes en ce sens que, pour $p, q \in \Pi$, les mesures sur $G_p(\mathbb{R})$ et $G_q(\mathbb{R})$ se correspondent via le torseur intérieur $\phi_{p,q}$. De même pour les mesures sur les $M_p(\mathbb{R})$. On suppose aussi que, pour $i, j \in I$, l'isomorphisme $\iota_{i,j}$ transporte la mesure sur $T_j(\mathbb{R})$ en celle sur $T_i(\mathbb{R})$.

Soient $\gamma_I = (\gamma_i)_{i\in I} \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ et $f \in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Pour $i \in I$, on définit l'intégrale orbitale pondérée ω-équivariante endoscopique $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_i, \omega, f)$ comme en [V] 1.8.

A partir de maintenant, on va utiliser les hypothèses de récurrence telles qu'on les a posées en [V] 1.1.

Proposition. *Il existe une unique application linéaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}(G) & \to & Mat_I(Diff^{reg}(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}) \\ z & \mapsto & \delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(z) = (\delta_{K\tilde{M};i,j}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(z))_{i,j\in I} \end{array}$$

qui vérifie la propriétés suivante :

- pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, tout $\gamma_I \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$, tout $z \in \mathfrak{Z}(G)$ et tout $i \in I$, on a l'égalité

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_i, \omega, zf) = \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{M})} \sum_{j\in I} \delta_{K\tilde{M};i,j}^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\gamma_j, z_L) I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_j, \omega, f).$$

Preuve. On peut s'autoriser à conjuguer chaque $\tilde{T}_i$ par un élément de $M_{p(i)}(\mathbb{R})$. On peut donc supposer qu'il existe un K-espace de Levi $K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ contenu dans $K\tilde{M}$ tel que, pour tout i, $\tilde{T}_i$ soit un sous-tore tordu maximal elliptique de $\tilde{R}_{p(i)}$. Pour simplifier, on note simplement $\tilde{R}_i = \tilde{R}_{p(i)}$, $\tilde{M}_i = \tilde{M}_{p(i)}$, $\tilde{G}_i = \tilde{G}_{p(i)}$. En appliquant la description de [I] 4.9, on voit que l'on peut fixer des familles $(\mathbf{R}'_i)_{i\in I}$ et $(\tilde{T}'_i)_{i\in I}$ vérifiant les conditions qui suivent. Pour tout $i \in I$, $\mathbf{R}'_i$ est une donnée endoscopique elliptique et relevante de

$(KR, K\tilde{R}, \mathbf{a}_R)$ et $\tilde{T}'_i$ est un sous-tore tordu maximal de $\tilde{R}'_i$. Pour tous $i,j \in I$, il y a un homomorphisme $\xi_{i,j} : T_j \to T'_i$ et une application compatible $\tilde{\xi}_{i,j} : \tilde{T}_j \to \tilde{T}'_i$, tous deux définis sur $\mathbb{R}$, qui se quotientent en des isomorphismes $T_j/(1-\theta)(T_j) \simeq T'_i$ et $\tilde{T}_j/(1-\theta)(T_j) \simeq \tilde{T}'_i$ (on note uniformément θ les automorphismes bien qu'ils dépendent évidemment du tore en question). On a $\tilde{\xi}_{i,j} \circ \tilde{\iota}_{j,k} = \tilde{\xi}_{i,k}$ pour tous $i,j,k \in I$. Pour un élément $\gamma_j \in \tilde{T}_j(\mathbb{R})$ fortement régulier dans $\tilde{R}_i$, la classe de conjugaison stable de $\tilde{\xi}_{i,j}(\gamma_j)$ dans $\tilde{R}'_i(\mathbb{R})$ correspond à celle γ_j dans $\tilde{R}_j(\mathbb{R})$. Notons $\tilde{T}'$ l'ensemble des $\delta_I = (\delta_i)_{i\in I}$ tels que $\delta_i \in \tilde{T}'_i$ pour tout i et il existe $\gamma_I \in \tilde{T}$ de sorte que $\delta_i = \tilde{\xi}_{i,j}(\gamma_j)$ pour tous $i,j \in I$. Des applications $\tilde{\xi}_{i,j}$ se déduit une application surjective $\tilde{\xi} : \tilde{T} \to \tilde{T}'$. Pour tout $i \in I$, fixons des données auxiliaires $R'_{i,1}, ..., \Delta_{i,1}$ pour $\mathbf{R}'_i$. Notons $\tilde{T}'_1$ l'ensemble des $\delta_{I,1} = (\delta_{i,1})_{i\in I}$ où $\delta_{i,1} \in \tilde{T}'_{i,1}$ pour tout i, tels que, en notant δ_i l'image de $\delta_{i,1}$ dans $\tilde{T}'_i$, la famille $\delta_I = (\delta_i)_{i\in I}$ appartienne à $\tilde{T}'$. Soient $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I} \in C_c^\infty(K\tilde{R}(\mathbb{R}))$, $\gamma_I = (\gamma_i)_{i\in I} \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ et $\delta_{I,1} = (\delta_{i,1})_{i\in I} \in \tilde{T}'_1(\mathbb{R})$ un élément au-dessus de $\tilde{\xi}(\gamma_I)$. On a pour tout $i \in I$ les formules d'inversion

$$(1) \qquad S^{\tilde{R}'_{i,1}}(\delta_{i,1}, \varphi^{\tilde{R}'_{i,1}}) = c\sum_{j\in I} \Delta_{i,1}(\delta_{i,1}, \gamma_j) I^{\tilde{R}_j}(\gamma_j, \omega, \varphi_j),$$

$$(2) \qquad I^{\tilde{R}_i}(\gamma_i, \omega, \varphi_i) = c^{-1}|I|^{-1}\sum_{j\in I} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_i)^{-1} S^{\tilde{R}'_{j,1}}(\delta_{j,1}, \varphi^{\tilde{R}'_{j,1}}),$$

où c est une constante non nulle. Pour tout i, réalisons la donnée endoscopique $\mathbf{R}'_i$ de $K\tilde{R}$ comme une "donnée de Levi" d'une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'_i = (M'_i, \mathcal{M}'_i, \tilde{\zeta}_i)$ de $K\tilde{M}$ et supposons que les données auxiliaires ci-dessus sont les restrictions de données auxiliaires pour les $\mathbf{M}'_i$. Alors, par simple induction, on peut remplacer les R par des M dans les formules d'inversion ci-dessus. Désormais, on oublie le K-espace $K\tilde{R}$ qui ne nous a servi qu'à appliquer les considérations de [I] 4.9.

Soient $\gamma_I = (\gamma_i)_{i\in I} \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ et $\delta_{I,1} = (\delta_{i,1})_{i\in I} \in \tilde{T}'_1(\mathbb{R})$ un élément au-dessus de $\tilde{\xi}(\gamma_I)$. Pour tout $i \in I$, on peut identifier comme en 2.1 l'élement $\delta_{i,1}$ à un élément de $D^{st}_{géom,\lambda_{i,1}}(\tilde{M}'_{i,1}(\mathbb{R}))$, à savoir l'intégrale orbitale stable associée à $\delta_{i,1}$. On l'identifie ensuite à un élément de $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}'_i)$. La formule (2) ci-dessus (avec R remplacé par M) signifie que l'intégrale orbitale dans $\tilde{M}_i$ associée à γ_i est égale à $c^{-1}|I|^{-1}\sum_{j\in I} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_i)^{-1} transfert(\delta_{j,1})$. Par définition, on a alors

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\gamma_i, \omega, f) = c^{-1}|I|^{-1}\sum_{j\in I} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_i)^{-1} I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}'_j, \delta_{j,1}, f^{\mathbf{M}'_j}).$$

$$= c^{-1}|I|^{-1}\sum_{j\in I} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_i)^{-1} \sum_{\tilde{s}_j \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G}, \tilde{G}'_j(\tilde{s}_j)) S^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)}_{\mathbf{M}'_j}(\delta_{j,1}, f^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)}).$$

Remplaçons f par zf et appliquons la proposition 2.1 à chaque terme $S^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)}_{\mathbf{M}'_j}(\delta_{j,1}, (zf)^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)})$. Ce terme se développe en une somme sur des espaces de Levi $\tilde{L}'_{j,\tilde{s}_j} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}'_j}(\tilde{s}_j)(\tilde{M}'_j)$. Comme toujours, aux données j, $\tilde{s}_j$ et $\tilde{L}'_{j,\tilde{s}_j}$ est associé un K-espace de Levi $K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})$. Le Levi $\tilde{L}'_{j,\tilde{s}_j}$ s'identifie à l'espace $\tilde{L}'_j(\tilde{s}_j)$ de la donnée endoscopique $\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)$ de $(KL, K\tilde{L}, \mathbf{a}_L)$ déduite de $\mathbf{M}'_j$ et $\tilde{s}_j$. En regroupant les termes selon le K-espace $K\tilde{L}$, on obtient

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\gamma_i, \omega, zf) = \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{M})} c^{-1}|I|^{-1}\sum_{j\in I} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_i)^{-1} \sum_{\tilde{s}_j \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}, \mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j) \text{ elliptique}}$$

$$i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'_j(\tilde{s}_j))S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j,(z_L)^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)})S_{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j}^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_{j,1},f^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)}).$$

On a passé quelques considérations formelles similaires à celles développées en 1.8 et qu'on laisse au lecteur. On décompose la somme en $\tilde{s}_j$ en une double somme sur $\tilde{s}_j \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$ tel que $\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)$ soit elliptique et $\tilde{t}_j \in \tilde{s}_j Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. Comme en [II] 2.6, on a l'égalité

$$i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'_j(\tilde{t}_j))=i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{L},\tilde{L}'_j(\tilde{s}_j))i_{\tilde{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\tilde{G},\tilde{G}'_j(\tilde{t}_j))$$

et la non-nullité de ce dernier terme implique l'ellipticité de $\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)$. D'où

(3) $$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_i,\omega,zf)=\sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{M})}c^{-1}|I|^{-1}\sum_{j\in I}\Delta_{j,1}(\delta_{j,1},\gamma_i)^{-1}\sum_{\tilde{s}_j\in\tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{L},\tilde{L}'_j(\tilde{s}_j))$$

$$\sum_{\tilde{t}_j\in\tilde{s}_j Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}i_{\tilde{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\tilde{G},\tilde{G}'_j(\tilde{t}_j))S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j,(z_L)^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)})S_{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}^{\mathbf{G}'_j(\tilde{t}_j)}(\delta_{j,1},f^{\mathbf{G}'_j(\tilde{t}_j)}).$$

Pour exploiter cette formule, on a besoin de quelques préliminaires. On a

(4) pour $i,j,k\in I$, le terme $\Delta_{j,1}(\delta_{j,1},\gamma_i)^{-1}\Delta_{j,1}(\delta_{j,1},\gamma_k)$ ne dépend ni de γ_I, ni de $\delta_{j,1}$ mais seulement de i,j,k.

Remarquons que

$$\Delta_{j,1}(\delta_{j,1},\gamma_i)^{-1}\Delta_{j,1}(\delta_{j,1},\gamma_k)=\boldsymbol{\Delta}_{j,1}(\delta_{j,1},\gamma_k;\delta_{j,1},\gamma_i).$$

Fixons $x_k\in M_k$ tel que $\tilde{\iota}_{i,k}=\phi_{i,k}\circ ad(x_k)$. Décomposons x_k en $x_k=\pi(x_{k,sc})z_k$, où $z_k\in Z(M_k)$ et $x_{k,sc}\in M_{k,SC}$. On note $T_{k,sc}$ l'image réciproque de T_k dans $M_{k,SC}$ et $\hat{T}_{k,ad}$ l'image de $\hat{T}_k$ dans $\hat{M}_{AD}$. Pour $\sigma\in\Gamma_{\mathbb{R}}$, posons $V_{k,i}(\sigma)=x_{k,sc}^{-1}\nabla_{k,i}(\sigma)\sigma(x_{k,sc})$, cf. [I] 1.11 pour la définition de $\nabla_{k,i}$. On vérifie que $V_{k,i}$ est un cocycle à valeurs dans $T_{k,sc}$. Le couple $(V_{k,i},(1-\theta)(z_k)^{-1})$ définit un élément de $H^{1,0}(\Gamma_{\mathbb{R}};T_{k,sc}\overset{1-\theta}{\to}(1-\theta)(T_k))$. Le cocycle t_{T_k} défini en [I] 2.2 se pousse en un cocycle de $W_{\mathbb{R}}$ dans $\hat{T}_k/\hat{T}_k^{\hat{\theta},0}$. Rappelons que $\mathbf{M}'_k=(M'_k,\mathcal{M}'_k,\tilde{\zeta}_k)$ et que l'on suppose implicitement que $\tilde{\zeta}_k=\zeta_k\hat{\theta}$, avec $\zeta_k\in\hat{T}_k$. Le couple (t_{T_k},ζ_k) définit un élément de $H^{1,0}(W_{\mathbb{R}};\hat{T}_k/\hat{T}_k^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}_{k,ad})$. En dévissant les définitions de [I] 2.2, on vérifie que

$$\boldsymbol{\Delta}_{j,1}(\delta_{j,1},\gamma_k;\delta_{j,1},\gamma_i)=<(V_{k,i},(1-\theta)(z_k)^{-1}),(t_{T_k},\zeta_k)>,$$

le produit étant celui sur

$$H^{1,0}(\Gamma_{\mathbb{R}};T_{k,sc}\overset{1-\theta}{\to}(1-\theta)(T_k))\times H^{1,0}(W_{\mathbb{R}};\hat{T}_k/\hat{T}_k^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}_{k,ad}).$$

Cela prouve (4).

Pour $j,k\in I$, l'algèbre $Diff^{cst}(\tilde{T}'_{j,1}(\mathbb{R}))_{\lambda_{j,1}}$ s'identifie à $Diff(\tilde{T}_k(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, cf. 1.8. L'identification a été faite de sorte que la propriété suivante soit vérifiée. Fixons $\gamma_k\in\tilde{T}_{k,\tilde{G}_{k,reg}}(\mathbb{R})$ et $\delta_{j,1}\in\tilde{T}'_{j,1}(\mathbb{R})$ dont la projection dans $\tilde{T}'_j(\mathbb{R})$ soit $\tilde{\xi}_{j,k}(\gamma_k)$. Soit φ une fonction sur $\tilde{T}_k(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x^{-1}\gamma'_kx)=\omega(x)^{-1}\varphi(\gamma'_k)$ pour tous $x\in T_k(\mathbb{R})$ et $\gamma'_k\in\tilde{T}_k(\mathbb{R})$. On en déduit une fonction φ' sur un voisinage de $\delta_{j,1}$ dans $\tilde{T}'_{j,1}(\mathbb{R})$ par la formule $\varphi'(\delta'_1)=\Delta_{j,1}(\delta'_1,\gamma')\varphi(\gamma'_k)$ où γ'_k est un élément de $\tilde{T}_k(\mathbb{R})$ proche de γ_k tel que $\tilde{\xi}_{j,k}(\gamma'_k)$ est égal à la projection de δ'_1 dans $\tilde{T}'_j(\mathbb{R})$. Soit $D'\in Diff^{cst}(\tilde{T}'_{j,1}(\mathbb{R}))_{\lambda_{j,1}}$ et notons D l'élément de

$Diff^{cst}(\tilde{T}_k(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ auquel il s'identifie. Alors on a l'égalité $(D'\varphi')(\delta_{j,1}) = (D\varphi)'(\delta_{j,1})$. En composant les isomorphismes

$$Diff^{cst}(\tilde{T}'_{j,1}(\mathbb{R}))_{\lambda_{j,1}} \simeq Diff^{cst}(\tilde{T}_k(\mathbb{R}))^{\omega-inv} \simeq Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv},$$

on obtient un isomorphisme qui ne dépend pas de k : cela résulte de la propriété ci-dessus et de (4). Désormais, on identifie $Diff^{cst}(\tilde{T}'_{j,1}(\mathbb{R}))_{\lambda_{j,1}}$ à $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$.

Revenons à l'expression (3). On reconnaît la dernière somme en $\tilde{t}_j$: c'est

$$S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j, (z_L)^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}) I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j), \delta_{j,1}, f),$$

ou encore

$$S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j, (z_L)^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}) I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(transfert(\delta_{j,1}), \omega, f).$$

La formule (1) décrit le transfert de $\delta_{j,1}$. On obtient

$$S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j, (z_L)^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}) c \sum_{k\in I} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_k) I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_k, \omega, f).$$

En utilisant la description ci-dessus de l'isomorphisme $Diff^{cst}(\tilde{T}'_{j,1}(\mathbb{R}))_{\lambda_{j,1}} \simeq Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, on transforme cette expression en

$$c \sum_{k\in I} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_k) S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j, (z_L)^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}) I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_k, \omega, f).$$

En reportant cela dans la formule (3), on obtient

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_i, \omega, zf) = \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{M})} \sum_{k\in I} |I|^{-1} \sum_{j\in I} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_i)^{-1} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_k)$$

$$\sum_{\tilde{s}_j \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{L}, \tilde{L}'_j(\tilde{s}_j)) S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j, (z_L)^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}) I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_k, \omega, f).$$

En posant grâce à (4)

$$\kappa_j(i,k) = \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_i)^{-1} \Delta_{j,1}(\delta_{j,1}, \gamma_k),$$

on obtient

$$(5) \qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_i, \omega, zf) = \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{M})} \sum_{k\in I} |I|^{-1} \sum_{j\in I} \kappa_j(i,k)$$

$$\sum_{\tilde{s}_j \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{L}, \tilde{L}'_j(\tilde{s}_j)) S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j, (z_L)^{\mathbf{L}'_j(\tilde{s}_j)}) I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_k, \omega, f).$$

Définissons maintenant les opérateurs de l'énoncé par

$$(6) \qquad \delta_{K\tilde{M},i,k}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_k, z) = |I|^{-1} \sum_{j\in I} \kappa_j(i,k) \sum_{\tilde{s}_j \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}$$

$$i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G}, \tilde{G}'_j(\tilde{s}_j)) S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j, z^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)}).$$

Alors la formule (5) devient celle de l'énoncé.

Le tore tordu $\tilde{T}'(\mathbb{C})$ s'identifie à $\tilde{T}(\mathbb{C})/(1-\theta)(T(\mathbb{C}))$ (c'est-à-dire à $\tilde{T}_k(\mathbb{C})/(1-\theta)(T_k(\mathbb{C}))$ pour tout k). Les fonctions $\delta_j \mapsto S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j, z^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)})$ s'étendent en des fonctions rationnelles sur ce tore. Chacune est régulière sur un sous-ensemble qui dépend de j : l'ensemble des points $\tilde{G}'_j$-réguliers. Mais cet ensemble contient l'ensemble commun des points qui sont $\tilde{G}$-réguliers. Il en résulte que la fonction $\gamma_k \mapsto \delta_{K\tilde{M},i,k}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_k, z)$ s'étend en une fonction rationnelle régulières sur $\tilde{T}_{k,\tilde{G}_k-reg}(\mathbb{C})/(1-\theta)(T_k(\mathbb{C}))$. Cela achève la preuve. □

2.4 Propriétés des opérateurs différentiels endoscopiques

Il résulte de la définition 2.3(6) et de ce que l'on a dit en 2.2 que les opérateurs $\delta_{K\tilde{M},i,k}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_I, z)$ vérifient des propriétés analogues à celles de la proposition 1.3.

Les différents homomorphismes $\mathfrak{Z}(G) \to \mathfrak{Z}(T_i) \to Sym(\mathfrak{t}_i)_{\theta,\omega}$, pour $i \in I$, coïncident modulo les identifications de $Sym(\mathfrak{t}_i)_{\theta,\omega}$ à une algèbre commune $Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}$. Pour $z \in \mathfrak{Z}(G)$, on note z_T l'image de z dans cette algèbre. On a

(1) si $K\tilde{M} = K\tilde{G}$, la matrice $\delta_{K\tilde{G}}^{K\tilde{G}}(\gamma_I, z)$ est diagonale, de termes diagonaux tous égaux à ∂_{z_T}.

En effet, la définition 2.3(6) se simplifie en

$$\delta_{K\tilde{G},i,k}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_I, z) = |I|^{-1}\sum_{j\in I}\kappa_j(i,k)S^{\mathbf{G}'_j}(\delta_j, z^{\mathbf{G}'_j}).$$

D'après 2.2(1), l'opérateur $S^{\mathbf{G}'_j}(\delta_j, z^{\mathbf{G}'_j})$ est simplement $\partial_{z^{\mathbf{G}'_j}}$, où on identifie $z^{\mathbf{G}'_j}$ à son image naturelle dans $Sym(\mathfrak{t}'_{j,1})_{\lambda_{j,1}}$ (avec les notations de la preuve précédente). Modulo l'identification $Sym(\mathfrak{t}'_{j,1})_{\lambda_{j,1}} \simeq Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}$, ce n'est autre que ∂_{z_T}. La formule devient

$$\delta_{K\tilde{G},i,k}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_I, z) = \partial_{z_T}|I|^{-1}\sum_{j\in I}\kappa_j(i,k).$$

Il est sous-jacent aux formules d'inversion de [I] 4.9 que la correspondance entre les γ_i et les δ_i est essentiellement une transformation de Fourier entre un groupe abélien fini et son dual, de sorte que la somme en j ci-dessus vaut $|I|$ si $i = k$ et 0 sinon. Cette propriété est largement développée dans [13] et [12] et on ne la détaillera pas. Elle entraîne la conclusion (1).

Posons $d = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$, supposons $d \geq 1$. Pour tout $i \in I$, on a défini en 1.7 une fonction $C_{\tilde{M}_i}^{\tilde{G}_i}$ sur $\tilde{T}_{i,\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. Ces fonctions s'identifient par les isomorphismes $\tilde{\iota}_{i,j}$. On en déduit une fonction $C_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$ sur $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{C})$. Soit Ω l'opérateur de Casimir.

Proposition. *Pour $d \geq 1$, la matrice $\delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\gamma_I, \Omega)$ est diagonale. Ses coefficients diagonaux sont tous égaux à la multiplication par $C_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\gamma_I)$.*

Preuve. On va plus généralement prouver que ces propriétés sont vérifiées si l'on remplace Ω par un élément $\underline{\Omega} \in \Omega + Sym(\mathfrak{z}(G))$. On considère la formule 2.3(6). Les mêmes considérations formelles que dans la preuve de la proposition 2.2 montre que, pour j et $\tilde{s}_j$ intervenant dans cette formule, l'opérateur $S\delta_{\mathbf{M}'_j}^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j, \underline{\Omega}^{\mathbf{G}'_j(\tilde{s}_j)})$ est la multiplication par la fonction $SC_{\tilde{M}'_j}^{\tilde{G}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j)$. Ainsi, pour $i,k\in I$, $\delta_{K\tilde{M},i,k}^{K\tilde{G}}(\gamma_I,\underline{\Omega})$ est la multiplication par la fonction

$$|I|^{-1}\sum_{j\in I}\kappa_j(i,k)X_j(\delta_j),$$

où

$$X_j(\delta_j)=\sum_{\tilde{s}_j\in\tilde{\zeta}_jZ(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'_j(\tilde{s}_j))SC_{\tilde{M}'_j}^{\tilde{G}'_j(\tilde{s}_j)}(\delta_j).$$

On va prouver

(2) on a $X_j(\delta_j)=C_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\gamma_I)$ pour tout $j\in I$.

En admettant cela, on obtient que $\delta_{K\tilde{M},i,k}^{K\tilde{G}}(\gamma_I,\underline{\Omega})$ est la multiplication par la fonction

$$C_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\gamma_I)|I|^{-1}\sum_{j\in I}\kappa_j(i,k).$$

La proposition s'en déduit par le même argument d'inversion utilisé dans la preuve de (1).

Prouvons (2). Cette égalité est évidente si $d\geq 2$ car alors tout est nul. On suppose $d=1$. Pour simplifier, on fixe j et on abandonne les indices j. De même, on fixe un certain $i\in I$, on identifie $C_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\gamma_I)$ à $C_{\tilde{M}_i}^{\tilde{G}_i}(\gamma_i)$ et on abandonne l'indice i. Soit $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$, que l'on écrit $\tilde{s}=s\hat{\theta}$. D'après [12] 1.3, repris en [I] 1.6, les éléments de $\Sigma^{G'(\tilde{s})}(T')-\Sigma^{M'}(T')$ sont les

$N\alpha$ pour $\alpha\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$ de type 1 tel que $N\hat{\alpha}(s)=1$;

$2N\alpha$ pour $\alpha\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$ de type 2 tel que $N\hat{\alpha}(s)=1$;

$N\alpha$ pour $\alpha\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$ de type 3 tel que $N\hat{\alpha}(s)=-1$.

Fixons comme toujours une paire de Borel épinglée de $\hat{G}$ pour laquelle $\hat{M}$ est standard et dont on note le tore $\hat{T}$. Dualement, la racine de $\hat{G}(\tilde{s})$ correspondant à $N\alpha$, pour α de type 1 ou 3, ou à $2N\alpha$ pour α de type 2, est la restriction de $\hat{\alpha}$ à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$.

On se rappelle que, d'une racine α de type 2, se déduit une racine $\beta=\alpha+\theta^{n_\alpha/2}(\alpha)$ de type 3. On peut choisir l'ensemble $\Sigma^G(T)_\theta$ de sorte que, de cette correspondance, se déduise une bijection entre les éléments de $\Sigma^G(T)_\theta$ de type 2 et les éléments de $\Sigma^G(T)_\theta$ de type 3. On a $\beta\in\Sigma^M(T)$ si et seulement si $\alpha\in\Sigma^M(T)$. On peut donc supposer que la bijection ci-dessus se restreint en une bijection entre les éléments de $\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$ de type 2 et ceux de type 3.

Ainsi, $X(\delta)$ comme $C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma)$ apparaissent comme des sommes sur les $\alpha\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$. On va prouver

(3) pour $\alpha\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$ de type 1, les termes indexés par α dans $X(\delta)$ et dans $C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma)$ sont égaux ;

(4) soit $\alpha\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$ de type 2 ; soit $\beta\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$ l'élément de type 3 correspondant ; alors la somme des termes indexés par α et β dans $X(\delta)$ est égale à la somme des termes indexés par α et β dans $C_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma)$.

Soit $\alpha\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$ de type 1. En utilisant les définitions de 1.7 et 2.2, prouver (3) se ramène à prouver l'égalité

$$-|N\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}|n_\alpha(1-(\alpha)(\gamma))^{-1}(1-(\alpha)(\gamma)^{-1})^{-1}=-\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}},N\alpha\in\Sigma^{G'(\tilde{s})}}$$

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))|N\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}'}}|k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\alpha})^{-1}(1-N\alpha(\delta))^{-1}(1-N\alpha(\delta)^{-1})^{-1}.$$

Puisque $\mathcal{A}_{\tilde{M}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}'}$, les termes $|N\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}|$ et $|N\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}'}}|$ sont égaux. De même, il résulte des définitions que $1-(\alpha)(\gamma)^{\pm 1}=1-N\alpha(\delta)^{\pm 1}$. L'égalité à prouver se simplifie en

$$(5)\qquad n_\alpha=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}},N\alpha\in\Sigma^{\tilde{G}'(\tilde{s})}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\alpha})^{-1}.$$

Posons $\hat{\mathcal{T}}=(Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})/(Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})$. Remarquons que les homomorphismes de la suite suivante

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta},0}/(Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta},0}\cap Z(\hat{G}))\to\hat{\mathcal{T}}\to Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$$

sont des isomorphismes. Ce groupe commun est un tore complexe de dimension 1. La restriction de $\hat{\alpha}$ à ce tore n'est pas triviale. Il en résulte que l'on peut trouver $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$ tel que $N\hat{\alpha}(s)=1$, autrement dit la somme en $\tilde{s}$ ci-dessus est non vide. On ne perd alors rien à supposer que $\tilde{\zeta}$ lui-même vérifie cette condition. En posant $\tilde{s}=\tilde{\zeta}t$ avec $t\in\hat{\mathcal{T}}$, la somme sur les $\tilde{s}$ tels que $N\alpha\in\Sigma^{\tilde{G}'(\tilde{s})}$ devient une somme sur les t tels que $N\hat{\alpha}(t)=1$. Puisque t est invariant par $\hat{\theta}$, cette dernière condition équivaut à $\hat{\alpha}(t)^{n_\alpha}=1$. Considérons un tel t et $\tilde{s}=\tilde{\zeta}t$ l'élément correspondant. Pour $\beta\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$, notons $\hat{\beta}_*$ la restriction de $\hat{\beta}$ à $Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Parmi les β tels que $\hat{\beta}\in\Sigma^{\hat{G}'(\tilde{s})}$, on peut en fixer un tel que que $\hat{\beta}_*$ soit indivisible et que $\hat{\alpha}_*=k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\alpha})\hat{\beta}_*$. Le groupe $Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ est égal à celui des $z\in Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ tel que $\hat{\beta}(z)=1$. Il contient le groupe des $z\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ tels que $\hat{\beta}(z)=1$. Donc

$$[Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}:Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}]=[\{z\in Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}};\hat{\beta}(z)=1\}:\{z\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0};\hat{\beta}(z)=1\}]$$

$$[\{z\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0};\hat{\beta}(z)=1\}:Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}].$$

Puisque $\hat{\beta}$ n'est pas trivial sur $Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}$, l'homomorphisme

$$\{z\in Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}};\hat{\beta}(z)=1\}/\{z\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0};\hat{\beta}(z)=1\}\to Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/(Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})$$

est un isomorphisme. D'autre part, $\hat{\beta}$ se quotiente en un caractère du tore $\hat{\mathcal{T}}$. Il en résulte que

$$[Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}:Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}]=[Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}:Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}]$$
$$|\{z\in\hat{\mathcal{T}};\hat{\beta}(z)=1\}|.$$

En se rappelant la définition de $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$, cf. [II] 1.7, on obtient

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))=|\{z\in\hat{\mathcal{T}};\hat{\beta}(z)=1\}|^{-1}.$$

On a un homomorphisme surjectif

$$\hat{\mathcal{T}}\to Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}.$$

Puisque la restriction de $\hat{\alpha}$ au tore de droite est égale à $k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\alpha})$ fois celle de $\hat{\beta}$, on a la même relation entre les restrictions de ces racines à $\hat{\mathcal{T}}$. Puisque ce tore est de dimension 1, on obtient

$$k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\alpha})^{-1}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))=|\{z\in\hat{\mathcal{T}};\hat{\alpha}(z)=1\}|^{-1},$$

ou encore, par le même argument

$$k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\alpha})^{-1}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))=n_\alpha|\{z\in\hat{\mathcal{T}};N\hat{\alpha}(z)=1\}|^{-1}.$$

La relation (5) à prouver se réduit à

$$n_\alpha=\sum_{t\in\hat{\mathcal{T}},N\hat{\alpha}(t)=1}n_\alpha|\{z\in\hat{\mathcal{T}};N\hat{\alpha}(z)=1\}|^{-1}.$$

C'est évident et cela prouve (3).

Soit $\alpha\in\Sigma^G(T)_\theta-\Sigma^M(T)_\theta$ de type 2 et soit $\beta=\alpha+\theta^{n_\alpha/2}(\alpha)$ l'élément de type 3 associé. L'égalité (4) à prouver se ramène à

$$(6)\qquad A_\alpha+A_\beta=B_\alpha+B_\beta,$$

où

$$A_\alpha=-|N\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}|n_\alpha(1-(\alpha)(\gamma))^{-1}(1-(\alpha)(\gamma)^{-1})^{-1},$$
$$A_\beta=-|N\beta_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}|n_\beta(1-(\beta)(\gamma))^{-1}(1-(\beta)(\gamma)^{-1})^{-1},$$
$$B_\alpha=-\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}},2N\alpha\in\Sigma^{\tilde{G}'(\tilde{s})}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))|2N\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}'}}|k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\alpha})^{-1}$$
$$(1-(2N\alpha)(\delta))^{-1}(1-(2N\alpha)(\delta)^{-1})^{-1},$$
$$B_\beta=-\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}},N\beta\in\Sigma^{\tilde{G}'(\tilde{s})}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))|N\beta_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}'}}|k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\beta})^{-1}$$
$$(1-N\beta(\delta))^{-1}(1-N\beta(\delta)^{-1})^{-1}.$$

On a $N\alpha=N\beta$ et $|N\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}|=|N\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}'}}|$. D'après les définitions, $(\alpha)(\gamma)=N\alpha(\delta)$ et $(\beta)(\gamma)=-N\alpha(\delta)$. En posant $x=N\alpha(\delta)$ et $c=-|N\alpha_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}}|$, on obtient

$$A_\alpha=cn_\alpha(1-x)^{-1}(1-x^{-1})^{-1},$$
$$A_\beta=cn_\beta(1+x)^{-1}(1+x^{-1})^{-1},$$
$$B_\alpha=2c(1-x^2)^{-1}(1-x^{-2})^{-1}b_\alpha,$$
$$B_\beta=c(1-x)^{-1}(1-x^{-1})^{-1}b_\beta,$$

où

$$b_\alpha=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}},2N\alpha\in\Sigma^{\tilde{G}'(\tilde{s})}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\alpha})^{-1},$$
$$b_\beta=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}},N\beta\in\Sigma^{\tilde{G}'(\tilde{s})}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))k^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{\beta})^{-1}.$$

Les conditions $2N\alpha\in\Sigma^{\tilde{G}'(\tilde{s})}$ ou $N\beta\in\Sigma^{\tilde{G}'(\tilde{s})}$ équivalent à $N\hat{\alpha}(s)=1$, resp. $N\hat{\beta}(s)=-1$. Le même calcul que dans la preuve de (3) conduit aux égalités $b_\alpha=n_\alpha$, $b_\beta=n_\beta$. On a l'égalité $n_\alpha=2n_\beta$. L'égalité (6) équivaut alors à

$$2(1-x)^{-1}(1-x^{-1})^{-1}+(1+x)^{-1}(1+x^{-1})^{-1}=4(1-x^2)^{-1}(1-x^{-2})^{-1}+(1-x)^{-1}(1-x^{-1})^{-1}.$$

Cela résulte d'un calcul immédiat. Cela prouve (4) et la proposition. □

2.5 Le résultat de stabilisation

Les hypothèses et notations sont comme en 2.3. Soit $z \in \mathfrak{Z}(G)$. D'après 1.6(4), les différents opérateurs $\delta_{\tilde{M}_i}^{\tilde{G}_i}(z)$ s'identifient tous à un même élément de $Diff^{reg}(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. On note $\delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(z)$ l'élément diagonal de $Mat_I(Diff^{reg}(\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R}))^{\omega-inv})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à cet élément.

Proposition. *Pour tout $z \in \mathfrak{Z}(G)$, on a l'égalité*

$$\delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(z) = \delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(z).$$

Preuve. C'est clair si $K\tilde{M} = K\tilde{G}$. On suppose $K\tilde{M} \neq K\tilde{G}$. Soient $z, z' \in \mathfrak{Z}(G)$. La relation 1.2(3) donne

$$(1) \qquad \delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(zz') = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})} \delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}}(z_L)\delta_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(z').$$

Il s'agit ici de produits de matrices d'opérateurs différentiels. Une même preuve s'applique aux opérateurs endoscopiques et donne la relation similaire :

$$(2) \qquad \delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(zz') = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})} \delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(z_L)\delta_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(z').$$

On raisonne par récurrence sur $dim(G_{SC})$, mais aussi par récurrence sur $a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$. On peut donc supposer que l'égalité de l'énoncé est vérifiée si l'on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{L}$ avec $\tilde{L} \neq \tilde{G}$ et aussi si l'on remplace $\tilde{M}$ par $\tilde{L}$ pour $\tilde{L} \neq \tilde{M}$. Alors les termes des deux membres de droite ci-dessus indexés par des $\tilde{L}$ différents de $\tilde{M}$ et $\tilde{G}$ sont égaux. D'autre part, d'après 1.2(2) et 2.4(1), on a

$$\delta_{K\tilde{G}}^{K\tilde{G}}(z') = \delta_{K\tilde{G}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(z') = diag(\partial_{z'_T}),$$

$$\delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{M}}(z_M) = \delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{M},\mathcal{E}}(z_M) = diag(\partial_{z_T}).$$

Pour $D \in Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, on a ici identifié D à la fonction constante sur $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$ de valeur D, et on a noté $diag(D)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux tous égaux à D. Posons

$$A(z) = \delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(z) - \delta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(z).$$

Par différence de (2) et (1), on obtient

$$A(zz') = diag(\partial_{z_T})A(z') + A(z)diag(\partial_{z'_T}).$$

Puisque le membre de gauche est symétrique en z et z', on obtient

$$(3) \qquad diag(\partial_{z_T})A(z') + A(z)diag(\partial_{z_T}) = diag(\partial_{z'_T})A(z) + A(z')diag(\partial_{z_T}).$$

De même que l'on a défini $\tilde{T}$ comme l'ensemble des familles $\gamma_I = (\gamma_i)_{i \in I}$ telles que $\gamma_i \in \tilde{T}_i$ pour tout i et $\gamma_i = \tilde{\iota}_{i,j}(\gamma_j)$ pour tous i, j, on peut définir les ensembles T, $\mathfrak{t}$ et $X_*(T)$. On a une forme quadratique définie positive sur chaque $X_*(T_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Elles se correspondent par les isomorphismes $\iota_{i,j}$. Donc $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est muni d'une telle forme. Cet espace est aussi muni d'un automorphisme θ. Fixons une base orthonormée $\{H_1, ..., H_m\}$ de $X_*(T)^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. C'est aussi une base sur $\mathbb{C}$ de $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{C})$. On dispose d'un homomorphisme $H \mapsto \partial_H$ de $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ dans $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. Par linéarité, il s'étend en un isomorphisme de $Sym(\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{C}))$ sur $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$. Pour $\underline{l} = (l_1, ..., l_m) \in \mathbb{N}^m$, on pose

$$\partial^{\underline{l}} = \partial_{H_1}^{l_1} ... \partial_{H_m}^{l_m}.$$

Ainsi, pour $i, j \in I$ et $\gamma_I \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$, on peut écrire de façon unique

$$(4) \qquad A_{i,j}(\gamma_I, z) = \sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^m} a_{i,j;\underline{l}}(\gamma_I) \partial^{\underline{l}},$$

où les $a_{i,j;\underline{l}}$ sont des fonctions rationnelles en γ_I.

Définissons l'opérateur

$$\nabla = \partial_{H_1}^2 + ... + \partial_{H_m}^2.$$

Introduisons le Casimir Ω. Il résulte de 1.7(1) que l'on peut choisir $\underline{\Omega} \in \Omega + Sym(\mathfrak{z}(G))$ tel que $\partial_{\underline{\Omega}_T} = \nabla$. Les propositions 1.7 et 2.4 impliquent que $A(\underline{\Omega}) = 0$. Pour $z' = \underline{\Omega}$, la relation (3) se simplifie en

$$(5) \qquad A(z) diag(\nabla) = diag(\nabla) A(z).$$

Fixons $\gamma_I \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$. Pour $H \in \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$, on définit l'élément $exp(H) \in T(\mathbb{R})$. Si H est assez voisin de 0, le produit $exp(H)\gamma_I$ appartient encore à $\tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$. Pour $i, j \in I$ et $\underline{l} \in \mathbb{N}^m$, posons simplement $b_{i,j;\underline{l}}(H) = a_{i,j;\underline{l}}(exp(H)\gamma_I)$. Alors

$$A_{i,j}(exp(H)\gamma_I, z) = \sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^m} b_{i,j;\underline{l}}(H) \partial^{\underline{l}}.$$

Montrons que

(6) pour tous $i, j \in I$ et $\underline{l} \in \mathbb{N}^m$, $b_{i,j;\underline{l}}(H)$ est un polynôme en H.

Tout élément $H \in \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{C})$ agit sur les fonctions définies sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ par l'opérateur de dérivation usuel ∂_H. Pour $k = 1, ..., m$, notons 1_k l'élément de $\mathbb{N}^m$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la k-ième qui vaut 1. Les règles usuelles de dérivation montrent que l'égalité (5) évaluée au point $exp(H)\gamma_I$ équivaut aux égalités

$$\sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^m} \sum_{k=1,...,m} (\partial_{H_k}^2 b_{i,j;\underline{l}})(H) \partial^{\underline{l}} + 2 \sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^m} \sum_{k=1,...,m} (\partial_{H_k} b_{i,j;\underline{l}})(H) \partial^{\underline{l}+1_k} = 0,$$

pour tous $i, j \in I$. Fixons i et j et abandonnons ces indices pour simplifier la notation. L'égalité précédente se récrit

$$\sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^m} \sum_{k=1,...,m} \left((\partial_{H_k}^2 b_{\underline{l}})(H) + 2(\partial_{H_k} b_{\underline{l}-1_k})(H) \right) \partial^{\underline{l}} = 0,$$

avec la convention $b_{\underline{l}} = 0$ si une coordonnée de $\underline{l}$ est stritement négative. Ou encore, pour tout $\underline{l} \in \mathbb{N}^m$,

$$(7) \qquad \sum_{k=1,...,m} \partial_{H_k}^2 b_{\underline{l}} + 2\partial_{H_k} b_{\underline{l}-1_k} = 0.$$

Pour tout $\underline{l}$, posons $S(\underline{l}) = l_1 + ... + l_m$. On peut supposer que les $b_{\underline{l}}$ ne sont pas tous nuls, sinon (6) est clair. On note alors N le plus grand entier pour lequel il existe $\underline{l}$ avec

$S(\underline{l}) = N$ et $b_{\underline{l}} \neq 0$. On va prouver que, pour tout $n = 1, ..., m$ et tout $\underline{l}$ tel que $S(\underline{l}) \leq N$, on a

(8) $\partial_{H_n}^{N-l_n+1} b_{\underline{l}} = 0$.

On raisonne par récurrence descendante sur $S = S(\underline{l})$ et, cet entier étant fixé, sur $l_n \in \{0, ..., S\}$. Soit $\underline{l} \in \mathbb{N}^m$ tel que $S(\underline{l}) = S \leq N$. On applique (7) à $\underline{l} + 1_n$. On applique l'opérateur $\partial_{H_n}^{N-l_n}$ à l'égalité obtenue. L'élément $b_{\underline{l}+1_n}$ est annulé par $\partial_{H_n}^{N-l_n}$: si $S = N$, on a simplement $b_{\underline{l}+1_n} = 0$ et si $S < N$, c'est l'hypothèse de récurrence. Donc la première somme disparaît. Pour $k \neq n$, il apparaît dans le deuxième somme le terme $\partial_{H_n}^{N-l_n} \partial_{H_k} b_{\underline{l}+1_n-1_k}$. C'est nul si $l_k = 0$. Supposons $l_k \neq 0$. Alors l'hypothèse de récurrence pour $l_n + 1$ assure que le terme est nul. Il reste seulement le terme de la deuxième somme indexé par $k = n$, qui est donc nul lui-aussi. Or ce terme est $\partial_{H_n}^{N-l_n+1} b_{\underline{l}}$. Cela prouve (8). Evidemment, (8) implique (6).

Pour $i, j \in I$ et $\underline{l} \in \mathbb{N}^m$, la fonction $\gamma_I \mapsto a_{i,j;\underline{l}}(\gamma_I, z)$ est rationnelle. Pour γ_I fixé, la fonction $H \mapsto a_{i,j,\underline{l}}(exp(H)\gamma_I; z)$ est donc rationnelle en $exp(H)$. Or (6) montre que c'est un polynôme en H. Un résultat élémentaire sur les polynômes exponentiels montre que ces deux propriétés ne sont vérifiées que pour les constantes. On obtient que $\gamma_I \mapsto a_{i,j;\underline{l}}(\gamma_I)$ est localement constant. Puisque c'est une fraction rationnelle, elle est vraiment constante. On utilise maintenant le (ii) de la proposition 1.3, qui se propage lui-aussi aux variantes de nos opérateurs différentiels : quand γ_I tend vers l'infini au sens expliqué en 1.3, $a_{i,j;\underline{l}}(\gamma_I)$ tend vers 0. Puisque c'est une constante, cette constante est nulle. On conclut que $A_{i,j}(\gamma_I, z) = 0$. C'est ce qu'il fallait démontrer. $\square$

3 Majorations

3.1 Quelques considérations formelles

Soient $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet comme en 1.1, $\tilde{T}$ un sous-tore tordu maximal de $\tilde{G}$ et η un élément de $\tilde{T}(\mathbb{R})$. On suppose ω trivial sur $T(\mathbb{R})^\theta$.

Ainsi qu'on l'a dit en 1.1, on a des isomorphismes

$$Sym(\mathfrak{t}^\theta) \simeq Sym(\mathfrak{t})/I_{\theta,\omega} = Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega} \simeq Diff(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}.$$

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Supposons donné un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$, où ϵ est un élément semi-simple de $\tilde{G}'(\mathbb{R})$, cf. [I] 1.10. Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 pour $\mathbf{G}'$ et un point $\epsilon_1 \in G'_1(\mathbb{R})$ au-dessus de ϵ. Posons $\tilde{T}' = T'\epsilon$ et notons $\tilde{T}'_1$ l'image réciproque de $\tilde{T}'$ dans $\tilde{G}'_1$. Fixons une décomposition d'algèbres de Lie

$$(1) \qquad \mathfrak{g}'_1 = \mathfrak{c}_1 \oplus \mathfrak{g}'.$$

Remarquons que $G'_{1,SC} = G'_{SC}$ donc la section $\mathfrak{g}'_{SC} \to \mathfrak{g}'_1$ est uniquement déterminée. Choisir une décomposition comme ci-dessus équivaut à choisir une décomposition

$$\mathfrak{z}(G'_1) = \mathfrak{c}_1 \oplus \mathfrak{z}(G').$$

Il se déduit de (1) une décomposition

$$(2) \qquad \mathfrak{t}'_1 = \mathfrak{c}_1 \oplus \mathfrak{t}'.$$

Le diagramme fournit un isomorphisme

$$\xi : \mathfrak{t}^\theta \to \mathfrak{t}'.$$

Considérons la fonction

$$X \mapsto \Delta_1(exp(\xi(X))\epsilon, exp(X)\eta)$$

définie presque partout dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ (dans le premier terme, $\xi(X)$ est identifié à un élément de $\mathfrak{t}'_1(\mathbb{R})$ grâce à la décomposition (2)). Précisément, cette fonction est définie en tout X proche de 0 tel que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier. Le lemme [I] 2.8 montre qu'elle est localement proportionnelle à la fonction $X \mapsto e^{<b,\xi(X)\oplus X>}$, avec les notations de ce lemme. D'après [I] 2.8(1), b est un élément de $\mathfrak{z}(G'_1)^* \oplus (1-\theta)(\mathfrak{t}^*)$. Puisque X est fixe par θ, son produit avec la deuxième composante de b est nul. En notant b_1 la première composante, on obtient

(3) $\Delta_1(exp(\xi(X))\epsilon, exp(X)\eta)$ est le produit de $e^{<b_1,\xi(X)>}$ et d'une fonction qui est localement constante sur les éléments $X \in \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ proches de 0 et tels que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier.

Remarquons que, puisque $b_1 \in \mathfrak{z}(G'_1)^*$, on a $< b_1, \xi(X) >= 0$ si $\xi(X) \in \mathfrak{t}'_{sc}$, en notant T'_{sc} l'image réciproque de T' dans G'_{SC}.

De (2) se déduit un isomorphisme $Sym(\mathfrak{t}') \to Sym(\mathfrak{t}'_1)_{\lambda_1}$. D'après ce que l'on a dit en 1.8, on a donc des isomorphismes

$$Sym(\mathfrak{t}^\theta) \simeq Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega} \simeq Diff(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv} \simeq Diff(\tilde{T}'_1(\mathbb{R}))_{\lambda_1} \simeq Sym(\mathfrak{t}'_1)_{\lambda_1} \simeq Sym(\mathfrak{t}').$$

On note $\Xi_1 : Sym(\mathfrak{t}^\theta) \to Sym(\mathfrak{t}')$ l'isomorphisme composé. On prendra garde que l'isomorphisme Ξ_1 n'est pas en général celui déduit de ξ. Avec les notations ci-dessus, l'isomorphisme Ξ_1 envoie un élément $X \in \mathfrak{t}^\theta$ sur l'élément $\xi(X)- < b_1, \xi(X) >$. En particulier, Ξ_1 dépend de la décomposition (1).

Considérons d'autres données auxiliaires G'_2, etc... et une décomposition

$$\mathfrak{t}'_2 = \mathfrak{c}_2 \oplus \mathfrak{t}'$$

définie de la même façon que ci-dessus. On se souvient de l'application de transition $\tilde{\lambda}_{1,2}$ définie en [I] 2.5. On a rappelé en 1.8 l'isomorphisme $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R})) \simeq C^\infty_{c,\lambda_2}(\tilde{G}'_2(\mathbb{R}))$. On déduit de $\tilde{\lambda}_{12}$ une fonction τ_{12} sur $\mathfrak{t}'(\mathbb{R})$ par $\tau_{12}(X) = \tilde{\lambda}_{12}(exp(X)\epsilon_1, exp(X)\epsilon_2)^{-1}$. La fonction $\tilde{\lambda}_{12}$ est C^∞, il en est donc de même de la fonction τ_{12}. Par définition de $\tilde{\lambda}_{12}$, on a l'égalité

$$\tau_{12}(X) = \Delta_1(exp(X)\epsilon_1, exp(\xi^{-1}(X))\eta)\Delta_2(exp(X)\epsilon_2, exp(\xi^{-1}(X))\eta)^{-1}$$

si $exp(\xi^{-1}(X))\eta$ est fortement régulier. Il résulte de ce qui précède qu'il existe un élément $b_{12} \in \mathfrak{z}(G')^*$ tel que $\tau_{12}(X)$ soit le produit d'une constante non nulle avec la fonction $X \mapsto e^{<b_{12},X>}$ (b_{12} est la différence entre les projections de b_1 et b_2 dans $\mathfrak{z}(G')^*$). En particulier, τ_{12} prend la même valeur sur des points stablement conjugués. Fixons une mesure de Haar sur $T'(\mathbb{R})$. Pour X régulier, l'application duale de la précédente envoie l'intégrale orbitale associée à $exp(X)\epsilon_1$ et à cette mesure sur l'intégrale orbitale associée à $exp(X)\epsilon_2$ et à cette même mesure, multipliée par $\tau_{12}(X)$. Pour $H \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$, notons $H_1 = \Xi_1(H)$ et $H_2 = \Xi_2(H)$. Il se déduit de H_1 et H_2 des opérateurs différentiels ∂_{H_1} et ∂_{H_2} sur $\mathfrak{t}'(\mathbb{R})$. On a l'égalité

$$\partial_{H_2} = \tau_{12}^{-1} \circ \partial_{H_1} \circ \tau_{12}.$$

3.2 Majoration des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, $\tilde{T}$ un sous-tore tordu maximal de $\tilde{M}$ et η un élément de $\tilde{T}(\mathbb{R})$. On suppose ω trivial sur $T(\mathbb{R})^\theta$. Fixons des voisinages $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$ de 0 dans $\mathfrak{t}^{\theta,0}(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes

(1) l'application $X \mapsto exp(X)\eta(1-\theta)(T(\mathbb{R}))$ est un isomorphisme de $\mathfrak{u}'$ sur un voisinage de l'image de η dans $\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta)(T(\mathbb{R}))$;

(2) $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$ sont ouverts ; la clôture de $\mathfrak{u}$ est compacte et est contenue dans $\mathfrak{u}'$;

(3) pour $X \in \mathfrak{u}'$, X est régulier dans $\mathfrak{g}_\eta(\mathbb{R})$ si et seulement si $exp(X)\eta$ est régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$.

Remarque. Le groupe $Z_G(\eta)$ agit naturellement sur $\mathfrak{g}_\eta$. Une variante de la condition (3) est

(3)' pour $X \in \mathfrak{u}'$, le stabilisateur de X dans $Z_G(\eta)$ est égal à T^θ si et seulement si $exp(X)\eta$ est fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$.

On fixe des mesures de Haar sur $G(\mathbb{R})$, $M(\mathbb{R})$ et $T^{\theta,0}(\mathbb{R})$ qui permettent de définir les intégrales orbitales qui suivent. On a

(4) pour tout $U \in Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}$, il existe un entier N et, pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, il existe $c > 0$ de sorte que l'on ait la majoration

$$|\partial_U I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, \omega, f)| \leq cD^{G_\eta}(X)^{-N}$$

pour tout $X \in \mathfrak{u}$ tel que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$.

Cf. [1] lemme 13.2.

3.3 Majoration des intégrales orbitales pondérées stables

On conserve la même situation mais on suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On a

Lemme. *Pour tout $U \in Sym(\mathfrak{t})$, il existe un entier N et, pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, il existe $c > 0$ de sorte que l'on ait la majoration*

$$|\partial_U S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, f)| \leq cD^{G_\eta}(X)^{-N}$$

pour tout $X \in \mathfrak{u}$ tel que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$.

Preuve. Pour tout $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_\mathbb{R}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_\mathbb{R}}$ avec $s \neq 1$, on fixe des données auxiliaires $G'_1(s)$,...,$\Delta_1(s)$. On note $\tilde{M}_1(s)$ l'image réciproque de $\tilde{M}$ dans $\tilde{G}'_1(s)$ et $\tilde{T}_1(s)$ celle de $\tilde{T}$. On fixe un point $\eta_1(s) \in \tilde{T}_1(s;\mathbb{R})$ au-dessus de η et une décomposition

$$\mathfrak{t}_1(s) = \mathfrak{c}_1(s) \oplus \mathfrak{t}$$

selon la recette de 3.1. Comme on l'a dit dans ce paragraphe (et en adaptant les notations de façon compréhensible), l'intégrale orbitale sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ associée à $exp(X)\eta$ s'identifie à celle sur $\tilde{M}_1(s;\mathbb{R})$ associée à $exp(X)\eta_1(s)$, multipliée par une fonction que l'on note $\tau(s;X)$. L'élément U se transfère en un element que l'on note $\Xi_1(s;U) \in Sym(\mathfrak{t})$. On identifie le transfert $f^{\mathbf{G}'(s)}$ à une fonction $f^{\tilde{G}'_1(s)}$ sur $\tilde{G}'_1(s;\mathbb{R})$. On introduit le terme $\Lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, f)$ de 2.1. C'est la somme des $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X')\eta', f)$ quand $exp(X')\eta'$ décrit un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $M(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de $exp(X)\eta$ dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. On a alors l'égalité

$$(1)\qquad \partial_U S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(exp(X)\eta,f)=\partial_U\Lambda^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(exp(X)\eta,f)$$

$$-\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}},s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))\tau(s;X)\partial_{\Xi_1(s;U)}S^{\tilde{G}'_1(s)}_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}(exp(X)\eta_1(s),f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

Il est clair que le fait que $f^{\tilde{G}'_1(s)}$ ne soit pas à support compact mais se transforme selon le caractère $\lambda_1(s)$ de $C_1(s;\mathbb{R})$ ne change rien aux propriétés locales de ses intégrales orbitales stables. Pour $s\neq 1$, on peut donc appliquer par récurrence la majoration du lemme au terme $\partial_{\Xi_1(s;U)}S^{\tilde{G}'_1(s)}_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}(exp(X)\eta_1(s),f^{\tilde{G}'_1(s)})$. On obtient que celui-ci est majoré par une puissance négative de $D^{G'_1(s)_{\eta_1(s)}}(X)$. Ce terme est égal à $D^{G'(s)_\eta}(X)$. Or le système de racines de $G'(s)_\eta$ est inclus dans celui de G_η. Dans un voisinage compact de 0, $D^{G'(s)_\eta}(X)^{-1}$ est donc majoré par $D^{G_\eta}(X)^{-1}$. Les mêmes arguments qu'en 2.1 montrent que la majoration 3.2(4) pour $\partial_U I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(exp(X)\eta,f)$ s'étend au terme $\partial_U\Lambda^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(exp(X)\eta,f)$. Tous les termes du membre de droite de (1) sont donc majorés par une puissance négative de $D^{G_\eta}(X)$. L'assertion de l'énoncé s'ensuit. $\square$

3.4 Majoration des intégrales orbitales endoscopiques

On revient à la situation de 3.2 où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quelconque. On suppose que $\tilde{G}$ est une composante connexe d'un K-espace $K\tilde{G}$. Alors $\tilde{M}$ est une composante connexe d'un K-espace de Levi $K\tilde{M}$ et on suppose $K\tilde{M}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. Pour $f\in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $X\in\mathfrak{u}$ tel que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier, on sait définir l'intégrale orbitale endoscopique $I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,f)$.

Lemme. *Pour tout $U\in Sym(\mathfrak{t})$, il existe un entier N et, pour tout $f\in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R}))$, il existe $c>0$ de sorte que l'on ait la majoration*

$$|\partial_U I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,f)|\leq cD^{G_\eta}(X)^{-N}$$

pour tout $X\in\mathfrak{u}$ tel que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$.

Preuve. On peut fixer les objets suivants :

- une famille finie $(\mathbf{M}'_i)_{i=1,...,n}$ de données endoscopiques elliptiques et relevantes de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$, munies de données auxiliaires $M'_{i,1}$,...,$\Delta_{i,1}$;

- pour tout $i=1,...,n$, un diagramme $(\epsilon_i,B^{M'_i},T^{M'_i},B^M_i,T,\eta)$ joignant η à un élément semi-simple $\epsilon_i\in\tilde{M}'_i(\mathbb{R})$; on note $\xi_i:\mathfrak{t}^\theta\to\mathfrak{t}^{M'_i}$ l'isomorphisme déduit du diagramme ;

- pour tout $i=1,...,n$, un relèvement $\epsilon_{i,1}\in\tilde{M}'_{i;1}(\mathbb{R})$ de ϵ_i et, en notant $T_1^{M'_i}$ l'image réciproque de $T^{M'_i}$ dans $M'_{i,1}$, une décomposition

$$\mathfrak{t}_1^{M'_i}=\mathfrak{c}_{i,1}\oplus\mathfrak{t}^{M'_i}$$

selon la recette de 3.1 ;

- un nombre $c_{\tilde{T}}>0$;

ces données vérifiant la condition suivante. Soit $\varphi \in C_c^\infty(K\tilde{M}(\mathbb{R}))$. Pour tout i, notons $\varphi^{\tilde{M}'_{i,1}}$ son transfert à $\tilde{M}'_{i,1}$. Alors on a l'égalité

$$I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,\varphi)=c_{\tilde{T}}\sum_{i=1,...,n}\Delta_{i,1}(exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},exp(X)\eta)^{-1}S_{\lambda_{i,1}}^{\tilde{M}'_{i,1}}(exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},\varphi^{\tilde{M}'_{i,1}}).$$

Pour tout $i=1,...,n$, on a défini l'intégrale $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i,\boldsymbol{\delta},f)$ pour tout $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}')$. On note simplement $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i,exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},f)$ ce terme quand $\boldsymbol{\delta}$ est l'élément de $D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}')$ auquel s'identifie l'intégrale orbitale stable sur $\tilde{M}'_{i,1}(\mathbb{R})$ associée au point $exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1}$. Il résulte des définitions que l'on a aussi

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,f)=c_{\tilde{T}}\sum_{i=1,...,n}\Delta_{i,1}(exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},exp(X)\eta)^{-1}I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i,exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},f).$$

Pour tout i, on a un homomorphisme $\Xi_i : Sym(\mathfrak{t}^\theta)\to Sym(\mathfrak{t}^{M'_i})$ comme en 3.1. On a alors

$$\partial_U I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,f)=c_{\tilde{T}}\sum_{i=1,...,n}\Delta_{i,1}(exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},exp(X)\eta)^{-1}$$

$$\partial_{\Xi_i(U)}I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i,exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},f).$$

Précisons que $\partial_{\Xi_i(U)}I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i,exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},f)$ est la valeur en $\xi_i(X)$ de la fonction $Y\mapsto\partial_{\Xi_i(U)}I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i,exp(Y)\epsilon_{i,1},f)$ sur $\mathfrak{t}^{M'_i}(\mathbb{R})$. La formule ci-dessus nous permet de fixer i et de majorer $\partial_{U'}I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i,exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},f)$ pour $U'\in Sym(\mathfrak{t}^{M'_i})$. Puisque i est fixé, on le fait disparaître de la notation et on pose $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$. Pour tout $\tilde{s}\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$, on introduit des données auxiliaires $G'_1(\tilde{s})$,...,$\Delta_1(\tilde{s})$. On introduit les images réciproques $\tilde{M}'_1(\tilde{s})$ et $\tilde{T}_1^{M'}(\tilde{s})$ de $\tilde{M}'$ et $\tilde{T}^{M'}$ dans $\tilde{G}'_1(\tilde{s})$. On fixe un point $\epsilon_1(\tilde{s})\in\tilde{T}_1^{M'}(\tilde{s};\mathbb{R})$ au-dessus de ϵ et une décomposition

$$\mathfrak{t}_1^{M'}(\tilde{s})=\mathfrak{c}_1(\tilde{s})\oplus\mathfrak{t}^{M'}$$

selon la recette de 3.1. D'après 3.1, pour $Y\in\mathfrak{t}^{M'}(\mathbb{R})$, l'intégrale orbitale dans $\tilde{M}'_1(\mathbb{R})$ associée à $exp(Y)\epsilon_1$ s'identifie à l'intégrale orbitale dans $\tilde{M}'_1(\tilde{s};\mathbb{R})$ associée à $exp(Y)\epsilon_1(\tilde{s})$, multipliée par une fonction $\tau(\tilde{s},Y)$. Un élément $U'\in Sym(\mathfrak{t}^{M'})$ se transfère en un élément $\Xi(\tilde{s},U')$ de la même algèbre. On a alors

$$\partial_{U'}I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',exp(Y)\epsilon_1,f)=\sum_{\tilde{s}\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\tau(\tilde{s},Y)\partial_{\Xi(\tilde{s},U')}S^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}(exp(Y)\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}).$$

D'après le lemme 3.3, le terme indexé par $\tilde{s}$ est majoré par une puissance négative de $D^{G'(\tilde{s})_\epsilon}(Y)$. On sait que, par l'homomorphisme $\xi:\mathfrak{t}^\theta\to\mathfrak{t}^{M'}$, les racines du groupe $G'(\tilde{s})_\epsilon$ s'identifie à des multiples rationnels de racines du groupe G_η. Il en résulte que $D^{G'(\tilde{s})_\epsilon}(\xi(X))^{-1}$ est majoré par $D^{G_\eta}(X)^{-1}$ dans un voisinage de 0. On en déduit la majoration cherchée pour $\partial_{U'}I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i,exp(\xi_i(X))\epsilon_{i,1},f)$. $\square$

4 Propriétés locales

4.1 Sauts des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, $\tilde{T}$ un sous-tore tordu maximal de $\tilde{M}$ et η un élément de $\tilde{T}(\mathbb{R})$. On suppose ω trivial sur $T(\mathbb{R})^\theta$. On impose dans toute la section les hypothèses (1), (2) et (3) ci-dessous :

(1) $\tilde{T}$ est un sous-tore tordu elliptique de $\tilde{M}$;

(2) $G_{\eta,SC}$ est isomorphe à $SL(2)$;

(3) l'image réciproque T_d de $T^{\theta,0}$ dans $G_{\eta,SC}$ est un tore déployé.

Fixons un sous-tore maximal T_c non déployé de $G_{\eta,SC}$. Il existe un unique sous-tore maximal de G_η dont l'image réciproque dans $G_{\eta,SC}$ soit T_c. On note $\underline{T}$ son commutant dans G et $\underline{\tilde{T}} = \underline{T}\eta$. L'ensemble $\underline{\tilde{T}}$ est un sous-tore tordu maximal de $\tilde{G}$. Notons $\underline{\tilde{M}}$ le plus petit espace de Levi dans lequel $\underline{\tilde{T}}$ est contenu, c'est-à-dire le commutant de $A_{\underline{\tilde{T}}}$ dans $\tilde{G}$. On a

(4) $M_\eta = T^{\theta,0}$, $\underline{M}_\eta = G_\eta$, $A_{\underline{\tilde{M}}} = A_{G_\eta}$, $\tilde{M}$ est un sous-espace de Levi propre et maximal de $\underline{\tilde{M}}$ et $\underline{\tilde{T}}$ est un sous-tore tordu elliptique de $\underline{\tilde{M}}$.

Preuve. Pour un sous-tore T' de G_η qui est déployé, on a deux possibilités. Ou bien son image dans $G_{\eta,AD}$ est triviale. Dans ce cas T' est contenu dans $Z(G_\eta)$ et donc (puisque c'est un tore déployé) dans A_{G_η}. Ou bien l'image de T' dans $G_{\eta,AD}$ est de rang 1 et possède au signe près une seule racine α. La composante neutre du noyau de cette racine est alors un sous-tore T'' de T' qui est du premier cas, donc contenu dans A_{G_η}. Et on a $dim(T'') = dim(T') - 1$. Puisque $T^{\theta,0}$ et $\underline{T}^{\theta,0}$ sont des sous-tores maximaux de G_η, on a les inclusions $A_{G_\eta} \subset A_{T^{\theta,0}}$, $A_{G_\eta} \subset A_{\underline{T}^{\theta,0}}$. Puisque les images réciproques de $T^{\theta,0}$ et $\underline{T}^{\theta,0}$ dans $G_{\eta,SC}$ sont respectivement déployées et non déployées, la discussion précédente montre que $A_{G_\eta} = A_{\underline{T}^{\theta,0}}$, tandis que $dim(A_{T^{\theta,0}}) = dim(A_{G_\eta}) + 1$. La première égalité entraîne que le commutant $\underline{M}$ de $A_{\underline{T}^{\theta,0}}$ dans G contient G_η. A fortiori $\underline{M}_\eta = G_\eta$. On a aussi $A_{\underline{T}^{\theta,0}} = A_{G_\eta} \subset A_{T^{\theta,0}}$. En prenant les commutants dans $\tilde{G}$ et en se rappelant que le commutant de $A_{T^{\theta,0}}$ est $\tilde{M}$ d'après (1), on obtient que $\tilde{M} \subset \underline{\tilde{M}}$. Puisque l'image de $A_{T^{\theta,0}}$ dans $G_{\eta,AD}$ est égale à celle de T_d, $A_{T^{\theta,0}}$ ne commute pas à G_η. Donc ce groupe G_η n'est pas contenu dans M. Donc l'inclusion $M_\eta \subset G_\eta$ est stricte. Puisqu'il s'agit d'une inclusion d'un Levi dans un groupe de rang semi-simple 1, M_η est un tore, donc égal à $T^{\theta,0}$. Puisque $\underline{M}$ contient G_η tandis que M ne le contient pas, l'inclusion $\tilde{M} \subset \underline{\tilde{M}}$ est stricte. Les inclusions

$$A_{G_\eta} \subset A_{\underline{\tilde{M}}} \subset A_{\tilde{M}} = A_{T^{\theta,0}}$$

jointes aux faits que la deuxième inclusion est stricte et que la différence des dimensions entre le tore de droite et celui de gauche est 1 entraîne que la première inclusion est une égalité et que $\tilde{M}$ est maximal parmi les espaces de Levi propres de $\underline{\tilde{M}}$. Enfin, que $\underline{\tilde{T}}$ soit elliptique dans $\underline{\tilde{M}}$ résulte simplement de la définition de cet espace de Levi. $\square$

On fixe l'une des racines de $T^{\theta,0}$ dans G_η, que l'on note α. On introduit la coracine associée, que l'on peut voir comme un élément $\check{\alpha} \in X_*(T^{\theta,0})$. On a même $\check{\alpha} \in X_*(A_{\tilde{M}})$. On se rappelle que l'on a fixé une forme quadratique définie positive sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}} = X_*(A_{\tilde{M}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, qui nous sert à définir la mesure sur cet espace. On dispose donc de la norme $|\check{\alpha}|$ pour cette forme. Cela étant, on définit au voisinage 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ une modification de l'intégrale orbitale pondérée ω-équivariante de la façon suivante. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $X \in \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$

assez proche de 0, on pose

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(X)\eta,\omega,f)=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta,\omega,f)+|\check{\alpha}|log(|\alpha(X)|)I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta,\omega,f).$$

On fixe un élément $u\in G_{\eta,SC}(\mathbb{C})$ tel que $ad_u(T_d)=T_c$. Alors ad_u envoie $\mathfrak{t}_d(\mathbb{R})$ sur $i\mathfrak{t}_c(\mathbb{R})$. Fixons un élément non nul $H_d\in\mathfrak{t}_d(\mathbb{R})$ et introduisons l'élément H_c de $\mathfrak{t}_c(\mathbb{R})$ tel que $ad_u(H_d)=iH_c$. De l'application ad_u se déduit un isomorphisme $C:Sym(\mathfrak{t}^{\theta,0})\to Sym(\underline{\mathfrak{t}}^{\theta,0})$. On note w_d, resp. w_c, l'unique élément non trivial du groupe de Weyl de G_η relativement à $T^{\theta,0}$, resp. $\underline{T}^{\theta,0}$. L'isomorphisme C entrelace l'action de w_d sur le premier espace avec celle de w_c sur le second. On a fixé une mesure sur $T^{\theta,0}(\mathbb{R})$ pour définir nos intégrales orbitales. Elle se déduit d'une forme différentielle de rang maximal sur $T^{\theta,0}$, autrement dit d'un élément $d\in\wedge^n\mathfrak{t}^{\theta,*}(\mathbb{R})$ où $n=dim(T^{\theta,0})$. De ad_u se déduit un isomorphisme $\wedge^n\mathfrak{t}^{\theta,*}\simeq\wedge^n\underline{\mathfrak{t}}^{\theta,*}$, qui se restreint en un isomorphisme de $\wedge^n\mathfrak{t}^{\theta,*}(\mathbb{R})$ sur $i\wedge^n\underline{\mathfrak{t}}^{\theta,*}(\mathbb{R})$. On introduit l'élément $\underline{d}\in\wedge^n\underline{\mathfrak{t}}^{\theta,*}(\mathbb{R})$ tel que $ad_u(d)=i\underline{d}$. De $\underline{d}$ se déduit alors une mesure sur $\underline{T}^{\theta,0}(\mathbb{R})$ qui nous sert à définir les intégrales orbitales dans ce qui suit.

Il y a deux possibilités pour la classe de conjugaison stable de H_c dans $\mathfrak{g}_\eta(\mathbb{R})$. Soit elle est réduite à la classe de conjugaison de H_c par $G_\eta(\mathbb{R})$, auquel cas on pose $c(\eta)=0$. Soit elle se décompose en deux classes de conjugaison par $G_\eta(\mathbb{R})$, celles de H_c et de $-H_c$, auquel cas on pose $c(\eta)=1$.

Selon l'usage, pour un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}$ et pour une fonction φ définie sur $V-\{0\}$, on note $lim_{r\to0+}\varphi(r)$ et $lim_{r\to0-}\varphi(r)$ les limites de $\varphi(r)$ quand r tend vers 0 en restant strictement positif, resp. négatif (ces limites existent ou pas).

Proposition. *Soient $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.*

(i) Pour tout $U\in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$, les limites

$lim_{r\to0+}\partial_U I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)$ *et* $lim_{r\to0-}\partial_U I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)$ *existent.*

(ii) Si $w_d(U)=U$, ces limites sont égales.

(iii) Pour tout $\underline{U}\in Sym(\underline{\mathfrak{t}}^\theta)$, les limites

$lim_{r\to0+}\partial_{\underline{U}} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f)$ *et* $lim_{r\to0-}\partial_{\underline{U}} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f)$ *existent.*

(iv) Soit $U\in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$, supposons $w_d(U)=-U$ et posons $\underline{U}=C(U)$. Alors on a les égalités

$$lim_{r\to0+}\partial_U I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)-lim_{r\to0-}\partial_U I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)$$

$$=2^{1+c(\eta)}\pi i|\check{\alpha}|\,lim_{r\to0+}\partial_{\underline{U}} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f)$$

$$=-2^{1+c(\eta)}\pi i|\check{\alpha}|\,lim_{r\to0-}\partial_{\underline{U}} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f).$$

Cf. [1] lemme 13.1. La différence entre notre constante $2^{1+c(\eta)}\pi i|\check{\alpha}|$ et celle d'Arthur provient de nos normalisations différentes.

4.2 Sauts des intégrales orbitales pondérées stables

On conserve les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent. On impose de plus que $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un sous-groupe de Borel de G contenant T et pour lequel M et $\underline{M}$ sont standard. Complétons (B, T) en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ de G. Fixons une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$ de $\hat{G}$ conservée par l'action galoisienne, dont on note le tore $\hat{T}$ (l'action galoisienne sur ce tore n'en fait pas le tore dual de T). On en déduit des réalisations de $\hat{M}$ et $\hat{\underline{M}}$ comme des groupes de Levi standard de $\hat{G}$. De la coracine $\check{\alpha}$ se déduit une racine $\hat{\alpha}$ de $\hat{T}$ qui se restreint en un caractère non trivial de $Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Notons $Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}$ le groupe des $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ tels que $\hat{\alpha}(s) = 1$. Il résulte des définitions que $Z(\hat{\underline{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ est inclus dans ce groupe. Plus précisément, $Z(\hat{\underline{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ est la composante neutre de $Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. On pose

$$i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) = [Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}} : Z(\hat{\underline{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}]^{-1}.$$

Pour tout élément semi-simple $\epsilon \in \tilde{G}(\mathbb{R})$, posons

$$\mathcal{Y}(\epsilon) = \{y \in G(\mathbb{C}); \forall \sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}, y\sigma(y)^{-1} \in G_\epsilon\}.$$

Pour un element y de cet ensemble, on pose $\epsilon[y] = y^{-1}\epsilon y$. On fixe un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)$ de l'ensemble de doubles classes

$$G_\epsilon \backslash \mathcal{Y}(\epsilon)/G(\mathbb{R}).$$

Remarquons que l'application qui, à $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)$, associe la classe du cocycle $\sigma \mapsto y\sigma(y)^{-1}$, est une bijection de $\dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)$ sur le noyau de l'application

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_\epsilon) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G).$$

Soulignons que les ensembles ci-dessus ne sont pas des groupes. Le noyau est l'ensemble des éléments de $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_\epsilon)$ qui deviennent des cobords dans G. Si ϵ est fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$, la famille $(\eta[y])_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de ϵ. Dans ce cas, modulo le choix de mesures de Haar sur les groupes intervenant, on a défini l'intégrale orbitale stable associée à ϵ comme la forme linéaire qui, à $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, associe

$$S^{\tilde{G}}(\epsilon, f) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)} I^{\tilde{G}}(\epsilon[y], f).$$

Si ϵ est régulier mais pas fortement régulier, la famille $(\eta[y])_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)}$ n' est plus, en général, un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de ϵ. On définit néanmoins $S^{\tilde{G}}(\epsilon, f)$ par la formule ci-dessus. Pour $Y \in \mathfrak{g}_\epsilon(\mathbb{R})$ voisin de 0 et en position générale, l'élément $exp(Y)\epsilon$ est fortement régulier et on voit que l'on peut choisir $\dot{\mathcal{Y}}(exp(Y)\epsilon) = \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)$. Parce que les intégrales orbitales ordinaires sont continues en un point régulier, on a la propriété de continuité

$$S^{\tilde{G}}(\epsilon, f) = lim_{Y \to 0} S^{\tilde{G}}(exp(Y)\epsilon, f).$$

Cela entraîne que la distribution de gauche est stable. Soient $\tilde{L}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et ϵ un élément semi-simple de $\tilde{L}(\mathbb{R})$, régulier dans cet ensemble. On définit les ensembles $\mathcal{Y}^L(\epsilon)$ et $\dot{\mathcal{Y}}^L(\epsilon)$ en remplaçant G par L dans les définitions ci-dessus. On vient de définir une distribution stable $\boldsymbol{\delta}_\epsilon = S^{\tilde{L}}(\epsilon,.)$ sur $\tilde{L}(\mathbb{R})$ associée à ϵ, qui est une combinaison linéaire d'intégrales orbitales. On sait donc définir la distribution $f \mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}_\epsilon, f)$ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$. On la note simplement $f \mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\epsilon, f)$.

Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $X \in \mathfrak{t}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$ assez proche de 0, on pose

$$S^{\tilde{G},mod}_{\tilde{M}}(exp(X)\eta, f) = S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(exp(X)\eta, f) + i^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\eta)|\check{\alpha}|log(|\alpha(X)|)S^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(exp(X)\eta, f).$$

Remarquons que l'élément $exp(X)\eta$ est régulier dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et dans $\underline{\tilde{M}}(\mathbb{R})$.

Proposition. *Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.*

(i) Pour tout $U \in Sym(\mathfrak{t})$, les limites

$lim_{r\to 0+}\partial_U S^{\tilde{G},mod}_{\tilde{M}}(exp(rH_d)\eta, f)$ *et* $lim_{r\to 0-}\partial_U S^{\tilde{G},mod}_{\tilde{M}}(exp(rH_d)\eta, f)$ *existent.*

(ii) Si $w_d(U) = U$, ces limites sont égales.

(iii) Pour tout $\underline{U} \in Sym(\underline{\mathfrak{t}})$, les limites

$lim_{r\to 0+}\partial_{\underline{U}} S^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(exp(rH_c)\eta, f)$ *et* $lim_{r\to 0-}\partial_{\underline{U}} S^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(exp(rH_c)\eta, f)$ *existent.*

(iv) Soit $U \in Sym(\mathfrak{t})$, supposons $w_d(U) = -U$ et posons $\underline{U} = C(U)$. Alors on a les égalités

$$lim_{r\to 0+}\partial_U S^{\tilde{G},mod}_{\tilde{M}}(exp(rH_d)\eta, f) - lim_{r\to 0-}\partial_U S^{\tilde{G},mod}_{\tilde{M}}(exp(rH_d)\eta, f)$$

$$= 2\pi i|\check{\alpha}|i^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\eta)\, lim_{r\to 0+}\partial_{\underline{U}} S^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(exp(rH_c)\eta, f)$$

$$= -2\pi i|\check{\alpha}|i^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\eta)\, lim_{r\to 0-}\partial_{\underline{U}} S^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(exp(rH_c)\eta, f).$$

Preuve. Considérons un élément $X \in \mathfrak{t}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$ proche de 0. Remarquons que, puisque $M_\eta = T = M_{exp(X)\eta}$, on peut supposer $\dot{\mathcal{Y}}^M(exp(X)\eta) = \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$. Montrons que

(1) on peut supposer

$$\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(exp(X)\eta) = \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta).$$

Puisque $\underline{M}_{exp(X)\eta} = T$, on a simplement $\mathcal{Y}^M(exp(X)\eta) = \mathcal{Y}^{\underline{M}}(exp(X)\eta) \cap M \subset \mathcal{Y}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)$. On veut montrer que de cette injection se déduit une bijection

$$T\backslash\mathcal{Y}^M(exp(X)\eta)/M(\mathbb{R}) \simeq T\backslash\mathcal{Y}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)/\underline{M}(\mathbb{R}).$$

D'après ce que l'on a dit plus haut, il suffit de voir que les noyaux des applications

$$H^1(\Gamma_\mathbb{R}; T) \to H^1(\Gamma_\mathbb{R}; M)$$

et

$$H^1(\Gamma_\mathbb{R}; T) \to H^1(\Gamma_\mathbb{R}; \underline{M})$$

sont égaux. Or ces applications s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & H^1(\Gamma_\mathbb{R}; M) \\ & \nearrow & \\ H^1(\Gamma_\mathbb{R}; T) & & \downarrow \\ & \searrow & \\ & & H^1(\Gamma_\mathbb{R}; \underline{M}) \end{array}$$

La flèche de droite est injective car M est un Levi de $\underline{M}$. L'égalité cherchée en résulte. Cela prouve (1).

Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$, on pose $X[y] = ad_{y^{-1}}(X)$. Les définitions entraînent

$$(2) \qquad S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, f) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X[y])\eta[y], f)$$

$$- \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(exp(X)\eta, f^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Soit $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ tel que $\mathbf{G}'(s)$ soit elliptique. On fixe des données auxiliaires $G'_1(s)$,...,$\Delta_1(s)$, on note $\tilde{M}_1(s)$, resp. $\tilde{T}_1(s)$, les images réciproques de $\tilde{M}$, resp. $\tilde{T}$, dans $\tilde{G}'_1(s)$; on fixe $\eta_1(s) \in \tilde{T}_1(s; \mathbb{R})$ au-dessus de η. On doit aussi fixer une décomposition

$$\mathfrak{t}_1(s) = \mathfrak{c}_1(s) \oplus \mathfrak{t}$$

selon la recette de 3.1, c'est-à-dire en fixant au préalable une décomposition d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g}'_1(s) = \mathfrak{c}_1(s) \oplus \mathfrak{g}'(s).$$

Comme on l'a expliqué en 3.1, il y a une fonction $X \mapsto \tau(s; X)$ sur $\mathfrak{t}(F)$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(exp(X)\eta, f^{\mathbf{G}'(s)}) = \tau(s; X) S_{\tilde{M}_1(s), \lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(exp(X)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

Il résulte des définitions que $\tau(s, X) = \Delta_1(s)(exp(X)\eta_1(s), exp(X)\eta)^{-1}$ si $exp(X)\eta$ est fortement $\tilde{G}$-régulier.

Supposons d'abord $\hat{\alpha}(s) \neq 1$, autrement dit $s \notin Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}$.. En utilisant encore une fois la description du système de racines de $G'(s)_\eta$, cf. [19] 3.3, on voit que $G'(s)_\eta = T$. Alors η est $\tilde{G}'(s)$-équisingulier et $\eta_1(s)$ est $\tilde{G}'_1(s)$-équisingulier. D'après [V] 1.4(2), il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{M}_1(s); F)$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$S_{\tilde{M}_1(s), \lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(exp(X)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)}) = S^{\tilde{M}'_1(s)}(exp(X)\eta_1(s), \varphi).$$

Mais le point $\eta_1(s)$ est régulier dans $\tilde{M}'_1(s)$. On sait qu'alors l'intégrale ci-dessus est C^∞ en X. Il en est de même de la fonction $X \mapsto \tau(s; X)$. Donc $X \mapsto S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(exp(X)\eta, f^{\mathbf{G}'(s)})$ est C^∞. Les indices s n'appartenant pas à $Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}$ contribuent donc au membre de droite de l'égalité (2) par une fonction C^∞. Cela permet de récrire cette égalité sous la forme

$$(3) \qquad S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, f) = \phi(X) + \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X[y])\eta[y], f)$$

$$- \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(exp(X)\eta, f^{\mathbf{G}'(s)}),$$

où ϕ est une fonction C^∞ de X.

Supposons maintenant $\hat{\alpha}(s) = 1$, autrement dit $s \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}$. Dans ce cas, l'ensemble de racines de $G'(s)_\eta$ relatif à T est égal à $\{\pm\alpha\}$. Puisque l'action galoisienne sur T n'a pas changé, α est encore réelle, c'est-à-dire fixe par $\Gamma_{\mathbb{R}}$. Il en résulte que $G'(s)_{\eta,SC}$ est isomorphe à $SL(2)$. Autrement dit, η et $\tilde{T}$ vérifient encore les hypothèses de 4.1 où l'on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{G}'(s)$. On dispose donc sur $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ de l'intégrale orbitale stable modifiée

$$S_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s),mod}(exp(X)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)}) = S_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(exp(X)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)})$$

$$+i_{\tilde{M}_1}^{\tilde{G}'_1(s)}(\eta_1(s))|\check{\alpha}|log(|\alpha(X)|)S_{\underline{\tilde{M}}_1(s),\lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(exp(X)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

Expliquons davantage. Le fait que l'on travaille ici avec des fonctions qui se transforment selon le caractère $\lambda_1(s)$ de $C_1(s;\mathbb{R})$ ne perturbe rien : puisqu'on travaille au voisinage de $\eta_1(s)$, on peut remplacer ces fonctions par des fonctions à support compact. La norme $|\check{\alpha}|$ ne dépend pas de s car la norme provient d'une forme quadratique qui, d'après nos définitions, ne change pas quand on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{G}'(s)$. L'espace $\underline{\tilde{M}}'_1(s)$ est l'espace de Levi de $\tilde{G}'_1(s)$ tel que $\mathcal{A}_{\underline{\tilde{M}}'_1(s)}$ soit le noyau de α dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}'_1(s)}$. Ou encore, notons $\underline{\tilde{M}}'(s)$ l'espace de Levi de $\tilde{G}'(s)$ tel que $\mathcal{A}_{\underline{\tilde{M}}'(s)}$ soit le noyau de α dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, autrement dit $\mathcal{A}_{\underline{\tilde{M}}'(s)} = \mathcal{A}_{\underline{\tilde{M}}}$. Alors $\underline{\tilde{M}}'_1(s)$ est l'image réciproque de $\underline{\tilde{M}}'(s)$ dans $\tilde{G}'_1(s)$. Montrons que

$$(4) \qquad i_{\tilde{M}_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(\eta_1(s)) = i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\eta).$$

On a les suites exactes

$$1 \to Z(\hat{M}) \to Z(\hat{M}_1(s)) \to \hat{C}_1(s) \to 1,$$

$$1 \to Z(\hat{\underline{M}}'(s)) \to Z(\hat{\underline{M}}'_1(s)) \to \hat{C}_1(s) \to 1.$$

Parce que $C_1(s)$ est un tore induit, $\hat{C}_1(s)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ est connexe. On en déduit que les suites

$$1 \to Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to Z(\hat{M}_1(s))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to \hat{C}_1(s)^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to 1,$$

$$(5) \qquad 1 \to Z(\hat{\underline{M}}'(s))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to Z(\hat{\underline{M}}'_1(s))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to \hat{C}_1(s)^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to 1.$$

sont encore exactes. De la première se déduit une suite

$$(6) \qquad 1 \to Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}} \to Z(\hat{M}_1(s))^{\hat{\alpha}} \to \hat{C}_1(s)^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to 1.$$

Elle est encore exacte. En effet, le seul point non évident est la surjectivité de l'homomorphisme de droite. Cette surjectivité est assurée par celle du dernier homomorphisme de (5) et par l'inclusion

$$Z(\hat{\underline{M}}'_1(s))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \subset Z(\hat{M}_1(s))^{\hat{\alpha}}.$$

L'exactitude des deux suites (5) et (6) entraîne l'égalité

$$[Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}} : Z(\hat{\underline{M}}'(s))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}] = [Z(\hat{M}_1(s))^{\hat{\alpha}} : Z(\hat{\underline{M}}'_1(s))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}],$$

d'où (4).

On peut aussi exprimer les intégrales $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X[y])\eta[y], f)$ à l'aide des intégrales modifiées $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(X[y])\eta[y], f)$. On transforme ainsi l'expression (3) en

$$(7) \qquad S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, f) + |\check{\alpha}|log(|\alpha(X)|)B(X) = \phi(X) + \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(X[y])\eta[y], f)$$

$$-\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}},s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))\tau(s;X)S^{\tilde{G}'_1(s),mod}_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}(exp(X)\eta_1(s),f^{\tilde{G}'_1(s)}),$$

où

$$B(X)=\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} I^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(exp(X[y])\eta[y],f)$$

$$-\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}},s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))\tau(s;X)i^{\tilde{G}'(s)}_{\tilde{M}}(\eta)S^{\tilde{G}'_1(s)}_{\underline{\tilde{M}}'_1(s),\lambda_1(s)}(exp(X)\eta_1(s),f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

Considérons $B(X)$. On peut décomposer la somme en s en une somme en $t\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ suivie d'une somme en $s\in tZ(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, avec $s\neq 1$. C'est-à-dire

$$B(X)=\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} I^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(exp(X[y])\eta[y],f)-\sum_{t\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} B(X;t),$$

où

$$B(X;t)=\sum_{s\in tZ(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}},s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))\tau(s;X)i^{\tilde{G}'(s)}_{\tilde{M}}(\eta)S^{\tilde{G}'_1(s)}_{\underline{\tilde{M}}'_1(s),\lambda_1(s)}(exp(X)\eta_1(s),f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

Fixons t. On voit que, pour $s\in tZ(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, $\underline{\tilde{M}}'_1(s)$ est l'image réciproque dans $\tilde{G}'_1(s)$ d'un espace de Levi $\underline{\tilde{M}}'(t)$ indépendant de s. C'est l'espace de la donnée endoscopique $\underline{\mathbf{M}}'(t)$ de $(\underline{M},\underline{\tilde{M}})$. Un calcul simple conduit à l'égalité

$$(8)\qquad i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))i^{\tilde{G}'(s)}_{\tilde{M}}(\eta)=i_{\underline{\tilde{M}}'(t)}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))i^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\eta).$$

Pour un moment, notons pour plus de clarté $\boldsymbol{\delta}$ l'intégrale orbitale stable sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ associée à $exp(X)\eta$. Comme on l'a dit, pour tout s, elle s'identifie à l'intégrale orbitale stable sur $\tilde{M}_1(s;\mathbb{R})$ associée à $exp(X)\eta_1(s)$, multipliée par $\tau(s,X)$. Notons $\boldsymbol{\delta}(s)$ cette distribution. La distribution qui intervient dans la définition de $B(X;t)$ est la distribution induite $\boldsymbol{\delta}(s)^{\underline{\tilde{M}}'_1(s)}$. C'est la réalisation de la distribution $\boldsymbol{\delta}^{\underline{\mathbf{M}}'(t)}\in D^{st}_{g\acute{e}om}(\underline{\mathbf{M}}'(t))$. Si on oublie la restriction $s\neq 1$ dans la définition de $B(X;t)$, on voit alors en utilisant (8) que

$$B(X;t)=i^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\eta)I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\underline{\tilde{M}}}(\underline{\mathbf{M}}'(t),\boldsymbol{\delta}^{\underline{\mathbf{M}}'(t)},f).$$

On rétablit cette restriction $s\neq 1$ en retirant de la formule ci-dessus l'éventuel terme correspondant à $s=1$. On obtient que $B(X,t)$ est donné par la formule ci-dessus pour $t\neq 1$, tandis que

$$B(X;1)=i^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\eta)(I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\underline{\tilde{M}}}(\underline{\mathbf{M}},\boldsymbol{\delta}^{\underline{\mathbf{M}}},f)-S^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(\boldsymbol{\delta}^{\underline{\mathbf{M}}},f)).$$

La distribution $\boldsymbol{\delta}^{\underline{\mathbf{M}}'(t)}$ étant à support $\tilde{G}$-équisingulier, on peut utiliser la proposition [V] 1.13 qui nous dit que

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\underline{\tilde{M}}}(\underline{\mathbf{M}}'(t),\boldsymbol{\delta}^{\underline{\mathbf{M}}'(t)},f)=I^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(transfert(\boldsymbol{\delta}^{\underline{\mathbf{M}}'(t)}),f).$$

Le transfert commutant à l'induction, le transfert de $\boldsymbol{\delta}^{\underline{\mathbf{M}}'(t)}$ est l'induite du transfert de $\boldsymbol{\delta}$. Ce dernier est l'intégrale orbitale stable dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ associée à $exp(X)\eta$ ou encore la somme sur $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$ des intégrales orbitales associées à $exp(X[y])\eta[y]$. Son induite est la même somme d'intégrales orbitales, cette fois sur $\underline{\tilde{M}}(\mathbb{R})$. On obtient

$$(9) \qquad B(X;t) = i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(X[y])\eta[y], f)$$

si $t \neq 1$, tandis que $B(X;1)$ est le même terme moins

$$i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) S_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, f).$$

A ce dernier terme près, les $B(X;t)$ sont tous égaux. Leur somme est donc le membre de gauche de (9) multiplié par le nombre d'éléments de l'ensemble de sommation, c'est-à-dire

$$[Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}} : Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}].$$

Ce facteur compense le terme $i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta)$ figurant dans (9). D'où

$$\sum_{t \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} B(X;t) = \Big(\sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(X[y])\eta[y], f)\Big) - i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) S_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, f).$$

En se reportant à la définition de $B(X)$, on obtient

$$B(X) = i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) S_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, f).$$

Le membre de gauche de (7) devient simplement $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(X)\eta, f)$ et on a obtenu l'égalité

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(X)\eta, f) = \phi(X) + \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(X[y])\eta[y], f)$$

$$- \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \tau(s;X) S_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s),mod}(exp(X)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

Soit $U \in Sym(\mathfrak{t})$. Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$, $ad_{y^{-1}}$ envoie T sur un tore $T[y]$ défini sur $\mathbb{R}$ et envoie conformément U sur un élément $U[y] \in Sym(\mathfrak{t}[y])$. Pour tout $s \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, on a introduit en 3.1 un isomorphisme qui devient ici un automorphisme de $Sym(\mathfrak{t})$, que l'on note $\Xi(s)$. On pose $U(s) = \Xi(s)(U)$. De l'expression précédente se déduit l'égalité

$$\partial_U S_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(X)\eta, f) = \partial_U \phi(X) + \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} \partial_{U[y]} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(X[y])\eta[y], f)$$

$$- \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \tau(s;X) \partial_{U(s)} S_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s),mod}(exp(X)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

On applique maintenant cette égalité au point $X = rH_d$, où r est réel non nul et proche de 0. Remarquons que, puisque le tore T_d se projette dans le centre de $\tilde{M}$, l'élément H_d est fixé par $ad_{y^{-1}}$ pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$. Remarquons aussi que, pour tout $s \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}$, H_d provient d'un élément de $\underline{\mathfrak{m}}'(s)_{\eta,SC}(\mathbb{R})$, a fortiori d'un élément de $\mathfrak{g}'(s)_{SC}(\mathbb{R})$. Comme on l'a dit en 3.1, il en résulte que la fonction $r \mapsto \tau(s; rH_d)$ est constante. On note $\tau(s;0)$ sa valeur constante. On obtient alors

$$(10) \qquad \partial_U S_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta, f) = \partial_U \phi(rH_d) + \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} \partial_{U[y]} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta[y], f)$$

$$- \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))\tau(s;0)\partial_{U(s)}S^{\tilde{G}'_1(s),mod}_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}(exp(rH_d)\eta_1(s),f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

Les deux premières assertions de l'énoncé en résultent. En effet, ces assertions sont vérifiées par la fonction ϕ qui est C^∞. Elles le sont pour les intégrales orbitales de la première somme d'après la proposition 4.1. En raisonnant par récurrence, elles le sont aussi pour les intégrales orbitales stables de la deuxième somme (puisqu'on somme sur $s\neq 1$).

Prouvons l'assertion (iii). L'élément η, vu comme un élément de $\underline{\tilde{M}}(\mathbb{R})$, est $\tilde{G}$-équisingulier. D'après [V] 1.4(2), il existe une fonction $\varphi\in C_c^\infty(\underline{\tilde{M}}(\mathbb{R}))$ tel que, pour tout $X\in\underline{\mathfrak{m}}_\eta(\mathbb{R})$ assez proche de 0, on ait l'égalité

$$S^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}}}(exp(X)\eta,f)=S^{\underline{\tilde{M}}}(exp(X)\eta,\varphi).$$

Alors l'assertion (iii) résulte des propriétés bien connues des intégrales orbitales stables. Le même argument démontre l'égalité des deux dernières limites de l'assertion (iv), l'élement $\underline{U}$ intervenant étant antisymétrique, c'est-à-dire tel que $w_c(\underline{U})=-\underline{U}$.

Il reste à prouver la première égalité de cette assertion (iv). Pour $s\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}$, on a vu que $G'(s)_{\eta,SC}$ était isomorphe à $SL(2)$. L'ensemble de racines de $G'(s)_\eta$ relatif au sous-tore maximal T est $\{\pm\alpha\}$. Les deux groupes G_η et $G'(s)_\eta$ sont donc quasi-déployés. Ils ont un tore maximalement déployé commun (le tore T) et ont même ensemble de racines. Ils sont donc isomorphes. Plus précisément, on peut fixer un isomorphisme entre eux qui soit l'identité sur T. Par cet isomorphisme, $\underline{T}$ devient un sous-tore maximal de $G'(s)_\eta$. Rappelons que ce dernier groupe est égal à $\underline{M}'(s)_\eta$. De même que l'on a introduit un isomorphisme $C:T\to\underline{T}$, on peut introduire un isomorphisme $C(s)$. Mais l'isomorphisme entre nos deux groupes permet de choisir $C(s)=C$. De la décomposition déjà fixée de $\mathfrak{g}'_1(s)$ se déduit une décomposition

$$\underline{\mathfrak{t}}_1(s)=\mathfrak{c}_1(s)\oplus\underline{\mathfrak{t}}.$$

Avec des notations compréhensibles, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} Sym(\mathfrak{t}) & \stackrel{\Xi(s)}{\to} & Sym(\mathfrak{t}) \\ C\downarrow & & C(s)\downarrow \\ Sym(\underline{\mathfrak{t}}) & \stackrel{\underline{\Xi}(s)}{\to} & Sym(\underline{\mathfrak{t}}) \end{array}.$$

Montrons qu'il est commutatif. On a vu en 3.1 que $\Xi(s)$ envoyait un élément $H\in\mathfrak{t}$ sur $H-<H,b(s)>$, où $b(s)$ est un certain élément de $\mathfrak{z}(G'_1(s))^*$. L'homomorphisme $\underline{\Xi}(s)$ envoie aussi un élément $\underline{H}\in\underline{\mathfrak{t}}$ sur $\underline{H}-<\underline{H},b(s)>$. Le chemin nord-est du diagramme envoie H sur $C(H)-<H,b(s)>$. Le chemin sud-ouest envoie H sur $C(H)-<C(H),b(s)>$. Mais C est une conjugaison par un élément de $G'(s)_{SC}$ et fixe donc $b(s)$ qui est central. Donc $<H,b(s)>=<C(H),b(s)>$, d'où la commutativité cherchée.

On est dans un cas particulier très simple de la théorie locale rappelée en [III] section 5 et [V] 4.1 . Celle-ci nous dit que $G'(s)_{\eta,SC}$ est un "groupe endoscopique" de $G_{\eta,SC}$. Ces deux groupes sont ici égaux. En particulier, on peut prendre pour facteur de transfert pour cette donnée endoscopique celui qui vaut 1 sur la diagonale. La relation [V] 4.1(1) implique alors l'existence d'une constante $d(s)\neq 0$ telle que la propriété suivante soit vérifiée. Soit $X_{sc}\in\mathfrak{g}_{\eta,SC}(\mathbb{R})$ un élément régulier et $Z\in\mathfrak{z}(G_\eta;\mathbb{R})$ en position générale.

Ces éléments sont tous deux proches de 0. On considère X_{sc} comme fixé et Z comme variable. Alors

$$lim_{Z\to 0}\Delta_1(s)(exp(Z+X_{sc})\eta_1(s),exp(Z+X_{sc})\eta)=d(s).$$

Le premier $Z+X_{sc}$ est identifié à un élément de $\mathfrak{g}'_1(s)$ par la section $\mathfrak{g}'(s)\to\mathfrak{g}'_1(s)$ que l'on a fixée. Appliquons cela à $X_{sc}\in\mathfrak{t}_{sc}(\mathbb{R})$. Le facteur de transfert ci-dessus n'est autre que $\tau(s;Z+X_{sc})^{-1}$. Sa limite est $\tau(s;X_{sc})^{-1}$. On a déjà dit que $\tau(s;X_{sc})$ était constant, on a noté sa valeur $\tau(s;0)$. On obtient $d(s)=\tau(s;0)^{-1}$. Supposons maintenant $X_{sc}\in\underline{\mathfrak{t}}_{sc}(\mathbb{R})$. Alors $Z+X_{sc}\in\underline{\mathfrak{t}}(\mathbb{R})$. On a dit en 3.1 qu'alors $\Delta_1(s)(exp(Z+X_{sc})\eta_1(s),exp(Z+X_{sc})\eta)$ était le produit de $e^{<b(s),Z>}$ et d'une fonction localement constante sur les éléments $Z+X_{sc}$ assez réguliers. Ce qui précède montre que cette fonction est constante, de valeur $\tau(s;0)^{-1}$. On peut donc étendre la définition de $\Delta_1(s)(exp(Z+X_{sc})\eta_1(s),exp(Z+X_{sc})\eta)$ ou, si l'on préfère, de $\Delta_1(s)(exp(X)\eta_1(s),exp(X)\eta)$ pour $X\in\underline{\mathfrak{t}}(\mathbb{R})$ (sans condition de régularité), par l'égalité

$$(11)\qquad \Delta_1(s)(exp(X)\eta_1(s),exp(X)\eta)=\tau(s;0)^{-1}e^{<b(s),X>}.$$

Fixons $U\in Sym(\mathfrak{t})$ tel que $w_d(U)=-U$, posons $\underline{U}=C(U)$. Pour $X\in\underline{\mathfrak{t}}(\mathbb{R})\cap\mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$, posons

$$(12)\qquad \underline{S}(X)=\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\eta)\Delta_1(s)(exp(X)\eta_1(s),exp(X)\eta)^{-1}$$

$$\partial_{\underline{U}(s)}S^{\tilde{G}'_1(s)}_{\underline{\tilde{M}}'_1(s),\lambda_1(s)}(exp(X)\eta_1(s),f^{\tilde{G}'_1(s)}),$$

où $\underline{U}(s)=\Xi(s)(\underline{U})$. Par la même décomposition déjà utilisée, on a

$$\underline{S}(X)=\sum_{t\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}}\underline{S}(X,t),$$

où

$$\underline{S}(X,t)=\sum_{s\in tZ(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\eta)\Delta_1(s)(exp(X)\eta_1(s),exp(X)\eta)^{-1}$$

$$\partial_{\underline{U}(s)}S^{\tilde{G}'_1(s)}_{\underline{\tilde{M}}'_1(s),\lambda_1(s)}(exp(X)\eta_1(s),f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

Fixons $t\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Pour simplifier la notation, on considère que t est l'un des points de la sommation en s. Comme plus haut, pour $s\in tZ(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, les données $\underline{M}'_1(s)$,...,$\Delta_1(s)$ sont différentes données auxiliaires pour une même donnée endoscopique $\underline{\mathbf{M}}'(t)$ de $(\underline{M},\underline{\tilde{M}})$. Les distributions

$$\Delta_1(s)(exp(X)\eta_1(s),exp(X)\eta)^{-1}\partial_{\underline{U}(s)}S^{\underline{\tilde{M}}'_1(s)}_{\lambda_1(s)}(exp(X)\eta_1(s),.)$$

se recollent en une même distribution $\boldsymbol{\delta}_{\underline{U},X}\in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}'(t))$. En utilisant (8), on obtient l'égalité

$$\underline{S}(X,t)=i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta)I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\underline{\tilde{M}}}(\mathbf{M}'(t),\boldsymbol{\delta}_{\underline{U},X},f).$$

En utilisant la proposition [V] 1.13, on obtient

$$\underline{S}(X,t)=i^{\tilde{G}}_{\tilde{\underline{M}}}(\eta)I^{\tilde{G}}_{\tilde{\underline{M}}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_{\underline{U},X}),f).$$

Calculons le transfert de la distribution $\boldsymbol{\delta}_{\underline{U},X}$ en supposant d'abord $exp(X)\eta$ fortement régulier. On réalise maintenant cette distribution en utilisant les données auxiliaires $\underline{M}'_1(t)$,...,$\Delta_1(t)$. Notons $\boldsymbol{\delta}'_X$ l'intégrale orbitale stable associée à $exp(X)\eta_1(t)$. Par définition, son transfert est la distribution

$$\varphi\mapsto\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)}\Delta_1(t)(exp(X)\eta_1(t),exp(X[y])\eta[y])I^{\tilde{\underline{M}}}(exp(X[y])\eta[y],\varphi)$$

sur $\tilde{\underline{M}}(\mathbb{R})$, avec des notations similaires à celles utilisées plus haut. En appliquant à $\boldsymbol{\delta}'_X$ l'opérateur différentiel $\partial_{\underline{U}(t)}$, on obtient une distribution que l'on note $\boldsymbol{\delta}'_{\underline{U},X}$. Pour tout $y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)$, notons $\underline{T}[y]=ad_{y^{-1}}(\underline{T})$. On a encore un isomorphisme $\underline{\Xi}(t,y)$: $Sym(\underline{\mathfrak{t}}[y])\to Sym(\underline{\mathfrak{t}})$. En notant $\underline{U}[y]$ l'image réciproque de $\underline{U}(t)$ par cet isomorphisme, le transfert de $\boldsymbol{\delta}'_{\underline{U},X}$ est la distribution

$$\varphi\mapsto\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)}\Delta_1(t)(exp(X)\eta_1(t),exp(X[y])\eta[y])\partial_{\underline{U}[y]}I^{\tilde{\underline{M}}}(exp(X[y])\eta[y],\varphi).$$

Si $y=1$, on a $\underline{\Xi}(t,1)=\underline{\Xi}(t)$ donc $\underline{U}[1]=\underline{U}$. En fait, il résulte des définitions que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Sym(\underline{\mathfrak{t}}) \arrow[dd, "ad_{y^{-1}}"'] \arrow[dr, "\underline{\Xi}(t)"] & \\ & Sym(\underline{\mathfrak{t}}) \\ Sym(\underline{\mathfrak{t}}[y]) \arrow[ur, "\underline{\Xi}(t,y)"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Donc $\underline{U}[y]$ est simplement l'image de $\underline{U}$ par l'isomorphisme $ad_{y^{-1}}$. Pour obtenir le transfert de $\boldsymbol{\delta}_{\underline{U},X}$, il reste à diviser par $\Delta_1(t)(exp(X)\eta_1(t),exp(X)\eta)$. On obtient que ce transfert est la distribution

$$\varphi\mapsto\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)}\frac{\Delta_1(t)(exp(X)\eta_1(t),exp(X[y])\eta[y])}{\Delta_1(t)(exp(X)\eta_1(t),exp(X)\eta)}\partial_{\underline{U}[y]}I^{\tilde{\underline{M}}}(exp(X[y])\eta[y],\varphi).$$

On en déduit l'égalité

$$(13)\qquad \underline{S}(X,t)=i^{\tilde{G}}_{\tilde{\underline{M}}}(\eta)\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)}\frac{\Delta_1(t)(exp(X)\eta_1(t),exp(X[y])\eta[y])}{\Delta_1(t)(exp(X)\eta_1(t),exp(X)\eta)}$$

$$\partial_{\underline{U}[y]}I^{\tilde{G}}_{\tilde{\underline{M}}}(exp(X[y])\eta[y],f).$$

Remarquons que l'on peut choisir l'ensemble $\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)$ indépendant de X : il ne dépend que de $\underline{T}$. Notons-le plutôt $\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{T})$. Les considérations faites plus haut sur le facteur de transfert $\Delta_1(t)(exp(X)\eta_1(t),exp(X)\eta)$ s'appliquent aussi au facteur

$$\Delta_1(t)(exp(X)\eta_1(t),exp(X[y])\eta[y])$$

pour $y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{T})$. C'est-à-dire que $G'(t)_{\eta,SC}$ est un groupe endoscopique de $G_{\eta[y],SC}$. Ce dernier groupe n'est plus toujours $SL(2)$, ce peut être une forme intérieure. Mais le premier groupe est encore $SL(2)$ donc est la forme quasi-déployée du second. On peut encore choisir pour facteur de transfert pour cette donnée endoscopique celui qui vaut 1 sur tout couple d'éléments qui se correspondent. Il existe alors une constante non nulle $d(t,y)$ vérifiant la propriété suivante. Soient $X_{sc}[y] \in \mathfrak{g}_{\eta[y],SC}(\mathbb{R})$ et $X'_{sc} \in \mathfrak{g}'(t)_{\eta,SC}(\mathbb{R})$ deux éléments réguliers dont les classes de conjugaison stables se correspondent et soit $Z \in \mathfrak{z}(G_\eta;\mathbb{R})$ en position générale. Ces éléments sont tous deux proches de 0. Alors

$$(14) \qquad lim_{Z\to 0}\Delta_1(t)(exp(Z+X'_{sc})\eta_1(t), exp(Z[y]+X_{sc}[y])\eta) = d(t,y).$$

On peut prendre en particulier $X'_{sc} = rH_c$, pour un réel $r \neq 0$ et proche de 0, et $X_{sc}[y] = rH_c[y]$. Appliquons l'égalité (13) à $X = Z+rH_c$ et pour un élément $Z \in \mathfrak{z}(G_\eta;\mathbb{R})$ en position générale. Faisons tendre Z vers 0. Tous les termes sont continus en Z et on obtient l'égalité

$$\underline{S}(rH_c,t) = i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{T})} d(t,y)d(t,1)^{-1}\partial_{\underline{U}[y]} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c[y])\eta[y],f).$$

D'où

$$(15) \qquad \underline{S}(rH_c) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{T})} d(y)\partial_{\underline{U}[y]} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c[y])\eta[y],f),$$

où

$$d(y) = i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) \sum_{t\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{\underline{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} d(t,y)d(t,1)^{-1}.$$

On a par définition l'inclusion $\mathcal{Y}^M(\eta) = \mathcal{Y}^{\underline{M}}(\eta) \cap M$. D'où une application

$$(16) \qquad T\backslash\mathcal{Y}^M(\eta)/M(\mathbb{R}) \to \underline{M}_\eta\backslash\mathcal{Y}^{\underline{M}}(\eta)/\underline{M}(\mathbb{R}).$$

Montrons que

(17) cette application est injective ; son image est l'image dans l'espace d'arrivée de l'ensemble des $y \in \mathcal{Y}^{\underline{M}}(\eta)$ tels que le groupe $\underline{M}_{\eta[y],SC}$ soit isomorphe à $SL(2)$.

Le membre de gauche de (16) s'identifie au noyau de l'application

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}};T) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}};M)$$

tandis que celui de droite s'identifie au noyau de l'application

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}};\underline{M}_\eta) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}};\underline{M}).$$

L'injectivité de l'application (16) résulte de celle de l'application

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}};T) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}};\underline{M}_\eta),$$

laquelle provient du fait que T est un Levi de $\underline{M}_\eta$. Si $y \in \mathcal{Y}^{\underline{M}}(\eta)$, $ad_{y^{-1}}$ se relève en un torseur intérieur de $\underline{M}_{\eta,SC}$ sur $\underline{M}_{\eta[y],SC}$. Rappelons que le sous-tore T_d de $\underline{M}_{\eta,SC}$ se projette sur un sous-tore déployé du centre de M. Si $y \in M$, le tore $ad_{y^{-1}}(T_d)$ se projette sur le même tore. Il en résulte que $ad_{y^{-1}}(T_d)$ est défini sur $\mathbb{R}$ et est déployé. Le groupe $\underline{M}_{\eta[y],SC}$ est donc une forme intérieure de $SL(2)$ qui contient un sous-tore déployé non trivial. Cela implique qu'il est isomorphe à $SL(2)$. Inversement, supposons que $\underline{M}_{\eta[y],SC}$ soit isomorphe à $SL(2)$. Quitte à multiplier à gauche y par un élément de $\underline{M}_\eta$, on peut supposer que $ad_{y^{-1}}$ induit un isomorphisme défini sur $\mathbb{R}$ de $\underline{M}_{\eta,SC}$ sur $\underline{M}_{\eta[y],SC}$. Alors

$ad_{y^{-1}}$ induit aussi un isomorphisme défini sur $\mathbb{R}$ de $\underline{M}_\eta$ sur $\underline{M}_{\eta[y]}$. Le groupe $A_{\tilde{M}}$ est inclus dans $\underline{M}_\eta$. Posons $A' = ad_{y^{-1}}(A_{\tilde{M}})$. Alors A' est un tore défini et déployé sur $\mathbb{R}$. Son commutant est le groupe $M' = ad_{y^{-1}}(M)$ et est défini sur $\mathbb{R}$. Soit P un sous-groupe parabolique de $\underline{M}$ de Levi M. Posons $P' = ad_{y^{-1}}(P)$. Puisque P est déterminé par son ensemble associé de racines positives, qui sont des caractères de $A_{\tilde{M}}$, le parabolique P' est déterminé par le même ensemble transporté à A' par $ad_{y^{-1}}$. Donc P' est défini sur $\mathbb{R}$. Les paires (P, M) et (P', M') sont toutes deux définies sur $\mathbb{R}$ et sont conjuguées par $y \in \underline{M}(\mathbb{C})$. On sait qu'alors elles sont aussi conjuguées par un élément de $\underline{M}(\mathbb{R})$. Autrement dit, quitte à multiplier à droite y par un élément de $\underline{M}(\mathbb{R})$, on peut supposer que les deux paires sont égales. On a alors $ad_{y^{-1}}(P, M) = (P, M)$, ce qui entraîne $y \in M$. Cela prouve (17).

En vertu de (17), on peut supposer $\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta) \subset \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\eta)$. La démonstration montre que l'on peut supposer que, pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$, $ad_{y^{-1}}$ se restreint en un isomorphisme défini sur $\mathbb{R}$ de $\underline{M}_\eta$ sur $\underline{M}_{\eta[y]}$.

Puisque $\underline{T} \subset \underline{M}_\eta$, on a l'inclusion $\mathcal{Y}^{\underline{M}}(exp(X)\eta) \subset \mathcal{Y}^{\underline{M}}(\eta)$ pour tout $X \in \underline{\mathfrak{t}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$. On en déduit une application naturelle

$$\underline{T}\backslash\mathcal{Y}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)/\underline{M}(\mathbb{R}) \to \underline{M}_\eta\backslash\mathcal{Y}^{\underline{M}}(\eta)/\underline{M}(\mathbb{R}).$$

Cette application est surjective. Cela résulte du fait que $\underline{T}$ est un sous-tore fondamental de $\underline{M}_\eta$ et se transfère donc à toute forme intérieure de ce groupe. Autrement dit, on peut choisir notre système $\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{T})$ vérifiant la propriété suivante. Il y a une application surjective

$$q : \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{T}) \to \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\eta)$$

telle que, pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{T})$, $q(y)$ est l'unique élément de $\underline{M}_\eta y \cap \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\eta)$. On détermine les fibres de l'application q. Pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\eta)$, la classe de conjugaison stable dans $\underline{\mathfrak{m}}_{\eta,SC}$ d'un X comme ci-dessus se transfère par $ad_{y^{-1}}$ en une classe de conjugaison stable dans $\underline{\mathfrak{m}}_{\eta[y],SC}$. L'ensemble $\{ad_{y'}^{-1}(X); y' \in q^{-1}(y)\}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $\underline{M}_{\eta[y]}(\mathbb{R})$ dans cette classe de conjugaison stable.

Montrons que

(18) on a $d(y) = 1$ pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{T})$ tel que $q(y) \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$ tandis que $d(y) = 0$ pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{T})$ tel que $q(y) \notin \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$.

C'est en fait un cas particulier de la proposition [III] 8.4. Reprenons partiellement le calcul. Si $q(y) \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$, on peut appliquer la définition (14) aux éléments $X_{sc}[y] = H_d[q(y)]$ et $X'_{sc} = H_d$. On obtient que, pour tout $t \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{\underline{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, on a l'égalité

$$d(t, y)d(t, 1)^{-1} = lim_{Z\to 0}\frac{\Delta_1(t)(exp(Z + H_d)\eta_1(t), exp(Z[y] + H_d[q(y)])\eta)}{\Delta_1(t)(exp(Z + H_d)\eta_1(t), exp(Z + H_d)\eta)}.$$

Les éléments $exp(Z[y] + H_d[q(y)])\eta$ et $exp(Z + H_d)\eta$ appartiennent à la même classe de conjugaison stable dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Le facteur $\Delta_1(t)$, restreint aux éléments de $\tilde{M}_1(t; \mathbb{R}) \times \tilde{M}(\mathbb{R})$, est un facteur pour la donnée endoscopique triviale $\mathbf{M}$ de $(M, \tilde{M})$. Il est donc invariant par conjugaison stable en la deuxième variable. Le rapport ci-dessus vaut donc 1. Puisque $i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta)$ est l'inverse du nombre d'éléments de l'ensemble de sommation $Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{\underline{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, on obtient la première assertion. Supposons maintenant $q(y) \notin \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$. Le cocycle $\sigma \mapsto y\sigma(y)^{-1}$ à valeurs dans G_η se pousse en un cocycle à valeurs dans $G_{\eta,ad}$, ce groupe étant l'image de G_η dans G_{AD}. On note $\tau[y]$ sa classe. Introduisons le tore $\hat{T}$ dual de T (ce n'est plus le tore d'une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$ comme au début du paragraphe). Puisque T est un sous-tore maximal de M comme de G_η, on a des plongements $\hat{T} \subset \hat{M}$ et $\hat{T} \subset \hat{G}_\eta$. Le second réalise $\hat{T}$ comme Levi de $\hat{G}_\eta$. Il est équivariant pour les actions galoisiennes. Du premier plongement se déduit une inclusion $Z(\hat{M}) \to \hat{T}$, qui est équivariante pour les actions galoisiennes. D'où un plongement $Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \subset \hat{T}^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \subset \hat{G}_\eta^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Puisque $\hat{\alpha}$ est la seule racine (au signe près) de $\hat{G}_\eta$, $Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}$ est exactement l'image réciproque de $Z(\hat{G}_\eta)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ par le plongement précédent. Notons $\hat{M}_{sc}$ et $\hat{T}_{sc}$ les images réciproques de $\hat{M}$ et $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et notons $\hat{G}_{\eta,sc}$ le groupe dual de $G_{\eta,ad}$. On a pour ces groupes des propriétés analogues aux précédentes. Soit $t \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}$. On choisit un élément $t_{sc} \in Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}},0}$ qui se projette dans $\hat{G}_{AD}$ sur le même élément que t. Alors t_{sc} s'identifie à un élément de $Z(\hat{G}_{\eta,sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, que l'on projette dans le groupe des composantes connexes $\pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}})$. On note $u(t)$ son image. Remarquons qu'elle peut dépendre du choix de t_{sc}. On a un produit sur

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{\eta,ad}) \times \pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}).$$

Le calcul de [III] 8.4 montre que

$$d(t,y)d(t,1)^{-1} =< \tau[y], u(t) > .$$

Remarque. On pourrait aussi utiliser le théorème 5.1.D de [12] pour obtenir cette formule.

Notons $Ann[y]$ l'annulateur de $\tau[y]$ dans $\pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}})$. La formule montre que l'image $v(t)$ de $u(t)$ dans le quotient $\pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}})/Ann[y]$ est bien déterminée. On obtient ainsi une application

$$v : Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to \pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}})/Ann[y].$$

C'est un homomorphisme. Pour prouver la nullité de $d(y)$, il suffit de prouver que l'image de v n'est pas réduite à $\{1\}$. Or cette image contient l'image naturelle du noyau de l'homomorphisme

$$(19) \qquad \pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}) \to \pi_0(\hat{T}_{sc}^{\Gamma_{\mathbb{R}}}).$$

En effet, un élément x de ce noyau se relève en un élément $t_{sc} \in Z(\hat{G}_{\eta,sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \cap \hat{T}_{sc}^{\Gamma_{\mathbb{R}},0}$. Parce que T est elliptique dans M, on a l'égalité $\hat{T}_{sc}^{\Gamma_{\mathbb{R}},0} = Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}},0}$. Donc t_{sc} se projette en un élément $t \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Parce que $t_{sc} \in Z(\hat{G}_{\eta,sc})$, on a $t \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}$. On voit alors que $x = v(t)$, d'où l'assertion. Il nous suffit de prouver que le noyau de (19) n'est pas contenu dans $Ann[y]$. On a un homomorphisme naturel

$$\pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}) \to \pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}).$$

Son image est contenue dans le noyau de (19). En effet, puisque $\hat{G}_{\eta,SC} = SL(2,\mathbb{C})$, le groupe $\pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}})$ n'est autre que le centre $\{\pm 1\}$ de $\hat{G}_{\eta,SC}$, qui est contenu dans $\hat{T}_d = \hat{T}_d^{\Gamma_{\mathbb{R}},0}$, donc se projette dans $\hat{T}_{sc}^{\Gamma_{\mathbb{R}},0}$. Il suffit donc de prouver que l'image de $\pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}})$ n'est pas contenue dans $Ann[y]$. Cela équivaut à ce que l'image $\tau[y]_{AD}$ de $\tau[y]$ dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{\eta,AD})$ ne soit pas dans le noyau de l'accouplement entre les deux ensembles

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{\eta,AD}) \times \pi_0(Z(\hat{G}_{\eta,SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}).$$

Il résulte de [11] théorème 1.2 que ce dernier noyau est réduit à l'élément $1 \in H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{\eta,AD})$. Or $\tau[y]_{AD}$ détermine la forme intérieure $G_{\eta[y],SC}$ de $G_{\eta,SC}$. L'hypothèse sur y et l'assertion (17) entraînent que cette forme intérieure est non déployée, donc que $\tau[y]_{AD}$ n'est pas égal à 1. Cela achève la preuve de (18).

En utilisant (18), on transforme l'égalité (15) en

$$(20) \qquad \underline{S}(rH_c) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} \sum_{y'\in q^{-1}(y)} \partial_{\underline{U}[y']} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c[y'])\eta[y], f).$$

Remplaçons X par rH_c dans la formule (12) et utilisons (11). On isole le terme $s=1$ pour lequel on peut prendre pour $\mathbf{G}'(s)$ des données auxiliaires triviales. On a pour celles-ci $\tau(1,0)=1$. On obtient

$$\underline{S}(rH_c) = i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta)\partial_{\underline{U}} S_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c\eta, f)$$

$$+ \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s)) i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\eta)\tau(s;0)\partial_{\underline{U}(s)} S_{\underline{\tilde{M}}'_1(s),\lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(exp(rH_c)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

En utilisant cette égalité et l'égalité (10), on voit que

$$(21) \qquad \partial_U S_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta, f) - \partial_U S_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(-rH_d)\eta, f)$$

$$-2\pi i|\check{\alpha}| i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta)\partial_{\underline{U}} S_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c)\eta, f)$$

est la somme des expressions suivantes

$$(22) \qquad \partial_U\phi(rH_d) - \partial_U\phi(-rH_d);$$

$$(23) \qquad \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} (\partial_{U[y]} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta[y], f) - \partial_{U[y]} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(-rH_d)\eta[y], f));$$

$$(24) \qquad -2\pi i|\check{\alpha}|\underline{S}(rH_c);$$

$$(25) \qquad \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))\tau(s;0)C(r,s),$$

où

$$C(r,s) = 2\pi i|\check{\alpha}| i_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\eta)\partial_{\underline{U}(s)} S_{\underline{\tilde{M}}'_1(s),\lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(exp(rH_c)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)})$$

$$-\partial_{U(s)} S_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(exp(rH_d)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)}) + \partial_{U(s)} S_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(exp(-rH_d)\eta_1(s), f^{\tilde{G}'_1(s)}).$$

Parce que ϕ est C^∞, la limite de (22) quand r tend vers 0 est nulle. Pour $s\in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, $s\neq 1$, on peut utiliser par récurrence l'assertion (iv) de l'énoncé. On a donc $lim_{r\to 0}C(r,s)=0$ et la limite de l'expression (25) quand r tend vers 0 est nulle. En utilisant (20), on voit que la somme de (23) et de (24) s'écrit

$$\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} D(r,y),$$

où

$$D(r,y) = \partial_{U[y]} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta[y], f) - \partial_{U[y]} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(-rH_d)\eta[y], f)$$

$$-2\pi i|\check{\alpha}| \sum_{y'\in q^{-1}(y)} \partial_{\underline{U}[y']} I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c[y'])\eta[y], f).$$

Fixons y. Comme on l'a dit, le nombre d'éléments de $q^{-1}(y)$ est le nombre de classes de conjugaison par $G_{\eta[y]}(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de $exp(rH_c[y'])\eta[y])$, pour tout $y'\in q^{-1}(y)$. Autrement dit, il est égal à $2^{c(\eta[y])}$, avec la notation de la proposition 4.1. On peut donc récrire

$$D(r,y)=2^{-c(\eta[y])}\sum_{y'\in q^{-1}(y)}D'(r,y'),$$

où

$$D'(r,y')=\partial_{U[y]}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta[y],f)-\partial_{U[y]}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},mod}(exp(-rH_d)\eta[y],f)$$
$$-2^{1+c(\eta[y])}\pi i|\check{\alpha}|\partial_{\underline{U}[y']}I_{\underline{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(exp(rH_c[y'])\eta[y],f).$$

La proposition 4.1 nous dit que, pour tout $y'\in q^{-1}(y)$, $lim_{r\to 0}D'(r,y')=0$. Il en résulte que la limite quand r tend vers 0 de la somme des expressions (23) et (24) est nulle. On conclut que la limite quand r tend vers 0 de l'expression (21) est nulle. C'est ce qu'affirme le (iv) de l'énoncé. Cela achève la démonstration. □

4.3 Sauts des intégrales orbitales pondérées endoscopiques

On conserve les hypothèses de 4.1, le triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ étant de nouveau général. On suppose que $\tilde{G}$ est une composante connexe d'un K-espace $K\tilde{G}$ et que les espaces de Levi $\tilde{M}$ et $\underline{\tilde{M}}$ sont des composantes connexes de K-espaces de Levi $K\tilde{M}$ et $K\tilde{G}$. Pour $X\in\mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R})\cap\mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$ assez proche de 0, notons $\boldsymbol{\gamma}(X)$ la distribution $\varphi\mapsto I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,\varphi)$ pour $\varphi\in C_c^{\infty}(K\tilde{M}(\mathbb{R}))$. Parce que l'élément $exp(X)\eta$ de $\tilde{M}(\mathbb{R})$ est $\tilde{G}$-équisingulier, $\boldsymbol{\gamma}(X)$ appartient à $D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. On a défini en [V] 1.8 la distribution

$$f\mapsto I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}(X),f)$$

pour $f\in C_c^{\infty}(K\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On note maintenant ce terme $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f)$. De même, on définit $I_{K\underline{\tilde{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f)$. On définit alors comme en 4.1 l'intégrale modifiée

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E},mod}(exp(X)\eta,\omega,f)=I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f)+|\check{\alpha}|log(|\alpha(X)|)I_{K\underline{\tilde{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f).$$

Proposition. *Soient $f\in C_c^{\infty}(K\tilde{G}(\mathbb{R}))$.*

(i) Pour tout $U\in Sym(\mathfrak{t}^{\theta})$, les limites

$lim_{r\to 0+}\partial_U I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)$ et $lim_{r\to 0-}\partial_U I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)$ existent.

(ii) Si $w_d(U)=U$, ces limites sont égales.

(iii) Pour tout $\underline{U}\in Sym(\underline{\mathfrak{t}}^{\theta})$, les limites

$lim_{r\to 0+}\partial_{\underline{U}}I_{K\underline{\tilde{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f)$ et $lim_{r\to 0-}\partial_{\underline{U}}I_{K\underline{\tilde{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f)$ existent.

(iv) Soit $U\in Sym(\mathfrak{t}^{\theta})$, supposons $w_d(U)=-U$ et posons $\underline{U}=C(U)$. Alors on a les égalités

$$lim_{r\to 0+}\partial_U I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)-lim_{r\to 0-}\partial_U I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)$$

$$=2^{1+c(\eta)}\pi i|\check{\alpha}|\,lim_{r\to 0+}\partial_{\underline{U}}I_{K\underline{\tilde{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f)$$

$$= -2^{1+c(\eta)}\pi i|\check{\alpha}|\, lim_{r\to 0-}\partial_{\underline{U}} I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f).$$

La preuve occupe les deux paragraphes suivants.

4.4 Formules d'inversion

On note $(\tilde{G}_p)_{p\in\Pi}$ le K-espace $K\tilde{G}$ et p_0 l'indice tel que $\tilde{G}=\tilde{G}_{p_0}$. On pose simplement $\phi_p=\phi_{p_0,p}$, $\tilde{\phi}_p=\tilde{\phi}_{p_0,p}$, $\nabla_p=\nabla_{p_0,p}$, cf. [I] 1.11. Les K-espaces $K\tilde{M}$ et $K\tilde{\underline{M}}$ sont indexés par des sous-ensembles $\Pi^M\subset\Pi^{\underline{M}}\subset\Pi$. On peut supposer que, pour $p\in\Pi^M$, resp. $p\in\Pi^{\underline{M}}$, ∇_p prend ses valeurs dans M_{SC}, resp. $\underline{M}_{SC}$, et $\tilde{\phi}_p(\tilde{M}_p)=\tilde{M}$, resp. $\tilde{\phi}_p(\tilde{\underline{M}}_p)=\tilde{\underline{M}}$. On fixe comme toujours une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$ de $\hat{G}$ conservée par l'action galoisienne, dont on note le tore $\hat{T}$ (pour ce qui est des actions galoisiennes, il ne s'agit pas du tore dual de T). On fixe un élément $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$ et un élément $\tilde{\underline{P}}\in\mathcal{P}(\tilde{\underline{M}})$ tels que $\tilde{P}\subset\tilde{\underline{P}}$. A l'aide de ces espaces paraboliques, on peut identifier les groupes duaux $\hat{M}$ et $\hat{\underline{M}}$ à des Levi de $\hat{G}$ qui sont standard pour $\hat{\mathcal{E}}$.

Pour tout élément semi-simple fortement régulier $\gamma\in\tilde{M}(\mathbb{R})$, notons $\mathcal{X}^M(\gamma)$ l'ensemble des couples $(\mathbf{M}',\delta)$, où $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$ et $\delta\in\tilde{M}'(\mathbb{R})$ est un élément semi-simple (forcément fortement régulier) qui correspond à γ. Deux tels couples $(\mathbf{M}'_1,\delta_1)$ et $(\mathbf{M}'_2,\delta_2)$ sont dits équivalents s'il existe une équivalence entre $\mathbf{M}'_1$ et $\mathbf{M}'_2$, à laquelle est associé un isomorphisme $\tilde{\iota}:\tilde{M}'_1\to\tilde{M}'_2$ défini sur $\mathbb{R}$, de sorte que δ_2 soit stablement conjugué à $\tilde{\iota}(\delta_1)$. On fixe un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{X}}^M(\gamma)$ des classes d'équivalence dans $\mathcal{X}^M(\gamma)$.

Considérons un élément $X_0\in\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ proche de 0 tel que $exp(X_0)\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. On indexe $\dot{\mathcal{X}}^M(exp(X_0)\eta)$ par un ensemble fini J : $\dot{\mathcal{X}}^M(exp(X_0)\eta)=(\mathbf{M}'_j,\delta_j)_{j\in J}$. On note T'_j le commutant de δ_j dans M'_j et on pose $\tilde{T}'_j=T'_j\delta_j$. Le choix d'un diagramme $(\delta_j,B'_j,T'_j,B^M,T,exp(X_0)\eta)$ détermine un homomorphisme $\xi_j:T\to T'_j\simeq T/(1-\theta)(T)$. Il s'étend en une application compatible $\tilde{\xi}_j:\tilde{T}\to\tilde{T}'_j$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\tilde{\xi}_j(exp(X_0)\eta)=\delta_j$. On pose $\epsilon_j=\tilde{\xi}_j(\eta)$. Alors $(\epsilon_j,B'_j,T'_j,B^M,T,\eta)$ est encore un diagramme. On vérifie que, pour tout $X\in\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ proche de 0 et tel que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$, on peut choisir pour ensemble $\dot{\mathcal{X}}^M(exp(X)\eta)$ l'ensemble $(\mathbf{M}'_j,exp(\xi_j(X))\epsilon_j)_{j\in J}$. On fixe pour tout j des données auxiliaires $M'_{j,1}$,...,$\Delta_{j,1}$, un élément $\epsilon_{j,1}\in\tilde{M}'_{j,1}(\mathbb{R})$ au-dessus de ϵ_j et on note $\tilde{T}'_{j,1}$ l'image réciproque de $\tilde{T}'_j$ dans $\tilde{M}'_{j,1}$. On fixe aussi une décomposition

$$\mathfrak{t}'_{j,1}=\mathfrak{c}_{j,1}\oplus\mathfrak{t}'_j$$

selon la recette de 3.1. Rappelons que $\tilde{T}$ est elliptique dans $\tilde{M}$. La formule d'inversion [I] 4.9(5) se traduit ainsi. Pour $f\in C_c^\infty(K\tilde{M}(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,f)=[T^\theta(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|J|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}\sum_{j\in J}\Delta_{j,1}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{1,j},exp(X)\eta)^{-1}$$

$$S_{\lambda_{j,1}}^{\tilde{M}'_{j,1}}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{1,j},f^{\tilde{M}'_{j,1}}).$$

Tous les termes sont continus en un point $exp(X)\eta$ qui est seulement régulier dans $\tilde{M}$ (et non fortement régulier). Or, puisque η lui-même est régulier dans $\tilde{M}$, c'est le cas de tout

$exp(X)\eta$ pour X voisin de 0. La formule ci-dessus est donc vérifiée en tout X proche de 0.

On peut traduire cette formule de la façon suivante. Notons $\boldsymbol{\gamma}(X)$ la distribution $I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,.)$ et, pour tout j, $\boldsymbol{\delta}_j(X)$ l'élement de $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}'_j)$ à laquelle s'identifie la distribution $S^{\tilde{M}'_{j,1}}_{\lambda_{j,1}}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{1,j},.)$, multipliée par $\Delta_{j,1}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{1,j},exp(X)\eta)^{-1}$. Remarquons que cette distribution est indépendante des données auxiliaires $M'_{j,1}$,...,$\Delta_{j,1}$. Alors

$$(1)\qquad \boldsymbol{\gamma}(X)=[T^\theta(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|J|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}\sum_{j\in J}transfert(\boldsymbol{\delta}_j(X)).$$

Pour tout élément semi-simple $\gamma\in\tilde{G}(\mathbb{R})$ et tout $p\in\Pi$, on note $\mathcal{Y}_p(\gamma)$ l'ensemble des $y\in G$ tels que $y\nabla_p(\sigma)\sigma(y)^{-1}\in I_\gamma$ pour tout $\sigma\in\Gamma_{\mathbb{R}}$ (on rappelle que $I_\gamma=Z(G)^\theta G_\gamma$). Pour y dans cet ensemble, on pose $\gamma[y]=\tilde{\phi}_p^{-1}(y^{-1}\gamma y)$. Alors $\gamma[y]\in\tilde{G}_p(\mathbb{R})$. On fixe un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{Y}}_p(\gamma)$ de l'ensemble des doubles classes $I_\gamma\backslash\mathcal{Y}_p(\gamma)/\phi_p(G_p(\mathbb{R}))$. On note $\mathcal{Y}(\gamma)$, resp. $\dot{\mathcal{Y}}(\gamma)$, la réunion disjointe des $\mathcal{Y}_p(\gamma)$, resp. $\dot{\mathcal{Y}}_p(\gamma)$, pour $p\in\Pi$. Si γ est fortement régulier, l'ensemble $\{\gamma[y];y\in\dot{\mathcal{Y}}(\gamma)\}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de γ. Si $\tilde{L}$ est un espace de Levi de $\tilde{G}$, composante connexe d'un K-espace de Levi $K\tilde{L}$ de $K\tilde{G}$, et si $\gamma\in\tilde{L}(\mathbb{R})$, on peut effectuer les mêmes constructions en remplaçant $K\tilde{G}$ par $K\tilde{L}$. On affecte d'un exposant L les objets obtenus, par exemple $\dot{\mathcal{Y}}^L(\gamma)$.

Soit comme ci-dessus $X\in\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ proche de 0 et tel que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{M}(F)$. On a $I^M_{exp(X)\eta}=T^\theta$. Les définitions des ensembles $\dot{\mathcal{Y}}^M(exp(X)\eta)$ et $\dot{\mathcal{Y}}^M_p(exp(X)\eta)$ ne dépendent que de ce groupe. On peut donc les choisir indépendant de X et on les note plutôt $\dot{\mathcal{Y}}^M(\tilde{T})$ et $\dot{\mathcal{Y}}^M_p(\tilde{T})$. Soient $p\in\Pi^M$ et $y\in\mathcal{Y}^M_p(\tilde{T})$. On pose $\tilde{T}[y]=\tilde{\phi}_p^{-1}\circ ad_{y^{-1}}(\tilde{T})$, $\eta[y]=\tilde{\phi}_p^{-1}\circ ad_{y^{-1}}(\eta)$, $X[y]=\phi_p^{-1}\circ ad_{y^{-1}}(X)$. Pour $j\in J$, notons $\boldsymbol{\delta}'_j(X)$ l'élement de $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}'_j)$ à laquelle s'identifie la distribution $S^{\tilde{M}'_{j,1}}_{\lambda_{j,1}}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{1,j},.)$. La formule d'inversion [I] 4.9(4) se traduit par

$$transfert(\boldsymbol{\delta}'_j(X))=d(\theta^*)^{1/2}\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M(\tilde{T})}[T[y]^\theta(\mathbb{R}):T[y]^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}$$

$$\Delta_{j,1}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{j,1},exp(X[y])\eta[y])\boldsymbol{\gamma}(X,y),$$

où $\boldsymbol{\gamma}(X,y)$ est la distribution $I^{K\tilde{M}}(exp(X[y])\eta[y],\omega,.)$. Pour obtenir le transfert de $\boldsymbol{\delta}_j(X)$, il suffit de diviser par $\Delta_{j,1}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{1,j},exp(X)\eta)$. Considérons le rapport

$$\frac{\Delta_{j,1}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{j,1},exp(X[y])\eta[y])}{\Delta_{j,1}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{1,j},exp(X)\eta)}.$$

Puisque $exp(\xi_j(X))\eta[y]$ et $exp(X)\eta$ sont stablement conjugués, cette conjugaison stable étant réalisée par l'élément y qui est indépendant de X, il résulte de [12] théorème 5.1.D(1) que ce rapport est d'une part indépendant de X, d'autre part indépendant des données auxiliaires $M'_{j,1}$,...,$\Delta_{j,1}$. On le note $d_j(y)$. On obtient

$$(2)\qquad transfert(\boldsymbol{\delta}_j(X))=d(\theta^*)^{1/2}\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M(\tilde{T})}[T[y]^\theta(\mathbb{R}):T[y]^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}d_j(y)\boldsymbol{\gamma}(X,y).$$

On peut évidemment supposer que notre ensemble $\dot{\mathcal{Y}}^M(\tilde{T})$ contient l'élément $y=1$. En comparant les formules (1) et (2), on obtient pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\tilde{T})$ l'égalité

$$(3) \qquad |J|^{-1}\sum_{j\in J} d_j(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y=1, \\ 0, & \text{si } y\neq 1. \end{cases}$$

Fixons $j \in J$. On note $\mathbf{M}'_j = (M'_j, \mathcal{M}'_j, \tilde{\zeta}_j)$. Pour $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$, on introduit des données supplémentaires $G'_1(\tilde{s})$,...,$\Delta_1(\tilde{s})$ pour la donnée endoscopique $\mathbf{G}'(\tilde{s})$. On fixe un point $\epsilon_1(\tilde{s})$ au-dessus de ϵ_j et on note $\tilde{M}'_1(\tilde{s})$ et $\tilde{T}'_1(\tilde{s})$ les images réciproques de $\tilde{M}'_j$ et $\tilde{T}'_j$ dans $\tilde{G}'_1(\tilde{s})$. On fixe aussi une décomposition

$$\mathfrak{t}'_1(\tilde{s}) = \mathfrak{c}_1(\tilde{s}) \oplus \mathfrak{t}'_j$$

selon la recette de 3.1. On a fixé une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$ de $\hat{G}$, dont on a noté le tore $\hat{T}$. On peut supposer $\tilde{\zeta}_j = \zeta_j\hat{\theta}$ et on écrit tout élément $\tilde{s}$ sous la forme $s\hat{\theta}$. On a fixé un diagramme $(\epsilon_j, B'_j, T'_j, B^M, T, \eta)$ reliant ϵ_j et η, d'espaces ambiants $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'_j$. On a aussi fixé un élément $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$. Notons B le sous-groupe de Borel de G tel que $B \subset P$ et $B \cap M = B^M$. On vérifie que le diagramme s'étend pour tout $\tilde{s}$ en un diagramme $(\epsilon_j, B'(\tilde{s}), T'_j, B, T, \eta)$, d'espaces ambiants $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'(\tilde{s})$. On complète (B,T) en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ de G. On fixe un élément $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ et on écrit $\eta = \nu e$, avec $\nu \in T$. Le groupe G_η a une unique racine (au signe près) que l'on a notée α. C'est un élément de $X^*(T^{\theta,0})$. Rappelons que l'on note $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans G. Introduisons un élément $\beta \in \Sigma(T)$ dont la restriction β_{res} à $T^{\theta,0}$ soit α. La coracine $\check{\alpha}$ est alors $N(\check{\beta})$ si β est de type 1 ou 3, $2N(\check{\beta})$ si β est de type 2. D'après [19] 3.3, l'ensemble des racines de G_η est formé des β'_{res}, pour $\beta' \in \Sigma(T)$ tels que $N(\beta')(\nu)=1$ si β' est de type 1 ou 2, $N(\beta')(\nu) = -1$ si β' est de type 3. Notre hypothèse est donc que cet ensemble de racines se réduit aux racines de la forme $\pm\theta^k(\beta)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Il correspond à β une racine $\hat{\beta}$ de $\hat{T}$. De la description de l'ensemble de racines de $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j}$ donnée en [19] 3.3 se déduisent les résultats suivants. Le groupe $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j}$ est un tore ou de rang semi-simple 1. Il est de rang semi-simple 1 si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(a) β de type 1 et $N(\hat{\beta})(s) = 1$;
(b) β de type 2 et $N(\hat{\beta})(s) = 1$:
(c) β de type 2 et $N(\hat{\beta})(s) = -1$;
(d) β de type 3 et $N(\hat{\beta})(s) = 1$.

L'unique racine $\alpha(\tilde{s})$ et l'unique coracine $\check{\alpha}(\tilde{s})$ de $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j}$ (au signe près) se décrivent dans chacun des cas de la façon suivante :

(a) $\alpha(\tilde{s}) \circ \xi_j = N(\beta)$, $\check{\alpha}(\tilde{s}) = \xi_j \circ \check{\beta}$;
(b) $\alpha(\tilde{s}) \circ \xi_j = 2N(\beta)$, $\check{\alpha}(\tilde{s}) = \xi_j \circ \check{\beta}$;
(c) $\alpha(\tilde{s}) \circ \xi_j = N(\beta)$, $\check{\alpha}(\tilde{s}) = 2\xi_j \circ \check{\beta}$;
(d) $\alpha(\tilde{s}) \circ \xi_j = 2N(\beta)$, $\check{\alpha}(\tilde{s}) = \frac{1}{2}\xi_j \circ \check{\beta}$.

Puisque β se restreint en un élément non nul de $X_*(A_{\tilde{M}})$, $N\hat{\beta}$ se restreint en un caractère non trivial de $Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta},0}$. Quitte à multiplier $\tilde{\zeta}_j$ par un élément de ce groupe, on peut supposer $N(\hat{\beta})(\zeta_j) = 1$. Posons $\hat{\alpha}^* = N(\hat{\beta})$ si β est de type 1 ou 3, $\hat{\alpha}^* = 2N(\hat{\beta})$ si β est de type 2. Notons $Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}$ l'ensemble des $t \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$ tels que $\hat{\alpha}^*(t) = 1$. Pour $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$, le groupe $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j}$ est de rang semi-simple 1 si et seulement si $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. Supposons cette condition vérifiée. Le groupe $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j,SC}$ est isomorphe à $SL(2)$. Remarquons que, puisque β_{res} est fixe par $\Gamma_{\mathbb{R}}$, il en est de même de la racine $\alpha(\tilde{s})$ de $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j}$. On note $\tilde{\underline{M}}'(\tilde{s})$ l'espace de Levi de $\tilde{G}'(\tilde{s})$ tel que $\mathcal{A}_{\tilde{\underline{M}}'(\tilde{s})}$ soit le noyau de la racine $\alpha(\tilde{s})$ vue comme forme linéaire sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}'_j}$. On note $\tilde{\underline{M}}'_1(\tilde{s})$ son image réciproque dans $\tilde{G}'_1(\tilde{s})$. On voit que $\tilde{\underline{M}}'(\tilde{s})$ n'est autre que l'espace endoscopique de la donnée endoscopique $\mathbf{\underline{M}}'(\tilde{s})$ de $(\underline{M}, \tilde{\underline{M}}, \mathbf{a})$ associée à $\tilde{s}$. Cette donnée est elliptique. En effet, on a les inclusions

$$\mathcal{A}_{\tilde{\underline{M}}} \subset \mathcal{A}_{\tilde{\underline{M}}'(\tilde{s})} \subsetneq \mathcal{A}_{\tilde{M}'_j} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}.$$

Puisque la différence des dimensions des deux espaces extrêmes est 1, la première inclusion est une égalité, ce qui prouve l'ellipticité. D'autre part, d'après la définition de $\tilde{\underline{M}}'(\tilde{s})$, on a $\underline{M}'(\tilde{s})_{\epsilon_j} = G'(\tilde{s})_{\epsilon_j}$.

Soit $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}$. Utilisons la théorie locale rappelée en [III] section 5. On introduit la donnée endoscopique $\bar{\mathbf{G}}'(\bar{s})$ du groupe $G_{\eta,SC}$. La paire $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon_j,SC})$ se complète en un triplet endoscopique non standard. Mais on sait que $G_{\eta,SC}$ et $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j,SC}$ sont tous deux isomorphes à $SL(2)$. Il en résulte que $\bar{G}'(\bar{s})$ est lui-même simplement connexe et isomorphe à $SL(2)$. Le triplet endoscopique non standard est équivalent à un triplet "trivial". Notons toutefois que l'isomorphisme j_* entre les algèbres de Lie des tores déployés maximaux de ces groupes est en général un multiple de l'isomorphisme naturel entre ces deux algèbres (la notation j_* se réfère à [III] 6.1, elle n'a rien à voir avec notre élément $j \in J$). La donnée $\bar{\mathbf{G}}'(\bar{s})$ est la donnée endoscopique maximale de $G_{\eta,SC}$. On peut prendre pour cette donnée le facteur de transfert qui vaut 1 sur des couples d'éléments qui se correspondent. De l'homomorphisme $\xi_j : T \to T'_j$ se déduit un homomorphisme $\xi_j : \mathfrak{z}(G_\eta) \to \mathfrak{z}(G'(\tilde{s})_{\epsilon_j})$. La relation [V] 4.1(1) se traduit par l'existence d'une constante non nulle $d(\tilde{s})$ vérifiant la condition suivante. Soit $X_{sc} \in \mathfrak{g}_{\eta,SC}(\mathbb{R})$ un élément régulier. On le transfère en un élément $\bar{X}_{sc} \in \bar{\mathfrak{g}}'(\bar{s})(\mathbb{R})$ et on transfère celui-ci en un élément $X'_{sc} \in \mathfrak{g}'(\tilde{s})_{\epsilon_j,SC}(\mathbb{R})$. On suppose ces éléments proches de 0. Soit $Z \in \mathfrak{z}(G_\eta, \mathbb{R})$ en position générale. Alors

$$(4) \qquad lim_{Z\to 0}\Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(Z) + X'_{sc})\epsilon_1(\tilde{s}), exp(Z + X_{sc})\eta) = d(\tilde{s}).$$

Plus généralement, soit $p \in \Pi$ et $y \in \mathcal{Y}_p(\eta)$. L'application $\phi_p^{-1} \circ ad_{y^{-1}}$ se restreint en un torseur intérieur de G_η sur $G_{\eta[y]}$. Il se restreint en un isomorphisme défini sur $\mathbb{R}$ de $\mathfrak{z}(G_\eta)$ sur $\mathfrak{z}(G_{\eta[y]})$. On note $Z \mapsto Z[y]$ cet isomorphisme. Le groupe $G_{\eta[y],SC}$ n'est plus en général isomorphe à $SL(2)$, c'en est une forme intérieure. La donnée $\bar{\mathbf{G}}'(\bar{s})$ est encore la donnée endoscopique maximale de $G_{\eta[y],SC}$. On peut prendre pour cette donnée le facteur de transfert qui vaut 1 sur tout couple d'éléments qui se correspondent. La relation [V] 4.1(1) implique l'existence d'une constante non nulle $d(\tilde{s}, y)$ vérifiant la condition suivante. Soit $X_{sc}[y] \in \mathfrak{g}_{\eta[y],SC}(\mathbb{R})$ un élément régulier. On le transfère en un élément $\bar{X}_{sc} \in \bar{\mathfrak{g}}'(\bar{s})(\mathbb{R})$ et on transfère celui-ci en un élément $X'_{sc} \in \mathfrak{g}'(\tilde{s})_{\epsilon_j,SC}(\mathbb{R})$. On suppose ces éléments proches de 0. Soit $Z \in \mathfrak{z}(G_\eta, \mathbb{R})$ en position générale. Alors

$$(5) \qquad lim_{Z\to 0}\Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(Z) + X'_{sc})\epsilon_1(\tilde{s}), exp(Z[y] + X_{sc}[y])\eta) = d(\tilde{s}, y).$$

La constante $d(\tilde{s})$ introduite ci-dessus n'est autre que $d(\tilde{s}, 1)$.

On a introduit au début du paragraphe des données auxiliaires $M'_{j,1}$,...,$\Delta_{j,1}$. On peut prendre pour celles-ci les données $M'_1(\tilde{s})$,...,$\Delta_1(\tilde{s})$ (quant à $\Delta_1(\tilde{s})$, il s'agit plutôt ici de la restriction de ce facteur de transfert aux couples d'éléments de $\tilde{M}'_1(\tilde{s}, \mathbb{R}) \times \tilde{M}(\mathbb{R})$ qui se correspondent). Dans le cas où $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$, la constante $d_j(y)$ définie plus haut n'est autre que $d(\tilde{s}, y)d(\tilde{s}, 1)^{-1}$. Elle est indépendante du choix de $\tilde{s}$.

4.5 Preuve de la proposition 4.3

Soit $X \in \mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$. Considérons la formule 4.4(1). Toutes les distributions y intervenant sont $\tilde{G}$-équisingulières. On a alors par définition

$$(1) \qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}(X),f) = [T^{\theta}(\mathbb{R}) : T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|J|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}$$

$$\sum_{j\in J} I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_j,\boldsymbol{\delta}_j(X),f)$$

pour tout $f \in C_c^{\infty}(K\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Fixons $j \in J$ et utilisons les notations introduites dans le paragraphe précédent. Pour tout $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$, la distribution $\boldsymbol{\delta}_j(X)$ s'identifie à

$$\Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X)\eta)^{-1}S_{\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),.).$$

On a donc

$$(2) \qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_j,\boldsymbol{\delta}_j(X),f) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X)\eta)^{-1}S_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}).$$

Soit $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$, supposons d'abord $\tilde{s} \notin \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. Alors $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j}$ est un tore et ϵ_j est régulier dans $\tilde{G}'(\tilde{s})$. Il en résulte que la fonction

$$X \mapsto \Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X)\eta)^{-1}S_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})})$$

est C^{∞} au voisinage de 0. Supposons maintenant $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. Le groupe $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j,SC} = \underline{M}'(\tilde{s})_{\epsilon_j,SC}$ est isomorphe à $SL(2)$. On peut introduire l'intégrale orbitale pondérée stable modifiée

$$(3) \qquad S_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s}),mod}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}) = S_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})})$$

$$+i_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon_1)|\check{\alpha}(\tilde{s})|log(|\alpha(\tilde{s})(\xi_j(X))|)S_{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1,f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}).$$

D'après les formules de 4.4, on a $\alpha(\tilde{s})(\xi_j(X)) = n(\tilde{s})\beta(X) = n(\tilde{s})\alpha(X)$, où $n(\tilde{s}) = n_{\beta}$ ou $2n_{\beta}$ selon le cas. Donc $log(|\alpha(\tilde{s})(\xi_j(X))|) = log(n(\tilde{s})) + log(|\alpha(X)|)$. Le point ϵ_j, considéré comme un élément de $\underline{\tilde{M}}'(\tilde{s};\mathbb{R})$, est $\tilde{G}'(\tilde{s})$-équisingulier. Il existe donc une fonction $\varphi \in C_c^{\infty}(\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s},\mathbb{R}))$ telle que

$$S_{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1,f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}) = S_{\lambda_1(\tilde{s})}^{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s})}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1,\varphi)$$

pour tout X proche de 0. L'élément ϵ_j n'est pas régulier dans $\underline{\tilde{M}}(\tilde{s})$, mais la seule racine de T'_j singulière en ϵ_j est "réelle". Comme on le sait, cela entraîne que l'intégrale orbitale de droite ci-dessus est C^{∞} pour X proche de 0. Donc remplacer $log(|\alpha(\tilde{s})(\xi_j(X))|)$ par $log(|\alpha(X)|)$ dans la formule (3) modifie le membre de droite par une fonction C^{∞} au voisinage de $X = 0$. Le facteur de transfert

$$X \mapsto \Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X)\eta)^{-1}$$

est lui aussi C^∞ au voisinage de 0. En effet, $exp(X)\eta$ appartenant à $\tilde{M}(\mathbb{R})$, il s'agit d'un facteur de transfert pour une donnée auxiliaire de la donnée endoscopique $\mathbf{M}'_j$. Il est C^∞ car η est régulier dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Ces considérations transforment l'expression (2) sous la forme suivante.

$$(4) \qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_j, \boldsymbol{\delta}_j(X), f) = \phi_j(X) + B_j(X) - log(|\alpha(X)|)D_j(X)$$

où ϕ_j est une fonction C^∞ en $X = 0$,

$$B_j(X) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))\Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}), exp(X)\eta)^{-1}$$

$$S_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s}),mod}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}), f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}),$$

$$D_j(X) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))i_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon_1)|\check{\alpha}(\tilde{s})|\Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}), exp(X)\eta)^{-1}$$

$$S_{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}), f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}).$$

On récrit

$$D_j(X) = \sum_{\tilde{t}\in\tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} D_j(X, \tilde{t}),$$

où $D_j(X, \tilde{t})$ est la sous-somme de l'expression précédente sur l'ensemble des $\tilde{s} \in \tilde{t}Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$.

Fixons $\tilde{t} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. Cet élément détermine une donnée endoscopique $\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t})$ de $(\underline{M}, \underline{\tilde{M}}, \mathbf{a})$, qui est elliptique comme on l'a dit en 4.4. Soit $\tilde{s} \in \tilde{t}Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. Alors l'espace $\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s})$ fait partie de données auxiliaires pour cette donnée $\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t})$. Posons

$$m = [Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*} : Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}].$$

Montrons que

$$(5) \qquad i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))i_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s}))|\check{\alpha}(\tilde{s})| = m^{-1}i_{\underline{\tilde{M}}'(\tilde{t})}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))|\check{\alpha}|.$$

Rappelons que $i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$ est l'inverse du nombre d'éléments du noyau K_1 de l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} \to Z(\hat{M}'_j)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}.$$

Rappelons qu'un sous-tore maximal de $\hat{M}'_j$ s'identifie à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Notons $\hat{\alpha}'$ la restriction à ce tore de $N(\hat{\beta})$ si β est de type 1 ou 3, de $2N(\hat{\beta})$ si β est de type 2. Notons $Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}'}$ le groupe des $x \in Z(\hat{M}'_j)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ tels que $\hat{\alpha}'(x) = 1$. Alors $Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$ est l'image réciproque par l'homomorphisme précédent du groupe $Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}'}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. On a donc une suite exacte

$$1 \to K_1 \to Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} \to Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}'}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to 1.$$

Cette suite s'insère dans un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & K_2 & \to & Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} & \to & Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}'}/Z(\underline{\hat{M}}'(\tilde{t}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & \to & 1\\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & K_1 & \to & Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} & \to & Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}'}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & \to & 1\\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & K_3 & \to & Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} & \to & Z(\underline{\hat{M}}'(\tilde{t}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & \to & 1\\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

Les groupes K_2 et K_3 sont définis de sorte que les suites horizontales soient exactes. Les deux suites verticales de droite sont exactes. Donc aussi celle de gauche. D'où l'égalité

$$|K_1| = |K_2||K_3|.$$

Par définition, $|K_3|^{-1} = i_{\underline{\tilde{M}}'(\tilde{t})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$. D'où les égalités

$$i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s})) = |K_1|^{-1} = |K_2|^{-1} i_{\underline{\tilde{M}}'(\tilde{t})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s})).$$

La première suite horizontale ci-dessus est formée de groupes finis. Donc $|K_2|$ est le quotient du nombre d'éléments du groupe central de cette suite par le nombre d'éléments du groupe de droite. Le nombre d'éléments du groupe central est m. D'où l'égalité

$$(6) \qquad i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s})) = m^{-1}[Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}'} : Z(\underline{\hat{M}}'(\tilde{t}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}] i_{\underline{\tilde{M}}'(\tilde{t})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s})).$$

On a introduit deux sous-groupes de $Z(\hat{M}'_j)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$: les sous-groupes $Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}(\tilde{s})}$ et $Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}'}$. On calcule la racine $\hat{\alpha}(\tilde{s})$: les formules pour les racines dans les groupes duaux sont identiques à celles pour les coracines dans les groupes sur $\mathbb{R}$. A l'aide des descriptions de 4.4, on obtient dans chaque cas

(a) $\hat{\alpha}(\tilde{s}) = \hat{\beta}_{res}$, $\hat{\alpha}' = n_\alpha \hat{\beta}_{res}$ (l'indice res désignant la restriction à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$) ;
(b) $\hat{\alpha}(\tilde{s}) = \hat{\beta}_{res}$, $\hat{\alpha}' = 2n_\alpha \hat{\beta}_{res}$;
(c) $\hat{\alpha}(\tilde{s}) = 2\hat{\beta}_{res}$, $\hat{\alpha}' = 2n_\alpha \hat{\beta}_{res}$;
(d) $\hat{\alpha}(\tilde{s}) = \frac{1}{2}\hat{\beta}_{res}$, $\hat{\alpha}' = n_\alpha \hat{\beta}_{res}$.

En comparant avec les formules données en 4.4 pour les coracines, on obtient l'égalité

$$\hat{\alpha}' = |\check{\alpha}||\check{\alpha}(\tilde{s})|^{-1}\hat{\alpha}(\tilde{s}).$$

On a utilisé ici la compatibilité de nos différentes normes : elles proviennent de formes quadratiques sur $X_*(T^{\theta,0}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, resp. $X_*(T_j) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, qui se correspondent par l'isomorphisme naturel entre ces espaces. On déduit de ces calculs l'égalité

$$[Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}'} : Z(\underline{\hat{M}}'(\tilde{t}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}] = |\check{\alpha}||\check{\alpha}(\tilde{s})|^{-1}[Z(\hat{M}'_j)^{\hat{\alpha}(\tilde{s})} : Z(\underline{\hat{M}}'(\tilde{t}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}].$$

Par définition, le dernier terme ci-dessus est égal à $i_{\tilde{M}'_j}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon_j)^{-1}$. L'égalité (6) se transforme en

$$i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s})) i_{\tilde{M}'_j}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon_j)|\check{\alpha}(\tilde{s})| = m^{-1}|\check{\alpha}| i_{\underline{\tilde{M}}'(\tilde{t})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s})).$$

Le même calcul qu'en 4.2(4) montre que l'on a l'égalité

$$i_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s}))=i_{\tilde{M}'_j}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon_j)$$

et on en déduit (5).

A l'aide de cette égalité (5), on récrit

$$D_j(X,\tilde{t})=m^{-1}|\check{\alpha}|\sum_{\tilde{s}\in\tilde{t}\in Z(\hat{\underline{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}i_{\tilde{\underline{M}}'(\tilde{t})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))\Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X)\eta)^{-1}$$

$$S_{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}).$$

Il est clair que, pour tout $\tilde{s}$, l'intégrale orbitale stable associée à $exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s})$, multipliée par $\Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X)\eta)^{-1}$, s'identifie à une unique distribution appartenant à $D_{géom}^{st}(\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t}))$. C'est la distribution $\boldsymbol{\delta}_j(X)^{\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t})}$ induite de la distribution $\boldsymbol{\delta}_j(X)$ introduite en 4.4. L'égalité ci-dessus se récrit

$$D_j(X,\tilde{t})=m^{-1}|\check{\alpha}|I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t}),\boldsymbol{\delta}_j(X)^{\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t})},f).$$

Nos distributions sont à support $\tilde{G}$-équisingulier. On peut donc récrire

$$D_j(X,\tilde{t})=m^{-1}|\check{\alpha}|I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_j(X)^{\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t})}),f).$$

Ou encore, en utilisant la commutation du transfert à l'induction,

$$D_j(X,\tilde{t})=m^{-1}|\check{\alpha}|I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_j(X))^{\tilde{\underline{M}}},f).$$

Ceci est indépendant de $\tilde{t}$. Alors $D_j(X)$ est la même expression, multipliée par le nombre d'éléments de la sommation en $\tilde{t}$, lequel n'est autre que m. D'où

$$(7)\qquad D_j(X)=|\check{\alpha}|I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_j(X))^{\tilde{\underline{M}}},f).$$

Reprenons les formules (1) et (4). On obtient

$$(8)\qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f)=\phi(X)+B(X)-|\check{\alpha}|log(|\alpha(X)|)D(X),$$

où

$$B(X)=[T^{\theta}(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|J|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}\sum_{j\in J}B_j(X),$$

$$D(X)=|\check{\alpha}|^{-1}[T^{\theta}(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|J|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}\sum_{j\in J}D_j(X),$$

et ϕ est une fonction C^{∞} au voisinage de 0 dans $\mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R})$. Grâce à (7), on obtient

$$D(X)=I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}'(X)^{\tilde{\underline{M}}},f),$$

où

$$\boldsymbol{\gamma}'(X)=[T^{\theta}(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|J|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}\sum_{j\in J}transfert(\boldsymbol{\delta}_j(X)).$$

D'après 4.4(1), on a $\boldsymbol{\gamma}'(X)=\boldsymbol{\gamma}(X)$. Rappelons que cette distribution est $I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,.)$. Le point $exp(X)\eta$ étant régulier dans $\tilde{G}$, l'induite de cette distribution est $I^{K\underline{\tilde{M}}}(exp(X)\eta,\omega,.)$. Alors $D(X)=I_{K\underline{\tilde{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f)$. La formule (8) se récrit

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E},mod}(exp(X)\eta,\omega,f)=\phi(X)+B(X).$$

Soit $U\in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$. Appliquons l'opérateur ∂_U. Pour tout $j\in J$, posons

$$B_j(X,U)=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}_jZ(\hat{M})^{\hat{\alpha}*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))\Delta_1(\tilde{s})(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X)\eta)^{-1}$$

$$\partial_{\Xi(\tilde{s},U)}S_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s}),mod}(exp(\xi_j(X))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}),$$

où $\Xi(\tilde{s})$ est l'homomorphisme $Sym(\mathfrak{t}^\theta)\to Sym(\mathfrak{t}'_j)$ de 3.1. Posons

$$B(X,U)=[T^\theta(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|J|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}\sum_{j\in J}B_j(X,U).$$

On obtient alors

$$\partial_UI_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E},mod}(exp(X)\eta,\omega,f)=\partial_U\phi(X)+B(X,U).$$

Appliquons cela à $X=rH_d$ pour un réel r non nul et proche de 0. On obtient

$$(9)\qquad \partial_UI_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)=\partial_U\phi(rH_d)+B(rH_d,U).$$

Remarquons que, pour tout $j\in J$, la définition de $B_j(X,U)$ et la formule 4.4(4) conduisent à l'égalité

$$(10)\qquad B_j(rH_d,U)=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}_jZ(\hat{M})^{\hat{\alpha}*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))d(\tilde{s})^{-1}$$

$$\partial_{U_{\tilde{s}}}S_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s}),mod}(exp(\xi_j(rH_d))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}),$$

où on a posé $U_{\tilde{s}}=\Xi(\tilde{s},U)$.

Les deux premières assertions de l'énoncé résultent de ces formules. En effet, elles sont vérifiées pour la fonction ϕ qui est C^∞. Elles le sont d'après la proposition 4.2 pour les intégrales orbitales stables modifiées qui figurent dans la définition des fonctions $B_j(rH_d,U)$. Les assertions sont donc vérifiées pour la fonction $B(rH_d,U)$ et la conclusion s'ensuit.

La troisième assertion de l'énoncé se prouve comme en 4.2. Puisque η, vu comme un élément de $\underline{\tilde{M}}(\mathbb{R})$, est $\tilde{G}$-équisingulier, il existe une fonction $\varphi\in C_c^\infty(\underline{\tilde{M}}(\mathbb{R}))$ telle que, pour tout $X\in\underline{\mathfrak{m}}_\eta(\mathbb{R})$ assez proche de 0, on ait l'égalité

$$I_{K\underline{\tilde{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f)=I^{\underline{\tilde{M}}}(exp(X)\eta,\omega,\varphi).$$

L'assertion (iii) résulte des propriétés bien connues des intégrales orbitales. Le même argument démontre l'égalité des deux dernières limites de l'assertion (iv).

Il reste à prouver la première égalité de cette assertion. Soient $j\in J$ et $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}_jZ(\hat{M})^{\hat{\alpha}*}$. Le sous-tore T_c de $G_{\eta,SC}$ se transfère en un sous-tore de $\bar{G}'(\bar{s})$ (cf. 4.4), qui se transfère lui-même en un sous-tore $T_c(\tilde{s})$ de $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j,SC}$. Notons $\underline{T}'(\tilde{s})$ le commutant dans $G'(\tilde{s})_{\epsilon_j}$ de l'image de $T_c(\tilde{s})$ dans ce groupe et posons $\tilde{\underline{T}}'(\tilde{s}) = \underline{T}'(\tilde{s})\epsilon_j$. Les paires $(\underline{T}, \tilde{\underline{T}})$ et $(\underline{T}'(\tilde{s}), \tilde{\underline{T}}'(\tilde{s}))$ sont dans la même situation que les paires $(T, \tilde{T})$ et $(T'_j, \tilde{T}'_j)$. C'est-à-dire qu'il y a un homomorphisme $\underline{\xi}(\tilde{s}) : \underline{T} \to \underline{T}'(\tilde{s})$ et une application compatible $\tilde{\underline{\xi}}(\tilde{s}) : \tilde{\underline{T}} \to \tilde{\underline{T}}'(\tilde{s})$ qui vérifient les conditions suivantes. Ils sont définis sur $\mathbb{R}$. On a $\tilde{\underline{\xi}}(\tilde{s})(\eta) = \epsilon_j$. Pour tout $\gamma \in \tilde{\underline{T}}(\mathbb{R})$, les éléments γ et $\tilde{\underline{\xi}}(\tilde{s})(\gamma)$ se correspondent. De plus, $\underline{\xi}(\tilde{s})$ coïncide avec ξ_j sur $Z(G_\eta)^0$. De même que l'on a introduit un isomorphisme $C : T \to \underline{T}$ défini sur $\mathbb{C}$, on introduit un isomorphisme $C(\tilde{s}) : T'_j \to \underline{T}'(\tilde{s})$. Il est plus ou moins clair que l'on peut le choisir tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \stackrel{\xi_j}{\rightarrow} & T'_j \\ C\downarrow & & C(\tilde{s})\downarrow \\ \underline{T} & \stackrel{\underline{\xi}(\tilde{s})}{\rightarrow} & \underline{T}'(\tilde{s}) \end{array}$$

On a déjà fixé une décomposition

$$\mathfrak{t}'_1(\tilde{s}) = \mathfrak{c}_1(\tilde{s}) \oplus \mathfrak{t}'_j$$

provenant comme en 3.1 d'une décomposition d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g}'_1(\tilde{s}) = \mathfrak{c}_1(\tilde{s}) \oplus \mathfrak{g}'(\tilde{s}).$$

On déduit de cette dernière une décomposition

$$\underline{\mathfrak{t}}'_1(\tilde{s}) = \mathfrak{c}_1(\tilde{s}) \oplus \underline{\mathfrak{t}}'(\tilde{s}).$$

Avec des notations compréhensibles au moins par l'auteur, on a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Sym(\mathfrak{t}^\theta) & \stackrel{\Xi(\tilde{s})}{\rightarrow} & Sym(\mathfrak{t}'_j) \\ C\downarrow & & C(\tilde{s})\downarrow \\ Sym(\underline{\mathfrak{t}}^\theta) & \stackrel{\underline{\Xi}(\tilde{s})}{\rightarrow} & Sym(\underline{\mathfrak{t}}'(\tilde{s})) \end{array}$$

qui est commutatif pour la même raison qu'en 4.2

Soit $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ tel que $w_d(U) = -U$, posons $\underline{U} = C(U)$. Pour $X \in \underline{\mathfrak{t}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{g}_\eta(\mathbb{R})$, posons

$$(11) \qquad \underline{B}_j(X, \underline{U}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_\mathbb{R}, \hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) i_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s})) |\check{\alpha}(\tilde{s})||\check{\alpha}|^{-1}$$

$$\Delta_1(\tilde{s})(exp(\underline{\xi}(\tilde{s}, X))\epsilon_1(\tilde{s}), exp(X)\eta)^{-1} \partial_{\underline{U}_{\tilde{s}}} S^{\tilde{G}'_1(\tilde{s}), mod}_{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s}), \lambda_1(\tilde{s})}(exp(\underline{\xi}(\tilde{s}, X))\epsilon_1(\tilde{s}), f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}),$$

où $\underline{U}_{\tilde{s}} = \underline{\Xi}(\tilde{s}, \underline{U}) = C(\tilde{s}) \circ \Xi(\tilde{s})(U)$. Comme plus haut, on décompose

$$\underline{B}_j(X, \underline{U}) = \sum_{\tilde{t} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}*}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_\mathbb{R}, \hat{\theta}}} \underline{B}_j(X, \underline{U}, \tilde{t}),$$

où

$$\underline{B}_j(X, \underline{U}, \tilde{t}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{t} Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_\mathbb{R}, \hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_\mathbb{R}, \hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) i_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s})) |\check{\alpha}(\tilde{s})||\check{\alpha}|^{-1}$$

$$\Delta_1(\tilde{s})(exp(\underline{\xi}(\tilde{s},X))\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X)\eta)^{-1}\partial_{\underline{U}_{\tilde{s}}}S^{\tilde{G}'_1(\tilde{s}),mod}_{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}(exp(\underline{\xi}(\tilde{s},X))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}).$$

Fixons $\tilde{t}\in\tilde{\zeta}_jZ(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. Pour simplifier la notation, on considère que $\tilde{t}$ est l'un des éléments de la sommation en $\tilde{s}$. Pour $\tilde{s}\in\tilde{t}Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$, les données $\underline{M}'_1(\tilde{s})$,...,$\Delta_1(\tilde{s})$ sont différentes données auxiliaires pour une même donnée endospcopique elliptique $\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t})$ de $(\underline{M},\underline{\tilde{M}},\mathbf{a})$. Les distributions

$$\Delta_1(\tilde{s})(exp(\underline{\xi}(\tilde{s},X))\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X)\eta)^{-1}\partial_{\underline{U}_{\tilde{s}}}S^{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s})}_{\lambda_1(\tilde{s})}(exp(\underline{\xi}(\tilde{s},X))\epsilon_1(\tilde{s}),.)$$

se recollent en une même distribution $\boldsymbol{\delta}_{X,\underline{U},\tilde{t}}\in D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t}))$. En utilisant (5), on obtient

$$(12)\qquad \underline{B}_j(X,U,\tilde{t})=m^{-1}I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\underline{\tilde{M}}}(\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t}),\boldsymbol{\delta}_{X,\underline{U},\tilde{t}},f)=m^{-1}I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\underline{\tilde{M}}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_{X,\underline{U},\tilde{t}}),f).$$

On pose

$$\boldsymbol{\gamma}_{X,\underline{U},j}=m^{-1}\sum_{\tilde{t}\in\tilde{\zeta}_jZ(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}transfert(\boldsymbol{\delta}_{X,\underline{U},\tilde{t}}),$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{X,\underline{U}}=[T^{\theta}(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|J|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}\sum_{j\in J}\boldsymbol{\gamma}_{X,\underline{U},j},$$

$$\underline{B}(X,\underline{U})=[T^{\theta}(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|J|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}\sum_{j\in J}\underline{B}_j(X,\underline{U}).$$

La formule (12) entraîne

$$(13)\qquad \underline{B}(X,\underline{U})=I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\underline{\tilde{M}}}(\boldsymbol{\gamma}_{X,\underline{U}},f).$$

On va calculer la distribution $\boldsymbol{\gamma}_{X,U}$. Supposons l'élément $exp(X)\eta$ fortement régulier. L'ensemble $\mathcal{Y}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)$ introduit en 4.4 ne dépend par définition que de $\underline{\tilde{T}}$. D'autre part, l'inclusion $I^{\underline{M}}_{exp(X)\eta}\subset I^{\underline{M}}_{\eta}$ entraîne l'inclusion $\mathcal{Y}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)\subset\mathcal{Y}^{\underline{M}}(\eta)$. On peut donc d'une part choisir l'ensemble $\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(exp(X)\eta)$ indépendant de X et on le note plutôt $\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{\tilde{T}})$; d'autre part supposer qu'il existe une application

$$q:\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{\tilde{T}})\to\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\eta)$$

de sorte que, pour $y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{\tilde{T}})$, $q(y)$ soit l'unique élément de $I^{\underline{M}}_{\eta}y\cap\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\eta)$. On utilise des notations similaires à celles de 4.1 : pour $p\in\Pi^{\underline{M}}$ et $y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}_p(\underline{\tilde{T}})$, on pose $\underline{\tilde{T}}[y]=\tilde{\phi}_p^{-1}\circ ad_{y^{-1}}(\underline{\tilde{T}})$ et on note simplement $x\mapsto x[y]$ l'isomorphisme $\phi_p^{-1}\circ ad_{y^{-1}}$ de $\underline{T}$ sur $\underline{T}[y]$.

Soient $j\in J$ et $\tilde{t}\in\tilde{\zeta}_jZ(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. Supposons comme ci-dessus l'élément $exp(X)\eta$ fortement régulier. Puisque $\underline{\tilde{T}}$ est un sous-tore tordu maximal et elliptique dans $\underline{\tilde{M}}$, l'élément $exp(X)\eta$ est elliptique dans $\underline{\tilde{M}}(\mathbb{R})$. Notons $\boldsymbol{\delta}'_{X,\tilde{t}}$ l'élément de $D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t}))$ auquel s'identifie la distribution $S^{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{t})}_{\lambda_1(\tilde{t})}(exp(\underline{\xi}(\tilde{t},X))\epsilon_1(\tilde{t}),.)$. D'après [I] 4.9(4), on a l'égalité

$$transfert(\boldsymbol{\delta}'_{X,\tilde{t}})=d(\theta^*)^{1/2}\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{\tilde{T}})}\Delta_1(\tilde{t})(exp(\underline{\xi}(\tilde{t},X))\epsilon_1(\tilde{t}),exp(X[y])\eta[q(y)])$$

$$[\underline{T}[y]^{\theta}(\mathbb{R}):\underline{T}[y]^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}I^{K\underline{\tilde{M}}}(exp(X[y])\eta[q(y)]),\omega,.).$$

Notons $\boldsymbol{\delta}'_{X,\underline{U},\tilde{t}}$ l'élément de $D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\underline{\mathbf{M}}'(\tilde{t}))$ auquel s'identifie la distribution

$$\partial_{\underline{U}_{\tilde{t}}} S^{\tilde{\underline{M}}'_1(\tilde{t})}_{\lambda_1(\tilde{t})}(exp(\underline{\xi}(\tilde{t},X))\epsilon_1(\tilde{t}),.).$$

Alors

$$transfert(\boldsymbol{\delta}'_{X,\underline{U},\tilde{t}}) = d(\theta^*)^{1/2} \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{\tilde{T}})} \Delta_1(\tilde{t})(exp(\underline{\xi}(\tilde{t},X))\epsilon_1(\tilde{t}), exp(X[y])\eta[q(y)])$$

$$[\underline{T}[y]^\theta(\mathbb{R}):\underline{T}[y]^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}\partial_{\underline{U}[y]} I^{K\tilde{\underline{M}}}(exp(X[y])\eta[q(y)]),\omega,.).$$

Comme en 4.2, l'opérateur $\underline{U}[y]$ apparaissant ici n'est autre que le transporté de $\underline{U}$ par l'isomorphisme $x\mapsto x[y]$ de $\underline{T}$ sur $\underline{T}[y]$. Pour obtenir le transfert de $\boldsymbol{\delta}_{X,\underline{U},\tilde{t}}$, il reste à diviser par $\Delta_1(\tilde{t})(exp(\underline{\xi}(\tilde{t},X))\epsilon_1(\tilde{t}), exp(X)\eta)$. D'où

$$transfert(\boldsymbol{\delta}_{X,\underline{U},\tilde{t}}) = d(\theta^*)^{1/2} \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{\tilde{T}})} \frac{\Delta_1(\tilde{t})(exp(\underline{\xi}(\tilde{t},X))\epsilon_1(\tilde{t}), exp(X[y])\eta[q(y)])}{\Delta_1(\tilde{t})(exp(\underline{\xi}(\tilde{t},X))\epsilon_1(\tilde{t}), exp(X)\eta)}$$

$$[\underline{T}[y]^\theta(\mathbb{R}):\underline{T}[y]^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}\partial_{\underline{U}[y]} I^{K\tilde{\underline{M}}}(exp(X[y])\eta[q(y)]),\omega,.).$$

On peut maintenant remplacer X par $exp(rH_c)$ pour r réel non nul et proche de 0, tous les termes étant continus en un tel point. En utilisant les relations (4) et (5) de 4.4, on obtient

$$transfert(\boldsymbol{\delta}_{rH_c,\underline{U},\tilde{t}}) = d(\theta^*)^{1/2} \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{\tilde{T}})} d(\tilde{t},q(y))d(\tilde{t})^{-1}[\underline{T}[y]^\theta(\mathbb{R}):\underline{T}[y]^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}$$

$$\partial_{\underline{U}[y]} I^{K\tilde{\underline{M}}}(exp(rH_c[y])\eta[q(y)]),\omega,.).$$

Pour tout $y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\eta)$, posons

$$d(y) = m^{-1}|J|^{-1}\sum_{j\in J}\sum_{\tilde{t}\in\tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\underline{\hat{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} d(\tilde{t},y)d(\tilde{t})^{-1}.$$

Les définitions entraînent alors

$$(14)\qquad \boldsymbol{\gamma}_{rH_c,\underline{U}} = [T^\theta(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\underline{\tilde{T}})} d(q(y))[\underline{T}[y]^\theta(\mathbb{R}):\underline{T}[y]^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}$$

$$\partial_{\underline{U}[y]} I^{K\tilde{\underline{M}}}(exp(rH_c[y])\eta[q(y)]),\omega,.).$$

Considérons un élément $X\in\mathfrak{t}(\mathbb{R})\cap\mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$ proche de 0. On a $I^M_\eta = T^\theta = I^M_{exp(X)\eta}$. On peut donc supposer $\dot{\mathcal{Y}}^M(exp(X)\eta) = \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$. On a l'égalité $I^M_\eta = I^{\underline{M}}_\eta\cap M$. Il en résulte que, pour tout $p\in\Pi^M$, on a une application naturelle

$$(15)\qquad I^M_\eta\backslash\mathcal{Y}^M_p(\eta)/\phi_p(M_p(\mathbb{R}))\to I^{\underline{M}}_\eta\backslash\mathcal{Y}^{\underline{M}}_p(\eta)/\phi_p(\underline{M}_p(\mathbb{R})).$$

Montrons que

(16) cette application est injective ; son image est l'image dans l'espace d'arrivée de l'ensemble des $y\in\mathcal{Y}^{\underline{M}}_p(\eta)$ tels que $\underline{M}_{\eta[y],SC}$ soit isomorphe à $SL(2)$.

Considérons l'application qui, à $y \in \mathcal{Y}_p^M(\eta)$, associe la classe du cocycle $\sigma \mapsto y\nabla_p(\sigma)\sigma(y)^{-1}$. Elle se quotiente en une bijection $I_\eta^M \backslash \mathcal{Y}_p^M(\eta)/\phi_p(M_p(\mathbb{R}))$ sur l'image réciproque de la classe du cocycle ∇_p par l'application

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; T^\theta) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M).$$

De même, on a une bijection de $I_\eta^{\underline{M}} \backslash \mathcal{Y}_p^{\underline{M}}(\eta)/\phi_p(\underline{M}_p(\mathbb{R}))$ sur l'image réciproque de la classe du cocycle ∇_p par l'application

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; I_\eta^{\underline{M}}) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; \underline{M}).$$

Pour prouver l'injectivité de (15), il suffit de prouver que l'application

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; T^\theta) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; I_\eta^{\underline{M}})$$

est injective. Notons Z le centre de $I_\eta^{\underline{M}}$. Alors $I_\eta^{\underline{M}}/Z = \underline{M}_{\eta,AD}$ et on sait que ce groupe est $PGL(2)$. L'image T_{ad} de T^θ dans ce groupe est un sous-tore maximal déployé. On a donc $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; T_{ad}) = \{0\}$. Donc l'application naturelle $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; Z) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; T^\theta)$ est surjective. Soient u et v deux cocycles à valeurs dans Z. Supposons que leurs images dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; I_\eta^{\underline{M}})$ soient égales. On doit prouver que leurs images dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; T^\theta)$ le sont. L'hypothèse signifie qu'il existe $x \in I_\eta^{\underline{M}}$ tel que $u(\sigma) = xv(\sigma)\sigma(x)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$. Puisque u est à valeurs centrales, cela équivaut à $\sigma(x)u(\sigma)v(\sigma)^{-1} = x$. Introduisons un sous-groupe de Borel $B_{ad} = T_{ad}U$ de $\underline{M}_{\eta,AD}$ de tore T_{ad} et relevons-le en un sous-groupe $B = T^\theta U$ de $I_\eta^{\underline{M}}$. Ces groupes sont définis sur $\mathbb{R}$. Puisque $\underline{M}_{\eta,SC} \simeq SL(2)$, il existe un élément $w \in \underline{M}_{\eta,SC}(\mathbb{R})$ tel que l'élément x s'écrive de façon unique tn_1 ou n_2wtn_1, avec $t \in T^\theta$ et $n_1, n_2 \in U$. Supposons par exemple $x = n_2wtn_1$. On a alors $\sigma(n_2)w\sigma(t)u(\sigma)v(\sigma)^{-1}\sigma(n_1) = x$. Cela fournit une autre décomposition de x. Par unicité, on en déduit $\sigma(t)u(\sigma)v(\sigma)^{-1} = t$, ou encore $u(\sigma) = tv(\sigma)\sigma(t)^{-1}$. Donc les images de u et v dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; T^\theta)$ sont égales comme on le voulait. Cela démontre l'injectivité. La deuxième assertion de (16) se démontre comme en 4.2(17).

Il résulte de (16) que l'on peut supposer $\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta) \subset \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\eta)$. Soit $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$. Pour $j \in J$ et $\tilde{t} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}$, on a les égalités

$$d(\tilde{t}, y)d(\tilde{t})^{-1} = d(\tilde{t}, y)d(\tilde{t}, 1)^{-1} = d_j(y),$$

avec les notations de 4.4. On en déduit

$$d(y) = |J|^{-1} \sum_{j \in J} d_j(y).$$

L'assertion 4.4(3) nous dit que cette somme est nulle si $y \neq 1$ et qu'elle vaut 1 si $y = 1$. Montrons que

(17) pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}^{\underline{M}}(\eta)$, $y \notin \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$, et pour tout $j \in J$, on a l'égalité

$$\sum_{\tilde{t} \in \tilde{\zeta}_j Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{\underline{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}}, \hat{\theta}}} d(\tilde{t}, y)d(\tilde{t})^{-1} = 0.$$

Comme en 4.2(18), c'est un cas particulier de la proposition [III] 8.4. Soit $p \in \Pi^{\underline{M}}$ tel que $y \in \mathcal{Y}_p^{\underline{M}}(\eta)$. Le cocycle $\sigma \mapsto y\nabla_p(\sigma)\sigma(y)^{-1}$, à valeurs dans $I_\eta^{\underline{M}}$, se pousse en un cocycle à valeurs dans $\underline{M}_{\eta,ad}$, ce groupe étant l'image de $\underline{M}_\eta$ dans G_{AD}. On note $\tau[y]$ sa classe. Notons ici $\hat{T}$ le tore dual de T. On peut le considérer comme celui de la paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$, muni d'une action galoisienne tordue. Posons $\hat{\hat{T}} = \hat{T}/(1-\hat{\theta})(\hat{T})$. Puisque T est un sous-tore maximal de M et que $T^{\theta,0}$ est un sous-tore maximal de $\underline{M}_\eta$, on a des plongements $\hat{T} \to \hat{M}$ et $\hat{\hat{T}} \subset \hat{\underline{M}}_\eta$. En prenant les images réciproques dans $\hat{G}_{SC}$, on a encore des plongements $\hat{T}_{sc} \to \hat{M}_{sc}$ et $\hat{\hat{T}}_{sc} \subset \hat{\underline{M}}_{\eta,sc}$. Soit $t \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}$. On choisit $t_{sc} \in Z(\hat{M})_{sc}^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta},0}$ dont l'image dans $\hat{G}_{AD}$ soit la même que celle de t. Parce que $\tilde{T}$ est elliptique dans $\tilde{M}$, on a l'égalité $Z(\hat{M})_{sc}^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta},0} = \hat{T}_{sc}^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta},0}$. L'élément t_{sc} s'envoie donc sur un élément $\bar{t}_{sc} \in \hat{\hat{T}}_{sc} \subset \hat{\underline{M}}_{\eta,sc}$. On voit comme en 4.2 que l'hypothèse $t \in Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}$ entraîne que $\bar{t}_{sc} \in Z(\hat{\underline{M}}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. On note $u(t)$ son image dans le groupe des composantes connexes $\pi_0(Z(\hat{\underline{M}}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}})$. Le calcul de [III] 8.4 montre que

$$d(\tilde{\zeta}_j t, y) d(\tilde{\zeta}_j t)^{-1} = d(\tilde{\zeta}_j, y) d(\tilde{\zeta}_j)^{-1} < \tau[y], u(t) >,$$

le produit étant celui sur

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; \underline{M}_{\eta,ad}) \times \pi_0(Z(\hat{\underline{M}}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}).$$

Il reste à prouver que l'application $t \mapsto < \tau[y], u(t) >$ est un caractère non trivial de $Z(\hat{M})^{\hat{\alpha}^*}/Z(\hat{\underline{M}})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. La preuve est similaire à celle de 4.2(18) et on la laisse au lecteur.

Il résulte évidemment de (17) que $d(y) = 0$ pour tout $y \notin \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$. Finalement $d(1) = 1$ et $d(y) = 0$ pour tout $y \neq 1$. La formule (14) devient simplement

$$\gamma_{rH_c,\underline{U}} = [T^\theta(\mathbb{R}) : T^{\theta,0}(\mathbb{R})] \sum_{y \in q^{-1}(1)} [\underline{T}[y]^\theta(\mathbb{R}) : \underline{T}[y]^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}$$

$$\partial_{\underline{U}[y]} I^{K\tilde{\underline{M}}}(exp(rH_c[y])\eta), \omega, .).$$

La formule (13), évaluée pour $X = exp(rH_c)$, devient

(18) $$\underline{B}(rH_c, U) = [T^\theta(\mathbb{R}) : T^{\theta,0}(\mathbb{R})] \sum_{y \in q^{-1}(1)} [\underline{T}[y]^\theta(\mathbb{R}) : \underline{T}[y]^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}$$

$$\partial_{\underline{U}[y]} I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{\underline{M}}}(exp(rH_c[y])\eta, \omega, f).$$

Montrons que

(19) on peut supposer que $\underline{T}[y] = \underline{T}$ pour tout $y \in q^{-1}(1)$; le nombre d'éléments de $q^{-1}(1)$ est égal à

$$2^{c(\eta)}[T^\theta(\mathbb{R}) : T^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}[\underline{T}^\theta(\mathbb{R}) : \underline{T}^{\theta,0}(\mathbb{R})];$$

la limite

$$lim_{r \to 0+} \partial_{\underline{U}[y]} I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{\underline{M}}}(exp(rH_c[y])\eta, \omega, f)$$

ne dépend pas de $y \in q^{-1}(1)$.

Notons $\mathcal{Y}_0$ l'ensemble des $y \in I^M_\eta$ tels que $y\sigma(y)^{-1} \in \underline{T}^\theta$. D'après les définitions, $q^{-1}(y)$ est un ensemble de représentants de l'ensemble de doubles classes $\underline{T}^\theta \backslash \mathcal{Y}_0 / I^M_\eta(\mathbb{R})$. Pour $y \in q^{-1}(1)$, l'image réciproque de $\underline{T}[y]$ dans $\underline{M}_{\eta,SC}$ est un sous-tore maximal de ce groupe, qui est défini sur $\mathbb{R}$ et non déployé. Il est donc conjugué à T_c par un élément de $\underline{M}_{\eta,SC}(\mathbb{R})$. Quitte à multiplier y à droite par un tel élément, on peut donc supposer que cette image réciproque est T_c. Mais cela entraîne que $\underline{T}[y] = \underline{T}$. D'où la première assertion. Notons $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_0 \cap \underline{M}_\eta$. Parce que $I^M_\eta = \underline{T}^\theta \underline{M}_\eta$, on voit que l'injection $\mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_0$ induit une surjection

$$\mathcal{Y}_1 \to \underline{T}^\theta \backslash \mathcal{Y}_0 / I^M_\eta(\mathbb{R}).$$

Il s'en déduit une surjection

$$\underline{T}^{\theta,0}\backslash\mathcal{Y}_1/\underline{M}_\eta(\mathbb{R}) \to \underline{T}^\theta\backslash\mathcal{Y}_0/I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R}).$$

Le premier ensemble classifie les classes de conjugaison par $\underline{M}_\eta(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de H_c dans $\underline{\mathfrak{m}}_\eta(\mathbb{R})$. Son nombre d'éléments est $2^{c(\eta)}$. Ce nombre est au plus 2 donc les fibres de la surjection ci-dessus ont forcément le même nombre d'éléments. Le nombre d'éléments de $q^{-1}(1)$ est alors $2^{c(\eta)}$ divisé par le nombre d'éléments d'une fibre. La fibre au-dessus de la classe $\underline{T}^\theta I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R})$ est

$$\mathbb{F} = \underline{T}^{\theta,0}\backslash(\underline{T}^\theta I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R}) \cap \underline{M}_\eta)/\underline{M}_\eta(\mathbb{R}).$$

On définit une application de $I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R})$ dans ce quotient de la façon suivante. Pour $x \in I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R})$, on choisit $t \in \underline{T}^\theta$ tel que $tx \in \underline{M}_\eta$ et on envoie x sur l'image de tx dans $\mathbb{F}$. Cette image ne dépend pas du choix de t. On vérifie que l'application ainsi définie se quotiente en une bijection

$$\underline{T}^\theta(\mathbb{R})\backslash I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R})/\underline{M}_\eta(\mathbb{R}) \to \mathbb{F}.$$

Le nombre d'éléments du premier ensemble est

$$[I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R}) : \underline{M}_\eta(\mathbb{R})][\underline{T}^\theta(\mathbb{R}) : \underline{T}^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1}.$$

On a une application naturelle

$$T^\theta(\mathbb{R})/T^{\theta,0}(\mathbb{R}) \to I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R})/\underline{M}_\eta(\mathbb{R}).$$

Elle est clairement injective. Reprenons la preuve de (16). Tout élément $x \in I_\eta^{\underline{M}}$ s'écrit de façon unique $x = tn_1$ ou $x = n_2wtn_1$ avec les notations de cette preuve. Si $x \in I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R})$, l'unicité entraîne que ces éléments t, n_1, n_2 sont tous définis sur $\mathbb{R}$. Les éléments n_1, n_2 et w appartenant à $\underline{M}_\eta(\mathbb{R})$ et ce groupe étant distingué dans $I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R})$, on voit que x et t ont même image modulo $\underline{M}_\eta(\mathbb{R})$. Donc l'application ci-dessus est surjective. D'où l'égalité

$$[I_\eta^{\underline{M}}(\mathbb{R}) : \underline{M}_\eta(\mathbb{R})] = [T^\theta(\mathbb{R}) : T^{\theta,0}(\mathbb{R})].$$

En mettant ces calculs bout à bout, on obtient la deuxième assertion de (19). Il résulte de la description ci-dessus que, pour $y \in q^{-1}(1)$, on a soit $H_c[y] = H_c$ et alors $\underline{U}[y] = \underline{U}$, soit $H_c[y] = -H_c$ et alors $\underline{U}[y]$ est l'image de $\underline{U}$ par la symétrie w_c de $Sym(\underline{\mathfrak{t}})$. Dans ce cas, on a

$$lim_{r\to 0+}\partial_{\underline{U}[y]}I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(rH_c[y])\eta,\omega,f) = -lim_{r\to 0-}\partial_{\underline{U}}I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f)$$

puisqu'on a supposé $w_d(U) = -U$, donc $w_c(\underline{U}) = -\underline{U}$. Mais on a déjà remarqué que les deux dernières limites de l'assertion (iv) de l'énoncé étaient égales. C'est-à-dire que la limite ci-dessus n'est autre que

$$lim_{r\to 0+}\partial_{\underline{U}}I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f).$$

Cela démontre la troisième assertion de (19).

Il résulte de (18) et (19) que

$$(20) \qquad lim_{r\to 0+}\underline{B}(rH_c,U) = 2^{c(\eta)}lim_{r\to 0+}\partial_{\underline{U}}I_{K\tilde{\underline{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(rH_c)\eta,\omega,f).$$

Soit $j\in J$. En remplaçant X par rH_c dans la formule (11) et en utilisant 4.4(4), on obtient

$$\underline{B}_j(rH_c,\underline{U})=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}_jZ(\hat{M})^{\hat{\alpha}*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))i_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s}))|\check{\alpha}(\tilde{s})||\check{\alpha}|^{-1}$$

$$d(\tilde{s})^{-1}\partial_{\underline{U}_{\tilde{s}}}S_{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s}),mod}(exp(\underline{\xi}(\tilde{s},rH_c))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}).$$

Jointe à la formule (10), cette égalité entraîne

$$B_j(rH_d,U)-B_j(-rH_d,U)-2\pi i|\alpha|\underline{B}_j(rH_c,U)=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}_jZ(\hat{M})^{\hat{\alpha}*}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'_j}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))d(\tilde{s})^{-1}X(\tilde{s},r),$$

où

$$X(\tilde{s},r)=\partial_{U_{\tilde{s}}}S_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(exp(r\xi_j(H_d))\eta,f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})})-\partial_{U_{\tilde{s}}}S_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(exp(-r\xi_j(H_d))\eta,f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})})$$

$$-2\pi i|\check{\alpha}(\tilde{s})|i_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s}))\partial_{\underline{U}_{\tilde{s}}}S_{\underline{\tilde{M}}'_1(\tilde{s}),\lambda_1(\tilde{s})}^{\tilde{G}'_1(\tilde{s}),mod}(exp(r\underline{\xi}(\tilde{s},H_c))\epsilon_1(\tilde{s}),f^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}).$$

On a l'égalité $C(\tilde{s})(\xi_j(H_d))=i\underline{\xi}(\tilde{s},H_c)$. On est donc dans la situation où l'on peut appliquer la proposition 4.2. Elle entraîne que

$$lim_{r\to0+}X(\tilde{s},r)=0$$

pour tout $\tilde{s}$ apparaissant ci-dessus. Donc

$$lim_{r\to0+}\big(B_j(rH_d,U)-B_j(-rH_d,U)-2\pi i|\alpha|\underline{B}_j(rH_c,U)\big)=0.$$

Cela étant vrai pour tout j, on a aussi

$$lim_{r\to0+}\left(B(rH_d,U)-B(-rH_d,U)-2\pi i|\alpha|\underline{B}(rH_c,U)\right)=0.$$

Considérons l'égalité (9). Parce que ϕ est C^∞, on a

$$lim_{r\to0+}\left(\partial_U\phi(rH_d)-\partial_U\phi(-rH_d)\right)=0.$$

On en déduit

$$lim_{r\to0+}(\partial_UI_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},mod}(exp(rH_d)\eta,\omega,f)-\partial_UI_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},mod}(exp(-rH_d)\eta,\omega,f)$$

$$-2\pi i|\alpha|\underline{B}(rH_c,U))=0.$$

En utilisant (20), on obtient la première égalité de l'assertion (iv) de l'énoncé qu'il restait à prouver. $\square$

5 Des variantes de l'application $\phi_{\tilde{M}}$

5.1 Normalisation partielle des opérateurs d'entrelacement

Pour la suite de l'article, on suppose fixés une paire parabolique minimale $(\tilde{P}_0, \tilde{M}_0)$ et un sous-groupe compact maximal K de $G(\mathbb{R})$ en bonne position relativement à M_0.

Supposons fixées des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et π une représentation de $M(\mathbb{R})$ irréductible et tempérée dans un espace V_π. Pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}$, on définit la représentation π_λ par $\pi_\lambda(m) = e^{<\lambda, H_M(m)>}\pi(m)$. Soient $P, P' \in \mathcal{P}(M)$. On sait définir l'opérateur d'entrelacement $J_{P'|P}(\pi_\lambda) : Ind_P^G(\pi_\lambda) \to Ind_{P'}^G(\pi_\lambda)$. Il est méromorphe en λ. On sait normaliser cet opérateur, cf. [3] théorème 2.1. L'opérateur normalisé $R_{P'|P}(\pi_\lambda)$ est égal à $r_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1}J_{P'|P}(\pi_\lambda)$, où $\lambda \mapsto r_{P'|P}(\pi_\lambda)$ est une fonction méromorphe à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous allons définir une normalisation partielle que l'on pourra plus facilement stabiliser.

Supposons que π soit de la série discrète. Cela implique que M possède un sous-tore maximal elliptique et on fixe un tel sous-tore T. L'action de $\Gamma_\mathbb{R} \simeq \{\pm 1\}$ décompose $X_*(T)_\mathbb{Z} \otimes \mathbb{R}$ en

$$X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} = (X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R})^+ \oplus (X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R})^-,$$

où, pour $\epsilon = \pm 1$, $X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R})^\epsilon$ est le sous-espace où l'élément non trivial $\boldsymbol{\sigma}$ de $\Gamma_\mathbb{R}$ agit par multiplication par ϵ. L'hypothèse d'ellipticité signifie que

$$(X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R})^+ = \mathfrak{a}_M(\mathbb{R}).$$

Posons $\mathfrak{h}^M_\mathbb{R} = (X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R})^-$. On a

$$\mathfrak{t}(\mathbb{R}) = \mathfrak{a}_M(\mathbb{R}) \oplus i\mathfrak{h}^M_\mathbb{R}$$

tandis que l'espace $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ usuel est isomorphe à

$$\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \mathfrak{a}_M(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{h}^M_\mathbb{R}.$$

Le paramètre $\mu(\pi)$ est la classe de conjugaison par le groupe de Weyl W^M relatif à T d'un élément de $i\mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Supposons que le caractère central ω_π de π soit trivial sur $\mathfrak{A}_M$ (on rappelle que ce groupe est la composante neutre pour la topologie réelle de $A_M(\mathbb{R})$). Alors $\mu(\pi)$ est la classe de conjugaison par W^M d'un élément de $\mathfrak{h}^M_\mathbb{R}$. On fixe un élément de cette classe. Notons $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans G. Pour $P, P' \in \mathcal{P}(M)$, notons $\Sigma^{U_P}(T)$ le sous-ensemble des racines qui apparaissent dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de P et posons

$$\Sigma_{P'|P}(T) = \Sigma^{U_P}(T) - (\Sigma^{U_P}(T) \cap \Sigma^{U_{P'}}(T)).$$

Le groupe $\Gamma_\mathbb{R}$ agit naturellement sur ces ensembles. Soit $\alpha \in \Sigma^{U_P}(T)$ dont l'orbite (α) pour cette action ait deux éléments, autrement dit $\boldsymbol{\sigma}(\alpha) \neq \alpha$. Quitte à échanger α et $\boldsymbol{\sigma}(\alpha)$, on peut supposer $< \mu(\pi), \boldsymbol{\sigma}(\check{\alpha}) - \check{\alpha} > \leq 0$. Pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}$, on pose

$$r_{(\alpha)}(\pi_\lambda) = 2\pi < \mu(\pi) + \lambda, \check{\alpha} >^{-1}.$$

Soit $\alpha \in \Sigma^{U_P}(T)$ dont l'orbite soit réduite à un élément, autrement dit $\boldsymbol{\sigma}(\alpha) = \alpha$ (α est "réelle"). Remarquons qu'alors $< \mu(\pi), \check{\alpha} >= 0$. On pose

$$r_\alpha(\pi_\lambda) = \Gamma_\mathbb{R}(< \lambda, \check{\alpha} > + N_\alpha)\Gamma_\mathbb{R}(< \lambda, \check{\alpha} > + N_\alpha + 1)^{-1},$$

où $\Gamma_{\mathbb{R}}$ est la fonction usuelle

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2),$$

et où N_α est un élément de $\{0,1\}$ qui dépend de π et α. D'après [3] paragraphe 3, le facteur de normalisation $r_{P'|P}(\pi_\lambda)$ est le produit des $r_{(\alpha)}(\pi_\lambda)$ pour les orbites (α) à deux éléments contenues dans $\Sigma_{P'|P}(T)$ et des $r_\alpha(\pi_\lambda)$ pour les α réelles contenues dans le même ensemble.

Définissons la fonction d'une variable complexe

$$\Gamma_0(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{-1}.$$

D'après la formule usuelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, on a

$$\Gamma_0(s+1) = \frac{2\pi}{s}\Gamma_0(s)^{-1}.$$

Considérons une racine α réelle. Posons $\epsilon(\alpha) = (-1)^{N_\alpha}$ et

$$\rho_\alpha(\pi_\lambda) = \Gamma_0(< \lambda, \check{\alpha} >)^{\epsilon(\alpha)}.$$

D'après la formule ci-dessus, on a

$$r_\alpha(\pi_\lambda) = \rho_\alpha(\pi_\lambda)(\frac{2\pi}{< \lambda, \check{\alpha} >})^{N_\alpha}.$$

On définit $\rho_{P'|P}(\pi_\lambda)$ comme les produit des $\rho_\alpha(\pi_\lambda)$ sur les racines réelles α contenues dans $\Sigma_{P'|P}(T)$. On pose

$$r^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda) = \rho_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1} r_{P'|P}(\pi_\lambda).$$

Il résulte des formules ci-dessus que $r^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda)$ est une fonction rationnelle en λ. Remarquons qu'au contraire, la fonction $\rho_{P'|P}(\pi_\lambda)$ peut avoir une infinité d'hyperplans polaires. On pose

$$R^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda) = \rho_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1} J_{P'|P}(\pi_\lambda) = r^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda) R_{P'|P}(\pi_\lambda).$$

Cet opérateur est rationnel en λ. On entend par là la propriété suivante. On peut réaliser les espaces des induites $Ind_P^G(\pi_\lambda)$ et $Ind_{P'}^G(\pi_\lambda)$ comme des espaces de fonctions sur K indépendants de λ. Ils sont munis de produits hermitiens définis positifs. Soient $e \in Ind_P^G(\pi_\lambda)$ et $e' \in Ind_{P'}^G(\pi_\lambda)$ deux éléments K-finis. Alors le produit hermitien

$$(e', R^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda)(e))$$

est une fonction rationnelle en λ. On peut préciser que ses hyperplans polaires sont d'équations $< \lambda, \check{\alpha} >= c$ pour des racines α de A_M dans G (la définition exacte de $\check{\alpha}$ n'ayant pas beaucoup d'importance). On prendra garde toutefois que les pôles dépendent des K-types selon lesquels se transforment e et e'. En général, il n'y a pas un nombre fini d'hyperplans hors desquels la fonction ci-dessus n'a pas de pôle quels que soient e et e'.

Considérons maintenant le cas général où π est une représentation irréductible tempérée quelconque. On peut fixer

-un groupe de Levi R de M contenant M_0 et un sous-groupe parabolique $S \in \mathcal{P}^M(R)$;

- une représentation σ de $R(\mathbb{R})$, irréductible, de la série discrète et telle que ω_σ soit trivial sur $\mathfrak{A}_R$;

- un élément $\lambda_0 \in i\mathcal{A}^*_R$;

de sorte que π soit une sous-représentation de l'induite $Ind_S^M(\sigma_{\lambda_0})$. Soient $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in \mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}$. Notons Q et Q' les éléments de $\mathcal{P}(R)$ tels que $Q \subset P$, $Q' \subset P'$, $Q \cap M = Q' \cap M = S$. On pose

$$\rho_{P'|P}(\pi_\lambda) = \rho_{Q'|Q}(\sigma_{\lambda_0+\lambda}),$$
$$r^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda) = r^{rat}_{Q'|Q}(\sigma_{\lambda_0+\lambda}),$$

et on définit comme ci-dessus

$$R^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda) = \rho_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1} J_{P'|P}(\pi_\lambda) = r^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda) R_{P'|P}(\pi_\lambda).$$

Ces termes ont les mêmes propriétés que ci-dessus.

On a supposé π irréductible. Remarquons que l'on peut poser les mêmes définitions pour une représentation π réductible qui est une sous-représentation d'une induite $Ind_S^M(\sigma_{\lambda_0})$ comme ci-dessus.

5.2 Caractères pondérés rationnels

Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $\tilde{R}$ un espace de Levi de $\tilde{M}$ contenant $\tilde{M}_0$ et $\tilde{\sigma}$ une ω-représentation elliptique de $\tilde{R}(\mathbb{R})$. Fixons un espace parabolique $\tilde{S} \in \mathcal{P}^{\tilde{M}}(\tilde{R})$ et posons $\tilde{\pi} = Ind_{\tilde{S}}^{\tilde{M}}(\tilde{\sigma})$. Fixons $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$ et soit $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. A la suite d'Arthur, on a défini en [20] 2.7 un opérateur $\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)$ de l'espace de la représentation $Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda)$, qui est méromorphe en λ. Rappelons sa définition. La représentation sous-jacente π de $M(\mathbb{R})$ n'est pas irréductible en général, mais vérifie la dernière propriété du paragraphe précédent. Pour $\tilde{P}' \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, on peut donc définir les termes $r_{P'|P}(\pi_\lambda)$ etc... On pose $\mu_{P'|P}(\pi_\lambda) = r_{P|P'}(\pi_\lambda)^{-1} r_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1}$. Pour $\Lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, on définit l'opérateur

$$\mathcal{M}(\pi_\lambda; \Lambda, \tilde{P}') = \mu_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1} \mu_{P'|P}(\pi_{\lambda+\Lambda/2}) J_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1} J_{P'|P}(\pi_{\lambda+\Lambda}).$$

La famille $(\mathcal{M}(\pi_\lambda; \Lambda, \tilde{P}'))_{\tilde{P}' \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$ est une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille à valeurs opérateurs. L'opérateur $\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)$ est déduit de cette famille de la façon habituelle.

Avec les mêmes notations que ci-dessus, posons $\mu^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda) = r^{rat}_{P|P'}(\pi_\lambda)^{-1} r^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1}$ et définissons l'opérateur

$$\mathcal{M}^{rat}(\pi_\lambda; \Lambda, \tilde{P}') = \mu^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1} \mu^{rat}_{P'|P}(\pi_{\lambda+\Lambda/2}) R^{rat}_{P'|P}(\pi_\lambda)^{-1} R^{rat}_{P'|P}(\pi_{\lambda+\Lambda}).$$

La famille $(\mathcal{M}^{rat}(\pi_\lambda; \Lambda, \tilde{P}'))_{\tilde{P}' \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$ est encore une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille à valeurs opérateurs. On en déduit encore un opérateur que l'on note $\mathcal{M}^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)$. Il est clair qu'il est rationnel en λ. Ses hyperplans polaires sont d'équations $< \lambda, \check{\alpha} >= c$ pour les racines α de $A_{\tilde{M}}$ dans G. On a

(1) l'opérateur $\mathcal{M}^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)$ n'a pas de pôle pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$.

En effet, la démonstration de [4] proposition 2.3 s'applique.

Rappelons que l'on a fixé une fonction $H_{\tilde{M}} : \tilde{M}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ qui permet de définir la ω-représentation $\tilde{\pi}_\lambda$, cf. [IV] 1.1. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, on a défini le caractère pondéré de $\tilde{\pi}_\lambda$ par

$$J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda, f) = trace(\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda) Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)).$$

On définit de même le caractère pondéré "rationnel"

$$J^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda, f) = trace(\mathcal{M}^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda) Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)).$$

Il vérifie les mêmes propriétés que le précédent et on utilisera ces propriétés sans plus de commentaires. Il n'est pas rationnel en λ car l'opérateur $Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ n'est pas rationnel. Mais ce dernier est holomorphe en λ et à décroissance rapide dans les bandes verticales, au sens suivant. Pour un espace vectoriel réel V de dimension finie et pour une fonction ψ méromorphe sur le complexifié $V_{\mathbb{C}}$, on dit que ψ est à décroissance rapide dans les bandes verticales si, pour tout sous-ensemble compact $\Gamma \subset V$ tel que cette fonction ψ n'ait pas de pôle dans $\Gamma + iV$, celle-ci est à décroissance rapide sur cet ensemble. Les propriétés de l'opérateur $\mathcal{M}_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\pi_\lambda)$ entraînent les propriétés suivantes :

(2) $J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ n'a qu'un nombre fini d'hyperplans polaires ;

(3) chacun de ces hyperplans est d'équation $<\lambda, \check{\alpha}>= c$ où α est une racine de $A_{\tilde{M}}$ dans G et $c \in \mathbb{C}$;

(4) $\lambda \mapsto J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ est à décroissance rapide dans les bandes verticales.

Les hyperplans polaires dépendent de f. Toutefois, on a le raffinement suivant. Rappelons que, pour un ensemble fini Ω de K-types, on note $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega)$ le sous-espace des $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui se transforment à droite et à gauche selon des K-types appartenant à Ω, cf. [IV] 3.4. Alors

(5) soit Ω un ensemble fini de K-types ; alors il existe un ensemble fini d'hyperplans de la forme (3) tel que, pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega)$, les hyperplans polaires de $J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ appartiennent à cet ensemble.

Le terme $J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ n'a pas de pôle pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$. Pour $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on peut définir

$$J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f) = \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, f) e^{-<\lambda, X>} \, d\lambda.$$

On obtient une fonction de Schwartz en X. On a défini en [20] 6.4 l'espace $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. C'est celui des fonctions $f : \tilde{G}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ telles que $f(b \circ H_{\tilde{G}}) \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ pour toute fonction $b \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$. Comme en [20] 6.4, on peut étendre la définition de $J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f)$ par continuité à $f \in C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

On a imposé à $\tilde{\pi}$ d'être une induite $\tilde{\pi} = Ind_{\tilde{S}}^{\tilde{M}}(\tilde{\sigma})$ où $\tilde{\sigma}$ est une ω-représentation elliptique de $\tilde{R}(\mathbb{R})$. Par linéarité, les termes $J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ et $J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f)$ s'étendent à $\tilde{\pi} \in Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(D_{ell}(\tilde{R}(\mathbb{R}), \omega))$, cf. [IV] 1.2. Il est plus ou moins clair que ces termes sont invariants par l'action du groupe $W^M(\tilde{M}_0)$ sur cet espace. En utilisant la version tempérée de la décomposition [IV] 1.2(2), on peut alors étendre ces termes par linéarité à tout $\tilde{\pi} \in D_{temp}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$.

5.3 L'application $\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$

On conserve la même situation. On vient de rappeler la définition de l'espace $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On note $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$, resp. $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$, le sous-espace des éléments de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, resp. de $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, qui sont K-finis à droite et à gauche. On note $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K)$, resp. $I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, $I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K)$, le quotient de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$, resp. $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$, par le sous-espace des éléments f tels que $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ fortement régulier. On pose $K^M = K \cap M(\mathbb{R})$.

Proposition. *Il existe une unique application linéaire*

$$\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}} : C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$$

telle que, pour tout $\tilde{\pi} \in D_{temp}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ et tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on ait l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(f)) = J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi},X,f).$$

L'application $\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ envoie $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ dans $I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),K^M)$.

Preuve. La preuve de la première assertion est la même que celle de la proposition 6.4 de [20]. Supposons f K-finie à droite et à gauche. Elle se décompose donc selon un nombre fini de K-types, qui eux-mêmes se décomposent en un nombre fini de K^M-types. Si $\tilde{\pi}$ est l'induite d'une ω-représentation elliptique d'un espace de Levi de $\tilde{M}$, il résulte des constructions que $J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi},X,f)=0$ si aucun de ces K^M-types n'apparaît dans π. Le théorème de Paley-Wiener de Delorme-Mezo (repris en [20] 6.2) conduit alors à la seconde assertion. $\square$

De la définition résulte que

(1) soient $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $\tilde{\pi} \in D_{temp}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$; alors la fonction $X \mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(f))$ est de Schwartz sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$.

Comme toujours, on élimine les choix de mesures de Haar en définissant plus canoniquement une application

$$\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}} : C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R})) \to I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R})).$$

5.4 Relation entre les applications $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et $\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$

Fixons un sous-tore maximal T de M. Pour $\beta \in \Sigma(T)$, la coracine $\check{\beta}$ peut être considérée comme une forme linéaire sur $X^*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ et se restreint en une forme linéaire $\check{\beta}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, autrement dit en un élément $\check{\beta}_{\tilde{M}} \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Notons $\check{\Sigma}_{\star}(A_{\tilde{M}})$ l'ensemble de ces restrictions $\check{\beta}_{\tilde{M}}$ qui sont non nulles. Cet ensemble ne dépend pas du choix de T. Soit $\tilde{\pi}$ une ω-représentation de $\tilde{M}(\mathbb{R})$, supposons comme en 5.1 que π est une sous-représentation d'une induite $Ind_S^M(\sigma_{\lambda_0})$, où $S \in \mathcal{P}^M(R)$, σ est de la série discrète de $R(\mathbb{R})$ et $\omega_{\sigma}=1$ sur $\mathfrak{A}_R$. Supposons que T est un sous-tore maximal elliptique de R. Soit $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}_{\star}(A_{\tilde{M}})$. Notons $E_{\check{\alpha}}(\pi)$ l'ensemble des $\beta \in \Sigma(T)$ qui sont réelles et telles que $\check{\beta}_{\tilde{M}} = \check{\alpha}$. Cet ensemble dépend de π car la notion de racine réelle dépend de la structure sur $\mathbb{R}$ de T ; ce tore lui-même dépend de R qui dépend de π. Pour tout $\beta \in E_{\check{\alpha}}(\pi)$, on a défini la fonction $\rho_{\beta}(\pi_{\lambda})$ pour $\lambda \in \mathcal{A}_{M,\mathbb{C}}^*$, a fortiori pour $\lambda \in \mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$. Pour un tel λ, elle est de la forme

$$\rho_{\beta}(\pi_{\lambda}) = \Gamma_0(<\lambda_0,\check{\beta}>+<\lambda,\check{\alpha}>)^{\epsilon(\beta)}$$

où $\epsilon(\beta) \in \{\pm 1\}$. Nous noterons maintenant e au lieu de β les éléments de $E_{\check{\alpha}}(\pi)$. Pour $e=\beta$, on pose $\epsilon(e)=\epsilon(\beta)$ et $\mu(e)=<\lambda_0,\check{\beta}>$. Remarquons que $\mu(e)$ est imaginaire. La formule précédente devient

$$\rho_e(\pi_{\lambda}) = \Gamma_0(\mu(e)+<\lambda,\check{\alpha}>)^{\epsilon(e)}.$$

On pose

$$\rho_{\check{\alpha}}(\pi_{\lambda}) = \prod_{e \in E_{\check{\alpha}}(\pi)} \rho_e(\pi_{\lambda}).$$

Remarquons qu'il y a une bijection naturelle de $E_{-\check{\alpha}}(\pi)$ sur $E_{\check{\alpha}}(\pi)$, que l'on peut noter $e \mapsto -e$, de sorte que $\mu(-e) = -\mu(e)$ et $\epsilon(-e) = \epsilon(e)$. On a ainsi la formule

$$\rho_{-\check{\alpha}}(\pi_{\bar{\lambda}}) = \overline{\rho_{\check{\alpha}}(\pi_\lambda)}.$$

Pour $\tilde{P}, \tilde{P}' \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, on définit les sous-ensembles $\check{\Sigma}_\star^{U_P}(A_{\tilde{M}})$ et $\check{\Sigma}_{\star,P'|P}(A_{\tilde{M}})$ en imitant les définitions de 5.1. Il résulte des constructions de ce paragraphe que

$$(1) \qquad \rho_{P'|P}(\pi_\lambda) = \prod_{\check{\alpha} \in \check{\Sigma}_{\star,P'|P}(A_{\tilde{M}})} \rho_{\check{\alpha}}(\pi_\lambda).$$

Considérons $\tilde{P}$ comme fixé. Pour $\Lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, posons

$$(2) \qquad \rho(\pi_\lambda : \Lambda, \tilde{P}') = \rho_{P|P'}(\pi_\lambda)\rho_{P|P'}(\pi_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}\rho_{P'|P}(\pi_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}\rho_{P'|P}(\pi_{\lambda+\Lambda}).$$

Il résulte des définitions que l'on a l'égalité

$$\mathcal{M}(\pi_\lambda; \Lambda, \tilde{P}') = \rho(\pi_\lambda : \Lambda, \tilde{P}')\mathcal{M}^{rat}(\pi_\lambda; \Lambda, \tilde{P}').$$

La famille $(\rho(\pi_\lambda : \Lambda, \tilde{P}'))_{\tilde{P}' \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$ est une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille. Les descriptions ci-dessus montrent qu'elle est d'une forme particulière pour laquelle le corollaire 6.5 de [5] s'applique. C'est-à-dire que l'on a l'égalité

$$\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \rho^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)\mathcal{M}^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\pi_\lambda).$$

En utilisant les propriétés usuelles de commutation des opérateurs d'entrelacement à l'induction, on obtient la formule suivante, pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$:

$$(3) \qquad J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda, f) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \rho^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda) J^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{L}}(Ind^{\tilde{L}}_{\tilde{Q}}(\tilde{\pi}_\lambda), f),$$

où, pour tout $\tilde{L}$, on a fixé un espace parabolique $\tilde{Q} \in \mathcal{P}^{\tilde{L}}(\tilde{M})$.

Calculons la fonction $\rho^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)$. Considérons l'ensemble des ensembles $\underline{\check{\alpha}} = \{\check{\alpha}_i; i = 1, ..., n\}$ où les $\check{\alpha}_i$ sont des éléments linéairement indépendants de $\check{\Sigma}_\star(A_{\tilde{M}})$ et où $n = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$. Disons que deux tels ensembles $\underline{\check{\alpha}} = \{\check{\alpha}_i; i = 1, ..., n\}$ et $\underline{\check{\alpha}}' = \{\check{\alpha}'_i; i = 1, ..., n\}$ sont équivalents si, quitte à changer leur numérotation, on a $\check{\alpha}'_i = \pm\check{\alpha}_i$ pour tout i. Notons $\mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Puisqu'on a fixé un espace parabolique $\tilde{P}$, on peut identifier $\mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ à l'ensemble des $\underline{\check{\alpha}} = \{\check{\alpha}_i; i = 1, ..., n\}$ comme ci-dessus tels que $\check{\alpha}_i \in \check{\Sigma}_\star^{U_P}(A_{\tilde{M}})$ et c'est ce que nous faisons pour quelque temps. Pour un élément $\underline{\check{\alpha}} = \{\check{\alpha}_i; i = 1, ..., n\}$ de cet ensemble, on note $m(\underline{\check{\alpha}})$ le volume du quotient de $\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ par le $\mathbb{Z}$-module engendré par les $\check{\alpha}_i$. Pour $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}_\star(A_{\tilde{M}})$, posons

$$c_{\check{\alpha}}(\pi_\lambda; \Lambda) = \rho_{-\check{\alpha}}(\pi_\lambda)\rho_{\check{\alpha}}(\pi_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}\rho_{-\check{\alpha}}(\pi_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}\rho_{\check{\alpha}}(\pi_{\lambda+\Lambda}).$$

Considérons pour un instant λ comme une constante. Pour $e \in E_{\check{\alpha}}(\pi)$, définissons la fonction c_e d'une variable complexe s par

$$c_e(s) = \Gamma_0(-\mu(e) - <\lambda, \check{\alpha}>)^{\epsilon(e)}\Gamma_0(\mu(e) + <\lambda, \check{\alpha}> + s/2)^{-\epsilon(e)}$$

$$\Gamma_0(-\mu(e)- < \lambda, \check{\alpha} > -s/2)^{-\epsilon(e)}\Gamma_0(\mu(e)+ < \lambda, \check{\alpha} > +s)^{\epsilon(e)}.$$

Il résulte des descriptions ci-dessus et de (1) et (2) que

$$c_{\check{\alpha}}(\pi_\lambda : \Lambda) = \prod_{e\in E_{\check{\alpha}}(\pi)} c_e(< \Lambda, \check{\alpha} >),$$

$$\rho(\pi_\lambda : \Lambda, \tilde{P}') = \prod_{\check{\alpha}\in\check{\Sigma}_{\star,P'|P}(A_{\tilde{M}})} c_{\check{\alpha}}(\pi_\lambda; \Lambda).$$

On peut alors utiliser le lemme 7.1 de [6] qui calcule $\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda)$ sous la forme :

$$\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda) = \sum_{\underline{\check{\alpha}}=\{\check{\alpha}_i;i=1,\dots,n\}\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}} m(\underline{\check{\alpha}}) \prod_{i=1,\dots,n} \sum_{e\in E_{\check{\alpha}_i}(\pi)} c'_e(0).$$

Le terme $c'_e(0)$ est la dérivée de c_e évaluée en 0. On calcule

$$c'_e(0) = \frac{\epsilon(e)}{2}\left(\frac{\Gamma'_0(\mu(e)+ < \lambda, \check{\alpha}_i >)}{\Gamma_0(\mu(e)+ < \lambda, \check{\alpha}_i >)} + \frac{\Gamma'_0(-\mu(e)- < \lambda, \check{\alpha}_i >)}{\Gamma_0(-\mu(e)- < \lambda, \check{\alpha}_i >)}\right).$$

Définissons la fonction Γ_1 d'une variable complexe s par

$$\Gamma_1(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\Gamma'(-s/2)}{\Gamma(-s/2)} - \frac{\Gamma'((1+s)/2)}{\Gamma((1+s)/2)} - \frac{\Gamma'((1-s)/2)}{\Gamma((1-s)/2)}\right).$$

On obtient

$$c'_e(0) = \epsilon(e)\Gamma_1(\mu(e)+ < \lambda, \check{\alpha}_i >),$$

d'où

$$\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda) = \sum_{\underline{\check{\alpha}}=\{\check{\alpha}_i;i=1,\dots,n\}\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}} m(\underline{\check{\alpha}}) \prod_{i=1,\dots,n} \sum_{e\in E_{\check{\alpha}_i}(\pi)} \epsilon(e)\Gamma_1(\mu(e)+ < \lambda, \check{\alpha}_i >). \tag{4}$$

On a supposé que les $\check{\alpha}_i$ étaient positifs relativement à P. En vertu des propriétés des ensembles $E_{\check{\alpha}_i}(\pi)$ et de la parité de la fonction Γ_1, on voit que cette formule ne change pas si l'on remplace $\check{\alpha}_i$ par $-\check{\alpha}_i$. Elle reste donc correcte en considérant $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ comme un ensemble de classes d'équivalence comme on l'a défini plus haut.

Notons $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ l'espace de fonctions sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ engendré par les fonctions de la forme

$$\lambda \mapsto \prod_{i=1,\dots,n} \Gamma_1(c_i+ < \lambda, \check{\alpha}_i >)$$

où $\underline{\check{\alpha}} = \{\check{\alpha}_i; i = 1, ..., n\}$ parcourt $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, ou plus exactement un ensemble de représentants de cet ensemble de classes, et où, pour tout $i = 1, ..., n$, c_i est un nombre imaginaire. La formule ci-dessus montre que la fonction $\lambda \mapsto \rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda)$ appartient à $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On démontre classiquement la formule

$$\Gamma_1(s) = \sum_{k\geq 1}(-1)^k \frac{k}{s^2 - k^2}.$$

Pour $u \in U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, on en déduit aisément les propriétés suivantes :

(5) la fonction u n'a pas de pôle sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$; pour tout sous-ensemble compact $\Omega \subset \mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ tel que u n'ait pas de pôle sur $\Omega + i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, la fonction u et ses dérivées sont bornées sur cet ensemble.

5.5 L'application $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$

Nous allons définir une application linéaire

$$\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}} : C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R})) \to I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R})).$$

On doit admettre par récurrence certaines de ses propriétés. A savoir qu'elle se prolonge à l'espace $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, qu'elle est continue et se quotiente en une application linéaire définie sur $I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. On pose alors la définition

$$\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}) = \phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) - \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}(\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

La preuve des propriétes évoquées ci-dessus est formelle à partir des propriétés de l'application $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, que l'on a prouvées en [V] 1.2, et des propriétés analogues de l'application $\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$.

5.6 Un lemme auxiliaire

Pour simplifier, on fixe des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant.

Lemme. *Soient $\tilde{\pi}_1, ..., \tilde{\pi}_n$ un ensemble fini d'éléments de $D_{temp}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$. Il existe un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$ qui est une réunion finie de sous-espaces affines propres invariants par translations par $\mathcal{A}_{\tilde{G},\mathbb{C}}^*$ de sorte que, pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, $\lambda \notin \mathcal{H}$, et pour tout $\phi \in I(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$, il existe $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ de sorte que l'on ait l'égalité*

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{i,\lambda}, f_{\tilde{M},\omega}) = I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{i,\lambda}, \phi)$$

pour tout $i = 1, ..., n$.

Preuve. Soit $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Pour tout $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et tout $e \in D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}), \omega)$, on définit la fonction $\varphi_{\tilde{R},e,f}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{R},\mathbb{C}}^*$ par $\varphi_{\tilde{R},e,f}(\mu) = I^{\tilde{R}}(e_\mu, f_{\tilde{R},\omega})$. On rappelle que le théorème de Paley-Wiener affirme que l'application qui à f associe la collection de fonctions $(\varphi_{\tilde{R},e,f})_{\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0), e \in D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)}$ est une bijection de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ sur un espace $PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$ décrit en [IV] 1.4. C'est l'espace des familles $(\varphi_{\tilde{R},e})_{\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0), e \in D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)}$ de fonctions qui vérifient certaines conditions d'analycité, de croissance et d'invariance relativement à l'action de $W(\tilde{M}_0)$. Précisons cette dernière condition. Pour $w \in W(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, w induit un isomorphisme de $D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}), \omega)$ sur $D_{ell,0}(w(\tilde{R})(\mathbb{R}), \omega)$, que l'on note encore w. Considérons la propriété

$(1)_{\tilde{R},w}$ $\varphi_{w(\tilde{R}),w(e)}(w(\mu)) = \varphi(\tilde{R}, e, \mu)$ pour tout $e \in D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}), \omega)$ et tout $\mu \in \mathcal{A}_{\tilde{R},\mathbb{C}}^*$.

La condition est que $(1)_{\tilde{R},w}$ doit être vérifiée pour tout $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et tout $w \in W(\tilde{M}_0)$. L'espace $I(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ se décrit aussi comme un espace de familles $(\varphi_{\tilde{R},e})_{\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0), e \in D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)}$. Elles doivent vérifier les mêmes conditions d'analycité et de croissance que précédemment. Ce qui change est la condition d'invariance. Cette condition est maintenant que $(1)_{\tilde{R},w}$ doit être vérifiée pour tout $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ avec $\tilde{R} \subset \tilde{M}$ et pour tout $w \in W^M(\tilde{M}_0)$. On doit de plus avoir

(2) $\varphi_{\tilde{R},e} = 0$ si $\tilde{R} \not\subset \tilde{M}$.

On ne perd rien à remplacer les $\tilde{\pi}_i$ par d'autres éléments de $D_{temp}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ qui engendrent le même sous-espace. On peut donc supposer que, pour tout $i=1,...,n$, il existe

- $\tilde{R}_i \in \mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$;

- $e_i \in D_{ell,0}(\tilde{R}_i(\mathbb{R}),\omega)$ et $\mu_i \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$ (le dernier i étant $\sqrt{-1}$) ;

de sorte que $\tilde{\pi}_i$ soit l'induite de $\tilde{R}_i$ à $\tilde{M}$ de e_{i,μ_i}. L'égalité de l'énoncé s'écrit alors

$$(3) \qquad \varphi_{\tilde{R}_i,e_i,f}(\mu_i+\lambda)=\varphi_{\tilde{R}_i,e_i,\phi}(\mu_i+\lambda).$$

Considérons l'ensemble des triplets (i,j,w), où $i,j\in\{1,...,n\}$ et $w\in W(\tilde{M}_0)-W^M(\tilde{M}_0)$, tels que $w(\tilde{R}_i)=\tilde{R}_j$. Puisque $w\notin W^M(\tilde{M}_0)$, l'ensemble des $\lambda\in\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ vérifiant l'équation $w(\mu_i+\lambda)=\mu_j+\lambda$ est soit vide, soit un sous-espace affine propre invariant par translations par $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$. On note $\mathcal{H}$ la réunion de ces ensembles. Soit $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ tel que $\lambda\notin\mathcal{H}$. Soit $\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Considérons les deux ensembles suivants

$E'(\tilde{R})$ est l'ensemble des $w(\mu_i+\lambda)$ pour $i=1,...,n$ et $w\in W^M(\tilde{M}_0)$ tels que $w(\tilde{R}_i)=\tilde{R}$;

$E''(\tilde{R})$ est l'ensemble des $w(\mu_i+\lambda)$ pour $i=1,...,n$ et $w\in W(\tilde{M}_0)-W^M(\tilde{M}_0)$ tels que $w(\tilde{R}_i)=\tilde{R}$.

Puisque $\lambda\notin\mathcal{H}$, ces ensembles sont disjoints. On peut donc fixer un polynôme $p_{\tilde{R}}$ sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{R},\mathbb{C}}$ de sorte que $p_{\tilde{R}}(\mu)=1$ pour tout $\mu\in E'(\tilde{R})$ et $p_{\tilde{R}}(\mu)=0$ pour tout $\mu\in E''(\tilde{R})$. Soit $\phi\in I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$, que l'on décrit par la collection $(\varphi_{\tilde{R},e,\phi})_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),e\in D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)}$ comme ci-dessus. Pour $\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $e\in D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)$ et $\mu\in\mathcal{A}^*_{\tilde{R},\mathbb{C}}$, posons

$$(4) \qquad \varphi_{\tilde{R},e}(\mu)=|W^M(\tilde{M}_0)|^{-1}\sum_{w\in W(\tilde{M}_0)}\varphi_{w(\tilde{R}),w(e),\phi}(w(\mu))p_{w(\tilde{R})}(w(\mu)).$$

La famille $(\varphi_{\tilde{R},e})_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),e\in D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)}$ vérifie les conditions d'analycité et de croissance requises pour appartenir à l'espace $PW^\infty(\tilde{G},\omega)$. Elle vérifie aussi par définition la condition d'invariance $(1)_{\tilde{R},w}$ pour tout $\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et tout $w\in W(\tilde{M}_0)$. Elle appartient donc à cet espace de Paley-Wiener. Donc il existe $f\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ telle que $\varphi_{\tilde{R},e,f}=\varphi_{\tilde{R},e}$ pour tous $\tilde{R}$, e. Il reste à prouver que la condition (3) est vérifiée. Fixons $i\in\{1,...,n\}$. Soit $w\in W(\tilde{M}_0)$. Si $w\notin W^M(\tilde{M}_0)$, l'élément $w(\mu_i+\lambda)$ appartient à $E''(w(\tilde{R}_i))$. Donc $p_{w(\tilde{R})}(w(\mu_i+\lambda))=0$. Si $w\in W^M(\tilde{M}_0)$, l'élément $w(\mu_i+\lambda)$ appartient à $E'(w(\tilde{R}))$ donc $p_{w(\tilde{R})}(w(\mu_i+\lambda))=1$. La définition (4) donne alors

$$\varphi_{\tilde{R}_i,e_i}(\mu_i+\lambda)=|W^M(\tilde{M}_0)|^{-1}\sum_{w\in W^M(\tilde{M}_0)}\varphi_{w(\tilde{R}_i),w(e_i),\phi}(w(\mu_i+\lambda)).$$

Mais tous les termes de cette somme sont égaux à $\varphi_{\tilde{R}_i,e_i,\phi}(\mu_i+\lambda)$ d'après la condition d'invariance vérifiée par la famille $(\varphi_{\tilde{R},e,\phi})_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),e\in D_{ell,0}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)}$. L'égalité ci-dessus devient (3), ce qui achève la démonstration. $\square$

On peut renforcer le lemme de la façon suivante.

Lemme bis. *Soient $\tilde{\pi}_1,...,\tilde{\pi}_n$ un ensemble fini d'éléments de $D_{temp}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. Il existe un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, qui est une réunion finie de sous-espaces affines propres invariants par translations par $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, et il existe un ensemble fini Ω de K-types de sorte* *que, pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, $\lambda \notin \mathcal{H}$, et pour tout $\phi \in I(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$, il existe $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, \Omega)$ de sorte que l'on ait l'égalité*

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{i,\lambda}, f_{\tilde{M},\omega}) = I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{i,\lambda}, \phi)$$

pour tout $i = 1, ..., n$.

Preuve. Notons $pw : I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \to PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$ l'isomorphisme du théorème de Renard, cf. [IV] 1.4. Avec la terminologie introduite en [IV] 3.5, il existe un ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux de sorte que, pour tous i et λ, $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{i,\lambda}, f_{\tilde{M},\omega})$ ne dépende que de la projection de $pw(f)$ dans le sous-espace $PW(\tilde{G}, \omega, \Omega^{pw})$. D'après le théorème de Delorme et Mezo, on peut fixer un ensemble fini Ω de K-types de sorte que $PW(\tilde{G}, \omega, \Omega^{pw}) \subset pw(I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, \Omega))$. Il suffit alors de remplacer la fonction f fournie par le lemme précédent par une fonction $f' \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, \Omega)$ telle que la projection de $pw(f)$ dans $PW(\tilde{G}, \omega, \Omega^{pw})$ soit égale à $pw(f')$. $\square$

Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On a défini un sous-espace "instable" $D^{inst}_{ell,0}(\tilde{M})$, cf. [IV] 2.2.

Lemme ter. *Soient $\tilde{\pi}_1, ..., \tilde{\pi}_n$ un ensemble fini d'éléments de $D^{inst}_{ell,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$. Il existe un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, qui est une réunion finie de sous-espaces affines propres invariants par translations par $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, et il existe un ensemble fini Ω de K-types de sorte que, pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, $\lambda \notin \mathcal{H}$, et pour tout $\phi \in I(\tilde{M}(\mathbb{R}))$, il existe $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega)$ de sorte que*

- l'image de f dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ soit nulle ;

- on ait l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{i,\lambda}, f_{\tilde{M},\omega}) = I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{i,\lambda}, \phi)$$

pour tout $i = 1, ..., n$.

Preuve. On a décomposé l'espace de Paley-Wiener $PW^\infty(\tilde{G})$ en somme de deux sous-espaces $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ et $PW^{\infty,inst}(\tilde{G})$, cf. [IV] 2.3. L'hypothèse d'instabilité des $\tilde{\pi}_i$ entraîne que la conclusion ne dépend que de la projection de $pw(f)$ dans $PW^{\infty,inst}(\tilde{G})$. On peut remplacer la fonction f fournie par le lemme bis par une fonction f' telle que $pw(f')$ a une projection nulle dans $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ et la même projection que $pw(f)$ dans $PW^{\infty,inst}(\tilde{G})$. La première condition implique que l'image de f' dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est nulle, d'après le théorème [IV] 2.3. $\square$

5.7 Propriétés de l'application $\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}$

Les propriétés démontrées en [VIII] 1.6 de l'application ${}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ sur un corps de base non-archimédien valent aussi pour notre application $\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}$. Les démonstrations en sont les mêmes.

On a défini l'espace $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ engendré par les caractères de représentations tempérées et son sous-espace $D_{temp,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ engendré par les caractères de représentations tempérées dont le caractère central ω_π est trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. Ainsi, en notant $\mathbb{C}[i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}]$ l'espace vectoriel complexe de base $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} D_{temp,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)\otimes\mathbb{C}[i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}] & \to & D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)\\ \tilde{\pi}\otimes(\sum_\lambda c_\lambda\lambda) & \mapsto & \sum_\lambda c_\lambda\tilde{\pi}_\lambda \end{array}$$

est un isomorphisme. On a défini en 5.4 l'espace $U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$. Considérons un élément $v\in U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}\otimes D_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, un élément $\lambda\in\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ et une fonction $\mathbf{f}\in I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$. On peut écrire $v=\sum_{j=1,\dots,k}u_j\tilde{\pi}_j$ où les u_j sont des éléments de $U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ et les $\tilde{\pi}_j$ appartiennent à $D_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. On peut alors définir

$$\sum_{j=1,\dots,k}u_j(\lambda)I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda,\mathbf{f}).$$

Cela ne dépend pas de la décomposition choisie de v. On note $I^{\tilde{M}}(v(\lambda),\mathbf{f})$ cette expression. Remarquons que, puisque les $u_j(\lambda)$ et ses dérivées sont bornées pour $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ et que $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda,\mathbf{f})$ est de Schwartz sur cet ensemble, la fonction $I^{\tilde{M}}(v(\lambda),\mathbf{f})$ est elle aussi de Schwartz sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$.

Lemme. *Il existe une unique application linéaire*

$$\rho^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}:D_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*\to U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}\otimes D_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$$

vérifiant la condition suivante. Soient $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, $\tilde{\pi}\in D_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ *et* $X\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. *Alors on a l'égalité*

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}}I^{\tilde{M}}(\rho^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi};\lambda),\mathbf{f}_{\tilde{M},\omega})e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

Remarque. Il résulte de cette formule et de 5.4(5) que la transformée de Fourier $\lambda\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$ de la fonction $X\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$ s'étend en une fonction méromorphe sur tout $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. Elle est à décroissance rapide dans les bandes verticales. Ses pôles sont de la forme décrite en 5.2(3). Par contre, le nombre de ces pôles (ou plus exactement ces hyperplans polaires) n'est pas toujours fini.

Preuve. Soit $\tilde{\pi}$ une ω-représentation tempérée de $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Supposons comme en 5.1 que π soit une sous-représentation d'une induite $Ind_S^M(\sigma_{\lambda_0})$, où $S\in\mathcal{P}^M(R)$, σ est de la série discrète de $R(\mathbb{R})$ et $\omega_\sigma=1$ sur $\mathfrak{A}_R$. On suppose de plus que le caractère central de π est trivial sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, c'est-à-dire que λ_0 annule cet espace. On définit $\rho^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi})$ comme le produit $u\otimes\tilde{\pi}$, où u est la fonction $u(\lambda)=\rho^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)$. Pour simplifier, on fixe des mesures sur les groupes intervenant. Soit $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. L'égalité de l'énoncé s'écrit plus explicitement

$$(1)\qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(f))=\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}}\rho^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda,f_{\tilde{M},\omega})e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

On va vérifier cette égalité. On a par définition

$$(2)\qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(f))=I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(f))-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta^{rat,\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\phi^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{L}}(f))).$$

Le premier terme est par définition $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},X,f)$, c'est-à-dire

$$(3)\qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))=\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda,f)e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

. Fixons $\tilde{L}\neq\tilde{G}$. On ne peut pas appliquer par récurrence la formule de l'énoncé pour calculer le terme indexé par $\tilde{L}$ car la fonction $\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(f)$ n'est pas à support compact en général. Mais, X étant fixé, on choisit une fonction $b\in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{L}})$ qui vaut 1 au voisinage de la projection $X_{\tilde{L}}$ de X sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$. Posons $\varphi_1=\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}(\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(f))(b\circ H_{\tilde{L}})$. On a alors

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}(\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(f)))=I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\varphi_1).$$

D'après [VIII] 1.6(3) qui est valable pour notre application $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}$, on a $\varphi_1=\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}(\varphi_2)$, où $\varphi_2=\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(f)(b\circ H_{\tilde{L}})$. Maintenant, φ_2 est à support compact et on peut appliquer par récurrence la formule de l'énoncé. On obtient

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}(\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(f)))=\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*}\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi_\lambda)I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda,\varphi_{2,\tilde{M},\omega})e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

Il est clair que $\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi_\lambda)$ ne dépend que de la projection de λ sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L},*}$. On peut récrire l'égalité ci-dessus

$$(4)\qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}(\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(f)))=\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L},*}}\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi_\mu)B(\mu)e^{-<\mu,X>}\,d\mu,$$

où

$$B(\mu)=\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*}I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\lambda+\mu},\varphi_{2,\tilde{M},\omega})e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

Fixons $\tilde{Q}\in\mathcal{P}^{\tilde{L}}(\tilde{M})$. On a aussi

$$B(\mu)=\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*}I^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\mu+\lambda}),\varphi_2)e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda=I^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\mu),X_{\tilde{L}},\varphi_2).$$

En se rappelant la définition $\varphi_2=\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(f)(b\circ H_{\tilde{L}})$, on voit que le terme ci-dessus est égal à $I^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\mu),X_{\tilde{L}},\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(f))$. Ou encore, par définition,

$$B(\mu)=\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*}J_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\mu+\lambda}),f)e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

On peut alors reconstituer la formule (4) sous la forme

$$(5)\qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}(\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(f)))=\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*}\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi_\lambda)J_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda),f)e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda,$$

puisque la fonction que l'on intègre est à décroissance rapide.

Les formules (2), (3) et (5) conduisent à l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(f))=\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*}C(\lambda)e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda,$$

où
$$C(\lambda)=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\lambda},f)-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi_{\lambda})J_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\lambda}),f).$$
D'après 5.4(3), on a $C(\lambda)=\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\lambda})I^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\lambda}),f)$ où $\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$, ou encore $C(\lambda)=\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\lambda})I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\lambda},f_{\tilde{M},\omega})$. La formule précédente devient (1). Cela prouve cette relation.

On vient de prouver l'existence de $\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi})$ pour un ensemble de $\tilde{\pi}$ qui engendre linéairement l'espace $D_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. On peut donc définir par linéarité une application $\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ qui vérifie l'égalité de l'énoncé. On doit prouver son unicité. Celle-ci résulte de l'assertion suivante

(6) soit $v\in U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\otimes D_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$; supposons que, pour tout $f\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ et tout $X\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on ait l'égalité
$$\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*}I^{\tilde{M}}(v(\lambda),f_{\tilde{M},\omega})e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda=0;$$
alors $v=0$.

Par inversion de Fourier, l'hypothèse équivaut à l'égalité
$$I^{\tilde{M}}(v(\lambda),f_{\tilde{M},\omega})=0$$
pour tout $f\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ et tout $\lambda\in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$. Ecrivons $v=\sum_{i=1,\dots,k}u_i\otimes\tilde{\pi}_i$, où $u_i\in U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et $\tilde{\pi}_i\in D_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ pour tout i. On peut supposer que $u_i\neq 0$ pour tout i et que la famille $(\tilde{\pi}_i)_{i=1,\dots,k}$ est linéairement indépendante. Si $v\neq 0$, on a $k\geq 1$ et on peut fixer $\phi_1\in I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ tel que $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_1,\phi_1)=1$ tandis que $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_i,\phi_1)=0$ pour tout $i\geq 2$. Introduisons l'ensemble $\mathcal{H}$ du lemme 5.6 pour notre famille $(\tilde{\pi}_i)_{i=1,\dots,k}$. Fixons $\lambda\in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ tel que $\lambda\notin\mathcal{H}$ et $u_1(\lambda)\neq 0$. Définissons la fonction ϕ sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ par $\phi(\gamma)=e^{-<\lambda,H_{\tilde{M}}(\gamma)>}\phi_1(\gamma)$. On a
$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{i,\lambda},\phi)=I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_i,\phi_1)$$
pour tout i. Associons à ϕ une fonction $f\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ satisfaisant la conclusion du lemme 5.6. On a alors $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{1,\lambda},f_{\tilde{M},\omega})=1$ tandis que $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{i,\lambda},f_{\tilde{M},\omega})=0$ pour tout $i\geq 2$. Alors $I^{\tilde{M}}(v(\lambda),f_{\tilde{M},\omega})=u_1(\lambda)\neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Cela prouve (6) et le lemme. $\square$

Rappelons que, pour une ω-représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ telle que π soit irréductible, on définit son paramètre infinitésimal $\mu(\tilde{\pi})$ qui est une orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action du groupe de Weyl W. Pour une telle orbite, on note $D_{temp,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ le sous-espace de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ engendré par les $\tilde{\pi}$ de paramètre infinitésimal μ. On a les variantes $D_{temp,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, $D_{ell,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Ce dernier espace est de dimension finie. Plus généralement, pour $\lambda\in i\mathcal{A}_{\tilde{G}}^*$, notons $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)_{\lambda}$ l'ensemble des $\tilde{\pi}_{\lambda}$ pour $\tilde{\pi}\in D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. La construction explicite de l'application $\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ effectuée dans la preuve ci-dessus entraîne la propriété suivante. Soient $\tilde{R}\in\mathcal{L}^M(\tilde{M}_0)$, μ une orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action de W^R et $\lambda\in i\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{M},*}$. Alors

(7) $\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ envoie $Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(D_{ell,0,\mu}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)_{\lambda})\otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$ dans $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\otimes Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(D_{ell,0,\mu}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)_{\lambda})\otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$.

En conséquence

(8) $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ envoie $C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dans $I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$.

Preuve. On oublie comme souvent les espaces de mesures. L'espace de Paley-Wiener $PW_{ell}^{\infty}(\tilde{G},\omega)$ est un espace de familles de fonctions holomorphes indexées par une base de $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. On peut supposer que cette base est réunion de bases des sous-espaces $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ quand μ décrit tous les paramètres possibles. On note $PW_{ell,\mu}(\tilde{G},\omega)$ le sous-espace des familles appartenant à $PW_{ell}^{\infty}(\tilde{G},\omega)$ dont les composantes sont nulles pour les indices n'appartenant pas à $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Rappelons que l'on a des homomorphismes naturels

$$\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}PW_{ell}^{\infty}(\tilde{L},\omega)\stackrel{sym}{\to}PW^{\infty}(\tilde{G},\omega)\stackrel{pw}{\leftarrow}I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega).$$

Un élément $f\in I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ appartient à $I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$ si et seulement s'il existe un nombre fini de couples $(\tilde{L}_i,\mu_i)_{i=1,...,k}$, où $\tilde{L}_i\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et μ_i est une W^L-orbite dans $\mathfrak{h}^*$, de sorte que, pour toute fonction $b\in C_c^{\infty}(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$, on ait la relation

$$pw(f(b\circ H_{\tilde{G}}))\in sym(\oplus_{i=1,...,k}PW_{ell,\mu_i}(\tilde{L}_i,\omega)).$$

Soit $f\in C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$. Alors $f_{\tilde{M},\omega}$ est K^M-finie à droite et à gauche et on peut fixer un ensemble fini de couples $(\tilde{L}_i,\mu_i)_{i=1,...,k}$ comme ci-dessus, avec $\tilde{L}_i\subset\tilde{M}$, de sorte que

$$pw^M(f_{\tilde{M},\omega})\in sym^M(\oplus_{i=1,...,k}PW_{ell,\mu_i}(\tilde{L}_i,\omega))$$

(on a ajouté des exposants M pour désigner les objets relatifs à $\tilde{M}$ plutôt qu'à $\tilde{G}$). Quitte à accroître la famille $(\tilde{L}_i,\mu_i)_{i=1,...,k}$, on peut la supposer invariante par l'action de W^M. Soit $b\in C_c^{\infty}(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$. Soient $\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$ et μ une W^L-orbite dans $\mathfrak{h}^*$. Pour tout $\lambda\in i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{M},*}$, tout $\tilde{\pi}\in D_{ell,\mu,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}),\omega)_{\lambda}$ et tout $X\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on a l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),X,\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(f)(b\circ H_{\tilde{M}}))=I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),X,\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(f))b(X).$$

L'assertion (7) et la formule du lemme montrent que ceci est nul si $(\tilde{L},\mu)$ n'est pas l'un des $(\tilde{L}_i,\mu_i)$. Il en résulte que la composante de $pw^M(\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(f)(b\circ H_{\tilde{M}}))$ dans $PW_{ell,\mu}(\tilde{L},\omega)$ est nulle si $(\tilde{L},\mu)$ n'est pas l'un des $(\tilde{L}_i,\mu_i)$. Cela prouve (8). $\square$

5.8 L'application ${}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$

Pour tout $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et tout $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$, on fixe une fonction $\omega_{\tilde{P}}:\mathcal{A}_{\tilde{M}}\to[0,1]$. On suppose que ces fonctions vérifient les hypothèses de [VIII] 1.1.

Remarque. Dans cette référence, le corps de base était non-archimédien et on avait défini des fonctions $\omega_{\tilde{P}}$ sur les espaces $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$. Ici, le corps de base est archimédien et les fonctions $H_{\tilde{M}}:\tilde{M}(\mathbb{R})\to\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ que l'on a fixées permettent d'identifier $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ à $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$.

On suppose de plus que les fonctions $\omega_{\tilde{P}}$ sont C^{∞}.

Soient $\tilde{R}\in\mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$, $\tilde{\pi}$ un élément de $D_{ell}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f}\in C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Pour $X\in\mathcal{A}_{\tilde{R}}$, la fonction

$$\lambda\mapsto J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\lambda}),\mathbf{f})e^{-<\lambda,X>}$$

est méromorphe sur $\mathcal{A}_{\tilde{R},\mathbb{C}}^*$ et n'a qu'un nombre fini d'hyperplans polaires. Elle est à décroissance rapide dans les bandes verticales. Cela résulte des propriétés de $J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ et de l'hypothèse que $\mathbf{f}$ est K-finie à droite et à gauche. Pour $\nu \in \mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$ tel que cette fonction n'ait pas de pôle sur $\nu + i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$, on peut former l'intégrale

$$\int_{\nu+i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}} J^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}_\lambda),\mathbf{f})e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

Soit $\tilde{S} \in \mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{R})$. Fixons un point $\nu_{\tilde{S}} \in \mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$ tel que $<\nu_{\tilde{S}},\check{\alpha}>$ soit assez grand pour tout $\alpha \in \Sigma^{\tilde{S}}(\tilde{R})$. L'intégrale ci-dessus pour $\nu = \nu_{\tilde{S}}$ ne dépend pas du choix de $\nu_{\tilde{S}}$. On pose

$${}^cJ^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}),\mathbf{f}) = \int_{\mathcal{A}_{\tilde{R}}} \sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{R})} \omega_{\tilde{S}}(X) \int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}} J^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}_\lambda),\mathbf{f})e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda\,dX.$$

Proposition. *(i) La fonction en X que l'on intègre ci-dessus est C^∞ et à support compact. Le terme ${}^cJ^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}),\mathbf{f})$ ne dépend que de $Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi})$ (et pas des choix de $\tilde{R}$ et $\tilde{\pi}$).*

(ii) Il existe une unique application linéaire

$${}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}} : C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R})) \to I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$$

de sorte que, pour tout $\tilde{R} \in \mathcal{L}^M(\tilde{M}_0)$, tout $\tilde{\pi} \in D_{ell}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(R(\mathbb{R}))$ et tout $\mathbf{f} \in C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on ait l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}),{}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})) = {}^cJ^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}),\mathbf{f}).$$

La preuve est identique à celle du cas non-archimédien, cf. [VIII] 1.3.

Remarque. On peut préciser que, si Ω est un ensemble fini de K-types, il existe un ensemble fini Ω^M de K^M-types de sorte que ${}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ envoie $C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dans $I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,\Omega^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$.

Les propriétés prouvées dans le cas non-archimédien en [VIII] 1.4 valent aussi dans notre cas où le corps de base est réel. En particulier, la propriété [VIII] 1.4(6) dit que ${}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ s'étend en une application linéaire

$$C^\infty_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R})) \to I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R})).$$

5.9 L'application ${}^c\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}$

On définit une application

$${}^c\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}} : C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R})) \to I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$$

par la formule de récurrence

$${}^c\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) = \phi^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}} {}^c\theta^{rat,\tilde{L}}_{\tilde{M}}({}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})).$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut admettre par récurrence la propriété suivante.

Proposition . *L'application* ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ *se quotiente en une application linéaire définie sur* $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

On démontre facilement que l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ est ω-équivariante. C'est-à-dire que soit $h\in C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ une fonction K-finie à droite et à gauche. Notons h_ω la fonction $h_\omega(g)=\omega(g)h(g)$. Fixons des mesures de Haar. Pour $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$, on définit les fonctions $f\star h$ et $h_\omega\star f$ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ par

$$(f\star h)(\gamma)=\int_{G(\mathbb{R})} f(\gamma g^{-1})h(g)\,dg,$$

$$(h_\omega\star f)(\gamma)=\int_{G(\mathbb{R})} h_\omega(g)f(g^{-1}\gamma)\,dg.$$

Ces fonctions sont encore K-finies à droite et à gauche. On montre que ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(f\star h)={}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(h_\omega\star f)$. Mais, dans notre cas où le corps de base est réel, cela ne suffit pas à prouver la proposition. Il faudrait de plus prouver une propriété de continuité de notre application. On préfère revenir à la méthode d'Arthur. La proposition sera prouvée en 5.14.

Comme dans le paragraphe précédent, on peut préciser que, si Ω est un ensemble fini de K-types, il existe un ensemble fini Ω^M de K^M-types de sorte que ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ envoie $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dans $I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,\Omega^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$.

5.10 Propriétés de l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$

Les propriétés démontrées en [VIII] 1.6 et 1.8 dans le cas non-archimédien pour l'application notée alors ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ valent aussi sur le corps de base réel pour l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$. Rappelons la principale. Soit $\tilde{\pi}\in D_{temp}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et soit $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. La fonction

$$X\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$$

sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ est la transformée de Fourier de la fonction $\lambda\mapsto J_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda,\mathbf{f})$ sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$. Celle-ci se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$ qui vérifie les propriétés (2), (3), (4) et (5) de 5.2.

On voit alors par récurrence que la fonction

$$X\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$$

est la transformée de Fourier d'une fonction sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, laquelle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$ qui a les mêmes propriétés que ci-dessus. On note $\lambda\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ cette fonction. Pour $\nu\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ tel que cette fonction n'ait pas de pôle sur $\nu+i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ et pour $X\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on pose

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))=\int_{\nu+i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

Dans l'énoncé suivant, on fixe pour tout $\tilde{S} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$ un point $\nu_{\tilde{S}}$ comme en 5.8.

Proposition. *Supposons $\tilde{M} \neq \tilde{G}$ et $\tilde{\pi}$ elliptique. Soit $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Si chaque point $\nu_{\tilde{S}}$ est assez positif relativement à $\tilde{S}$, on a l'égalité*

$$\sum_{\tilde{S} \in \mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X) I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \nu_{\tilde{S}}, X, {}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})) = 0$$

pour tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$.

Remarque. La condition "assez positif" imposée aux points $\nu_{\tilde{S}}$ dépend de $\tilde{\pi}$ et de $\mathbf{f}$. Toutefois, la propriété 5.2(5) implique que, si l'on fixe un ensemble fini de K-types, on peut choisir des points $\nu_{\tilde{S}}$ assez positifs, cette notion ne dépendant plus que de Ω, de sorte que l'égalité de l'énoncé soit vérifiée pour tous $\tilde{\pi}$ et $\mathbf{f}$, pourvu que $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

5.11 L'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$

On définit une application

$${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} : C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R})) \to I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega, K^M) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$$

par la formule de récurrence

$${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = \phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) - \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

La différence avec la définition de 5.9 est que l'on a remplacé le premier terme $\phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})$ par $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$. Comme en 5.9, pour que cette définition ait un sens, il faut admettre par récurrence la propriété suivante, qui sera prouvée en 5.14.

Proposition . *L'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ se quotiente en une application linéaire définie sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.*

Soit $\tilde{\pi} \in D_{temp}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et soit $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. La fonction

$$X \mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$$

sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ est la transformée de Fourier d'une fonction $\lambda \mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \lambda, {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$. Celle-ci s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$ qui est à décroissance rapide dans les bandes verticales. Ses pôles sont de la forme décrite en 5.2(3). Par contre, le nombre de ces pôles (ou plutôt de ces hyperplans polaires) n'est pas forcément fini. Ces propriétés résultent par récurrence de la définition ci-dessus et des propriétés analogues des fonctions $X \mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$.

5.12 Relation entre les applications $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ et ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$

Lemme. *Soit* $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R},K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. *On a l'égalité*

$$ {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}} \circ {}^c\theta_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}). $$

Preuve. Si $\tilde{M} = \tilde{G}$, les trois applications $\theta_{\tilde{G}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{G}}^{rat,\tilde{G}}$ et ${}^c\theta_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}$ sont l'identité et la relation de l'énoncé est claire. Supposons $\tilde{M} \neq \tilde{G}$. En utilisant le fait que $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{M}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{M}}$ et ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}$ sont l'identité, les définitions de nos applications peuvent se reformuler de la façon suivante :

$$ (1) \qquad \phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) - {}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})), $$

$$ (2) \qquad \phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) - \phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}(\phi_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})), $$

$$ (3) \qquad \phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}) - {}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} {}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})). $$

Dans le terme du membre de droite de (2) indexé par $\tilde{L}$, on utilise (3) avec $\tilde{M}$ remplacé par $\tilde{L}$. Cela transforme (2) en

$$ \phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) - \phi_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) $$
$$ + \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{L}),\tilde{L}'\neq\tilde{L}} \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}} \circ {}^c\theta_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{L}'}({}^c\phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})). $$

Dans la dernière somme, on change la notation en remplaçant $(\tilde{L},\tilde{L}')$ par $(\tilde{L}',\tilde{L})$. Le membre de gauche de (1) est la somme de ceux de (2) et (3). Il en est donc de même des membres de droite. On obtient

$$ \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) $$
$$ + \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}'\neq\tilde{M}} \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{L}'),\tilde{L}\neq\tilde{L}'} \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}'} \circ {}^c\theta_{\tilde{L}'}^{rat,\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) $$
$$ + \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} {}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})). $$

On peut inclure la première somme du membre de droite dans la deuxième somme, en supprimant la condition $\tilde{L}' \neq \tilde{L}$. On peut de même inclure la troisième somme dans la deuxième en supprimant la condition $\tilde{L}' \neq \tilde{M}$. On obtient

$$ \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}^{\tilde{L}}(\tilde{M})} \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}'} \circ {}^c\theta_{\tilde{L}'}^{rat,\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})). $$

En raisonnant par récurrence, on peut supposer la relation de l'énoncé prouvée si l'on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{L} \neq \tilde{G}$. Alors les termes des deux membres ci-dessus indexés par un tel $\tilde{L}$ sont égaux. Il ne reste que l'égalité des termes indexés par $\tilde{G}$. Cette égalité est celle de l'énonce. $\square$

5.13 Une variante des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes

Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, cf. [V] 1.3 pour cette notation. On définit une application linéaire

$$\mathbf{f} \mapsto {}^c I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$$

sur $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ par la formule de récurrence

$$(1) \qquad {}^c I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}} {}^c I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, {}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

Elle vérifie les mêmes propriétés que dans le cas non archimédien. Rappelons-les.

(2) La distribution $\mathbf{f} \mapsto {}^c I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ se quotiente en une forme linéaire sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

Remarquons que cette propriété est utilisée par récurrence pour poser la définition (1). Comme pour les propositions 5.9 et 5.11, la preuve est plus délicate dans le cas archimédien. Elle sera faite en 5.14. Les propriétés suivantes se prouvent, elles, comme dans le cas non-archimédien, cf. [VIII] 1.9.

(3) Pour tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, il existe un sous-ensemble compact $\Gamma \subset \tilde{M}(\mathbb{R})$ tel que ${}^c I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = 0$ si le support de $\boldsymbol{\gamma}$ ne coupe pas $\Gamma^M = \{m^{-1}\gamma m; m \in M(\mathbb{R}), \gamma \in \Gamma\}$.

(4) Soient $\tilde{R} \in \mathcal{L}^M(\tilde{M}_0)$ et $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$. On a l'égalité

$${}^c I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}) {}^c I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

(5) On a l'égalité

$${}^c I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

5.14 Preuve des propositions 5.9, 5.11 et de l'assertion 5.13(2)

Soit $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Supposons que l'image de $\mathbf{f}$ dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ soit nulle. On veut prouver les assertions

(1) ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}) = 0$;

(2) ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = 0$;

(3) ${}^c I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$.

Ces assertions sont tautologiques si $\tilde{M} = \tilde{G}$. Supposons $\tilde{M} \neq \tilde{G}$. Dans la formule 5.13(5), utilisons par récurrence l'assertion (2) où l'on remplace $\tilde{M}$ par $\tilde{L}$ pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, $\tilde{L} \neq \tilde{M}$. Cette formule 5.13(5) se simplifie en

$$(4) \qquad {}^c I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

Dans le lemme 5.12, utilisons de la même façon l'assertion (1) par récurrence (remarquons que, pour les applications $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}$, il n'y a pas de problème : on sait qu'elles se factorisent par $I_{ac}(\tilde{L}(\mathbb{R}),\omega,K) \otimes Mes(L(\mathbb{R}))$). On obtient

$$(5) \qquad {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = {}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}).$$

En conséquence de (4) et (5), on a

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

La fonction ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})$ est un élément de $I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$. En appliquant la propriété 5.13(3), l'égalité ci-dessus entraîne que $I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))=0$ si le support de $\boldsymbol{\gamma}$ ne coupe pas Ω^M, où Ω est un certain sous-ensemble compact de $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Il en résulte que ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})$ est "à support compact", c'est-à-dire est un élément de $I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$. Pour $\tilde{\pi}\in D_{temp}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, la fonction $\lambda\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ est donc holomorphe. Ses coefficients de Fourier $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ ne dépendent pas du point ν. Dans la proposition 5.10, on peut remplacer tous les $\nu_{\tilde{S}}$ par 0. Puisque

$$\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}\omega_{\tilde{S}}(X)=1,$$

on obtient que, pour $\tilde{\pi}$ elliptique, les coefficients de Fourier $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},0,X,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ sont tous nuls. Cela entraîne que $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},{}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))=0$. D'autre part, la fonction ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})$ est cuspidale. En effet, on a la formule de descente

$$({}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{R},\omega}=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}){}^c\theta_{\tilde{R}}^{rat,\tilde{L}}(\mathbf{f}_{\tilde{Q},\omega})$$

pour tout espace de Levi $\tilde{R}\in\mathcal{L}^M(\tilde{M}_0)$. En utilisant l'assertion (1) par récurrence, on en déduit que $({}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{R},\omega}=0$ si $\tilde{R}$ est propre. Un élément de $I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$ qui est cuspidal et annulé par toutes les représentations elliptiques est nul. L'assertion (1) en résulte. L'égalité (5) entraîne alors (2) et l'égalité (4) entraîne (3). $\square$

5.15 Une propriété de l'espace $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$

On note $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$. Soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$ qui est réunion finie de sous-espaces affines propres invariants par translations par $\mathcal{A}_{\tilde{G},\mathbb{C}}^*$. Soient $k\geq 1$ un entier et E un sous-ensemble de $\mathcal{F}^k$. Un élément de E est une famille $e=(e_j)_{j=1,...,k}$ où $e_j\in\mathcal{F}$ pour tout j. On suppose

(1) pour tout $\lambda\in\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*-\mathcal{H}$, il existe $e=(e_j)_{j=1,...,k}\in E$ tel que $e_1(\lambda)=1$ tandis que $e_j(\lambda)=0$ pour $j=2,...,k$.

Proposition. *On suppose $\tilde{M}\neq\tilde{G}$. Soit $(u_j)_{j=1,...,k}$ une famille d'éléments de $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On suppose que, pour tout $e=(e_j)_{j=1,...,k}\in E$, la fonction $\lambda\mapsto\sum_{j=1,...,k}u_j(\lambda)e_j(\lambda)$ est holomorphe hors de $\mathcal{H}$. Alors $u_1=0$.*

Preuve. On peut agrandir $\mathcal{H}$ et supposer que c'est une réunion finie d'hyperplans affines. Définissons une fonction $p:\mathbb{C}\to\{-1/2,0,1/2\}$ par $p(k)=\frac{(-1)^k sgn(k)}{2}$ pour $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$ et $p(s)=0$ pour $s\notin\mathbb{Z}$ ou $s=0$. La fonction $\Gamma_1(s)$ de 5.4 a pour pôles les points s tels que $p(s)\neq 0$, et son résidu en s est $p(s)$. Remarquons la propriété suivante

(2) soient $s \in \mathbb{C}$ et $k \in 2\mathbb{Z}$; si $Re(s)$ et $Re(s+k)$ sont tous deux non nuls et s'ils sont de même signe, on a $p(s) = p(s+k)$; si $Re(s)$ et $Re(s+k)$ sont tous deux non nuls mais sont de signes opposés, on a $p(s) = -p(s+k)$.

Notons n la dimension de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On a défini l'ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ en 5.4. On fixe un élément $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, qui permet de supposer que les éléments de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ sont des familles $\underline{\check{\alpha}} = (\check{\alpha}_i)_{i=1,...,n}$ telles que, pour tout i, $\check{\alpha}_i$ est positif pour P. Considérons une telle famile, ainsi qu'une famille $\underline{y} = (y_i)_{i=1,...,n}$ de nombres complexes imaginaires. Soient $\lambda, \mu \in \mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$, supposons μ en position générale (précisément $< \mu, \check{\alpha}_i > \neq 0$ pour tout i). On voit que

(3) la fonction

$$s \mapsto \prod_{i=1,...,n} \Gamma_1(y_i + < \lambda + s\mu, \check{\alpha}_i >)$$

sur $\mathbb{C}$ a un pôle d'ordre au plus n en $s = 0$; le coefficient de s^{-n} dans son développement en 0 est égal à

$$\prod_{i=1,..,n} p(y_i + < \lambda, \check{\alpha}_i >) < \mu, \check{\alpha}_i >^{-1} .$$

Pour tout $j = 1, ..., k$, on peut fixer

- un ensemble fini d'indices B_j ;

- pour $b \in B_j$, un nombre complexe c_b, une famille $\underline{y}_b = (y_{b,i})_{i=1,...,n}$ de nombres complexes imaginaires et une famille $\underline{\check{\alpha}}_b = (\check{\alpha}_{b,i})_{i=1,...,n} \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$;

de sorte que, pour tout $\lambda \in \mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$, on ait l'égalité

$$u_j(\lambda) = \sum_{b \in B_j} c_b \prod_{i=1,...,n} \Gamma_1(y_{b,i} + < \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >).$$

Cette formule ne change pas si, pour un indice j et pour élément $b \in B_j$, on remplace les familles $\underline{y}_b = (y_{b,i})_{i=1,...,n}$ et $\underline{\check{\alpha}}_b = (\check{\alpha}_{b,i})_{i=1,...,n}$ par les familles $\underline{y}'_b = (y_{b,\sigma(i)})_{i=1,...,n}$ et $\underline{\check{\alpha}}'_b = (\check{\alpha}_{b,\sigma(i)})_{i=1,...,n}$, où σ est une permutation de $\{1, ..., n\}$. On s'autorisera à effectuer de telles permutations d'indices. On peut supposer que $c_b \neq 0$ pour tout $b \in B_j$ et que, si b, b' sont deux éléments distincts de B_j, les familles associées à b et b' sont distinctes (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de permutation σ de $\{1, ..., n\}$ telle que $y_{b,i} = y_{b',\sigma(i)}$ et $\check{\alpha}_{b,i} = \check{\alpha}_{b',\sigma(i)}$ pour tout i).

Soient $\lambda \in \mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^* - \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$ en position générale et $e = (e_j)_{j=1,...,k} \in E$. D'après (3) le coefficient de s^{-n} dans le développement en 0 de la fonction

$$s \mapsto \sum_{j=1,...,k} u_j(\lambda + s\mu) e_j(\lambda + s\mu)$$

est

$$\sum_{j=1,...,k} e_j(\lambda) \sum_{b \in B_j} c_b \prod_{i=1,...,n} p(y_{b,i} + < \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >) < \mu, \check{\alpha}_{b,i} >^{-1} .$$

L'hypothèse d'holomorphie et l'hypothèse $n \geq 1$ impliquent que cette expression est nulle. Par ailleurs, d'après la condition (1), on peut choisir e de sorte que $e_1(\lambda) = 1$ et $e_j(\lambda) = 0$ pour $j = 2, ..., k$. En posant simplement $B = B_1$ (on peut évidemment supposer $k \geq 1$), on obtient

(4) pour tout $\lambda \in \mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^* - \mathcal{H}$ et tout $\mu \in \mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$ en position générale, on a

$$\sum_{b \in B} c_b \prod_{i=1,...,n} p(y_{b,i} + < \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >) < \mu, \check{\alpha}_{b,i} >^{-1} = 0.$$

Remarquons que l'on peut supprimer la condition que μ est en position générale : l'expression ci-dessus est méromorphe en μ, la condition est que cette fonction méromorphe est nulle. Remarquons aussi que nos fonctions ne dépendent que des projections de λ et μ modulo $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$. On ne perd rien à supposer que cet espace est nul.

On veut prouver que $u_1 = 0$, c'est-à-dire que B est vide. Raisonnons par l'absurde et supposons B non vide. Par construction de l'ensemble $\mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$, tous les éléments $\check{\alpha}_{b,i}$ appartiennent à un $\mathbb{Z}$-module de type fini contenu dans $\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$. Montrons que l'on peut choisir un élément $b_0 \in B$ tel que, quitte à permuter les indices, on ait

(5) soient $m \in \{1, ..., n\}$ et $b \in B$; supposons qu'il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $\check{\alpha}_{b,i} = \check{\alpha}_{b_0,i}$ pour $i = 1, ..., m-1$ et $\check{\alpha}_{b,m} = c\check{\alpha}_{b_0,m}$; alors $0 < c \leq 1$;

En effet, soit $m \in \{1, ..., n\}$, supposons choisi b_0 tel que cette propriété soit vérifiée pour tout $m' < m$. Notons B' le sous-ensemble des $b \in B$ tels que, quitte à permuter les indices, on ait $\check{\alpha}_{b,i} = \check{\alpha}_{b_0,i}$ pour $i = 1, ..., m-1$. Considérons l'ensemble des éléments $\check{\alpha}_{b,i}$ pour $b \in B'$ et $i \geq m$. On peut choisir un élément $\check{\alpha}_{b_1,i_1}$ de cet ensemble qui soit maximal, au sens que, si un autre élément $\check{\alpha}_{b,i}$ vérifie $\check{\alpha}_{b,i} = c\check{\alpha}_{b_1,i_1}$, avec $c \in \mathbb{Q}$, on ait $|c| \leq 1$. On a automatiquement $0 < c \leq 1$ par l'hypothèse de positivité imposée à nos coracines. Quitte à permuter les indices, on peut supposer $i_1 = m$. On remplace b_0 par b_1 et on voit que la propriété (5) est alors vérifiée pour tout $m' \leq m$. Par récurrence, on obtient (5).

Fixons un élément $b_0 \in B$ vérifiant (5). Pour $i = 1, ..., n$, on pose simplement $H_i = \check{\alpha}_{b_0,i}$. La famille $(H_i)_{i=1,...,n}$ est une base de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ (puisqu'on a supposé $\mathcal{A}_{\tilde{G}} = \{0\}$). On introduit les coordonnées duales sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, c'est-à-dire que l'on note tout élément λ de cet espace sous la forme $\lambda = (\lambda_i)_{i=1,...,n}$, où $\lambda_i =< \lambda, H_i >$. Pour tout $b \in B$ et tout $i \in \{1, ..., n\}$, on peut écrire

$$(6) \qquad \check{\alpha}_{b,i} = \sum_{l=1,...,n} x_{b,i,l} H_l,$$

avec des coefficients $x_{b,i} \in \mathbb{Q}$. On fixe un dénominateur commun $D \in \mathbb{N}$, $D \neq 0$. On note C_1 un majorant des valeurs absolues $|x_{b,i,l}|$ pour tous b, i et l. Par hypothèse, $\mathcal{H}$ est réunion finie d'hyperplans, on note h le nombre de ces hyperplans. Soit C un réel tel que $C > 5DnhC_1$. Pour un entier $m \in \{0, ..., n\}$, notons $V[m]$ l'ensemble des $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M}} - \mathcal{H}$ tels que $C^{2i-1} \leq |Re(\lambda_i)| \leq C^{2i}$ pour tout i et $Re(\lambda_i) > 0$ pour $i \leq m$. Notons $B[m]$ le sous-ensemble des $b \in B$ tels qu'il existe des indices $i_1, ..., i_m \in \{1, ..., n\}$ tous distincts de sorte que

- $\check{\alpha}_{b,i_1}$ appartient au sous-espace de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ engendré par H_1 ;
- $\check{\alpha}_{b,i_2}$ appartient au sous-espace engendré par H_1 et H_2 ;
-...
- $\check{\alpha}_{b,i_m}$ appartient au sous-espace engendré par H_1,...,H_m.

Ces conditions déterminent les indices et, quitte à permuter l'ensemble d'indices, on peut supposer $i_1 = 1$,... $i_m = m$. On va prouver par récurrence sur m que

(7) pour tout $\lambda \in V[m]$ et tout $\mu \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, on a l'égalité

$$\sum_{b \in B[m]} c_b \prod_{i=1,...,n} p(y_{b,i}+ < \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >) < \mu, \check{\alpha}_{b,i} >^{-1}= 0.$$

Pour $m = 0$, $B[m] = B$ et l'égalité est un cas particulier de (4). Supposons $m > 0$ et la relation prouvée pour $m-1$. Soit $\lambda \in V[m]$. Les conditions imposées à C impliquent qu'il y a au moins $h+1$ points $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lambda_m - z \in 2D\mathbb{Z}, \ -C^{2m} \leq Re(z) \leq -C^{2m-1}.$$

Pour un tel point, notons $\lambda[z]$ l'élément de $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ tel que $\lambda[z]_i = \lambda_i$ pour $i \neq m$ et $\lambda[z]_m = z$. Montrons que l'on peut choisir z tel que $\lambda[z] \notin \mathcal{H}$. En effet, supposons que tous les $\lambda[z]$ appartiennent à $\mathcal{H}$. Puisqu'on a au moins $h+1$ points z, il y en a au moins deux, disons z et z', tels que $\lambda[z]$ et $\lambda[z']$ appartiennent à un même hyperplan contenu dans $\mathcal{H}$. Alors $\lambda = \frac{z'-\lambda_m}{z'-z}\lambda[z] + \frac{z-\lambda_m}{z-z'}\lambda[z']$ appartient aussi à cet hyperplan, contrairement à l'hypothèse. Cela prouve l'assertion. On choisit un z tel que $\lambda[z] \notin \mathcal{H}$ et on pose simplement $\lambda' = \lambda[z]$. Les deux éléments λ et λ' appartiennent à $V[m-1]$. On applique l'hypothèse de récurrence à chacun d'eux et on obtient par différence

$$(8) \qquad \sum_{b \in B[m-1]} c_b X_b(\lambda, \lambda') \prod_{i=1,\ldots,n} < \mu, \check{\alpha}_{b,i} >^{-1} = 0,$$

où

$$X_b(\lambda, \lambda') = \prod_{i=1,\ldots,n} p(y_{b,i} + < \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >) - \prod_{i=1,\ldots,n} p(y_{b,i} + < \lambda', \check{\alpha}_{b,i} >).$$

Montrons que

(9) pour $b \in B[m-1]$, on a les égalités

$$X_b(\lambda, \lambda') = \begin{cases} 2\prod_{i=1,\ldots,n} p(y_{b,i} + < \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >), & \text{si } b \in B[m], \\ 0, & \text{si } b \notin B[m]. \end{cases}$$

Pour $i \leq m-1$, $< \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >$ est combinaison linéaire des λ_l pour $l \leq m-1$ et remplacer λ par λ' ne change rien. Soit $i \geq m$. Notons $l_{i,max}$ le plus grand entier l tel que $x_{b,i,l} \neq 0$, avec la notation de (6). On a $l_{i,max} \geq m$. On a

$$< \lambda, \check{\alpha}_{b,i} > = \sum_{l=1,\ldots,l_{i,max}} x_{b,i,l}\lambda_l.$$

La condition $\lambda \in V[m-1]$ et la condition imposée à C impliquent que

$$|Re(x_{b,i,l_{i,max}}\lambda_{l_{i,max}})| > \sum_{l=1,\ldots,l_{i,max}-1} |x_{b,i,l}\lambda_l|.$$

Donc $Re(< \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >)$ est du même signe que $Re(x_{b,i,l_{i,max}}\lambda_{l_{i,max}})$. La même propriété vaut avec λ remplacé par λ'. En conséquence, $Re(< \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >)$ et $Re(< \lambda', \check{\alpha}_{b,i} >)$ sont de même signe si $l_{i,max} > m$, tandis qu'ils sont de signes opposés si $l_{i,max} = m$. Par ailleurs, la condition $\lambda'_m - \lambda_m \in 2D\mathbb{Z}$ implique que

$$< \lambda, \check{\alpha}_{b,i} > - < \lambda', \check{\alpha}_{b,i} > \in 2\mathbb{Z}.$$

D'après (2), on a donc

$$p(y_{b,i} + < \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >) = p(y_{b,i} + < \lambda', \check{\alpha}_{b,i} >)$$

si $l_{i,max} > m$ tandis que

$$p(y_{b,i} + < \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >) = -p(y_{b,i} + < \lambda', \check{\alpha}_{b,i} >)$$

si $l_{i,max} = m$. Les deux produits figurant dans la définition de $X_b(\lambda, \lambda')$ sont donc soit égaux, soit opposés. Ils sont égaux exactement si le nombre d'indices $i \geq m$ tels que $l_{i,max} = m$ est impair. Or il résulte des définitions que ce nombre d'indices est au plus 1 et qu'il est égal à 1 exactement si $b \in B[m]$. Cela prouve (9).

Les relations (8) et (9) entraînent la conclusion de (7). Cela prouve cette assertion (7).

Pour $b \in B[n]$, l'ordre des indices des familles associées à b est imposé ($\check{\alpha}_{b,i}$ appartient au sous-espace engendré par $H_1, ..., H_i$). Pour un entier $q \in \{1, ..., n+1\}$, notons $B[n,q]$ le sous-ensemble des $b \in B[n]$ tels que $x_{b,i,l} = 0$ pour $i \geq q$ et $l \neq i$. Autrement dit, en posant simplement $x_{b,i} = x_{b,i,i}$, on a $\check{\alpha}_{b,i} = x_{b,i}H_i$ pour $i \geq q$. Montrons que

(10) pour tout $\lambda \in V[n]$ et tout $\mu \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, on a l'égalité

$$\sum_{b \in B[n,q]} c_b \left(\prod_{i=1,...,n} p(y_{b,i} + < \lambda, \check{\alpha}_{b,i} >) \right) \left(\prod_{i=q,...,n} x_{b,i}^{-1} \right) \left(\prod_{i=1,...,q-1} < \mu, \check{\alpha}_{b,i} >^{-1} \right) = 0.$$

On raisonne par récurrence descendante sur q. Pour $q = n+1$, c'est l'assertion (7) pour $m = n$. Supposons $q \leq n$ et l'assertion prouvée pour $q+1$. Remarquons que l'assertion à prouver ne dépend de μ que via les coordonnées μ_1,...,μ_{q-1}. Puisque l'expression est méromorphe en μ, on peut se limiter au cas où ces coordonnées sont en position générale. Considérons ces coordonnées comme fixées et considérons la relation ci-dessus pour $q+1$. Elle dépend de la coordonnée μ_q que l'on considère comme variable. On regarde son résidu en $\mu_q = 0$. Les seuls termes pouvant créer un résidu sont les $< \mu, \check{\alpha}_{b,q} >^{-1}$ pour $b \in B[n, q+1]$. Plus explicitement, ce terme est

$$(\sum_{i=1,...,q} \mu_i x_{b,q,i})^{-1}.$$

S'il y a un $i < q$ tel que $x_{b,q,i} \neq 0$, l'hypothèse que μ_1,...,μ_{q-1} sont en position générale implique que le terme ci-dessus n'a pas de pôle en $\mu_q = 0$. Si $x_{b,q,i} = 0$ pour tout $i < q$, il y a un pôle et le résidu est $x_{b,q,q}^{-1}$. Or la condition que $x_{b,q,i} = 0$ pour tout $i < q$ équivaut à $b \in B[n,q]$. On voit alors que l'expression à prouver est égale au résidu en $\mu_q = 0$ de la même expression pour $q+1$. Cela prouve (10).

Posons simplement $B^* = B[n,1]$. C'est l'ensemble des $b \in B$ tels que, pour tout i, $\check{\alpha}_{b,i} = x_{b,i}H_i$. La relation (10) pour $q = 1$ se récrit

$$(11) \qquad \sum_{b \in B^*} c_b \prod_{i=1,...,n} x_{b,i}^{-1} p(y_{b,i} + \lambda_i x_{b,i}) = 0$$

pour tout $\lambda \in V[n]$. Montrons que

(12) il existe $\lambda \in V[n]$ tel que $y_{b_0,i} + \lambda_i \in 1 + 2D\mathbb{Z}$ pour tout i.

Rappelons que $y_{b_0,i}$ est imaginaire pour tout i. Pour tout i, notons Z_i l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $y_{b_0,i} + z \in 1+2D\mathbb{Z}$ et $C^{2i-1} \leq Re(z) \leq C^{2i}$. La condition imposée à C implique que Z_i a au moins $h+1$ éléments. Notons Z l'ensemble des λ tels que $\lambda_i \in Z_i$ pour tout i. Un élément λ de cet ensemble convient, pourvu qu'il n'appartienne pas à $\mathcal{H}$. Il s'agit de prouver que Z n'est pas inclus dans $\mathcal{H}$. Soit H un hyperplan contenu dans $\mathcal{H}$. Il y a un indice i tel que l'hyperplan vectoriel sous-jacent à H ne contienne pas la droite portée par H_i. Pour cet indice, la projection $\lambda \mapsto (\lambda_l)_{l \neq i}$ est injective sur H. Elle envoie $Z \cap H$ dans $\prod_{l \neq i} Z_l$. Donc le nombre déléménts de $Z \cap H$ est au plus $\prod_{l \neq i} |Z_l|$, ou encore $|Z||Z_i|^{-1}$, et ce nombre est majoré par $(h+1)^{-1}|Z|$. Puisqu'il y a h hyperplans, on en déduit que $Z \cap \mathcal{H}$ a au plus $\frac{h}{h+1}|Z|$ éléments. Donc Z n'est pas contenu dans $\mathcal{H}$, ce qui prouve (12).

Appliquons (11) à un λ vérifiant (12). Pour $b \in B^*$ et $i \in \{1, ..., n\}$, on a $x_{b,i} > 0$ d'après la condition de positivité imposée à $\check{\alpha}_{b,i}$. On a aussi $Re(\lambda_i) > 0$ par définition de $V[n]$. Donc les termes $y_{b,i} + \lambda_i x_{b,i}$ et $y_{b,i} + (1 - y_{b_0,i})x_{b,i}$ ont des parties réelles de même signe. Leur différence appartient à $2\mathbb{Z}$. D'après (2), la fonction p prend la même valeur sur ces deux termes. Puisque $Re(y_{b,i} + (1 - y_{b_0,i})x_{b,i}) = x_{b,i}$, la définition de cette fonction entraîne $p(y_{b,i} + \lambda_i x_{b,i}) = 0$ si $x_{b,i} < 1$. Supposons $b \neq b_0$. Prenons pour i le plus petit indice tel que $x_{b,i} \neq 1$. La condition (5) implique $x_{b,i} < 1$. La contribution de b à la formule (11) est donc nulle. Par contre, le même calcul montre que la contribution de b_0 est $p(1)^n$, c'est-à-dire $c_{b_0}(-2)^{-n}$. D'où $c_{b_0}(-2)^{-n} = 0$, ce qui est contradictoire puisque $c_{b_0} \neq 0$. Cela achève la démonstration. $\square$

6 Endoscopie et applications $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$

6.1 Les applications stables

Toute les constructions de cette section sont similaires à celles du cas non-archimédien. On se contentera la plupart du temps de rappeler les définitions et énoncés.

Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. On note

$$p_{\tilde{M}}^{st} : I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), K^M) \otimes Mes(M(\mathbb{R})) \to SI_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), K^M) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$$

la projection naturelle. Notons $\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ l'une de nos applications $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On définit une application linéaire

$$S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} : I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R})) \to SI_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), K^M) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$$

par la formule de récurrence

$$S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = p_{\tilde{M}}^{st} \circ \theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S\theta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Selon ce qu'est l'application $\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, on notera $S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ l'application $S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$.

Proposition . *Les applications $S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ et ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ se quotientent en des applications linéaires définies sur $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.*

Cela sera prouvé en 7.3.

La proposition 2.3 de [VIII] est valable pour chacune de nos applications.

Remarques. (1) L'application $S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ peut être définie comme une application linéaire de $I(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dans $SI_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$. C'est-à-dire que l'on n'a pas besoin de supposer nos fonctions K-finies. L'application préserve néanmoins la propriété de K-finitude, puisqu'il en est de même de $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$.

(2) Il résulte par récurrence des propriétés des applications $\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ que si l'on fixe un ensemble fini Ω de K-types, il existe un ensemble fini Ω^M de K^M-types tel que $S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ envoie $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dans $SI_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \Omega^M) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$.

6.2 Propriétés de l'application ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$

On suppose encore $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\tilde{\pi} \in D_{temp}^{st}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. On voit par récurrence que la fonction

$$X \mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, {}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$$

est la transformée de Fourier d'une fonction sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, laquelle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$ qui vérifie les propriétés (2) à (5) de 5.2. On note cette fonction $\lambda \mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \lambda, {}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$. Pour $\nu \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, on définit comme en 5.10 la transformée de Fourier $X \mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \nu, X, {}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$. On voit par récurrence que l'on a l'analogue suivant de la proposition 5.10.

Proposition. *Supposons $\tilde{M} \neq \tilde{G}$ et $\tilde{\pi}$ elliptique. Soit $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Si chaque point $\nu_{\tilde{S}}$ est assez positif relativement à $\tilde{S}$, on a l'égalité*

$$\sum_{\tilde{S} \in \mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X) S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \nu_{\tilde{S}}, X, {}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})) = 0$$

pour tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$.

Comme en 5.10, si l'on fixe un ensemble fini de K-types, on peut choisir les $\nu_{\tilde{S}}$ indépendants de $\mathbf{f}$ et $\tilde{\pi}$, pourvu que $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

6.3 Propriétés de l'application $S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$

Lemme. *Il existe une unique application linéaire*

$$\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} : D_{temp,0}^{st}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} \otimes D_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$$

vérifiant la condition suivante. Soient $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, $\tilde{\pi} \in D_{temp,0}^{st}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Alors on a l'égalité

$$S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})) = \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} I^{\tilde{M}}(\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}; \lambda), \mathbf{f}_{\tilde{M}}) e^{-<\lambda, X>} \, d\lambda.$$

Preuve. On utilise la définition de $S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})$ de 6.1. Pour le premier terme, on a

$$S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, p_{\tilde{M}}^{st} \circ \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})) = I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$$

puisque $\tilde{\pi}$ est stable, d'où

$$S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, p_{\tilde{M}}^{st} \circ \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})) = \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} I^{\tilde{M}}(\rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}; \lambda), \mathbf{f}_{\tilde{M}}) e^{-<\lambda, X>} \, d\lambda$$

d'après le lemme 5.7. Pour les autres termes, on utilise l'énoncé par récurrence :

$$S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\mathbf{G}'(s)}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)})) = \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} I^{\mathbf{M}}(\sigma_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\tilde{\pi};\lambda), (\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathbf{M}})e^{-<\lambda,X>}\, d\lambda.$$

Evidemment, en identifiant l'espace de la donnée endoscopique maximale $\mathbf{M}$ à $\tilde{M}$, on a simplement $(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathbf{M}}) = \mathbf{f}_{\tilde{M}}$. En définissant $\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi})$ par

$$\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}) = \rho_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s))\sigma_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\tilde{\pi}),$$

les formules précédentes conduisent à l'égalité de l'énoncé. L'unicité de l'application $\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ se prouve comme au lemme 5.7. □

Avec les mêmes notations qu'en 5.7(7), la définition par récurrence donnée ci-dessus entraîne

(1) $\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ envoie $Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(D_{ell,0,\mu}^{st}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)_\lambda \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*)$ dans $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} \otimes Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(D_{ell,0,\mu}(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)_\lambda \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*)$.

6.4 Stabilité de l'application $\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$

On conserve les mêmes hypothèses.

Lemme . *L'application $\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ prend ses valeurs dans $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} \otimes D_{temp,0}^{st}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$.*

Cela sera prouvé en 7.3.

6.5 Une variante des intégrales orbitales pondérées stables

On suppose encore $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{orb}^{st}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. On définit une forme linéaire $\mathbf{f} \mapsto {}^cS_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ par la formule habituelle

$${}^cS_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s))^c S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

La propriété de compacité 5.13(3) reste valable pour cette distribution.

Proposition . *Pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{orb}^{st}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, la forme linéaire $\mathbf{f} \mapsto {}^cS_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ se quotiente en une forme linéaire sur $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.*

Cela sera prouvé en 7.3.

6.6 Les applications endoscopiques

Le triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quelconque. Soient $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$. Considérons l'une de nos applications $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ que l'on note $\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On définit une application linéaire

$$\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'):I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))\to SI_{ac}(\mathbf{M}',K^{M'})\otimes Mes(M'(\mathbb{R}))$$

par la formule

$$\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))S\theta_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Dans le cas particulier où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et où $\mathbf{M}'=\mathbf{M}$, il faut remplacer le terme indexé par $s=1$ par $S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$, cela parce que l'on n'a pas encore démontré que l'application $S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ était stable. On note suivant les cas cette application $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}')$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}')$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}')$.

Considérons maintenant un K-espace $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$, un K-espace de Levi $K\tilde{M}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ et une donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a})$ qui est elliptique et relevante. On définit par la même formule une application linéaire

$$\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'):I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))\to SI_{ac}(\mathbf{M}',K^{M'})\otimes Mes(M'(\mathbb{R})).$$

Proposition. *Il existe une unique application linéaire*

$$\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}:I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))\to I_{ac}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$$

telle que, pour toute donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ *de* $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a})$ *qui est elliptique et relevante et pour tout* $\mathbf{f}\in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, *on ait l'égalité*

$$(\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{M}'}=\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\mathbf{f}).$$

L'application sera notée selon le cas $\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}$, ${}^c\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}$, ${}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}$. La preuve est la même que dans le cas non-archimédien. Il faut utiliser la version "K-finie" de la proposition 4.11 de [I], à savoir le corollaire 3.5 de [IV].

Ces applications vérifient les mêmes propriétés que dans le cas non-archimédien, cf. en particulier [VIII] 3.6. Soit $\tilde{M}$ une composante connexe de $K\tilde{M}$, soit $\tilde{\pi}\in D_{ell}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f}\in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. L'application $X\mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))$ est de Schwartz sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Sa transformée de Fourier $\lambda\mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$. Elle est à décroissance rapide dans les bandes verticales. Ses pôles sont de la forme décrite en 5.2(3). Dans le cas de l'application ${}^c\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}$ (et, en général, seulement dans ce cas), les hyperplans polaires sont en nombre fini.

Rappelons une propriété importante :

(1) supposons $K\tilde{M}\neq K\tilde{G}$; soit $\tilde{M}$ une composante connexe de $K\tilde{M}$, soit $\tilde{\pi}\in D_{ell}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f}\in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$; si chaque point $\nu_{\tilde{S}}$ est assez positif relativement à $\tilde{S}$, on a l'égalité

$$\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}\omega_{\tilde{S}}(X)I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu_{\tilde{S}},X,{}^c\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))=0$$

pour tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$.

Les propriétés de K-finitude du transfert entraînent que, si l'on fixe un ensemble fini Ω de K-types, il existe un ensemble fini Ω^M de K^M-types de sorte que $\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}$ envoie $I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,\Omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dans $I_{ac}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,\Omega^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$. La remarque qui suit la proposition 5.10 vaut pour l'application ${}^c\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}$. C'est-à-dire que les pôles de la fonction $\lambda \mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,{}^c\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))$ restent dans un nombre fini d'hyperplans indépendants de $\mathbf{f}$, pourvu que $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,\Omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

Remarque. Ici encore, l'application $\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}$ peut être définie sur des fonctions qui ne sont pas K-finies.

6.7 Egalité d'applications linéaires

Considérons un K-espace $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$ et un K-espace de Levi $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. Notons $K\tilde{G} = (\tilde{G}_p)_{p\in\Pi}$, $K\tilde{M} = (\tilde{M}_p)_{p\in\Pi^M}$. Considérons l'une de nos applications génériques $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$ ou ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, que l'on note simplement $\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On définit l'application linéaire

$$\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}} : I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K) \otimes Mes(G(\mathbb{R})) \to I_{ac}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K^M) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$$

comme la somme directe des applications $\theta_{\tilde{M}_p}^{\tilde{G}_p}$ pour $p \in \Pi^M$ et des applications nulles pour $p \in \Pi - \Pi^M$.

Proposition (à prouver). *On a l'égalité* $\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}} = \theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$.

On donnera en 7.4 une preuve soumise à une hypothèse qui ne sera vérifiée que plus tard.

6.8 Propriétés de l'application $\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}$

Considérons un K-espace $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$ et un K-espace de Levi $K\tilde{M}$. Ecrivons $K\tilde{G} = (\tilde{G}_p)_{p\in\Pi}$, $K\tilde{M} = (\tilde{M}_p)_{p\in\Pi^M}$. On définit $D_{temp}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ comme la somme directe des espaces $D_{temp}(\tilde{M}_p(\mathbb{R}),\omega)$ pour $p \in \Pi^M$. Pour $\tilde{\pi} = \sum_{p\in\Pi^M} \tilde{\pi}_p$ dans cet espace et pour $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_p)_{p\in\Pi^M} \in I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$, on pose

$$I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},\mathbf{f}) = \sum_{p\in\Pi^M} I^{\tilde{M}_p}(\tilde{\pi}_p,\mathbf{f}_p).$$

On a diverses variantes : $D_{temp,0}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ etc...

Lemme. *Il existe une unique application linéaire*

$$\rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}} : D_{temp,0}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} \otimes D_{temp,0}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$$

vérifiant la condition suivante. Soient $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, $\tilde{\pi} \in D_{temp,0}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ *et* $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. *Alors on a l'égalité*

$$I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})) = \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} I^{K\tilde{M}}(\rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\tilde{\pi};\lambda),\mathbf{f}_{K\tilde{M}})e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

Preuve. On introduit un ensemble $\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a})$ de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a})$ qui sont elliptiques et relevantes. Pour tout $\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a})$, on peut introduire un élément $\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}\in D^{st}_{temp,0}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ de sorte que

$$\tilde{\pi}=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a})} transfert(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}).$$

On n'a aucun mal à prouver l'égalité

$$I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\theta^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{f}))=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a})} S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},X,\theta^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}).$$

A droite, on a identifié X à un élément de $\mathcal{A}_{\tilde{M}'}$ par l'isomorphisme entre cet espace et $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Fixons $\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a})$, que l'on écrit $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$. Par définition de $\theta^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{f})$, le dernier terme ci-dessus est aussi

$$S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},X,\theta^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})).$$

Ou encore

$$\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},X,S\theta^{rat,\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})).$$

Fixons $\tilde{s}$ et appliquons le lemme 6.2. Nos hypothèses de récurrence nous autorisent à utiliser le lemme 6.3. On obtient

$$S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},X,S\theta^{rat,\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}))=\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}'}} S^{\mathbf{M}'}(\sigma^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'};\lambda),(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathbf{M}'})e^{-<\lambda,X>}\,d\lambda.$$

On a $(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathbf{M}'}=(\mathbf{f}_{K\tilde{M},\omega})^{\mathbf{M}'}$. Alors

$$S^{\mathbf{M}'}(\sigma^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'};\lambda),(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathbf{M}'})=I^{K\tilde{M}}(transfert(\sigma^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'};\lambda)),\mathbf{f}_{K\tilde{M},\omega}).$$

On peut identifier $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}'}$ à $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$. L'application $\sigma^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}$ prend ses valeurs dans $U^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'}\otimes D^{st}_{temp,0}(\mathbf{M}')$. Ecrivons $\sigma^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'})=\sum_{j=1,...,k}u_j\otimes\tilde{\tau}_j$. Alors

$$transfert(\sigma^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'};\lambda))=\sum_{j=1,...,k}u_j(\lambda)transfert(\tilde{\tau}_{j,\lambda}).$$

Cela s'interprète comme la valeur en λ de l'élément $\sum_{j=1,...,k}u_j\otimes transfert(\tilde{\tau}_j)$. Pour interpréter ce dernier terme comme un élément de notre espace $U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}\otimes D_{temp,0}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$, il faut remarquer que

(1) $U^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'}$ est inclus dans $U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$.

Introduisons des paires de Borel (B,T) de $K\tilde{G}$ et (B',T') de $G'(\tilde{s})$ de sorte que M soit standard pour (B,T) et M' soit standard pour (B',T'). L'ensemble $\check{\Sigma}_\star(A_{\tilde{M}})$ de 5.4 est celui des restrictions non nulles à $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ d'éléments de $\check{\Sigma}(T)$. L'ensemble similaire $\check{\Sigma}_\star(A_{\tilde{M}'})$ est celui des restrictions non nulles à $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}'}$ d'éléments de $\check{\Sigma}(T')$. On a un isomorphisme $T'\simeq T/(1-\theta)(T)$, d'où un homomorphisme $X_*(T)\to X_*(T')$. Les descriptions usuelles des systèmes de racines montrent que $\check{\Sigma}(T')$ est contenu dans l'image de $\check{\Sigma}(T)$ par cet homomorphisme. Modulo l'identification de $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}'}$ à $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, on en déduit aisément l'inclusion $\check{\Sigma}_\star(A_{\tilde{M}'}) \subset \check{\Sigma}_\star(A_{\tilde{M}})$. L'assertion (1) résulte alors de la définition donnée en 5.4 des espaces $U^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'}$ et $U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$.

Définissons $\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \tilde{\pi}_{\mathbf{M}'})$ par la formule

$$(2) \qquad \rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))transfert(\sigma^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'})).$$

On obtient l'égalité

$$(3) \qquad S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}, X, \theta^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}} I^{K\tilde{M}}(\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}, \lambda), \mathbf{f}_{K\tilde{M},\omega})e^{-<\lambda,X>}\, d\lambda.$$

Définissons $\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi})$ par

$$\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}) = \sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a})} \rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}).$$

On obtient alors la formule de l'énoncé. L'unicité se prouve comme au lemme 5.7. $\square$

6.9 Egalité des fonctions $\rho^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}$ et $\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}$

On conserve la même situation. On définit

$$\rho^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}} : D_{temp,0}(K\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}} \otimes D_{temp,0}(K\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$$

comme la somme directe des applications $\rho^{\tilde{G}_p}_{\tilde{M}_p}$ pour $p \in \Pi^M$.

Lemme (à prouver). *On a l'égalité* $\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}} = \rho^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}$.

On donnera en 7.4 une preuve soumise à une hypothèse qui ne sera vérifiée que plus tard.

6.10 Variante des intégrales orbitales pondérées elliptiques

Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet général et $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{orb,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on pose

$${}^cI^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))^cS^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Ici encore, dans le cas particulier où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et où $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, on doit remplacer le terme indexé par $s = 1$ par ${}^cS^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$.

Considérons maintenant un K-espace $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ et un K-espace de Levi $K\tilde{M}$. Soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(KM, K\tilde{M}, \mathbf{a})$. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{orb,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on définit ${}^cI^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ par la même formule que ci-dessus.

Soit maintenant $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb,\tilde{G}-reg}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. On peut décomposer $\boldsymbol{\gamma}$ en $\sum_{p \in \Pi^M} \boldsymbol{\gamma}_p$, où $\boldsymbol{\gamma}_p \in D_{orb,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}_p(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Pour $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_p)_{p \in \Pi} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on pose

$$ {}^cI^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = \sum_{p \in \Pi^M} {}^cI^{\tilde{G}_p}_{\tilde{M}_p}(\boldsymbol{\gamma}_p, \mathbf{f}_p). $$

On introduit un ensemble $\mathcal{E}(K\tilde{M}, \mathbf{a})$ de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques de $(KM, K\tilde{M}, \mathbf{a})$ qui sont elliptiques et relevantes. On écrit

$$ \boldsymbol{\gamma} = \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(K\tilde{M}, \mathbf{a})} transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}), $$

où les $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}$ appartiennent à $D^{st}_{orb,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$. On pose

$$ {}^cI^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(K\tilde{M}, \mathbf{a})} {}^cI^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}). $$

Cela ne dépend pas de la décomposition de $\boldsymbol{\gamma}$ choisie (la preuve est analogue à celle de [II] 1.15).

Proposition (à prouver). *Pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb,\tilde{G}-reg}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité*

$$ {}^cI^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = {}^cI^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}). $$

On donnera en 7.4 une preuve soumise à une hypothèse qui ne sera vérifiée que plus tard.

6.11 Reformulation des énoncés dans le cas quasi-déployé et à torsion intérieure

Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet quasi-déployé et à torsion intérieure. On n'a pas envie de le plonger dans un K-espace car cela perturberait nos hypothèses de récurrence. Mais on peut reformuler les assertions des paragraphes 6.6 à 6.10 en se passant d'un tel plongement.

Ainsi, soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta)$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M})$. Notons $\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ l'une de nos applications $\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}$, ${}^c\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}$, ${}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$. La proposition 6.7 se reformule par :

(A) pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$ \theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}) = (\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{M}'}. $$

Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{orb,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$. La proposition 6.10 se reformule par

(B) pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$^cI^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = {}^cI^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}).$$

Soit $\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'} \in D^{st}_{temp,0}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$. On peut poser comme en 6.8(2) :

$$\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}) = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) transfert(\sigma^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'})).$$

Pour $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, l'égalité 6.8(3) (qui est déjà prouvée) peut se récrire

$$(1) \qquad S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}, X, \theta^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f})) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}} I^{\tilde{M}}(\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}, \lambda), \mathbf{f}_{\tilde{M},\omega}) e^{-<\lambda, X>} \, d\lambda.$$

Le lemme 6.9 peut se récrire

(C) pour tout $\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'} \in D^{st}_{temp,0}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$, on a l'égalité

$$\rho^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(transfert(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'})) = \rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}).$$

Les assertions (A), (B) et (C) seront prouvées en 7.5.

On aura besoin d'un substitut de la propriété 6.6(1) (qui est déjà prouvée). Soit $\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'} \in D_{ell}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. On n'a aucun mal à définir les termes $S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}, \nu, X, {}^c\theta^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}))$ pour $\nu \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ et $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Alors

(2) supposons $\tilde{M} \neq \tilde{G}$; si chaque point $\nu_{\tilde{S}}$ est assez positif relativement à $\tilde{S}$, on a l'égalité

$$\sum_{\tilde{S} \in \mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X) S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}, \nu_{\tilde{S}}, X, {}^c\theta^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f})) = 0$$

pour tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$.

7 Les preuves des assertions de la section 6

7.1 Lien entre les intégrales orbitales pondérées endoscopiques et leurs variantes

Dans ce paragraphe et le suivant, on considère l'une des trois situations

(A) on se donne un triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ et un K-espace de Levi $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$;

(B) on se donne un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure et un espace de Levi $\tilde{M}$;

(C) on se donne un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, un espace de Levi $\tilde{M}$ et une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta)$ de $(M, \tilde{M})$ qui est elliptique et relevante.

Lemme. *(i) Dans le cas (A), soient* $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb,\tilde{G}-reg}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ *et* $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. *On a l'égalité*

$$^cI^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})} I^{K\tilde{L},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, {}^c\theta^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{L}}(\mathbf{f})).$$

(ii) Dans le cas (B), soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{orb,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ *et* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$*. On a l'égalité*

$$^cS^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} S^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, {}^cS\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})).$$

(iii) Dans le cas (C), soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{orb,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ *et* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$*. On a l'égalité*

$$^cI^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, {}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f})) + \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{M}} I^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, {}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})).$$

Preuve. La preuve du (i) est similaire à celle du cas non-archimédien ([VIII] proposition 4.1). Traitons (iii). Supposons d'abord que $\mathbf{M}'$ est la donnée triviale $\mathbf{M}$. La distribution $\mathbf{f} \mapsto {}^cS^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ est définie de sorte que l'on ait l'égalité

$$^cI^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = {}^cI^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}).$$

De même, pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ avec $\tilde{L} \neq \tilde{M}$, la distribution $\boldsymbol{\varphi} \mapsto S^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi})$ est définie de sorte que l'on ait l'égalité

$$I^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi}) = I^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi}).$$

L'application ${}^cS\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ est définie de sorte que l'on ait l'égalité

$$^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}, \mathbf{f}) = p^{st}_{\tilde{M}} \circ {}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}).$$

Puisque $\boldsymbol{\delta}$ est stable, on a $S^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, p^{st}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\varphi})) = I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi})$ pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in I(\tilde{M}(\mathbb{R}), K^M) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$. L'égalité à prouver se transforme en

$$^cI^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} I^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, {}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})),$$

ce qui est la relation 5.13(5). Cela conclut le cas $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. Supposons maintenant $\mathbf{M}' \neq \mathbf{M}$. Le même calcul qu'en [VIII] 4.1 conduit à l'égalité

$$(1) \qquad ^cI^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M}^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}, \tilde{L}'(s)) S^{\mathbf{L}'(s)}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, {}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(\mathbf{L}'(s), \mathbf{f})).$$

Pour $\tilde{L} = \tilde{M}$, la somme en s est réduite à l'élément $s = \zeta$ et le terme dans la somme est le premier terme du membre de droite de l'égalité de l'énoncé. Pour $\tilde{L} \neq \tilde{M}$, on peut utiliser par récurrence l'assertion 6.11(A) : ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(\mathbf{L}'(s), \mathbf{f}) = ({}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{L}'(s)}$. Le terme indexé par $\tilde{L}$ dans l'expression ci-dessus devient alors $I^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, {}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f}))$. C'est le terme indexé par $\tilde{L}$ dans le membre de droite de l'égalité de l'énoncé. L'égalité (1) devient donc celle de l'énoncé.

Le (ii) se prouve comme dans le cas non-archimédien en appliquant au cas $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ la preuve que l'on a donnée du (iii) dans le cas $\mathbf{M}' \neq \mathbf{M}$. On renvoie le lecteur à la preuve de [VIII] proposition 4.1(ii). $\square$

7.2 Relation entre les applications $\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}$, ${}^c\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}$, ${}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}$

On se réfère aux cas (A), (B), (C) du paragraphe précédent.

Lemme. *(i) Dans le cas (A), soit* $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. *On a l'égalité*

$$ {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})} \theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{L},\mathcal{E}} \circ {}^c\theta_{K\tilde{L}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}). $$

(ii) Dans le cas (B), soit $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. *On a l'égalité*

$$ {}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}) + \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}} \circ {}^cS\theta_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}). $$

(iii) Dans le cas (C), soit $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. *On a l'égalité*

$$ {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}) = {}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}) + \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{M}} \theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', {}^c\theta_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})). $$

Remarque. Quand on aura prouvé la stabilité de l'application $S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}$, le premier terme du membre de droite de (ii) rentrera dans la somme qui le suit, où la restriction $\tilde{L} \neq \tilde{G}$ disparaîtra.

Preuve. Considérons (i). Il suffit de prouver que, pour tout $\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(K\tilde{M}, \mathbf{a})$, les transferts à $\mathbf{M}'$ des deux membres de l'égalité sont égaux. En appliquant les définitions, cela revient à prouver l'égalité

$$ (1) \qquad {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})} \theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', {}^c\theta_{K\tilde{L}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})). $$

Notons $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$. Utilisons la définition du membre de gauche

$$ {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))^c S\theta_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}). $$

Nos hypothèses de récurrence et quelques formalités nous autorisent à appliquer aux termes du membre de droite le (ii) du présent énoncé, simplifié par la remarque qui suit cet énoncé. Le terme indexé par $\tilde{s}$ se développe en une somme indexée par $\tilde{L}'_{\tilde{s}} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}')$. Comme toujours, un tel $\tilde{L}'_{\tilde{s}}$ détermine un K-espace de Levi $K\tilde{L}$. Il s'identifie alors à l'espace de la donnée endoscopique $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ de $(KL, K\tilde{L}, \mathbf{a})$. On regroupe les couples $(\tilde{s}, \tilde{L}_{\tilde{s}})$ selon le K-espace de Levi $K\tilde{L}$. On obtient

$$ (2) \qquad {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})} \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}, \mathbf{L}'(\tilde{s}) \text{ elliptique}} $$

$$ \sum_{\tilde{t} \in \tilde{s} Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{t})) S\theta_{\mathbf{M}'}^{rat,\mathbf{L}'(\tilde{s})} \circ {}^cS\theta_{\mathbf{L}'(\tilde{s})}^{rat,\mathbf{G}'(\tilde{t})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}). $$

On a comme toujours l'égalité

$$ i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{t})) = i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}, \tilde{L}'(\tilde{s})) i_{\tilde{L}'(\tilde{s})}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{t})). $$

Sous cette forme, la restriction que $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ doit être elliptique devient superflue. Pour tout $\tilde{s}$, on a par définition

$$\sum_{\tilde{t}\in\tilde{s}Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{L}'(\tilde{s})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))^cS\theta^{rat,\mathbf{G}'(\tilde{t})}_{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}) = {}^c\theta^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{L}}(\mathbf{L}'(\tilde{s}),\mathbf{f}) = {}^c\theta^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{L}}(\mathbf{f})^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}.$$

Le terme indexé par $K\tilde{L}$ de l'expression (1) devient

$$\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))S\theta^{rat,\mathbf{L}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}({}^c\theta^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{L}}(\mathbf{f})^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}).$$

Par définition, c'est $\theta^{rat,K\tilde{L},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',{}^c\theta^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{L}}(\mathbf{f}))$. Mais alors le membre de droite de (2) devient égal à celui de (1). Cela démontre cette égalité (1) et l'assertion (i) de l'énoncé.

Traitons (iii). Supposons d'abord $\mathbf{M}'=\mathbf{M}$. Comme on l'a dit, en notant $\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ l'une de nos application ${}^c\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ etc..., l'application $S\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ est définie de sorte que l'on ait l'égalité

$$\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M},\mathbf{f}) = p^{st}_{\tilde{M}}\circ\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}).$$

Alors l'égalité du (iii) n'est autre que l'égalité du lemme 5.12 à laquelle on applique la projection $p^{st}_{\tilde{M}}$. Supposons maintenant $\mathbf{M}'\neq\mathbf{M}$. On reprend la preuve du (i) en supprimant les K et en remplaçant $\tilde{s}$ par s. Le calcul marche jusqu'au point où on a utilisé l'égalité ${}^c\theta^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(\mathbf{L}'(s),\mathbf{f}) = ({}^c\theta^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{L}'(s)}$. Ici, on ne dispose plus de l'application ${}^c\theta^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}$. Mais, si $\tilde{L}\neq\tilde{M}$, on peut utiliser l'assertion 6.11(A) : on a ${}^c\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{L}'(s),\mathbf{f}) = ({}^c\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{L}'(s)}$. Le calcul des termes indexés par un $\tilde{L}\neq\tilde{M}$ se poursuit comme ci-dessus et donne le terme voulu du membre de droite de l'égalité du (iii). Il reste le terme indexé par $\tilde{M}$. C'est simplement $S\theta^{rat,\mathbf{M}'}_{\mathbf{M}'}({}^c\theta^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f}))$. Mais $S\theta^{rat,\mathbf{M}'}_{\mathbf{M}'}$ est simplement l'identité de l'espace $SI_{ac}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(\mathbb{R}))$. Le terme précédent est donc ${}^c\theta^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})$, qui est le premier terme du membre de droite de l'égalité du (iii). Cela prouve (iii).

Le (ii) se prouve comme toujours en appliquant au cas $\mathbf{M}'=\mathbf{M}$ la preuve que l'on a donnée du (iii) dans le cas $\mathbf{M}'\neq\mathbf{M}$. On renvoie le lecteur à la preuve similaire de [VIII] proposition 4.1(ii). $\square$

7.3 Preuves des propositions 6.1, 6.5 et du lemme 6.4

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Comme toujours, les propriétés à démontrer sont tautologiques si $\tilde{M}=\tilde{G}$. On suppose $\tilde{M}\neq\tilde{G}$.

Soit $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dont l'image dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ est nulle. Soit $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{orb,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Pour $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$, $\tilde{L}\neq\tilde{M}$, nos hypothèses de récurrence assurent que ${}^cS\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})=0$. Le lemme 7.1(ii) se simplifie en

$$(1)\qquad {}^cS\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = S^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},{}^cS\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})).$$

On a aussi ${}^cS\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})=0$ pour $\tilde{L}\neq\tilde{G}$ et le lemme 7.2(ii) se simplifie en

$$(2)\qquad {}^cS\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) = {}^cS\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) + S\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}).$$

Le membre de gauche de (1) possède la propriété de compacité 5.13(3). Il en résulte que ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$, qui est a priori un élément de $SI_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),K^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$, est en fait "à support compact", c'est-à-dire appartient à $SI(\tilde{M}(\mathbb{R}),K^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$. Soit $\tilde{\pi}\in D_{ell,0}^{st}(\tilde{M}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Puisque ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$ est à support compact, la fonction $\lambda\mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda,{}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ est holomorphe pour $\lambda\in\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$. Sa transformée de Fourier sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ est la fonction $X\mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. D'après (2), c'est la fonction

$$X\mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))+S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,S\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

Or la première fonction est la transformée de Fourier de la fonction $\lambda\mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,{}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))$. La seconde est la transformée de Fourier de $\lambda\mapsto I^{\tilde{M}}(\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\lambda),\mathbf{f}_{\tilde{M}})$ d'après le lemme 6.2. Il en résulte que

$$(3)\qquad S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda,{}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))=S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,{}^cS\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))+I^{\tilde{M}}(\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\lambda),\mathbf{f}_{\tilde{M}}).$$

La fonction de gauche est holomorphe. La première fonction de droite n'a qu'un nombre fini d'hyperplans polaires. Donc $\lambda\mapsto I^{\tilde{M}}(\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\lambda),\mathbf{f})$ n'a qu'un nombre fini d'hyperplans polaires. On peut préciser que, si on fixe un ensemble fini Ω de K-types, ces hyperplans restent dans un ensemble fini indépendant de $\mathbf{f}$ pourvu que $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. On sait décomposer $D_{ell,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ en somme de sa partie stable $D_{ell,0}^{st}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ et de sa partie instable $D_{ell,0}^{inst}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$, cf. [IV] 2.2. On peut décomposer $\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi})$ sous la forme

$$\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi})=\sum_{j=1,\dots,k}u_j\otimes\tilde{\pi}_j$$

de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- $u_j\in U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et $u_j\neq 0$ pour tout j ;
- $\tilde{\pi}_j\in D_{ell,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et la famille $(\tilde{\pi}_j)_{j=1,\dots,k}$ est linéairement indépendante ;
- il existe un entier $l\in\{0,...,k\}$ de sorte que $\tilde{\pi}_j\in D_{ell,0}^{inst}(\tilde{M}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ si $j\leq l$, tandis que $\tilde{\pi}_j\in D_{ell,0}^{st}(\tilde{M}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ si $j>l$.

L'hypothèse sur $\mathbf{f}$ implique que l'image de $\mathbf{f}_{\tilde{M}}$ dans $SI(\tilde{M}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$ est nulle. Donc $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{j,\lambda},\mathbf{f}_{\tilde{M}})=0$ pour tout $j>l$ et tout λ. Supposons $l>0$. Appliquons le lemme 5.6 ter pour les $\tilde{\pi}_1$,...,$\tilde{\pi}_l$. On obtient un ensemble fini Ω de K-types et une réunion finie de sous-espaces affines $\mathcal{H}$ vérifiant la conclusion de ce lemme. Comme on l'a dit, pour cet ensemble Ω, les hyperplans polaires de la fonction $\lambda\mapsto I^{\tilde{M}}(\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\lambda),\mathbf{f})$ restent dans un ensemble fini pourvu que $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Quitte à accroître $\mathcal{H}$, on peut supposer que $\mathcal{H}$ contient tous ces hyperplans. Notons $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$. Notons $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)$ le sous-espace des éléments $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)$ d'image nulle dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. A tout élément $\mathbf{f}\in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, associons la famille $\underline{e}_{\mathbf{f}}=(e_{\mathbf{f},j})_{j=1,\dots,l}\in\mathcal{F}^l$ définie par $e_{\mathbf{f},j}(\lambda)=I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{j,\lambda},\mathbf{f}_{\tilde{M}})$. Puisque

$$I^{\tilde{M}}(\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\lambda),\mathbf{f})=\sum_{j=1,\dots,l}u_j(\lambda)I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{j,\lambda},\mathbf{f}_{\tilde{M}}),$$

on obtient

(4) pour tout $\mathbf{f}\in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, la fonction $\lambda\mapsto\sum_{j=1,\dots,l}u_j(\lambda)e_{\mathbf{f},j}(\lambda)$ n'a pas de pôle hors de $\mathcal{H}$.

On a aussi

(5) pour tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}} - \mathcal{H}$, il existe $\mathbf{f} \in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ tel que $e_{\mathbf{f},1}(\lambda) = 1$ et $e_{\mathbf{f},j}(\lambda) = 0$ pour $j = 2,...,l$.

En effet, on peut choisir $\boldsymbol{\phi} \in I(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$ tel que $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{1,\lambda}, \boldsymbol{\phi}) = 1$ tandis que $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{j,\lambda}, \boldsymbol{\phi}) = 0$ pour $j = 2,...,l$. Le lemme 5.6 ter associe à $\boldsymbol{\phi}$ une fonction $\mathbf{f}$ vérifiant (5).

Les propriétés (4) et (5) et la proposition 5.15 entraînent que $u_1 = 0$. Cela contredit l'hypothèse. Cela démontre que $l = 0$, autrement dit, $\sigma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi})$ appartient à $U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}} \otimes D^{st}_{ell,0}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Il en résulte que $I^{\tilde{M}}(\sigma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda), \mathbf{f}_{\tilde{M}}) = 0$ pour tout $\mathbf{f}$ comme au début de la preuve. En remontant le calcul, cela entraîne $S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, S\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})) = 0$ pour tout X. Mais la fonction $S\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est cuspidale : il résulte de la formule de descente [VIII] 2.3 et de nos hypothèses de récurrence que $S\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})_{\tilde{R}} = 0$ pour tout espace de Levi $\tilde{R} \subsetneq \tilde{M}$. Une fonction cuspidale qui vérifie la nullité ci-dessus pour tout $\tilde{\pi}$ elliptique est nulle. Cela prouve que $S\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) = 0$.

Revenons à la situation de la formule (3). On vient de montrer que le deuxième terme du membre de droite était nul. Donc la fonction $\lambda \mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \lambda, {}^cS\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$ est holomorphe. La transformée de Fourier $X \mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \nu, X, {}^cS\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$ ne dépend pas du point $\nu \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$. Dans la proposition 6.2, on peut remplacer tous les points $\nu_{\tilde{S}}$ par 0. Puisque $\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X) = 1$ pour tout X, on obtient que $S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, {}^cS\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})) = 0$ pour tout X. Pour la même raison que ci-dessus, la fonction ${}^cS\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est cuspidale et la nullité ci-dessus pour tout $\tilde{\pi}$ elliptique entraîne ${}^cS\theta^{rat,\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) = 0$. L'égalité (2) entraîne alors ${}^cS\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) = 0$. Cela démontre la proposition 6.1. La proposition 6.5 en résulte grâce à l'égalité (1).

On vient de prouver le lemme 6.4 restreint aux représentations elliptiques. Pour $\tilde{\pi} \in D^{st}_{temp,0}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, la formule du lemme 6.3 et la proposition 6.1 maintenant démontrée entraînent que $I^{\tilde{M}}(\sigma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda), \mathbf{f}_{\tilde{M}}) = 0$ pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ d'image nulle dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. L'usage du lemme 5.7 ter et de la proposition 5.15 permet d'en déduire comme ci-dessus que $\sigma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi})$ appartient à $U^{\tilde{G}}_{\tilde{M}} \otimes D^{st}_{ell,0}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. $\square$

7.4 Preuve conditionnelle des propositions 6.7 et 6.10 et du lemme 6.9

On considère un triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ et un K-espace de Levi $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. Les propriétés à prouver sont tautologiques si $K\tilde{M} = K\tilde{G}$. On suppose $K\tilde{M} \neq K\tilde{G}$. On impose la condition suivante :

(Hyp) soient $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ et $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb,\tilde{G}-reg}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$; alors on a l'égalité

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}).$$

Sous cette hypothèse, nous allons prouver les propositions 6.7, 6.10 et le lemme 6.9. Soient $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ et $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb,\tilde{G}-reg}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$.

Posons

$$ {}^c\varphi = {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}) - {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\mathbf{f}), $$

$$ {}^c\varphi^{rat} = {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}) - {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G}}(\mathbf{f}), $$

$$ \varphi^{rat} = \theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}) - \theta_{K\tilde{M}}^{rat,K\tilde{G}}(\mathbf{f}). $$

Faisons la différence entre la formule du lemme 7.1(i) et la formule 5.13(5), étendue de façon évidente à notre K-espace. On obtient

$$ {}^cI_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - {}^cI_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{M})} I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, {}^c\theta_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})) - I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, {}^c\theta_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(\mathbf{f})). $$

Pour $K\tilde{L} \neq K\tilde{G}$, les hypothèses de récurrence assurent que $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},.) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},.)$. Si $K\tilde{L} = K\tilde{G}$, cette égalité est assurée par notre hypothèse (Hyp). Si $K\tilde{L} \neq K\tilde{M}$, nos hypothèses de récurrence assurent que ${}^c\theta_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}) = {}^c\theta_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(\mathbf{f})$. Il reste

$$ (1) \qquad {}^cI_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - {}^cI_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, {}^c\varphi). $$

Faisons la différence entre la formule du lemme 7.2(ii) et celle du lemme 5.12. De la même façon, les hypothèses de récurrence conduisent à l'égalité

$$ (2) \qquad {}^c\varphi = {}^c\varphi^{rat} + \varphi^{rat}. $$

La suite de la preuve est similaire à celle du paragraphe précédent. Le membre de gauche de (1) possède la propriété de compacité 5.13(3). Il en résulte que ${}^c\varphi$, qui est a priori un élément de $I_{ac}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$, est en fait à support compact, c'est-à-dire appartient à $I(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K^M)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))$. Fixons une composante connexe $\tilde{M}$ de $K\tilde{M}$. Soit $\tilde{\pi} \in D_{ell,0}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. De la compacité du support de ${}^c\varphi$ résulte que la fonction $\lambda \mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda, {}^c\varphi)$ est holomorphe sur $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$. On calcule cette fonction grâce à (2) comme en 7.3. On a

$$ (3) \qquad I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda, {}^c\varphi) = I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda, {}^c\varphi^{rat}) + I^{K\tilde{M}}(\rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\pi},\lambda) - \rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\tilde{\pi},\lambda), \mathbf{f}_{K\tilde{M},\omega}). $$

La première fonction de droite n'a qu'un nombre fini d'hyperplans polaires. Si on fixe un ensemble fini Ω de K-types, ces hyperplans restent dans un ensemble fini indépendant de $\mathbf{f}$ pourvu que $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,\Omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Il en est donc de même de la deuxième fonction. On décompose $\rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\pi}) - \rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\tilde{\pi})$ en

$$ \rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\pi}) - \rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\tilde{\pi}) = \sum_{j=1,\dots,k} u_j \otimes \tilde{\pi}_j, $$

où

- $u_j \in U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et $u_j \neq 0$ pour tout j ;

- $\tilde{\pi}_j \in D_{ell,0}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ pour tout j et la famille $(\tilde{\pi}_j)_{j=1,\dots,k}$ est linéairement indépendante.

Le lemme 5.6 bis se généralise immédiatement à notre K-espace $K\tilde{G}$. Appliqué à la famille $(\tilde{\pi}_j)_{j=1,\dots,k}$, il nous fournit un ensemble fini Ω de K-types et une réunion finie $\mathcal{H}$ de sous-espaces affines de $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$. Quitte à accroître cet ensemble, on peut supposer que les fonctions du membre de droite de (3) n'ont pas de pôle hors de $\mathcal{H}$. A tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, \Omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on associe la famille $\underline{e}_{\mathbf{f}} = (e_{\mathbf{f},j})_{j=1,...,k}$ de fonctions holomorphes sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ définie par $e_{\mathbf{f},j}(\lambda) = I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}_j, \mathbf{f}_{\tilde{M},\omega})$. Le lemme 5.6 assure que, pour tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}} - \mathcal{H}$, on peut trouver $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, \Omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ de sorte que $e_{\mathbf{f},1}(\lambda) = 1$ tandis que $e_{\mathbf{f},j}(\lambda) = 0$ si $j = 2, ..., k$. Puisque

$$I^{K\tilde{M}}(\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \lambda) - \rho^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \lambda), \mathbf{f}_{K\tilde{M},\omega}) = \sum_{j=1,...,k} u_j(\lambda) e_{\mathbf{f},j}(\lambda),$$

cette dernière somme est holomorphe hors de $\mathcal{H}$ pour tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, \Omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. La proposition 5.15 assure alors que $u_1 = 0$, ce qui est contradictoire avec nos hypothèses sauf si $k = 0$. On a donc $k = 0$, ce qui équivaut à l'égalité $\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}) = \rho^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi})$. En remontant le calcul, cela assure que $I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \varphi^{rat}) = 0$. Les hypothèses de récurrence et les formules habituelles de descente impliquent que φ^{rat} est cuspidale. La nullité précédente pour toute composante connexe $\tilde{M}$ et tout $\tilde{\pi}$ elliptique impliquent alors $\varphi^{rat} = 0$.

Revenons à la situation de la formule (3). Le deuxième terme du membre de droite est maintenant nul. Donc le premier est holomorphe puisque le membre de gauche l'est. Il en résulte que la transformée de Fourier $X \mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \nu, X, {}^c\varphi^{rat})$ ne dépend pas du point ν choisi. Par différence entre la formule 6.6(1) et celle de la proposition 5.10, on a

$$\sum_{\tilde{S} \in \mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X) I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \nu_{\tilde{S}}, X, {}^c\varphi^{rat}) = 0.$$

On peut remplacer chaque $\nu_{\tilde{S}}$ par 0 et, par un raisonnement déjà fait plusieurs fois, on en déduit que $I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, {}^c\varphi^{rat}) = 0$ pour tout X. Pour la même raison que ci-dessus, la fonction ${}^c\varphi^{rat}$ est cuspidale et la nullité précédente pour toute composante $\tilde{M}$ et tout $\tilde{\pi}$ elliptique implique que la fonction ${}^c\varphi^{rat}$ est nulle. Enfin l'égalité (2) entraîne que ${}^c\varphi = 0$. Cela prouve la proposition 6.7. La proposition 6.10 résulte maintenant de (1).

On a prouvé ci-dessus l'égalité du lemme 6.9 pour les $\tilde{\pi}$ elliptiques. Pour $\tilde{\pi} \in D_{temp,0}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, les formules des lemmes 5.7 et 6.8 et l'égalité maintenant prouvée $\theta^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}} = \theta^{rat,\tilde{G}}_{K\tilde{M}}$ entraînent que

$$I^{K\tilde{M}}(\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \lambda) - \rho^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \lambda), \mathbf{f}) = 0$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ et tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Comme ci-dessus, l'usage du lemme 5.6 et de la proposition 5.15 démontrent l'égalité $\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}) = \rho^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\tilde{\pi})$. $\square$

7.5 Variante dans le cas quasi-déployé et à torsion intérieure

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure et un espace de Levi $\tilde{M}$. Soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta)$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M})$. On va prouver les assertions (A), (B) et (C) de 6.11. Soit $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Comme toujours, ces assertions sont tautologiques si $\tilde{M} = \tilde{G}$. On suppose $\tilde{M} \neq \tilde{G}$. On pose

$${}^c\varphi = {}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}) - ({}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{M}'},$$

$$^c\varphi^{rat}={}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})-({}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{M}'},$$

$$\varphi^{rat}=\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})-(\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{M}'}.$$

Soit $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{orb,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$. D'après 5.13(5) et le lemme 7.1(iii), on a

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta},{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\mathbf{f}))+\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}}I_{\tilde{M}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},{}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$$

et

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),{}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

On a prouvé en [V] proposition 1.13 que l'on avait l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varphi})=I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),\boldsymbol{\varphi})$$

pour tout $\boldsymbol{\varphi}\in I(\tilde{L}(\mathbb{R}))\otimes Mes(L(\mathbb{R}))$. Cette égalité s'étend immédiatement à $\boldsymbol{\varphi}\in I_{ac}(\tilde{L}(\mathbb{R}))\otimes Mes(L(\mathbb{R}))$. Par différence, on obtient

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})-{}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),\mathbf{f})=S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta},{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\mathbf{f}))-I^{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

Par définition du transfert des distributions, le dernier terme est aussi $S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta},{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'})$. On obtient alors

$$(1)\qquad {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})-{}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),\mathbf{f})=S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta},{}^c\varphi).$$

Transférons la formule du lemme 5.12. On obtient

$$^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}(\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}\circ{}^c\theta_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{M}'}.$$

Pour $\tilde{L}=\tilde{M}$, $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{M}}$ est l'identité. Pour $\tilde{L}=\tilde{G}$, ${}^c\theta_{\tilde{G}}^{rat,\tilde{G}}$ est l'identité. Pour $\tilde{L}\neq\tilde{M}$, $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, on peut appliquer la formule 6.11(A) par récurrence :

$$(\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L}}\circ{}^c\theta_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{M}'}=\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',{}^c\theta_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}).$$

La formule ci-dessus se récrit

$$^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}={}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}+\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}+\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M},\tilde{L}\neq\tilde{G}}\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',{}^c\theta_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}).$$

Utilisons la formule du lemme 7.2(iii). Dans cette formule, on peut remplacer le terme indexé par $\tilde{L}=\tilde{G}$ par $\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})$ puisque ${}^c\theta_{\tilde{G}}^{rat,\tilde{G}}$ est l'identité. On obtient

$$^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}={}^c\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})+\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})+\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M},\tilde{L}\neq\tilde{G}}\theta_{\tilde{M}}^{rat,\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',{}^c\theta_{\tilde{L}}^{rat,\tilde{G}}(\mathbf{f})^{\mathbf{M}'}).$$

En comparant les deux formules ci-dessus, on obtient l'égalité

$$(2)\qquad {}^c\varphi={}^c\varphi^{rat}+\varphi^{rat}.$$

A partir des égalités (1) et (2), la preuve devient similaire à celles des deux paragraphes précédents. On doit utiliser la variante 6.11(2) de la propriété 6.6(1). On laisse les détails au lecteur. □

8 L'application $\epsilon_{\tilde{M}}$

8.1 Un lemme élémentaire

On rappelle le lemme 6.2 de [7] dont nous ferons usage plusieurs fois. Considérons un espace $V = \mathbb{R}^n$, notons $B \subset V$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1. Notons $Diff^{cst}(V)$ l'espace des opérateurs différentiels à coefficients constants sur V. Considérons une famille finie $(l_i)_{i=1,...,k}$ de formes linéaires non nulles sur V. Notons $V_{reg} = \{v \in V; \forall i = 1, ..., k, l_i(v) \neq 0\}$.

Lemme. *Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour tout $D \in Diff^{cst}(V)$, il existe un nombre fini D_1,..., D_n d'éléments de $Diff^{cst}(V)$ tels que la propriété suivante soit vérifiée. Soit une fonction $c : Diff^{cst}(V) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et soit $\varphi : V_{reg} \to \mathbb{C}$ une fonction C^∞. Supposons que, pour tout $D' \in Diff^{cst}(V)$ et tout $v \in B \cap V_{reg}$, on ait l'inégalité*

$$|D'\varphi(v)| \leq c(D') \prod_{i=1,...,k} |l_i(v)|^{-q}.$$

Alors pour tout $v \in B \cap V_{reg}$, on a l'inégalité

$$|D\varphi(v)| \leq c(D_1) + ... + c(D_n).$$

8.2 Définition locale

On considère un triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ et un K-espace de Levi $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ de $K\tilde{G}$. Dans ce paragraphe, on fixe une composante connexe $\tilde{M}$ de $K\tilde{M}$, on note $\tilde{G}$ la composante correspondante de $K\tilde{G}$.

Proposition. *Soient $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ et η un élément semi-simple de $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage $\tilde{U}$ de η dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et une fonction $\boldsymbol{\varphi} \in I_{cusp}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$ telle que*

$$I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varphi}) = I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) - I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ dont le support est formé d'éléments de $\tilde{U}$ qui sont fortement réguliers dans $\tilde{G}$.

Preuve. Pour simplifier, on fixe des mesures de Haar dm sur $M(\mathbb{R})$, dg sur $G(\mathbb{R})$ et on écrit $\mathbf{f} = f \otimes dg$ avec $f \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Soit $\tilde{T}$ un sous-tore tordu maximal de $\tilde{M}$ tel que $\eta \in \tilde{T}(\mathbb{R})$. On fixe une mesure de Haar dt sur $T^{\theta,0}(\mathbb{R})$. Pour $\gamma \in \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$, l'intégrale orbitale sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ associée à γ et dt est bien définie. Notons-la $\boldsymbol{\gamma}$ pour un instant. On pose simplement

$$I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\gamma, \omega, f) = I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, f \otimes dg).$$

On définit de façon similaire $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma,\omega,f)$. On définit une fonction $\varphi_{f,\tilde{T}}$ presque partout sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$ par

$$\varphi_{f,\tilde{T}}(\gamma)=I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma,\omega,f)-I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\gamma,\omega,f).$$

Soit $m\in Z_M(\eta;\mathbb{R})$. Posons $\tilde{T}'=ad_m(\tilde{T})$ et transportons par ad_m la mesure sur $T^{\theta,0}(\mathbb{R})$ en une mesure sur $T'^{,\theta,0}(\mathbb{R})$. Il est clair que, pour presque tout $\gamma\in\tilde{T}(\mathbb{R})$, on a l'égalité

$$(1)\qquad \varphi_{f,\tilde{T}'}(m\gamma m^{-1})=\omega(m)\varphi_{f,\tilde{T}}(\gamma).$$

On a

(2) si $\tilde{T}$ n'est pas elliptique dans $\tilde{M}$, alors $\varphi_{f,\tilde{T}}=0$.

En effet, il existe un espace de Levi $\tilde{R}\subsetneq\tilde{M}$ tel que $\tilde{T}\subset\tilde{R}$. Quitte à conjuguer $\tilde{T}$, cet espace donne naissance à un K-espace de Levi $K\tilde{R}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. D'après les formules de descente [II] lemme 1.7 et 1.15(1) , on a l'égalité

$$\varphi_{f,\tilde{T}}(\gamma)=\sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{R})}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\left(I_{K\tilde{R}}^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\gamma,\omega,f_{K\tilde{L},\omega})-I_{K\tilde{R}}^{K\tilde{L}}(\gamma,\omega,f_{K\tilde{L},\omega})\right).$$

Les espaces $K\tilde{L}$ intervenant sont des K-espaces propres de $K\tilde{G}$. Nos hypothèses de récurrence assurent que tous les termes de ce développement sont nuls. D'où (2).

Supposons maintenant $\tilde{T}$ elliptique. Notons $\Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})$ et $\Sigma^{M_\eta}(T^{\theta,0})$ les ensembles de racines de $T^{\theta,0}$ dans G_η, resp. M_η. L'hypothèse d'ellipticité entraîne que tous les éléments de $\Sigma^{M_\eta}(T^{\theta,0})$ sont imaginaires. Par contre, aucun élément de $\Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})-\Sigma^{M_\eta}(T^{\theta,0})$ n'est imaginaire : un tel élément se restreint non trivialement à A_{M_η}. On fixe un sous-ensemble positif dans $\Sigma^{M_\eta}(T^{\theta,0})$ et on définit une fonction Δ_η presque partout sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ par

$$\Delta_\eta(X)=\prod_{\alpha\in\Sigma^{M_\eta}(T^{\theta,0}),\alpha>0}sgn(i\alpha(X)).$$

On va prouver

(3) si $\tilde{T}$ est elliptique dans $\tilde{M}$, la fonction $X\mapsto\Delta_\eta(X)\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ se prolonge en une fonction C^∞ dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$.

Admettons ce résultat. La théorie de la descente et les résultats de Bouaziz et Shelstad caractérisent les fonctions sur les tores $\tilde{T}$ comme ci-dessus qui sont au voisinage de η les intégrales orbitales d'une fonction C^∞ et cuspidale sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Ce sont précisément celles qui vérifient les propriétés (1), (2) et (3). On obtient alors l'assertion de la proposition.

Prouvons (3). On suppose donc $\tilde{T}$ elliptique dans $\tilde{M}$. Supposons d'abord que le point η est $\tilde{G}$-équisingulier. D'après [V] 1.3 et lemme 1.9, il existe une fonction $\varphi\in I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ telle que, pour tout sous-tore tordu maximal $\tilde{T}'$ de $\tilde{M}$ tel que $\eta\in\tilde{T}'(\mathbb{R})$ et pour tout $\gamma\in\tilde{T}'(\mathbb{R})\cap\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$ assez voisin de η, on ait l'égalité

$$\varphi_{f,\tilde{T}'}(\gamma)=I^{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\varphi).$$

La fonction φ est cuspidale d'après (2). Alors la propriété (3) résulte des propriétés habituelles des intégrales orbitales.

On ne suppose plus que η est $\tilde{G}$-équisingulier. Notons $\mathfrak{t}_1$, resp. $\mathfrak{t}_2$, le sous-ensemble des $X\in\mathfrak{t}^\theta$ tels que $\alpha(X)\neq0$ pour tout $\alpha\in\Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})-\Sigma^{M_\eta}(T^{\theta,0})$, resp. $\alpha\in\Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})$. Soit $X_0\in\mathfrak{t}_1(\mathbb{R})$, supposons X_0 proche de 0. Le point $\eta_0=exp(X_0)\eta$ est $\tilde{G}$-équisingulier. On vient de prouver que la fonction $X'\mapsto\Delta_{\eta_0}(X')\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X')\eta_0)$ se prolongeait en une fonction C^∞ au voisinage de 0. Mais on a l'égalité $\Delta_{\eta_0}(X') = \epsilon\Delta_\eta(X_0 + X')$ pour X' proche de 0, avec un $\epsilon \in \{\pm 1\}$ constant. Donc la fonction $X \mapsto \Delta_\eta(X)\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de X_0. Soit Ω une composante connexe de $\mathfrak{t}_1(\mathbb{R})$. On obtient

(4) il existe un voisinage $\mathfrak{u}$ de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ tel que la fonction $X \mapsto \Delta_\eta(X)\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\Omega \cap \mathfrak{u}$.

Considérons le groupe des $g \in G$ tels que $ad_g(\eta) = \eta$ et $ad_g(\tilde{T}) = \tilde{T}$. Il contient T^θ comme sous-groupe distingué d'indice fini. Notons $\mathcal{W}$ le quotient. Le groupe $\mathcal{W}$ agit naturellement dans $\mathfrak{t}^\theta$. Pour $w \in \mathcal{W} - \{1\}$, l'ensemble des points fixes est un sous-espace propre. Notons $\mathfrak{t}_3$ le complémentaire dans $\mathfrak{t}_2$ de la réunion de ces sous-espaces. On voit que, pour $X \in \mathfrak{t}_3(\mathbb{R})$ assez proche de 0, l'élément $exp(X)\eta$ est fortement régulier dans $\tilde{G}$. Quitte à restreindre $\mathfrak{u}$, la propriété 3.2(4) et le lemme 3.4 entraînent que

(5) pour tout $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$, il existe un entier N et, pour tout $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, il existe $c > 0$ de sorte que l'on ait la majoration

$$|\partial_U\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)| \leq cD^{G_\eta}(X)^{-N}$$

pour tout $X \in \mathfrak{t}_3(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{u}$.

Rappelons l'homomorphisme d'Harish-Chandra, que l'on peut interpréter ici comme un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}(G) & \to & Sym(\mathfrak{t}^\theta) \\ z & \mapsto & z_{T^\theta,0}. \end{array}$$

Montrons que

(6) on a l'égalité

$$\varphi_{zf,\tilde{T}}(exp(X)\eta) = \partial_{z_{T^\theta,0}}\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)$$

pour tout $X \in \mathfrak{t}_3(\mathbb{R})$.

En effet, la proposition 2.5 conduit à l'égalité

$$\varphi_{zf,\tilde{T}}(exp(X)\eta) = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})} \delta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(exp(X)\eta, z_L)(I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta, \omega, f) - I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(exp(X)\eta, \omega, f)).$$

Les hypothèses de récurrence assurent que tous les termes sont nuls, sauf celui pour $\tilde{L} = \tilde{M}$. Celui-ci est égal à $\partial_{z_{T^\theta,0}}\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)$. D'où (6).

L'algèbre $Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ est de type fini sur l'image de l'homomorphisme d'Harish-Chandra. On peut donc fixer des éléments $U_1, ..., U_k \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ de sorte que tout $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ s'écrive $U = \sum_{i=1,...,k} U_i z_{i,T^\theta,0}$, avec des $z_i \in \mathfrak{Z}(G)$. On a alors

$$\partial_U\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta) = \sum_{i=1,...,k} \partial_{U_i}\varphi_{z_i f,\tilde{T}}(exp(X)\eta).$$

L'assertion (5) associe à chaque U_i un entier N_i. En prenant pour N un majorant de ces entiers, on obtient qu'il existe N tel que, pour tout $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ et pour tout $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, il existe $c > 0$ de sorte que l'on ait la majoration

$$|\partial_U\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)| \leq cD^{G_\eta}(X)^{-N}$$

pour tout $X \in \mathfrak{t}_3(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{u}$. On applique alors le lemme 8.1. On obtient que, pour tout $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ et pour tout $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, la fonction $\partial_U\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ est bornée sur $\mathfrak{t}_3(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{u}$. Joint à (4), ce résultat implique

(7) pour tout $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ et pour tout $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, la fonction $\partial_U \varphi_{f,\tilde{T}}(X)$ est bornée sur $\Omega \cap \mathfrak{u}$.

Il résulte de (4) et (7) que cette fonction se prolonge continuement à l'adhérence de $\Omega \cap \mathfrak{u}$ et même à un voisinage de cette adhérence, cf. [9] remarque 3.2.

Soit $\alpha \in \Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})$ une racine réelle. Soit $X_0 \in \mathfrak{u}$ tel que l'ensemble des éléments de $\Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})$ annulant X_0 soit $\{\pm\alpha\}$. On va prouver

(8) la fonction $X \mapsto \Delta_\eta(X)\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de X_0.

Puisque α est réelle, la fonction $\Delta_\eta(X)$ est constante au voisinage de X_0 et on peut l'oublier. Le point X_0 appartient aux adhérences de deux composantes connexes Ω_1 et Ω_2 séparées par l'hyperplan annulé par α. Soit $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$. Il suffit de montrer que les deux prolongements de $\partial_U \varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ dans les adhérences de ces deux composantes coïncident sur cet hyperplan. Soit X_1 un élément de cet hyperplan assez voisin de X_0. Posons $\eta_1 = exp(X_1)\eta$. Le couple $(\eta_1, \tilde{T})$ vérifie les hypothèses de la section 4 et on utilise les notations de cette section.Les valeurs en X_1 des prolongements ci-dessus sont les deux limites

$$(9) \qquad lim_{r\to 0+}\partial_U \varphi_{f,\tilde{T}}(exp(rH_d)\eta_1) \text{ et } lim_{r\to 0-}\partial_U \varphi_{f,\tilde{T}}(exp(rH_d)\eta_1).$$

Il s'agit de prouver qu'elles sont égales. Pour X voisin de 0, on a

$$\partial_U \varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta_1) = \partial_U I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E},mod}(exp(X)\eta_1,\omega,f) - \partial_U I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},mod}(exp(X)\eta_1,\omega,f).$$

En effet, si on oublie les exposants *mod*, c'est la définition. Ajouter ces exposants ajoute au terme de droite l'image par ∂_U de la fonction

$$|\check{\alpha}|log(|\alpha(X)|)(I_{K\underline{\tilde{M}}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta_1,\omega,f) - I_{K\underline{\tilde{M}}}^{K\tilde{G}}(exp(X)\eta_1,\omega,f)).$$

Or cette fonction est nulle par hypothèse de récurrence puisque $dim(A_{\underline{\tilde{M}}}) < dim(A_{\tilde{M}})$. La différence entre les deux limites (9) est calculée par les propositions 4.1 et 4.3. Le même argument montre qu'elle est nulle. Cela prouve (8).

Supposons maintenant que α soit imaginaire au lieu d'être réelle. Le même résultat vaut : la racine α appartient à $\Sigma^{M_\eta}(T^{\theta,0})$, le point X_0 appartient à $\mathfrak{t}_1(\mathbb{R})$ et l'assertion résulte de (4). Pour une racine α qui n'est ni réelle, ni imaginaire, le sous-espace des éléments de $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ annulés par α est de codimension deux : un tel élément est annulé par α et par son conjugué. Mais alors, la fonction $X \mapsto \Delta_\eta(X)\varphi_{f,\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ et l'ensemble de racines $\Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})$ vérifient les hypothèses du lemme 21 de [18]. Ce lemme conclut que cette fonction se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de 0. Cela prouve (3) et la proposition. $\square$

8.3 Définition globale

Pour $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, posons

$$^c\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{f}} = {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}) - {}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\mathbf{f}).$$

C'est un élément de $I_{ac}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$. Un argument de descente déjà utilisé plusieurs fois montre qu'il est cuspidal.

Proposition. *Soit* $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. *Il existe une fonction* $\boldsymbol{\phi} \in I_{cusp}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$ *de sorte que l'on ait l'égalité*

$$I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi} - {}^c\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{f}}) = I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) - I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ *dont le support est formé d'éléments fortement réguliers dans* $\tilde{G}$.

Preuve. On reprend le début de la preuve de 7.4. On n'impose plus l'hypothèse (Hyp) de ce paragraphe. Le terme qui était annulé par cette hypothèse ne l'est plus et l'égalité (1) de ce paragraphe se transforme en

$${}^cI^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) - {}^cI^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = I^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, {}^c\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{f}}) + (I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) - I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})).$$

Le deuxième terme du membre de droite est localement une intégrale orbitale d'après la proposition 8.2. Il en est trivialement de même du premier terme. Donc le membre de gauche est localement une intégrale orbitale. Or il est à support dans un ensemble Γ^M où Γ est compact. Par partition de l'unité, on peut trouver $\boldsymbol{\phi} \in I(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$ de sorte que ce membre de gauche soit égal à $I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi})$. On obtient la formule de l'énoncé. Les formules de descente habituelles et les hypothèses de récurrence entraînent que le membre de droite de cette formule de l'énoncé est nul si le support de $\boldsymbol{\gamma}$ n'est pas formé d'éléments elliptiques. Cela entraîne que $\boldsymbol{\phi} - {}^c\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{f}}$ est cuspidale, donc aussi $\boldsymbol{\phi}$. $\square$

La fonction $\boldsymbol{\phi}$ de l'énoncé est uniquement déterminée. On pose

$$\epsilon_{K\tilde{M}}(\mathbf{f}) = \boldsymbol{\phi} - {}^c\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{f}}.$$

On a ainsi défini une application linéaire

$$\epsilon_{K\tilde{M}} : I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R})) \to I_{ac,cusp}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R})).$$

A ce point, on peut préciser que $\epsilon_{K\tilde{M}}$ prend ses valeurs dans

$$(I_{cusp}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) + I_{ac,cusp}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega, K)) \otimes Mes(M(\mathbb{R})),$$

c'est-à-dire que $\epsilon_{K\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est somme d'une fonction qui est à support compact mais qui n'est pas forcément K-finie et d'une fonction K-finie qui n'est pas forcément à support compact. On prouvera dans les paragraphes suivants que l'on peut supprimer le premier terme $I_{cusp}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$, autrement dit que $\epsilon_{K\tilde{M}}$ prend ses valeurs dans le sous-espace des fonctions K-finies.

Notons une propriété importante :

(1) on a l'égalité $\epsilon_{K\tilde{M}}(z\mathbf{f}) = z_{\tilde{M}}\epsilon_{K\tilde{M}}(\mathbf{f})$ pour tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ et tout $z \in \mathfrak{Z}(G)$.

Cela résulte de 8.1(6).

On a aussi

(2) pour toute ω-représentation elliptique $\tilde{\pi}$ de $K\tilde{M}(\mathbb{R})$, la fonction $X \mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \epsilon_{\tilde{M}}(f))$ est à décroissance rapide ; sa transformée de Fourier $\lambda \mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \lambda, \epsilon_{\tilde{M}}(f))$ sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ qui est à décroissance rapide dans les bandes verticales ; ses pôles sont de la forme décrite en 5.2(3).

Preuve. On rappelle qu'une ω-représentation elliptique de $K\tilde{M}(\mathbb{R})$ est une telle ω-représentation d'une composante connexe $\tilde{M}_p(\mathbb{R})$. L'assertion résulte du fait que $\epsilon_{K\tilde{M}}(f)$

est la somme d'une fonction à support compact et de ${}^c\theta^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(f) - {}^c\theta^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(f)$. On a déjà prouvé (cf. 5.11 et 6.6) que cette dernière fonction vérifiait la propriété (2). Cette propriété est aussi vérifiée pour une fonction à support compact. D'où l'assertion. $\square$

Soulignons que l'on n'affirme pas que les hyperplans polaires sont en nombre fini.

8.4 Retour sur la formule des traces locale symétrique

Pour simplifier, on fixe des mesures de Haar pour la fin de l'article. Dans ce paragraphe, on considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Pour un espace de Levi $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on introduit un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$ des classes d'équivalence des ω-représentations elliptiques $\tilde{\pi}$ de $\tilde{L}(\mathbb{R})$ dont le caractère central ω_π est trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{L}}$. Introduisons de même un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{E}}_{disc,0}(\tilde{L}, \omega)$ des classes d'équivalence des ω-représentations discrètes $\tilde{\pi}$ de $\tilde{L}(\mathbb{R})$ dont le caractère central ω_π est trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{L}}$. On renvoie à [20] 2.11 pour la notion de ω-représentation discrète. Soit $\tilde{\pi} \in \underline{\mathcal{E}}_{disc,0}(\tilde{L}, \omega)$. Il résulte du lemme 2.11 de [20] que c'est l'induite d'une représentation elliptique d'un espace de Levi de $\tilde{L}$. C'est-à-dire que l'on peut écrire

$$(1) \qquad \tilde{\pi} = c\, Ind^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\nu),$$

où $c \in \mathbb{C}$, $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ est un espace de Levi contenu dans $\tilde{L}$, $\tilde{\sigma}$ appartient à $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R}, \omega)$ et $\nu \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$.

Inversement, soient $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\sigma} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R}, \omega)$. Montrons que

(2) il n'existe qu'un nombre fini de couples $(\tilde{L}, \tilde{\pi})$, où $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})$ et $\tilde{\pi} \in \underline{\mathcal{E}}_{disc,0}(\tilde{L}, \omega)$, tels que le couple $(\tilde{R}, \tilde{\sigma})$ soit celui intervenant dans la décomposition (1).

Preuve. On peut évidemment fixer $\tilde{L}$ et prouver la finitude de l'ensemble des $\tilde{\pi}$. La représentation $\tilde{\sigma}$ est issue d'un triplet elliptique $(M, \tau, \tilde{\mathbf{r}})$, cf. [20] 2.11. Le terme M est un Levi de R contenant M_0 et τ est une représentation de la série discrète de $M(\mathbb{R})$. Soit $\nu \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$. On veut que le caractère central de $Ind^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(\sigma_\nu)$ soit trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{L}}$. Cela impose que ν appartient à $i\mathcal{A}^{\tilde{L},*}_{\tilde{R}}$. Pour que $Ind^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\nu)$ soit une ω-représentation discrète, il est nécessaire qu'il existe $\gamma \in \tilde{L}(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

- ad_γ conserve M ;
- $\tau_\nu \circ ad_\gamma \simeq \tau_\nu \otimes \omega$;
- l'automorphisme w_γ de $\mathcal{A}^{\tilde{L}}_M$ déduit de ad_γ n'a pas de points fixes non nuls.

Il n'y a qu'un nombre fini d'automorphismes w_γ possibles. Pour chacun d'eux, la deuxième relation détermine $(w_\gamma^{-1} - 1)(\nu) \in i\mathcal{A}^{\tilde{L}*}_M$. D'après la troisième relation, cela revient à déterminer ν. Cela prouve (2). $\square$

Soient $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\sigma} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R}, \omega)$. A chaque couple $(\tilde{L}, \tilde{\pi})$ vérifiant (2), associons le sous-espace affine $H = \nu + i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$ de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$. On obtient un ensemble fini $\mathcal{H}^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$ de sous-espaces affines de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$. Cet ensemble contient $i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$: cet espace est associé au couple $(\tilde{L}, \tilde{\pi}) = (\tilde{R}, \tilde{\sigma})$ lui-même. L'ensemble est symétrique au sens suivant. Un élément $w \in W(\tilde{M}_0)$ agit en envoyant $\tilde{R}$ sur $w(\tilde{R})$ et $\tilde{\sigma}$, sinon sur un élément de $\underline{\mathcal{E}}(w(\tilde{R}), \omega)$, du moins sur un multiple d'un tel élément, c'est-à-dire $w(\tilde{\sigma}) = z_w \tilde{\sigma}_w$, où $z_w \in \mathbb{C}^\times$ et $\tilde{\sigma}_w \in \underline{\mathcal{E}}(w(\tilde{R}), \omega)$. Alors $\mathcal{H}^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}) = w^{-1}(\mathcal{H}^{\tilde{G}}_{w(\tilde{R})}(\tilde{\sigma}_w))$.

Pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et pour tout $\tilde{\pi} \in \underline{\mathcal{E}}_{disc,0}(\tilde{L}, \omega)$, soit $\phi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}$ une fonction C^∞ et à croissance polynomiale sur $i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*$. Pour $f\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$, l'expression

$$J(f)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}\sum_{\tilde{\pi}\in\underline{\mathcal{E}}_{disc,0}(\tilde{L},\omega)}\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*}\phi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}(\lambda)I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda,f_{\tilde{L},\omega})\,d\lambda.$$

est convergente. Le résultat ci-dessus montre qu'à la famille $(\phi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in\underline{\mathcal{E}}_{disc,0}(\tilde{L},\omega)}$, on peut associer une famille $(\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H})_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R},\omega),H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})}$, où $\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}$ est une fonction C^∞ à croissance polynomiale sur H, de sorte que

$$J(f)=\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}\sum_{\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R},\omega)}\sum_{H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})}\int_H\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\lambda)I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda,f_{\tilde{R},\omega})\,d\lambda.$$

En vertu des propriétés de symétries de la famille $(f_{\tilde{R},\omega})_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}$, on peut symétriser la famille $(\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H})_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R},\omega),H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})}$ et supposer

(3) pour $\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R},\omega)$, $H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})$, $\lambda\in H$ et $w\in W(\tilde{M}_0)$, on a l'égalité $\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\lambda)=z_w\phi_{w(\tilde{R}),\tilde{\sigma}_w,w(H)}(w\lambda)$, où on a écrit $w(\tilde{\sigma})=z_w\tilde{\sigma}_w$ comme ci-dessus.

En imposant cette condition, la famille $(\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H})_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R},\omega),H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})}$ est entièrement déterminée par la forme linéaire $f\mapsto J(f)$.

Soit $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et soit $\tilde{T}$ un sous-tore tordu maximal elliptique de $\tilde{M}$. Fixons un sous-ensemble ouvert $\tilde{U}\subset\tilde{T}(\mathbb{R})$, invariant par multiplication par $(1-\theta)(T(\mathbb{R}))$ et dont l'image dans $\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta))(T(\mathbb{R}))$ est d'adhérence compacte. Posons $\tilde{U}_{reg}=\tilde{U}\cap\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$. Notons $C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}$ l'espace des fonctions φ sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$ qui vérifient les conditions suivantes :

- φ est C^∞ ;

- on a

$$\varphi(t^{-1}\gamma t)=\omega(t)\varphi(\gamma)$$

pour tous $\gamma\in\tilde{T}(\mathbb{R})$ et $t\in T(\mathbb{R})$;

- le support de φ est contenu dans $\tilde{U}_{reg}$ et est d'image compacte dans $\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta)(T(\mathbb{R}))$.

Soulignons que la condition de transformation n'est pas la même qu'en 1.1 : on a inversé ω. Rappelons que l'on suppose ω unitaire (cf. introduction) donc $\omega^{-1}=\bar{\omega}$. L'algèbre d'opérateurs différentiels $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega^{-1}-inv}$ de 1.1 (avec ω inversé) agit sur $C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}$. Pour $\varphi\in C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}$, posons

$$\delta(\varphi)=inf_{\gamma\in Supp(\varphi)}D^{\tilde{G}}(\gamma).$$

Proposition. *Pour tout $\varphi\in C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}$, il existe une unique famille*

$$(\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi))_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R},\omega),H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})}$$

vérifiant les conditions suivantes.

(i) Soient $\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R},\omega)$ et $H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})$. Le terme $\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi)$ est une fonction C^∞ sur H. On note $\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi,\lambda)$ sa valeur en un point $\lambda\in H$.

(ii) Soient $\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R},\omega)$ et $H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})$. Pour $N\in\mathbb{N}$ et pour un opérateur différentiel à coefficients constants Δ sur H, il existe des opérateurs $D_i\in$

$Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega^{-1}-inv}$ pour $i=1,...,n$ indépendants de φ et un entier $d\in\mathbb{N}$ indépendant de φ de sorte que

$$|\Delta\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi,\lambda)|\leq(1+|\lambda|)^{-N}\delta(\varphi)^{-d}\sum_{i=1,...,n}sup_{\gamma\in\tilde{U}}|D_i\varphi(\gamma)|$$

pour tout $\lambda\in H$.

(iii) La famille vérifie la condition de symétrie (3).

(iv) Pour tout $f\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$, on a l'égalité

$$\int_{\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta)(T(\mathbb{R}))}\varphi(\gamma)I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)\,d\gamma=\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}\sum_{\tilde{\sigma}\in\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{R},\omega)}\sum_{H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})}\int_H\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi,\lambda)I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda,f_{\tilde{R},\omega})\,d\lambda.$$

Preuve. On peut évidemment supposer que ω est trivial sur $T^\theta(\mathbb{R})$, sinon $C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}=\{0\}$. On peut effectuer une partition de l'unité et supposer que $\tilde{U}$ est de la forme suivante. Fixons $\eta\in\tilde{T}(\mathbb{R})$. Notons $Norm_G(\tilde{T})$ le normalisateur de $\tilde{T}$ dans G. Il contient T. Posons $N=Norm_G(\tilde{T};\mathbb{R})\cap Z_G(\eta;\mathbb{R})$ et $\Xi=N/T^\theta(\mathbb{R})$. Ce groupe est fini et agit naturellement sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$. Fixons un voisinage $\mathfrak{u}$ de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$, que l'on suppose assez petit et invariant par Ξ. On suppose que $\tilde{U}=\{x^{-1}exp(X)\eta x;X\in\mathfrak{u},x\in Norm_G(\tilde{T};\mathbb{R})\}$. Notons $I(\tilde{U}_{reg},\omega^{-1})$ le sous-espace des éléments $\varphi\in C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}$ qui vérifient la condition

$$\varphi(x^{-1}exp(X)\eta x)=\omega(x)\varphi(exp(X)\eta)$$

pour tout $X\in\mathfrak{u}$ et $x\in Norm_G(\tilde{T};\mathbb{R})$. Posons $W_T=Norm_G(\tilde{T};\mathbb{R})/T(\mathbb{R})$. On a une application de symétrisation

$$\begin{array}{ccc}C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}&\to&I(\tilde{U}_{reg},\omega^{-1})\\ \varphi&\mapsto&\varphi^{sym}\end{array}$$

définie par la formule

$$\varphi^{sym}(\gamma)=|W_T|^{-1}\sum_{x\in Norm_G(\tilde{T};\mathbb{R})/T(\mathbb{R})}\omega(x)^{-1}\varphi(x^{-1}\gamma x).$$

Remarquons que l'action de $Norm_G(\tilde{T};\mathbb{R})$ conserve $A_{\tilde{T}}$, lequel est égal à $A_{\tilde{M}}$ puisque $\tilde{T}$ est un sous-tore elliptique de $\tilde{M}$. Donc cette action conserve $\tilde{M}$. Il en résulte que la fonction $\gamma\mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ intervenant dans (iv) vérifie elle-même une condition de symétrie relativement à cette action. Cela implique que le membre de gauche de (iv) ne change pas quand on remplace φ par φ^{sym}. On peut donc se limiter à démontrer la proposition pour des $\varphi\in I(\tilde{U}_{reg},\omega^{-1})$. On définit l'espace $I(\tilde{U}_{reg},\omega)$ comme on a défini $I(\tilde{U}_{reg},\omega^{-1})$. Parce que ω est unitaire, l'application $\varphi\mapsto\bar{\varphi}$ est un automorphisme antilinéaire de $I(\tilde{U}_{reg},\omega^{-1})$ sur $I(\tilde{U}_{reg},\omega)$. Notons $I(\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R}),\omega)$ l'image dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ de l'espace des éléments de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ à support fortement régulier. L'espace $I(\tilde{U}_{reg},\omega)$ s'identifie à un sous-espace de $I(\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R}),\omega)$ de la façon suivante. Une fonction $\varphi\in I(\tilde{U}_{reg},\omega)$ s'identifie à la fonction $f\in I(\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R}),\omega)$ telle que $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=0$ pour tout $\gamma\in\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui n'est pas conjugué à un élément de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ et que $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=\varphi(\gamma)$ pour tout $\gamma\in\tilde{T}(\mathbb{R})$.

On utilise [16] proposition 2, dont on reprend les notations. Pour $\varphi \in I(\tilde{U}_{reg},\omega)$, on a l'égalité

$$\int_{\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta)(T(\mathbb{R}))} \overline{\varphi(\gamma)} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)\,d\gamma = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} \sum_{\tilde{\pi}\in\underline{\mathcal{E}}_{disc,0}(\tilde{L},\omega)} c_{\tilde{L},\tilde{\pi}} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}} \overline{I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda,\varphi)} I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f_{\tilde{L},\omega})\,d\lambda.$$

Pour $\varphi \in I(\tilde{U}_{reg},\omega^{-1})$, on en déduit

$$\int_{\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta)(T(\mathbb{R}))} \varphi(\gamma) I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)\,d\gamma = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} \sum_{\tilde{\pi}\in\underline{\mathcal{E}}_{disc,0}(\tilde{L},\omega)} c_{\tilde{L},\tilde{\pi}} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}} \overline{I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda,\bar{\varphi})} I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f_{\tilde{L},\omega})\,d\lambda.$$

Les explications données avant l'énoncé permettent de convertir cette formule en celle du (iv) de l'énoncé. On peut imposer (iii) et la famille obtenue est alors unique. Les conditions (i) et (ii) se déduisent d'assertions analogues concernant les fonctions $\lambda \mapsto I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda,\varphi)$ intervenant ci-dessus, pour $\varphi \in I(\tilde{U}_{reg},\omega)$. Il reste à prouver ces assertions. On fixe $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\pi} \in \underline{\mathcal{E}}_{disc,0}(\tilde{L},\omega)$. Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, supposons f à support fortement régulier. On définit par récurrence un terme

$$(4) \qquad I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f) = J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f) - \sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{L}),\tilde{R}\neq\tilde{G}} I'^{\tilde{R}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, \phi'^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(f)).$$

On rappellera plus loin la définition de $\phi'^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(f)$. Moeglin montre que l'application linéaire $f \mapsto I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ se quotiente en une application définie sur $I(\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R}),\omega)$. Le terme $I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda,\varphi)$ intervenant ci-dessus est la valeur de cette application en $\varphi \in I(\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R}),\omega)$. Que ce terme soit C^∞ en λ est immédiat par récurrence sur la formule (4) car le terme $J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ est C^∞ en λ. Nous voulons montrer que $I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda,\varphi)$ vérifie une majoration comme dans le (ii) de l'énoncé.

L'ensemble $\tilde{U}^G$ des éléments de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui sont conjugués à un élément de $\tilde{U}$ est égal à $\{x^{-1}exp(X)\eta x; X \in \mathfrak{u}, x \in G(\mathbb{R})\}$. Notons $\mathfrak{u}_{reg}$ le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{u}$ dont le stabilisateur dans Ξ est réduit à $\{1\}$. Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{u}_{reg} \times T^\theta(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R}) & \to & \tilde{G}(\mathbb{R}) \\ (X,x) & \mapsto & x^{-1}exp(X)\eta x. \end{array}$$

Le groupe N agit sur l'espace de départ par $(y,X,x) \mapsto (ad_y(X), yx)$ pour $y \in N$. Cette action se quotiente en une action du groupe fini Ξ. L'application ci-dessus a pour image $\tilde{U}^{\tilde{G}} \cap \tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$ et, pourvu que $\mathfrak{u}$ soit assez petit, est un revêtement fini de groupe Ξ au-dessus de cette image. Fixons une fonction $\beta \in C_c^\infty(T^\theta(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R}))$ dont l'intégrale vaut 1 et qui est invariante par l'action de Ξ par translation à gauche. Pour $\varphi \in I(\tilde{U}_{reg},\omega)$, notons f'_φ la fonction sur $\mathfrak{u}_{reg} \times T^\theta(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})$ définie par

$$f'_\varphi(X,x) = \omega(x)^{-1}\beta(x)D^{\tilde{G}}(exp(X)\eta)^{-1/2}\varphi(exp(X)\eta).$$

Elle est invariante par l'action de Ξ. Elle se descend donc en une fonction f_φ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$, à support dans $\tilde{U}^{\tilde{G}} \cap \tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$. On peut fixer un sous-ensemble ouvert $\tilde{V}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$, d'adhérence compacte, qui contient $x^{-1}exp(X)\eta x$ pour tout $X \in \mathfrak{u}$ et tout x dans le support de β. La fonction f_φ est à support dans $\tilde{V}$. L'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(G)$ agit à droite et à gauche sur $C_c^\infty(\tilde{V})$. On note ces actions $(X, f, Y) \mapsto XfY$. On munit $C_c^\infty(\tilde{V})$ des semi-normes $f \mapsto sup_{\gamma \in \tilde{V}} |(XfY)(\gamma)|$ pour $X, Y \in \mathfrak{U}(G)$. Montrons que

(5) pour toute semi-norme $\mathcal{N}$ sur $C_c^\infty(\tilde{V})$, il existe un entier d et un ensemble fini d'éléments $D_i \in Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ pour $i = 1, ..., n$ de sorte que, pour tout $\varphi \in I(\tilde{U}_{reg}, \omega)$, on ait

$$\mathcal{N}(f_\varphi) \leq \delta(\varphi)^{-d} \sum_{i=1,...,n} sup_{X \in \mathfrak{u}} |D_i \varphi(exp(X)\eta)|.$$

Fixons une base $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $\mathfrak{U}(G)$ et une base $(H_l)_{l \in \mathbb{N}}$ de $Sym(\mathfrak{t}^\theta)$. L'algèbre $Sym(\mathfrak{t}^\theta) \otimes \mathfrak{U}(G)$ agit naturellement sur l'espace des fonctions sur $\mathfrak{u}_{reg} \times T^\theta(\mathbb{R}) \backslash G(\mathbb{R})$. Fixons $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$. En utilisant l'application d'Harish-Chandra de 1.5, on montre que l'on a une égalité

$$(U_{j_1} f_\varphi U_{j_2})(x^{-1} exp(X)\eta x) = \sum_{j,l \in \mathbb{N}} c_{j,l}(x, exp(X)\eta)(H_l U_j f'_\varphi)(X, x)$$

où les fonctions $c_{j,l}(x, exp(X)\eta)$ sont presque toutes nulles, sont C^∞ en x et rationnelles en $exp(X)\eta$. Le (i) du lemme 1.5 montre que, multipliées par une puissance convenable de $D_\star^{\tilde{G}}(exp(X)\eta)$, ces fonctions deviennent polynomiales en $exp(X)\eta$. Pour prouver (5), il suffit alors d'appliquer la définition de f'_φ et le fait que cette fonction est à support compact en x, ce support ne dépendant pas de φ. Cela prouve (5).

L'image de f_φ dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ est égale à φ. Cela implique $I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, \varphi) = I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f_\varphi)$. L'égalité (4) devient

$$(6) \qquad I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, \varphi) = J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f_\varphi) - \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{L}), \tilde{R} \neq \tilde{G}} I'^{\tilde{R}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, \phi'^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(f_\varphi)).$$

Rappelons l'estimation du premier terme du membre de droite, que l'on reprend d'Arthur. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout opérateur différentiel Δ sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$ à coefficients constants, il existe un ensemble fini de semi-normes $\mathcal{N}_j$ pour $j = 1, ..., m$ sur $C_c^\infty(\tilde{V})$ de sorte que

$$|\Delta J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)| \leq (1 + |\lambda|)^{-N} \sum_{j=1,...,m} \mathcal{N}_j(f)$$

pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$ et tout $f \in C_c^\infty(\tilde{V})$.

Remarque. On a rappelé en [20] 5.2 la preuve de cette majoration pour $\Delta = 1$. Le même argument vaut pour tout Δ.

On applique cela à f_φ et on utilise (5). On obtient que le terme $J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f_\varphi)$ vérifie une majoration comme dans le (ii) de l'énoncé (l'algèbre $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega^{-1}-inv}$ étant remplacée par $Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$ conformément à l'isomorphisme antilinéaire que l'on a utilisé plus haut).

Soit $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{L})$, $\tilde{R} \neq \tilde{G}$. Considérons $\phi'^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(f_\varphi)$ comme un élément de $I(\tilde{R}(\mathbb{R}), \omega)$. C'est un élément de $I^{\tilde{R}}(\tilde{U}_{reg}, \omega)$, l'analogue de $I(\tilde{U}_{reg}, \omega)$ pour l'espace ambiant $\tilde{R}$. En raisonnant par récurrence, on peut supposer que l'application

$$\varphi' \mapsto I'^{\tilde{R}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, \varphi')$$

définie sur $I^{\tilde{R}}(\tilde{U}_{reg}, \omega)$ vérifie les majorations souhaitées. Il intervient dans ces majorations un terme $\delta^{\tilde{R}}(\varphi')$ analogue de $\delta(\varphi')$ quand on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{R}$. Mais, d'après sa définition, on a $\delta^{\tilde{R}}(\varphi') \geq c\delta(\varphi')$ pour tout φ', avec une constante $c > 0$ indépendante de φ'. Pour $X \in \mathfrak{u}$ et $n \in Norm_G(\tilde{T};\mathbb{R})$, on a par définition

$$\phi'^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(f_\varphi)(n^{-1}exp(X)\eta n) = J^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(n^{-1}exp(X)\eta n, \omega, f_\varphi)$$

$$= \varphi(exp(X)\eta)\omega(n)^{-1}\int_{T^\theta(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})} \beta(nx)v^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(x)\,dx.$$

Il en résulte que, pour tout $D \in Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, il existe $c > 0$ tel que

$$sup_{\gamma\in\tilde{U}}|D\phi'^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(f_\varphi;\gamma)| \leq c\, sup_{\gamma\in\tilde{U}}|D\varphi(\gamma)|$$

pour tout $\varphi \in I(\tilde{U}_{reg},\omega)$. On en déduit que le terme $I'^{\tilde{R}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, \phi'^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(f_\varphi))$ vérifie une majoration comme dans le (ii) de l'énoncé. Alors l'égalité (6) entraîne une telle majoration pour $I'^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda,\varphi)$. Cela achève la démonstration. $\square$

8.5 Stabilisation de la formule précédente

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On considère un espace de Levi $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, un sous-tore tordu $\tilde{T}$ de $\tilde{M}$ maximal et elliptique et un ensemble $\tilde{U} \subset \tilde{T}(\mathbb{R})$. On suppose $\tilde{U}$ ouvert et d'adhérence compacte. Pour tout espace de Levi $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on fixe une base $B(\tilde{L})$ de $D_{ell,0}(\tilde{L})$, possédant les propriétés de [IV] 2.2. En particulier, elle est réunion de bases $B(\tilde{L},\mu)$ des sous-espaces $D_{ell,0,\mu}(\tilde{L})$, pour tout paramètre infinitésimal μ. On suppose de plus que, pour tout μ, $B(\tilde{L},\mu)$ est réunion de bases $B^{st}(\tilde{L},\mu)$ de $D^{st}_{ell,0,\mu}(\tilde{L})$ et $B^{inst}(\tilde{L},\mu)$ de $D^{inst}_{ell,0,\mu}(\tilde{L})$. La base $B(\tilde{L})$ elle-même est donc réunion de $B^{st}(\tilde{L})$ et $B^{inst}(\tilde{L})$.

Proposition. *Pour tout espace de Levi $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et tout $\tilde{\sigma} \in B^{st}(\tilde{R})$, il existe un ensemble fini $S\mathcal{H}^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$ de sous-espaces affines de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$ de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées pour tous $\tilde{M}$, $\tilde{T}$, $\tilde{U}$ comme ci-dessus. Pour tout $\varphi \in C^\infty_c(\tilde{U}_{reg})$, il existe une famille*

$$(S\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi))_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\sigma}\in B^{st}(\tilde{R}),H\in S\mathcal{H}^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})}$$

vérifiant les conditions (i) et (ii) de la proposition précédente ainsi que

(iii) pour tout $f \in SI(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$, on a l'égalité

$$\int_{\tilde{T}(\mathbb{R})} \varphi(\delta)S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\delta,f)\,d\delta = \sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}\sum_{\tilde{\sigma}\in B^{st}(\tilde{R})}\sum_{H\in S\mathcal{H}^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})}\int_H S\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi,\lambda)S^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{\tilde{R}})\,d\lambda.$$

Preuve. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{X}$ de l'ensemble de doubles classes

$$T\backslash\{x \in M; \forall\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}, x\sigma(x)^{-1} \in T\}/M(\mathbb{R}).$$

Pour $\psi \in C^\infty_c(\tilde{M}(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$S^{\tilde{M}}(\delta,\psi) = \sum_{x\in\mathcal{X}} I^{\tilde{M}}(x^{-1}\delta x,\psi)$$

pour tout $\delta \in \tilde{T}_{\tilde{G}-reg}(\mathbb{R})$. Soit $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$. Le membre de gauche de l'égalité (iii) est la somme de

$$(1) \qquad \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})} \varphi(\delta) \sum_{x\in\mathcal{X}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(x^{-1}\delta x, f)\, d\delta$$

et de la somme sur $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, $s \neq 1$, de

$$(2) \qquad -\, i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})} \varphi(\delta) S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\delta, f^{\mathbf{G}'(s)})\, d\delta.$$

Un changement de variables transforme (1) en

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})} \varphi(x\delta x^{-1}) I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, f)\, d\delta.$$

Grâce à la proposition précédente, ce terme s'écrit sous la forme

$$(3) \qquad \sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} \sum_{\tilde{\sigma}'\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R})} \sum_{H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}')} \sum_{x\in\mathcal{X}} \int_H \phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma}',H}(ad_{x^{-1}}(\varphi), \lambda) I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}'_\lambda, f_{\tilde{R}})\, d\lambda.$$

Fixons $\tilde{R}$ et introduisons la matrice de changement de base reliant les deux bases $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R})$ et $B(\tilde{R})$. C'est-à-dire que, pour $\tilde{\sigma}' \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R})$, on écrit $\tilde{\sigma}' = \sum_{\tilde{\sigma}\in B(\tilde{R})} c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma}$. Pour $\tilde{\sigma}'$ fixé, il n'y a qu'un nombre fini de $\tilde{\sigma}$ tels que $c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}} \neq 0$. Les propriétés des bases entraînent que, dans l'autre sens, pour $\tilde{\sigma}$ fixé, il n'y a qu'un nombre fini de $\tilde{\sigma}'$ tels que $c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}} \neq 0$. Pour $\tilde{\sigma} \in B(\tilde{R})$, posons $\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G},0}(\tilde{\sigma}) = \cup_{\tilde{\sigma}'\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R}), c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}}\neq 0} \mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}')$. Pour $H \in \mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G},0}(\tilde{\sigma})$, posons

$$\phi^0_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{\tilde{\sigma}'\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R}), H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}')} c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}} \phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma}',H}(ad_{x^{-1}}(\varphi)).$$

On transforme facilement l'expression (3) en

$$(4) \qquad \sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} \sum_{\tilde{\sigma}\in B(\tilde{R})} \sum_{H\in\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G},0}(\tilde{\sigma})} \int_H \phi^0_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi, \lambda) I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{\tilde{R}})\, d\lambda.$$

Fixons $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ tel que $s \neq 1$ et $i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \neq 0$. Par récurrence, le terme (2) s'écrit comme une multiple somme. L'un des indices est un espace de Levi $\tilde{R}'_s \in \mathcal{L}^{\tilde{G}'(s)}(\tilde{M})$. Comme on le sait, un tel espace est associé à une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{R}'(s)$ d'un espace de Levi $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. L'espace $\tilde{R}'_s$ étant fixé, la somme intérieure est

$$-i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \sum_{\tilde{\sigma}'\in B^{st}(\mathbf{R}'(s))} \sum_{H'\in S\mathcal{H}_{\mathbf{R}'(s)}^{\mathbf{G}'(s)}(\tilde{\sigma}')}$$

$$\int_{H'\in S\mathcal{H}_{\mathbf{R}'(s)}^{\mathbf{G}'(s)}(\tilde{\sigma}')} S\phi_{\mathbf{R}'(s),\tilde{\sigma}',H'}(\varphi, \lambda) S^{\mathbf{R}'(s)}(\tilde{\sigma}'_\lambda, (f^{\mathbf{G}'(s)})_{\mathbf{R}'(s)})\, d\lambda.$$

Comme toujours, $f_{\mathbf{R}'(s)}^{\mathbf{G}'(s)} = (f_{\tilde{R}})^{\mathbf{R}'(s)}$, d'où

$$S^{\mathbf{R}'(s)}(\tilde{\sigma}'_\lambda, (f^{\mathbf{G}'(s)})_{\mathbf{R}'(s)}) = I^{\tilde{R}}(transfert(\tilde{\sigma}'_\lambda), f_{\tilde{R}}).$$

On peut identifier H' à un sous-espace affine de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$. On peut aussi écrire

$$transfert(\tilde{\sigma}'_\lambda) = \sum_{\tilde{\sigma}\in B(\tilde{R})} c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma}_\lambda,$$

avec des coefficients $c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}}$ nuls pour presque tout $\tilde{\sigma}$. L'intégrale intervenant ci-dessus est alors

$$\sum_{\tilde{\sigma}\in B(\tilde{R})} c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}} \int_{H'} S\phi_{\mathbf{R}'(s),\tilde{\sigma}',H'}(\varphi,\lambda) I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{\tilde{R}})\, d\lambda.$$

Les propriétés de finitude du transfert assurent que, pour tout $\tilde{\sigma}$, il n'existe qu'un nombre fini de $\tilde{\sigma}'$ tels que $c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}} \neq 0$. Pour $\tilde{\sigma}\in B(\tilde{R})$, posons $\mathcal{H}^{\tilde{G},s}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}) = \cup_{\tilde{\sigma}'\in B^{st}(\mathbf{R}'(s)),c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}}\neq 0} S\mathcal{H}^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{R}'(s)}(\tilde{\sigma}')$. Pour $H\in \mathcal{H}^{\tilde{G},s}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$, posons

$$\phi^s_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi) = \sum_{\tilde{\sigma}'\in B^{st}(\mathbf{R}'(s)), H\in S\mathcal{H}^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{R}'(s)}(\tilde{\sigma}')} c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}} S\phi_{\mathbf{R}'(s),\tilde{\sigma}',H}(\varphi).$$

Ces définitions valent pour $\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$ tel que $\mathbf{R}'(s)$ soit elliptique. Pour $\tilde{R}$ tel que $\mathbf{R}'(s)$ n'est pas elliptique, on pose $\mathcal{H}^{\tilde{G},s}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}) = \emptyset$ pour tout $\tilde{\sigma}\in B(\tilde{R})$. Alors l'expression (2) s'écrit

$$(5)\qquad -i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))| \sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} \sum_{\tilde{\sigma}\in B(\tilde{R})} \sum_{H\in\mathcal{H}^{\tilde{G},s}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})} \int_H \phi^s_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi,\lambda) I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{\tilde{R}})\, d\lambda.$$

On peut accroître les ensembles $\mathcal{H}^{\tilde{G},0}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$ et $\mathcal{H}^{\tilde{G},s}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$ intervenant dans (4) et (5), quitte à introduire des fonctions nulles $\phi^0_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi)$ ou $\phi^s_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi)$. Dans un premier temps, on peut donc remplacer chacun de ces ensembles par leur réunion. On obtient ainsi un ensemble qui, a priori, dépend de $\tilde{M}$. On peut de nouveau accroître nos ensembles en les remplaçant par la réunion sur les $\tilde{M}\in\mathcal{L}^{\tilde{R}}(\tilde{M}_0)$ des ensembles relatifs à $\tilde{M}$. On obtient un ensemble $S\mathcal{H}^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$ qui ne dépend plus de $\tilde{M}$. Pour $H\in S\mathcal{H}^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$, posons

$$S\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi) = \phi^0_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))\phi^s_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi).$$

On obtient que le membre de gauche de l'égalité (iii) de l'énoncé est égal à

$$(6)\qquad \sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} \sum_{\tilde{\sigma}\in B(\tilde{R})} \sum_{H\in S\mathcal{H}^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})} \int_H S\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi,\lambda) I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{\tilde{R}})\, d\lambda.$$

D'après leur construction, les fonctions $\phi_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi)$ vérifient les propriétés (i) et (ii) de la proposition 8.3. On doit remarquer que, dans les majorations de $\phi^s_{\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi)$, il intervient un terme $\delta^{\tilde{G}'(s)}(\varphi)$ analogue à $\delta(\varphi)$ quand on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{G}'(s)$. Mais ce terme est minoré par le produit de $\delta(\varphi)$ et d'une constante indépendante de φ.

On décompose l'expression (6) en une somme de deux expressions $J^{st}(\varphi,f)$ et $J^{inst}(\varphi,f)$. Dans la première, resp. la seconde, on regroupe les contributions des $\tilde{\sigma}\in B^{st}(\tilde{R})$, resp. $\tilde{\sigma}\in B^{inst}(\tilde{R})$. Pour $\tilde{\sigma}\in B^{st}(\tilde{R})$, on a par définition $I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{\tilde{R}}) = S^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{\tilde{R}})$. Donc $J^{st}(\varphi,f)$ est de la forme du membre de droite du (iii) de l'énoncé. Pour démontrer la proposition, il reste à prouver que $J^{inst}(\varphi, f) = 0$. On a décomposé l'espace de Paley-Wiener en $PW^{st,\infty}(\tilde{G}) \oplus PW^{inst,\infty}(\tilde{G})$, cf. [IV] 2.4. Il résulte des définitions que $J^{st}(\varphi, f)$ ne dépend que de la projection de $pw(f)$ sur $PW^{st,\infty}(\tilde{G})$, tandis que $J^{inst}(\varphi, f)$ ne dépend que de la projection de $pw(f)$ sur $PW^{inst,\infty}(\tilde{G})$. Mais on sait que les intégrales orbitales pondérées $f \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, f)$ sont stables ([V] théorème 1.4). Donc le membre de gauche de (iii) est stable. Soit f' l'élément de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ tel que $pw(f')$ soit égal à la projection de $pw(f)$ sur $PW^{st,\infty}(\tilde{G})$. La fonction f' est encore K-finie. Le membre de gauche pour f est alors égal au même membre pour f'. Puisque ces termes sont calculés par la formule (6), on obtient

$$J^{st}(\varphi, f) + J^{inst}(\varphi, f) = J^{st}(\varphi, f') + J^{inst}(\varphi, f').$$

Par construction de f', on a $J^{st}(\varphi, f) = J^{st}(\varphi, f')$ tandis que $J^{inst}(\varphi, f') = 0$. Cela entraîne $J^{inst}(\varphi, f) = 0$. Comme on l'a dit, cela prouve la proposition. $\square$

8.6 Version endoscopique de la proposition 8.4

On considère ici un triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ et un K-espace $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. On fixe une composante connexe $\tilde{M}$ de $K\tilde{M}$, contenue dans une composante $\tilde{G}$ de $K\tilde{G}$, un sous-tore tordu maximal elliptique $\tilde{T}$ de $\tilde{M}$ et un ensemble $\tilde{U} \subset \tilde{T}(\mathbb{R})$ vérifiant les mêmes propriétés qu'en 8.4.

Proposition. *Pour tout $K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ et tout $\tilde{\sigma} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R}, \omega)$, il existe un ensemble fini $\mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})$ de sous-espaces affines de $i\mathcal{A}_{\tilde{R}}^*$ vérifiant les conditions suivantes.*

(1) Pour $w \in W(K\tilde{M}_0)$, $w(\mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})) = \mathcal{H}_{w(K\tilde{R})}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma}_w)$, où on a posé $w(\tilde{\sigma}) = z_w\tilde{\sigma}_w$ comme en 8.4.

(2) Pour tous $\tilde{M}$, $\tilde{T}$, U comme ci-dessus et pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}$, il existe une unique famille

$$(\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}^{\mathcal{E}}(\varphi))_{K\tilde{R}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0),\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega),H\in\mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})}$$

vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition 8.4 ainsi que

(iv) pour tout $f \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K)$, on a l'égalité

$$\int_{\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta)(T(\mathbb{R}))} \varphi(\gamma) I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, \omega, f)\, d\gamma = \sum_{K\tilde{R}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)} \sum_{\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega)} \sum_{H\in\mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})}$$

$$\int_H \phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}^{\mathcal{E}}(\varphi, \lambda) I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{K\tilde{R},\omega})\, d\lambda.$$

Preuve. On affirme l'existence de familles d'espaces affines indépendantes de $\tilde{M}$ et $\tilde{T}$. Mais, si on démontre pour chaque couple $(\tilde{M}, \tilde{T})$ l'existence d'une telle famille vérifiant les conditions requises pour ce couple, il suffit de prendre la réunion de ces familles sur l'ensemble des couples $(\tilde{M}, \tilde{T})$ pris à conjugaison près pour résoudre le problème. De même, on peut négliger les conditions d'invariance par $W(\tilde{M}_0)$: si on résout le problème sans ces conditions, on peut ensuite accroître les familles d'espaces affines de sorte à les rendre symétriques et symétriser les familles

$$(\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}^{\mathcal{E}}(\varphi))_{K\tilde{R}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0),\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega),H\in\mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})}.$$

Fixons donc $\tilde{M}$, $\tilde{T}$ et $\tilde{U}$. On peut supposer comme dans la preuve de 8.3 que $\tilde{U} = \{x^{-1}exp(X)\eta x; X \in \mathfrak{u}, x \in Norm_G(\tilde{T};\mathbb{R})\}$, où η est un élément fixé de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{u}$ est un voisinage de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$, assez petit. Soit $f \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}$. Le membre de gauche de (iv) est égal à

$$\int_{\mathfrak{u}} \varphi(exp(X)\eta) I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f)\,dX.$$

Ici comme dans la suite, les mesures doivent être convenablement normalisées pour que la formule soit exacte, mais ces normalisations importent peu puisqu'on ne se propose pas de calculer explicitement les fonctions $\phi^{\mathcal{E}}_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi)$. On reprend les constructions et notations de 4.4. La formule (1) de ce paragraphe entraîne l'égalité

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(exp(X)\eta,\omega,f) = c\sum_{j\in J}\Delta_{j,1}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{j,1},exp(X)\eta)^{-1}$$

$$S^{\tilde{G}'_{j,1}}_{\tilde{M}'_{j,1},\lambda_{j,1}}(exp(\xi_j(X))\epsilon_{j,1},f^{\tilde{G}'_{j,1}}),$$

où c est une constante non nulle. Pour chaque $j \in J$, posons $\mathfrak{u}_j = \xi_j(\mathfrak{u})$. Le membre de gauche de (iv) est donc

$$\sum_{j\in J}\int_{\mathfrak{u}_j}\varphi_j(exp(Y)\epsilon_{j,1})S^{\tilde{G}'_{j,1}}_{\tilde{M}'_{j,1},\lambda_{j,1}}(exp(Y))\epsilon_{j,1},f^{\tilde{G}'_{j,1}})\,dY,$$

où

$$\varphi_j(exp(Y)\epsilon_{j,1}) = c\Delta_{j,1}(exp(Y)\epsilon_{j,1},exp(\xi_j^{-1}(Y))\eta)^{-1}\varphi(exp(\xi_j^{-1}(Y))\eta).$$

Pour chaque j, on peut appliquer la proposition 8.5. Certes, il faut l'adapter à la situation des données auxiliaires où l'on considère des fonctions se transformant selon le caractère $\lambda_{j,1}$ de $C_1(\mathbb{R})$. On laisse ces détails techniques. Remarquons que la fonction φ_j est C^∞ car le facteur de transfert l'est sur l'ensemble des éléments fortement réguliers. Le résultat est que le terme indexé par j dans la somme ci-dessus s'exprime sous la forme

$$\sum_{\tilde{R}'_j\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'_j}(\tilde{M}'_j)}\sum_{\tilde{\sigma}'\in B^{st}(\mathbf{R}'_j)}\sum_{H\in S\mathcal{H}^{\tilde{G}'_j}_{\tilde{R}'_j}(\tilde{\sigma}')}\int_H S\phi_{\mathbf{R}',\tilde{\sigma}',H}(\varphi_j,\lambda)S^{\mathbf{R}'_j}(\tilde{\sigma}'_\lambda,(f^{\mathbf{G}'_j})_{\mathbf{R}'_j})\,d\lambda.$$

On a utilisé la notation $\mathbf{R}'_j$: comme toujours, l'espace $\tilde{R}'_j$ apparaît comme l'espace d'une donnée endoscopique $\mathbf{R}'_j$ d'un K-espace de Levi $K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. La démonstration se poursuit alors comme celle de 8.5. Fixons $\tilde{R}'_j$ intervenant ci-dessus. On identifie $\mathcal{A}^*_{\tilde{R}'_j}$ à $\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$. Pour chaque $\tilde{\sigma}'$ intervenant, l'ensemble $S\mathcal{H}^{\tilde{G}'_j}_{\tilde{R}'_j}(\tilde{\sigma}')$ s'identifie à un ensemble de sous-espaces affines de $i\mathcal{A}_{\tilde{R}}$. On écrit

$$transfert(\tilde{\sigma}'_\lambda) = \sum_{\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}(K\tilde{R},\omega)} c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma}_\lambda.$$

Alors

$$\int_H S\phi_{\mathbf{R}',\tilde{\sigma}',H}(\varphi_j,\lambda)S^{\mathbf{R}'_j}(\tilde{\sigma}'_\lambda,(f^{\mathbf{G}'_j})_{\mathbf{R}'_j})\,d\lambda = \sum_{\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}(K\tilde{R},\omega)} c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}}$$

$$\int_H S\phi_{\mathbf{R}',\tilde{\sigma}',H}(\varphi_j,\lambda)I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda,f_{K\tilde{R},\omega})\,d\lambda.$$

Pour chaque $\tilde{\sigma}$, il n'y a qu'un nombre fini de $\tilde{\sigma}'$ pour lesquels $c_{\tilde{\sigma}',\tilde{\sigma}}\neq 0$. En sommant les expressions obtenues, on obtient finalement une expression du membre de gauche de (iv) de la forme voulue. Les familles de sous-espaces affines dépendent des données $\mathbf{M}'_j$ choisies, mais on peut supposer que celles-ci appartiennent à un ensemble fini de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques pour $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a})$. Donc ces sous-espaces affines restent dans un ensemble fini.

Parce que le facteur de transfert $\Delta_{j,1}(exp(Y)\epsilon_{j,1},exp(\xi_j^{-1}(Y))\eta)$ est C^∞ en Y, on voit facilement que les fonctions $S\phi_{\mathbf{R}',\tilde{\sigma}',H}(\varphi_j,\lambda)$ vérifient les majorations souhaitées. Cela achève la démonstration. $\square$

8.7 Expression de $\epsilon_{K\tilde{M}}(f)$

La proposition 8.4 s'adapte évidemment aux K-espaces. Puisque l'on peut toujours accroître nos familles de sous-espaces affines, on peut supposer que, pour tout $K\tilde{R}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$, toute composante connexe $\tilde{R}$ de $K\tilde{R}$, tout $\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{R},\omega)$, l'ensemble $\mathcal{H}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})$ de 8.4 est contenu dans l'ensemble $\mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})$ de 8.6. Pour $\tilde{M}$, $\tilde{T}$ et $\tilde{U}$ comme en 8.6, la conjonction des propositions 8.4 et 8.6 entraîne le résultat suivant. Pour tout $\varphi\in C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}$, il existe une unique famille

$$(\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi))_{K\tilde{R}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0),\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega),H\in\mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G}}(\tilde{\sigma})}$$

vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de 8.4 ainsi que :

(1) pour tout $f\in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$, on a l'égalité

$$\int_{\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta)(T(\mathbb{R}))}\varphi(\gamma)I^{K\tilde{M}}(\gamma,\omega,\epsilon_{K\tilde{M}}(f))\,d\gamma=\sum_{K\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}\sum_{\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega)}\sum_{H\in\mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})}$$

$$\int_H\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi,\lambda)I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda,f_{K\tilde{R},\omega})\,d\lambda.$$

On a muni l'espace $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ d'une norme euclidienne. On définit une fonction $\mathbf{d}_{reg}$: $\tilde{T}(\mathbb{R})\cap\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_{>0}$: pour $\gamma\in\tilde{T}(\mathbb{R})\cap\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$, $\mathbf{d}_{reg}(\gamma)$ est la borne inférieure de l'ensemble des normes $|Y|$ pour $Y\in\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ tel que $exp(Y)\gamma$ ne soit pas fortement régulier.

Proposition. *Pour tout $K\tilde{R}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$, tout $\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega)$, tout $H\in\mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})$, il existe une unique fonction $\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}$ sur $(\tilde{T}(\mathbb{R})\cap\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R}))\times H$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées. Dans les deux premières, on fixe $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$ et H.*

(i) La fonction $\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}$ est C^∞ sur $(\tilde{T}(\mathbb{R})\cap\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R}))\times H$;

(ii) Pour tout opérateur différentiel $D\in Diff^{cst}(\tilde{T}(\mathbb{R}))^{\omega-inv}$, tout opérateur différentiel Δ à coefficients constants sur H et tout sous-ensemble compact $\Gamma\subset\tilde{T}(\mathbb{R})$, il existe $d,N\in\mathbb{N}$ et une constante $c>0$ de sorte que

$$|D\Delta\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\gamma,\lambda)|\leq c\mathbf{d}(\gamma)^{-d}(1+|\lambda|)^N$$

pour tout $\gamma\in\Gamma\cap\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$ et tout $\lambda\in H$.

(iii) La famille vérifie la condition de symétrie (2) de 8.4.
(iv) Pour tout $f \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K)$ et tout $\gamma \in \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$, on a l'égalité

$$I^{K\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f)) = \sum_{K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)} \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{R},\omega)} \sum_{H \in \mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})}$$

$$\int_H \xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\gamma, \lambda) I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{K\tilde{R},\omega})\, d\lambda.$$

Preuve. La preuve d'Arthur [8] p. 198, 199, 200 s'applique. On va la reprendre car Arthur énonce une majoration plus faible que celle du (ii) de l'énoncé. Notons $\mathfrak{u}'$ une boule ouverte centrée en 0 de rayon c_0 assez petit et $\mathfrak{u}$ la boule de rayon $2c_0$. Fixons $\eta \in \tilde{T}(\mathbb{R})$ et posons $\tilde{U} = \{(1-\theta)(t)exp(X)\eta; t \in T(\mathbb{R}), X \in \mathfrak{u}\}$. Notons $\mathfrak{u}_{reg}$, resp. $\mathfrak{u}'_{reg}$, le sous-ensemble des $X \in \mathfrak{u}$, resp. $X \in \mathfrak{u}'$, tels que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{G}$. Avec les notations de 8.3, $\mathfrak{u}_{reg}$ est l'ensemble des $X \in \mathfrak{u}$ dont le fixateur dans Ξ est trivial, pourvu que c_0 soit assez petit. La propriété suivante est claire :

(2) il existe $c_1 > 0$ tel que, pour tout $X \in \mathfrak{u}'_{reg}$ et pour tout $Y \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})$, la condition $|X - Y| \leq c_1 \mathbf{d}_{reg}(exp(X)\eta)$ implique que $Y \in \mathfrak{u}_{reg}$ et que $\mathbf{d}_{reg}(exp(Y)\eta) \geq \mathbf{d}_{reg}(exp(X)\eta)/2$.

L'espace $C_c^\infty(\tilde{U}_{reg})^{\omega^{-1}-inv}$ s'identifie à $C_c^\infty(\mathfrak{u}_{reg})$. Les fonctions $\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi)$ de (1) sont donc définies pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_{reg})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, notons $C_c^m(\mathfrak{u}_{reg})$ l'espace des fonctions de classe C^m sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ dont le support est compact et inclus dans $\mathfrak{u}_{reg}$. Considérons une suite $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_c^m(\mathfrak{u}_{reg})$. On dit qu'elle tend vers 0 s'il existe un sous-ensemble compact de $\mathfrak{u}_{reg}$ tel que le support de φ_i soit inclus dans ce compact pour tout i et si, pour tout $H \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ de degré inférieur ou égal à m, la suite $(\partial_H \varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tend uniformément vers 0. Cela munit $C_c^m(\mathfrak{u}_{reg})$ d'une topologie. L'application $\varphi \mapsto \delta(\varphi)$ de 8.3 se définit aussi bien pour $\varphi \in C_c^m(\mathfrak{u}_{reg})$. Pour H intervenant dans (1), notons $C^m(H)$ l'espace des fonctions de classe C^m sur H. On munit cet espace de la topologie usuelle. Montrons que

(3) pour tout $m_0 \in \mathbb{N}$, il existe un entier $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$, H intervenant dans (1), l'application $\varphi \mapsto \phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi)$ s'étend par continuité en une application de $C^{m_1}(\mathfrak{u}_{reg})$ dans $C^{m_0}(H)$; pour tout opérateur différentiel à coefficients constants Δ sur H de degré $\leq m_0$, il existe une famille finie $(H_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de $Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ de degré $\leq m_1$ et un entier $d \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$|\Delta \phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi, \lambda)| \leq c\delta(\varphi)^{-d} \sum_{i=1,...,n} sup_{X\in\mathfrak{u}} |\partial_{H_i}\varphi(X)|$$

pour tout $\lambda \in H$ et tout $\varphi \in C^{m_1}(\mathfrak{u}_{reg})$; ces applications vérifient la propriété de symétrie 8.4(3) et l'égalité (1) ci-dessus ;

Pour tout H, on fixe une base $(\Delta_{H,j})_{j=1,...,j_H}$ de l'espace des opérateurs différentiels à coefficients constants sur H de degré $\leq m_0$. En appliquant les majorations déjà prouvées, on voit que l'on peut trouver une famille finie $(H_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de $Sym(\mathfrak{t}^\theta)$, un entier $d \in \mathbb{N}$ et une constante $c > 0$ de sorte que

$$(4) \qquad |\Delta_{H,j} \phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi, \lambda)| \leq c\delta(\varphi)^{-d} \sum_{i=1,...,n} sup_{X\in\mathfrak{u}} |\partial_{H_i}\varphi(X)|$$

pour tous $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$, H, tout $j = 1, ..., j_H$, tout $\lambda \in H$ et tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_{reg})$. Notons m_1 le plus grand des degrés des H_i. Quand une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{u}_{reg})$ tend vers une fonction $\varphi \in C_c^{m_1}(\mathfrak{u}_{reg})$, les termes $\delta(\varphi_k)$ sont minorés puisque les supports des φ_k restent dans un compact de $\mathfrak{u}_{reg}$. Il résulte alors de la majoration (4) que la suite $(\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $C^{m_0}(H)$. Elle converge vers un élément de cet espace que l'on note $\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi)$. Les propriétés de cette application résultent par continuité des propriétés de l'application initiale définie pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_{reg})$. On doit juste préciser un point. Pour une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers une fonction φ comme ci-dessus, il n'y a pas de raison que $\delta(\varphi_k)$ tende vers $\delta(\varphi)$. La majoration voulue de $\Delta_{H,j}\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi,\lambda)$ ne résulte pas des majorations (4) des $\Delta_{H,j}\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi_k,\lambda)$. Mais, pour tout $\varphi \in C_c^{m_1}(\mathfrak{u}_{reg})$, on peut choisir une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{u}_{reg})$ tendant vers φ et vérifiant de plus la propriété $\delta(\varphi_k) \geq \delta(\varphi)/2$ pour tout k. En utilisant une telle suite, on obtient la majoration voulue. Cela prouve (3).

Notons ϖ l'élément de $Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ tel que ∂_ϖ soit le laplacien relatif à notre métrique. Puisque $Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ est un module de type fini sur l'image de $\mathfrak{Z}(G)$ par l'application d'Harish-Chandra $z \mapsto z_{T^\theta}$, on a

(5) il existe un entier $r \geq 1$ tel que, pour tout entier $m \geq 1$, il existe des éléments z_j de $\mathfrak{Z}(G)$ pour $j = 1, ..., r$ de sorte que

$$\varpi^{mr} = \sum_{j=1,\dots,r} z_{j,T^\theta}\varpi^{m(r-j)}.$$

Notons δ_0 la mesure de Dirac en 0 sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$. La théorie des opérateurs elliptiques implique que

(6) il existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \geq m_2/2$, il existe une fonction ψ^m de classe $2m - m_2$ sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ et C^∞ sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R}) - \{0\}$ de sorte que

$$\delta_0 = \partial_{\varpi^m}\psi^m.$$

Fixons une fonction $\alpha \in C_c^\infty(\mathfrak{u})$ qui soit constante de valeur 1 au voisinage de 0. Pour $\epsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, posons $\psi_\epsilon^m(X) = \psi^m(X)\alpha(\epsilon^{-1}X)$. La fonction ψ_ϵ^m est de classe $2m - m_2$ et est à support dans la boule centrée en 0 et de rayon $2\epsilon c_0$. On a une égalité

$$\delta_0 = \partial_{\varpi^m}\psi_\epsilon^m + \chi_\epsilon^m$$

où χ_ϵ^m est une fonction C^∞ sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ à support dans la boule centrée en 0 et de rayon $2\epsilon c_0$.

Fixons maintenant un élément $X \in \mathfrak{u}'_{reg}$ et un entier $m_0 \in \mathbb{N}$. On pose $\gamma = exp(X)\eta$. Fixons un $\epsilon > 0$ tel que

$$\epsilon < \frac{c_1}{2c_0}\mathbf{d}_{reg}(\gamma)$$

où c_1 est comme en (2). Fixons un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $2m > m_0 + m_1 + m_2$ où m_1 et m_2 sont déterminés par (3) et (6). Posons $\psi = \psi_\epsilon^{mr}$ et $\chi = \chi_\epsilon^{mr}$. Pour toute fonction β sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ et tout $X' \in \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$, définissons $\beta_{X'}$ par $\beta_{X'}(Y) = \beta(Y - X')$ pour tout $Y \in \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$. La propriété (2) et le choix de ϵ entraînent que ψ_X et χ_X sont à support dans l'ensemble des éléments $Y \in \mathfrak{u}_{reg}$ qui vérifient l'inégalité $\mathbf{d}_{reg}(exp(Y)\eta) \geq \mathbf{d}_{reg}(\gamma)/2$. La fonction χ_X est C^∞ tandis que ψ_X est de classe $2mr - m_2$. En notant δ_X la mesure de Dirac en X, on a

$$\delta_X = \partial_{\varpi^{mr}}\psi_X + \chi_X.$$

Ou encore, en utilisant (5),

$$\delta_X = \chi_X + \sum_{j=1,\dots,r} \partial_{z_{j,T^\theta}\varpi^{m(r-j)}}\psi_X.$$

Soit $f \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Appliquons δ_X à la fonction $Y \mapsto I^{K\tilde{M}}(exp(Y)\eta, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f))$. On obtient $I^{K\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f))$. En utilisant la formule précédente, on en déduit

$$(7) \qquad I^{K\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f)) = \sum_{j=0,\dots,r} I_j,$$

où

$$I_0 = \int_{\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})} \chi_X(Y) I^{K\tilde{M}}(exp(Y)\eta, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f))\, dY$$

et, pour $j = 1, \dots, r$,

$$I_j = \int_{\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})} \psi_X(Y) \partial^*_{z_{j,T^\theta}\varpi^{m(r-j)}} I^{K\tilde{M}}(exp(Y)\eta, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f))\, dY.$$

On a noté $\partial^*_{z_{j,T^\theta}\varpi^{m(r-j)}}$ l'opérateur dual de $\partial_{z_{j,T^\theta}\varpi^{m(r-j)}}$. Notons que l'application $Y \mapsto -Y$ fixe ϖ donc aussi les z_{j,T^θ} d'après la définition (5). Donc $\partial^*_{z_{j,T^\theta}\varpi^{m(r-j)}} = \partial_{z_{j,T^\theta}\varpi^{m(r-j)}}$. Pour tout $j = 1, \dots, r$, la fonction $\partial_{\varpi^{m(r-j)}}\psi_X$ est de classe $2m - m_2$ (qui est > 0 par le choix de m) et est à support compact. Par intégration par parties, I_j se récrit

$$I_j = \int_{\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})} \partial_{\varpi^{m(r-j)}}\psi_X(Y) \partial_{z_{j,T^\theta}} I^{K\tilde{M}}(exp(Y)\eta, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f))\, dY.$$

Ou encore, grâce à 8.2(1)

$$I_j = \int_{\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})} \partial_{\varpi^{m(r-j)}}\psi_X(Y) I^{K\tilde{M}}(exp(Y)\eta, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(z_j f))\, dY.$$

Les fonctions χ_X comme $\partial_{\varpi^{m(r-j)}}\psi_X$ appartiennent à $C_c^{m_1}(\mathfrak{u}_{reg})$. Grâce à (3), on peut exprimer chaque intégrale I_j sous la forme (1). La formule (7) devient alors

$$(8) \qquad I^{K\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f)) = \sum_{K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)} \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{R},\omega)} \sum_{H \in \mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma})} \int_H \sum_{j=0,\dots,r} \Psi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H,j}(\lambda)\, d\lambda,$$

où

$$\Psi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H,0}(\lambda) = \phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\chi_X, \lambda) I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{K\tilde{R},\omega})$$

et, pour $j = 1, \dots, r$,

$$\Psi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H,j}(\lambda) = \phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\partial_{\varpi^{m(r-j)}}\psi_X, \lambda) I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, z_j f_{K\tilde{R},\omega}).$$

On sait qu'à $\tilde{\sigma}$ est associé un paramètre infinitésimal $\mu(\tilde{\sigma})$ qui est une orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action de W^R. Identifions-le à un point de cette orbite. En identifiant $\mathfrak{Z}(G)$ à l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{t}^*$, on a l'égalité

$$I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, z_j f_{K\tilde{R},\omega}) = z_j(\mu(\tilde{\sigma}) + \lambda) I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{K\tilde{R},\omega}).$$

Posons

$$(9) \qquad \xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\gamma, \lambda) = \phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\chi_X, \lambda) + \sum_{j=1,\dots,r} z_j(\mu(\tilde{\sigma}) + \lambda) \phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\partial_{\varpi^{m(r-j)}}\psi_X, \lambda).$$

Alors

$$\sum_{j=0,\dots,r}\Psi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H,j}(\lambda)=\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\gamma,\lambda)I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda,f_{K\tilde{R},\omega})$$

et la formule (8) devient celle du (iv) de l'énoncé.

D'après (3) et la définition (9), les fonctions $\lambda\mapsto\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\gamma,\lambda)$ sont de classe C^{m_0}. Reprenons la construction en remplaçant l'élément X par un élément X' voisin de X. Si X' est assez proche de X, on peut utiliser le même ϵ. Les fonctions $\chi_{X'}$ et $\psi_{X'}$ dépendent de X' seulement par translation. En se rappelant la condition imposée à m, on voit alors que les applications $X'\mapsto\chi_{X'}$ et $X'\mapsto\psi_{X'}$ sont des applications m_0 fois dérivables à valeurs dans $C^{m_1}(\mathfrak{u}_{reg})$. Pour $U\in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ de degré au plus m_0, les images de ces applications par ∂_U sont égales à $X'\mapsto\partial_U\chi_{X'}$ et $X'\mapsto\partial_U\psi_{X'}$. D'autre part, considérons un ouvert E d'un espace $\mathbb{R}^a$, $b\in\mathbb{N}$ un entier et $e\mapsto\varphi[e]$ une application b fois dérivable de E dans $C^{m_1}(\mathfrak{u}_{reg})$. La majoration (3) entraîne que, pour tous $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$, H et tout $\lambda\in H$, l'application $e\mapsto\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\varphi[e],\lambda)$ est b fois dérivable. Pour un opérateur différentiel D sur $\mathbb{R}^a$, à coefficients constants et de degré au plus b, l'image par D de cette application est l'application $e\mapsto\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(D\varphi[e],\lambda)$. De cela et de la formule (9) résulte que $X'\mapsto\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X')\eta,\lambda)$ est m_0 fois dérivable au point X et que, pour $D\in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ de degré au plus m_0, on a l'égalité

$$(10)\qquad D\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)=\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(D\chi_X,\lambda)$$

$$+\sum_{j=1,\dots,r}z_j(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)\phi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\partial_{\varpi^{m(r-j)}}D\psi_X,\lambda).$$

Il existe un entier $d'>0$ et un réel $c_2>0$ tels que l'on ait une minoration $D^{\tilde{G}}(exp(Y)\eta)\geq c_2\mathbf{d}_{reg}(Y)^{d'}$ pour tout $Y\in\mathfrak{u}_{reg}$. D'après le choix de ϵ, $\delta(D\chi_X)$ et $\delta(D\psi_X)$ sont donc minorées par $c_2(\mathbf{d}_{reg}(exp(X)\eta)/2)^{d'}$. En utilisant (3), on en déduit que l'application $(X,\lambda)\mapsto\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)$ est m_0 fois dérivable en les deux variables. De plus, pour tout opérateur différentiel à coefficients constants Δ sur H de degré au plus m_0 et tout élément $D\in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ de degré au plus m_0, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$, une famille finie $(H_i)_{i=1,\dots,n}$ d'éléments de $Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ de degré au plus $m_3=2m(r-1)+m_0+m_1$ et un entier $d\in\mathbb{N}$ de sorte que

$$(11)\qquad |D\Delta\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)|\leq\mathbf{d}_{reg}(exp(X)\eta)^{-dd'}(1+|\lambda|)^N$$

$$\sum_{i=1,\dots,n}(sup_{Y\in\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})}|\partial_{H_i}\chi(Y)|)+(sup_{Y\in\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})}|\partial_{H_i}\psi(Y)|).$$

Notons que $m_3<2mr-m_2$ par définition de m. Le terme $(1+|\lambda|)^N$ s'introduit à cause des polynômes $z_j(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)$ de la formule (10). Reprenons la définition des fonctions χ et ψ. On voit que les termes $|\partial_{H_i}\chi(Y)|$ et $|\partial_{H_i}\psi(Y)|$ sont bornés par une constante et une puissance négative de ϵ, l'exposant étant au plus m_3. On a supposé $\epsilon<\frac{c_1}{2c_0}\mathbf{d}_{reg}(exp(X)\eta)$ mais on peut aussi bien choisir $\epsilon=\frac{c_1}{4c_0}\mathbf{d}_{reg}(exp(X)\eta)$. Les termes ci-dessus sont alors bornés par une constante et une puissance négative de $\mathbf{d}_{reg}(exp(X)\eta)$, l'exposant étant au plus m_3. La majoration (11) prend alors la forme du (ii) de l'énoncé.

On obtient ainsi une forme affaiblie des assertions (i) et (ii) de l'énoncé : pour (i), on prouve seulement que la fonction est C^{m_0} en chaque variable ; pour (ii), on impose que les degrés des opérateurs différentiels sont au plus m_0. Mais le principe d'unicité énoncé en 8.3 entraîne que les fonctions $\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}$ que l'on a construites sont indépendantes de l'entier m_0 utilisé pour les construire. En faisant varier cet entier, les formes faibles de (i) et (ii) entraînent ces assertions telles qu'énoncées dans la proposition. $\square$

$\square$

8.8 Description des fonctions $\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}$

On conserve la situation du paragraphe précédent. Fixons $\eta \in \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$. On dispose de l'exponentielle

$$exp : \mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R}) \to T^{\theta,0}(\mathbb{R}).$$

Son noyau est un sous-$\mathbb{Z}$-module de type fini de $\mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R})$ que l'on note Ker_T. Il engendre le sous-espace $X_*(T^{\theta,0})^- \otimes i\mathbb{R}$ de $\mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R})$, où l'exposant $^-$ désigne le sous-espace sur lequel $\Gamma_{\mathbb{R}}$ agit par son unique caractère non trivial. Notons $\mathfrak{t}'$ le sous-ensemble des éléments $X \in \mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R})$ tels que $exp(X)\eta$ soit régulier dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. C'est le complémentaire d'un ensemble localement fini d'hyperplans affines. Chacun de ces hyperplans est invariant par translations par $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$ et ne contient pas 0 puisque η est fortement régulier dans $\tilde{G}$. Cet ensemble d'hyperplans est conservé par translations par Ker_T. Pour $X \in \mathfrak{t}'$, notons $n(X)$ le nombres de ces hyperplans qui séparent X de 0 et posons $\epsilon(X) = (-1)^{n(X)}$. Cela définit une fonction $\epsilon : \mathfrak{t}' \to \{\pm 1\}$.

Soient $K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$, $\tilde{\sigma} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega)$ et $H \in \mathcal{H}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\tilde{\sigma})$. On sait définir le paramètre infinitésimal $\mu(\tilde{\sigma})$ qui est une orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action de W. On a vu en [IV] 1.2 que son intersection avec l'espace affine $\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}$ était une unique orbite pour l'action de W^{θ}. Fixons un point de cette intersection que, pour simplifier, on note encore $\mu(\tilde{\sigma})$. On identifie $\mathfrak{t}^*$ à $\mathfrak{h}^*$ et donc H à un sous-ensemble de $\mathfrak{h}^*$, en fait de $i\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$. Notons $W_{\tilde{\sigma},H}$ le sous-groupe des éléments de W^{θ} qui fixent tout élément de $\mu(\tilde{\sigma})+H$. Notons H' le sous-ensemble des $\lambda \in H$ tels que le fixateur de $\mu(\tilde{\sigma}) + \lambda$ dans W^{θ} soit égal à $W_{\tilde{\sigma},H}$. C'est le complémentaire dans H d'un ensemble fini de sous-espaces affines propres.

Proposition. *(i) Pour tout $w \in W^{\theta}/W_{\tilde{\sigma},H}$, il existe une unique fonction*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R}) \times H' & \to & \mathbb{C} \\ (X,\lambda) & \mapsto & P_w(X,\lambda) \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :

- $P_w(X,\lambda)$ est C^{∞} en λ et polynomiale en X de degré inférieur ou égal à $|W_{\tilde{\sigma},H}|$;

- pour $X \in \mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R})$ tel que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{G}$ et pour $\lambda \in H'$, on a l'égalité

$$\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda) = \epsilon(X) \sum_{w \in W^{\theta}/W_{\tilde{\sigma},H}} e^{<X,w(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)>} P_w(X,\lambda).$$

(ii) On a $\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H} = 0$ si $dim(H) > dim(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$.

Preuve. On oublie nos données fixées $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$ et H qui ne joueront pas de rôle particulier, ce qui libère ces symboles. Notons $\mathfrak{t}''$ le sous-ensemble des éléments $X \in \mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R})$ tels que $exp(X)\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{G}$. C'est un sous-ensemble de $\mathfrak{t}'$ qui est le complémentaire dans $\mathfrak{t}^{\theta}(\mathbb{R})$ d'un ensemble localement fini de sous-espaces affines propres. Rappelons que l'on dispose de l'homomorphisme d'Harish-Chandra $z \mapsto z_{T^{\theta,0}}$ de $\mathfrak{Z}(G)$

dans $Sym(\mathfrak{t})_{\theta,\omega}^{W^\theta} \simeq Sym(\mathfrak{t}^\theta)^{W^\theta}$. Soient $z \in \mathfrak{Z}(G)$, $X \in \mathfrak{t}''$ et $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. On a l'égalité $\epsilon_{K\tilde{M}}(zf) = z_M\epsilon_{K\tilde{M}}(f)$, cf. 8.2(1). On a donc

$$I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,\epsilon_{K\tilde{M}}(zf)) = I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,z_M\epsilon_{K\tilde{M}}(f))$$

$$= \partial_{z_{T^{\theta},0}} I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,\epsilon_{K\tilde{M}}(f)).$$

Exprimons les deux termes à l'aide du (iv) de la proposition 8.7. On obtient pour chacun d'eux une somme en $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$, H d'intégrales

$$\int_H \partial_{z_{T^{\theta},0}}\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{K\tilde{R},\omega})\,d\lambda$$

pour le membre de droite et

$$\int_H \xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda,(zf)_{K\tilde{R},\omega})\,d\lambda$$

pour celui de gauche. On a

$$I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda,(zf)_{K\tilde{R},\omega}) = I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, z_R f_{K\tilde{R},\omega}) = z(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{K\tilde{R},\omega}).$$

On obtient ainsi des expressions similaires, avec une fonction $\partial_{z_{T^{\theta},0}}\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)$ dans le membre de droite et une fonction $z(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)$ dans celui de gauche. Ces fonctions forment deux familles indexées par $\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$, H. Ces deux familles vérifient la condition de symétrie (2) de 8.4. Mais elles calculent le même terme. Comme on l'a dit en 8.4, elles sont donc égales. On obtient l'égalité

$$(1) \qquad \partial_{z_{T^{\theta},0}}\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda) = z(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda).$$

L'algèbre $Sym(\mathfrak{t}^\theta)$ est un module de type fini sur l'image de $\mathfrak{Z}(G)$. On peut en fixer une base $(U_i)_{i=1,...,n}$. Pour $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$, écrivons $U = \sum_{i=1,...,n} z_{i,T^{\theta},0}U_i$ avec des $z_i \in \mathfrak{Z}(G)$. Alors

$$\partial_U\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda) = \sum_{i=1,...,n}\partial_{U_i}\partial_{z_{i,T^{\theta},0}}\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)$$

$$= \sum_{i=1,...,n} z_i(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)\partial_{U_i}\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda).$$

On en déduit une première amélioration du (ii) de la proposition 8.7 :

(2) pour tout sous-ensemble compact $\Gamma \subset \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et une constante $c > 0$ de sorte que

$$|\partial_U\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)| \leq c|\mathbf{d}_{reg}(exp(X)\eta)|^{-d}(1+|\lambda|)^N$$

pour tout $X \in \Gamma \cap \mathfrak{t}''$ et tout $\lambda \in H$.

L'entier d est devenu indépendant de U. Pour un compact Γ comme ci-dessus, il existe un nombre fini de formes linéaires l_i, $i = 1,...,k$, sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ et une constante $c > 0$ de sorte que $\mathbf{d}_{reg}(exp(X)\eta) \geq c|\prod_{i=1,...,k} l_i(X)|$ pour $X \in \Gamma \cap \mathfrak{t}''$. En appliquant le lemme 8.1, on obtient la seconde amélioration suivante :

(3) pour tout sous-ensemble compact $\Gamma \subset \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ et tout $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et une constante $c > 0$ de sorte que

$$|\partial_U\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)| \leq c(1+|\lambda|)^N$$

pour tout $X \in \Gamma \cap \mathfrak{t}''$ et tout $\lambda \in H$.

Considérons pour quelques instants que λ est fixé et qu'il appartient à H'. Notons simplement $\xi(X) = \xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$. L'égalité (1) est une équation différentielle portant sur la fonction ξ. En faisant varier z, on obtient un système d'équations différentielles. On connaît grâce à [18] théorème 11 la forme des solutions. Dans tout ouvert connexe où ξ est C^∞, ξ s'écrit

$$\xi(X) = \sum_{w \in W^\theta / W_{\tilde{\sigma},H}} e^{<X, w(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)>} P_w(X),$$

où P_w est un polynôme en X de degré au plus $|W_{\tilde{\sigma},H}|$. Ces polynômes sont uniquement déterminés. Evidemment, quand on considère de nouveau λ comme variable, les polynômes dépendent de λ. On vérifie aisément par interpolation que, puisque $\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$ est C^∞ en λ, les polynômes obtenus sont C^∞ en tout point λ en position générale. Par ailleurs, on peut aussi bien remplacer $\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$ par $\epsilon(X)\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$ puisque ϵ est localement constante sur $\mathfrak{t}''$. En résumé, pour toute composante connexe Ω de $\mathfrak{t}''$, il existe d'uniques fonctions $P_w^\Omega(X, \lambda)$, pour $w \in W^\theta / W_{\tilde{\sigma},H}$, qui sont polynomiales en X de degré au plus $|W_{\tilde{\sigma},H}|$ et qui sont C^∞ en tout point $\lambda \in H'$, de sorte que

$$(4) \qquad \epsilon(X)\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda) = \sum_{w \in W^\theta / W_{\tilde{\sigma},H}} e^{<X, w(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)>} P_w^\Omega(X, \lambda)$$

pour tout $X \in \Omega$ et tout $\lambda \in H'$. Notons $\xi^\Omega_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$ le membre de droite ci-dessus. On remarque que la fonction $X \mapsto \xi^\Omega_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$ s'étend naturellement en une fonction C^∞ sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ définie par la même formule.

On va prouver que cette fonction ne dépend pas de Ω. Le complémentaire de $\mathfrak{t}''$ est une réunion de sous-espaces propres. Mais les sous-espaces de codimension au moins 2 ne créent pas de disconnexité. Il nous suffit de prouver l'égalité $\xi^\Omega_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda) = \xi^{\Omega'}_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$ quand Ω et Ω' sont deux composantes connexes séparées par un unique hyperplan singulier. Considérons de telles Ω et Ω'. Considérons un élément X_0 de l'hyperplan singulier qui sépare ces deux composantes, qui est en position générale dans cet hyperplan et qui appartient aux adhérences de Ω et Ω'. On a défini en 8.2 un signe $\Delta_{exp(X_0)\eta}(Y)$ pour un élément Y général et proche de 0. On vérifie sur la définition que le rapport $\Delta_{exp(X_0)\eta}(Y)\epsilon(X_0+Y)^{-1}$ est constant pour Y général et proche de 0. Soit $f \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, K)$. Parce que $\epsilon_{K\tilde{M}}(f)$ est une fonction cuspidale, la fonction $Y \mapsto \Delta_{exp(X_0)\eta}(Y) I^{K\tilde{M}}(exp(Y+X_0)\eta, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f))$ est C^∞ au voisinage de 0. Ou encore la fonction $X \mapsto \epsilon(X) I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f))$ est C^∞ au voisinage de X_0. Soit $U \in Sym(\mathfrak{t}^\theta)$. Pour $X \in \mathfrak{t}''$ proche de X_0, $\epsilon(X)\partial_U I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f))$ se calcule par la formule 8.7(iv). On obtient une somme en $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$, H d'intégrales

$$\epsilon(X) \int_H \partial_U \xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda) I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{K\tilde{R},\omega})\, d\lambda.$$

Supposons $X \in \Omega$. Pour $\lambda \in H'$, on peut remplacer $\epsilon(X)\partial_U \xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$ par $\partial_U \xi^\Omega_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$. Faisons tendre X vers X_0. Pour tout $\lambda \in H'$, $\partial_U \xi^\Omega_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$ tend vers $\partial_U \xi^\Omega_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X_0)\eta, \lambda)$. L'assertion (3) montre que $\partial_U \xi^\Omega_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta, \lambda)$ reste uniformément bornée par le produit d'une constante et de $(1+|\lambda|)^N$ pour un entier N convenable. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. La fonction $\partial_U \xi^{\Omega}_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X_0)\eta,\lambda)$ est encore bornée par une puissance de $1+|\lambda|$ et la limite quand X tend vers 0 de $\epsilon(X)\partial_U I^{K\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,\epsilon_{K\tilde{M}}(f))$ est la somme en $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$, H des intégrales

$$\int_H \partial_U \xi^{\Omega}_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X_0)\eta,\lambda) I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, f_{K\tilde{R},\omega})\, d\lambda.$$

On peut évidemment refaire le calcul en remplaçant Ω par Ω'. On obtient une expression similaire. Les deux expressions obtenues vérifient la condition de symétrie 8.4(3) (parce que ce sont des limites d'expressions qui la vérifient). Il en résulte que ces deux expressions coïncident. C'est-à-dire que, pour tous $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$, H et pour tout U, on a l'égalité

$$\partial_U \xi^{\Omega}_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X_0)\eta,\lambda) = \partial_U \xi^{\Omega'}_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X_0)\eta,\lambda).$$

Puisque les deux fonctions $\xi^{\Omega}_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)$ et $\xi^{\Omega'}_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)$ sont des exponentielles-polynômes, l'égalité de toutes leurs dérivées en un point entraîne leur égalité. Donc, pour $\lambda \in H'$, $\xi^{\Omega}_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(exp(X)\eta,\lambda)$ ne dépend pas de Ω. Les termes $P^{\Omega}_w(X,\lambda)$ non plus. Mais alors, l'assertion (4) démontre le (i) de l'énoncé.

Considérons de nouveau des données $K\tilde{R}$, $\tilde{\sigma}$ et H fixées. On voit facilement que la fonction ϵ vérifie la condition de périodicité : pour $Y \in Ker_T$, $\epsilon(X)/\epsilon(X+Y)$ ne dépend pas de $X \in \mathfrak{t}'$. Il en résulte que $\epsilon(X+2Y)=\epsilon(X)$ pour $X \in \mathfrak{t}'$ et $Y \in Ker_T$. Puisqu'on a aussi $exp(X+2Y)=exp(X)$, la formule du (i) de l'énoncé entraîne

$$\sum_{w\in W^\theta/W_{\tilde{\sigma},H}} e^{<X+2Y,w(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)>} P_w(X+2Y,\lambda) = \sum_{w\in W^\theta/W_{\tilde{\sigma},H}} e^{<X,w(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)>} P_w(X,\lambda).$$

Cette égalité pour tout $X \in \mathfrak{t}'$ et tout $\lambda \in H'$ entraîne que

$$(5) \qquad e^{<2Y,w(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)>} P_w(X+2Y,\lambda) = P_w(X,\lambda)$$

pour tous $w \in W^\theta$, $X \in \mathfrak{t}'$, $\lambda \in H'$ et $Y \in Ker_T$. Si $P_w(X,\lambda)$ est identiquement nul pour tout w, la conclusion du (ii) de l'énoncé est claire. Sinon, fixons w, X tels que la fonction $\lambda \mapsto P_w(X,\lambda)$ ne soit pas nulle. Pour ces valeurs de w et X et pour λ tel que $P_w(X,\lambda) \neq 0$, considérons l'égalité (5) comme une égalité de fonctions en Y. Elle dit qu'une fonction exponentielle coïncide avec une fonction rationnelle sur le $\mathbb{Z}$-module Ker_T. Il en résulte aisément que cette exponentielle est constante sur ce réseau, ce qui implique que $<2Y, w(\mu(\tilde{\sigma})+\lambda)> \in 2\pi i\mathbb{Z}$ pour tout $Y \in Ker_T$. On se rappelle que H est un sous-espace affine de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$. Notons H^0 le sous-espace linéaire associé. Les seules conditions imposées à λ sont $\lambda \in H'$ et $P_w(X,\lambda)\neq 0$. Elles définissent un ouvert non vide et la relation ci-dessus est vérifiée pour tout λ dans cet ouvert. On peut donc remplacer λ par $\lambda+\nu$, où ν est un élément de H^0 assez voisin de 0. On en déduit que $<2Y,w(\nu)> \in 2\pi i\mathbb{Z}$ pour tout $Y \in Ker_T$ et tout $\nu \in H^0$ assez proche de 0. Cela entraîne facilement que $<Y,w(\nu)>=0$ pour tout $\nu \in H^0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et tout Y dans le $\mathbb{C}$-sous-espace de $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ engendré par Ker_T. Comme on l'a dit, ce sous-espace est $X_*(T^{\theta,0})^- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Parce que $\tilde{T}$ est un sous-tore tordu elliptique de $\tilde{M}$, l'orthogonal de ce sous-espace est $\mathfrak{a}^*_{\tilde{M}}$. La relation précédent signifie que $w(H^0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ est inclus dans $\mathfrak{a}^*_{\tilde{M}}$. Cela implique que $dim(H) \leq dim(\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})) = dim(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$. Cela prouve le (ii) de l'énoncé. $\square$

8.9 K-finitude,

On réalise l'espace de Paley-Wiener $PW^{\infty}(K\tilde{G},\omega)$ et son sous-espace $PW(K\tilde{G},\omega)$ en utilisant les bases $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega)$ des espaces $D_{ell,0}(K\tilde{R},\omega)$ pour tout $K\tilde{R}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. Fixons un tel $K\tilde{R}$ et un élément $\tilde{\sigma}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega)$. Notons $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions de Paley-Wiener sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{R},\mathbb{C}}$. On l'identifie au sous-espace des éléments $(\varphi_{\tilde{\sigma}'})_{\tilde{\sigma}'\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{R},\omega)}\in PW_{ell}(K\tilde{R},\omega)$ dont toutes les composantes sont nulles sauf celle pour $\tilde{\sigma}'=\tilde{\sigma}$. On dispose alors de l'homomorphisme de symétrisation $sym:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{W(\tilde{R})}\to PW(\tilde{G},\omega)$ et de l'isomorphisme de Paley-Wiener $pw: I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)\to PW(\tilde{G},\omega)$ (cf. [IV] 2.4 et [20] 6.1). Pour $\varphi\in\mathcal{F}$, on pose $f_{\varphi}=pw^{-1}\circ sym(\varphi)$.

Proposition. *(i) Supposons $dim(\mathcal{A}_{\tilde{R}})<dim(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$. Alors $\epsilon_{K\tilde{M}}(f_{\varphi})=0$ pour tout $\varphi\in\mathcal{F}$.*

(ii) Supposons $dim(\mathcal{A}_{\tilde{R}})\geq dim(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$. Alors $\epsilon_{K\tilde{M}}(f_{\varphi})$ est K-finie, c'est-à-dire appartient à $I_{ac,cusp}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K)$, pour tout $\varphi\in\mathcal{F}$.

Preuve. Fixons $\tilde{\pi}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(K\tilde{M},\omega)$. Soit $\varphi\in\mathcal{F}$. Comme on l'a dit en 8.3(2), on dispose d'une fonction méromorphe $\lambda\mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,\epsilon_{\tilde{M}}(f_{\varphi}))$ sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. Montrons que

(1) pour $\lambda\in\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ et $z\in\mathfrak{Z}(M)$, on a l'égalité

$$I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,z\epsilon_{\tilde{M}}(f_{\varphi}))=z(\mu(\tilde{\pi})+\lambda)I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},\lambda,\epsilon_{\tilde{M}}(f_{\varphi})).$$

Considérons les espaces $\mathcal{S}(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}})$ et $\mathcal{S}(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$ des fonctions de Schwartz sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et la transformation de Fourier $\psi\mapsto\hat{\psi}$ de $\mathcal{S}(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}})$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$. L'algèbre $\mathfrak{Z}(M)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{h}^*$ invariants par W^M. On la fait agir sur $\mathcal{S}(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}})$ par $(z\psi)(\lambda)=z(\mu(\tilde{\pi})+\lambda)\psi(\lambda)$. Par transformation de Fourier, on obtient une action sur $\mathcal{S}(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$ que l'on note ρ. C'est-à-dire que l'on a $(z\psi)\hat{}=\rho(z)\hat{\psi}$. Il est facile d'expliciter cette action. On décompose $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}^{M,*}\oplus\mathfrak{a}_{\tilde{M}}$. Cela décompose $\mathfrak{Z}(M)$ en produit tensoriel de l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{h}^{M,*}$ invariants par W^M et une algèbre isomorphe à $Sym(\mathfrak{a}_{\tilde{M}})$. Pour z dans la première algèbre, $\rho(z)$ est la multiplication par $z(\mu(\tilde{\pi}))$. Pour $X\in\mathfrak{a}_{\tilde{M}}$, l'action $\rho(X)$ est la dérivation ∂_X. Soit $h\in I(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. La fonction $X\mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,h)$ est la transformée de Fourier de $\lambda\mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\lambda},h)$. On sait que, pour $z\in\mathfrak{Z}(M)$, on a l'égalité

$$I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\lambda},zh)=z(\mu(\tilde{\pi})+\lambda)I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\lambda},h).$$

On en déduit que

$$(2)\qquad I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,zh)=\rho(z)I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,h).$$

Mais cette formule se généralise à $h\in I_{ac}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. En effet, fixons X, puis une fonction $b\in C_c^{\infty}(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$ qui vaut 1 dans un voisinage de X. On a

$$(3)\qquad I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,z(h(b\circ H_{\tilde{M}})))=\rho(z)I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,h(b\circ H_{\tilde{M}})).$$

Il résulte de la description de l'action ρ que $\rho(z)I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,h(b\circ H_{\tilde{M}}))$ ne dépend que des valeurs de $I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X',h(b\circ H_{\tilde{M}}))$ pour X' proche de X. Or, pour de tels X', on a $I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X',h(b\circ H_{\tilde{M}}))=I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X',h)$. D'autre part, la différence $z(h(b\circ H_{\tilde{M}}))-(zh)(b\circ H_{\tilde{M}})$ est nulle en un point γ tel que $H_{\tilde{M}}(\gamma)$ est proche de X. On en déduit

$$I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,z(h(b\circ H_{\tilde{M}})))=I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,(zh)(b\circ H_{\tilde{M}}))=I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,zh).$$

L'égalité (3) est donc identique à (2). En particulier, l'égalité (2) est vérifiée pour $h = \epsilon_{\tilde{M}}(f_\varphi)$. Par inversion de Fourier, on en déduit l'égalité de l'assertion (1).

Soit $\nu \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. Définissons une forme linéaire l_ν sur $\mathcal{F}$ par $l_\nu(\varphi) = I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \nu, \epsilon_{\tilde{M}}(f_\varphi))$. Les assertions (1) ci-dessus et 8.3(1) entraînent que $l_\nu(z\varphi) = z(\mu(\tilde{\pi})+\nu)l_\nu(\varphi)$. En notant J_ν l'idéal des éléments $z \in \mathfrak{Z}(G)$ tels que $z(\mu(\tilde{\pi}) + \nu) = 0$, on obtient que l_ν annule $J_\nu\mathcal{F}$. Rappelons que $\mathfrak{Z}(G)$ agit sur $\mathcal{F}$ par $(z\varphi)(\lambda) = z(\mu(\tilde{\sigma}) + \lambda)\varphi(\lambda)$. Supposons que $W(\mu(\tilde{\pi}) + \nu) \cap (\mu(\tilde{\sigma}) + \mathcal{A}^*_{\tilde{R},\mathbb{C}}) = \emptyset$. Le lemme [IV] 2.5 entraîne alors que $J_\nu\mathcal{F} = \mathcal{F}$, donc l_ν est nulle. Supposons que $W(\mu(\tilde{\pi}) + \nu) \cap (\mu(\tilde{\sigma}) + \mathcal{A}^*_{\tilde{R},\mathbb{C}})$ soit non vide, notons $\lambda_1,...,\lambda_m$ les éléments de $\mathcal{A}^*_{\tilde{R},\mathbb{C}}$ tels que cette intersection soit $\{\mu(\tilde{\sigma}) + \lambda_j; j = 1, ..., m\}$. Le même lemme entraîne l'existence d'un entier $N \geq 0$ tel que $J_\nu\mathcal{F}$ contienne tous les éléments de $\mathcal{F}$ qui s'annulent à l'ordre N en chaque λ_j. Pour chaque espace $H \in \mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$, écrivons $H = i\mu_H + iV_H$, où V_H est un sous-espace de $\mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$ et $\mu_H \in \mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$ est orthogonal à V_H et posons $H_\mathbb{C} = i\mu_H + V_{H,\mathbb{C}}$. Notons $\mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}, \leq a_{\tilde{M}})$ le sous-ensemble des $H \in \mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$ tels que $dim(H) \leq a_{\tilde{M}} = dim(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$. Montrons que

(4) supposons que, pour tout $j = 1, ..., m$ et tout $H \in \mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}, \leq a_{\tilde{M}})$, λ_j n'appartient pas à $H_\mathbb{C}$; alors $l_\nu = 0$.

Sous l'hypothèse de (4), on peut trouver un polynôme Q sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{R},\mathbb{C}}$ tel que $Q - 1$ s'annule à l'ordre N en tout λ_j et Q s'annule sur tout élément de $\mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}, \leq a_{\tilde{M}})$. Ces conditions étant invariantes par $W(\tilde{R})$, on peut supposer Q invariant par ce groupe. Pour $\varphi \in \mathcal{F}$, on a $\varphi = (1 - Q)\varphi + Q\varphi$. Le premier terme appartient à $J_\nu\mathcal{F}$ donc est annulé par l_ν. On va montrer que

(5) $\epsilon_{K\tilde{M}}(f_{Q\varphi}) = 0$.

Cela entraîne a fortiori $l_\nu(Q\varphi) = 0$, ce qui prouve (4). Prouvons (5). Si $K\tilde{M}$ ne possède pas de sous-tore tordu maximal elliptique, toute fonction elliptique sur $K\tilde{M}(\mathbb{R})$ est nulle, d'où (5). Sinon, fixons un tel sous-tore tordu maximal elliptique $\tilde{T}$ de $K\tilde{M}$. Pour $\gamma \in \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$, on va prouver que $I^{K\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{K\tilde{M}}(f_{Q\varphi})) = 0$, ce qui démontrera (5). Cette intégrale orbitale est calculée par la proposition 8.7. Compte tenu de la définition de $\mathcal{F}$, seules les paires conjuguées à la paire fixée $(K\tilde{R}, \tilde{\sigma})$ interviennent dans les deux premières sommes. Compte tenu des invariances par conjugaison de nos différents objets, on voit que, pour prouver la nullité souhaitée, il suffit de prouver que

$$\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\gamma, \lambda)I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, (f_{Q\varphi})_{K\tilde{R},\omega}) = 0$$

pour tout $H \in \mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$ et tout $\lambda \in H$ en position générale. On a

$$I^{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}_\lambda, (f_{Q\varphi})_{K\tilde{R},\omega}) = |W(\tilde{R})|^{-1} \sum_{w \in W(\tilde{R})} Q(w\lambda)\varphi(w\lambda).$$

D'après l'invariance de Q, il suffit de prouver que

$$\xi_{K\tilde{R},\tilde{\sigma},H}(\gamma, \lambda)Q(\lambda) = 0$$

pour tout $H \in \mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$ et tout $\lambda \in H$ en position générale. Or, si $dim(H) \leq a_{\tilde{M}}$, $Q(\lambda) = 0$. Si $dim(H) > a_{\tilde{M}}$, c'est la première fonction qui est nulle d'après la proposition 8.8(ii). Cela prouve (5) et (4).

Il résulte de (4) que, pour que l_ν soit non nulle, il est nécessaire qu'il existe $H \in \mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}, \leq a_{\tilde{M}})$ de sorte que

$$W(\mu(\tilde{\pi}) + \nu) \cap (\mu(\tilde{\sigma}) + i\mu_H + V_{H,\mathbb{C}}) \neq \emptyset.$$

Notons E l'ensemble des $\nu \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ vérifiant cette condition. Supposons dorénavant que

(6) la fonction $(X,\varphi) \mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \epsilon_{K\tilde{M}}(f_\varphi))$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}} \times \mathcal{F}$ est non nulle.

Il en est de même de la fonction $(\nu,\varphi) \mapsto I^{K\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,\varphi)$ sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}} \times \mathcal{F}$. Puisque cette fonction est C^∞ en ν, cela entraîne que l_ν est non nulle pour ν dans un ouvert non vide de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$. Un tel ouvert est donc contenu dans E. A fortiori E n'est pas inclus dans une réunion finie d'hyperplans affines de $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. Remplaçons les orbites $\mu(\tilde{\pi})$ et $\mu(\tilde{\sigma})$ par des points dans ces orbites. L'ensemble E est la réunion sur $H \in \mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma}, \leq a_{\tilde{M}})$, $w \in W$ et $w' \in W^M$ des ensembles

$$E_{H,w,w'} = (w(\mu(\tilde{\sigma}) + i\mu_H + V_{H,\mathbb{C}}) - w'(\mu(\tilde{\pi}))) \cap \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}.$$

On peut donc fixer H, w et w' tels que $E_{H,w,w'}$ ne soit pas inclus dans un hyperplan affine de $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. Mais $E_{H,w,w'}$ est clairement contenu dans un tel hyperplan, sauf si c'est $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ tout entier. Donc

$$(7) \qquad \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}} \subset (w(\mu(\tilde{\sigma}) + i\mu_H + V_{H,\mathbb{C}}) - w'(\mu(\tilde{\pi}))).$$

Cette condition implique $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}} \subset w(V_{H,\mathbb{C}})$. En vertu de l'hypothèse $dim(H) \leq a_{\tilde{M}}$, cette inclusion est une égalité. L'égalité (7) entraîne alors $w(\mu(\tilde{\pi})) = w(\mu(\tilde{\sigma}) + i\mu_H)$. En considérant de nouveau $\mu(\tilde{\pi})$ comme une orbite sous l'action de W^M, cette égalité impose à $\mu(\tilde{\pi})$ d'appartenir à un ensemble fini d'orbites déterminé par $\tilde{\sigma}$. La condition (6) implique donc

(8) il existe $H \in \mathcal{H}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$ tel que $dim(H) = a_{\tilde{M}}$;

(9) l'orbite $\mu(\tilde{\pi})$ appartient à un ensemble fini dorbites déterminé par $\tilde{\sigma}$.

Si $dim(\mathcal{A}_{\tilde{R}}) < dim(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$, la condition (8) n'est jamais vérifiée. En général, la condition (9) n'est vérifiée que pour un ensemble fini de $\tilde{\pi} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{M},\omega)$. Les mêmes assertions valent donc pour la condition (6). Cela prouve la proposition. □

La proposition entraîne immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire. *On a $\epsilon_{K\tilde{M}}(f) \in I_{ac,cusp}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega,K)$ pour tout $f \in C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$.*

Références

[1] J. Arthur : *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 56 (1988), p. 223-293

[2] J. Arthur : *Stabilization of a family of differential equations*, Proc. of Symp. in pure Math. 68 (2000)

[3] ——— : *Intertwining operators and residues I. Weighted characters*, J. of Funct. Analysis 84 (1989), p. 19-84

[4] ——— : *Canonical normalization of weighted characters and a transfer conjecture*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. 20 (1998), p. 33-52

[5] ——— : *The trace formula in invariant form*, Annals of Math. 114 (1981), p. 1-74

[6] ——— : *On a family of distributions obtained from Eisenstein series II : explicit formulas*, Amer. J. of Math. 104 (1981), p. 1289- 1336

[7] ——— : *Parabolic transfer for real groups*, J. AMS 21 (2008), p. 171-234

[8] ——— : *On the Fourier transforms of weighted orbital integrals*, J. reine angew. Math. 452 (1994), p. 163-217

[9] A. Bouaziz : *Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs*, Ann. Sc. ENS 27 (1994), p. 573-609

[10] Harish-Chandra : *The characters of semi-simple Lie groups*, Trans. AMS 83 (1956), p. 98-163

[11] R. Kottwitz : *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Ann. 275 (1986), p. 365-399

[12] ———-, D. Shelstad : Foundations of twisted endoscopy, Astérisque 255 (1999)

[13] J.-P. Labesse : *Stable twisted trace formula : elliptic terms*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 3 (2004), p. 473-530

[14] ————, J.-L. Waldspurger : *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar*, CRM Monograph series 31 (2013)

[15] P. Mezo : *Spectral transfer in the twisted endoscopy for real groups*, prépublication 2013

[16] C. Moeglin : *Appendice à la formule des traces locale*, prépublication 2013

[17] D. Shelstad : *On geometric transfer in real twisted endoscopy*, Annals of Math. 176 (2012), p. 1919-1985

[18] V. Varadarajan : *Harmonic analysis on real reductive groups*, Lecture Notes in Math 576, Springer 1977

[19] J.-L. Waldspurger : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Memoirs AMS 908 (2008)

[20] ———————— : *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012

[I], [II], [III], [IV], [V], [VIII] ———————— : *Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local, II : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; définitions et énoncés des résultats, III : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; réductions et preuves, IV : transfert spectral archimédien, V : intégrales orbitales et endoscopie sur* $\mathbb{R}$, *VIII : l'application* $\epsilon_{\tilde{M}}$ *sur un corps local non-archimédien*, prépublications 2014

Institut de Mathématiques de Jussieu
2 place Jussieu, 75005 Paris
e-mail : jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr