Stabilisation de la formule des traces tordue VIII : l'application $\epsilon_{\tilde{M}}$ sur un corps de base local non-archimédien

J.-L. Waldspurger

21 mars 2015

Introduction.

Dans une série d'articles, nous avons énoncé les théorèmes qui conduisent à la stabilisation de la partie géométrique de la formule des traces tordue. Le théorème clé est local. Rappelons-le très sommairement. Le corps de base F est local de caractéristique nulle. On considère un groupe réductif connexe G défini sur F, un espace tordu $\tilde{G}$ sous G et une classe de cocycle $\mathbf{a} \in H^1(W_F; Z(\hat{G}))$, auquel est associé un caractère ω de $G(F)$, supposé unitaire. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Pour un élément $\gamma \in \tilde{M}(F)$ qui est fortement régulier dans $\tilde{G}(F)$ et pour une fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on définit l'intégrale orbitale pondérée ω-équivariante $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ (la définition exacte nécessite d'introduire des mesures dont nous ne tenons pas compte dans cette introduction). Dans l'article [II], nous avons défini un avatar endoscopique de ce terme, que l'on note $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, \omega, f)$. Le théorème principal affirme que, pour tous γ et f comme ci-dessus, on a l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, \omega, f) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f).$$

Nous supposons ici que F est non-archimédien. Sous cette hypothèse, nous effectuons le premier pas dans la démonstration du théorème. Il consiste à prouver que pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, il existe une fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ sur $\tilde{M}(F)$ vérifiant la condition suivante. Pour tout élément $\gamma \in \tilde{M}(F)$ qui est fortement régulier dans $\tilde{G}(F)$, la différence entre les deux termes dont nous voulons prouver l'égalité est égale à l'intégrale orbitale de $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ au point γ. Cette dernière est une intégrale orbitale sur $\tilde{M}(F)$, non pondérée, mais tenant évidemment compte du caractère ω. Autrement dit

$$(1) \qquad I^{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{\tilde{M}}(f)) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, \omega, f) - I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f).$$

La suite de la démonstration consistera à appliquer la formule des traces dans $\tilde{M}$ à cette fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ et à en déduire que celle-ci est nulle. Cela démontrera le théorème principal. Au point où nous en sommes, nous pouvons seulement prouver l'existence d'une telle fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$. Nous ne pouvons même pas prouver que l'on peut la choisir localement constante et à support compact. Nous prouvons toutefois qu'on peut lui imposer les deux conditions

- il existe un sous-groupe ouvert compact de $M(F)$ tel que $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ soit biinvariante par ce sous-groupe ;

- la restriction de $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ à toute fibre de l'application usuelle $\tilde{H}_{\tilde{M}} : \tilde{M}(F) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ (cf. 1.1) est à support compact.

Ces conditions suffisent pour définir les intégrales orbitales $I^{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{\tilde{M}}(f))$. En fait, nous démontrons plus que la seconde propriété ci-dessus : la fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ est de Schwartz. Nous définissons en 1.7 ce que nous entendons par là (on trouve dans la littérature d'autres définitions des fonctions de Schwartz, qui ne coïncident sans doute pas avec la nôtre).

Il y a une restriction à notre résultat. Pour certains triplets $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, on impose que les intégrales orbitales ordinaires de f (ω-équivariantes) sont nulles en tout point de la réunion d'un certain ensemble fini de classes de conjugaison (cf. 4.4 pour un énoncé précis).

Notre résultat est l'exact analogue dans le cas tordu de la proposition 3.1 de [1], dont nous reprenons la preuve. En utilisant les résultats sur les germes de Shalika prouvés en [II] et [III], il est assez bref de démontrer que, pour tout élément semi-simple $\eta \in \tilde{M}(F)$, il existe une fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ lisse et à support compact de sorte que (1) soit vérifié pour γ au voisinage de η. On a envie ensuite de recoller les fonctions ainsi construites en utilisant une partition de l'unité. Mais on ne peut contrôler ni l'uniforme lissité de la fonction ainsi construite, ni sa croissance à l'infini. On a besoin d'une deuxième construction qui, elle, nous fournit une fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ qui a les bonnes propriétes de lissité et de croissance et qui vérifie l'égalité (1), cette fois pour γ hors d'un certain compact. On arrive à bon port en utilisant à la fois les deux constructions. Cette deuxième construction utilise des variantes des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes, que l'on note ${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ en suivant comme toujours Arthur. La magnifique propriété de ces termes est que, pour f fixée, ils sont à support compact en γ, modulo conjugaison. On doit d'abord définir et étudier ces termes, ainsi que certaines applications nécessaires à leur définition. C'est l'objet de la section 1. On doit ensuite les stabiliser (section 2) et en définir des avatars endoscopiques (section 3). La définition de l'application $\epsilon_{\tilde{M}}$ et la preuve de ses propriétés est donnée dans la dernière section.

1 L'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}$

1.1 Définition de fonctions combinatoires

Dans tout l'article, le corps de base F est local non archimédien et de caractéristique nulle. On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ défini sur F. On suppose que le caractère ω associé à $\mathbf{a}$ est unitaire.

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On note $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ l'ensemble des racines de $A_{\tilde{M}}$ dans G. Un élément $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$ peut être considéré comme un élément de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$. Il lui est associé une coracine $\check{\alpha} \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Sa définition précise est un peu arbitraire, l'ensemble $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ n'étant pas en général un système de racines au sens de Bourbaki. Toutefois, la demi-droite portée par $\check{\alpha}$ est définie sans ambiguïté et c'est la seule chose qui nous importera. Tout sous-espace parabolique $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$ détermine un sous-ensemble positif dans $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ que l'on note $\Sigma^{\tilde{P}}(A_{\tilde{M}})$. On en déduit des chambres positives

$$\mathcal{A}_{\tilde{P}}^+ = \{X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}; <\alpha, X>> 0 \ \forall \alpha \in \Sigma^{\tilde{P}}(A_{\tilde{M}})\},$$

$$\mathcal{A}_{\tilde{P}}^{*,+} = \{\mu \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}^*; <\mu, \check{\alpha}>> 0 \ \forall \alpha \in \Sigma^{\tilde{P}}(A_{\tilde{M}})\}.$$

Quand $\tilde{P}$ décrit $\mathcal{P}(\tilde{M})$, les ensembles $\mathcal{A}_{\tilde{P}}^{+}$ décrivent les composantes connexes de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ privé des hyperplans annulés par les racines $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$.

Dans notre situation tordue, il y a un espace affine $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Rappelons sa définition. On note $M(F)^1$ le noyau de l'application $H_{\tilde{M}} : M(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{M},F}$ son image. Notons $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$ le quotient $M(F)^1\backslash\tilde{M}(F)$. Le groupe $\mathcal{A}_{\tilde{M},F}$ agit par translations sur ce quotient et celui-ci est un espace principal homogène sous cette action. On pose $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}} = \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F} \times_{\mathcal{A}_{\tilde{M},F}} \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. On note $\tilde{H}_{\tilde{M}} : \tilde{M}(F) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ l'application naturelle.

Pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, on fixe une fonction $\omega_{\tilde{P}} : \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}} \to [0,1]$, soumise aux conditions suivantes :

(1) il existe $X_{\tilde{P}} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ tel que le support de $\omega_{\tilde{P}}$ soit contenu dans $X_{\tilde{P}} + \mathcal{A}_{\tilde{P}}^{+}$;

(2) $\sum_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{P}}(X) = 1$ pour tout $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$.

De telles fonctions existent. Remarquons que ces deux conditions impliquent

(3) il existe $Y_{\tilde{P}} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ tel que $\omega_{\tilde{P}}$ vaille 1 sur $Y_{\tilde{P}} + \mathcal{A}_{\tilde{P}}^{+}$.

Les fonctions $\omega_{\tilde{P}}$ sont fixées pour tout espace de Levi $\tilde{M}$. On leur impose la condition (4) suivante. Soit $x \in \tilde{G}(F)$. L'automorphisme ad_x induit un isomorphisme $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}} \to \tilde{\mathcal{A}}_{ad_x(\tilde{M})}$. Alors

(4) pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$ et tout $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$, $\omega_{ad_x(\tilde{P})}(ad_x(X)) = \omega_{\tilde{P}}(X)$.

C'est possible. En effet, pour tout espace de Levi $\tilde{M}$, notons $W(\tilde{M})$ le quotient $Norm_{G(F)}(\tilde{M})/M(F)$. Ce groupe agit sur $\mathcal{P}(\tilde{M})$, sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ en permutant les chambres $\mathcal{A}_{\tilde{P}}^{+}$ et sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$. Fixons un ensemble $\underline{\mathcal{L}}$ de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ d'espaces de Levi. Pour $\tilde{M} \in \underline{\mathcal{L}}$ et $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, on peut remplacer la fonction $\omega_{\tilde{P}}$ par la fonction

$$X \mapsto |W(\tilde{M})|^{-1} \sum_{w\in W(\tilde{M})} \omega_{w\tilde{P}}(wX).$$

Les nouvelles fonctions vérifient encore (1) et (2) et de plus $\omega_{w\tilde{P}}(wX) = \omega_{\tilde{P}}(X)$ pour tout $\tilde{P}$, tout X et tout $w \in W(\tilde{M})$. Pour $\tilde{M}'$ quelconque, soit $\tilde{M}$ l'unique élément de $\underline{\mathcal{L}}$ qui est conjugué à $\tilde{M}'$ et fixons $x \in G(F)$ tel que $ad_x(\tilde{M}) = \tilde{M}'$. Pour $\tilde{P}' \in \mathcal{P}(\tilde{M}')$, on définit $\omega_{\tilde{P}'}$ par $\omega_{\tilde{P}'}(X') = \omega_{ad_x^{-1}(\tilde{P}')}(ad_{x^{-1}}(X'))$. Cela ne dépend pas du choix de x et le système de fonctions obtenu vérifie (4).

Enfin, on peut faire varier le groupe ambiant $\tilde{G}$. On suppose des fonctions $\omega_{\tilde{P}}$ fixées comme ci-dessus. Soient $\tilde{L}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{L}$. Il y a une application naturelle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{M}) & \to & \mathcal{P}^{\tilde{L}}(\tilde{M}) \\ \tilde{P} & \mapsto & \tilde{P} \cap \tilde{L}. \end{array}$$

Pour $\tilde{P}' \in \mathcal{P}^{\tilde{L}}(\tilde{M})$, on pose

(5) $\omega_{\tilde{P}'} = \sum_{\tilde{P}} \omega_{\tilde{P}}$,

où l'on somme sur les $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$ tels que $\tilde{P} \cap \tilde{L} = \tilde{P}'$. Ces fonctions vérifient encore les conditions (1), (2) et (4).

Des fonctions $\omega_{\tilde{P}}$ vérifiant les conditions ci-dessus sont désormais fixées pour tout l'article.

1.2 Fonctions rationnelles

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On note $\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^{\vee}$ le sous-groupe des $\lambda \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{*}$ tels que $< \lambda, X > \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M},F}$. On pose $\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^{*} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{*}/\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^{\vee}$. C'est un groupe compact que l'on munit de la mesure de masse totale 1. Le quotient $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M},F}$ s'identifie à un tore complexe, ce qui permet de parler de fonctions polynomiales ou rationnelles sur ce quotient. Considérons une telle fonction rationnelle φ. Supposons qu'il existe une famille finie $(\check{\alpha}_i, c_i)_{i=1,...,n}$ vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout $i = 1, ..., n$, c_i est un nombre complexe et $\check{\alpha}_i$ est une coracine associée à une racine $\alpha_i \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$, normalisée de sorte que $\check{\alpha}_i \in \mathcal{A}_{\tilde{M},F}$;

- la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)\prod_{i=1,...,n}(e^{<\lambda,\check{\alpha}_i>} - c_i)$ est polynomiale.

A cette condition, nous dirons que φ n'a qu'un nombre fini d'hyperplans polaires d'équations de la forme $e^{<\lambda,\check{\alpha}>} = c$, pour $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$.

Remarque. La condition $\check{\alpha}_i \in \mathcal{A}_{\tilde{M},F}$ est nécessaire pour que la fonction $\lambda \mapsto e^{<\lambda,\check{\alpha}_i>}$ soit invariante par $i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M},F}$. Evidemment, cette fonction dépend de la normalisation choisie.

On note $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}}$ l'espace des formes linéaires affines sur l'espace réel $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$. On a donc une suite exacte

$$0 \to \mathbb{R} \to \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}} \to \mathcal{A}^*_{\tilde{M}} \to 0.$$

On ajoute un indice $\mathbb{C}$ pour désigner les complexifiés. On a une suite exacte analogue

$$(1) \qquad 0 \to \mathbb{C} \to \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}} \to \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}} \to 0.$$

On note $\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$ le sous-groupe des $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}}$ tels que $<\tilde{\lambda}, X> \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$. On a une suite exacte

$$0 \to 2\pi\mathbb{Z} \to \tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F} \to \mathcal{A}^\vee_{\tilde{M},F} \to 0.$$

On note usuellement $\tilde{\lambda}$ un élément de $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ et λ sa projection dans $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. Considérons une fonction $\varphi : \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F} \to \mathbb{C}$. Pour $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$, considérons les conditions

(2) le produit $\varphi(\tilde{\lambda})e^{-<\tilde{\lambda},X>}$ ne dépend que de la projection λ.

Ce produit ne dépend alors que de la projection de λ dans $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M},F}$. On note $\lambda \mapsto \varphi(\tilde{\lambda})e^{-<\tilde{\lambda},X>}$ la fonction obtenue sur cet ensemble.

(3) Sous la condition (2), la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\tilde{\lambda})e^{-<\tilde{\lambda},X>}$ est polynomiale ;

(4) sous la condition (2), la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\tilde{\lambda})e^{-<\tilde{\lambda},X>}$ est rationnelle ;

(5) sous la condition (2), la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\tilde{\lambda})e^{-<\tilde{\lambda},X>}$ est rationnelle et n'a qu'un nombre fini d'hyperplans polaires d'équations de la forme $e^{<\lambda,\check{\alpha}>} = c$, pour $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$

Pour un autre point $X' \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$, la fonction $\varphi(\tilde{\lambda})e^{-<\tilde{\lambda},X'>}$ est le produit de $\varphi(\tilde{\lambda})e^{-<\tilde{\lambda},X>}$ et du polynôme $e^{<\lambda,X-X'>}$. Il en résulte que les conditions (2), (3), (4) et (5) ne dépendent pas du choix de X. Plus précisement, sous la condition (5), les hyperplans polaires ne dépendent pas de ce choix. Si φ vérifie (2) et (3), resp. et (4), resp. et (5), nous dirons simplement que φ est polynomiale sur $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$, resp. est rationnelle, resp. est rationnelle et n'a qu'un nombre fini d'hyperplans polaires d'équations de la forme $e^{<\lambda,\check{\alpha}>} = c$, pour $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$.

Une variante de la propriété (2) vaut aussi pour des fonctions φ définies sur le sous-ensemble $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}}/i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$.

On peut scinder la suite exacte (1) en fixant un point $X_0 \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$ et en relevant tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ en l'unique relèvement $\tilde{\lambda}$ tel que $\tilde{\lambda}(X_0) = 0$. Une telle section envoie $\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M},F}$ dans $\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$. Fixons une telle section. Sous la condition (2), on a l'égalité $\varphi(\tilde{\lambda})e^{-<\tilde{\lambda},X>} = \varphi(\lambda)e^{-<\lambda,X>}$.

1.3 L'application ${}^c\phi_{\tilde{M}}$

Fixons un espace de Levi minimal $\tilde{M}_0$ et un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M_0. Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$.

Pour une ω-représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$ et pour $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$, on sait définir la représentation $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}$: on a $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}(x) = e^{<\tilde{\lambda},\tilde{H}_{\tilde{M}}(x)>}\tilde{\pi}(x)$ pour tout $x \in \tilde{M}(F)$. Pour $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))$, la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto trace(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{f}))$ est polynomiale sur $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$.

On a défini en [6] 2.9 l'espace $D_{temp}(\tilde{M}(F),\omega)$ engendré par les caractères de ω-représentations tempérées de $\tilde{M}(F)$.

Remarque. On considère ici les caractères comme des distributions, c'est-à-dire des formes linéaires sur $C_c^\infty(\tilde{M}(F))$. Ils dépendent donc des mesures. Vus comme fonctions localement intégrables, les caractères vivent dans $D_{temp}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$. On note $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},.)$ l'élément de $D_{temp}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ associé à une ω-représentation $\tilde{\pi}$.

On a défini en [6] 2.12 le sous-espace $D_{ell}(\tilde{M}(F),\omega)$ engendré par les caractères de représentations elliptiques. L'induction fournit un isomorphisme

$$D_{temp}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^* =$$

$$\oplus_{\tilde{R}\in\mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)/W^M(\tilde{M}_0)} Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(D_{ell}(\tilde{R}(F),\omega) \otimes Mes(R(F))^*)^{W^M(\tilde{R})}.$$

Soient $\tilde{R} \in \mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$, $\tilde{\pi}$ une ω-représentation elliptique de $\tilde{R}(F)$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$. Pour $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F}$, la fonction

$$\lambda \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f})e^{-<\tilde{\lambda},X>}$$

définie en [6] 2.7 est rationnelle sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{R},\mathbb{C}}/i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{R},F}$. Elle a un nombre fini d'hyperplans polaires d'équations de la forme $e^{<\lambda,\check{\alpha}>} = c$, pour $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{R}})$.

Ces hyperplans ne dépendent pas de X comme on l'a dit en 1.2. Ils ne dépendent pas non plus de $\mathbf{f}$, au sens qu'il existe une famille finie d'hyperplans de la forme indiquée de sorte que, pour tout $\mathbf{f}$, les hyperplans polaires de la fonction ci-dessus appartiennent à cette famille. Soit $\tilde{S} \in \mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{R})$. Fixons un point $\nu_{\tilde{S}} \in \mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$ tel que $< \nu_{\tilde{S}}, \check{\alpha} >$ soit assez grand pour tout $\alpha \in \Sigma^{\tilde{S}}(\tilde{R})$. Alors l'intégrale

$$\int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f})e^{-<\tilde{\lambda},X>}\,d\lambda$$

ne dépend pas du choix de $\nu_{\tilde{S}}$.

Posons

$$(1) \qquad {}^cJ_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),\mathbf{f}) = \sum_{X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F}} \sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{R})} \omega_{\tilde{S}}(X) \int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f})e^{-<\tilde{\lambda},X>}\,d\lambda,$$

où les points $\nu_{\tilde{S}}$ sont choisis comme ci-dessus. Il n'est pas clair que cette somme converge. Il n'est pas non plus clair qu'elle ne dépende que de $Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi})$. Ces deux propriétés sont assurées par la proposition suivante.

Proposition. *(i) L'expression (1) est une somme finie et ne dépend que de* $Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi})$.

(ii) Il existe une unique application linéaire

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F)) & \to & I(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F)) \\ \mathbf{f} & \mapsto & {}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) \end{array}$$

de sorte que, pour tout $\tilde{R} \in \mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$, toute ω-représentation elliptique $\tilde{\pi}$ de $\tilde{R}(F)$ et tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, on ait l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), {}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f})) = {}^cJ_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), \mathbf{f}).$$

Preuve. Fixons des mesures de Haar sur tous les groupes pour nous débarrasser des espaces de mesures. Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. On va commencer par prouver une formule de descente, sous une forme assez générale car cela nous servira ultérieurement. Fixons un espace de Levi $\tilde{M}'$ tel que $\tilde{R} \subset \tilde{M}' \subset \tilde{M}$. On a

$$Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}) = Ind_{\tilde{M}'}^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}})).$$

Utilisons la formule de descente du lemme 5.4(iv) de [6]. On obtient

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}), f) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}')} d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) J_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}), f_{\tilde{Q},\omega}),$$

où $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{L})$ est déterminé par le choix d'un paramètre auxiliaire. Cela transforme (1) en

$${}^cJ_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), f) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}')} d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \mathcal{J}(\tilde{L}),$$

où

$$\mathcal{J}(\tilde{L}) = \sum_{X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F}} \sum_{\tilde{S} \in \mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{R})} \omega_{\tilde{S}}(X) \int_{\nu_{\tilde{S}} + i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}} J_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}), f_{\tilde{Q},\omega}) e^{-<\tilde{\lambda},X>} \, d\lambda.$$

Fixons $\tilde{L}$. Pour $\tilde{S}' \in \mathcal{P}^{\tilde{L}}(\tilde{R})$, fixons un point $\nu_{\tilde{S}'} \in \mathcal{A}^*_{\tilde{R}}$ tel que $< \nu_{\tilde{S}'}, \check{\alpha} >$ soit assez grand pour tout $\alpha \in \Sigma^{\tilde{S}'}(A_{\tilde{R}}) \subset \Sigma^{\tilde{L}}(A_{\tilde{R}})$. Soit $\tilde{S} \in \mathcal{P}(\tilde{R})$, posons $\tilde{S}' = \tilde{S} \cap \tilde{L}$. Alors le segment joignant $\nu_{\tilde{S}}$ à $\nu_{\tilde{S}'}$ est formé de points ν tels que $< \nu, \check{\alpha} >$ est grand pour toute racine $\alpha \in \Sigma^{\tilde{S}'}(A_{\tilde{R}})$. Il ne coupe aucun hyperplan polaire de la fonction $J_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}), f_{\tilde{Q},\omega}) e^{-<\tilde{\lambda},X>}$. On peut donc déplacer le contour d'intégration et remplacer l'intégrale sur $\nu_{\tilde{S}} + i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}$ par celle sur $\nu_{\tilde{S}'} + i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}$. La somme sur les $\tilde{S}$ devient une somme sur les $\tilde{S}'$ d'intégrales ne dépendant que de $\tilde{S}'$ et de la somme

$$\sum_{\tilde{S}; \tilde{S} \cap \tilde{L} = \tilde{S}'} \omega_{\tilde{S}}(X).$$

D'après 1.1(5), ceci n'est autre que $\omega_{\tilde{S}'}(X)$. On obtient alors

$$\mathcal{J}(\tilde{L}) = {}^cJ_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}), f_{\tilde{Q},\omega}).$$

Nous retenons la formule obtenue

$$(2) \qquad {}^cJ_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), f) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}')} d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) {}^cJ_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}), f_{\tilde{Q},\omega}).$$

Le calcul ci-dessus est formel puisqu'on n'a pas encore prouvé que les sommes étaient convergentes. Mais il entraîne que, pour démontrer cette convergence, plus précisément pour démontrer que les sommes sont finies, il suffit de le faire pour chaque terme de la somme ci-dessus. En appliquant ceci au cas $\tilde{M}' = \tilde{R}$, on est ramené au cas où $\tilde{R} = \tilde{M}$. Dans ce cas, fixons $\tilde{S} \in \mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{M})$. On voit que l'intégrale figurant dans (1) n'est non nulle que si la projection $X_{\tilde{G}}$ de X dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ appartient à la projection du support de f. Cette projection est finie puisque f est à support compact. On peut donc décomposer la somme en X selon cette projection et prouver que la somme en les X ayant une projection $X_{\tilde{G}}$ fixée est finie. Fixons comme en 1.2 une section de la projection $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}} \to \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. La fonction

$$\lambda \mapsto J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$$

est rationnelle. Pour $|Re(\lambda)|$ assez grand, elle vérifie une majoration

$$|J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)| \leq c_1 e^{C_1|Re(\lambda)|}$$

pour des constantes positives convenables c_1 et C_1. Faisons tendre le point $\nu_{\tilde{S}}$ vers l'infini de sorte que $|\nu_{\tilde{S}}|$ reste équivalent à $< \nu_{\tilde{S}}, \check{\alpha} >$ pour tout $\alpha \in \Sigma^{\tilde{S}}(A_{\tilde{M}})$. Puisque les $< \alpha, X >$ sont minorés pour de tels α quand $\omega_{\tilde{S}}(X) \neq 0$, il existe des nombres réels strictement positifs c_1, C_2 et C_3 de sorte que

$$|e^{<\lambda,X>}| \leq c_2 e^{C_2|\lambda| - C_3|X||\lambda|}$$

pour X tel que $\omega_{\tilde{S}}(X) \neq 0$ et que la projection $X_{\tilde{G}}$ soit fixée. En faisant tendre $\nu_{\tilde{S}}$ vers l'infini, l'intégrale devient nulle pourvu que $C_3|X| > C_1 + C_2$. Or il n'y a qu'un nombre fini de X vérifiant les conditions précédentes et ne vérifiant pas cette inégalité. Cela démontre que la somme en X est finie.

On doit prouver que la somme (1) ne dépend que de $Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi})$. C'est-à-dire, fixons $x \in M(F)$ tel que $ad_x(\tilde{R}) \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. On doit voir que le membre de droite de (1) ne change pas si l'on remplace $\tilde{R}$ par $ad_x(\tilde{R})$ et $\tilde{\pi}$ par $\tilde{\pi} \circ ad_x^{-1}$. On vérifie immédiatement qu'un terme indexé par X et $\tilde{S}$ de la formule (1) est égal au terme de la nouvelle formule indexé par $ad_x(X)$ et $ad_x(\tilde{S})$.

Pour démontrer (ii), on utilise le théorème de Paley-Wiener ([4] théorème 3.3, repris en [6] théorème 6.1). On doit d'abord prouver une propriété de finitude. A savoir que, pour tout $\tilde{R}$, il existe un ensemble fini Ξ de ω-représentations elliptiques de $\tilde{R}(F)$ tel que, si $\tilde{\pi}$ vérifie ${}^cJ^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}), f) \neq 0$, alors il existe $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{R}}$ de sorte que $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}} \in \Xi$. Puisque f est biinvariante par un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$, il existe aussi un sous-groupe ouvert compact de $R(F)$ tel que la non-nullité de ${}^cJ^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}), f)$ entraîne que π admet des invariants non nuls par ce compact. Or, à torsion près par $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{R}}$, il n'existe qu'un nombre fini de ω-représentations elliptiques de $\tilde{R}(F)$ vérifiant cette propriété. D'où la finitude requise. Fixons $\tilde{R}$ et $\tilde{\pi}$. Fixons aussi un scindage $\mathcal{A}^*_{\tilde{R}} \to \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{R}}$. On doit montrer que la fonction

$$\mu \mapsto {}^cJ^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}_\mu), f)$$

est de Paley-Wiener sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}$. Par un changement de variables, on a

$${}^cJ^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}_\mu), \mathbf{f}) = \sum_{X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F}} \sum_{\tilde{S} \in \mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{R})} \omega_{\tilde{S}}(X) e^{<\mu,X>} \int_{\nu_{\tilde{S}} + i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}), \mathbf{f}) e^{-<\tilde{\lambda},X>} \, d\lambda.$$

Le raisonnement fait ci-dessus montre que la somme en X est finie indépendamment de μ. Donc, comme fonction de μ, l'expression ci-dessus est une somme finie de termes $e^{<\mu,X>}$. C'est donc une fonction de Paley-Wiener. Cela achève la démonstration. $\square$

1.4 Propriétés de l'application ${}^c\phi_{\tilde{M}}$

On fixe $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Conformément à nos habitudes, on ajoute un exposant $\tilde{G}$ si besoin est pour indiquer l'espace ambiant : ${}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ au lieu de ${}^c\phi_{\tilde{M}}$.

Soit $\tilde{M}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, supposons $\tilde{M}' \subset \tilde{M}$. Pour $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, on a

$$(1) \qquad ({}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{M}',\omega} = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}')} d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) {}^c\phi_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}(\mathbf{f}_{\tilde{Q},\omega}),$$

où $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{L})$ est déterminé par le choix d'un paramètre auxiliaire.

Preuve. Soit $\tilde{R} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_0)$ avec $\tilde{R} \subset \tilde{M}'$ et soit $\tilde{\pi}$ une ω-représentation elliptique de $\tilde{R}(F)$. On doit prouver que la distribution $I^{\tilde{M}'}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}), .)$ prend la même valeur sur les deux membres de (1). Par définition de l'induction, on a

$$I^{\tilde{M}'}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}), ({}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{M}',\omega}) = I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), {}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$$

$$= {}^cJ_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), \mathbf{f}).$$

C'est le membre de gauche de 1.3(2). On voit aussi que la valeur de $I^{\tilde{M}'}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}), .)$ sur le membre de droite de (1) est le membre de droite de 1.3(2). Cette égalité 1.3(2) conclut. $\square$

Pour $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, $y \in G(F)$ et $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}(\tilde{M}_0)$, Arthur définit en [2] paragraphe 3 une fonction $\mathbf{f}_{\tilde{Q},y} \in C_c^\infty(\tilde{L}(F)) \otimes Mes(L(F))$ (il convient de glisser dans la définition notre caractère ω). Pour $\tilde{Q} = \tilde{G}$, on a simplement $\mathbf{f}_{\tilde{Q},y} = \mathbf{f}$. On a

$$(2) \qquad \omega(y)^{-1c}\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f} \circ ad_y) = \sum_{\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}(\tilde{M})} {}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\mathbf{f}_{\tilde{Q},y}).$$

Preuve. Soit $\tilde{R} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_0)$ avec $\tilde{R} \subset \tilde{M}$ et soit $\tilde{\pi}$ une ω-représentation elliptique de $\tilde{R}(F)$. On doit prouver que la distribution $I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), .)$ prend la même valeur sur les deux membres de (1). Il revient au même de prouver que

$$(3) \qquad \omega(y)^{-1c}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), \mathbf{f} \circ ad_y) = \sum_{\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}(\tilde{M})} {}^cJ_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), \mathbf{f}_{\tilde{Q},y}).$$

Le membre de gauche est défini par 1.3(1) où l'on remplace $\mathbf{f}$ par $\mathbf{f} \circ ad_y$. On utilise la formule

$$\omega(y)^{-1}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}), \mathbf{f} \circ ad_y) = \sum_{\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}(\tilde{M})} J_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}), \mathbf{f}_{\tilde{Q},y}),$$

cf. [3] lemme 6.2. On obtient

$$(4) \qquad \omega(y)^{-1c}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}), \mathbf{f} \circ ad_y) = \sum_{\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}(\tilde{M})} \sum_{X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F}} \sum_{\tilde{S} \in \mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{R})} \omega_{\tilde{S}}(X)$$

$$\int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}} J^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f}_{\tilde{Q},y})e^{-<\tilde{\lambda},X>}\,d\lambda.$$

Fixons $\tilde{L}$. Pour la même raison que dans la preuve de 1.3(2), on peut remplacer un point $\nu_{\tilde{S}}$ par $\nu_{\tilde{S}'}$, où $\tilde{S}'=\tilde{S}\cap\tilde{L}$. La somme en $\tilde{S}$ devient une somme en $\tilde{S}'\in\mathcal{P}^{\tilde{L}}(\tilde{R})$ d'une intégrale ne dépendant que de $\tilde{S}'$ et de la somme

$$\sum_{\tilde{S};\tilde{S}\cap\tilde{L}=\tilde{S}'}\omega_{\tilde{S}}(X).$$

D'après 1.1(5), ceci n'est autre que $\omega_{\tilde{S}'}(X)$. Alors le membre de droite de (4) devient celui de (3). Cela achève la preuve. $\square$

Soit b une fonction sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, à valeurs complexes. Pour tout $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$, on a

(5) ${}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}}))=({}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}})$.

Preuve. Il revient au même de dire que, pour $Y\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, si $\mathbf{f}$ est supportée par l'ensemble des $\gamma\in\tilde{G}(F)$ tels que $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma)=Y$, alors ${}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est supportée par l'ensemble des $\gamma\in\tilde{M}(F)$ tels que $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma)=Y$. Fixons donc Y et une fonction $\mathbf{f}$ vérifiant la condition de support ci-dessus. Par transformation de Fourier, la conclusion espérée équivaut à ce que, pour toute ω-représentation tempérée $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{M}(F)$ et tout $\tilde{\mu}\in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}$, on a l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}},{}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=e^{<\tilde{\mu},Y>}I^{\tilde{M}}(\tilde{\sigma},{}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f})).$$

On peut supposer que $\tilde{\sigma}=Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}$, où $\tilde{R}\in\mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\pi}$ est une ω-représentation elliptique de $\tilde{R}(F)$. On doit alors prouver que

$${}^cJ^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mu}}),\mathbf{f})=e^{<\tilde{\mu},Y>c}J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}),\mathbf{f}).$$

Il suffit pour cela d'utiliser la définition 1.3(1) et la relation facile

$$J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}}),\mathbf{f})=e^{<\tilde{\mu},Y>}J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f}),$$

qui résulte de l'hypothèse sur le support de $\mathbf{f}$. $\square$

On a défini en [II] 1.6 l'espace $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F))$ des fonctions $f:\tilde{G}(F)\to\mathbb{C}$ qui sont biinvariantes par un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$ et qui vérifient $f(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}})\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ pour tout $b\in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$ (ce dernier espace n'est autre que l'espace des fonctions sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ à support fini). On a aussi défini l'espace $I_{ac}(\tilde{G}(F),\omega)$. C'est le quotient de $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F))$ par le sous-espace des éléments dont toutes les intégrales orbitales sont nulles. On a

(6) l'application ${}^c\phi_{\tilde{M}}$ s'étend de façon unique en une application linéaire

$$C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))\to I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$$

qui vérifie encore (5).

Preuve. Un élément $\mathbf{f}\in C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$ s'écrit de façon unique $\mathbf{f}=\sum_{Y\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}}\mathbf{f}_Y$, où $\mathbf{f}_Y$ est supportée par l'ensemble des $\gamma\in\tilde{G}(F)$ tels que $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma)=Y$. La seule définition de ${}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ qui soit compatible avec (5) est

$${}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f})=\sum_{Y\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}}{}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}_Y).$$

Justement, (5) assure la convergence de cette expression. Pour que la somme appartienne à $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$, il faut prouver qu'il existe un sous-groupe ouvert compact de $M(F)$ tel que, pour tout Y, ${}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}_Y)$ soit l'image d'un élément de $C_c^\infty(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))$ qui soit biinvariant par le sous-groupe en question. On a vu dans la preuve de la proposition 1.3 que, pour tout Y, il y avait un sous-groupe ouvert compact de $M(F)$ tel que ${}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}_Y)$ soit l'image d'un élément de $C_c^\infty(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))$ qui soit biinvariant par ce sous-groupe. Cette preuve fournit plus : ce sous-groupe ne dépend que d'un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$ tel que $\mathbf{f}_Y$ soit elle-même invariante par ce sous-groupe. Par définition de $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F))$, on peut choisir ce dernier sous-groupe indépendant de Y. Le sous-groupe de $M(F)$ qu'on en déduit est donc lui-aussi indépendant de Y. $\square$

Pour $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $z\in Z(G;F)^\theta$, on note f^z la fonction $\gamma\mapsto f(z\gamma)$. Pour $\mathbf{f}=f\otimes dg\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$, on pose $\mathbf{f}^z=f^z\otimes dg$. Soit Z un sous-groupe de $Z(G)^\theta$. Notons $\mathcal{Z}$ l'image dans $\mathcal{A}_{\tilde{G},F}$ de $Z(F)$ par l'application $H_{\tilde{G}}$. Supposons

(7) pour tout espace parabolique $\tilde{S}=\tilde{L}U_S$ de $\tilde{G}$, tout $X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}}$ et tout $H\in\mathcal{Z}$, on a l'égalité $\omega_{\tilde{S}}(X+H)=\omega_{\tilde{S}}(X)$.

Montrons que

(8) sous l'hypothèse (7), on a l'égalité ${}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}^z)=({}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))^z$ pour tout $z\in Z(F)$ et tout $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$.

Preuve. Soient $\tilde{R}$ un espace de Levi contenu dans $\tilde{M}$ et $\tilde{\pi}$ une ω-représentation elliptique de $\tilde{R}(F)$. On doit prouver que la distribution $I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),.)$ prend la même valeur sur les deux membres de l'égalité à démontrer. Notons μ le caractère central de π (rappelons que π n'est pas irréductible en général, mais toutes ses composantes irréductibles ont même caractère central). On a immédiatement

$$I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),({}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))^z)=\mu(z)^{-1}I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),{}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))=\mu(z)^{-1c}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),\mathbf{f})).$$

On a aussi

$$I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),{}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}^z))={}^cJ_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),\mathbf{f}^z)$$
$$=\sum_{X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F}}\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{R})}\omega_{\tilde{S}}(X)\int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f}^z)e^{-<\tilde{\lambda},X>}\,d\lambda.$$

On a

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f}^z)=\mu(z)^{-1}e^{-<\lambda,H>}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f}),$$

où $H=H_{\tilde{G}}(z)$. D'où

$$\int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f}^z)e^{-<\tilde{\lambda},X>}\,d\lambda=\mu(z)^{-1}\int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f})e^{-<\tilde{\lambda},X+H>}\,d\lambda.$$

En changeant X en $X-H$, on obtient

$$I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),{}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}^z))=\mu(z)^{-1}\sum_{X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F}}\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{R})}\omega_{\tilde{S}}(X-H)$$
$$\int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{R},F}}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}),\mathbf{f})e^{-<\tilde{\lambda},X>}\,d\lambda.$$

L'hypothèse (7) nous permet de faire disparaître H de cette formule et on obtient

$$I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),{}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}^z))=\mu(z)^{-1c}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),\mathbf{f}).$$

Cela prouve l'égalité souhaitée. $\square$

Soit μ un caractère de $G(F)$ invariant par θ (c'est-à-dire $\mu\circ ad_\gamma=\mu$ pour tout $\gamma\in\tilde{G}(F)$). Soit $\tilde{\mu}$ une fonction non nulle sur $\tilde{G}(F)$ telle que $\tilde{\mu}(x\gamma)=\mu(x)\tilde{\mu}(\gamma)$ pour tous $x\in G(F)$ et $\gamma\in\tilde{G}(F)$. On a

(9) ${}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}\tilde{\mu})=\tilde{\mu}{}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$.

Preuve. Soient $\tilde{R}$ et $\tilde{\pi}$ comme dans la preuve précédente. Le produit $\tilde{\pi}\tilde{\mu}$ est encore une ω-représentation elliptique de $\tilde{R}(F)$. On vérifie aisément que

$$I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),{}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}\tilde{\mu}))=I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}\tilde{\mu}),{}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=I^{\tilde{M}}(Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}),\tilde{\mu}{}^c\phi_{\tilde{M}}(\mathbf{f})).$$

D'où (9). $\square$

1.5 Définition de l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}$

Soit $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Nous allons définir une application linéaire

$${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}:C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))\to I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F)).$$

Comme toujours, on a besoin d'en connaître une propriété par récurrence. A savoir qu'elle est ω-équivariante, c'est-à-dire qu'elle se quotiente en une application linéaire définie sur $I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$. On peut alors poser par récurrence la définition

$$(1)\qquad {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})=\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$$

pour tout $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. Le terme $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$ est celui défini en [6] 6.4.

Prouvons la propriété d'équivariance.

Proposition. *L'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ se quotiente en une application linéaire définie sur $I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$.*

Preuve. On doit prouver que, pour tout $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$ et tout $y\in G(F)$, on a l'égalité

$$\omega(y)^{-1c}\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}\circ ad_y)={}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}).$$

On utilise la relation 1.4(2). On sait que l'application $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ vérifie la même relation. D'après la définition (1), on obtient

$$\omega(y)^{-1c}\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}\circ ad_y)=\sum_{\tilde{Q}'=\tilde{L}'U_{Q'}\in\mathcal{F}(\tilde{M})}\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(\mathbf{f}_{\tilde{Q}',y})$$

$$-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}\ \sum_{\tilde{Q}'=\tilde{L}'U_{Q'}\in\mathcal{F}(\tilde{L})}{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{L}'}(\mathbf{f}_{\tilde{Q}',y}))$$

$$=\sum_{\tilde{Q}'=\tilde{L}'U_{Q'}\in\mathcal{F}(\tilde{M}),\tilde{Q}'\neq\tilde{G}}\left(\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(\mathbf{f}_{\tilde{Q}',y})-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{L}'}(\tilde{M})}{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{L}'}(\mathbf{f}_{\tilde{Q}',y}))\right)$$

$$+\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}_{\tilde{G},y}) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}} {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}_{\tilde{G},y})).$$

La première somme est nulle d'après la définition (1) appliquée avec $\tilde{G}$ remplacé par $\tilde{L}'$. Comme on l'a dit, on a $\mathbf{f}_{\tilde{G},y} = \mathbf{f}$ et la deuxième somme est égale à ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$. Cela conclut. $\square$

On montre facilement que l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ se prolonge en une application définie sur $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, qui se quotiente en une application définie sur $I_{ac}(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$. Nous laissons ce point au lecteur.

1.6 Propriétés de l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$

On a fixé un espace de Levi minimal $\tilde{M}_0$ et un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M_0. On a alors défini l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ pour un espace de Levi $\tilde{M}$ contenant $\tilde{M}_0$. L'espace $\tilde{M}_0$ étant fixé, on montre qu'elle ne dépend pas de K. L'argument est que, quand on remplace K par un autre groupe compact spécial K' en bonne position relativement à M_0, les ingrédients basiques $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma},\mathbf{f})$ de toutes nos distributions sont changés en d'autres qui se déduisent des premiers par une formule de la même forme que 1.4(2). Un raisonnement similaire à celui de la preuve de la proposition précédente permet alors de conclure. Nous renvoyons pour plus de détails à [2] proposition 13.2. Cela étant, ajoutons pour un instant l'espace $\tilde{M}_0$ dans la notation : ${}^c\theta_{\tilde{M},\tilde{M}_0}^{\tilde{G}}$ au lieu de ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Par simple transport de structure, on a une égalité

$$(1)\qquad {}^c\theta_{\tilde{M},\tilde{M}_0}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}\circ ad_y) = ({}^c\theta_{ad_y(\tilde{M}),ad_y(\tilde{M}_0)}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))\circ ad_y$$

pour tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$ et tout $y \in G(F)$. Pour $y \in M(F)$, grâce à la proposition précédente, cette égalité devient

$$\omega(y)^c\theta_{\tilde{M},\tilde{M}_0}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = \omega(y)^c\theta_{\tilde{M},ad_y(\tilde{M}_0)}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}).$$

Il en résulte que notre application ${}^c\theta_{\tilde{M},\tilde{M}_0}^{\tilde{G}}$ ne change pas quand on remplace $\tilde{M}_0$ par $ad_y(\tilde{M}_0)$. Puisque tous les espaces de Levi minimaux contenus dans $\tilde{M}$ sont conjugués par un élément de $M(F)$, cette application ne dépend pas de $\tilde{M}_0$. Cet espace peut de nouveau disparaître de la notation. D'autre part, l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ peut être définie pour tout $\tilde{M}$ puisque, un tel espace de Levi étant fixé, on peut toujours choisir un $\tilde{M}_0$ minimal contenu dans $\tilde{M}$.

On fixe un espace de Levi $\tilde{M}$ quelconque. Le groupe $W(\tilde{M})$ agit naturellement sur $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)$. Rappelons la définition de cette action. Notons $Norm_{G(F)}(\tilde{M})$ le normalisateur de $\tilde{M}$ dans $G(F)$. On définit une action de ce groupe sur l'espace des fonctions sur $\tilde{M}(F)$: à $n \in Norm_{G(F)}(\tilde{M})$ et à une fonction φ sur $\tilde{M}(F)$, on associe la fonction $n\varphi$ sur $\tilde{M}(F)$ définie par $(n\varphi)(\gamma) = \omega(n)\varphi(n^{-1}\gamma n)$. De cette action se déduit une action de $Norm_{G(F)}(\tilde{M})$ sur $I(\tilde{M}(F),\omega)$ et $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)$. Sur ces espaces, l'action du sous-groupe $M(F) \subset Norm_{G(F)}(\tilde{M})$ est triviale et l'action se quotiente en une action du quotient $W(\tilde{M})$. Par tensorisation avec l'action triviale de ce groupe sur $Mes(M(F))$, on obtient une action de $W(\tilde{M})$ sur $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))$. On peut appliquer (1) à un élément y qui normalise $\tilde{M}$. On obtient le résultat suivant

(2) ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ prend ses valeurs dans le sous-espace des éléments de $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$ qui sont invariants par $W(\tilde{M})$.

Soit b une fonction sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, à valeurs complexes. Pour tout $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité

$$(3)\qquad {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}}))=({}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}}).$$

Cela résulte par récurrence de 1.4(5) et de la relation similaire vérifiée par l'application $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$.

Soit Z un sous-groupe de $Z(G)^\theta$. On a

(4) sous l'hypothèse 1.4(7), on a l'égalité ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}^z)=({}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))^z$ pour tout $z\in Z(F)$ et tout $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G)$.

Cela résulte par récurrence de 1.4(8) et de la relation similaire vérifiée par l'application $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ (dans le cas de $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, cette propriété est indépendante de l'hypothèse 1.4(7)).

Soit $\tilde{\mu}$ un "caractère affine" comme en 1.4(9). On a de même

(5) ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}\tilde{\mu})=\tilde{\mu}\,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$ pour tout $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G)$.

Lemme. *Soit $\tilde{M}'$ un espace de Levi contenu dans $\tilde{M}$. Pour tout $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité*

$$({}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{M}',\omega}=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}')}d_{\tilde{M}'}(\tilde{M},\tilde{L})\,{}^c\theta_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

Preuve. On applique la formule de définition 1.5(1) et on lui applique l'application "terme constant" relative à $\tilde{M}'$. On obtient l'égalité

$$(\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{M}',\omega}=\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{M})}({}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}({}^c\phi_{\tilde{L}_1}(\mathbf{f})))_{\tilde{M}',\omega}.$$

Pour un terme de la somme indexé par $\tilde{L}_1\neq\tilde{G}$, on peut utiliser par récurrence la formule du présent énoncé. Pour le terme indexé par $\tilde{L}_1=\tilde{G}$, on ne peut pas. Mais on peut quand même, à condition d'ajouter la différence entre les deux membres de cet énoncé. Précisément, posons

$$X=({}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{M}',\omega}-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}')}d_{\tilde{M}'}(\tilde{M},\tilde{L})\,{}^c\theta_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

On obtient alors

$$(\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{M}',\omega}=X+\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M}'),\tilde{L}_2\subset\tilde{L}_1}d_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M},\tilde{L}_2)\,{}^c\theta_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_2}(({}^c\phi_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{L}_2,\omega}).$$

Utilisons la relation 1.4(1) et la relation analogue concernant l'application $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On obtient

$$(6)\qquad \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}')}d_{\tilde{M}'}(\tilde{M},\tilde{L})\phi_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}(\mathbf{f}_{\tilde{Q},\omega})=X+Y,$$

où

$$Y=\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M}'),\tilde{L}_2\subset\tilde{L}_1}d_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M},\tilde{L}_2)\sum_{\tilde{L}_3\in\mathcal{L}(\tilde{L}_2)}d_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_3)\,{}^c\theta_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_2}({}^c\phi_{\tilde{L}_2}^{\tilde{L}_3}(\mathbf{f}_{\tilde{Q}_3,\omega})).$$

Revenons sur la définition des espaces $\tilde{Q}$ et $\tilde{Q}_3$ qui interviennent ici. On fixe un point $\xi \in \mathcal{A}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}$ en position générale. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}')$ tel que $d_{\tilde{M}'}(\tilde{M}, \tilde{L}) \neq 0$. On a alors la décomposition

$$\mathcal{A}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}.$$

Conformément à celle-ci, on projette ξ en un point $\xi[\tilde{L}] \in \mathcal{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$. L'espace parabolique $\tilde{Q}$ est l'unique élément de $\mathcal{P}(\tilde{L})$ tel que $\xi[\tilde{L}]$ appartienne à la chambre positive associée à $\tilde{Q}$. De même, fixons $\tilde{L}_1 \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, $\tilde{L}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{M}')$ avec $\tilde{L}_2 \subset \tilde{L}_1$ et $d_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M}, \tilde{L}_2) \neq 0$. Fixons un point $\xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \in \mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}$ en position générale. Soit $\tilde{L}_3 \in \mathcal{L}(\tilde{L}_2)$ tel que $d_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_3) \neq 0$. On a alors la décomposition

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}_3}^{\tilde{G}}.$$

Conformément à celle-ci, on projette $\xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ en un point $\xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)[\tilde{L}_3] \in \mathcal{A}_{\tilde{L}_3}^{\tilde{G}}$. L'espace parabolique $\tilde{Q}_3$ est l'unique élément de $\mathcal{P}(\tilde{L}_3)$ tel que $\xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)[\tilde{L}_3]$ appartienne à la chambre positive associée à $\tilde{Q}_3$. Le point ξ étant fixé, nous allons choisir le point $\xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ de la façon suivante. On note comme toujours $\xi_{\tilde{L}_1}$ et $\xi^{\tilde{L}_1}$ les projections orthogonales sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_1}$. On a supposé $d_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M}, \tilde{L}_2) \neq 0$. On a donc la décomposition

$$\mathcal{A}_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_1} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{L}_1}.$$

On peut décomposer conformément $\xi^{\tilde{L}_1}$ en $\xi^{\tilde{L}_1}[\tilde{M}] + \xi^{\tilde{L}_1}[\tilde{L}_2]$. On choisit $\xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) = \xi_{\tilde{L}_1} + \xi^{\tilde{L}_1}[\tilde{L}_2] = \xi - \xi^{\tilde{L}_1}[\tilde{M}]$.

On récrit la définition

$$Y = \sum_{\tilde{L}_3 \in \mathcal{L}(\tilde{M}')} \sum_{\tilde{L}_2 \in \mathcal{L}^{\tilde{L}_3}(\tilde{M}')} Y(\tilde{L}_2, \tilde{L}_3),$$

où

$$(7) \qquad Y(\tilde{L}_2, \tilde{L}_3) = \sum_{\tilde{L}_1 \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L}_2 \subset \tilde{L}_1} d_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M}, \tilde{L}_2) d_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_3)^c \theta_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_2}({}^c\phi_{\tilde{L}_2}^{\tilde{L}_3}(\mathbf{f}_{\tilde{Q}_3,\omega})).$$

Fixons $\tilde{L}_2$ et $\tilde{L}_3$. On a vu en [II] 1.7(5) que la somme ci-dessus en $\tilde{L}_1$ était vide si $d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}_3) = 0$. Si $d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}_3) \neq 0$, la somme est réduite à un seul élément pour lequel

$$d_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M}, \tilde{L}_2) d_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_3) = d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}_3).$$

L'unique élément $\tilde{L}_1$ de la somme est caractérisé par l'égalité

$$(8) \qquad \mathcal{A}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} \cap \mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}.$$

Supposons $d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}_3) \neq 0$. Dans (7) apparaît un espace parabolique $\tilde{Q}_3$. En posant $\tilde{L} = \tilde{L}_3$, cet espace de Levi intervient dans le membre de gauche de la formule (6) et il lui est associé un espace parabolique $\tilde{Q}$. Montrons que

(9) $\tilde{Q}_3 = \tilde{Q}$.

D'après la construction rappelée ci-dessus, il suffit de prouver que $\xi[\tilde{L}] = \xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)[\tilde{L}_3]$. On a

$$\xi[\tilde{L}] \in \xi + \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} = \xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) + \xi^{\tilde{L}_1}[\tilde{M}] + \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} = \xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) + \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$$

puisque $\xi^{\tilde{L}_1}[\tilde{M}] \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Les éléments $\xi[\tilde{L}]$ et $\xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ appartenant tous deux à $\mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}$, la relation précédente se renforce en

$$\xi[\tilde{L}] \in \xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) + \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} \cap \mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}},$$

ou encore, d'après (8), en

$$\xi[\tilde{L}] \in \xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) + \mathcal{A}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}.$$

Alors $\xi[\tilde{L}]$ appartient à l'intersection de cet espace affine avec $\mathcal{A}_{\tilde{L}_3}^{\tilde{G}}$. Or cette intersection est réduite au point $\xi(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)[\tilde{L}_3]$. Cela prouve (9).

Modifions les notations en remplaçant $\tilde{L}_3$ par $\tilde{L}$ et $\tilde{L}_2$ par $\tilde{L}'$. On obtient

$$Y(\tilde{L}', \tilde{L}) = d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L})^c\theta_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}'}({}^c\phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{L}}(\mathbf{f}_{\tilde{Q},\omega}))$$

puis

$$Y = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{L}}(\tilde{M}')} {}^c\theta_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}'}({}^c\phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{L}}(\mathbf{f}_{\tilde{Q},\omega})).$$

Reportons cette relation dans la formule (6). Les termes indexés par $\tilde{L}$ de chaque côté de la formule sont égaux par définition des applications ${}^c\theta_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}}$. On obtient simplement $X = 0$. C'est ce qu'affirme l'énoncé. $\square$

1.7 Fonctions de Schwartz

Soit $\tilde{\pi}$ une ω-représentation tempérée de $\tilde{G}(F)$. Pour une fonction $\boldsymbol{\varphi} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$, la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, \boldsymbol{\varphi})$ est bien définie pour tout $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},\mathbb{C}}^*/i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}^\vee$. C'est une fonction polynomiale sur cet espace. Pour $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, on définit le coefficient de Fourier

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \boldsymbol{\varphi}) = \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*} I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, \boldsymbol{\varphi}) e^{-<\tilde{\lambda}, X>} \, d\lambda.$$

Comme en 1.2, le terme $\tilde{\lambda}$ apparaissant dans l'intégrale est un relèvement quelconque de λ dans $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}^*$. On a les égalités

$$(1) \qquad I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \boldsymbol{\varphi}) = I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, (\mathbf{1}_X \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})\boldsymbol{\varphi}),$$

où $\mathbf{1}_X$ est la fonction caractéristique de X dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ et

$$(2) \qquad I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, \boldsymbol{\varphi}) = \sum_{X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}} e^{<\tilde{\lambda}, X>} I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \boldsymbol{\varphi})$$

pour tout $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},\mathbb{C}}^*/i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}^\vee$. Cette somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Pour une fonction $\boldsymbol{\varphi} \in I_{ac}(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$, on ne peut plus en général définir la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, \boldsymbol{\varphi})$. Par contre, pour $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, on peut définir le coefficient de Fourier $I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \boldsymbol{\varphi})$, cf. [6] 6.4. Dans notre cas où le corps de base est non-archimédien, il est défini par la formule (1) : le membre de droite de cette formule a un sens puisque la fonction $(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{G}})\boldsymbol{\varphi}$ est à support compact. Nous dirons que $\boldsymbol{\varphi}$ est de Schwartz si, pour toute ω-représentation tempérée $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(F)$, la fonction

$$(3)\qquad X\mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},X,\boldsymbol{\varphi})$$

est à décroissance rapide sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$. Dans ce cas, on peut définir une fonction $\tilde{\lambda}\mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},\boldsymbol{\varphi})$ sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{G},F}$ par la formule d'inversion de Fourier

$$(4)\qquad I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},\boldsymbol{\varphi})=\sum_{X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}}e^{<\tilde{\lambda},X>}I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},X,\boldsymbol{\varphi}).$$

C'est une fonction C^∞ de $\tilde{\lambda}$. Inversement, supposons que, pour tout $\tilde{\pi}$, il existe une fonction C^∞ sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{G},F}$ vérifiant la condition 1.2(2) et dont la fonction (3) soit la transformée de Fourier. Alors cette fonction (3) est à décroissance rapide, donc $\boldsymbol{\varphi}$ est de Schwartz.

Pour une fonction de Schwartz $\boldsymbol{\varphi}$, il arrive que la fonction (4) définie sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{G},F}$ se prolonge en une fonction rationnelle sur $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{G},F}$. Supposons qu'il en soit ainsi. On note encore $\tilde{\lambda}\mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},\boldsymbol{\varphi})$ ce prolongement. Soit $\nu\in\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ un élément tel que cette fonction n'ait pas de pôle sur l'ensemble des éléments $\tilde{\lambda}\in\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ tels que $Re(\lambda)=\nu$. Pour $X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, on pose

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\nu,X,\boldsymbol{\varphi})=\int_{\nu+i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}}I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},\boldsymbol{\varphi})e^{-<\tilde{\lambda},X>}\,d\lambda.$$

On a la formule d'inversion

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},\boldsymbol{\varphi})=\sum_{X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}}e^{<\tilde{\lambda},X>}I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\nu,X,\boldsymbol{\varphi})$$

pour tout $\tilde{\lambda}\in\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{G},F}$ tel que $Re(\lambda)=\nu$.

Remarque. L'hypothèse sur $\boldsymbol{\varphi}$ n'implique nullement que le membre de droite de (4) soit convergent pour $\tilde{\lambda}\not\in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{G},F}$. Même s'il l'est, la fonction prolongée n'a pas de raison d'être égale à ce membre de droite.

1.8 Une propriété d'annulation

On fixe un espace de Levi $\tilde{M}$. Soit $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$. On a

(1) la fonction ${}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est de Schwartz ;

(2) soit $\tilde{\pi}$ une ω-représentation tempérée de $\tilde{M}(F)$; la fonction $\tilde{\lambda}\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$ sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{M},F}$ est la restriction d'une fonction rationnelle sur $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{M},F}$; celle-ci a un nombre fini d'hyperplans polaires d'équations $e^{<\lambda,\check{\alpha}>}=c$, pour $\alpha\in\Sigma(A_{\tilde{M}})$.

Le signification de ces assertions a été expliquée en 1.2.

Preuve. Relevons $\mathbf{f}$ en un élément de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. En utilisant la définition 1.5(1), il suffit par récurrence de prouver que la fonction $\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ vérifie les mêmes propriétés. Or, soit $\tilde{\pi}$ une ω-représentation tempérée de $\tilde{M}(F)$. Par définition, la fonction

$X\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$ est la transformée de Fourier de la fonction $\tilde{\lambda}\mapsto J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}},\mathbf{f})$ sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{M},F}$. Celle-ci est C^∞ et se prolonge en une fonction rationnelle sur $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{M},F}$ dont les pôles ont la propriété indiquée en (2). Cela prouve les assertions (1) et (2). $\square$

On utilise les définitions et notations de 1.7 pour la fonction $\tilde{\lambda}\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$.

Proposition. *Supposons $\tilde{M}\neq\tilde{G}$ et $\tilde{\pi}$ elliptique. Pour tout $\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$, fixons un point $\nu_{\tilde{S}}$ comme en 1.3. Supposons ce point "assez positif" pour $\tilde{S}$, cette notion dépendant de la représentation $\tilde{\pi}$. Alors on a l'égalité*

$$\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}\omega_{\tilde{S}}(X)I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu_{\tilde{S}},X,{}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=0$$

pour tout $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$ et tout $X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$.

Preuve. On relève $\mathbf{f}$ en un élément de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. On utilise la définition 1.5(1). Il résulte de la preuve de (1) et (2) ci-dessus que

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}({}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f}))).$$

On en déduit que la somme de l'énoncé est égale à la somme de

$$(3)\qquad\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}\omega_{\tilde{S}}(X)I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu_{\tilde{S}},X,\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$$

et, pour tout $\tilde{L}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$ tel que $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, de

$$(4)\qquad-\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}\omega_{\tilde{S}}(X)I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu_{\tilde{S}},X,{}^c\theta^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}({}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f}))).$$

Fixons $\tilde{L}\neq\tilde{G}$. Par un argument déjà utilisé plusieurs fois, pour $\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$, on peut remplacer le point $\nu_{\tilde{S}}$ par $\nu_{\tilde{S}'}$, où $\tilde{S}'=\tilde{S}\cap\tilde{L}$. On peut ensuite, pour $\tilde{S}'$ fixé, remplacer la somme des $\omega_{\tilde{S}}(X)$ pour $\tilde{S}\cap\tilde{L}=\tilde{S}'$ par $\omega_{\tilde{S}'}(X)$. On obtient que la somme (4) est égale à l'opposée de celle de l'énoncé où l'on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{L}$ et $\mathbf{f}$ par ${}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})$. Dans l'énoncé figure l'hypothèse $\tilde{M}\neq\tilde{G}$. Si $\tilde{L}\neq\tilde{M}$, elle reste vérifiée et, par récurrence, la somme (4) est nulle.

Considérons l'espace $\tilde{L}=\tilde{M}$. Dans ce cas ${}^c\theta^{\tilde{M}}_{\tilde{M}}$ est l'identité. On a donc

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{M}}_{\tilde{M}}({}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})))=I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})).$$

Or ${}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est à support compact. Il en résulte que cette fonction n'a pas de pôle. Ses coefficients de Fourier $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,{}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$ sont donc indépendants du point ν. Ils sont égaux à

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},0,X,{}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}}I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}},{}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))e^{-<\tilde{\lambda},X>}\,d\lambda.$$

Dans la somme (4), on peut remplacer tous les points $\nu_{\tilde{S}}$ par 0. Cette somme devient

$$-I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^c\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}\omega_{\tilde{S}}(X),$$

qui est simplement $-I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$. Par définition de ${}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$, on a

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}},{}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))={}^cJ_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}},\mathbf{f})$$

pour $\tilde{\lambda}\in i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}^*/i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}^{\vee}$. Parce que $\tilde{\pi}$ est elliptique, ceci n'est autre que

$$\sum_{Y\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}}\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}\omega_{\tilde{S}}(Y)\int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}+\tilde{\nu}},\mathbf{f})e^{-<\tilde{\nu},Y>}\,d\nu.$$

Par inversion de Fourier, on en déduit

$$(5)\qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))=\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}\omega_{\tilde{S}}(X)\int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\nu}},\mathbf{f})e^{-<\tilde{\nu},X>}\,d\nu.$$

En résumé, la somme sur les $\tilde{L}\neq\tilde{G}$ des termes (4) est égale à l'opposé du membre de droite de (5).

Ainsi qu'il résulte de la preuve de (1) et (2), on a l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}},\mathbf{f})$$

pour tout $\tilde{\lambda}\in\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*/i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}^{\vee}$. Il résulte alors des définitions que

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu_{\tilde{S}},X,\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))=\int_{\nu_{\tilde{S}}+i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\nu}},\mathbf{f})e^{-<\tilde{\nu},X>}\,d\nu$$

pour tout $\tilde{S}$. Donc la somme (3) est égale au membre de droite de (5). La somme de (3) et (4) est donc nulle. Cela achève la démonstration. $\square$

1.9 Une variante des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes

Fixons un espace de Levi $\tilde{M}$. L'application ${}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ définie en 1.3 vérifie les mêmes propriétés formelles que $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Dans beaucoup de constructions que l'on a faites, on peut remplacer la deuxième application par la première. Ainsi, fixons pour un moment un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M. Soit $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$. On a défini en [II] 1.5 la distribution

$$\mathbf{f}\mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$$

sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. On définit une nouvelle distribution par la formule

$$(1)\qquad {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}{}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

Elle vérifie les mêmes propriétés formelles que la distribution $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$. En particulier, elle est ω-équivariante, c'est-à-dire se descend en une distribution sur $I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$. Elle est aussi compatible à l'induction, c'est-à-dire vérifie une propriété analogue au lemme [II] 1.7. Mais elle vérifie une propriété utile que la distribution $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ ne vérifie pas. Pour tout sous-ensemble Ω de $\tilde{M}(F)$, posons $\Omega^M=\{m^{-1}\gamma m; m\in M(F),\gamma\in\Omega\}$. On a

(2) pour tout $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$, il existe un sous-ensemble compact $\Omega\subset\tilde{M}(F)$ tel que ${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=0$ si le support de $\boldsymbol{\gamma}$ ne coupe pas Ω^M.

Preuve. On relève $\mathbf{f}$ en un élément de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. La formule (1) ramène par récurrence à prouver que le terme $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ vérifie la même propriété. Notons Ω' le support de $\mathbf{f}$. Il existe un sous-ensemble compact Ω de $\tilde{M}(F)$ tel que $\Omega^M=(\Omega')^G\cap\tilde{M}(F)$. Il est clair que $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=0$ si le support de $\boldsymbol{\gamma}$ ne coupe pas Ω^M. $\square$

Le lien entre nos deux distributions ω-équivariantes est établi par la formule suivante

$$(3)\qquad {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

Preuve. Relevons $\mathbf{f}$ en un élément de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$ et appliquons cette formule par récurrence au termes de la somme du membre de droite de la formule (1). On obtient

$${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})-\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}_1\neq\tilde{G}}\sum_{\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}_2\subset\tilde{L}_1}I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\theta_{\tilde{L}_2}^{\tilde{L}_1}({}^c\phi_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))).$$

Renversons l'ordre de sommation. On obtient une somme sur $\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M})$ de la distribution $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\boldsymbol{\gamma},.)$ appliquée à la fonction

$$\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{L}_2),\tilde{L}_1\neq\tilde{G}}{}^c\theta_{\tilde{L}_2}^{\tilde{L}_1}({}^c\phi_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

Par définition de ${}^c\theta_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}$, cette fonction est égale à $\phi_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})-{}^c\theta_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$. En remplaçant $\tilde{L}_2$ simplement par $\tilde{L}$, on obtient alors l'égalité

$${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))+\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

La somme des deux premières expressions est nulle par définition de la distribution $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},.)$. Donc ${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ est égal à la dernière somme, ce qui est l'égalité (3). $\square$

2 Stabilisation de l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}$

2.1 Fonctions $\omega_{\tilde{S}}$ et endoscopie

Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Introduisons <u>les</u> paires de Borel (B^*,T^*) et (B'^*,T'^*) de G et G'. Modulo certains choix dans les groupes duaux, cf. [I] 1.5, on a un homomorphisme $\xi:T^*\to T'^*$. Il se restreint en un homomorphisme $\xi:A_{\tilde{G}}\to A_{\tilde{G}'}$ qui est équivariant pour les actions galoisiennes. L'hypothèse d'ellipticité signifie que cet homomorphisme est un revêtement. Il s'en déduit un isomorphisme $\mathcal{A}_{\tilde{G}}\simeq\mathcal{A}_{\tilde{G}'}$. On a

(1) il existe un unique isomorphisme $\tilde{\xi}:\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}\simeq\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}'}$ tel que

(i) $\tilde{\xi}(X+H)=\xi(X)+\tilde{\xi}(H)$ pour tout $X\in\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ et $H\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}$;

(ii) pour tout couple (δ,γ) formé d'un élément semi-simple $\delta\in\tilde{G}'(F)$ et d'un élément semi-simple $\gamma\in\tilde{G}(F)$ qui se correspondent (cf. [I] 1.10), on ait l'égalité

$$\tilde{\xi}(\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma))=\tilde{H}_{\tilde{G}'}(\delta).$$

La preuve est la même qu'en [IV] 2.1(1). Signalons qu'en général, les ensembles $\tilde{\xi}(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$ et $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}',F}$ ne sont pas inclus l'un dans l'autre. Leur intersection est toutefois non vide d'après (ii) ci-dessus. En prenant pour point-base un élément de cette intersection, ces ensembles s'identifient respectivement aux réseaux $\xi(\mathcal{A}_{\tilde{G},F})$ et $\mathcal{A}_{\tilde{G}',F}$. Ceux-ci ne sont pas non plus inclus l'un dans l'autre, mais sont commensurables (leur intersection est d'indice finie dans chacun d'eux).

Dans la suite, on abandonne les notations ξ et $\tilde{\xi}$ et on identifie simplement $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ à $\mathcal{A}_{\tilde{G}'}$ par ξ, ainsi que $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}$ à $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}'}$ par $\tilde{\xi}$.

Soit M' un Levi de G'. Supposons M' relevant. Il lui correspond donc un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et M' se complète en une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{s})$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$. On a comme ci-dessus des identifications compatibles $\mathcal{A}_{\tilde{M}}\simeq\mathcal{A}_{\tilde{M}'}$ et $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}\simeq\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}'}$. Soit $\tilde{P}'\in\mathcal{P}(\tilde{M}')$. Des descriptions des ensembles de racines de nos différents groupes résulte que la clôture de la chambre positive $\mathcal{A}_{\tilde{P}'}$ est réunion de clôtures de chambres positives $\mathcal{A}_{\tilde{P}}$ pour certains $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$. Notons simplement $\tilde{P}\mapsto\tilde{P}'$ pour signifier que $\tilde{P}$ appartient à cet ensemble. On a fixé des fonctions $\omega_{\tilde{P}}$. On définit la fonction $\omega_{\tilde{P}'}$ sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}'}$ par

$$(2)\qquad \omega_{\tilde{P}'}=\sum_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M});\tilde{P}\mapsto\tilde{P}'}\omega_{\tilde{P}}.$$

L'espace de Levi $\tilde{M}$ n'est pas unique, il n'est bien défini qu'à conjugaison près, mais les propriétés d'invariance imposées aux fonctions $\omega_{\tilde{P}}$ entraînent que la définition ci-dessus ne dépend pas du choix de $\tilde{M}$. Il est immédiat que l'ensemble de fonctions ainsi définies vérifie les mêmes conditions qu'en 1.1.

Dans le cas où M' n'est pas relevant, on fixe sans référence à $\tilde{G}$ des fonctions $\omega_{\tilde{P}'}$ pour $\tilde{P}'\in\mathcal{P}(\tilde{M}')$ qui vérifient les conditions de 1.1.

2.2 Les applications ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$

Pour la suite de la section, on suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure et on fixe un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. Nous allons définir une application linéaire

$${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}:I(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))\to SI_{ac}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F)).$$

Comme toujours, on doit admettre par récurrence certaines de ses propriétés. Les premières sont formelles et permettent de définir des applications analogues pour des données endoscopiques. On y revient ci-dessous. La seconde est que cette application est stable, c'est-à-dire qu'elle se factorise en une application définie sur $SI(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. Notons $p_{\tilde{M}}^{st}:I_{ac}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))\to SI_{ac}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))$ la projection naturelle. Pour $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$, on pose

$$(1)\qquad {}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})=p_{\tilde{M}}^{st}\circ{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})-\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F},s\neq1}i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))\,{}^cS\theta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Enonçons la propriété évoquée ci-dessus.

Proposition . *L'application* ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ *se quotiente en une application linéaire*

$$SI(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))\to SI_{ac}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F)).$$

Cette proposition sera prouvée en 4.2.

Revenons sur les questions formelles. Considérons des extensions compatibles

$$1\to C_\natural\to G_\natural\to G\to 1 \text{ et } \tilde{G}_\natural\to\tilde{G}$$

où $C_\natural$ est un tore induit et $\tilde{G}_\natural$ est encore à torsion intérieure. Soit $\lambda_\natural$ un caractère de $C_\natural(F)$. On a une projection naturelle $\mathcal{A}_{\tilde{M}_\natural}\to\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et une identification $\mathcal{P}(\tilde{M}_\natural)=\mathcal{P}(\tilde{M})$, notons-la $\tilde{P}_\natural\leftrightarrow\tilde{P}$. Pour $\tilde{P}\in\mathcal{P}_{\tilde{M}}$, on a une fonction $\omega_{\tilde{P}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Pour $\tilde{P}_\natural\leftrightarrow\tilde{P}$, on choisit pour fonction $\omega_{\tilde{P}_\natural}$ la composée de cette fonction avec la projection précédente. Fixons des mesures de Haar dc sur $C_\natural(F)$, dg sur $G(F)$ et dm sur $M(F)$. Soient $\mathbf{f}\in C_{c,\lambda_\natural}^\infty(\tilde{G}_\natural(F))\otimes Mes(G(F))$. Ecrivons-la $\mathbf{f}=f\otimes dg$. Choisissons une fonction $\dot{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}_\natural(F))$ telle que

$$f(\gamma_\natural)=\int_{C_\natural(F)}\dot{f}(c\gamma_\natural)\lambda_\natural(c)\,dc$$

pour tout $\gamma_\natural\in\tilde{G}_\natural(F)$. De dg et dc se déduit une mesure de Haar $dg_\natural$ sur $G_\natural(F)$. De même, de dm et dc se déduit une mesure de Haar $dm_\natural$ sur $M_\natural(F)$. On définit alors ${}^cS\theta_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\dot{f}\otimes dg_\natural)$. Ecrivons-la $\dot{\varphi}\otimes dm_\natural$ avec $\dot{\varphi}\in SI_{ac}(\tilde{M}_\natural(F))$. Cette fonction n'est pas à support compact. Toutefois, on vérifie aisément par récurrence sur la définition (1) que l'application ${}^cS\theta_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}_\natural}$ vérifie la relation 1.6(3) (la vérification précise nécessite encore quelques considérations formelles que l'on passe). Il en résulte que, pour tout $\gamma_\natural\in\tilde{M}_\natural(F)$, la fonction $c\mapsto\dot{\varphi}(c\gamma_\natural)$ est à support compact. On peut alors définir $\varphi\in SI_{ac,\lambda_\natural}(M_\natural(F))$ par

$$\varphi(\gamma_\natural)=\int_{C_\natural(F)}\dot{\varphi}(c\gamma_\natural)\lambda_\natural(c)\,dc.$$

Remarque. L'espace $SI_{ac,\lambda_\natural}(M_\natural(F))$ se déduit de $C_{ac,\lambda_\natural}^\infty(M_\natural(F))$. Ce dernier est celui des fonctions $\psi: M_\natural(F)\to\mathbb{C}$ qui se transforment par $C_\natural(F)$ selon le caractère $\lambda_\natural$, qui sont biinvariantes par un sous-groupe ouvert compact de $M_\natural(F)$ et qui vérifient la condition suivante. Soit b une fonction à support compact sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$. Notons $b_\natural$ sa composée avec la projection $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}_\natural,F}\to\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$. Alors la fonction $(b_\natural\circ\tilde{H}_{\tilde{M}_\natural})\psi$ appartient à $C_{c,\lambda_\natural}^\infty(\tilde{M}_\natural(F))$.

Le terme $\varphi\otimes dm$ dépend a priori des choix de mesures et du choix de la fonction $\dot{f}$. On vérifie facilement que changer de mesures ne modifie pas $\varphi\otimes dm$. Changer de $\dot{f}$ revient à ajouter à cette fonction une combinaison linéaire de fonctions $\psi^c-\lambda_\natural(c)\psi$, où $\psi\in C_c^\infty(\tilde{G}_\natural(F))$ et $c\in C_\natural(F)$. Notre système de fonctions $\omega_{\tilde{P}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}_\natural}$ vérifie par construction la condition 1.4(7) pour $Z=C_\natural$. On voit par récurrence que l'application ${}^cS\theta_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}_\natural}$ vérifie la propriété 1.6(4). Il en résulte qu'ajouter $\psi^c-\lambda_\natural(c)\psi$ à $\dot{f}$ revient à ajouter à $\dot{\varphi}$ une fonction de la forme $(\psi')^c-\lambda_\natural(c)\psi'$. Un tel terme disparaît par intégration et ne change pas φ. Ainsi le terme $\varphi\otimes dm$ est bien défini et on peut poser

$${}^cS\theta_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\mathbf{f})=\varphi\otimes dm.$$

Considérons d'autres données

$$1 \to C_\flat \to G_\flat \to G \to 1,\ \tilde{G}_\flat \to \tilde{G},\ \lambda_\flat$$

vérifiant les mêmes hypothèses. Introduisons le produit fibré $G_{\natural,\flat}$ de $G_\natural$ et $G_\flat$ au-dessus de G et le produit fibré $\tilde{G}_{\natural,\flat}$ de $\tilde{G}_\natural$ et $\tilde{G}_\flat$ au-dessus de $\tilde{G}$. Supposons donnés un caractère $\lambda_{\natural,\flat}$ de $G_{\natural,\flat}(F)$ dont la restriction à $C_\natural(F)\times C_\flat(F)$ est $\lambda_\natural \times \lambda_\flat^{-1}$ et une fonction non nulle $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}$ sur $\tilde{G}_{\natural,\flat}(F)$ qui se transforme selon le caractère $\lambda_{\natural,\flat}$. On en déduit un isomorphisme

$$C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F)) \otimes Mes(G(F)) \simeq C^\infty_{c,\flat}(G_\flat(F)) \otimes Mes(G(F)),$$

cf. [II] 1.10, et de même un isomorphisme

$$SI_{ac,\lambda_\natural}(M_\natural(F)) \otimes Mes(M(F)) \simeq SI_{ac,\lambda_\flat}(M_\flat(F)) \otimes Mes(M(F)).$$

Soient $\mathbf{f}_\natural \in C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F)) \otimes Mes(G(F))$ et $\mathbf{f}_\flat \in C^\infty_{c,\lambda_\flat}(\tilde{G}_\flat(F)) \otimes Mes(G(F))$ qui se correspondent par le premier isomorphisme. Alors ${}^cS\theta^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\mathbf{f}_\natural)$ et ${}^cS\theta^{\tilde{G}_\flat}_{\tilde{M}_\flat,\lambda_\flat}(\mathbf{f}_\flat)$ se correspondent par le second. La preuve est similaire à celle de [II] 1.10(7). Rappelons-en seulement la structure. On commence par prouver que les deux termes sont égaux à des termes analogues relatifs aux extensions communes $G_{\natural,\flat}$ et $\tilde{G}_{\natural,\flat}$, où le caractère de $C_\natural(F)\times C_\flat(F)$ est $\lambda_\natural \otimes 1$ pour le premier terme et $1 \otimes \lambda_\flat$ pour le second. On passe de l'un à l'autre par tensorisation par le caractère affine $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}$. Cette tensorisation est compatible à nos constructions parce que l'on voit par récurrence que nos distributions vérifient l'analogue de 1.6(5).

Cela étant, pour un élément $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ tel que $\mathbf{G}'(s)$ est elliptique, on choisit des données auxiliaires $G'_1(s), ..., \Delta_1(s)$. On définit comme ci-dessus l'application linéaire

$${}^cS\theta^{\tilde{G}'_1(s)}_{\tilde{M}_1(s),\lambda_1(s)} : C^\infty_{c,\lambda_1(s)}(\tilde{G}'_1(s;F)) \otimes Mes(G'(s;F)) \to SI_{ac,\lambda_1(s)}(\tilde{M}_1(s;F)) \otimes Mes(M(F)).$$

La propriété précédente assure que, quand on change de données auxiliaires, ces applications se recollent en une application linéaire

$${}^cS\theta^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}} : C^\infty_c(\mathbf{G}'(s)) \otimes Mes(G'(s;F)) \to SI_{ac}(\mathbf{M}) \otimes Mes(M(F)).$$

Elle se quotiente en tout cas en une application définie sur $I(\mathbf{G}'(s)) \otimes Mes(G'(s;F))$ et, pourvu que la proposition soit démontrée pour $\tilde{G}'_1(s)$ et pour un choix de données auxiliaires, en une application définie sur $SI(\mathbf{G}'(s)) \otimes Mes(G'(s;F))$.

2.3 Commutation à l'induction

Lemme. *Soit $\tilde{R}$ un espace de Levi de $\tilde{M}$. Pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité*

$$({}^cS\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))_{\tilde{R}} = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} e^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L})\, {}^cS\theta^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L}}).$$

En utilisant le lemme 1.6, la preuve est similaire à celle de la proposition [II] 1.14(ii).
□

2.4 Une propriété d'annulation

Rappelons que l'on a défini l'espace $D_{temp}^{st}(\tilde{M}(F))$ qui est le sous-espace des éléments de $D_{temp}(\tilde{M}(F))$ qui sont des distributions stables. On définit de même l'espace $D_{ell}^{st}(\tilde{M}(F))$. Fixons pour simplifier un espace de Levi minimal $\tilde{M}_0 \subset \tilde{M}$. Moeglin a prouvé en [5] corollaire 2.1 que l'induction fournissait un isomorphisme

$$D_{temp}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^* =$$

$$\oplus_{\tilde{R}\in\mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)/W^M(\tilde{M}_0)} Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}((D_{ell}^{st}(\tilde{R}(F),\omega) \otimes Mes(R(F))^*)^{W^M(\tilde{R})}.$$

Les définitions de 1.7 s'adaptent aux fonctions appartenant à $SI(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))$ et on utilise des notations similaires. Il suffit de se limiter dans les définitions de ce paragraphe aux représentations appartenant à $D_{temp}^{st}(\tilde{M}(F))$. Soit $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. On voit par récurrence que la fonction ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$ est de Schwartz. Soit $\tilde{\pi} \in D_{temp}^{st}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$. On voit de même que la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ sur $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}^*/i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}^\vee$ vérifie la propriété 1.8(2).

Proposition. *Supposons $\tilde{M} \neq \tilde{G}$ et $\tilde{\pi}$ elliptique. Pour tout $\tilde{S} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, fixons un point $\nu_{\tilde{S}}$ comme en 1.3. Supposons ce point "assez positif" pour $\tilde{S}$, cette notion dépendant de la représentation $\tilde{\pi}$. Alors on a l'égalité*

$$\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X)S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu_{\tilde{S}},X,{}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) = 0$$

pour tout $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$.

Preuve. Pour tous points ν et X, on a par définition l'égalité

$$S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,{}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) = I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} S^{\mathbf{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,{}^cS\theta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)})).$$

Le premier terme vérifie la relation de l'énoncé d'après la proposition 1.8. Fixons s apparaissant ci-dessus. On doit prouver la relation de l'énoncé pour le terme indexé par s dans la somme ci-dessus. On a dit en 2.1 qu'il y avait une application naturelle $\tilde{S} \mapsto \tilde{S}'$ de $\mathcal{P}^{\tilde{G}}(\tilde{M})$ dans $\mathcal{P}^{\tilde{G}'(s)}(\tilde{M})$. Pour de tels $\tilde{S}$ et $\tilde{S}'$, la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto S^{\mathbf{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^cS\theta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}))$ n'a pas de pôle sur le segment joignant $\nu_{\tilde{S}}$ à $\nu_{\tilde{S}'}$. Cela nous permet de remplacer dans la relation de l'énoncé le point $\nu_{\tilde{S}}$ par $\nu_{\tilde{S}'}$. On vertu de la définition 2.1(2) de la fonction $\omega_{\tilde{S}'}$, la relation à démontrer devient celle de l'énoncé pour $\tilde{G}'(s)$, ou plutôt $\mathbf{G}'(s)$, et la fonction $\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}$. Celle-ci est vérifiée par récurrence puisque $s \neq 1$. $\square$

2.5 Une variante des intégrales orbitales pondérées stables

Soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$. On définit une forme linéaire ${}^cS_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},.)$ par la formule habituelle

$${}^cS_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s)){}^cS_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Outre quelques formalités que l'on passe, cette définition utilise par récurrence la propriété suivante.

Proposition . *Pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$, la distribution*

$$\mathbf{f} \mapsto {}^cS^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$$

est stable.

Cette proposition sera prouvée en 4.2.

Par récurrence, on voit que notre distribution vérifie la propriété de compacité 1.9(2).

3 L'application endoscopique ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}$

3.1 Définition d'une première application endoscopique

Le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque et on fixe un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. Soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$ qui est elliptique et relevante. On définit une application linéaire

$${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}') : I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F)) \to SI_{ac}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))$$

par l'égalité

$$(1) \qquad {}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))\, {}^cS\theta^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Les mêmes considérations formelles qu'en 2.2 permettent de définir les termes du membre de droite. Ces termes sont bien définis car les distributions qui apparaissent vérifient par récurrence la proposition 2.2, c'est-à-dire sont stables, sauf dans un cas. C'est celui où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et où $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. On ne connaît pas alors les propriétés du terme indexé par $s = 1$. On le remplace alors par ${}^cS\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$. Par définition de ce dernier terme, on a alors l'égalité tautologique

$$(2) \qquad {}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}, \mathbf{f}) = p^{st}_{\tilde{M}} \circ {}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}).$$

Soit b une fonction sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}$ à valeurs complexes. Pour tout $\tilde{s}$ intervenant dans la somme ci-dessus, on a une identification $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}'(\tilde{s})} = \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}$ et on peut considérer b comme une fonction sur le premier espace. D'autre part, la composée de la projection $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}'} \to \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}'(\tilde{s})}$ et de l'identification ci-dessus est indépendante de $\tilde{s}$. Elle coïncide en effet avec la composée de l'identification $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}'} = \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ et de la projection de cet espace sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}$. Notons $p^{\tilde{G}}_{\tilde{M}'}$ cette composée. D'après 2.1(1), on a $(\mathbf{f}(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}}))^{\mathbf{G}'(\tilde{s})} = \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}'(\tilde{s})})$. On a déjà dit que la propriété 1.6(3) se propageait aux applications ${}^cS\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$. Il résulte de la définition (1) ci-dessus qu'on a l'égalité

$$(3) \qquad {}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = {}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f})(b \circ p^{\tilde{G}}_{\tilde{M}'} \circ \tilde{H}_{\tilde{M}'}).$$

Remarque. L'identification $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}'} = \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ n'envoie pas nécessairement $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}',F}$ dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$. Donc $p^{\tilde{G}}_{\tilde{M}'}$ n'envoie pas nécessairement $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}',F}$ dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$. Le membre de gauche ci-dessus ne dépend que de la restriction de b à $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$. L'égalité entraîne que c'est aussi le cas du membre de droite mais cela ne résulte pas trivialement de la définition de celui-ci. L'explication est que, par définition du transfert, les supports des transferts $\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}$ sont formés d'éléments $\delta \in \tilde{G}'(\tilde{s}; F)$ tels que $\tilde{H}_{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\delta) \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$.

Il résulte de (1) et de ce que l'on a dit en 2.4 que

(4) pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$, la fonction ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f})$ est de Schwartz ; pour tout $\tilde{\pi} \in D^{st}_{temp}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$, la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto SI^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda}, {}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}))$ définie sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}'}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{M}',F}$ se prolonge en une fonction rationnelle sur $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}',\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{M}',F}$ dont les pôles sont de la forme décrite en 1.8(2).

3.2 Action d'un groupe d'automorphismes

On conserve les mêmes données. On a introduit en [I] 3.2 le groupe d'automorphismes $Aut(\tilde{M}, \mathbf{M}')$. Il agit sur $SI_{ac}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))$.

Lemme. *L'application* ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}')$ *prend ses valeurs dans le sous-espace d'invariants* $(SI_{ac}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F)))^{Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')}$.

La preuve est similaire à celle du lemme [II] 1.13. □

3.3 Commutation à l'induction

On conserve les mêmes données. On considère les situations suivantes.

(a) Soit R' un groupe de Levi de M' qui est relevant. Modulo certains choix, cf. [I] 3.4, on construit un espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ et une donnée endoscopique $\mathbf{R}'$ de $\tilde{R}$ qui est elliptique et relevante. On a l'homomorphisme "terme constant"

$$\begin{array}{ccc} SI_{ac}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F)) & \to & SI_{ac}(\mathbf{R}') \otimes Mes(R'(F)) \\ \boldsymbol{\varphi} & \mapsto & \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{R}'}. \end{array}$$

(b) Soit R' un groupe de Levi de M' qui n'est pas relevant. La donnée $\mathbf{R}'$ n'est plus définie et l'homomorphisme du (i) n'a plus de sens. Par contre, pour $\boldsymbol{\varphi} \in SI_{ac}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))$, la relation $\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{R}'} = 0$ conserve un sens. On fixe des données auxilaires $M'_1, ..., \Delta_1$ pour $\mathbf{M}'$. On identifie $\boldsymbol{\varphi}$ à un élément $\boldsymbol{\varphi}_1 \in SI_{ac,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F)) \otimes Mes(M'(F))$. La relation signifie que $(\boldsymbol{\varphi}_1)_{\tilde{R}'_1} = 0$, ce qui ne dépend pas du choix des données auxiliaires.

Proposition. *Soit* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$.

(i) Dans la situation (a), on a l'égalité

$$({}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}))_{\mathbf{R}'} = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) {}^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{R}', \mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})$$

(ii) Dans la situation (b), on a l'égalité

$$({}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \mathbf{f}))_{\tilde{R}'} = 0.$$

Preuve. Dans la situation (a), soit $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{R}')\otimes Mes(R'(F))$. On doit prouver l'égalité

$$SI^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'},{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f}))=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})}d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L})SI^{\mathbf{R}'}(\boldsymbol{\delta},{}^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{R}',\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})).$$

Dans la situation (b), fixons des données auxiliaires $M'_1,...,\Delta_1$ pour $\mathbf{M}'$. Soit $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{R}'_1(F))\otimes Mes(R'(F))$. L'induite $\boldsymbol{\delta}^{\tilde{M}'_1}$ appartient à $D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F))\otimes Mes(M'(F))$. On l'identifie à un élément de $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F))$ que l'on note $\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}$. On doit prouver l'égalité

$$SI^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'},{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f}))=0.$$

La preuve de ces assertions est la même que celle de (i) et (iii) de la proposition [II] 1.14, en utilisant la relation initiale fournie par le lemme 1.6. □

3.4 Définition de ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}$

Proposition. *Il existe une unique application linéaire*

$${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}:I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))\to I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$$

telle que, pour toute donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ *de* $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$ *qui est elliptique et relevante et pour tout* $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$*, on ait l'égalité*

$$({}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{M}'}={}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f}).$$

Preuve. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$ des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques et relevantes de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$. Soit $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$. Pour $\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$, posons $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'}={}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})$. On a $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'}\in SI_{ac}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F))$. Oublions pour un instant l'indice ac, c'est-à-dire supposons $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'}\in SI(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F))$. On a décrit dans la proposition [I] 4.11 l'image $I^{\mathcal{E}}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$ de l'application de transfert

$$I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))\to\oplus_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}SI(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F)).$$

Il s'agit de montrer que la collection $(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'})_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}$ appartient à cette image. Elle doit pour cela vérifier les conditions (1), (2) et (3) de [I] 4.11. La condition d'invariance par automorphismes est le lemme 3.2. Les deux autres conditions résultent de la proposition 3.3. Cela conclut sous l'hypothèse faite ci-dessus. Levons cette hypothèse. Soit b une fonction à support compact sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$. Pour $\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$, on a $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'}(b\circ\tilde{H}_{\tilde{M}'})\in SI(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F))$. On peut appliquer le même raisonnement à la collection $(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'}(b\circ\tilde{H}_{\tilde{M}'}))_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}$. Celle-ci est donc le transfert d'un unique élément $\boldsymbol{\varphi}[b]\in I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$. En choisissant une suite de fonctions $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ localement finie et telle que $\sum_{i\in\mathbb{N}}b_i$ soit constante de valeur 1, on vérifie aisément que la suite de fonctions $(\boldsymbol{\varphi}[b_i])_{i\in\mathbb{N}}$ est localement finie. La série $\sum_{i\in\mathbb{N}}\boldsymbol{\varphi}[b_i]$ converge donc et est son transfert est bien la collection $(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'})_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}$. Il faut toutefois vérifier que la somme de la série appartient à $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$, c'est-à-dire qu'elle provient d'une fonction sur $\tilde{M}(F)$ qui est biinvariante par un sous-groupe ouvert compact. Pour chaque $\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$, fixons des données auxiliaires $M_1',...,\Delta_1$. Identifions $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'}$ à un élément de $SI_{ac,\lambda_1}(\tilde{M}_1'(F))\otimes Mes(M'(F))$. Par définition de cet espace, on peut fixer un sous-groupe ouvert compact $K_{M_1'}$ de $M_1'(F)$ de sorte que $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'}$ provienne d'une fonction sur $\tilde{M}_1'(F)$ biinvariante par $K_{M_1'}$. Il en résulte que, pour tout $i\in\mathbb{N}$, $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{M}'}(b_i\circ H_{\tilde{M}'})$ provient d'une fonction sur $\tilde{M}_1'(F)$ biinvariante par $K_{M_1'}$. D'après [5], il existe un sous-groupe ouvert compact K_M de $M(F)$, qui ne dépend que des $K_{M_1'}$ (donc qui ne dépend pas de i), de sorte que $\boldsymbol{\varphi}[b_i]$ provienne d'une fonction sur $\tilde{M}(F)$ qui est biinvariante par K_M. Alors la somme de la série $\sum_{i\in\mathbb{N}}\boldsymbol{\varphi}[b_i]$ provient elle-aussi d'une fonction biinvariante par K_M. Cela achève la preuve. $\square$

3.5 Commutation à l'induction

Lemme. *Soient $\tilde{R}$ un espace de Levi de $\tilde{M}$ et $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$. On a l'égalité*

$$^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})_{\tilde{R},\omega}=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\,^c\theta_{\tilde{R}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

Preuve. Il suffit de voir que, pour toute donnée endoscopique $\mathbf{R}'$ de $(R,\tilde{R},\mathbf{a})$ qui est elliptique et relevante, les deux membres ont même transfert à $\mathbf{R}'$. Pour une telle donnée $\mathbf{R}'$, on peut trouver une donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$ qui est elliptique et relevante, de sorte que $\mathbf{R}'$ soit une "donnée de Levi" de $\mathbf{M}'$. L'égalité cherchée résulte alors de la proposition 3.3 et de la relation

$$(\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{R},\omega})^{\mathbf{R}'}=(\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{M}'})_{\mathbf{R}'}$$

pour tout $\boldsymbol{\varphi}\in I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$. $\square$

3.6 $^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})$ est de Schwartz

Lemme. *Soit $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$. Alors $^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})$ est une fonction de Schwartz. Pour tout $\tilde{\pi}\in D_{temp}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$, la fonction $\tilde{\lambda}\mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))$ définie pour $\tilde{\lambda}\in i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}^*/i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}^\vee$ se prolonge en une fonction rationnelle sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*/i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}^\vee$ dont les pôles sont de la forme décrite en 1.8(2).*

Preuve. Soit $\tilde{\pi}\in D_{temp}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$. On doit montrer que la fonction $X\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))$ définie sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$ est à décroissance rapide. On doit ensuite étudier la fonction $\tilde{\lambda}\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))$. Par linéarité, on peut supposer soit que $\tilde{\pi}$ est elliptique, soit qu'il existe un espace de Levi propre $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ et une ω-représentation elliptique $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{R}(F)$ de sorte que $\tilde{\pi}=Ind_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}(\tilde{\sigma})$.

Supposons d'abord $\tilde{\pi}$ elliptique. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$ des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques et relevantes de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$. Rappelons que le transfert définit un isomorphisme

$$\oplus_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}(D^{st}_{ell}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F))^*)^{Aut(\mathbf{M}')}\to D_{ell}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*.$$

On écrit conformément

$$(1)\qquad \tilde{\pi}=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} transfert(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}),$$

où $\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'}\in(D^{st}_{ell}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F))^*)^{Aut(\mathbf{M}')}$. Pour $\tilde{\lambda}\in\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, il est clair que

$$\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} transfert(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}',\tilde{\lambda}}).$$

Le membre de gauche ne dépend que de $\tilde{\lambda}$ modulo $i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$. Il n'est pas clair a priori que chaque terme $\tilde{\pi}_{\mathbf{M}',\tilde{\lambda}}$ vérifie la même propriété, car les ensembles $\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$ et $\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M}',F}$ peuvent être distincts. Mais l'unicité de la décomposition ci-dessus assure qu'il en est bien ainsi : $\tilde{\pi}_{\mathbf{M}',\tilde{\lambda}}$ ne dépend que de $\tilde{\lambda}$ modulo $i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$.

Pour $X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$, on a l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}})^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})),$$

où $\mathbf{1}_X$ est la fonction caractéristique de X dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$. Appliquons (1). Pour tout $\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$, le transfert à $\mathbf{M}'$ de la fonction ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})$. Le transfert de la fonction $(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}})^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est $(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}'})^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})$. D'où l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} SI^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}'})^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f}))$$

$$=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} SI^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},X,{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})).$$

D'après 3.1(4), les fonctions ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})$ sont de Schwartz. L'expression ci-dessus est donc à décroissance rapide en X. On peut donc définir la fonction $\tilde{\lambda}\mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$ sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}}/i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$ par

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=\sum_{X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}} e^{<\tilde{\lambda},X>}I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})).$$

Pour $\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$ on voit apparaître la somme

$$\sum_{X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}} e^{<\tilde{\lambda},X>}SI^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},X,{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f})).$$

Pour $X\not\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}',F}$, les termes $SI^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},X,{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\mathbf{f}))$ sont nuls par définition. Parce que $\tilde{\pi}_{\mathbf{M}',\tilde{\lambda}}$ ne dépend que de $\tilde{\lambda}$ modulo $i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{M},F}$, les mêmes termes sont nuls pour $X\in$

$\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}',F}-(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}\cap\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}',F})$. On peut donc remplacer l'ensemble de sommation ci-dessus par $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}',F}$. La somme devient $SI^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$. On obtient

$$(1)\qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}SI^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})).$$

Grâce à 3.1(4), cette fonction se prolonge en une fonction rationnelle sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},F}$ avec des hyperplans polaires de la forme habituelle. Cela démontre les propriétés voulues pour une ω-représentation elliptique.

Fixons maintenant un espace de Levi propre $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ et une ω-représentation elliptique $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{R}(F)$. Posons $\tilde{\pi}=Ind^{\tilde{M}}_{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})$. Soit $X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$. D'après le lemme 3.5, on a l'égalité

$$(2)\qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}})^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})}d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L})I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma},(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}})^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})).$$

Fixons un espace de Levi $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})$ tel que $d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L})\neq 0$. On a une projection $Y\mapsto Y_{\tilde{M}}$ de $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F}$ sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$. On a l'égalité

$$(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}})^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})=\sum_{Y\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F};Y_{\tilde{M}}=X}(\mathbf{1}_Y\circ\tilde{H}_{\tilde{R}})^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

La projection dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}}$ du support de ${}^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})$ est compacte. L'hypothèse $d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L})\neq 0$ entraîne que l'ensemble des $Y\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F}$ dont la projection dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}}$ appartient à ce compact et dont la projection dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ est X est fini. La somme ci-dessus n'a donc qu'un nombre fini de termes non nuls. Il en résulte l'égalité

$$(3)\qquad I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma},(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}})^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}))=\sum_{Y\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{R},F};Y_{\tilde{M}}=X}I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma},Y,{}^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})).$$

Puisque $\tilde{R}\neq\tilde{M}$, on sait par récurrence que la fonction $Y\mapsto I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma},Y,{}^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}))$ est à décroissance rapide. Donc l'expression ci-dessus est à décroissance rapide en X. D'après (2), il en est de même de $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}})^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$. En multipliant (3) par $e^{<\tilde{\lambda},X>}$ et en sommant en X, on obtient

$$\sum_{X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}}e^{<\tilde{\lambda},X>}I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma},(\mathbf{1}_X\circ\tilde{H}_{\tilde{M}})^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}))=I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})).$$

D'où, grâce à (2),

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})}d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L})I^{\tilde{R}}(\tilde{\sigma},\tilde{\lambda},{}^c\theta^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})).$$

Les propriétés voulues du terme de gauche résultent des mêmes propriétés du membre de droite, qui sont connues par récurrence. $\square$

3.7 Une propriété d'annulation

Soient $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$ et $\tilde{\pi} \in D_{temp}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$. On reprend les définitions et notations de 1.7.

Proposition. *Supposons $\tilde{M} \neq \tilde{G}$ et supposons que $\tilde{\pi}$ est elliptique. Pour tout $\tilde{S} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, fixons un point $\nu_{\tilde{S}}$ comme en 1.3. Supposons ce point "assez positif" pour $\tilde{S}$, cette notion dépendant de la représentation $\tilde{\pi}$. Alors on a l'égalité*

$$\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X) I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu_{\tilde{S}},X,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})) = 0$$

pour tout $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$.

Preuve. On reprend les notations de la première partie de la preuve du lemme 3.6. En vertu des égalités 3.6(1) et 3.1(1), on peut fixer $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ et $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tel que $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ soit elliptique et prouver l'égalité

$$(1) \qquad \sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X) S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},\nu_{\tilde{S}},X,{}^cS\theta_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})) = 0.$$

Comme on l'a dit dans la preuve du lemme 3.6, les termes intervenant sont nuls si $X \notin \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F} \cap \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}',F}$. On peut donc supposer que X appartient à cette intersection. La proposition 2.4 nous dit alors que l'on a une égalité

$$\sum_{\tilde{S}'\in\mathcal{P}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}')} \omega_{\tilde{S}'}(X) S^{\mathbf{M}'}(\tilde{\pi}_{\mathbf{M}'},\nu_{\tilde{S}'},X,{}^cS\theta_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})) = 0.$$

Le même calcul que dans la preuve de la proposition 2.4 montre que cette égalité est équivalente à (1). $\square$

3.8 Egalité de deux applications linéaires

Proposition (à prouver). *Soient $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$. On a l'égalité*

$${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}) = {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}).$$

Cette proposition sera prouvée en 4.3 dans le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. Elle sera prouvée en général dans le même paragraphe, sous une hypothèse qui ne sera vérifiée que plus tard.

3.9 Variante des intégrales orbitales pondérées elliptiques

Soit $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$ qui est elliptique et relevante. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et soit $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$. On pose

$${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))\, {}^cS_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Comme toujours, il y a un cas particulier. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et si $\mathbf{M}'=\mathbf{M}$, on doit remplacer le terme ${}^cS_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(1)}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(1)})$ par ${}^cS_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$. Dans ce cas, on a tautologiquement ${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M},\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})={}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$.

Le terme ainsi défini jouit des mêmes propriétés que le terme $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ défini en [II] 1.12. En particulier les propriétés démontrées en [II] 1.13, 1.14 et 1.15 valent aussi pour nos nouveaux objets. On peut alors poser la même définition qu'en [II] 1.15. C'est-à-dire, fixons un ensemble $\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$ de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$ qui sont elliptiques et relevantes. Soit $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$. On peut l'écrire sous la forme

$$(1)\qquad \boldsymbol{\gamma}=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}),$$

avec des $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}\in D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F))^*$. On pose

$${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}{}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'},\mathbf{f}).$$

La décomposition (1) n'est pas unique mais le terme ci-dessus ne dépend pas de la décomposition choisie.

La propriété de compacité 1.9(2) se propage à notre distribution ${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},.)$.

Proposition (à prouver). *Pour tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ et tout $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité*

$${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})={}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}).$$

Cette proposition sera prouvée en 4.3 dans le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. Elle sera prouvée en général dans le même paragraphe, sous une hypothèse qui ne sera vérifiée que plus tard.

Remarque. On s'est limité ici à des distributions $\boldsymbol{\gamma}$ à support fortement régulier dans $\tilde{G}$. Cela parce qu'une définition correcte pour les éléments ne vérifiant pas cette propriété nécessite l'introduction du système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ de [II] 1.11. Cela compliquerait grandement les choses alors que les distributions à support fortement régulier suffiront aux applications. Mais, dans le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, le recours au système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ se trivialise. Dans ce cas, on peut poser les mêmes définitions que ci-dessus et énoncer la même proposition pour une distribution $\boldsymbol{\gamma}$ à support quelconque.

4 Les preuves et l'application $\epsilon_{\tilde{M}}$

4.1 Lien entre les intégrales orbitales pondérées stables ou endoscopiques et leurs variantes

Proposition. *(i) Soient $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$. On a l'égalité*

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})).$$

(ii) Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$. On a l'égalité

$$^cS_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} S_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, {}^cS\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

Remarque. L'expression (ii) a un sens puisqu'on sait que les distributions $S_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},.)$ sont stables, cf. [II] théorème 1.10.

Preuve de (i). Par linéarité, on peut fixer une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$, elliptique et relevante, et un élément $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))$ et supposer que $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. D'après les définitions, l'égalité à prouver devient

$$(1) \qquad ^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})).$$

Considérons d'abord le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et où $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. Comme on l'a dit, on a tautologiquement l'égalité

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M},\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}).$$

De façon également tautologique, les distributions $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M},\boldsymbol{\delta},.)$ et $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},.)$ sont égales. L'égalité à prouver prend la forme

$$(2) \qquad ^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})).$$

Si $\tilde{L} \neq \tilde{M}$, nos habituelles hypothèses de récurrence nous autorisent à utiliser la proposition 3.8 : ${}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}) = {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$. Considérons le cas $\tilde{L} = \tilde{M}$. Puisque $\boldsymbol{\delta}$ est stable, la distribution $I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},.)$ est stable et on peut remplacer le terme ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})$ par sa projection dans $SI(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))$. L'égalité 3.1(2) n'est qu'une façon de dire que les projections dans $SI(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))$ de ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})$ et de ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$ sont égales. On a ainsi obtenu le même résultat que dans le cas $\tilde{L} \neq \tilde{M}$, à savoir que l'on peut supprimer les exposants $\mathcal{E}$ figurant dans la formule (2). Alors cette formule devient simplement 1.9(3).

Excluons maintenant le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et où $\mathbf{M}'=\mathbf{M}$. On utilise la définition

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))^cS_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

On a $dim(G'(\tilde{s})_{SC})<dim(G_{SC})$ pour tous les $\tilde{s}$ intervenant et on peut utiliser par récurrence le (ii) de la présente proposition. En utilisant les mêmes notations que dans la preuve de la proposition [II] 2.6 (dont la présente preuve est une variante), on obtient

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))\sum_{\tilde{L}'_{\tilde{s}}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}')}S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{L}'_{\tilde{s}}}(\boldsymbol{\delta},{}^cS\theta_{\mathbf{L}'_{\tilde{s}}}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})).$$

On regroupe les paires $(\tilde{s},\tilde{L}'_{\tilde{s}})$ selon l'espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ déterminé par l'égalité $\mathcal{A}_{\tilde{L}}=\mathcal{A}_{\tilde{L}'_{\tilde{s}}}$. On obtient

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}},\mathbf{L}'(\tilde{s})\text{ elliptique}}$$

$$\sum_{\tilde{t}\in\tilde{s}Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},{}^cS\theta_{\mathbf{L}'(\tilde{s})}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})})).$$

On a l'égalité

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))=i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))i_{\tilde{L}'(\tilde{s})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))$$

et l'expression ci-dessus devient

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{\tilde{t}\in\tilde{s}Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}i_{\tilde{L}'(\tilde{s})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},{}^cS\theta_{\mathbf{L}'(\tilde{s})}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})})).$$

Pour tous $\tilde{L}$ et $\tilde{s}$, on reconnaît

$$\sum_{\tilde{t}\in\tilde{s}Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}i_{\tilde{L}'(\tilde{s})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))^cS\theta_{\mathbf{L}'(\tilde{s})}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})})={}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(\tilde{s}),\mathbf{f})=({}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}.$$

L'expression plus haut devient

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},({}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}).$$

Par définition, pour tout $\tilde{L}$, la somme en $\tilde{s}$ n'est autre que

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},{}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})).$$

Alors l'expression ci-dessus devient simplement la formule (1) qu'il fallait démontrer. Cela prouve le (i) de l'énoncé.

Preuve du (ii). Maintenant $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. On identifie $\boldsymbol{\delta}$ à un élément de $D_{g\acute{e}om}^{st}(\mathbf{M})\otimes Mes(M(F))^*$. On a prouvé l'identité (1) (pour

$\mathbf{M}' = \mathbf{M}$) par une méthode spécifique. Mais on peut aussi reprendre le calcul du cas général. Comme toujours, il y a un terme auquel on ne peut plus appliquer par récurrence l'égalité du (ii) de l'énoncé. C'est celui indexé par $s = 1$. On le remplace par le membre de droite du (ii) de l'énoncé plus la différence X entre le membre de gauche et ce membre de droite. Le calcul se poursuit, la seule différence est l'addition de ce terme X. On obtient

$$^{c}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M},\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = X + \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M},\boldsymbol{\delta},{}^{c}\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})).$$

Puisqu'on a déjà démontré l'égalité analogue sans le terme X, cela implique $X = 0$, ce que l'on devait prouver. $\square$

4.2 Preuves des propositions 2.2 et 2.5

On suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$ dont l'image dans $SI(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$ est nulle. On veut prouver que ${}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = 0$ et que, pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^{*}$, on a ${}^{c}S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = 0$. Le lemme 2.3 et nos hypothèses de récurrence assurent que $({}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))_{\tilde{R}} = 0$ pour tout espace de Levi propre $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$, autrement dit ${}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$ est cuspidale. Pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, avec $\tilde{L} \neq \tilde{M}$, nos hypothèses de récurrence assurent que ${}^{c}S\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = 0$. Pour $\boldsymbol{\delta}$ comme ci-dessus, la formule de la proposition 4.1(ii) se simplifie en

$$(1) \qquad {}^{c}S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = S^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},{}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).$$

On utilise la propriété de compacité 1.9(2) dont on a dit qu'elle se propageait à la distribution de gauche ci-dessus : le terme est nul quand le support de $\boldsymbol{\delta}$ ne coupe pas Ω^{G} pour un certain sous-ensemble compact Ω de $\tilde{G}(F)$. Il en résulte que ${}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$, qui est a priori un élément de $SI_{ac}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))$, est "à support compact", c'est-à-dire appartient à $SI(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))$. Il en résulte que, pour $\tilde{\pi} \in D_{ell}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^{*}$, la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},{}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ n'a pas de pôle. Ses coefficients de Fourier $S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,{}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}))$ sont donc indépendants du point $\nu \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{*}$. Dans la formule de la proposition 2.4, on peut remplacer chaque $\nu_{\tilde{S}}$ par 0. Puisque $\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X) = 1$ pour tout X, on obtient que $S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},0,X,{}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) = 0$ pour tout X. Par inversion de Fourier, $S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},{}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) = 0$. Un élément cuspidal de $SI(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))$ annulé par les distributions $S^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},.)$ pour tout $\tilde{\pi} \in D_{ell}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^{*}$ est nul ([5] corollaire 4.2(i)). Donc ${}^{c}S\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = 0$, ce qui prouve la proposition 2.2. Le membre de droite de (1) est maintenant nul, donc aussi celui de gauche. Cela prouve la proposition 2.5.

4.3 Preuve conditionnelle des propositions 3.8 et 3.9

Ici $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque mais on pose l'hypothèse suivante :

(1) pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^{*}$ et tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}).$$

Soient $\boldsymbol{\gamma}$ et $\mathbf{f}$ comme ci-dessus. Considérons le membre de droite de la formule du (i) de la proposition 4.1. Pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, la distribution $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},.)$ est égale à $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},.)$ soit par hypothèse de récurrence si $\tilde{L} \neq \tilde{G}$, soit par l'hypothèse (1) si $\tilde{L} = \tilde{G}$. Si $\tilde{L} \neq \tilde{M}$, on a aussi ${}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}) = {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$ par nos hypothèses de récurrence. La formule devient

$$
{}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})) + \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})).
$$

En comparant avec 1.9(3), on obtient

$$
(2) \qquad {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varphi}),
$$

où

$$
\boldsymbol{\varphi} = {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) - {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}).
$$

La propriété de compacité 1.9(3) se propage comme on l'a dit au membre de gauche de (2). Il en résulte que $\boldsymbol{\varphi}$, qui est a priori un élément de $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))$, est "à support compact", c'est-à-dire est un élément de $I(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))$. Pour une ω-représentation elliptique $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$, la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},\boldsymbol{\varphi})$ n'a donc pas de pôle. Ses coefficients de Fourier $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,\boldsymbol{\varphi})$ ne dépendent donc pas du point $\nu \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$. Par construction, on a

$$
I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,\boldsymbol{\varphi}) = I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f})) - I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu,X,{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})).
$$

On utilise les propositions 1.8 et 3.7 qui nous disent que

$$
\sum_{\tilde{S}\in\mathcal{P}(\tilde{M})} \omega_{\tilde{S}}(X) I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\nu_{\tilde{S}},X,\boldsymbol{\varphi}) = 0
$$

pour tout X. Comme dans le paragraphe précédent, on peut remplacer les points $\nu_{\tilde{S}}$ par 0 et conclure que $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},0,X,\boldsymbol{\varphi}) = 0$ pour tout X. Par inversion de Fourier, on obtient $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\boldsymbol{\varphi}) = 0$. Par ailleurs, les lemmes 1.6 et 3.5 et nos hypothèses de récurrence impliquent que $\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{R}} = 0$ pour tout espace de Levi propre $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\varphi}$ est cuspidale. Etant annulée par la distribution $I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},.)$ pour toute ω-représentation elliptique $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$, cette fonction est nulle. Donc

$$
{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}) = {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f}),
$$

ce qui prouve la proposition 3.8.

La fonction $\boldsymbol{\varphi}$ étant nulle, l'égalité (2) entraîne

$$
{}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}),
$$

ce qui prouve la proposition 3.9.

Dans le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, l'hypothèse (1) est le théorème [II] 1.16(ii), que l'on a déjà prouvé. Donc les propositions 3.8 et 3.9 sont prouvées inconditionnellement dans ce cas. Comme on l'a dit, la restriction que $\boldsymbol{\delta}$ est à support fortement régulier dans $\tilde{G}$ ne sert qu'à éviter dans le cas général l'introduction du délicat système de fonctions $B^{\tilde{G}}$. Dans le cas quasi-déployé et à torsion intérieure, ce système de fonctions est trivial, la preuve vaut aussi bien pour $\boldsymbol{\delta}$ quelconque.

4.4 L'application $\epsilon_{\tilde{M}}$

On a défini en [III] 6.2 des triplets particuliers $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Considérons un tel triplet. Le groupe G est simplement connexe et quasi-déployé. On note Θ_F l'ensemble des éléments semi-simples $\eta\in\tilde{G}(F)$ tels que ad_η conserve une paire de Borel épinglée définie sur F. On a vu en [III] 6.2 que ces éléments sont contenus dans un nombre fini de classes de conjugaison stable. On définit l'espace $I(\tilde{G}(F),\omega)^{00}$ comme le sous-espace des éléments $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)$ dont les intégrales orbitales sont nulles en tout point $\gamma\in\tilde{G}(F)$ dont la partie semi-simple appartient à une classe de conjugaison stable coupant Θ_F.

Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ n'est pas l'un des triplets particuliers définis en [III] 6.2, on pose simplement $I(\tilde{G}(F),\omega)^{00}=I(\tilde{G}(F),\omega)$.

On note naturellement $I_{ac,cusp}(\tilde{M}(F),\omega)$ le sous-espace des éléments cuspidaux de $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)$.

Proposition. *Il existe une unique application linéaire*

$$\epsilon_{\tilde{M}}:I(\tilde{G}(F),\omega)^{00}\otimes Mes(G(F))\to I_{ac,cusp}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$$

telle que

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})-I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\epsilon_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ *et tout* $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)^{00}\otimes Mes(G(F))$.

Preuve. Il est clair que l'application $\epsilon_{\tilde{M}}$ est unique si elle existe. Fixons $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)^{00}\otimes Mes(G(F))$. Considérons l'égalité

(1) $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})-I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varphi})$.

Commençons par prouver

(2) pour toute classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $\tilde{M}(F)$, il existe $\boldsymbol{\varphi}\in I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$ de sorte que (1) soit vérifiée pour tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ assez proche de $\mathcal{O}$.

On rappelle qu'on dit que $\boldsymbol{\gamma}$ est assez proche de $\mathcal{O}$ si les parties semi-simples des éléments du support de $\boldsymbol{\gamma}$ sont assez proches de $\mathcal{O}$. On utilise les développements en germes des deux termes du membre de gauche fournis par les propositions [II] 2.3 et [II] 2.6. On a ainsi

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})-I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f})-I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}).$$

Si $\tilde{L}\neq\tilde{M}$, on applique par récurrence le théorème [II] 1.16(i) : $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}=I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$. Si $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, on utilise par récurrence la proposition [II] 2.7 : $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}=g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L}}$. La formule se simplifie en

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})-I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma)-g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(\gamma),\mathbf{f})$$

$$+I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f})-I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}).$$

Les termes $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma})$ et $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma})$ sont en tout cas des éléments de $D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)\otimes Mes(G(F))^*$ où $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ est la classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$ contenant $\mathcal{O}$. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est l'un des triplets construits en [III] 6.2 et si $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ coupe Θ_F, l'hypothèse que $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega)^{00} \otimes Mes(G(F))$ entraîne que le premier terme du membre de droite ci-dessus est nul. Si au contraire $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ n'est pas l'un de ces triplets ou si c'est l'un d'eux mais $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ ne coupe pas Θ_F, la proposition [III] 8.5 affirme que $g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}) = g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma})$. Le premier terme ci-dessus est donc encore nul. L'égalité se simplifie en

$$(3) \qquad I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}) - I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}).$$

Choisissons une fonction $\boldsymbol{\varphi} \in I(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))$ telle que

$$I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\varphi}) = I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{f}) - I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{f})$$

pour tout $\boldsymbol{\tau} \in D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$. C'est possible puisque $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ est un sous-espace de dimension finie du dual de $I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$. Cela entraîne en particulier que

$$I^{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\boldsymbol{\varphi}) = I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}) - I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}).$$

Par le développement en germes de Shalika ordinaires, le membre de gauche ci-dessus est égal à $I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varphi})$ pourvu que $\boldsymbol{\gamma}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$. Alors l'égalité (3) devient (1). Cela démontre l'assertion (2).

Prouvons que

(4) il existe un sous-ensemble compact $\Omega \subset \tilde{M}(F)$ et une fonction $\boldsymbol{\varphi} \in I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$ de sorte que l'on ait l'égalité (1) pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ dont le support ne coupe pas Ω^M.

On utilise la relation 1.9(3) et la proposition 4.1(i). On obtient l'égalité

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = {}^cI^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - {}^cI^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$$
$$- \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}} I^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})) - I^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},{}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})).$$

On peut utiliser le théorème [II] 1.16(i) par récurrence puisque $\tilde{L} \neq \tilde{G}$: on a $I^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{M}} = I^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}$. Si $\tilde{L} \neq \tilde{M}$, on peut aussi utiliser la proposition 3.8 : ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f}) = {}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\mathbf{f})$. L'égalité se simplifie en

$$(5) \qquad I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = {}^cI^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - {}^cI^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) + I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varphi}),$$

où

$$\boldsymbol{\varphi} = {}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) - {}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}).$$

Cette fonction $\boldsymbol{\varphi}$ est bien un élément de $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))$. La propriété de compacité 1.9(2), qui se propage au premier terme du membre de droite de (5), assure l'existence d'un sous-ensemble compact Ω de $\tilde{M}(F)$ tel que les deux premiers termes de ce membre de droite soient nuls si le support de $\boldsymbol{\gamma}$ ne coupe pas Ω^M. Cela prouve (4).

On peut évidemment supposer Ω^M ouvert, fermé et invariant par conjugaison stable. Par partition de l'unité, l'assertion (2) permet de construire une fonction $\boldsymbol{\varphi} \in I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$ telle que (1) soit vérifiée pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ à support contenu dans Ω^M. L'assertion (4) construit une telle fonction telle que (1) soit vérifiée pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$ à support disjoint de Ω^M. En recollant ces deux fonctions, on obtient une fonction $\boldsymbol{\varphi}$ telle que (1) soit vérifiée pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$. Montrons que l'on peut supprimer la restriction sur le support de $\boldsymbol{\gamma}$. Pour cela, il suffit de fixer une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $\tilde{M}(F)$ et de prouver que la relation (1) est encore vérifiée pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(M(F))^*$. Pour de tels $\mathcal{O}$ et $\boldsymbol{\gamma}$, on peut choisir $\boldsymbol{\gamma}'$ à support fortement régulier dans $\tilde{G}$ et proche de $\mathcal{O}$ de sorte que $g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}') = \boldsymbol{\gamma}$, cf. [II] 2.1(1). La relation (3) appliquée à ce $\boldsymbol{\gamma}'$ nous dit que

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}',\mathbf{f}) - I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}',\mathbf{f}) = I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}).$$

De même, on a

$$I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\varphi}) = I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varphi}).$$

Puisque les membres de gauche des deux égalités précédentes sont égaux, ceux de droite le sont aussi.

On a ainsi construit une fonction $\boldsymbol{\varphi} \in I_{ac}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))$ pour laquelle (1) est vérifiée pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$. Soit $\tilde{R}$ un espace de Levi propre de $\tilde{M}$ et $\boldsymbol{\tau} \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{R}(F),\omega) \otimes Mes(R(F))^*$. Les relations de descente du lemme [II] 1.7 et de [II] 1.15(1), jointes à nos hypothèses de récurrence, assurent que le membre de gauche de (1) est nul pour $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\tau}^{\tilde{M}}$. Donc $I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau}^{\tilde{M}},\boldsymbol{\varphi}) = 0$. Cela assure que $\boldsymbol{\varphi}$ est cuspidale. $\square$

Il résulte de la preuve que, pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega)^{00} \otimes Mes(G(F))$, la fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est la somme de ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f}) - {}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ et d'une fonction à support compact, c'est-à-dire d'un élément de $I(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))$. Il résulte alors de 1.8 et 3.6 que

(6) la fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(\mathbf{f})$ est de Schwartz ;

(7) soit $\tilde{\pi} \in D_{temp}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$; alors la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi},\tilde{\lambda},\epsilon_{\tilde{M}}(\mathbf{f}))$ définie sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{M},F}$ se prolonge en une fonction rationnelle sur $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^{\vee}_{\tilde{M},F}$; ses pôles sont de la forme décrite en 1.8(2).

Références

[1] J. Arthur : *A stable trace formula III. Proof of the main theorems* , Annals of Math. 158 (2003), p. 769-873

[2] ——— : *The trace formula in invariant form*, Annals of Math. 114 (1981), p. 1-74

[3] ——— : *Intertwining operators and residues I. Weighted characters*, J. of Funct. Analysis 84 (1989), p. 19-84

[4] G. Henniart, B. Lemaire : *La transformée de Fourier pour les espaces tordus sur un groupe réductif p-adique I. Le théorème de Paley-Wiener* , prépublication 2013

[5] C. Moeglin : *Représentations elliptiques ; caractérisation et formule de transfert de caractères*, prépublication 2013

[6] J.-L. Waldspurger : *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012

[I], [II], [III], [IV] ——— : *Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local*, *II : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non archimédien ; définitions et énoncés des résultats*, *III : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non archimédien ; réductions et preuves*, *IV : transfert spectral archimédien*, prépublications 2014

e-mail : jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr