Stabilisation de la formule des traces tordue VI : la partie géométrique de cette formule

C. Moeglin, J.-L. Waldspurger

23 mai 2015

Introduction

Le but ultime de notre travail est la stabilisation de la formule des traces tordue. Le présent article énonce les résultats que l'on a en vue concernant la partie géométrique de cette formule. Ce sont les généralisations au cas tordu des théorèmes énoncés par Arthur dans son premier article sur la stabilisation ([1]), du moins de ceux qui concernent cette partie géométrique. Nous ne démontrons pas ici les résultats en question. Ils seront démontrés plus tard en reprenant les méthodes des deux autres articles d'Arthur sur le sujet. On doit dire que généraliser au cas tordu les constructions d'Arthur pose certains problèmes techniques, mais aucun problème conceptuel. C'est-à-dire que l'essentiel est dû à Arthur lui-même.

La première section présente le cadre global dans lequel on se place. On considère un corps de nombres F, un groupe réductif connexe G défini sur F, un espace tordu $\tilde{G}$ sous G et un caractère ω de $G(\mathbb{A})$ trivial sur $G(F)$, où $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de F. On définit les intégrales orbitales pondérées globales, certaines de leurs variantes et on énonce les formules de descente qui les relient à leurs avatars locaux. La section 2 énonce la partie géométrique de la formule des traces tordue ω-équivariante. On énonce cette formule d'une façon un peu plus abstraite qu'Arthur. Il est traditionnel et naturel de l'écrire comme une somme avec coefficients d'intégrales orbitales $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ ou plus généralement d'intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,f)$. La présence du caractère ω perturbe déjà la situation : les avatars locaux des intégrales $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ ne dépendent pas seulement de la classe de conjugaison de γ mais bien du point base γ choisi. Surtout, comme on le sait, les coefficients dont sont affectés ces intégrales ne sont à ce jour pas connus explicitement (ils sont connus si γ est fortement régulier, mais pas si γ contient une partie unipotente). On a choisi de regrouper les intégrales $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$, affectées de leurs coefficients, selon la classe de conjugaison à laquelle appartient la partie semi-simple de γ. On obtient ainsi des distributions notées $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ dépendant d'un ensemble fini assez grand V de places du corps de base F et d'une classe de conjugaison semi-simple $\mathcal{O}$ dans $\tilde{G}(F)$. On énonce en 2.3 leur définition. Ces distributions sont les ingrédients globaux de la partie géométrique de la formule des traces. Elles vérifient une formule de descente qui les ramène au cas basique où $\tilde{G}=G$ n'est pas tordu et où $\mathcal{O}$ est simplement la classe $\{1\}$ (dans ce cas, $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ est exactement la "partie unipotente" de la formule des traces). Dans la section 3, on présente la théorie de l'endoscopie dans le cadre global. La différence essentielle avec le cas local développé en [I] est que, dans le cas global, pour une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ relevante, il y a un facteur de transfert canonique. La situation tordue pose ici un problème technique. Usuellement, la définition d'un tel facteur utilise un point $\delta \in \tilde{G}'(F)$, assez régulier, qui se transfère en un élément $\gamma_v \in \tilde{G}(F_v)$ pour toute place v de F. Dans le cas non tordu, un tel point existe si $\mathbf{G}'$ est relevante. Ce n'est plus vrai dans le cas tordu. On dit que $\mathbf{G}'$ est relevante si et seulement $\tilde{G}'(F) \neq \emptyset$ et la donnée locale $\mathbf{G}'_v$ est relevante pour toute place v. On a posé cette définition parce que c'est la seule notion que l'on sache contrôler. Or cela n'assure pas l'existence d'un $\delta \in \tilde{G}'(F)$ vérifiant les propriétés ci-dessus. Il est possible que les données $\mathbf{G}'$ pour lesquelles il n'existe pas de tel δ puissent être éliminées du processus de stabilisation mais cela ne nous paraît pas clair. On a plutôt choisi de donner une définition du facteur de transfert global sous la seule hypothèse de relevance telle que définie ci-dessus. D'abord, en inspectant les définitions de Kottwitz-Shelstad ou de Labesse, on voit que l'on n'a pas vraiment besoin d'un δ comme ci-dessus. Il suffit qu'il existe un sous-tore tordu maximal $\tilde{T}'$ de $\tilde{G}'$, défini sur F, de sorte que, pour toute place v, il existe un élément $\delta_v \in \tilde{T}'(F_v)$ assez régulier qui se transfère en un élément $\gamma_v \in \tilde{G}(F_v)$. Même cette propriété moins forte n'est pas assurée par notre hypothèse de relevance. Mais on peut plonger $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ dans des espaces plus gros qui satisfont cette propriété. On définit alors le facteur de transfert comme la restriction à notre couple $(\tilde{G}', \tilde{G})$ du facteur de transfert défini sur ces espaces plus gros. Cela est fait au paragraphe 3.9. Dans la section 4, on définit les avatars stables et endoscopiques des intégrales orbitales pondérées invariantes. On énonce le résultat principal en 4.5, à savoir qu'une intégrale orbitale pondérée endoscopique est en fait une intégrale orbitale pondérée (ω-équivariante) tout court. Ce résultat se déduit des analogues locaux énoncés en [II] et [V], qui restent à démontrer. La section 5 énonce la version stable de la partie géométrique de la formule des traces. Les distributions $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega)$ sont remplacées par des distributions $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O})$, où cette fois, $\mathcal{O}$ est une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$. Ces distributions doivent être stables. Le théorème 5.4 exprime que les coefficients initiaux $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega)$ se récupèrent comme somme de transferts de tels coefficients $SA^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{O}^{\mathbf{G}'})$, où $\mathbf{G}'$ décrit les données endoscopiques de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ qui sont elliptiques, relevantes et non ramifiées hors de V. Le théorème principal 5.10 exprime que la partie géométrique de la formule des traces ω-équivariante se récupère de même comme somme de parties géométriques de formules des traces stables associées à ces mêmes données $\mathbf{G}'$. Dans la section 6, on montre que ce dernier théorème résulte des autres. Il s'agit ici d'une reprise du paragraphe 10 de l'article [1]. Il y a deux ingrédients. D'une part, la proposition combinatoire 6.5 qui fournit deux expressions a priori très différentes d'une double somme sur des données endoscopiques $\mathbf{G}'$ et sur des "Levi" $\mathbf{M}'$ de $\mathbf{G}'$. D'autre part, une proposition d'annulation 6.6 qui permet dans le paragraphe suivant de faire disparaître les termes apparaissant dans les formules de traces stables des données endoscopiques qui ne correspondent à rien du côté de l'espace initial $\tilde{G}$. La démonstration de cette proposition 6.6 est un amusant exercice basé sur les propriétés des facteurs de transfert globaux.

1 Les définitions

1.1 Groupes et espaces tordus

Soit F un corps de nombres. On note $Val(F)$ l'ensemble de ses places, $Val_\infty(F)$ le sous-ensemble des places archimédiennes, $Val_f(F)$ celui des places finies et $\mathbb{A}_F$ son anneau d'adèles. On fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F. Il est commode de supposer tacitement que, pour toute place $v \in Val(F)$, on a choisi un prolongement $\bar{v}$ de v à $\bar{F}$. Ainsi, on peut définir le sous-groupe de décomposition $\Gamma_{F_v} \subset \Gamma_F$ comme le fixateur de $\bar{v}$. De même, pour une variété X définie sur F, on a une application $X(\bar{F}) \to X(\bar{F}_v)$ obtenue en identifiant $\bar{F}$ à un sous-corps de $\bar{F}_v$ grâce à la place $\bar{v}$.

Soient G un groupe réductif connexe défini sur F et $\tilde{G}$ un espace tordu sous G. On utilise les définitions des quatre premiers paragraphes de [I]. Soit $\mathbf{a}$ un élément de $H^1(W_F; Z(\hat{G}))/ker^1(W_F; Z(\hat{G}))$, où $ker^1(W_F; Z(\hat{G}))$ est le noyau (fini) de l'homomorphisme de localisation

$$H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to \prod_{v \in Val(F)} H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G})).$$

Cet élément $\mathbf{a}$ détermine un caractère ω de $G(\mathbb{A})$, trivial sur $G(F)$. L'application $\mathbf{a} \mapsto \omega$ est bijective. On impose les hypothèses analogues à celles de [I] 1.5 :

• $\tilde{G}(F) \neq \emptyset$;

• l'automorphisme θ de $Z(G)$ est d'ordre fini, où ici θ est la restriction de ad_γ à $Z(G)$ pour n'importe quel élément $\gamma \in \tilde{G}$.

On impose de plus

• ω est unitaire.

On pourrait ajouter la condition

• ω est trivial sur $Z(G; \mathbb{A}_F)^\theta$,

faute de laquelle la théorie devient vide. Mais, pour des raisons de récurrence, il vaut mieux ne pas l'imposer dès le départ.

Pour toute place $v \in Val(F)$, on déduit par localisation de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet $(G_v, \tilde{G}_v, \mathbf{a}_v)$ sur F_v, qui vérifie les hypothèses de [I]. On note V_{ram}, ou plus précisément $V_{ram}(\tilde{G}, \mathbf{a})$, le plus petit ensemble de places v contenant les places archimédiennes et tel que, pour $v \notin V_{ram}$, on ait :

- G et $\mathbf{a}$ sont non ramifiés en v et $\tilde{G}(F_v)$ possède un sous-espace hyperspécial ;

- en notant p la caractéristique résiduelle de F_v et $e_v = [F_v : \mathbb{Q}_p]$, on a $p > 5$ et $p > N(G)e_v + 1$, où $N(G)$ est l'entier défini en [24] 4.3.

On fixe une paire parabolique (P_0, M_0) de G définie sur F et minimale. On en déduit une paire parabolique $(\tilde{P}_0, \tilde{M}_0)$ de $\tilde{G}$.

Soit V un ensemble fini de places contenant V_{ram} et tel que G et $\tilde{G}$ puissent être définis sur l'anneau $\mathfrak{o}^V$ des éléments de F qui sont entiers hors de V. Fixer des structures de G et $\tilde{G}$ sur $\mathfrak{o}^V$ permet de définir les ensembles $G(\mathfrak{o}_v)$ et $\tilde{G}(\mathfrak{o}_v)$ pour tout $v \notin V$, où $\mathfrak{o}_v$ est l'anneau d'entiers de F_v. Pour tout $v \notin V_{ram}$, on fixe un sous-groupe compact hyperspécial K_v de $G(F_v)$ et un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}_v$ de $\tilde{G}(F_v)$ associé à K_v. On impose que $K_v = G(\mathfrak{o}_v)$ et $\tilde{K}_v = \tilde{G}(\mathfrak{o}_v)$ pour presque tout v. Cette condition ne dépend ni du choix de V, ni de celui des structures sur $\mathfrak{o}^V$. Elle implique que, pour $\gamma \in \tilde{G}(F)$, on a $\gamma \in \tilde{K}_v$ pour presque tout v. Pour $v \in V_{ram}$, on fixe un sous-groupe compact maximal K_v de $G(F_v)$, spécial si v est non archimédienne. On impose

- pour toute place $v \in Val(F)$, K_v est en bonne position relativement à M_0.

C'est possible puisque, pour $v \notin V_{ram}$, tout sous-groupe compact hyperspécial est conjugué par un élément de $G(F_v)$ à un tel sous-groupe en bonne position relativement à M_0. Pour $v \notin V_{ram}$, on note $\mathbf{1}_{\tilde{K}_v}$ la fonction caractéristique de $\tilde{K}_v$ dans $\tilde{G}(F_v)$ et on appelle mesure canonique sur $G(F_v)$ la mesure de Haar sur ce groupe telle que $mes(K_v) = 1$ (elle est en effet canonique car tous les sous-groupes compacts hyperspéciaux ont même mesure).

Pour un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, on utilise les notations d'Arthur $\mathcal{P}(\tilde{M})$, $\mathcal{L}(\tilde{M})$ etc... Les éléments de ces ensembles sont des espaces paraboliques, resp. des espaces de Levi etc... définis sur F. Pour $\tilde{M} \supset \tilde{M}_0$ et $v \in Val(F)$, on pose $\tilde{K}_v^{\tilde{M}} = \tilde{K}_v \cap \tilde{M}(F_v)$. Ces données vérifient les mêmes conditions que celles pour $\tilde{G}$.

Rappelons que l'on note $A_{\tilde{G}}$ le plus grand sous-tore déployé contenu dans le sous-groupe d'invariants $Z(G)^\theta$. On note $\mathcal{A}_{\tilde{G}} = X_*(A_{\tilde{G}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On dispose de l'homomorphisme habituel $H_{\tilde{G}} : G(\mathbb{A}_F) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On définit une application $\tilde{H}_{\tilde{G}} : \tilde{G}(\mathbb{A}_F) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ par les conditions suivantes :

$\tilde{H}_{\tilde{G}}(\dot{\gamma}) = 0$ pour tout $\dot{\gamma} \in \tilde{G}(F)$;

$\tilde{H}_{\tilde{G}}(x\gamma) = H_{\tilde{G}}(x) + \tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma)$ pour tous $x \in G(\mathbb{A}_F)$ et $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$.

Soit V un ensemble fini de places de F. On pose $F_V = \prod_{v \in V} F_v$ et on note $\mathbb{A}_F^V$ le sous-anneau des adèles dont les composantes sur F_v sont nulles pour tout $v \in V$. On pose

$$C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) = \otimes_{v \in V} C_c^\infty(\tilde{G}(F_v)).$$

On définit de la même façon l'espace $I(\tilde{G}(F_V), \omega)$.

Remarque. On adopte cette définition par commodité. On pourrait aussi bien utiliser un espace un peu plus gros en regroupant les places archimédiennes. C'est-à-dire que l'on pourrait remplacer la partie archimédienne $\otimes_{v \in V \cap V_\infty(F)} C_c^\infty(\tilde{G}(F_v))$ du produit tensoriel ci-dessus par $C_c^\infty(\prod_{v \in V \cap V_\infty(F)} \tilde{G}(F_v))$.

Considérons le cas où $V \supset V_{ram}$. Dans ce cas, on peut identifier $C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$ à un sous-espace de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ en complétant un produit $\otimes_{v \in V} f_v$ en le produit $\mathbf{1}_{\tilde{K}^V} \otimes (\otimes_{v \in V} f_v)$, où $\mathbf{1}_{\tilde{K}^V} = \otimes_{v \notin V} \mathbf{1}_{\tilde{K}_v}$. . On peut aussi identifier $Mes(G(F_V))$ à $Mes(G(\mathbb{A}_F))$ en prolongeant toute mesure sur $G(F_V)$ par les produit sur $v \notin V$ des mesures canoniques sur $G(F_v)$. Pour tout $v \in Val(F)$, notons $\tilde{G}_v$ l'espace $\tilde{G}$ vu comme un espace sur F_v. En [II] 1.6, on a défini l'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_v}$ de la façon suivante. On note $G(F_v)^1$ le noyau et $\mathcal{A}_{\tilde{G}_v, F_v}$ l'image de l'homomorphisme $H_{\tilde{G}_v} : G(F_v) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}_v}$. Alors le sous-groupe $\mathcal{A}_{\tilde{G}_v, F_v}$ agit naturellement sur $G(F_v)^1 \backslash \tilde{G}(F_v)$. On pose

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_v} = (G(F_v)^1 \backslash \tilde{G}(F_v)) \otimes_{\mathcal{A}_{\tilde{G}_v, F_v}} \mathcal{A}_{\tilde{G}_v}.$$

C'est un espace affine sous $\mathcal{A}_{\tilde{G}_v}$. On note $\tilde{H}_{\tilde{G}_v} : \tilde{G}(F_v) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_v}$ l'application naturelle. Pour $v \notin V_{ram}$, l'image de $\tilde{K}_v$ par $\tilde{H}_{\tilde{G}_v}$ est réduite à un point et on identifie $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_v}$ à $\mathcal{A}_{\tilde{G}_v}$ en identifiant ce point à 0. Posons

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_V} = \prod_{v \in V} \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_v}.$$

On définit une application

$$\tilde{p}_V : \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_V} \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$$

de la façon suivante. Fixons $\dot{\gamma} \in \tilde{G}(F)$. Tout élément $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_V}$ s'écrit $\tilde{X} = (\tilde{H}_{\tilde{G}_v}(\dot{\gamma}) + X_v)_{v \in V}$, où $X_v \in \mathcal{A}_{\tilde{G}_v}$. On pose

$$\tilde{p}_V(\tilde{X}) = (\sum_{v \in V} X_{v, \tilde{G}}) - (\sum_{v \notin V} (\tilde{H}_{\tilde{G}_v}(\dot{\gamma}))_{\tilde{G}}),$$

où les indices $\tilde{G}$ désignent les projections orthogonales sur l'espace $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. Cette définition ne dépend pas du point $\dot{\gamma}$ choisi. On définit une application

$$\tilde{H}_{\tilde{G}_V} : \tilde{G}(F_V) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$$

par $\tilde{H}_{\tilde{G}_V}((\gamma_v)_{v\in V}) = \tilde{p}_V((\tilde{H}_{\tilde{G}_v}(\gamma_v))_{v\in V})$.

On introduit le sous-espace $C_c^\infty(\tilde{G}(F_V),K)$ de $C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$ formé des fonctions qui, en toute place archimédienne $v \in V$, sont K_v-finies à droite et à gauche. On note $I(\tilde{G}(F_V),K,\omega)$ son image dans $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$.

Considérons le cas de deux ensembles finis de places $S \supset V \supset V_{ram}$. On pose $F_S^V = \prod_{v\in S-V} F_v$. On peut identifier $C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$ à un sous-espace de $C_c^\infty(\tilde{G}(F_S))$ en complétant un produit $\otimes_{v\in V} f_v$ en le produit $\mathbf{1}_{\tilde{K}_S^V}\otimes(\otimes_{v\in V} f_v)$. De même, on peut identifier $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$ à un sous-espace de $I(\tilde{G}(F_S),\omega)$. On peut aussi identifier $Mes(G(F_V))$ à $Mes(G(F_S))$.

Nos preuves se feront par récurrence. Posons en toute généralité les hypothèses de récurrence qu'on utilisera (qui étendent celles posées dans les chapitres précédents). Nos résultats concernent des triplets $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ définis sur un corps F qui est soit un corps de nombres comme ci-dessus, soit un corps local de caractéristique nulle comme dans les chapitres précédents. Une variante consiste à considérer des K-triplets $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$ que l'on a déjà définis sur le corps de base $\mathbb{R}$ et que l'on définira en 1.16 sur un corps de nombres. On isole un cas particulier : celui d'un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. En tout cas, on raisonne par récurrence sur l'entier $dim(G_{SC})$, où G_{SC} est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G et $dim(G_{SC})$ est sa dimension sur F. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est un triplet quasi-déployé et à torsion intérieure défini sur F, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets $(G',\tilde{G}',\mathbf{a}')$ quasi-déployés et à torsion intérieure définis sur un corps F' tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est un triplet défini sur F qui n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets $(G',\tilde{G}',\mathbf{a}')$ quasi-déployés et à torsion intérieure définis sur un corps F' tels que $dim(G'_{SC}) \leq dim(G_{SC})$ et on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets $(G',\tilde{G}',\mathbf{a}')$ quelconques définis sur un corps F' tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$. Quand on travaille avec un K-triplet $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$ défini sur F, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets $(G',\tilde{G}',\mathbf{a}')$ quasi-déployés et à torsion intérieure définis sur un corps F' tels que $dim(G'_{SC}) \leq dim(G_{SC})$ et on suppose connues toutes les assertions concernant des K-triplets $(KG',K\tilde{G}',\mathbf{a}')$ définis sur un corps F' tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$. On utilise une deuxième récurrence lorsqu'une assertion fait intervenir un espace de Levi $\tilde{M}$ d'un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ défini sur F. Dans ce cas, on suppose connues toutes les assertions concernant le triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ relatives à un espace de Levi $\tilde{L}$ contenant strictement $\tilde{M}$. On utilise une résurrence analogue lorsqu'une assertion fait intervenir un K-espace de Levi $K\tilde{M}$ d'un K-triplet $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$. Il intervient aussi des assertions annexes concernant des triplets endoscopiques non standard (G_1,G_2,j_*). Dans le cas local, on a déjà indiqué en [III] 6.3 comment on les insérait dans notre schéma de récurrence. Le cas global est similaire, cf. 5.8 ci-dessous.

La nécessité de faire varier le corps de base F dans ces hypothèses a deux sources. D'abord, quand on travaille avec un triplet défini $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ sur un corps de nombres F, on doit connaître certaines propriétés des triplets localisés $(G_v,\tilde{G}_v,\mathbf{a}_v)$. Inversement, la preuve du principal théorème local ([II] 1.16) se fait par globalisation. On a donc besoin, pour démontrer ce théorème pour un triplet défini sur un corps local F, d'utiliser des propriétés concernant des triplets définis sur un corps de nombres dont F est un localisé.

1.2 Remarque sur les hypothèses

On va montrer

(1) il existe un groupe algébrique non connexe G^+ défini sur F et réductif, de composante neutre G, de sorte que $\tilde{G}$ s'identifie à une composante connexe de G^+ munie des actions de G par multiplication à droite et à gauche.

Preuve. Fixons $\gamma \in \tilde{G}(F)$, posons $\theta = ad_\gamma$. Parce que l'on suppose que la restriction de θ à $Z(G)$ est d'ordre fini, il existe un entier $n \geq 1$ tel que θ^n soit un automorphisme intérieur de G. Il existe donc $x \in G_{SC}(\bar{F})$ tel que $\theta^n = ad_x$. Parce que θ est défini sur F, ad_x l'est aussi. Donc $\sigma(x) \in xZ(G_{SC})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Parce que θ commute à θ^n, donc à ad_x, on a aussi $\theta(x) \in xZ(G_{SC})$. Notons m le nombre d'éléments de $Z(G_{SC})$. Posons $N = mn$ et $y = x^m$. Alors $\theta^N = ad_y$ et on a $y \in G_{SC}(F)$ et $\theta(y) = y$. Notons G^+ l'ensemble des éléments (g, θ^i) avec $g \in G$ et $i \in \{0, ..., N-1\}$. On définit la multiplication par

$$(g,\theta^i)(g',\theta^j) = \begin{cases} (g\theta^i(g'),\theta^{i+j}), & \text{si } i+j \leq N-1, \\ (g\theta^i(g')y,\theta^k), & \text{si } i+j = N+k \text{ avec } k \geq 0. \end{cases}$$

On obtient un groupe réductif non connexe défini sur F. L'application $(g,\theta) \mapsto g\gamma$ identifie la composante $G\theta$ de G^+ à $\tilde{G}$. $\square$

Cette remarque ne nous servira pas directement. Mais elle nous permet d'appliquer à notre espace $\tilde{G}$ les résultats démontrés dans la littérature pour les groupes non connexes.

1.3 Mesures sur les espaces $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On aura besoin d'une mesure sur l'espace $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. On a choisi d'éviter autant que possible de normaliser les mesures. Logiquement, on devrait faire de même pour la mesure sur cet espace. Toutefois, cela conduirait à des formulations par trop inhabituelles des formules de descente. On fixe donc sur tout espace $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ une mesure de Haar, à laquelle on impose quelques conditions évidentes ; par exemple, si $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'$ sont conjugués par un élément $g \in G(F)$, on suppose que les mesures sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{M}'}$ se correspondent par cette conjugaison. Si $\tilde{M} \subset \tilde{L}$ sont deux espaces de Levi, on munit $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$ de la mesure pour laquelle la décomposition $\mathcal{A}_{\tilde{M}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}}$ est compatible aux mesures.

Il y a au moins deux façons de définir ces mesures. Identifions $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ à $Hom(X^*(M)^{\Gamma_F,\theta}, \mathbb{R})$, où $X^*(M)$ est le groupe des caractères algébriques de M. Notons $\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{Z}}$ le réseau $Hom(X^*(M)^{\Gamma_F,\theta}, \mathbb{Z})$. On peut imposer que ce réseau est de covolume 1. C'est la normalisation de la théorie des mesures de Tamagawa. Elle a l'inconvénient de se comporter assez mal vis-à-vis des suites exactes. Une autre méthode est la suivante. Considérons <u>la</u> paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^* = (B^*, T^*, (E_\alpha^*)_{\alpha\in\Delta})$ de G, munie de l'action galoisienne quasi-déployée. Posons $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = X_*(T^*) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. On munit cet espace vectoriel réel d'une forme quadratique définie positive invariante par l'action galoisienne quasi-déployée, par celle du groupe de Weyl W et par l'automorphisme θ associé à $\mathcal{E}^*$. C'est possible puisque le groupe d'automorphismes de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ engendré par ces actions est fini. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. En choisissant un élément $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, on peut identifier $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ à un sous-espace de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ se retrouve muni de la restriction de la forme quadratique précédente. Les invariances imposées à cette dernière impliquent que cette restriction ne dépend pas du choix de $\tilde{P}$. On munit $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et plus généralement tout sous-espace de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ de la mesure euclidienne associée à cette forme quadratique.

En tout cas, on suppose fixées les mesures sur ces espaces, d'une façon ou d'une autre. De même, si v est une place de F et $\tilde{M}^v$ est un espace de Levi de $\tilde{G}_v$, on suppose fixée une mesure de Haar sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}^v}$. Notons qu'on n'impose pas de relation entre les mesures "locales" et les mesures "globales". Par exemple, si G est déployé et si $\tilde{M}$ est un espace de Levi de $\tilde{G}$, on a l'égalité $\mathcal{A}_{\tilde{M}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}_v}$, mais on ne demande pas que les mesures sur ces espaces soient les mêmes.

Notons $G_{\mathbb{Q}}$ le groupe sur $\mathbb{Q}$ déduit de G par restriction des scalaires et, comme toujours, $A_{G_{\mathbb{Q}}}$ le plus grand tore déployé central dans $G_{\mathbb{Q}}$. On note $\mathfrak{A}_G$ la composante neutre topologique de $A_{G_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{R})$. Notons que $A_{G_{\mathbb{Q}}}$ est aussi le plus grand tore déployé dans le groupe sur $\mathbb{Q}$ déduit de A_G par restriction des scalaires. On en déduit des inclusions

$$\mathfrak{A}_G\subset A_G(F_\infty)\subset A_G(\mathbb{A}_F)\subset G(\mathbb{A}_F),$$

où $F_\infty=\prod_{v\in Val_\infty(F)}F_v$. L'espace $\mathfrak{A}_G$ est conservé par θ. On note $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ le sous-espace des points fixes par θ. La restriction à $\mathfrak{A}_G$ de l'homomorphisme $H_G:G(\mathbb{A}_F)\to\mathcal{A}_G$ est un isomorphisme qui permet d'identifier $\mathfrak{A}_G$ à $\mathcal{A}_G$ et $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On munit l'espace $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ de la mesure telle que ce dernier isomorphisme préserve les mesures.

1.4 Formule de descente des $(\tilde{G},\tilde{M})$-familles

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et V un ensemble fini non vide de places de F. Pour $v\in V$, on note $\tilde{G}_v$, $\tilde{M}_v$ etc... les espaces $\tilde{G}$, $\tilde{M}$ etc... vus comme des espaces sur F_v. Pour tout v, soit $\tilde{R}^v$ un espace de Levi de $\tilde{M}_v$ défini sur F_v. On a mis v en exposant pour éviter une possible confusion : $\tilde{R}^v$ n'a pas de raison d'être le localisé d'un espace $\tilde{R}$ défini sur F. Soit $(c_v(\tilde{S}^v;\Lambda))_{\tilde{S}^v\in\mathcal{P}(\tilde{R}^v)}$ une $(\tilde{G}_v,\tilde{R}^v)$-famille (la variable Λ appartient à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}^v}$). On en déduit une $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille de la façon suivante. Pour $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$ et $v\in V$, on choisit $\tilde{S}^v\in\mathcal{P}(\tilde{R}^v)$ tel que $\tilde{S}^v\subset\tilde{P}_v$. L'espace $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ se plonge dans $i\mathcal{A}^*_{\tilde{R}^v}$. Pour $\Lambda\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, on pose

$$c(\tilde{P};\Lambda)=\prod_{v\in V}c_v(\tilde{S}^v;\Lambda).$$

Cela ne dépend pas du choix des $\tilde{S}^v$ et la famille $(c(\tilde{P};\Lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ est une $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille. Pour $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$, on note $\Delta_{\tilde{P}}$ l'ensemble des restrictions à $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ de racines simples relativement à P. A toute racine $\alpha\in\Delta_{\tilde{P}}$, on associe une coracine $\check{\alpha}\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ (la normalisation précise de $\check{\alpha}$ n'importe pas, la demi-droite qu'elle porte étant définie sans ambiguïté). On note $\mathbb{Z}(\check{\Delta}_{\tilde{P}})$ le réseau de $\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ engendré par ces coracines. On définit la fonction méromorphe

$$\epsilon^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(\Lambda)=mes(\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_{\tilde{P}}])\prod_{\alpha\in\Delta_{\tilde{P}}}<\Lambda,\check{\alpha}>^{-1}$$

sur le complexifié $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. On déduit de la $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille une fonction

$$c^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\Lambda)=\sum_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}c(\tilde{P};\Lambda)\epsilon^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(\Lambda).$$

D'autre part, pour $v\in V$ et $\tilde{Q}^v=\tilde{L}^v\tilde{U}_{Q^v}\in\mathcal{F}(\tilde{R}^v)$, on déduit de $(c_v(\tilde{S}^v;\Lambda))_{\tilde{S}^v\in\mathcal{P}(\tilde{R}^v)}$ une $(\tilde{L}^v,\tilde{R}^v)$-famille $(c_v(\tilde{S}^v;\Lambda))_{\tilde{S}^v\in\mathcal{P}(\tilde{R}^v);\tilde{S}^v\subset\tilde{Q}^v}$, puis une fonction $c^{\tilde{Q}^v}_{v,\tilde{R}^v}(\Lambda)$. Posons $\tilde{R}^V=(\tilde{R}^v)_{v\in V}$ et notons $\mathcal{L}(\tilde{R}^V)$ l'ensemble des familles $\tilde{L}^V=(\tilde{L}^v)_{v\in V}$ où $\tilde{L}^v\in\mathcal{L}(\tilde{R}^v)$ pour tout $v\in V$. Pour une telle famille, on pose

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}^V}=\oplus_{v\in V}\mathcal{A}_{\tilde{L}^v},\ \mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}^V}=\oplus_{v\in V}\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}^v}$$

où $\mathcal{A}_{\tilde{L}^v}^{\tilde{G}}$ est l'orthogonal dans $\mathcal{A}_{\tilde{L}^v}$ de l'image naturelle de $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ (notons que cette image est incluse dans $\mathcal{A}_{\tilde{G}_v}$ mais l'inclusion peut être stricte : $\tilde{G}$ peut être plus déployé sur F_v que sur F). L'espace $\mathcal{A}_{\tilde{R}^V}^{\tilde{G}}$ contient $\mathcal{A}_{\tilde{L}^V}^{\tilde{G}}$ comme sous-espace. Il contient aussi l'espace $\Delta_V(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}})$ où Δ_V est le plongement diagonal. On définit le coefficient $d_{\tilde{R}^V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)$. Il est nul sauf si

$$\mathcal{A}_{\tilde{R}^V}^{\tilde{G}} = \Delta_V(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}) \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}^V}^{\tilde{G}}.$$

Si cette égalité est vérifiée, c'est le rapport entre la mesure sur le membre de droite et celle sur le membre de gauche. Pour tout $\tilde{L}^V$ tel que ce nombre soit non nul, Arthur définit, au moyen d'une donnée auxiliaire, une famille $(\tilde{Q}^v)_{v\in V}$ telle que $\tilde{Q}^v \in \mathcal{P}(\tilde{L}^v)$ pour tout $v \in V$. On a alors la formule

$$(1) \qquad c_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\Lambda) = \sum_{\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{R}^V)} d_{\tilde{R}^V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V) \prod_{v\in V} c_{v,\tilde{R}^v}^{\tilde{Q}^v}(\Lambda).$$

Cf. [2] proposition 7.1.

On appliquera souvent cette formule à la famille $\tilde{R}^V = (\tilde{M}_v)_{v\in V}$. On note $\tilde{M}_V$ cette famille.

1.5 Caractères pondérés

Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et V un ensemble fini de places de F. Rappelons que, pour une place $v \in Val(F)$, on a défini en [23] 2.5 la notion de ω-représentation de $\tilde{G}(F_v)$. A toute telle ω-représentation $\tilde{\pi}$ est associée une représentation sous-jacente π de $G(F_v)$. On note $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_v}^*$ l'espace des applications affines $\tilde{\lambda} : \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_v} \to \mathbb{R}$. A tout $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_v}^*$ est associée une forme linéaire λ sur $\mathcal{A}_{\tilde{G}_v}$. Si $\tilde{\pi}$ est une ω-représentation de $\tilde{G}(F_v)$ et $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_v}^*$, on définit la ω-représentation $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}$ par $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}(\gamma) = e^{<\tilde{\lambda},\tilde{H}_{\tilde{G}_v}(\gamma)>}\tilde{\pi}(\gamma)$, où on note $< \tilde{\lambda}, \tilde{H}_{\tilde{G}_v}(\gamma) >$ l'évaluation de $\tilde{\lambda}$ au point $\tilde{H}_{\tilde{G}_v}(\gamma)$. Pour une ω-représentation $\tilde{\pi}$ admissible et de longueur finie de $\tilde{M}(F_v)$, on a défini, à la suite d'Arthur, le caractère pondéré $f \mapsto J_{\tilde{M}_v}^{\tilde{G}_v}(\tilde{\pi}, f)$. Dans la suite de ce paragraphe, on va globaliser cette définition.

Pour tout $v \in V$, soit $\tilde{\pi}_v$ une ω-représentation de $\tilde{M}(F_v)$, admissible et de longueur finie. Posons $\tilde{\pi}_V = \otimes_{v\in V}\tilde{\pi}_v$. Fixons $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, introduisons la représentation induite $Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi})$ de $\tilde{G}(F_V)$, que l'on réalise dans son espace habituel que l'on note $V_{\pi,P}$. Supposons dans un premier temps que $\tilde{\pi}$ est en position générale de sorte que les opérateurs d'entrelacement qui vont apparaître soient bien définis et inversibles. Pour $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, l'opérateur $J_{P|Q}(\pi)J_{Q|P}(\pi)$ est un automorphisme de $V_{\pi,P}$. Notons $\mu_{Q|P}(\pi)$ son inverse. Pour $\Lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, posons

$$\mathcal{M}(\pi;\Lambda,\tilde{Q}) = \mu_{Q|P}(\pi)^{-1}\mu_{Q|P}(\pi_{\Lambda/2})J_{Q|P}(\pi)^{-1}J_{Q|P}(\pi_\Lambda).$$

La famille $(\mathcal{M}(\pi;\Lambda,\tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ est une $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille à valeurs opérateurs. On en déduit un opérateur $\mathcal{M}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi;\Lambda)$. On pose $\mathcal{M}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi) = \mathcal{M}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi;0)$. Le caractère pondéré est la forme linéaire sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F_V),K)$ définie par

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},f) = trace(\mathcal{M}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi)Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},f)).$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas de l'espace parabolique $\tilde{P}$ choisi. Au moins si $\tilde{\pi}$ est tempérée, on peut supprimer la condition de K-finitude et définir $J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, f)$ pour tout $f \in C^{\infty}_{c}(\tilde{G}(F_V))$.

En utilisant la formule de descente du paragraphe précédent appliquée à $\tilde{M}_V$ et l'indépendance de l'espace parabolique que l'on vient d'indiquer, on montre que l'on a l'égalité

$$(1) \qquad J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, f) = \sum_{\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) \prod_{v \in V} J^{\tilde{L}^v}_{\tilde{M}_v}(\tilde{\pi}_v, f_{v,\tilde{Q}^v,\omega}).$$

Levons l'hypothèse que $\tilde{\pi}$ est en position générale. L'ensemble $\oplus_{v\in V}\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}_v}$ est un espace affine sous $\oplus_{v\in V}\mathcal{A}_{\tilde{M}_v}$, lequel se projette naturellement sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. On note $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ le quotient de $\oplus_{v\in V}\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}_v}$ par le noyau de cette projection. C'est un espace affine sous $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. On note encore $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}}$ l'espace des fonctions affines sur cet espace, et $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ son complexifié. Pour $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, on note $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ la forme linéaire sous-jacente à $\tilde{\lambda}$. Pour $\tilde{\pi}$ quelconque et pour $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ en position générale, $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}$ est en position générale et l'opérateur $\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)$ comme la forme linéaire $f \mapsto J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f)$ sont bien définis. Ces termes sont méromorphes en $\tilde{\lambda}$. S'ils sont réguliers en $\tilde{\lambda} = 0$, on note $\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi)$ et $f \mapsto J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, f)$ leurs valeurs en $\tilde{\lambda} = 0$.

Proposition. *Si $\tilde{\pi}$ est unitaire, les termes ci-dessus sont réguliers en $\tilde{\lambda} = 0$.*

Preuve. La formule (1) nous ramène au cas local, qui est traité par Arthur ([4], proposition 2.3). $\square$

Evidemment, la formule (1) s'étend au cas où tous les termes de la formule sont définis.

1.6 L'application $\phi_{\tilde{M}}$

Pour toute place $v \in Val_f(F)$, on note $C^{\infty}_{ac}(\tilde{G}(F_v))$ l'espace des fonctions $f : \tilde{G}(F_v) \to \mathbb{C}$ telles que :

(1) pour toute fonction $b \in C^{\infty}_{c}(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}})$, la fonction $\gamma \mapsto b(\tilde{H}_{\tilde{G}_v}(\gamma))f(\gamma)$ appartient à $C^{\infty}_{c}(\tilde{G}(F_v))$;

- il existe un sous-groupe ouvert compact H de $G(F_v)$ tel que f soit biinvariante par H.

Pour toute place $v \in Val_\infty(F)$, on note $C^{\infty}_{ac}(\tilde{G}(F_v))$ l'espace des fonctions $f : \tilde{G}(F_v) \to \mathbb{C}$ qui vérifient (1). On note $C^{\infty}_{ac}(\tilde{G}(F_v), K_v)$ le sous-espace des éléments K_v-finis à droite et à gauche de $C^{\infty}_{ac}(\tilde{G}(F_v))$.

On note $I_{ac}(\tilde{G}(F_v), \omega)$ le quotient de $C^{\infty}_{ac}(\tilde{G}(F_v))$ par le sous-espace des $f \in C^{\infty}_{ac}(\tilde{G}(F_v))$ telles que $I^{\tilde{G}_v}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout élément $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F_v)$ (on rappelle que l'on note ainsi l'ensemble des éléments semi-simples et fortement réguliers de $\tilde{G}(F_v)$). Si v est archimédienne, on définit de même la variante $I_{ac}(\tilde{G}(F_v), \omega, K_v)$.

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et V un ensemble fini de places de F. Pour $v \in V$, on définit une application linéaire $\phi_{\tilde{M}_v} : C^{\infty}_{ac}(\tilde{G}(F_v)) \to I_{ac}(\tilde{M}(F_v), \omega)$. Elle est définie en [23] 6.4 dans le cas où v est non-archimédienne, en [V] 1.2 dans le cas où v est archimédienne. Dans ce dernier cas, l'application se restreint en une application linéaire $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(F_v), K_v) \to I_{ac}(\tilde{M}(F_v), \omega, K_v)$, cf. [23] 6.4. On definit comme en 1.1 les espaces $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(F_V))$ et $I_{ac}(\tilde{G}(F_V), \omega)$ (avec la variante $I_{ac}(\tilde{G}(F_V), \omega, K)$ si V contient des places archimédiennes). Comme dans le paragraphe précédent, on applique les définitions du paragraphe 1.2 à la famille $\tilde{M}_V = (\tilde{M}_v)_{v\in V}$. On définit une application $\phi_{\tilde{M}} : C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(F_V)) \to I_{ac}(\tilde{M}(F_V), \omega)$ par

$$(2) \qquad \phi_{\tilde{M}}(f) = \sum_{\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) \left(\otimes_{v\in V} \phi_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(f_{v,\tilde{Q}^v,\omega}) \right)$$

pour une fonction $f = \otimes_{v\in V} f_v \in C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(F_V))$.

Cette définition dépend a priori d'une donnée auxiliaire puisque les $\tilde{Q}^v$ en dépendent. Pour qu'elle soit loisible, on doit montrer qu'en fait, elle n'en dépend pas. Pour cela, on utilise la caractérisation de [23] 6.4(5). Fixons pour tout $v \in V$ une ω-représentation tempérée M-irréductible $\tilde{\pi}_v$ de $\tilde{M}(F_v)$. Fixons aussi $X_v \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}_v}$. On a défini une forme linéaire $\varphi_v \mapsto I^{\tilde{M}_v}(\tilde{\pi}_v, X_v, \varphi_v)$ sur $I_{ac}(\tilde{M}(F_v), \omega)$, cf. [23] 6.4 et [V] 1.2. Quand $\tilde{\pi}_v$ et X_v varient, ces formes linéaires séparent les éléments de $I_{ac}(\tilde{M}(F_v), \omega)$. Il suffit donc de prouver que la valeur sur le membre de droite de (2) de la forme linéaire

$$\otimes_{v\in V} \varphi_v \mapsto \prod_{v\in V} I^{\tilde{M}_v}(\tilde{\pi}_v, X_v, \varphi_v)$$

est bien définie. Cette valeur est

$$\sum_{\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) \prod_{v\in V} I^{\tilde{M}_v}(\tilde{\pi}_v, X_v, \phi_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(f_{v,\tilde{Q}^v,\omega})),$$

ou encore

$$\sum_{\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) \prod_{v\in V} J_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\tilde{\pi}_v, X_v, f_{v,\tilde{Q}^v,\omega}).$$

Par définition, on a pour tout $v \in V$ une égalité

$$J_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\tilde{\pi}_v, X_v, f_{v,\tilde{Q}^v,\omega}) = c_v \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_v,F_v}} J_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\tilde{\pi}_{v,\tilde{\lambda}_v}, f_{v,\tilde{Q}^v,\omega}) e^{-<\tilde{\lambda}_v, X_v>} d\lambda_v$$

(les deux fonctions que l'on intègre dépendent de $\tilde{\lambda}_v \in i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}_v}$; leur produit se descend en une fonction sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_v,F_v}$; c_v est une constante dépendant seulement des mesures de Haar). Il suffit donc de prouver que, pour toute famille $(\tilde{\lambda}_v)_{v\in V} \in \oplus i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}_v}$, le terme

$$\sum_{\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) \prod_{v\in V} J_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\tilde{\pi}_{v,\tilde{\lambda}_v}, f_{v,\tilde{Q}^v,\omega})$$

est bien défini. Quitte à remplacer $\tilde{\pi}_v$ par $\tilde{\pi}_{v,\tilde{\lambda}_v}$, il suffit de considérer

$$\sum_{\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) \prod_{v\in V} J_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\tilde{\pi}_v, f_{v,\tilde{Q}^v,\omega}).$$

La formule 1.5(1) dit que cette expression est égale à $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$, où $\tilde{\pi} = \otimes_{v\in V} \tilde{\pi}_v$. Ce terme ne dépendant d'aucun paramètre auxiliaire, cela démontre l'assertion.

1.7 Une propriété globale de l'application $\phi_{\tilde{M}}$

La situation est la même que dans le paragraphe précédent, mais on suppose que V contient V_{ram}. On se rappelle l'application $\tilde{H}_{\tilde{G}_V} : \tilde{G}(F_V) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ de 1.1. L'espace $C^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$ des fonctions C^∞ sur $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ opère sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$: à $b \in C^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$ et $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$, on associe la fonction produit $f(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}_V})$. L'espace $C^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$ opère de même sur $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F_V))$. Ces actions se descendent en des actions sur $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$ et $I_{ac}(\tilde{G}(F_V),\omega)$. Notons $C_{ac,glob}^\infty(\tilde{G}(F_V))$ le sous-espace des $f \in C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F_V))$ tels que $f(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}_V}) \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$ pour tout $b \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$. Notons $I_{ac,glob}(\tilde{G}(F_V),\omega)$ l'image de cet espace dans $I_{ac}(\tilde{G}(F_V),\omega)$.

Lemme. *L'homomorphisme $\phi_{\tilde{M}}$ envoie $C_{ac,glob}^\infty(\tilde{G}(F_V))$ dans $I_{ac,glob}(\tilde{M}(F_V),\omega)$.*

Preuve. Soient $f \in C_{ac,glob}^\infty(\tilde{G}(F_V))$ et $b \in C_c^\infty(\tilde{A}_{\tilde{M}})$. On doit montrer que $\phi_{\tilde{M}}(f)(b\circ\tilde{H}_{\tilde{M}_V})$ appartient à $I(\tilde{M}(F_V),\omega)$. Soit $b' \in C_c^\infty(\tilde{A}_{\tilde{G}})$ qui vaut 1 sur la projection dans $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ du support de b. Alors $b\circ\tilde{H}_{\tilde{M}_V} = (b\circ\tilde{H}_{\tilde{M}_V})(b'\circ\tilde{H}_{\tilde{G}_V})$. Il résulte de la définition de $\phi_{\tilde{M}}$ que $\phi_{\tilde{M}}(f)(b'\circ\tilde{H}_{\tilde{G}_V}) = \phi_{\tilde{M}}(f(b'\circ\tilde{H}_{\tilde{G}_V}))$. D'où

$$\phi_{\tilde{M}}(f)(b\circ\tilde{H}_{\tilde{M}_V}) = \phi_{\tilde{M}}(f(b'\circ\tilde{H}_{\tilde{G}_V}))(b\circ\tilde{H}_{\tilde{M}_V}).$$

Quitte à remplacer f par $f(b'\circ\tilde{H}_{\tilde{G}_V})$, on est ramené au cas où $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$. En considérant la formule (1) du paragraphe précédent, on voit qu'il nous suffit de fixer $\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)$ tel que $d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V) \neq 0$ et de prouver que la fonction

$$(1) \qquad \left(\otimes_{v\in V}\phi_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(f_{v,\tilde{Q}^v,\omega})\right)(b\circ\tilde{H}_{\tilde{M}_V})$$

appartient à $I_{ac,glob}(\tilde{M}(F_V),\omega)$. On relève chaque terme $\phi_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(f_{v,\tilde{Q}^v,\omega})$ en un élément de $C_{ac}^\infty(\tilde{M}(F_v))$. Notons Ξ_v l'image de son support dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}_v}$ par l'application $\tilde{H}_{\tilde{M}_v}$. Parce que f_v est maintenant à support compact, on sait que l'on peut supposer que la projection naturelle de Ξ_v dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}^v}$ est compacte. Notons Ξ l'image du support de la fonction (1) dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}_V}$ par l'application $\prod_{v\in V}\tilde{H}_{\tilde{M}_v}$. Pour que la fonction (1) appartienne à $I_{ac,glob}(\tilde{M}(F_V),\omega)$, il suffit que Ξ soit compact. Or Ξ est le sous-ensemble des éléments de $\prod_{v\in V}\Xi_v$ dont l'image par $\tilde{p}_V$ appartient au support compact de la fonction b. En fixant des points bases de nos espaces affines, qui permettent d'identifier $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}_V}$ à $\mathcal{A}_{\tilde{M}_V}$, on est ramené à la situation suivante. On a un sous-ensemble fermé $\Xi \subset \mathcal{A}_{\tilde{M}_V}$ dont la projection dans $\mathcal{A}_{\tilde{L}^V}$ est compacte et dont l'image par l'application

$$\begin{array}{cccc} p_V : & \mathcal{A}_{\tilde{M}_V} & \to & \mathcal{A}_{\tilde{M}} \\ & (H_v)_{v\in V} & \mapsto & \sum_{v\in V} H_{v,\tilde{M}} \end{array}$$

est compacte. On doit montrer que ce sous-ensemble est compact. Il suffit que l'intersection des noyaux de p_V et de la projection dans $\mathcal{A}_{\tilde{L}^V}$ soit réduite à 0. Ou encore que la somme de $\mathcal{A}_{\tilde{L}^V}$ et de l'orthogonal du noyau de p_V soit l'espace $\mathcal{A}_{\tilde{M}_V}$ tout entier. Cela résulte de la condition $d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V) \neq 0$ puisque l'orthogonal du noyau de p_V est l'espace $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ plongé diagonalement dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}_V}$. $\square$

On a la variante suivante : $\phi_{\tilde{M}}$ envoie $C_{ac,glob}^\infty(\tilde{G}(F_V),K)$ dans $I_{ac,glob}(\tilde{M}(F_V),\omega,K)$.

1.8 Espaces de distributions

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et V un ensemble fini de places de F. Pour tout $v \in V$, on a défini l'espace de distributions $D_{géom}(\tilde{M}(F_v), \omega)$ en [I] 5.1 et 5.2. C'est celui des distributions ω-équivariantes supportées par un nombre fini de classes de conjugaison. Supposons v archimédienne. On a défini en [V] 1.3 et 2.1 les sous-espaces

$$D_{orb}(\tilde{M}(F_v), \omega) \subset D_{tr-orb}(\tilde{M}(F_v), \omega) \subset D_{géom}(\tilde{M}(F_v), \omega) \supset D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F_v), \omega).$$

L'espace $D_{orb}(\tilde{M}(F_v), \omega)$ est engendré par les intégrales orbitales ordinaires (ω-équivariantes). L'espace $D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F_v), \omega)$ est le sous-espace des éléments de $D_{géom}(\tilde{M}(F_v), \omega)$ dont le support est formé d'éléments $\gamma \in \tilde{M}(F_v)$ qui sont $\tilde{G}$-équisinguliers c'est-à-dire tels que $M_\gamma = G_\gamma$. L'espace $D_{tr-orb}(\tilde{M}(F_v), \omega)$ est défini par récurrence. Il est engendré par $D_{orb}(\tilde{M}(F_v), \omega)$ et par les images par transfert des espaces $D_{tr-orb}(\mathbf{M}'_v)$ pour les données endoscopiques elliptiques $\mathbf{M}'_v$ de $(M_v, \tilde{M}_v)$, avec la restriction $M'_v \neq M_v$ si $(M_v, \tilde{M}_v, \mathbf{a}_v)$ est quasi-déployé et à torsion intérieure.

Remarque. Si on applique les mêmes définitions pour une place v non-archimédienne, on a l'égalité $D_{orb}(\tilde{M}(F_v), \omega) = D_{tr-orb}(\tilde{M}(F_v), \omega) = D_{géom}(\tilde{M}(F_v), \omega)$.

On pose $D_{géom}(\tilde{M}(F_V), \omega) = \otimes_{v \in V} D_{géom}(\tilde{M}(F_v), \omega)$. On définit les sous-espaces $D_{orb}(\tilde{M}(F_V), \omega)$, $D_{tr-orb}(\tilde{M}(F_V), \omega)$ et $D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F_V), \omega)$ en remplaçant, pour toute place archimédienne $v \in V$, l'espace $D_{géom}(\tilde{M}(F_v), \omega)$ par $D_{orb}(\tilde{M}(F_v), \omega)$ etc...

1.9 Intégrales orbitales pondérées

Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et V un ensemble fini de places de F. Pour tout $g = (g_v)_{v \in V} \in G(F_V)$, Arthur définit une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille $(v_{\tilde{P}}(g; \Lambda))_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$, d'où une fonction $v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g; \Lambda)$. On pose $v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g) = v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g, 0)$.

Soit $\gamma = (\gamma_v)_{v \in V} \in \tilde{M}(F_V)$. On pose $M_\gamma = \prod_{v \in V} M_{v,\gamma_v}$ que l'on peut considérer comme un groupe défini sur l'anneau F_V. On définit de même G_γ, $Z_M(\gamma)$ etc... Si ω n'est pas trivial sur $M_\gamma(F_V)$, on pose $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$. Supposons dans la suite que ω est trivial sur $M_\gamma(F_V)$. On fixe des mesures de Haar sur $G(F_V)$ et $M_\gamma(F_V)$. Supposons d'abord que γ soit $\tilde{G}$-équisingulier, c'est-à-dire que $M_\gamma = G_\gamma$. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$, on pose

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \int_{M_\gamma(F_V) \backslash G(F_V)} \omega(g) f(g^{-1} \gamma g) v_{\tilde{M}}(g)\, dg.$$

Pour γ quelconque, Arthur définit $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ par un procédé de limite. Nous allons le rappeler brièvement, tout en le modifiant. Soit $v \in V$ et $a_v \in A_{\tilde{M}_v}(F_v)$. On a défini en [II] 1.5 une $(\tilde{G}_v, \tilde{M}_v)$-famille $(r_{\tilde{P}}(\gamma_v, a_v; \Lambda))_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_v)}$, pourvu que a_v soit en position générale. Plus précisément, notons η_v la partie semi-simple de γ_v. Il suffit que a_v vérifie $\alpha(a_v) \neq \pm 1$ pour toute racine α de $A_{M_{v,\eta_v}}$ dans G_{v,η_v} pour que les fonctions précédentes soient définies. Signalons que la définition de ces fonctions est légèrement différente de celle d'Arthur. Soit maintenant $a = (a_v)_{v \in V} \in A_{\tilde{M}}(F_V)$. Si a est en position générale, les a_v ne sont pas véritablement "en position générale" car le tore $A_{M_{v,\eta_v}}$ est en général plus gros que le localisé de $A_{\tilde{M}}$, mais ils vérifient la condition précise ci-dessus. Comme en 1.3, on déduit alors des $(\tilde{G}_v, \tilde{M}_v)$-familles ci-dessus une famille produit $(r_{\tilde{P}}(\gamma, a; \Lambda))_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$.

On en déduit une fonction $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,a;\Lambda)$ et on pose $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,a)=r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,a;0)$. Considérons l'expression

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a)J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f).$$

Tous les termes sont bien définis puisque $M_{a\gamma}=G_{a\gamma}$ pour a en position générale. Arthur montre que cette expression a une limite quand a tend vers 1 ([5] théorème 5.2). La modification que l'on a apportée aux définitions n'affecte pas cette propriété. On note $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ cette limite.

Remarque. La définition est globale : les $(\tilde{G},\tilde{M})$-familles intervenant sont indexées par des espaces paraboliques définis sur F. Même dans le cas où V est réduit à une seule place v, les intégrales orbitales pondérées ci-dessus ne coïncident pas en général avec leurs similaires locales relatives au corps de base F_v. La relation entre les deux objets est donnée par la formule (1) suivante. La même remarque s'appliquera aux intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes définies au paragraphe suivant.

En utilisant plusieurs fois la formule 1.4(1), on montre que, pour $f=\otimes_{v\in V}f_v$, on a l'égalité

$$(1)\qquad J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=\sum_{\tilde{L}^V\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\prod_{v\in V}J_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\gamma_v,\omega,f_{v,\tilde{Q}^v,\omega}).$$

Comme dans le cas local, on peut formaliser les définitions ci-dessus et les rendre indépendantes de tout choix de mesures en définissant $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{orb}(\tilde{M}(F_V),\omega)\otimes Mes(M(F_V))^*$ et $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))$. Signalons que ces intégrales dépendent tout de même de la mesure fixée sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$.

On aura besoin d'une variante de la formule (1). Supposons V réunion disjointe de deux sous-ensembles V_1 et V_2. Pour $i=1,2$, soient $\boldsymbol{\gamma}_i\in D_{orb}(\tilde{M}(F_{V_i}),\omega)\otimes Mes(M(F_{V_i}))$ et $\mathbf{f}_i\in C_c^\infty(\tilde{G}(F_{V_i}))\otimes Mes(G(F_{V_i}))$. Posons $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_1\otimes\boldsymbol{\gamma}_2$ et $\mathbf{f}=\mathbf{f}_1\otimes\mathbf{f}_2$. Supposons que, pour tout $\tilde{Q}=\tilde{L}\tilde{U}_Q\in\mathcal{F}(\tilde{M})$, l'intégrale orbitale pondérée $J_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}_1,\mathbf{f}_{1,\tilde{Q},\omega})$ ne dépende que de $\tilde{L}$. On a alors l'égalité

$$(2)\qquad J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} J_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}_1,\mathbf{f}_{1,\tilde{Q},\omega})J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}_2^{\tilde{L}},\mathbf{f}_2),$$

où $\tilde{Q}$ est un élément quelconque de $\mathcal{P}(\tilde{L})$ et où $\boldsymbol{\gamma}_2^{\tilde{L}}$ est l'induite de $\boldsymbol{\gamma}_2$ à $\tilde{L}(F_{V_2})$.

1.10 Système de fonctions B

Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Rappelons que dans ce cas, on supprime le caractère trivial ω des notations. Pour une place v de F, on a défini en [II] 1.9 la notion de système de fonctions B sur $\tilde{G}(F_v)$. Pour globaliser cette notion, on va en donner une définition un peu différente. Fixons une paire de Borel (B^*,T^*) de G définie sur F. Notons $\tilde{T}^*$ l'ensemble des $\gamma\in\tilde{G}$ tels que ad_γ conserve cette paire. Pour $\eta\in\tilde{T}^*$, notons $\Sigma^{G_\eta}(T^*)$ l'ensemble des racines de T^* dans $\mathfrak{g}_\eta$. L'ensemble $\Sigma^{G_\eta}(T^*)$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\Sigma(T^*)$ des racines de T^* dans $\mathfrak{g}$. Pour tout sous-ensemble $\Sigma'\subset\Sigma(T^*)$, considérons l'ensemble des $\eta\in\tilde{T}^*$ tels que $\Sigma^{G_\eta}(T^*)=\Sigma'$. C'est un sous-ensemble algébrique de $\tilde{T}^*$ que l'on décompose en composantes connexes. En faisant varier Σ', on obtient une décomposition de $\tilde{T}^*$ en réunion disjointe finie de sous-ensembles algébriques connexes. On note $\underline{\Omega}$ cet ensemble de sous-ensembles algébriques. Pour $\Omega \in \underline{\Omega}$, on note $\Sigma(\Omega)$ l'ensemble $\Sigma^{G_\eta}(T^*)$ pour un élément quelconque $\eta \in \Omega$. Le groupe de Weyl W agit sur $\tilde{T}^*$. Pour $w \in W$ et $\eta \in \tilde{T}^*$, l'élément w définit une bijection $w : \Sigma^{G_\eta}(T^*) \to \Sigma^{G_{w(\eta)}}(T^*)$. Le groupe de Galois Γ_F agit aussi et, pour $\sigma \in \Gamma_F$ et $\eta \in \tilde{T}^*$, on a aussi une bijection $\sigma : \Sigma^{G_\eta}(T^*) \to \Sigma^{G_{\sigma(\eta)}}(T^*)$. Il en résulte que les actions de W et Γ_F sur $\tilde{T}^*$ permutent les éléments de $\underline{\Omega}$.

On se donne pour tout $\Omega \in \underline{\Omega}$ une fonction $B_\Omega : \Sigma(\Omega) \to \mathbb{Q}_{>0}$. On suppose vérifiées les conditions (1) et (2) suivantes pour tout $\Omega \in \underline{\Omega}$:

(1) pour toute composante irréductible Σ' du système de racines $\Sigma(\Omega)$, ou bien B_Ω est constante sur Σ', ou bien la fonction $\beta \mapsto \frac{B_\Omega(\beta)}{(\beta,\beta)}$ est constante sur Σ', où $(.,.)$ est une forme quadratique définie positive et invariante par le groupe de Weyl sur l'espace $X^*(T^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$;

(2) pour $w \in W$, $\sigma \in \Gamma_F$ et $\beta \in \Sigma(\Omega)$, on a les égalités $B_{w(\Omega)}(w(\beta)) = B_{\sigma(\Omega)}(\sigma(\beta)) = B_\Omega(\beta)$.

A ces conditions, on dit que les fonctions B_Ω forment un "système de fonctions B" sur $\tilde{G}$. Fixons un tel système. Il convient d'élargir l'ensemble V_{ram} de 1.1 de sorte que

(3) soit $v \in Val(F) - V_{ram}$, notons p la caractéristique résiduelle de v ; alors, pour tout élément $\Omega \in \underline{\Omega}$, les valeurs de B_Ω sont premières à p.

C'est possible puisque l'ensemble $\underline{\Omega}$ est fini.

Soit $\eta \in \tilde{T}^*(\bar{F})$. Il existe un unique $\Omega \in \underline{\Omega}$ tel que $\eta \in \Omega(\bar{F})$. On pose $B_\eta = B_\Omega$. Plus généralement, pour un élément semi-simple $\eta \in \tilde{G}(\bar{F})$, fixons une paire de Borel (B, T) de G conservée par ad_η. On définit comme ci-dessus le système de racines $\Sigma^{G_\eta}(T)$. On fixe un élément $x \in G(\bar{F})$ tel que $ad_x(B, T) = (B^*, T^*)$. Alors ad_x identifie $\Sigma^{G_\eta}(T)$ à $\Sigma^{G_{ad_x(\eta)}}(T^*)$. En transportant la fonction $B_{ad_x(\eta)}$ par cet isomorphisme, on obtient une fonction B_η sur $\Sigma^{G_\eta}(T)$, qui ne dépend pas de l'élément x choisi.

Soit v une place de F et soit η un élément semi-simple de $\tilde{G}(\bar{F}_v)$. Le même procédé permet de définir une fonction B_η sur le système de racines de G_η. La restriction de ces fonctions aux éléments $\eta \in \tilde{G}(F_v)$ est un système de fonctions B sur $\tilde{G}(F_v)$, au sens de [II] 1.9.

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, V un ensemble fini de places de F et $\gamma = (\gamma_v)_{v \in V} \in \tilde{M}(F_V)$. Pour $v \in V$, on a défini en [II] 1.9 des $(\tilde{G}_v, \tilde{M}_v)$-familles $(r_{\tilde{P}}(\gamma_v, a_v, B; \Lambda))_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_v)}$. En utilisant ces familles dans les constructions du paragraphe précédent, on définit l'intégale orbitale pondérée $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, B, f)$. Elle coïncide avec $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, f)$ dans le cas où $M_\gamma = G_\gamma$.

1.11 Intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes

Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et V un ensemble fini de places de F. Soit $\gamma \in \tilde{M}(F_V)$. On fixe encore des mesures de Haar sur $G(F_V)$ et $M_\gamma(F_V)$. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$, on définit l'intégrale orbitale pondérée ω-équivariante par la formule de récurrence

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) - \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, \omega, \phi_{\tilde{L}}(f)).$$

Remarque. Comme souvent, certaines propriétés de ces termes sont supposées connues pour les données $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ similaires à $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ telles que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$. Les propriétés utilisées ici est que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ ne dépend que de l'image de f dans

$I(\tilde{G}(F_V),\omega)$ et que la définition s'étend à $f \in C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F_V))$. Grâce à ces hypothèses, les termes $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,\phi_{\tilde{L}}(f))$ sont bien définis pour $\tilde{L} \neq \tilde{G}$. La formule (1) ci-dessous, qui se déduit de la simple formule de définition ci-dessus, ramène la vérification des hypothèses de récurrence aux propriétés des intégrales analogues locales, pour lesquelles on renvoie à [II] et [V].

Pour $f = \otimes_{v\in V} f_v$, on a l'égalité

$$(1) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) = \sum_{\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V) \prod_{v\in V} I_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\gamma_v,\omega,f_{v,\tilde{L}^v,\omega}).$$

Comme en 1.9, on peut formaliser les définitions ci-dessus et en particulier les rendre indépendantes de tout choix de mesures en définissant $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(F_V),\omega)\otimes Mes(M(F_V))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$, ou $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F_V),\omega) \otimes Mes(G(F_V))$. Ces intégrales dépendent tout de même de la mesure fixée sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$.

Supposons $V = V_1 \sqcup V_2$. Pour $i = 1,2$, soient $\boldsymbol{\gamma}_i \in D_{orb}(\tilde{M}(F_{V_i}),\omega) \otimes Mes(M(F_{V_i}))^*$ et $\mathbf{f}_i \in I(\tilde{G}(F_{V_i}),\omega) \otimes Mes(G(F_{V_i}))$. Posons $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 \otimes \boldsymbol{\gamma}_2$ et $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2$. On a la formule de scindage

$$(2) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2) I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\boldsymbol{\gamma}_1, f_{1,\tilde{L}_1,\omega}) I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\boldsymbol{\gamma}_2, f_{2,\tilde{L}_2,\omega}).$$

Conformément aux résultats de [V], on peut définir le terme $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ dans le cas où $\boldsymbol{\gamma}$ appartient à $D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F_V),\omega)\otimes Mes(M(F_V))^*$: on le définit par la formule (1). Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, ou si l'on suppose vérifiée l'hypothèse (Hyp) de [V] 2.5 en toute place archimédienne de V, on peut aussi le définir dans le cas où $\boldsymbol{\gamma}$ appartient à $D_{tr-orb}(\tilde{M}(F_V),\omega) \otimes Mes(M(F_V))^*$. Les propriétés ci-dessus s'étendent à tous les cas où les termes sont définis.

1.12 Une propriété de support

Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}.

Lemme. *Soit $\Xi \subset \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ un ensemble compact et soit $f \in C_{ac,glob}^\infty(\tilde{G}(F_V))$. Alors il existe un sous-ensemble compact $\tilde{C}_V$ de $\tilde{M}(F_V)$ tel que, pour tout $\gamma \in \tilde{M}(F_V)$ vérifiant les deux conditions :*

- $\tilde{H}_{\tilde{M}_V}(\gamma) \in \Xi$,

- $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) \neq 0$,

γ soit conjugué à un élément de $\tilde{C}_V$ par un élément de $M(F_V)$.

Preuve. On choisit une fonction $b \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$ qui vaut 1 sur la projection de Ξ dans $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On a alors l'égalité $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}_V}))$ pour tout $\gamma \in \tilde{M}(F_V)$ tel que $\tilde{H}_{\tilde{M}_V}(\gamma) \in \Xi$. Cela nous permet de remplacer f par $f(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}_V})$. En oubliant cela, on peut supposer f à support compact. On utilise la définition donnée en 1.9. Pour que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ soit non nul, il faut que $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ soit non nul ou qu'il existe $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ avec $\tilde{L} \neq \tilde{G}$ tel que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,\phi_{\tilde{L}}(f))$ soit non nul. Dans le premier cas, γ est conjugué par un élément de $M(F_V)$ à un élément du support de f et la conclusion s'ensuit. Dans le deuxième cas, le lemme 1.7 nous dit que $\phi_{\tilde{L}}(f)$ appartient à $I_{ac,glob}(\tilde{M}(F_V),\omega)$. Puisque $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, on peut appliquer le lemme par récurrence, d'où encore la conclusion. $\square$

1.13 Le cas non ramifié

Soit V un ensemble fini de places de F. Contrairement à l'habitude, on suppose ici $V\cap V_{ram}=\emptyset$. En particulier, les places dans V sont finies. Soit $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. On se débarrasse des espaces de mesures en fixant sur $G(F_V)$ et $M(F_V)$ les mesures canoniques. On définit une forme linéaire $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K}_V)$ sur $D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F_V),\omega)$ par

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\tilde{K}_V)=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{1}_{\tilde{K}_V})$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F_V),\omega)$. Remarquons que, pour tout espace parabolique $\tilde{Q}=\tilde{L}U_Q\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et tout $v\in V$, on a l'égalité $(\mathbf{1}_{\tilde{K}_v})_{\tilde{Q},\omega}=\mathbf{1}_{\tilde{K}_v^{\tilde{L}}}$. Pour $\boldsymbol{\gamma}=\otimes_{v\in V}\boldsymbol{\gamma}_v$, la formule de descente 1.8(1) donne donc

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\tilde{K}_V)=\sum_{\tilde{L}^V\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)}d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\prod_{v\in V}r_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\boldsymbol{\gamma}_v,\tilde{K}_v^{\tilde{L}^v}),$$

où les derniers facteurs sont les termes locaux définis en [II] 4.1.

1.14 Intégrales orbitales pondérées invariantes et systèmes de fonctions B

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en 1.9. Soient $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, V un ensemble fini de places et $\gamma\in\tilde{M}(F_V)$. De la même façon que dans le paragraphe 1.10, et modulo des choix de mesures de Haar, on définit l'intégrale orbitale pondérée invariante $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,B,f)$ pour $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$. Elle vérifie les mêmes propriétés qu'en 1.10 et 1.11.

Lemme. *Supposons que V contienne V_{ram}. Soit $\dot{\gamma}\in\tilde{M}(F)$, notons γ son image naturelle dans $\tilde{M}(F_V)$. Alors on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,B,f)=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,f)$$

pour tout $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$.

Preuve. On vérifie que le procédé de limite utilisé pour définir les intégrales orbitales pondérées s'étend aux intégrales invariantes. On a donc

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,f)=lim_{a\to 1}\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a)I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma,f)$$

pour tout $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$, où a parcourt les éléments de $A_{\tilde{M}}(F_V)$ en position générale. De même,

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,B,f)=lim_{a\to 1}\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a,B)I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma,f).$$

Rappelons que, pour a en position générale, l'élément $a\gamma$ est $\tilde{G}$-équisingulier donc $I^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(a\gamma,B,f)=I^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(a\gamma,f)$ pour tout $\tilde{L}$. Rappelons que les termes $r^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\gamma,a)$ et $r^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\gamma,a,B)$ sont issus de $(\tilde{G},\tilde{M})$-familles $(r_{\tilde{P}}(\gamma,a;\Lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ et $(r_{\tilde{P}}(\gamma,a,B;\Lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$. Définissons une $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille $(c_{\tilde{P}}(\gamma,a,B;\Lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ par

$$c_{\tilde{P}}(\gamma,a,B;\Lambda)=r_{\tilde{P}}(\gamma,a,B;\Lambda)r_{\tilde{P}}(\gamma,a;\Lambda)^{-1}.$$

Pour tout $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$, on a la formule de décomposition

$$r^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\gamma,a,B)=\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{R}\subset\tilde{L}}c^{\tilde{R}}_{\tilde{M}}(\gamma,a,B)r^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(\gamma,a).$$

D'où

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma,B,f)=lim_{a\to 1}\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}c^{\tilde{R}}_{\tilde{M}}(\gamma,a,B)\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})}r^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(\gamma,a)I^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(a\gamma,f).$$

En utilisant la formule de descente 1.4(1) et [II] 1.7(12), on voit que pour tout $\tilde{R}$, la somme intérieure a une limite quand a tend vers 1. Cette limite est $I^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{R}},f)$, où $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{R}}$ est la distribution induite à $\tilde{R}(F_V)$ de l'intégrale orbitale dans $\tilde{M}(F_V)$ associée à γ. Pour prouver le lemme, il suffit de prouver la relation

$$lim_{a\to 1}c^{\tilde{R}}_{\tilde{M}}(\gamma,a,B)=\begin{cases}1, & \text{si } \tilde{R}=\tilde{M},\\ 0, & \text{si } \tilde{R}\neq\tilde{M}\end{cases}$$

pour tout $\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$. Un tel $\tilde{R}$ étant fixé, on peut remplacer l'espace ambiant $\tilde{G}$ par $\tilde{R}$. Cela nous ramène à prouver la relation

$$(1)\qquad lim_{a\to 1}c^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma,a,B)=\begin{cases}1, & \text{si } \tilde{G}=\tilde{M},\\ 0, & \text{si } \tilde{G}\neq\tilde{M}\end{cases}$$

Le cas $\tilde{G}=\tilde{M}$ est évident. On suppose désormais $\tilde{M}\neq\tilde{G}$.

Rappelons la construction de nos $(\tilde{G},\tilde{M})$-familles. Ecrivons $\dot{\gamma}=u\eta$, où $\eta\in\tilde{M}(F)$ est semi-simple et $u\in M_\eta(F)$ est unipotent. On introduit les ensembles $\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0)$ et $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ de racines de $Z(M_\eta)^0$ dans $\mathfrak{g}_\eta$, resp. de $A_{\tilde{M}}$ dans $\mathfrak{g}$. On a une application de restriction

$$\begin{array}{ccc}\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0) & \to & \Sigma(A_{\tilde{M}})\\ \alpha & \mapsto & \alpha_{\tilde{M}}\end{array}$$

Posons $\mathcal{Z}=X_*(Z(M)^0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. On a $\mathcal{A}_{\tilde{M}}\subset\mathcal{Z}$. Puisque $\mathcal{Z}$ est muni d'une forme quadratique définie positive (cf. 1.3), on a aussi une inclusion d'espaces duaux $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}\subset\mathcal{Z}^*$. Fixons $v\in V$ et $\alpha\in\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0)$. En [II] 1.4, on a défini un élément de $\mathcal{Z}$, noté alors $\rho(\alpha,u)$. Sa définition dépend a priori de la place v, notons-le plutôt $\rho_v(\alpha,u)$. Soient $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$, $a=(a_v)_{v\in V}\in A_{\tilde{M}}(F_V)$ et $\Lambda\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$. Il résulte des définitions que l'on a l'égalité

$$(2)\qquad r_{\tilde{P}}(\gamma,a;\Lambda)=\prod_{v\in V}\prod_{\alpha\in\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0);\alpha_{\tilde{M}}>_P 0}|\alpha(a_v)-\alpha(a_v)^{-1}|_{F_v}^{<\Lambda,\rho_v(\alpha,u)>/2},$$

où le symbole $>_P$ désigne la positivité relative à P.

Fixons une paire de Borel (B,T) de G conservée par ad_η et telle que M soit standard pour cette paire. Introduisons l'ensemble $\Sigma^{G_\eta}(T)$ des racines de T dans $\mathfrak{g}_\eta$. On a introduit en [II] 1.8 l'ensemble $\Sigma^{G_\eta}(T,B_\eta)$ formé des $B_\eta(\alpha)^{-1}\alpha$ pour $\alpha\in\Sigma^{G_\eta}(T,B_\eta)$ (on considère ces éléments comme des formes linéaires sur $\mathfrak{t}$). On note $\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0,B)$ l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{z}(M_\eta)$ d'éléments de $\Sigma^{G_\eta}(T,B_\eta)$. Fixons $v\in V$ et $\alpha'\in\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0,B)$. En [II] 1.4, on a défini un élément de $\mathcal{Z}$, noté alors $\rho(\alpha',u,B)$, qu'il convient de noter plutôt $\rho_v(\alpha',u,B)$. Soient $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$, $a=(a_v)_{v\in V}\in A_{\tilde{M}}(F_V)$ et $\Lambda\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$. Un élément $\alpha'\in\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0,B)$ se restreint à $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}$ en un élément $\alpha'_{\tilde{M}}=q\beta$, où $q\in\mathbb{Q}_{>0}$ et $\beta\in\Sigma(A_{\tilde{M}})$. On dit que $\alpha'_{\tilde{M}}>_P 0$ si et seulement si $\beta>_P 0$. D'autre part, l'élément a étant supposé proche de 1, on peut écrire $a_v=exp(H_v)$ pour tout $v\in V$, où $H_v\in\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F_v)$ est proche de 0. On pose $\alpha'(a_v)=exp(q\beta(H_v))$. Il résulte alors des définitions que l'on a l'égalité

$$(3)\qquad r_{\tilde{P}}(\gamma,a,B;\Lambda)=\prod_{v\in V}\prod_{\alpha'\in\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0,B);\alpha'_{\tilde{M}}>_P 0}|\alpha'(a_v)-\alpha'(a_v)^{-1}|_{F_v}^{<\Lambda,\rho_v(\alpha',u,B)>/2}.$$

Notons $\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}})$ l'ensemble des éléments indivisibles de $\Sigma(A_{\tilde{M}})$. Un élément α intervenant dans (2) se restreint en un élément $\alpha_{\tilde{M}}$ qui est un multiple entier positif d'un unique élément $\beta\in\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}})$. On regroupe les α selon cet élément β et on obtient une décomposition en produit

$$r_{\tilde{P}}(\gamma,a;\Lambda)=\prod_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}}),\beta_{\tilde{M}}>_P 0}r_\beta(\gamma,a;\Lambda).$$

Un élément α' intervenant dans (3) se restreint en un élément $\alpha'_{\tilde{M}}$ qui est un multiple rationnel positif d'un unique élément $\beta\in\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}})$. On regroupe les α' selon cet élément β et on obtient une décomposition en produit

$$r_{\tilde{P}}(\gamma,a,B;\Lambda)=\prod_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}}),\beta_{\tilde{M}}>_P 0}r_\beta(\gamma,a,B;\Lambda).$$

Fixons $\beta\in\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}})$. On peut introduire une coracine $\check{\beta}\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, normalisée par la condition $<\beta,\check{\beta}>=2$. Il resulte des constructions de [II] 1.4 que, si α est un élément de $\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0)$ tel que $\alpha_{\tilde{M}}$ est un multiple entier de β, alors, pour tout $v\in V$, la projection orthogonale de $\rho_v(\alpha,u)$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ est colinéaire à $\check{\beta}$. Il en résulte que

$$<\Lambda,\rho_v(\alpha,u)>/2=<\beta,\rho_v(\alpha,u)><\Lambda,\check{\beta}>/2.$$

De même, il résulte des constructions de [II] 1.8 que, si α' est un élément de $\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0,B)$ tel que $\alpha'_{\tilde{M}}$ est un multiple rationnel de β, alors, pour tout $v\in V$, la projection orthogonale de $\rho_v(\alpha',u,B)$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ est colinéaire à $\check{\beta}$. Il en résulte que

$$<\Lambda,\rho_v(\alpha',u,B)>/2=<\beta,\rho_v(\alpha',u,B)><\Lambda,\check{\beta}>/2.$$

Définissons une fonction $c_\beta(\gamma,a,B;x)$ d'une variable réelle x par l'égalité

$$(4)\qquad c_\beta(\gamma,a,B;x)=\prod_{v\in V}\left(\prod_{\alpha'\in\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0,B);\alpha'_{\tilde{M}}\in\mathbb{Q}_{>0}\beta}|\alpha'(a_v)-\alpha'(a_v)^{-1}|_{F_v}^{ix<\beta,\rho_v(\alpha',u,B)>/4}\right)$$
$$\left(\prod_{\alpha\in\Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0);\alpha_{\tilde{M}}\in\mathbb{Z}_{>0}\beta}|\alpha(a_v)-\alpha(a_v)^{-1}|_{F_v}^{-ix<\beta,\rho_v(\alpha,u)>/4}\right).$$

On obtient alors l'égalité

$$c_{\beta}(\gamma,a,B;-i<\Lambda,\check{\beta}>)=r_{\beta}(\gamma,a,B;\Lambda)r_{\beta}(\gamma,a;\Lambda)^{-1}.$$

D'où l'égalité

$$c_{\tilde{P}}(\gamma,a,B;\Lambda)=\prod_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}}),\beta>_{P}0}c_{\beta}(\gamma,a,B;-i<\Lambda,\check{\beta}>).$$

Cela montre que la famille $(c_{\tilde{P}}(\gamma,a,B;\Lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ est de la forme particulière étudiée par Arthur en [6]. Le lemme 7.1 de cette référence calcule explicitement $c_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,a,B)$: c'est une combinaison linéaire de produits des dérivées $c'_{\beta}(\gamma,a,B;x)$ des fonctions $c_{\beta}(\gamma,a,B;x)$ évaluées en $x=0$. Pour prouver (1), il suffit de fixer $\beta\in\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}})$ et de prouver la relation

$$lim_{a\to1}c'_{\beta}(\gamma,a,B;0)=0.$$

Fixons β et considérons la formule (4). Notons $\Sigma_{ind}^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0})$ l'ensemble des éléments indivisibles de $\Sigma^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0})$. Pour $\alpha_{ind}\in\Sigma_{ind}^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0})$, définissons une fonction $c_{\alpha}(\gamma,a,B;x)$ par une formule analogue à (4), où on se restreint aux α qui sont multiples entiers positifs de α_{ind} et aux α' qui sont multiples rationnels positifs de α_{ind}. On obtient une décomposition

$$c_{\beta}(\gamma,a,B;x)=\prod_{\alpha_{ind}\in\Sigma_{ind}^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0}),\alpha_{ind,\tilde{M}}\in\mathbb{Z}_{>0}\beta}c_{\alpha_{ind}}(\gamma,a,B;x).$$

Il nous suffit de fixer $\alpha_{ind}\in\Sigma_{ind}^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0})$ et de prouver la relation

$$lim_{a\to1}c'_{\alpha_{ind}}(\gamma,a,B;0)=0.$$

Fixons donc un élément de $\Sigma_{ind}^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0})$. Pour la commodité de l'écriture, notons-le simplement α. On a vu en [II] 1.8 que l'ensemble $\Sigma_{ind}^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0},B)$ possédait beaucoup des propriétés des systèmes de racines. En particulier, l'ensemble des $\alpha'\in\Sigma_{ind}^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0},B)$ qui sont des multiples rationnels positifs de α possède un unique élément minimal, notons-le simplement α'. Les autres éléments de cet ensemble sont des multiples entiers positifs de α'. Posons alors

$$(5)\qquad X_{\alpha}(\gamma,a)=\sum_{v\in V}\sum_{n\geq1}log(|\alpha(a_{v})^{n}-\alpha(a_{v})^{-n}|_{F_{v}})\rho_{v}(n\alpha,u),$$

$$(6)\qquad X_{\alpha'}(\gamma,a,B)=\sum_{v\in V}\sum_{n\geq1}log(|\alpha'(a_{v})^{n}-\alpha'(a_{v})^{-n}|_{F_{v}})\rho_{v}(n\alpha',u,B),$$

où, par convention, les termes $\rho_{v}(n\alpha,u)$ et $\rho_{v}(n\alpha',u,B)$ sont nuls si $n\alpha\notin\Sigma^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0})$, resp. $n\alpha'\notin\Sigma^{G_{\eta}}(Z(M_{\eta})^{0},B)$. On calcule

$$c'_{\alpha}(\gamma,a,B;0)=\frac{i}{4}<\beta,X_{\alpha'}(\gamma,a,B)-X_{\alpha}(\gamma,a)>,$$

où β est l'unique élément de $\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}})$ tel que $\alpha_{\tilde{M}}$ soit un multiple entier positif de β. Il nous suffit de prouver l'égalité

$$(7)\qquad lim_{a\to1}(X_{\alpha}(\gamma,a)-X_{\alpha'}(\gamma,a,B))=0.$$

On a besoin de deux résultats préliminaires. D'abord

(8) pour tout $n \geq 1$, les termes $\rho_v(n\alpha, u)$ et $\rho_v(n\alpha', u, B)$ sont indépendants de $v \in V$.

Preuve. C'est clair si $n\alpha \notin \Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0)$, resp. $n\alpha' \notin \Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0, B)$. Soit $n \geq 2$, supposons que $n\alpha \in \Sigma^{G_\eta}(Z(M_\eta)^0)$. Soit $v \in V$. Notre terme $\rho_v(n\alpha, u)$ dépend du groupe ambiant G_η, notons-le ici $\rho_v^{G_\eta}(n\alpha, u)$. On a introduit en [II] 1.4 un sous-groupe $G_{\eta,n\alpha}$ de G_η. On a l'égalité $\rho_v^{G_\eta}(n\alpha, u) = \rho_v^{G_{\eta,n\alpha}}(n\alpha, u)$. L'hypothèse $n \geq 2$ implique que $dim(G_{\eta,n\alpha,SC}) < dim(G_\eta)$. En raisonnant par récurrence sur cette dimension, on peut supposer que $\rho_v^{G_{\eta,n\alpha}}(n\alpha, u)$ est indépendant de v. Donc $\rho_v^{G_\eta}(n\alpha, u)$ aussi. Le même raisonnement vaut pour $\rho_v^{G_\eta}(n\alpha', u, B)$, en utilisant le groupe $G_{\eta,n\alpha'}$ de [II] 1.8 (ce n'est plus un sous-groupe de G_η mais peu importe). L'assertion étant démontrée pour $n \geq 2$, il nous suffit pour conclure de prouver que les sommes

$$\sum_{n\geq 1} \rho_v(n\alpha, u) \text{ et } \sum_{n\geq 1} \rho_v(n\alpha', u, B)$$

sont indépendantes de v. D'après [II] 1.8(6), ces deux sommes sont égales. D'après la définition de [II] 1.4, elles valent le terme $\rho_v^{Art}(\alpha, u)\check{\alpha}$ défini primitivement par Arthur en [5] paragraphe 3. Rappelons brièvement sa définition. Fixons une extension finie F'_v de F_v sur laquelle G_η est déployée. A α est associé un Levi $M_{\eta,\alpha}$ de G_η qui contient strictement M_η et qui est minimal parmi les Levi vérifiant cette propriété. Le terme $\rho_v^{Art}(\alpha, u)\check{\alpha}$ relatif au groupe ambiant G_η est égal à celui relatif à $M_{\eta,\alpha}$. On ne perd rien à supposer $G_\eta = M_{\eta,\alpha}$. Fixons $P = M_\eta U_P \in \mathcal{P}(M_\eta)$, notons $\bar{P} = M_\eta U_{\bar{P}}$ le parabolique opposé et notons $\mathcal{U}$ l'orbite de u pour la conjugaison par M_η. Fixons un poids ω de A_{M_η} qui est dominant pour P, fixons une représentation algébrique irréductible Λ_ω de G_η dans un espace V_ω, de plus haut poids ω. Fixons un vecteur extrémal $\phi_\omega \in V_\omega$, de poids ω. Pour $\underline{a} \in A_{M_\eta}$ en position générale et pour $\pi = n\nu \in \mathcal{U}U_{\bar{P}}$, avec $n \in \mathcal{U}$ et $\nu \in U_{\bar{P}}$, introduisons l'élément $\nu(\underline{a}, \pi) \in U_{\bar{P}}$ tel que $\underline{a}\pi = \nu(\underline{a}, \pi)^{-1} a n \nu(\underline{a}, \pi)$. On pose $\varphi(\underline{a}, \pi) = \Lambda_\omega(\nu(\underline{a}, \pi)^{-1})\phi_\omega$. Arthur montre en [4] page 238 que φ est une application rationnelle sur $A_{M_\eta} \times \mathcal{U}U_{\bar{P}}$, à valeurs dans V_ω, et qu'il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que la fonction

$$(\underline{a}, \pi) \mapsto (\alpha(\underline{a}) - \alpha(\underline{a})^{-1})^k \varphi(\underline{a}, \pi)$$

soit régulière et non nulle sur $\{1\} \times \mathcal{U}U_{\bar{P}}$. Une coracine $\check{\alpha}$ étant fixée, $\rho_v^{Art}(\alpha, u)$ est l'unique réel tel que $k = \omega(\check{\alpha})\rho_v^{Art}(\alpha, u)$. Fixons une extension finie F' de F telle que G_η soit déployé sur F'. La construction ci-dessus étant de nature algébrique, on peut la refaire sur le corps de base F'. On obtient un nombre réel $\rho^{Art}(\alpha, u)$ indépendant de la place v et il est clair que $\rho_v^{Art}(\alpha, u) = \rho^{Art}(\alpha, u)$ pour tout v. Cela prouve (8).

Supprimons désormais les indices v des termes $\rho_v(n\alpha, u)$ et $\rho_v(n\alpha', u, B)$. Comme on l'a dit dans la preuve ci-dessus, il résulte de [II] 1.8(6) que

$$(9) \qquad \sum_{n\geq 1} \rho(n\alpha, u) = \sum_{n\geq 1} \rho(n\alpha', u, B).$$

Soit $\beta \in \Sigma^{G_\eta}(T)$ telle que α' soit la restriction de $B_\eta(\beta)^{-1}\beta$ à $Z(M_\eta)^0$. Posons $b = B_\eta(\beta)$ et soit $m \geq 1$ tel que la restriction de β soit $m\alpha$. Alors $\alpha' = \frac{m}{b}\alpha$. L'élément a étant supposé proche de 1, on écrit $a_v = exp(H_v)$ pour tout $v \in V$, où $H_v \in \mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F_v)$ est proche de 0. Pour $n \geq 1$, on a $\alpha'(a_v)^n = exp(\frac{nm}{b} < \alpha, H_v >)$. Donc l'expression $log(|\alpha'(a_v)^n - \alpha'(a_v)^{-n}|_{F_v}) - log(|\alpha(a_v) - \alpha(a_v)^{-1}|_{F_v}) - log(|\frac{nm}{b}|_{F_v})$ tend vers 0 quand a

tend vers 1. Posons

$$Y_{\alpha'}(\gamma,a,B)=\left(\sum_{v\in V}log(|\alpha(a_v)-\alpha(a_v)^{-1}|_{F_v})\sum_{n\geq 1}\rho(n\alpha',\gamma,B)\right)$$
$$+\left(\sum_{n\geq 1}\rho(n\alpha',\gamma,B)\sum_{v\in V}log(|\frac{nm}{b}|_{F_v})\right).$$

En se reportant à l'expression (6), on voit que $X_{\alpha'}(\gamma,a,B)-Y_{\alpha'}(\gamma,a,B)$ tend vers 0 quand a tend vers 1. On a supposé que V contenait V_{ram}. Donc b est une unité en toute place $v\in Val(F)-V$. Le même calcul que dans la preuve du lemme [II] 1.9 montre que les seuls premiers pouvant diviser les nombres n et m intervenant ci-dessus sont 2, 3 et 5. Ces nombres sont donc eux-aussi des unités hors de V. La formule du produit entraîne alors

$$\sum_{v\in V}log(|\frac{nm}{b}|_{F_v})=0.$$

La définition de $Y_{\alpha'}(\gamma,a,B)$ se simplifie en

$$Y_{\alpha'}(\gamma,a,B)=\sum_{v\in V}log(|\alpha(a_v)-\alpha(a_v)^{-1}|_{F_v})\sum_{n\geq 1}\rho(n\alpha',\gamma,B).$$

Un calcul analogue vaut pour $X_\alpha(\gamma,B)$. Si on pose

$$Y_\alpha(\gamma,a)=\sum_{v\in V}log(|\alpha(a_v)-\alpha(a_v)^{-1}|_{F_v})\sum_{n\geq 1}\rho(n\alpha,\gamma),$$

on a $lim_{a\to 1}(X_\alpha(\gamma,a)-Y_\alpha(\gamma,a))=0$. Mais (9) entraîne que $Y_\alpha(\gamma,a)=Y_{\alpha'}(\gamma,a,B)$. On en déduit la relation (7), ce qui achève la preuve. □

.

1.15 Variante avec caractère central

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On suppose donnée une extension

$$1\to C_1\to G_1\to G\to 1$$

où C_1 est un tore induit central, et une extension compatible $\tilde{G}_1\to\tilde{G}$, encore à torsion intérieure. On fixe un caractère λ_1 de $C_1(\mathbb{A}_F)$, automorphe c'est-à-dire trivial sur $C_1(F)$. Notons $V_{1,ram}$ (ou plus précisément $V_{ram}(\tilde{G}_1,\lambda_1)$) le plus petit ensemble de places de F contenant $V_{ram}(\tilde{G}_1)$ et tel que $\lambda_{1,v}$ soit non ramifié pour $v\not\in V_{1,ram}$.

On doit fixer pour tout $v\not\in V_{1,ram}$ un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}_{1,v}$ de $\tilde{G}_1(F_v)$, soumis aux conditions de 1.1. On suppose que $\tilde{K}_{1,v}$ se projette sur $\tilde{K}_v$. Le groupe $K_{C_1,v}=C_1(F_v)\cap K_{1,v}$ est le plus grand sous-groupe compact de $C_1(F_v)$.

Pour toute place v, on a défini en [I] 2.4 l'espace $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_v))$. Pour $v\not\in V_{1,ram}$, on note $\mathbf{1}_{\tilde{K}_{1,v},\lambda_1}$ l'unique élément de cet espace à support dans $C_1(F_v)\tilde{K}_{1,v}$ qui vaut 1 sur $\tilde{K}_{1,v}$. On note $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{A}_F))$ le produit tensoriel restreint des $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_v))$ relativement à ces éléments $\mathbf{1}_{\tilde{K}_{1,v},\lambda_1}$. Pour un ensemble fini V de places de F, on définit

$$C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V))=\otimes_{v\in V}C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_v)).$$

Dualement, on définit de même l'espace $D_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V))$ et ses sous-espaces $D_{orb,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V))$ etc... Les constructions des paragraphes précédents s'étendent à cette situation. En particulier, soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Notons $\tilde{M}_1$ son image réciproque dans $\tilde{G}_1$. On a l'égalité $\mathcal{A}_{\tilde{M}_1}^{\tilde{G}_1} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et on munit le premier espace de la mesure pour laquelle cette égalité préserve les mesures. Pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb,\lambda_1}(\tilde{M}_1(F_V))\otimes Mes(M(F_V))^*$ et $\mathbf{f} \in C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1(F_V))\otimes Mes(G(F_V))$, on définit l'intégrale orbitale pondérée $J_{\tilde{M}_1,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ et son avatar invariant $I_{\tilde{M}_1,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$.

Supposons que $V \cap V_{ram} = \emptyset$. On définit une forme linéaire $r_{\tilde{M}_1,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(., \tilde{K}_{1,V})$ sur $D_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}_1(F_V))$ par

$$r_{\tilde{M},\lambda_1}^{\tilde{G}}(\delta, \tilde{K}_{1,V}) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\delta, \mathbf{1}_{\tilde{K}_V,\lambda_1}).$$

Elle vérifie une formule de descente analogue à celle de 1.13.

Considérons d'autres données

$$1 \to C_2 \to G_2 \to G \to 1,\ \tilde{G}_2 \to \tilde{G},\ \lambda_2$$

et des sous-espaces hyperspéciaux $\tilde{K}_{2,v}$ de $\tilde{G}_2(F_v)$ pour $v \notin V_{2,ram}$, vérifiant les mêmes hypothèses. On note G_{12} le produit fibré de G_1 et G_2 au-dessus de G et $\tilde{G}_{12}$ le produit fibré de $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$ au-dessus de $\tilde{G}$. On suppose donné un caractère automorphe λ_{12} de $G_{12}(\mathbb{A}_F)$ tel que la restriction de λ_{12} à $C_1(\mathbb{A}_F) \times C_2(\mathbb{A}_F)$ soit $\lambda_1 \times \lambda_2^{-1}$. Notons $V_{12,ram}$ le plus petit ensemble de places de F contenant $V_{1,ram}$ et $V_{2,ram}$ et tel que λ_{12} soit non ramifié hors de $V_{12,ram}$.

Pour un ensemble fini V de places de F, notons $\lambda_{12,V}$ la restriction de λ_{12} à $G_{12}(F_V)$. Fixons une fonction $\tilde{\lambda}_{12,V}$ sur $\tilde{G}_{12}(F_V)$ telle que

$$(1) \qquad \tilde{\lambda}_{12,V}(x_V\gamma_V) = \lambda_{12,V}(x_V)\tilde{\lambda}_{12,V}(\gamma_V)$$

pour $x_V \in G_{12}(F_V)$ et $\gamma_V \in \tilde{G}_{12}(F_V)$. On définit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1(F_V)) & \to & C_{c,\lambda_2}^\infty(\tilde{G}_2(F_V)) \\ f_1 & \mapsto & f_2 \end{array}$$

par la formule

$$f_2(\gamma_2) = \tilde{\lambda}_{12}(\gamma_1, \gamma_2)f_1(\gamma_1)$$

pour tous $(\gamma_1, \gamma_2) \in \tilde{G}_{12}(F_V)$. Cet isomorphisme se dualise en un isomorphisme

$$D_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V)) \simeq D_{géom,\lambda_2}(\tilde{G}_2(F_V)).$$

On vérifie que les intégrales orbitales pondérées et leurs avatars invariants se recollent selon ces isomorphismes. C'est-à-dire, soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et soient, pour $i = 1, 2$, $\boldsymbol{\gamma}_i \in D_{orb,\lambda_i}(\tilde{M}_i(F_V)) \otimes Mes(M(F_V))^*$ et $\mathbf{f}_i \in C_{c,\lambda_i}^\infty(\tilde{G}_i(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$. Supposons que, par les isomorphismes précédents, $\boldsymbol{\gamma}_1$ et $\boldsymbol{\gamma}_2$ se correspondent, ainsi que $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$. Alors on a l'égalité

$$J_{\tilde{M}_1,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{f}_1) = J_{\tilde{M}_2,\lambda_2}^{\tilde{G}_2}(\boldsymbol{\gamma}_2, \mathbf{f}_2).$$

Si V contient $V_{12,ram}$, il y a une fonction $\tilde{\lambda}_{12,V}$ canonique construite de la façon suivante. Pour $v \notin V_{12,ram}$, on définit une fonction $\tilde{\lambda}_{12,v}$ sur $\tilde{G}_{12}(F_v)$ par les conditions :

- $\tilde{\lambda}_{12,v}$ vaut 1 sur $\tilde{G}_{12}(F_v) \cap (\tilde{K}_{1,v} \times \tilde{K}_{2,v})$;
- pour $x \in G_{12}(F_v)$ et $\gamma \in \tilde{G}_{12}(F_v)$, $\tilde{\lambda}_{12,v}(x\gamma) = \lambda_{12,v}(x)\tilde{\lambda}_{12,v}(\gamma)$.

On définit une fonction $\tilde{\lambda}_{12}$ sur $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ par les conditions :

- $\tilde{\lambda}_{12}$ vaut 1 sur $\tilde{G}(F)$;
- pour $x \in G_{12}(\mathbb{A}_F)$ et $\gamma \in \tilde{G}_{12}(\mathbb{A}_F)$, $\tilde{\lambda}_{12}(x\gamma) = \lambda_{12}(x)\tilde{\lambda}_{12}(\gamma)$.

Il existe alors une unique fonction $\tilde{\lambda}_{12,V}$ sur $\tilde{G}_{12}(F_V)$ de sorte que, pour $\gamma = \gamma_V \prod_{v \notin V} \gamma_v \in \tilde{G}_{12}(\mathbb{A}_F)$, on ait l'égalité

$$\tilde{\lambda}_{12}(\gamma) = \tilde{\lambda}_{12,V}(\gamma_V) \prod_{v \notin V} \tilde{\lambda}_{12,v}(\gamma_v).$$

Evidemment, elle vérifie (1).

Si $V \cap V_{12,ram} = \emptyset$, il y a aussi une fonction $\tilde{\lambda}_{12,V}$ canonique : le produit des $\tilde{\lambda}_{12,v}$ ci-dessus pour $v \in V$. Les formes linéaires $r^{\tilde{G}_1}_{\tilde{M}_1,\lambda_1}(., \tilde{K}_{1,V})$ et $r^{\tilde{G}_2}_{\tilde{M}_2,\lambda_2}(., \tilde{K}_{2,V})$ se correspondent par l'isomorphisme

$$D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{M}_1(F_V)) \simeq D_{g\acute{e}om,\lambda_2}(\tilde{M}_2(F_V))$$

déduit de cette fonction $\tilde{\lambda}_{12,V}$.

1.16 K-espaces

On utilise dans ce paragraphe les notations usuelles pour divers ensembles de cohomologie : $H^1(F;G)$, $H^1(F_v;G)$, $H^1(\mathbb{A}_F;G)$ etc... Par exemple $H^1(F;G) = H^1(\Gamma_F;G(\bar{F}))$. On renvoie à [18] pour des définitions complètes.

On rappelle que l'on note $\pi : G_{SC} \to G$ la projection naturelle ainsi que les applications qui s'en déduisent fonctoriellement. Ainsi, on a une application $\pi : H^1(F;G_{SC}) \to H^1(F,G)$. D'autre part, pour $r \in \tilde{G}(F)$, l'application ad_r définit naturellement un automorphisme de $H^1(F;G)$ qui ne dépend pas de r. On le note θ. On note $Val_{\mathbb{R}}(F)$ l'ensemble des places réelles de F.

Lemme. *L'application naturelle*

$$\pi(H^1(F;G_{SC})) \cap H^1(F;G)^\theta \to \prod_{v \in Val_{\mathbb{R}}(F)} \pi(H^1(F_v;G_{SC})) \cap H^1(F_v;G)^\theta$$

est bijective.

Peuve. On commence par prouver que l'application

$$(1) \qquad \pi(H^1(F;G_{SC})) \to \prod_{v \in Val_{\mathbb{R}}(F)} \pi(H^1(F_v;G_{SC}))$$

est bijective. La surjectivité résulte de celle de l'application

$$H^1(F;G_{SC}) \to \prod_{v \in Val_{\mathbb{R}}(F)} H^1(F_v;G_{SC}),$$

cf. [18] théorème 1.6.9. Soient $p, p' \in H^1(F;G_{SC})$ tels que $\pi(p)$ et $\pi(p')$ aient même image par l'application (1). Alors $\pi(p)$ et $\pi(p')$ ont même image dans $H^1(\mathbb{A}_F;G)$ (les images aux places non réelles sont triviales). Parce qu'ils proviennent de G_{SC}, les éléments $\pi(p)$ et $\pi(p')$ ont aussi une image nulle dans $H^1_{ab}(F;G)$, cf. [18] 1.6 pour la définition de ce groupe. D'après le théorème 1.6.10 de [18], ces deux propriétés entraînent $\pi(p) = \pi(p')$. D'où l'injectivité de (1).

Il est immédiat que l'application (1) est équivariante pour les actions naturelles de θ. La bijectivité de (1) entraîne donc celle de l'application obtenue en remplaçant les espaces de départ et d'arrivée par leurs sous-espaces d'invariants par θ. Cette application n'est autre que celle de l'énoncé. $\square$

On devra à diverses occasions travailler non pas avec les données $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ de 1.1, mais avec une collection finie de telles données, que l'on appellera un K-espace. On a défini (après Arthur) cette notion en [I] 1.11 dans le cas local. La définition s'étend au cas global. Rappelons-la. On considère une famille finie $(G_p,\tilde{G}_p)_{p\in\Pi}$ où, pour tout p, G_p est un groupe réductif connexe défini sur F et $\tilde{G}_p$ est un espace tordu sur G_p. On suppose données des familles $(\phi_{p,q})_{p,q\in\Pi}$, $(\tilde{\phi}_{p,q})_{p,q\in\Pi}$ et $(\nabla_{p,q})_{p,q\in\Pi}$. Pour $p,q\in\Pi$, $\phi_{p,q}:G_q\to G_p$ et $\tilde{\phi}_{p,q}:\tilde{G}_q\to\tilde{G}_p$ sont des isomorphismes compatibles définis sur $\bar{F}$ et $\nabla_{p,q}:\Gamma_F\to G_{p,SC}(\bar{F})$ est un cocycle. On suppose les hypothèses (1) à (5) vérifiées pour tous $p,q,r\in\Pi$ et $\sigma\in\Gamma_{\mathbb{R}}$:

(1) $\phi_{p,q}\circ\sigma(\phi_{p,q})^{-1}=ad_{\nabla_{p,q}(\sigma)}$ et $\tilde{\phi}_{p,q}\circ\sigma(\tilde{\phi}_{p,q})^{-1}=ad_{\nabla_{p,q}(\sigma)}$ (ce dernier automorphisme est l'action par conjugaison de $\nabla_{p,q}(\sigma)$ sur $\tilde{G}_p$) ;

(2) $\phi_{p,q}\circ\phi_{q,r}=\phi_{p,r}$ et $\tilde{\phi}_{p,q}\circ\tilde{\phi}_{q,r}=\tilde{\phi}_{p,r}$;

(3) $\nabla_{p,r}(\sigma)=\phi_{p,q}(\nabla_{q,r}(\sigma))\nabla_{p,q}(\sigma)$;

(4) $\tilde{G}_p(F)\neq\emptyset$;

(5) la famille $(\nabla_{p,q})_{q\in\Pi}$ s'envoie bijectivement sur $\pi(H^1(F;G_{p,SC}))\cap H^1(F;G_p)^\theta$.

Sous ces hypothèses, on définit le K-groupe KG comme la réunion disjointe des G_p pour $p\in\Pi$ et le K-espace $K\tilde{G}$ comme la réunion disjointe des $\tilde{G}_p$.

Comme dans le cas local, ___les___ paires de Borel épinglées des différents G_p s'identifient et les G_p ont un L-groupe commun, que l'on note ${}^LG$. La donnée supplémentaire d'un élément $\mathbf{a}\in H^1(W_F;Z(\hat{G}))/ker^1(W_F;Z(\hat{G}))$ détermine un caractère de chaque $G_p(\mathbb{A}_F)$, que l'on note simplement ω.

Pour tout $p\in\Pi$, on fixe une paire parabolique $(P_{p,0},M_{p,0})$ de G_p définie sur F et minimale. Pour toute place $v\in Val(F)$, on fixe une paire parabolique $(P_{p,v,0},M_{p,v,0})$ de G_p définie sur F_v et minimale, de sorte que $P_{p,v,0}\subset P_{p,0}$ et $M_{p,v,0}\subset M_{p,0}$. Soulignons que ces inclusions peuvent être strictes : le groupe G_p peut être plus déployé sur F_v que sur F. Il se déduit de ces paires des paires d'espaces $(\tilde{P}_{p,0},\tilde{M}_{p,0})$ et $(\tilde{P}_{p,v,0},\tilde{M}_{p,v,0})$.

Soit v une place de F finie ou complexe. Alors $H^1(F_v;G_{p,SC})=\{1\}$ pour tout p. Fixons un élément $p'\in\Pi$. On peut fixer pour tout $p\in\Pi$ un élément $x_p\in G_{p',SC}(\bar{F}_v)$ tel que $\nabla_{p',p}(\sigma)=x_p^{-1}\sigma(x_p)$ pour tout $\sigma\in\Gamma_{F_v}$. Définissons $\phi'_{p',p}=ad_{x_p}\circ\phi_{p',p}$ et $\tilde{\phi}'_{p',p}=ad_{x_p}\circ\tilde{\phi}_{p',p}$. Alors $\phi'_{p',p}:G_p\to G_{p'}$ et $\tilde{\phi}'_{p',p}:\tilde{G}_p\to\tilde{G}_{p'}$ sont des isomorphismes définis sur F_v. Quitte à multiplier x_p à gauche par un élément de $G_{p',SC}(F_v)$, on peut supposer que $\phi'_{p',p}$ envoie $(P_{p,v,0},M_{p,v,0})$ sur $(P_{p',v,0},M_{p',v,0})$ et que $\tilde{\phi}_{p',p}$ envoie $(\tilde{P}_{p,v,0},\tilde{M}_{p,v,0})$ sur $(\tilde{P}_{p',v,0},\tilde{M}_{p',v,0})$. Les différents espaces $I(\tilde{G}_p(F_v),\omega)$ s'identifient grâce à ces isomorphismes $\tilde{\phi}'_{p',p}$ à l'espace $I(\tilde{G}_{p'}(F_v),\omega)$, que l'on peut noter simplement $I(\tilde{G}(F_v),\omega)$. Notons que, bien que les $\tilde{\phi}'_{p',p}$ dépendent du choix des x_p, les isomorphismes qui s'en déduisent entre les espaces $I(\tilde{G}_p(F_v),\omega)$ ne dépendent pas de ce choix.

Puisque les différents espaces $\tilde{G}_p$ s'identifient sur F_v pour toute place finie, les ensembles $V_{ram}(\tilde{G}_p,\mathbf{a})$ sont les mêmes, on les note $V_{ram}(\tilde{G},\mathbf{a})$, ou simplement V_{ram}. Pour l'élément p' fixé ci-dessus et pour toute place $v\notin V_{ram}$, on choisit un espace hyperspécial $\tilde{K}_{p',v}$ de $\tilde{G}_{p'}(F_v)$ de sorte que les conditions de 1.1 soient vérifiées. Pour $p\in\Pi$, on note $\tilde{K}_{p,v}$ l'image de $\tilde{K}_{p',v}$ par $(\tilde{\phi}'_{p',p})^{-1}$. Alors les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{\tilde{K}_{p,v}}$ de $\tilde{K}_{p,v}$, pour $p\in\Pi$, ont même image dans $I(\tilde{G}(F_v),\omega)$. On peut noter $\mathbf{1}_{\tilde{K}_v}$ cette image.

Les choses sont plus compliquées en une place réelle. Soit v une telle place. Pour

$p, q \in \Pi$, notons $\nabla_{p,q,v}$ la restriction de $\nabla_{p,q}$ à Γ_{F_v}. Disons que p et q sont v-équivalents si et seulement si $\pi(\nabla_{p,q,v})$ est cohomologiquement trivial. On vérifie que c'est une relation d'équivalence. Fixons un ensemble $\Pi_v \subset \Pi$ de représentants des classes de v-équivalence. On voit que la famille $(G_{p,v}, \tilde{G}_{p,v})_{p\in\Pi_v}$, munie des familles $(\phi_{p,q})_{p,q\in\Pi_v}$, $(\tilde{\phi}_{p,q})_{p,q\in\Pi_v}$ et $(\nabla_{p,q,v})_{p,q\in\Pi_v}$, définit un K-espace sur F_v, au sens de [I] 1.11. Soit $p \in \Pi$. Notons p' l'unique élément de Π_v tel que p soit v-équivalent à p'. On peut fixer $x_p \in G_{p'}(\bar{F}_v)$ tel que $\pi(\nabla_{p',p,v}) = x_p^{-1}\sigma(x_p)$. Les applications $\phi'_{p',p} = ad_{x_p} \circ \phi_{p',p}$ et $\tilde{\phi}'_{p',p} = ad_{x_p} \circ \tilde{\phi}_{p',p}$ sont encore des isomorphismes définis sur F_v. Quitte à multiplier x_p à gauche par un élément de $G_{p'}(F_v)$, on peut supposer que $\phi'_{p',p}$ envoie $(P_{p,v,0}, M_{p,v,0})$ sur $(P_{p',v,0}, M_{p',v,0})$ et que $\tilde{\phi}_{p',p}$ envoie $(\tilde{P}_{p,v,0}, \tilde{M}_{p,v,0})$ sur $(\tilde{P}_{p',v,0}, \tilde{M}_{p',v,0})$. Décomposons x_p en $\pi(x_{p,sc})z_p$, où $x_{p,sc} \in G_{p',SC}(\bar{F}_v)$ et $z_p \in Z(G_{p'}; \bar{F}_v)$. Définissons la cochaîne $\nabla_p : \Gamma_{F_v} \to G_{p',SC}$ par $\nabla_p(\sigma) = x_{p,sc}\nabla_{p',p}(\sigma)\sigma(x_{p,sc})^{-1}$. C'est un cocycle à valeurs dans $Z(G_{p',SC})$ et le couple (∇_p, z_p) définit un élément de $H^{1,0}(F_v; Z(G_{p',SC}) \to Z(G_{p'})) = G_{p',ab}(F_v)$, que l'on note h_p. On sait que $\mathbf{a}$ définit un caractère de ce groupe. On note $\omega(h_p)$ sa valeur en h_p. On définit un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}_p(F_v)) & \to & C_c^\infty(\tilde{G}_{p'}(F_v)) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

par $f' \circ \tilde{\phi}'_{p',p}(r) = \omega(h_p)f(r)$ pour tout $r \in \tilde{G}_p(F_v)$. C'est un isomorphisme qui se quotiente en un isomorphisme de $I(\tilde{G}_p(F_v), \omega)$ sur $I(\tilde{G}_{p'}(F_v), \omega)$. On vérifie que ce dernier isomorphisme ne dépend pas des choix de x_p et $x_{p,sc}$.

Soit V un ensemble fini de places contenant les places réelles. Grâce au lemme ci-dessus et aux différents isomorphismes que l'on vient de construire, on obtient un isomorphisme

$$\oplus_{p\in\Pi} I(\tilde{G}_p(F_V), \omega) \simeq \left(\otimes_{v\in V - Val_{\mathbb{R}}(F)} I(\tilde{G}(F_v), \omega)\right) \otimes \left(\otimes_{v\in Val_{\mathbb{R}}(F)} \left(\oplus_{p'\in\Pi_v} I(\tilde{G}_{p'}(F_v), \omega)\right)\right).$$

On note $I(K\tilde{G}(F_V), \omega)$ le membre de gauche. On a évidemment des isomorphismes duaux pour les espaces de distributions.

Les différents groupes G_p étant formes intérieures l'un de l'autre, les espaces de mesures de Haar $Mes(G_p(F_v))$ s'identifient pour toute place v à un espace commun que l'on note $Mes(G(F_v))$. De même, les espaces $\mathfrak{A}_{\tilde{G}_p}$ s'identifient à un espace commun $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. Comme dans le cas local, pour un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ comme en 1.1, on peut construire un K-espace dont $\tilde{G}$ soit une composante connexe, cf. [I] 1.11.

1.17 K-espaces de Levi

On poursuit avec les mêmes données que dans le paragraphe précédent. Notons (B^*, T^*) <u>la</u> paire de Borel commune des groupes G_p et Δ l'ensemble de racines simples associé. Le groupe Γ_F et l'automorphisme θ agissent sur Δ. Toute paire parabolique (P_p, M_p) de G_p détermine un sous-ensemble $\Delta^{M_p} \subset \Delta$. Ainsi, aux paires $(P_{p,0}, M_{p,0})$ et $(P_{p,v,0}, M_{p,v,0})$, pour $v \in Val(F)$, sont associés des sous-ensembles $\Delta^{M_{p,0}}$ et $\Delta^{M_{p,v,0}}$ de Δ. Ils sont invariants par l'action de θ. L'ensemble $\Delta^{M_{p,0}}$ est invariant par l'action de Γ_F et l'ensemble $\Delta^{M_{p,v,0}}$ est invariant par l'action de Γ_{F_v}. Pour une place v réelle, on a vu que notre K-espace déterminait un K-espace sur $F_v = \mathbb{R}$. En [I] 3.5, on lui a associé un sous-ensemble $\Delta_{min} \subset \Delta$, qu'il convient de noter $\Delta_{min,v}$. Il est invariant par θ. Le lemme de cette référence dit que $\Delta_{min,v} \subset \Delta^{M_{p,v,0}}$ pour tout p et que cette inclusion est une égalité pour au moins un p. La même construction vaut pour une place complexe ou non-archimédienne. On réfère pour ce cas à [A 10] lemme 2.1. Pour une telle place, on définit donc un sous-ensemble $\Delta_{min,v} \subset \Delta$. Puisque, pour une telle place, les groupes G_p sont tous isomorphes sur F_v, on a simplement $\Delta_{min,v} = \Delta^{M_{p,v,0}}$ pour tout p. On vient de voir que, pour une place v quelconque, il existait $p \in \Pi$ tel que $\Delta_{min,v} = \Delta^{M_{p,v,0}}$. Le lemme du paragraphe précédent renforce ce résultat en échangeant les quantificateurs :

(1) il existe $p \in \Pi$ tel que $\Delta_{min,v} = \Delta^{M_{p,v,0}}$ pour tout v.

Notons $\Delta'_{min} = \cup_{v \in Val(F)} \Delta_{min,v}$ et Δ_{min} le plus petit sous-ensemble de Δ qui contient Δ'_{min} et qui est invariant par l'action de Γ_F. Puisque les actions de Γ_F et θ commutent, Δ_{min} est invariant par θ.

Lemme. *On a l'inclusion $\Delta_{min} \subset \Delta^{M_{p,0}}$ pour tout p. Cette inclusion est une égalité pour p vérifiant (1).*

Preuve. Pour tout $p \in \Pi$ et toute place v, on a l'inclusion $\Delta^{M_{p,v,0}} \subset \Delta^{M_{p,0}}$. Donc $\Delta^{M_{p,0}}$ contient Δ'_{min}. Puisqu'il est invariant par Γ_F, il contient Δ_{min}. Fixons p vérifiant (1), posons $G = G_p$, $M_0 = M_{p,0}$ et $M_{v,0} = M_{p,v,0}$ pour tout v. Introduisons une forme quasi-déployée G^* de G et un torseur intérieur $\psi : G \to G^*$ de sorte que (B^*, T^*) s'identifie à une paire de Borel de G^* définie sur F. Puisque Δ_{min} est invariant par Γ_F, il existe une paire parabolique (P^*, M^*) de G^*, définie sur F, contenant (B^*, T^*), de sorte que $\Delta_{min} = \Delta^{M^*}$. Soit v une place de F. Puisque Δ_{min} est invariant par Γ_{F_v} et que $\Delta^{M_{v,0}} \subset \Delta_{min}$, la paire (P^*, M^*) se transfère en une paire parabolique de G définie sur F_v. Comme on le sait, à la forme intérieure G de G^* est associé un élément $\kappa \in H^1(F; G^*_{AD})$. Cet élément se localise en un élément $\kappa_v \in H^1(F_v; G^*_{AD})$. La condition précédente signifie que κ_v appartient à l'image de l'application $H^1(F_v; M^*_{ad})$. D'après [18] proposition 1.6.12, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$(2) \qquad \begin{array}{ccccc} H^1(F; G^*_{AD}) & \to & \oplus_{v \in Val(F)} H^1(F_v; G^*_{AD}) & \to & H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F; T^*_{sc} \to T^*_{ad}) \\ \uparrow \iota_F & & \uparrow \iota_{\mathbb{A}_F} & & \uparrow \iota_{ab} \\ H^1(F; M^*_{ad}) & \to & \oplus_{v \in Val(F)} H^1(F_v; M^*_{ad}) & \to & H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F; T^*_{M^*,sc} \to T^*_{ad}) \end{array}$$

Conformément à la convention de [I], on a noté $H^{2,1}$ les groupes de cohomologie que Labesse note H^1 et que Kottwitz et Shelstad notent H^2. On renvoie à ces auteurs (ou à 3.6 ci-dessous) pour la définition de la cohomologie $H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F; .)$. On a noté T^*_{sc} et $T^*_{M^*,sc}$ les images réciproques de T^* dans les revêtements simplement connexes G^*_{SC} et M^*_{SC} des groupes dérivés de G^* et M^*. Posons $\kappa_{\mathbb{A}_F} = \oplus_{v \in Val(F)} \kappa_v$. D'après ce que l'on a dit ci-dessus, on peut fixer $\kappa^{M^*}_{\mathbb{A}_F} \in \oplus_{v \in Val(F)} H^1(F_v; M^*_{ad})$ tel que $\iota_{\mathbb{A}_F}(\kappa^{M^*}_{\mathbb{A}_F}) = \kappa_{\mathbb{A}_F}$. Montrons que

(3) ι_{ab} est injectif.

Le groupe $X_*(T^*_{sc})$ a pour base l'ensemble $\check{\Delta}$ de coracines associé à Δ. Le groupe $X_*(T^*_{M^*,sc})$ a pour base le sous-ensemble $\check{\Delta}^{M^*}$ associé à Δ^{M^*}. On a donc une suite exacte

$$1 \to T^*_{M^*,sc} \to T^*_{sc} \to T_1 \to 1,$$

où T_1 est un tore tel que $X_*(T_1)$ a pour base l'ensemble $\check{\Delta} - \check{\Delta}^{M^*}$. Puisque Γ_F agit sur Δ par permutations laissant stable Δ^{M^*}, les trois tores sont induits. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & T^*_{M^*,sc} & \to & T^*_{sc} & \to & T_1 & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & T^*_{ad} & \to & T^*_{ad} & \to & 1 & & \end{array}$$

dont les suites horizontales sont exactes. Il s'en déduit une suite exacte

$$H^1(\mathbb{A}_F/F;T_1) \to H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F;T^*_{M^*,sc} \to T^*_{ad}) \stackrel{\iota_{ab}}{\to} H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F;T^*_{sc} \to T^*_{ad}).$$

Puisque T_1 est induit, le premier groupe est nul, ce qui prouve (3).

Puisque $\kappa_{\mathbb{A}_F}$ provient de κ, son image dans $H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F;T^*_{sc} \to T^*_{ad})$ est nulle. La commutativité du diagramme (2) et l'assertion (3) entraînent que l'image de $\kappa^{M^*}_{\mathbb{A}_F}$ dans $H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F;T^*_{M^*,sc} \to T^*_{ad})$ est nulle. Donc $\kappa^{M^*}_{\mathbb{A}_F}$ provient d'un élément $\kappa^{M^*} \in H^1(F;M^*_{ad})$. Notons κ' l'image de cet élément dans $H^1(F;G^*_{AD})$. Les éléments κ et κ' ont même image $\kappa_{\mathbb{A}_F}$ dans $\oplus_{v\in Val(F)}H^1(F_v;G^*_{AD})$. D'après [18] proposition 1.6.12, la fibre au-dessus de $\kappa_{\mathbb{A}_F}$ de l'application

$$H^1(F;G^*_{AD}) \to \oplus_{v\in Val(F)}H^1(F_v;G^*_{AD})$$

est isomorphe au noyau $ker^1(F;G_{AD})$ de l'application similaire

$$H^1(F;G_{AD}) \to \oplus_{v\in Val(F)}H^1(F_v;G_{AD}).$$

Or, G_{AD} étant adjoint, cet ensemble est réduit à $\{1\}$ ([21] corollaire 5.4). Donc $\kappa = \kappa'$ et κ provient d'un élément de $H^1(F : M^*_{ad})$. Cela équivaut à dire que la paire parabolique (P^*, M^*) se transfère à G, c'est-à-dire qu'il existe une paire parabolique de G qui est définie sur F et qui est conjuguée à $\psi^{-1}(P^*, M^*)$. Cela implique $\Delta^{M_0} \subset \Delta^{M^*}$. D'où le lemme. $\square$

Notons Π^{M_0} le sous-ensemble des $p \in \Pi$ tels que $\Delta^{M_{p,0}} = \Delta_{min}$. Il est non vide d'après le lemme. Pour $p \in \Pi$ et $p' \in \Pi^{M_0}$, fixons un élément $x_{p',p} \in G_{p'}$ tel que $ad_{x_{p',p}} \circ \tilde{\phi}_{p',p}(\tilde{P}_{p,0}, \tilde{M}_{p,0})$ contienne $(\tilde{P}_{p',0}, \tilde{M}_{p',0})$. Le lemme implique l'existence d'un tel élément. On note $K\tilde{M}_0$ la famille $(\tilde{M}_{p,0})_{p\in\Pi^{M_0}}$. C'est un K-espace de Levi de $K\tilde{G}$, la définition de cette notion étant similaire à celle du cas local, cf. [I] 3.5. On note $\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ l'ensemble des K-espaces de Levi $K\tilde{L} = (\tilde{L}_p)_{p\in\Pi^L}$ de $K\tilde{G}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\tilde{L}_p \supset \tilde{M}_{p,0}$ pour tout $p \in \Pi^L$;
- $ad_{x_{p',p}} \circ \tilde{\phi}_{p',p}(\tilde{L}_p) = \tilde{L}_{p'}$ pour tous $p \in \Pi^L$, $p' \in \Pi^{M_0}$.

Plus généralement, pour $K\tilde{M} = (\tilde{M}_p)_{p\in\Pi^M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on note $\mathcal{L}(K\tilde{M})$ l'ensemble des $K\tilde{L} = (\tilde{L}_p)_{p\in\Pi^L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ tels que $\Pi^M \subset \Pi^L$ et $\tilde{M}_p \subset \tilde{L}_p$ pour tout $p \in \Pi^M$. On définit de façon similaire les ensembles $\mathcal{P}(K\tilde{M})$ et $\mathcal{F}(K\tilde{M})$.

Dans la suite, on travaillera avec un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ comme en 1.1, en n'introduisant les K-espaces que lorsque cela sera indispensable. Dans ce cas, on supposera fixé un espace de Levi minimal $K\tilde{M}_0$.

2 La partie géométrique de la formule des traces

2.1 La partie géométrique de la formule des traces non invariante

On a défini en 1.1 le noyau $G(\mathbb{A}_F)^1$ de l'homomorphisme $H_{\tilde{G}}$ (contrairement à ce que suggère la notation, ce groupe dépend de $\tilde{G}$ et pas seulement de G). On a la décomposition en produit direct $G(\mathbb{A}_F) = \mathfrak{A}_{\tilde{G}} \times G(\mathbb{A}_F)^1$. On note $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)^1$ l'ensemble des $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ tels que $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma) = 0$ (c'est-à-dire $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)^1 = G(\mathbb{A}_F)^1\tilde{G}(F)$). On a encore la décomposition en produit direct $\tilde{G}(\mathbb{A}_F) = \mathfrak{A}_{\tilde{G}} \times \tilde{G}(\mathbb{A}_F)^1$.

Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$. C'est-à-dire que f est combinaison linéaire de fonctions $\otimes_{v\in Val(F)} f_v$ où, pour tout v, $f_v \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_v))$ et, pour presque tout v, $f_v = \mathbf{1}_{\tilde{K}_v}$. Pour un instant, définissons l'espace $\bar{C}_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ un peu plus gros que $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$, obtenu en remplaçant la composante archimédienne $\otimes_{v\in Val_\infty(F)} C_c^\infty(\tilde{G}(F_v))$ par $C_c^\infty(\prod_{v\in Val_\infty(F)} \tilde{G}(F_v))$. Introduisons une fonction $\varphi \in \bar{C}_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ telle que

$$f(\gamma) = \int_{\mathfrak{A}_{\tilde{G}}} \varphi^a(\gamma)\, da$$

pour tout $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)^1$, où φ^a est la fonction $\varphi^a(\gamma) = \varphi(a\gamma)$. Fixons une mesure de Haar dg sur $G(\mathbb{A}_F)$. Posons $\mathbf{f} = f \otimes dg \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F)) \otimes Mes(G(\mathbb{A}_F))$. Nous notons $J_{g\acute{e}om}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}, \omega)$ le membre de gauche de l'égalité du théorème 11.3.2 de [19] appliqué à la fonction φ, multiplié par $|det((1-\theta)_{|\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}})|^{-1}$. Dans le cas où $\omega = 1$, c'est aussi le terme qu'Arthur note $J_{g\acute{e}om}(f^1)$, où f^1 est la restriction de f à $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)^1$. .

Rappelons la définition pour mémoire. On renvoie à [19] pour les notations, qui sont d'ailleurs les notations standard. Pour un espace parabolique standard $\tilde{P} = \tilde{M}U_P$, on définit une fonction $K_{\tilde{P}}(f)$ sur $G(\mathbb{A}_F)$ par

$$K_{\tilde{P}}(f,g) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A}_F)} \sum_{\gamma\in\tilde{P}(F)} f(g^{-1}\gamma u g)\, du.$$

Soit $T \in \mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ assez positif relativement à $\tilde{P}_0$. On pose

$$k_{g\acute{e}om}^T(f,g) = \sum_{\tilde{P}\supset\tilde{P}_0} (-1)^{a_{\tilde{P}}-a_{\tilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(\xi g) - T) K_{\tilde{P}}(f, \xi g),$$

puis

$$J_{g\acute{e}om}^T(f,\omega) = \int_{\mathfrak{A}_{\tilde{G}} G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} k_{g\acute{e}om}^T(f,g)\omega(g)\, dg.$$

Quand T tend vers l'infini dans la chambre positive déterminée par $\tilde{P}_0$, cette expression est asymptote à un polynôme en T. Alors $J_{g\acute{e}om}^{\tilde{G}}(\mathbf{f},\omega)$ est la valeur de ce polynôme au point T_0 défini en [19] lemme 3.3.3.

On note $\tilde{G}_{ss}(F)$, resp. $\tilde{G}(F)_{ell}$, l'ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}(F)$, resp. celui des éléments semi-simples et elliptiques. On note $\tilde{G}_{ss}(F)/conj$, resp. $\tilde{G}(F)_{ell}/conj$, l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\tilde{G}_{ss}(F)$, resp. $\tilde{G}(F)_{ell}$.

Remarque. Puisque F est un corps de nombres, les deux définitions possibles de l'ellipticité sont équivalentes. C'est-à-dire que, pour un élément semi-simple $\gamma \in \tilde{G}(F)$, γ est elliptique si et seulement s'il vérifie les conditions équivalentes :

(1) il existe un sous-tore tordu maximal $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$ défini sur $\mathbb{Q}$ et elliptique tel que $\gamma \in \tilde{T}(F)$;

(2) $A_{G_\gamma} = A_{\tilde{G}}$.

Soit $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$. Pour un espace parabolique standard $\tilde{P}$, on définit une fonction $K_{\tilde{P},\mathcal{O}}(f)$ en restreignant dans la définition ci-dessus la somme sur $\gamma \in \tilde{P}(F)$ aux γ dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$. En poursuivant comme ci-dessus, on construit des termes $k_{\mathcal{O}}^T(f,g)$, $J_{\mathcal{O}}^T(f,\omega)$, puis $J_{\mathcal{O}}(\mathbf{f},\omega)$ (ou $J_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(\mathbf{f},\omega)$ s'il est bon de préciser l'espace). Tous ces termes sont nuls sauf si la classe de conjugaison par $G(\mathbb{A}_F)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe le support de f. Il n'y a qu'un nombre fini de $\mathcal{O}$ vérifiant cette condition, en vertu du lemme suivant. En vue d'une application ultérieure, on énonce celui-ci sous une forme plus forte qu'il n'est à présent nécessaire.

Lemme. *Soit V un ensemble fini de places contenant V_{ram}. Soit $\tilde{U}_V$ un sous-ensemble compact de $\tilde{G}(F_V)$. Considérons l'ensemble Ξ des classes de conjugaison $\mathcal{O}$ par $G(F)$ d'éléments semi-simples de $\tilde{G}(F)$ telles que la classe de conjugaison $\mathcal{O}_V$ par $G(F_V)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}\tilde{U}_V$ et que, pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$. Alors*

(i) Ξ est fini ;

(ii) il existe un sous-ensemble compact $C \subset \mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ tel que, pour tout $\mathcal{O} \in \Xi$, $\mathcal{O}_V \cap \mathfrak{A}_{\tilde{G}}\tilde{U}_V$ soit contenu dans $C\tilde{U}_V$.

Preuve. Soient $\mathcal{O} \in \Xi$ et $\gamma \in \mathcal{O}$. Les conditions imposées hors de V et la définition de $\tilde{H}_{\tilde{G}_V}$ entraînent que $\tilde{H}_{\tilde{G}_V}(\gamma) = 0$. Soit $a \in \mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ et $\gamma_V \in \tilde{U}_V$ tels que $a\gamma_V \in \mathcal{O}_V$. Alors $H_{\tilde{G}}(a) = -\tilde{H}_{\tilde{G}_V}(\gamma_V)$ et, puisque $\tilde{U}_V$ est compact, a reste dans un compact. Cela prouve (ii). Quitte à agrandir $\tilde{U}_V$, on peut donc supposer que, pour $\mathcal{O}$ et γ comme ci-dessus, la classe de conjugaison de γ par $G(F_V)$ coupe $\tilde{U}_V$. On peut fixer $x_V \in G(F_V)$ tel que $x_V^{-1}\gamma x_V \in \tilde{U}_V$ et, pour tout $v \notin V$, un élément $x_v \in G(F_v)$ tel que $x_v^{-1}\gamma x_v \in \tilde{K}_v$. Mais $\gamma \in \tilde{K}_v$ pour presque tout v. On peut donc supposer $x_v = 1$ pour presque tout v. Les éléments x_V et $(x_v)_{v\notin V}$ se regroupent alors en un élément $x \in G(\mathbb{A}_F)$ tel que $x^{-1}\gamma x \in \tilde{U}$, où $\tilde{U} = \tilde{U}_V \times (\prod_{v\notin V} \tilde{K}_v)$. La classe de conjugaison par $G(\mathbb{A}_F)$ de γ coupe donc $\tilde{U}$ et il reste à appliquer le lemme 3.7.4 de [19]. $\square$

On a

$$(3) \qquad J_{g\acute{e}om}^{\tilde{G}}(\mathbf{f},\omega) = \sum_{\mathcal{O}\in\tilde{G}_{ss}(F)/conj} J_{\mathcal{O}}(\mathbf{f},\omega).$$

Notons que tous ces termes sont nuls si ω n'est pas trivial sur $Z(G;\mathbb{A}_F)^\theta$.

Cas particulier. Dans le cas où $\tilde{G} = G$, $\tilde{K}_v = K_v$ pour tout $v \notin V_{ram}$ et $\mathcal{O} = \{1\}$, on remplace l'indice $\mathcal{O}$ par *unip* dans les termes définis ci-dessus et on ajoute l'exposant G. Par exemple $J_{unip}^G(\mathbf{f},\omega) = J_{\{1\}}(\mathbf{f},\omega)$.

2.2 Le terme unipotent de la formule des traces non invariante

Soient V un ensemble fini de places contenant V_{ram} et $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$. On a dit en 1.1 que l'on pouvait identifier $C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$ à un sous-espace de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ et identifier $Mes(G(F_V))$ à $Mes(G(\mathbb{A}_F))$. Pour $\mathbf{f}_V \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$, le terme $J_{\mathcal{O}}(\mathbf{f}_V,\omega)$ est donc bien défini.

On considère dans ce paragraphe le cas où $\tilde{G} = G$, $\tilde{K}_v = K_v$ pour tout $v \notin V_{ram}$ et où $\mathcal{O} = 1$. En [7] théorème 8.1, Arthur prouve l'existence d'une distribution $A_{unip}^G(V,\omega) \in D_{orb}(G(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))^*$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) pour tout $\mathbf{f}_V \in C_c^\infty(G(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$, on a l'égalité :

$$I^G(A_{unip}^G(V,\omega),\mathbf{f}_V) = J_{unip}^G(\mathbf{f}_V,\omega) - \sum_{M\in\mathcal{L}(M_0), M\neq G} |W^M||W^G|^{-1}$$

$$J_M^G(A_{unip}^M(V,\omega),\mathbf{f}_V);$$

(2) $A_{unip}^G(V,\omega)$ est combinaison linéaire d'intégrales orbitales associées à des éléments unipotents $u\in G(F)$, ou plus exactement aux projections dans $G(F_V)$ de tels éléments ;

(3) $A_{unip}^G(V,\omega)=0$ si ω n'est pas trivial sur $Z(G,\mathbb{A}_F)$.

Supposons ω trivial sur $Z(G,\mathbb{A}_F)$. En général, on ne sait pas expliciter la distribution $A_{unip}^G(V,\omega)$. On peut toutefois la calculer dans le cas particulier où G est un tore. Dans ce cas, soit $f_V\in C_c^\infty(G(F_V))$ et dg_V une mesure sur $G(F_V)$, qui s'identifie à une mesure sur $G(\mathbb{A}_F)$ par produit avec les mesures canoniques sur $G(F_v)$ pour $v\not\in V$. Posons $\mathbf{f}_V=f_V\otimes dg_V$. Alors

$$I^G(A_{unip}^G(V,\omega),\mathbf{f}_V)=mes(\mathfrak{A}_GG(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))f_V(1).$$

La distribution $A_{unip}^G(V,\omega)$ dépend, comme la partie géométrique de la formule des traces non-invariante, des choix du Levi minimal M_0 et des compacts K_v pour tout v. Rappelons que ceux-ci sont supposés en bonne position relativement à M_0. Arthur montre que $A_{unip}^G(V,\omega)$ ne dépend pas des K_v pour $v\in V$ ([9] proposition 13.2). Notons plus précisément $A_{unip}^G(V,\omega,M_0,K^V)$ notre distribution. Soit $x\in G(F)M_0(\mathbb{A}_F)$, remplaçons M_0 et les K_v par $M_0'=ad_x(M_0)$ et les $K_v'=ad_x(K_v)$. Un raisonnement par transport de structure montre que

$$(4)\qquad A_{unip}^G(V,\omega,M_0',K'^V)=\omega(x^V)^{-1}A_{unip}^G(V,\omega,M_0,K^V),$$

où x^V est la projection de x dans $G(\mathbb{A}_F^V)$. On peut alors modifier formellement la définition de la façon suivante. On oublie pour un temps les objets fixés en 1.1. Pour tout $v\not\in V$, soit K_v un sous-groupe compact hyperspécial de $G(F_v)$. On suppose comme en 1.1 que $K_v=G(\mathfrak{o}_v)$ pour presque tout v. Fixons un Levi minimal M_0. On peut choisir $x^V=(x_v)_{v\not\in V}\in G(\mathbb{A}_F^V)$ de sorte que, pour tout $v\not\in V$, $K_v'=ad_{x_v}(K_v)$ soit en bonne position relativement à M_0. On pose

$$A_{unip}^G(V,\omega,K^V)=\omega(x^V)A_{unip}^G(V,\omega,M_0,K'^V).$$

On doit prouver

(5) cette définition ne dépend pas des choix de x^V et M_0.

Preuve. Montrons d'abord que, pour M_0 fixé, la définition ne dépend pas de x^V. Choisissons $y^V=(y_v)_{v\not\in V}\in G(\mathbb{A}_F^V)$ tel que, pour tout $v\not\in V$, $K_v''=ad_{y_v}(K_v)$ soit en bonne position relativement à M_0. Soit $v\not\in V$. Notons o_v' et o_v'' les points hyperspéciaux de l'immeuble de G_{AD} sur F_v qui sont fixés respectivement par K_v' et K_v''. Notons $\mathcal{S}_v$ l'ensemble des sous-tores de M_0 définis et déployés sur F_v, qui sont maximaux parmi les sous-tores vérifiant ces conditions. Pour $S\in\mathcal{S}_v$, notons $A(S)$ l'appartement de l'immeuble associé à S. Les deux groupes K_v' et K_v'' sont en bonne position relativement à M_0. Cela signifie que l'on peut fixer des sous-tores $S',S''\in\mathcal{S}_v$ de sorte que o_v' appartienne à l'appartement $A(S')$ et que o_v'' appartienne à l'appartement $A(S'')$. Posons $g_v=y_vx_v^{-1}$. On a $K_v''=ad_{g_v}(K_v')$. Donc o_v'' appartient à $A(ad_{g_v}(S'))$. Puisque o_v'' est hyperspécial, le fait que o_v'' appartienne à la fois à $A(S'')$ et à $A(ad_{g_v}(S'))$ entraîne que les deux tores S'' et $ad_{g_v}(S')$ sont conjugués par un élément de K_v''. Fixons un élément $h_v\in K_v''$ tel que $S''=ad_{h_vg_v}(S')$. L'ensemble $\mathcal{S}_v$ forme une seule classe de conjugaison par $M_0(F_v)$. Fixons donc $r_v\in M_0(F_v)$ de sorte que $S'=ad_{r_v}(S'')$. On obtient que $h_vg_vr_v$ appartient au normalisateur de S'' dans $G(F_v)$. Comme on le sait, tout élément du groupe de Weyl de S'' a un représentant dans K_v''. Cela entraîne que le normalisateur de S'' dans $G(F_v)$

est contenu dans le produit de K''_v et du centralisateur de S'' dans $G(F_v)$. Ce dernier groupe est contenu dans $M_0(F_v)$. On obtient que $h_v g_v r_v \in K''_v M_0(F_v)$. Puisque $h_v \in K''_v$ et $r_v \in M_0(F_v)$, on a aussi $g_v \in K''_v M_0(F_v)$. Ecrivons donc $g_v = k_v m_v$, avec $k_v \in K''_v$ et $m_v \in M_0(F_v)$. Remarquons que $K''_v = ad_{k_v^{-1}}(K''_v) = ad_{k_v^{-1}g_v}(K'_v) = ad_{m_v}(K'_v)$. Dans la relation (4), remplaçons K^V par K'^V et x par un élément $m \in M_0(\mathbb{A}_F)$ dont les composantes hors de V sont les m_v. On obtient l'égalité

$$A^G_{unip}(V, \omega, M_0, K''^V) = \omega(m^V)^{-1} A^G_{unip}(V, \omega, M_0, K'^V).$$

Les égalités $y_v x_v^{-1} = g_v = k_v m_v$ pour tout $v \notin V$ entraînent $\omega(m^V) = \omega(y^V)\omega(x^V)^{-1}$. L'égalité ci-dessus devient

$$\omega(y^V) A^G_{unip}(V, \omega, M_0, K''^V) = \omega(x^V) A^G_{unip}(V, \omega, M_0, K'^V).$$

Cela démontre que notre définition ne dépend pas du choix de x^V. Changeons maintenant de Levi M_0. Cela signifie qu'on le remplace par $ad_g(M_0)$ pour un $g \in G(F)$. D'après l'indépendance déjà prouvée de x^V, on peut remplacer x^V par $g^V x^V$, où g^V est la projection de g dans $G(\mathbb{A}_F^V)$. La relation à prouver devient

$$\omega(x^V) A^G_{unip}(V, \omega, M_0, K'^V) = \omega(g^V x^V) A^G_{unip}(V, \omega, ad_g(M_0), ad_{g^V}(K'^V)).$$

Cela résulte de (4). $\square$

2.3 Les distributions associées à une classe rationnelle semi-simple

Revenons au cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque. Soit $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$. Fixons $\dot{\gamma} \in \mathcal{O}$ et une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ (définie sur $\bar{F}$) de sorte que $\dot{\gamma}$ conserve (B, T). Fixons $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ et posons $\theta = ad_e$. En notant $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans G, on sait définir $N\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma(T)$: c'est la somme des éléments de l'orbite de α sous l'action du groupe d'automorphismes engendré par θ. On peut écrire $\dot{\gamma} = te$, avec $t \in T$. En fait, on peut fixer une extension finie E de F telle que $t \in T(E)$. On a alors $(N\alpha)(t) \in E^\times$ pour tout α. On note $S(\mathcal{O})$ le plus petit ensemble de places de F contenant V_{ram} et tel que les propriétés suivantes soient vérifiées. Soit w une place de E au-dessus d'une place $v \notin S(\mathcal{O})$. Notons $\mathfrak{o}_w^\times$ le groupe des unités de E_w et $\mathbb{E}_w$ le corps résiduel. Alors

(1) pour tout $\alpha \in \Sigma(T)$, on a $(N\alpha)(t) \in \mathfrak{o}_w^\times$;

(2) pour tous $\alpha \in \Sigma(T)$, si $(N\alpha)(t) \neq \pm 1$, alors la réduction dans $\mathbb{E}_w$ de $(N\alpha)(t)$ n'est pas égale à ± 1.

On voit que cette définition ne dépend pas des choix auxiliaires, en particulier ne dépend pas du choix de $\dot{\gamma}$. Soit $v \notin S(\mathcal{O})$. On a

(3) supposons que la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$; alors l'ensemble des $x \in G(F_v)$ tels que $x^{-1}\dot{\gamma}x \in \tilde{K}_v$ forme une unique double classe dans $G_{\dot{\gamma}}(F_v)\backslash G(F_v)/K_v$; pour un élément x de cet ensemble, le groupe $xK_v x^{-1} \cap G_{\dot{\gamma}}(F_v)$ est un sous-groupe compact hyperspécial de $G_{\dot{\gamma}}(F_v)$.

Preuve. Il s'agit essentiellement de la proposition 7.1 de [15], que l'on a reprise dans le cadre tordu en [24]. L'hypothèse $v \notin V_{ram}$ permet d'appliquer les résultats de [24] chapitres 4 et 5. En particulier, on décrit $\tilde{G}(F_v)$ et $\tilde{K}_v$ comme en [24] 4.4. Notons simplement γ l'image de $\dot{\gamma}$ dans $\tilde{G}(F_v)$. L'hypothèse que la classe de conjugaison de γ coupe $\tilde{K}_v$

signifie que γ est un élément compact dans la terminologie de cette référence. On peut le décomposer en $\gamma = \gamma_{tu}\gamma_{p'}$, où $\gamma_{p'}$ est un élément d'ordre fini premier à la caractéristique résiduelle p et γ_{tu} est un élément topologiquement unipotent de $G(F_v)$ qui commute à $\gamma_{p'}$. Les conditions (1) et (2) ci-dessus entraînent l'égalité $G_\gamma = G_{\gamma_{p'}}$. Par ailleurs, la p'-composante d'un élément de $\tilde{K}_v$ appartenant aussi à $\tilde{K}_v$, la condition $x^{-1}\gamma x \in \tilde{K}_v$ implique $x^{-1}\gamma_{p'}x \in \tilde{K}_v$. Il reste à appliquer les lemmes [24] 5.6(ii) et 5.4(ii). $\square$

Soit V un ensemble fini de places de F contenant $S(\mathcal{O})$. On va définir une distribution $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega) \in D_{orb}(\tilde{G}(F_V), \omega) \otimes Mes(G(F_V))^*$. Elle est nulle sauf si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(4) ω est trivial sur $Z(G, \mathbb{A}_F)^\theta$ et sur $Z(G_{\dot{\gamma}}, \mathbb{A}_F)$ pour $\dot{\gamma} \in \mathcal{O}$;

(5) $\mathcal{O}$ est formé d'éléments elliptiques ;

(6) pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$.

Supposons ces conditions vérifiées. On fixe $\dot{\gamma} \in \mathcal{O}$. Pour tout $v \notin V$, on fixe $x_v \in G(F_v)$ tel que $x_v^{-1}\dot{\gamma}x_v \in \tilde{K}_v$. On pose $K_{\dot{\gamma},v} = x_vK_vx_v^{-1} \cap G_{\dot{\gamma}}(F_v)$. Puisque $\dot{\gamma} \in \tilde{K}_v$ pour presque tout v, on peut supposer $x_v = 1$ pour presque tout v. Alors l'élément $x^V = (x_v)_{v\notin V}$ appartient à $G(\mathbb{A}_F^V)$ et la famille $(K_{\dot{\gamma},v})_{v\notin V}$ de compacts hyperspéciaux vérifie la condition de compatibilité globale de 1.1. La distribution $A^{G_{\dot{\gamma}}}_{unip}(V, \omega, K^V_{\dot{\gamma}})$ est bien définie. Fixons des mesures dg_V sur $G(F_V)$ et dh_V sur $G_{\dot{\gamma}}(F_V)$. Soit $f_V \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$, posons $\mathbf{f}_V = f_V \otimes dg_V$. Pour $y \in G(F_V)$, notons ${}^yf_{V|G_{\dot{\gamma}}}$ la fonction $h \mapsto f(y^{-1}h\gamma y)$ sur $G_{\dot{\gamma}}(F_V)$. Posons ${}^y\mathbf{f}_{V|G_{\dot{\gamma}}} = {}^yf_{V|G_{\dot{\gamma}}} \otimes dh_V$. On définit la distribution $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega)$ par la formule suivante :

$$(7) \qquad I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega), \mathbf{f}_V) = [Z_G(\dot{\gamma}, F) : G_{\dot{\gamma}}(F)]^{-1}\omega(x^V)$$
$$\int_{G_{\dot{\gamma}}(F_V)\backslash G(F_V)} I^{G_{\dot{\gamma}}}(A^{G_{\dot{\gamma}}}_{unip}(V, \omega, K^V_{\dot{\gamma}}), {}^y\mathbf{f}_{V|G_{\dot{\gamma}}})\omega(y)\, dy,$$

où dy est la mesure $\frac{dg_V}{dh_V}$ sur $G_{\dot{\gamma}}(F_V)\backslash G(F_V)$. On vérifie que cela ne dépend ni du choix de $\dot{\gamma}$, ni de celui de l'élément x^V, ni de celui des mesures. Par contre, la distribution $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega)$ dépend des $\tilde{K}_v$ pour $v \notin V$.

Cas particulier : supposons $\mathcal{O}$ formée d'éléments elliptiques et fortement réguliers dans $\tilde{G}(F)$. Alors la formule (7) se simplifie en

$$I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega), \mathbf{f}_V) = [Z_G(\gamma, F) : G_\gamma(F)]^{-1}\omega(x^V)mes(\mathfrak{A}_{\tilde{G}}G_{\dot{\gamma}}(F)\backslash G_{\dot{\gamma}}(\mathbb{A}_F))$$
$$\int_{G_{\dot{\gamma}}(F_V)\backslash G(F_V)} f(y^{-1}\dot{\gamma}y)\omega(y)\, dy.$$

Considérons maintenant un ensemble fini V de places, contenant V_{ram} mais pas forcément $S(\mathcal{O})$. On fixe un ensemble fini S de places contenant V et $S(\mathcal{O})$. Rappelons que, pour tout espace de Levi $\tilde{M}$, l'intersection $\tilde{M}(F) \cap \mathcal{O}$ se décompose en un nombre fini de classes de conjugaison semi-simples par $M(F)$. Pour une telle classe $\mathcal{O}_{\tilde{M}}$, on a $S(\mathcal{O}_{\tilde{M}}) \subset S(\mathcal{O})$. La distribution $A^{\tilde{M}}(S, \mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)$ (relative à $\tilde{K}^{\tilde{M},S}$) est bien définie. On peut écrire

$$(8) \qquad A^{\tilde{M}}(S, \mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega) = \sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{O}_{\tilde{M}})} k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)^V_S \otimes A_i^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)_V,$$

où $k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)^V_S \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F_S^V), \omega) \otimes Mes(M(F_S^V))^*$ et $A_i^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)_V \in D_{orb}(\tilde{M}(F_V), \omega) \otimes Mes(M(F_V))^*$. On note $A_i^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)_V \in D_{orb}(\tilde{G}(F_V), \omega) \otimes Mes(G(F_V))^*$ la distribution induite de $A_i^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}},\omega)_V$ à $\tilde{G}(F_V)$. On se rappelle l'application linéaire $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K}_S^V)$ définie sur $D_{géom}(\tilde{M}(F_S^V),\omega)\simeq D_{géom}(\tilde{M}(F_S^V),\omega)\otimes Mes(M(F_S^V))^*$ en 1.13. On définit la distribution $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ par la formule

$$(9)\qquad A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1}\sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M}}\in\tilde{M}_{ss}(F)/conj,\mathcal{O}_{\tilde{M}}\subset\mathcal{O}}$$

$$\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{O}_{\tilde{M}})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}},\omega)_S^V,\tilde{K}_S^V)A_i^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}},\omega)_V.$$

Proposition. *La distribution $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) pour tout $\mathbf{f}_V\in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))$, on a l'égalité :

$$J_{\mathcal{O}}(\mathbf{f}_V,\omega)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1}\sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M}}\in\tilde{M}_{ss}(F)/conj,\mathcal{O}_{\tilde{M}}\subset\mathcal{O}}$$

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O}_{\tilde{M}},\omega),\mathbf{f}_V);$$

(ii) $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ est combinaison linéaire d'intégrales orbitales associées à des éléments $\dot{\gamma}$ (ou plus exactement aux projections dans $\tilde{G}(F_V)$ de tels éléments), où $\dot{\gamma}\in\tilde{G}(F)$ est un élément dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$;

(iii) $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)=0$ sauf si, pour tout $v\notin V$, la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$;

(iv) $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)=0$ sauf si ω est trivial sur $Z(G;\mathbb{A}_F)^\theta$ et sur $Z(G_{\dot{\gamma}},\mathbb{A}_F)$ pour $\dot{\gamma}\in\mathcal{O}$.

Remarque. L'égalité (i) suffit à caractériser la distribution $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ par récurrence. Cela prouve en particulier que la définition (9) ne dépend pas de l'ensemble S choisi.

Preuve. On suppose d'abord que V contient $S(\mathcal{O})$ et que $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ est définie par la formule (7). Les propriétés (ii), (iii) et (iv) sont immédiates d'après la définition et l'analogue de la propriété (ii) pour la distribution $A_{unip}^{G_{\dot{\gamma}}}(V,\omega,K_{\dot{\gamma}}^V)$. L'assertion principale (i) est à peu près celle que prouve Arthur dans [10] théorème 8.1. La seule différence avec le résultat d'Arthur est la définition de l'ensemble $S(\mathcal{O})$. Expliquons ce point. Parmi les espaces de Levi $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ tels que $\mathcal{O}\cap\tilde{M}(F)\neq\emptyset$, fixons un élément minimal $\tilde{M}_1$. Au lieu de la condition (6), Arthur impose qu'il existe un élément $\dot{\gamma}\in\mathcal{O}\cap\tilde{M}_1(F)$ tel que $\dot{\gamma}\in\tilde{K}_v$ pour tout $v\notin V$. L'existence d'un tel élément défini sur F ne résulte pas de (6). Mais on peut modifier très légèrement la preuve d'Arthur pour obtenir notre assertion. En effet, fixons $\dot{\gamma}\in\mathcal{O}\cap\tilde{M}_1(F)$. On a

(10) l'hypothèse (6) entraîne que, pour tout $v\notin V$, la classe de conjugaison par $M_1(F_v)$ engendrée par $\dot{\gamma}$ coupe $\tilde{K}_v^{\tilde{M}_1}$.

Il y a en tout cas un $x\in G(F_v)$ tel que $x^{-1}\dot{\gamma}x\in\tilde{K}_v$. Fixons $\tilde{P}_1=\tilde{M}_1U_{P_1}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_1)$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, on écrit $x=muk$, avec $m\in M_1(F_v)$, $u\in U_{P_1}(F_v)$, $k\in K_v$. On a encore $(mu)^{-1}\dot{\gamma}mu\in\tilde{K}_v$. Mais $(mu)^{-1}\dot{\gamma}mu=u'\gamma'$, avec $u'\in U_{P_1}(F_v)$ et $\gamma'=m^{-1}\dot{\gamma}m\in\tilde{M}_1(F_v)$. Parce que K_v est en bonne position relativement à M_1, cela entraîne $\gamma'\in\tilde{K}_v^{\tilde{M}_1}$. D'où (10).

Grâce à (10), on peut construire $x^V\in M_1(\mathbb{A}_F^V)$ tel que $(x^V)^{-1}\dot{\gamma}x^V\in\tilde{K}^{\tilde{M}_1,V}$. Dans la preuve de [10], l'élément y' des dernières lignes de la page 203 appartient alors, non pas à $K_{\tilde{\gamma}}^V\backslash K^V$, mais à $K_{\tilde{\gamma}}^V\backslash x^V K^V$. Mais un élément de $x^V K^V$ ne contribue pas aux fonctions v'_R de la page 204 parce que ces fonctions sont invariantes à droite par K^V et à gauche par $M_1(\mathbb{A}_F)$, puisque les Levi R intervenant contiennent M_1. Ces éléments disparaissent et la suite de la démonstration d'Arthur s'applique sans changement. Il reste toutefois le terme $\omega(x^V)$ qui n'apparaissait pas dans Arthur simplement parce que celui-ci traitait le cas $\omega = 1$. Cela prouve la proposition dans le cas où V contient $S(\mathcal{O})$.

Levons cette hypothèse et définissons $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega)$ par la formule (9). Les propriétés (ii), (iii) et (iv) sont claires d'après cette définition et les mêmes propriétés de la distribution $A^{\tilde{G}}(S, \mathcal{O}, \omega)$. Il faut vérifier (i). Soit $\mathbf{f}_V \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$. Notons $\mathbf{f}_S \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_S)) \otimes Mes(G(F_S))$ l'élément auquel $\mathbf{f}_V$ s'identifie, c'est-à-dire $\mathbf{f}_S = \mathbf{f}_V \otimes \mathbf{1}_{\tilde{K}_S^V}$, où le dernier terme est tacitement tensorisé avec la mesure canonique sur $G(F_S^V)$. On connaît le développement (i) pour S :

$$(11) \qquad J_{\mathcal{O}}(\mathbf{f}_S, \omega) = \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M}} \in \tilde{M}_{ss}(F)/conj, \mathcal{O}_{\tilde{M}} \subset \mathcal{O}}$$

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A^{\tilde{M}}(S, \mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega), \mathbf{f}_S).$$

Notons que $J_{\mathcal{O}}(\mathbf{f}_S, \omega) = J_{\mathcal{O}}(\mathbf{f}_V, \omega)$ par définition. Soient $\tilde{M}$ et $\mathcal{O}_{\tilde{M}}$ intervenant ci-dessus. Pour tout espace $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}(\tilde{M})$, la fonction $(\mathbf{1}_{\tilde{K}_S^V})_{\tilde{Q},\omega}$ est égale à $\mathbf{1}_{\tilde{K}_S^{\tilde{L},V}}$. Elle ne dépend donc que de $\tilde{L}$. En utilisant (8), la relation 1.9(2) et la définition de $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(., \tilde{K}_S^V)$, on obtient l'égalité

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A^{\tilde{M}}(S, \mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega), \mathbf{f}_S) = \sum_{i=1,\ldots,n(\mathcal{O}_{\tilde{M}})} \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)_S^V, \tilde{K}_S^V) J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(A_i^{\tilde{L}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)_V, \mathbf{f}_V).$$

La formule (11) se récrit

$$(12) \qquad J_{\mathcal{O}}(\mathbf{f}_V, \omega) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{L}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}^{\tilde{L}}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{L}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M}} \in \tilde{M}_{ss}(F)/conj, \mathcal{O}_{\tilde{M}} \subset \mathcal{O}}$$

$$\sum_{i=1,\ldots,n(\mathcal{O}_{\tilde{M}})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)_S^V, \tilde{K}_S^V) J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(A_i^{\tilde{L}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)_V, \mathbf{f}_V).$$

On peut décomposer la somme en $\mathcal{O}_{\tilde{M}}$ en une somme sur $\mathcal{O}_{\tilde{L}} \in \tilde{L}_{ss}(F)/conj$ tel que $\mathcal{O}_{\tilde{L}} \subset \mathcal{O}$ et une somme sur $\mathcal{O}_{\tilde{M}} \in \tilde{M}_{ss}(F)/conj$ tel que $\mathcal{O}_{\tilde{M}} \subset \mathcal{O}_{\tilde{L}}$. La contribution d'un couple $(\tilde{L}, \mathcal{O}_{\tilde{L}})$ est alors

$$\sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}^{\tilde{L}}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{L}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M}} \in \tilde{M}_{ss}(F)/conj, \mathcal{O}_{\tilde{M}} \subset \mathcal{O}_{\tilde{L}}}$$

$$\sum_{i=1,\ldots,n(\mathcal{O}_{\tilde{M}})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)_S^V, \tilde{K}_S^V) J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(A_i^{\tilde{L}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}, \omega)_V, \mathbf{f}_V).$$

Ceci qui n'est autre que $J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(A^{\tilde{L}}(V, \mathcal{O}_{\tilde{L}}, \omega), \mathbf{f}_V)$ par définition de $A^{\tilde{L}}(V, \mathcal{O}_{\tilde{L}}, \omega)$. Alors la formule (12) devient l'égalité (i) de l'énoncé. $\square$

Remarque. La même preuve montre que l'égalité (9) est vraie pour tous S, V tels que $V_{ram} \subset V \subset S$.

2.4 Développement de la partie géométrique de la formule des traces non invariante

Soit $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F) \otimes Mes(G(\mathbb{A}_F))$. Si V est un ensemble fini de places assez grand, on peut écrire $\mathbf{f} = \mathbf{f}_V \otimes \mathbf{1}_{\tilde{K}^V}$, où $\mathbf{f}_V \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$ et $\mathbf{1}_{\tilde{K}^V}$ est tacitement tensorisé avec la mesure canonique sur $G(\mathbb{A}_F^V)$. En vertu de 2.1(3) et de la proposition 2.3(i), on a l'égalité

$$(1) \qquad J_{géom}^{\tilde{G}}(\mathbf{f}, \omega) = \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \tilde{M}_{ss}(F)/conj} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A^{\tilde{M}}(V, \mathcal{O}, \omega), \mathbf{f}_V).$$

Le lemme 2.1 et sa preuve montrent que cette somme est finie indépendamment de V. Cette finitude et les définitions entraînent que, pour $\mathbf{f}$ fixé, il existe un ensemble $S(\mathbf{f})$ tel que, pour $V \supset S(\mathbf{f})$, les seuls couples $(\tilde{M}, \mathcal{O})$ qui contribuent à la formule vérifient $S(\mathcal{O}) \subset V$ et $\mathcal{O} \subset \tilde{M}(F)_{ell}$. Notons que l'ensemble fini des indices contribuant à la formule (1) ainsi que l'ensemble $S(\mathbf{f})$ peuvent être choisis indépendants de $\mathbf{f}$ si on se limite à des fonctions dont le support est contenu dans un compact fixé.

2.5 Variante avec caractère central

On suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On suppose donnée une extension

$$1 \to C_1 \to G_1 \to G \to 1,$$

une extension compatible $\tilde{G}_1 \to \tilde{G}$, où $\tilde{G}_1$ est à torsion intérieure, et un caractère automorphe λ_1 de $C_1(\mathbb{A}_F)$. On introduit des données complémentaires comme en 1.15. On a une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{A}_{C_1} \to \mathfrak{A}_{G_1} \to \mathfrak{A}_G \to 0.$$

On suppose des mesures choisies sur ces espaces de façon compatible à cette suite. On fait de même quand on remplace $\tilde{G}$ par un espace de Levi $\tilde{M}$. Notons que cette hypothèse ne serait pas vérifiée si on normalisait les mesures "à la Tamagawa", cf. 1.3.

Fixons des mesures dg sur $G(\mathbb{A}_F)$ et dc sur $C_1(\mathbb{A}_F)$. On en déduit une mesure dg_1 sur $G_1(\mathbb{A}_F)$ compatible à la suite exacte

$$1 \to C_1(\mathbb{A}_F) \to G_1(\mathbb{A}_F) \to G(\mathbb{A}_F) \to 1.$$

Soit $f \in C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1(\mathbb{A}_F))$. On peut fixer une fonction $\phi \in C_c^\infty(\tilde{G}_1(\mathbb{A}_F))$ telle que

$$f(\gamma_1) = \int_{C_1(\mathbb{A}_F)} \phi^c(\gamma_1)\lambda_1(c)\, dc,$$

où $\phi^c(\gamma_1) = \phi(c\gamma_1)$. On pose

$$(1) \qquad J_{géom,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(f \otimes dg) = mes(\mathfrak{A}_{C_1} C_1(F) \backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1} \int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)} J_{géom}^{\tilde{G}_1}(\phi^c \otimes dg_1)\lambda_1(c)\, dc.$$

On vérifie en effet, d'une part que la fonction à intégrer est invariante par $C_1(F)$ et à support compact modulo ce groupe, d'autre part que l'expression ci-dessus ne dépend que de f et dg et pas des choix de ϕ et de la mesure dc. De même, elle ne dépend que de la mesure sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ et pas de celle sur $\mathfrak{A}_{C_1}$. Ces vérifications se font en exprimant comme en 2.1 les diverses expressions comme les valeurs en T_0 d'un polynôme asymptote à des expressions qui, elles, vérifient évidemment ces propriétés. Remarquons qu'il y a une surjection naturelle

$$(2) \qquad \tilde{G}_{1,ss}(F)/conj \to \tilde{G}_{ss}(F)/conj.$$

Pour $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$, on pose

$$(3) \qquad J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(f \otimes dg) = mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}\int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)}$$

$$\sum_{\mathcal{O}_1 \in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})} J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O}_1}(\phi^c \otimes dg_1)\lambda_1(c)\, dc,$$

où $Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$ est la fibre de l'application (2) au-dessus de $\mathcal{O}$. De nouveau, ce terme ne dépend que de f et dg et pas du choix de ϕ ni de la mesure dc.

Pour un ensemble fini V de places contenant $V_{1,ram}$, on peut encore identifier $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$ à un sous-espace de $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{A}_F)) \otimes Mes(G(\mathbb{A}_F))$. Ainsi, $J^{\tilde{G}_1}_{géom,\lambda_1}(\mathbf{f}_V)$ est défini pour $\mathbf{f}_V \in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$. De même, $J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(\mathbf{f}_V)$ est défini. Pour $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$, on va définir une distribution $A^{\tilde{G}_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}) \in D_{orb,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))^*$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(4) pour $\mathbf{f}_V \in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$,

$$I^{\tilde{G}_1}_{\lambda_1}(A^{\tilde{G}_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f}_V) = J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(\mathbf{f}_V)$$

$$-\sum_{M \in \mathcal{L}(M_0), M \neq G} |W^M||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M}} \in \tilde{M}_{ss}(F)/conj, \mathcal{O}_{\tilde{M}} \subset \mathcal{O}} J^{\tilde{G}_1}_{\tilde{M}_1,\lambda_1}(A^{\tilde{M}}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}_{\tilde{M}}),\mathbf{f}_V);$$

(5) $A^{\tilde{G}_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O})$ est combinaison linéaire d'intégrales orbitales associées à des éléments γ_1 (ou plus exactement aux projections dans $\tilde{G}_1(F_V)$ de tels éléments), où $\gamma_1 \in \tilde{G}_1(F)$ se projette en un élément de $\tilde{G}(F)$ dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$;

(6) $A^{\tilde{G}_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}) = 0$ sauf si, pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$.

Comme en 2.2, la propriété (4) caractérise $A^{\tilde{G}_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O})$. Signalons que cette distribution dépend de $\tilde{K}_1^V$.

Soit $\mathbf{f}_V \in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$, que l'on écrit $\mathbf{f}_V = f_V \otimes dg$. On fixe $\phi_V \in C^\infty_c(\tilde{G}_1(F_V))$ de sorte que

$$f_V = \int_{C_1(F_V)} \phi_V^c \, dc.$$

On se rappelle que les distributions $A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1)$ dépendent du choix de $\tilde{K}_1^V$. Notons-les $A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,\tilde{K}_1^V)$. Soit $c \in C_1(\mathbb{A}_F)$, que l'on décompose en $c = c_V c^V$. Considérons le terme

$$I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,c^V\tilde{K}_1^V),\phi_V^{c_V} \otimes dg_1)$$

pour $\mathcal{O}_1 \in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$. Soit Γ un sous-ensemble compact de $C_1(\mathbb{A}_F)$. Le lemme 2.1(ii) entraîne qu'il existe un sous-ensemble fini Δ de $Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$ tel que, pour tout $\mathcal{O}_1 \in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O}) - \Delta$ et tout $c \in \mathfrak{A}_{C_1}\Gamma$, le terme ci-dessus soit nul. Le (i) du même lemme montre que, pour $\mathcal{O}_1 \in \Delta$, ce terme est une fonction de c à support compact dans $\mathfrak{A}_{C_1}\Gamma$. C'est aussi une fonction lisse de c. Les mêmes propriétés valent donc pour la somme

$$\sum_{\mathcal{O}_1 \in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})} I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V, \mathcal{O}_1, c^V \tilde{K}_1^V), \phi_V^{c_V} \otimes dg_1).$$

Comme fonction de c, celle-ci est invariante par $C_1(F)$. En effet, on voit facilement que, pour $\xi \in C_1(F)$ et $\mathcal{O}_1 \in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$, on a l'égalité

$$(7) \qquad I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V, \xi\mathcal{O}_1, \xi^V c^V \tilde{K}_1^V), \phi_V^{\xi_V c_V} \otimes dg_1) = I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V, \mathcal{O}_1, c^V \tilde{K}_1^V), \phi_V^{c_V} \otimes dg_1).$$

L'invariance requise en résulte. En se rappelant que l'on peut choisir Γ de sorte que $C_1(\mathbb{A}_F) = C_1(F)\mathfrak{A}_{C_1}\Gamma$, on voit que l'intégrale

$$(8) \qquad \int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)} \sum_{\mathcal{O}_1 \in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})} I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V, \mathcal{O}_1, c^V \tilde{K}_1^V), \phi_V^{c_V} \otimes dg_1)\lambda_1(c)\, dc$$

est convergente. On va montrer qu'elle ne dépend pas du choix de ϕ_V et définit donc une forme linéaire en $\mathbf{f}_V$ qui appartient à $D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))^*$. Tout d'abord une distribution $A^{\tilde{G}_1}(V, \mathcal{O}_1, c^V \tilde{K}_1^V)$ n'est non nulle que si la condition suivante est vérifiée :

(9) pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G_1(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}_1$ coupe $c_v \tilde{K}_{1,v}$.

Par projection dans $\tilde{G}(F_v)$ cela entraîne que la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$. On obtient

(10) l'expression (8) est nulle s'il existe $v \notin V$ telle que la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ ne coupe pas $\tilde{K}_v$.

Supposons que, pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$. Posons $\Xi = C_1(F) \cap (K_{C_1}^V C_1(F_V))$. On va montrer

(11) l'ensemble des $c \in C_1(\mathbb{A}_F)$ tels qu'il existe $\mathcal{O}_1 \in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$ vérifiant (9) est une unique classe modulo $C_1(F)K_{C_1}^V C_1(F_V)$;

(12) pour c dans cette classe, l'ensemble des $\mathcal{O}_1 \in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$ vérifiant (9) est une unique classe sous l'action de Ξ par multiplication.

On démontre d'abord

(13) soient $v \notin V_{ram}(\tilde{G}_1)$, $\gamma_1 \in \tilde{K}_{1,v}$ et $\xi \in C_1(F_v)$; alors $\xi\gamma_1$ est conjugué à un élément de $\tilde{K}_{1,v}$ si et seulement si $\xi \in K_{C_1,v}$.

Preuve de (13). L'assertion "si" est évidente. Dans l'autre sens, soient $\gamma_2 \in \tilde{K}_{1,v}$ et $g \in G_1(F_v)$, supposons $\xi\gamma_1 = g^{-1}\gamma_2 g$. Ecrivons $\gamma_2 = k\gamma_1$, avec $k \in K_{1,v}$, et posons $\theta = ad_{\gamma_1}$. Alors $\xi = g^{-1}k\theta(g)$. Notons $X^*(G_1)$ et $X^*(C_1)$ les groupes des caractères algébriques de G_1 et C_1. Pour $\chi \in X^*(G_1)^{\Gamma_{F_v}}$, le caractère continu $x \mapsto |\chi(x)|_{F_v}$ de $G_1(F_v)$ est trivial sur $K_{1,v}$ puisque ce groupe est compact. Il est invariant par $G_{AD}(F_v)$ parce que χ l'est. La torsion étant intérieure, θ est l'automorphisme associé à un élément de ce groupe $G_{AD}(F_v)$. Donc le caractère précédent est invariant par θ. On en déduit qu'il vaut 1 sur ξ. On sait que l'application de restriction

$$X^*(G_1)^{\Gamma_{F_v}} \to X^*(C_1)^{\Gamma_{F_v}}$$

a un conoyau fini. Puisque les caractères précédents sont à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$, on en déduit que $|\chi(\xi)|_{F_v} = 1$ pour tout $\chi \in X^*(C_1)^{\Gamma_{F_v}}$. Cette relation entraîne que que ξ appartient au sous-groupe compact maximal de $C_1(F_v)$, qui n'est autre que $K_{C_1,v}$. Cela prouve (13).

Démontrons (11). Il est clair que l'ensemble des c en question est invariant par $C_1(F)K_{C_1}^V C_1(F_V)$. Il est non vide. En effet, fixons une classe $\mathcal{O}_1 \in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$. L'hypothèse sur $\mathcal{O}$ implique que, pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G_1(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}_1$ coupe l'image réciproque de $\tilde{K}_v$ dans $\tilde{G}_1(F_v)$, c'est-à-dire $C_1(F_v)\tilde{K}_{1,v}$. On peut donc choisir $c_v \in C_1(F_v)$ tel que cette classe coupe $c_v\tilde{K}_{1,v}$. Il est clair que l'on peut choisir $c_v = 1$ pour presque tout v. Les c_v se regroupent alors en un élément $c \in C_1(\mathbb{A}_F)$ qui vérifie la condition requise. Soient maintenant c, c' dans l'ensemble en question. On choisit $\mathcal{O}_1$ vérifiant (9) et $\mathcal{O}'_1$ vérifiant son analogue pour c'. Il existe $\xi \in C_1(F)$ tel que $\xi\mathcal{O}'_1 = \mathcal{O}_1$. Alors $\mathcal{O}_1$ vérifie (9) pour c comme pour $\xi c'$. L'assertion (13) entraîne que $c^V \in (\xi c')^V K_{C_1}^V$. Cela entraîne que $c \in c'C_1(F)K_{C_1}^V C_1(F_V)$. D'où (11).

Le même calcul prouve (12) : pour $c = c'$, la condition finale devient $\xi^V \in K_{C_1}^V$, c'est-à-dire $\xi \in \Xi$.

Fixons un représentant ζ de la classe définie par (11), que l'on peut choisir dans $C_1(\mathbb{A}_F^V)$. Dans la formule (8), on peut remplacer l'intégrale sur $C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)$ par une intégrale sur $C_1(F)\backslash\zeta C_1(F)K_{C_1}^V C_1(F_V)$. La fonction que l'on intègre est invariante par $K_{C_1}^V$. Cela permet, modulo translation par ζ, de remplacer cette dernière intégrale par une intégrale sur $\Xi_V\backslash C_1(F_V)$, où Ξ_V est la projection de Ξ dans $C_1(F_V)$. L'intégrale (8) est donc égale à

$$\int_{\Xi_V\backslash C_1(F_V)} \sum_{\mathcal{O}_1\in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})} I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,\zeta\tilde{K}_1^V),\phi_V^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(\zeta c_V)\,dc_V.$$

D'après (12), l'ensemble des $\mathcal{O}_1$ qui contribuent à cette formule est une unique classe sous Ξ. Fixons un élément $\mathcal{O}_1$ de cette classe. L'action de Ξ n'est pas libre en général, il y a un noyau fini. Notons d le nombre d'éléments de ce noyau. Alors la formule précédente devient

$$d^{-1}\int_{\Xi_V\backslash C_1(F_V)} \sum_{\xi\in\Xi} I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\xi\mathcal{O}_1,\zeta\tilde{K}_1^V),\phi_V^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(\zeta c_V)\,dc_V.$$

En utilisant (7), on obtient

$$d^{-1}\int_{\Xi_V\backslash C_1(F_V)} \sum_{\xi\in\Xi_V} I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,\zeta\tilde{K}_1^V),\phi_V^{\xi c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(\zeta c_V)\,dc_V.$$

On a aussi $\lambda_1(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in \Xi_V$ et l'égalité précédente se récrit

$$(14) \qquad d^{-1}\int_{C_1(F_V)} I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,\zeta\tilde{K}_1^V),\phi_V^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(\zeta c_V)\,dc_V$$

$$= d^{-1}\lambda_1(\zeta)I_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,\zeta\tilde{K}_1^V),f_V\otimes dg_1),$$

où, dans cette dernière égalité, $A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,\zeta\tilde{K}_1^V)$ désigne l'image de cette distribution dans $D_{orb,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V)) \otimes Mes(G_1(F_V))^*$. Cela démontre que l'intégrale (8) a les propriétés voulues. Par ailleurs, on voit aisément qu'en multipliant cette intégrale par $mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash Z(\mathbb{A}_F))^{-1}$, elle ne dépend que de la mesure sur $G(F_V)$ et pas de celle sur $C_1(\mathbb{A}_F)$. On peut donc définir une distribution $A_{\lambda_1}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}) \in D_{orb,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$ par l'égalité

$$(15) \qquad I_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(A_{\lambda_1}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f}_V) = mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}\int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)}$$

$$\sum_{\mathcal{O}_1\in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})} I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,c^V\tilde{K}_1^V),\phi_V^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(c)\,dc.$$

Elle vérifie la propriété (5). La propriété (6) résulte de (10). Il reste à vérifier (4). On conserve les termes $\mathbf{f}_V$, f_V et ϕ_V ci-dessus. On complète f_V en $f=f_V\otimes\mathbf{1}_{\tilde{K}_1^V,\lambda_1}$ et ϕ_V en $\phi=\phi_V\otimes\mathbf{1}_{\tilde{K}_1^V}$. On a alors

$$f=\int_{C_1(\mathbb{A}_F)}\phi^c\lambda_1(c)\,dc$$

et l'égalité (3). Pour $c\in C_1(\mathbb{A}_F)$ et $\mathcal{O}_1\in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$, on peut développer $J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O}_1}(\phi^c\otimes dg_1)$ selon l'égalité de la proposition 2.3(i) relative à l'espace hyperspécial $c^V\tilde{K}_1^V$. On obtient

$$J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(\mathbf{f}_V)=m^{-1}\int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)}\sum_{\mathcal{O}_1\in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})}\sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)}|W^M||W^G|^{-1}$$

$$\sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M},1}\in\tilde{M}_{1,ss}(F)/conj,\mathcal{O}_{\tilde{M},1}\subset\mathcal{O}_1} J^{\tilde{G}_1}_{\tilde{M}_1}(A^{\tilde{M}_1}(V,\mathcal{O}_{\tilde{M},1},c^V\tilde{K}_1^{\tilde{M}_1,V}),\phi_V^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(c)\,dc,$$

où $m=mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))$. Pour un Levi M fixé, sommer en $\mathcal{O}_1\in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$ puis en $\mathcal{O}_{\tilde{M},1}\in\tilde{M}_{1,ss}(F)/conj$, $\mathcal{O}_{\tilde{M},1}\subset\mathcal{O}_1$ revient à sommer en $\mathcal{O}_{\tilde{M}}\in\tilde{M}_{ss}(F)/conj$, $\mathcal{O}_{\tilde{M}}\subset\mathcal{O}$, puis en $\mathcal{O}_{\tilde{M},1}\in Fib^{\tilde{M}_1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})$. On obtient

$$(16)\qquad J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(\mathbf{f}_V)=m^{-1}\int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)}\sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)}|W^M||W^G|^{-1}\sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M}}\in\tilde{M}_{ss}(F)/conj,\mathcal{O}_{\tilde{M}}\subset\mathcal{O}}$$

$$\sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M},1}\in Fib^{\tilde{M}_1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})} J^{\tilde{G}_1}_{\tilde{M}_1}(A^{\tilde{M}_1}(V,\mathcal{O}_{\tilde{M},1},c^V\tilde{K}_1^{\tilde{M}_1,V}),\phi_V^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(c)\,dc.$$

Fixons $M\in\mathcal{L}(M_0)$ et $\mathcal{O}_{\tilde{M}}\in\tilde{M}_{ss}(F)/conj$. Il n'est pas difficile de voir en dévissant les définitions que la définition (15) pour la distribution $A^{\tilde{M}}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}_{\tilde{M}})$ s'étend aux intégrales orbitales pondérées. C'est-à-dire que l'on a

$$J^{\tilde{G}_1}_{\tilde{M}_1,\lambda_1}(A^{\tilde{M}}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}_{\tilde{M}}),f_V\otimes dg)=m^{-1}\int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)}$$

$$\sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M},1}\in Fib^{\tilde{M}_1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})} J^{\tilde{G}_1}_{\tilde{M}_1}(A^{\tilde{M}_1}(V,\mathcal{O}_{\tilde{M},1},c^V\tilde{K}_1^{\tilde{M}_1,V}),\phi_V^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(c)\,dc.$$

Alors, la relation (16) devient (5).

Avec ces définitions, on obtient la formule

$$(17)\qquad J^{\tilde{G}_1}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\mathbf{f}_V)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1}\sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M}}\in\tilde{M}_{ss}(F)/conj} J^{\tilde{G}_1}_{\tilde{M}_1,\lambda_1}(A^{\tilde{M}_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}_{\tilde{M}}),\mathbf{f}_V).$$

Si S est un ensemble fini de places contenant V, on a une formule analogue à 2.2(7). Plus précisément, pour $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\mathcal{O}_{\tilde{M}}\in\tilde{M}_{ss}(F)/conj$ tel que $\mathcal{O}_{\tilde{M}}\subset\mathcal{O}$, on peut écrire

$$A^{\tilde{M}_1}_{\lambda_1}(S,\mathcal{O}_{\tilde{M}})=\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{O}_{\tilde{M}})} k^{\tilde{M}_1}_{\lambda_1,i}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})^V_S\otimes A^{\tilde{M}_1}_{\lambda_1,i}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})_V,$$

où, cette fois, $k_{\lambda_1,i}^{\tilde{M}_1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})_S^V \in D_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}_1(F_S^V)) \otimes Mes(M(F_S^V))^*$ et $A_{\lambda_1,i}^{\tilde{M}_1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})_V \in D_{orb,\lambda_1}(\tilde{M}_1(F_V)) \otimes Mes(M(F_V))^*$. On note $A_{\lambda_1,i}^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})_V$ la distribution induite à $\tilde{G}_1(F_V)$. On se rappelle la forme linéaire $r_{\tilde{M},\lambda_1}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K}_{1,S}^V)$ sur $D_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}_1(F_S^V)) \otimes Mes(M(F_V^V))^*$ de 1.15. On a alors l'égalité

$$A_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}) = \sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_{\tilde{M}}\in \tilde{M}_{ss}(F)/conj, \mathcal{O}_{\tilde{M}}\subset\mathcal{O}}$$

$$\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{O}_{\tilde{M}})} r_{\tilde{M},\lambda_1}^{\tilde{G}}(k_{\lambda_1,i}^{\tilde{M}_1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})_S^V, \tilde{K}_{1,S}^V) A_{\lambda_1,i}^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})_V.$$

Il est utile d'obtenir une expression plus explicite pour la distribution $A_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O})$ dans le cas où V contient $S(\mathcal{O})$, ce que l'on suppose dans ce qui suit. On suppose aussi que, pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G(F_V)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$ (sinon, $A_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O})$ est assez explicite d'après (6)). Fixons $\dot{\gamma} \in \mathcal{O}$, fixons une classe $\mathcal{O}_1 \in \tilde{G}_1(F)$ d'image $\mathcal{O}$ et $\dot{\gamma}_1 \in \mathcal{O}_1$ d'image γ. On fixe $\zeta \in C_1(\mathbb{A}_F^V)$ tel que, pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G_1(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}_1$ coupe $\zeta_v\tilde{K}_{1,v}$. On construit comme en 2.3 un élément $x^V \in G(\mathbb{A}_F^V)$ tel que $(x^V)^{-1}\dot{\gamma}x^V \in \tilde{K}^V$ et on définit le groupe compact hyperspécial $K_{\dot{\gamma}}^V = x^V K^V (x^V)^{-1} \cap G_{\dot{\gamma}}(\mathbb{A}_F^V)$ de $G_{\dot{\gamma}}(\mathbb{A}_F^V)$. Il s'en déduit un groupe hyperspécial $K_{\dot{\gamma}_1}^V$ de $G_{1,\dot{\gamma}_1}(\mathbb{A}_F^V)$, qui n'est autre que $x^V K_1^V (x^V)^{-1} \cap G_{1,\dot{\gamma}_1}(\mathbb{A}_F^V)$. La distribution $A^{G_{\dot{\gamma}}}(V, K_{\dot{\gamma}}^V)$ est bien définie. Considérons la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{c}_1(F_V) \to \mathfrak{g}_{1,\dot{\gamma}_1}(F_V) \to \mathfrak{g}_{\dot{\gamma}}(F_V) \to 0.$$

On peut la scinder : le scindage est canonique au-dessus de la partie semi-simple de $\mathfrak{g}_{\dot{\gamma}}(F_V)$, il suffit de la scinder au-dessus du centre de cette algèbre. Notons $\iota_V : \mathfrak{g}_{\dot{\gamma}}(F_V) \to \mathfrak{g}_{1,\dot{\gamma}_1}(F_V)$ un tel scindage, qui est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Soit U_V un voisinage invariant de l'unité dans $G_{\dot{\gamma}}(F_V)$, assez petit pour que l'exponentielle y soit définie. On définit un plongement $i_V : U_V \to G_{1,\dot{\gamma}_1}(F_V)$ de la façon suivante : pour $x \in U_V$, on écrit $x = exp(X)$ avec $X \in \mathfrak{g}_{\dot{\gamma}}(F_V)$ et on pose $i_V(x) = exp(\iota_V(X))$. Ce plongement est équivariant pour l'action par conjugaison de $G_{\dot{\gamma}}(F_V)$. Il est canonique sur l'intersection de U_V avec la partie semi-simple de $G_{\dot{\gamma}}(F_V)$, a fortiori sur les éléments unipotents. On fixe des mesures dg_V sur $G(F_V)$ et dh_V sur $G_{\dot{\gamma}}(F_V)$. Soit $f_V \in C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1(F_V))$, posons $\mathbf{f}_V = f_V \otimes dg_V$. Pour $y \in G(F_V)$, notons ${}^y f_{V|G_{\dot{\gamma}}}$ un élément de $C_c^\infty(G_{\dot{\gamma}}(F_V))$ qui coïncide sur U_V avec la fonction $x \mapsto f_V(y^{-1}i_V(x)\dot{\gamma}_1 y)$. Posons ${}^y\mathbf{f}_{V|G_{\dot{\gamma}}} = {}^y f_{V|G_{\dot{\gamma}}} \otimes dh_V$. On définit une distribution $\underline{A}_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}) \in D_{orb,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V),\omega) \otimes Mes(G(F_V))^*$ par les formules :

- $\underline{A}_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}) = 0$ si $\mathcal{O} \not\subset \tilde{G}(F)_{ell}$;
- si $\mathcal{O} \subset \tilde{G}(F)_{ell}$,

$$I_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(\underline{A}_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f}_V) = [Z_G(\dot{\gamma},F) : G_{\dot{\gamma}}(F)]^{-1}\lambda_1(\zeta) \int_{G_{\dot{\gamma}}(F_V)\backslash G(F_V)} I^{G_{\dot{\gamma}}}(A_{unip}^{G_{\dot{\gamma}}}(V,K_{\dot{\gamma}}^V), {}^y\mathbf{f}_{V|G_{\dot{\gamma}}})\, dy$$

où la mesure dy est déduite des mesures dg_V et dh_V.

Alors

(18) on a l'égalité $A_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}) = \underline{A}_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O})$.

Preuve. La formule (14) donne

$$(19) \qquad I_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(A_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f}_V) = m^{-1}d^{-1}\lambda_1(\zeta) I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,\zeta\tilde{K}_1^V), f_V \otimes dg_1).$$

Rappelons que d est le nombre d'éléments du noyau de l'action de $C_1(F)$ sur $Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})$. On vérifie que

$$d = [Z_G(\gamma, F) : G_\gamma(F)][Z_{G_1}(\gamma_1, F) : G_{1,\gamma_1}(F)]^{-1}.$$

On a $S(\mathcal{O}_1) = S(\mathcal{O})$ par définition. La distribution $A^{\tilde{G}_1}(V, , \mathcal{O}_1, \zeta\tilde{K}_1^V)$ est définie par la formule (7) de 2.3. En particulier, elle est nulle si $\mathcal{O}_1$ n'est pas elliptique, ce qui équivaut à ce que $\mathcal{O}$ ne le soit pas. Supposons $\mathcal{O}$ elliptique. On fixe sur $G_{1,\dot{\gamma}_1}(F_V)$ la mesure $dh_{1,V}$ déduite des mesures dh_V sur $G_{\dot{\gamma}}(F_V)$ et dz sur $C_1(\mathbb{A}_F)$ (cette dernière étant identifiée comme toujours à une mesure sur $C_1(F_V)$). Notons que $G_{1,\dot{\gamma}_1}(F_V)\backslash G_1(F_V) = G_{\dot{\gamma}}(F_V)\backslash G(F_V)$ et que la mesure sur ce quotient déduite de $dg_{1,V}$ et $dh_{1,V}$ coïncide avec celle déduite de dg_V et dh_V. Notons aussi que le terme $[Z_{G_1}(\dot{\gamma}_1, F) : G_{1,\dot{\gamma}_1}(F)]$ intervenant dans d va compenser le facteur intervenant dans 2.3(7). La conjonction de la formule (19) ci-dessus et de 2.3(7) donne

$$I^{\tilde{G}_1}_{\tilde{\lambda}_1}(A^{\tilde{G}_1}_{\tilde{\lambda}_1}(V, \mathcal{O}), \mathbf{f}_V) = m^{-1}[Z_G(\dot{\gamma}, F) : G_{\dot{\gamma}}(F)]^{-1}\lambda_1(\zeta)$$

$$\int_{G_{\dot{\gamma}}(F_V)\backslash G(F_V)} I^{G_{1,\dot{\gamma}_1}}(A^{G_{1,\dot{\gamma}_1}}_{unip}(V, K^V_{\dot{\gamma}_1}), {}^y f_{V|G_{1,\dot{\gamma}_1}} \otimes dh_{1,V})\, dy.$$

Pour démontrer (18), il suffit de prouver que, pour tout y, on a l'égalité

$$m^{-1} I^{G_{1,\gamma_1}}(A^{G_{1,\dot{\gamma}_1}}_{unip}(V, K^V_{\dot{\gamma}_1}), {}^y f_{V|G_{1,\dot{\gamma}_1}} \otimes dh_{1,V}) = I^{G_{\dot{\gamma}}}(A^{G_{\dot{\gamma}}}_{unip}(V, K^V_{\dot{\gamma}}), {}^y f_{V|G_\gamma} \otimes dh_V).$$

Remarquons que la fonction ${}^y f_{V|G_\gamma}$ coïncide dans U_V avec ${}^y f_{V|G_{1,\gamma_1}} \circ i_V$. L'égalité à prouver résulte alors de (17) ci-dessous. $\square$

On va simplement reformuler cette égalité sous une forme plus générale. On considère C_1, G_1 et G comme précédemment, en oubliant $\tilde{G}$ et $\tilde{G}_1$. On fixe comme plus haut des compacts qui se correspondent $K_{1,v}$ et K_v pour $v \notin V_{ram}(G_1)$ et des mesures dg, dc et dg_1. Soit V un ensemble fini de places contenant $V_{ram}(G_1)$. Notons $G_{1,unip}(F_V)$ et $G_{unip}(F_V)$ les ensembles d'éléments unipotents de $G_1(F_V)$ et $G(F_V)$. La projection $G_{1,unip}(F_V) \to G_{unip}(F_V)$ est un isomorphisme. Notons i_V son inverse. Soit $f_{1,V} \in C_c^\infty(G_1(F_V))$ et $f_V \in C_c^\infty(G(F_V))$. On suppose que $f_V = f_{1,V} \circ i_V$ sur $G_{unip}(F_V)$. Alors on a l'égalité

(20) $$mes(\mathfrak{A}_{C_1} C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1} I^{G_1}(A^{G_1}_{unip}(V), f_{1,V} \otimes dg_{1,V}) = I^G(A^G_{unip}(V), f_V \otimes dg_V),$$

où les distributions unipotentes sont relatives aux compacts fixés.

Preuve. Fixons un ensemble $\mathcal{U}_V$ de représentants des classes de conjugaison par $G(F_V)$ dans l'ensemble des éléments unipotents de ce groupe. Son image $i_V(\mathcal{U}_V)$ dans $G_1(F_V)$ est un ensemble analogue pour $G_1(F_V)$. Pour tout $u \in \mathcal{U}_V$, fixons une mesure sur $G_u(F_V)$, dont on déduit une mesure sur $G_{1,i_V(u)}(F_V)$. Le membre de gauche ci-dessus est combinaison linéaire de termes

$$\int_{G_{1,i_V(u)}(F_V)\backslash G_1(F_V)} f_{1,V}(x_1^{-1} i_V(u) x_1)\, dx_1$$

pour $u \in \mathcal{U}_V$, où la mesure dx_1 sur le quotient se déduit des mesures sur les deux groupes, tandis que celui de droite est combinaison linéaire de termes analogues

$$\int_{G_u(F_V)\backslash G(F_V)} f_V(x^{-1} u x)\, dx.$$

De la définition de f_V se déduit que les deux intégrales ci-dessus sont égales. L'assertion (20) revient à dire que les coefficients des deux combinaisons linéaires sont égaux. On déduit aisément de cela que, pour un Levi $M \neq G$, si l'on suppose par récurrence (20) vrai pour M, cette assertion se généralise aux intégrales orbitales pondérées, c'est-à-dire que l'on a l'égalité

$$mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}J_{M_1}^{G_1}(A_{unip}^{M_1}(V), f_{1,V}\otimes dg_{1,V}) = J_M^G(A_{unip}^M(V), f_V\otimes dg_V).$$

En vertu de 2.2(1), l'égalité (20) résulte par récurrence de l'égalité que l'on prouvera ci-dessous

$$(21) \qquad mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}J_{unip}^{G_1}(f_{1,V}\otimes dg_1) = J_{unip}^G(f_V\otimes dg).$$

Soit $v \not\in V$. Alors $\mathbf{1}_{K_{1,v}}$ et $\mathbf{1}_{K_v}$ se correspondent comme f_V et $f_{1,V}$, c'est-à-dire que leurs restrictions aux ensembles d'unipotents $G_{1,unip}(F_v)$ et $G_{unip}(F_v)$ se correspondent par la projection bijective du premier ensemble sur le second. En effet, pour $g_1 \in G_1(F_v)$, g_1 appartient à $K_{1,v}$ si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- sa projection g dans $G(F_v)$ appartient à K_v ;
- pour tout $\chi \in X^*(G_1)^{\Gamma_{F_v}}$ (cf. preuve de (13)), on a $|\chi(g_1)|_{F_v} = 1$.

La deuxième condition étant toujours réalisée pour g_1 unipotent, l'assertion s'ensuit. Notons $f_1 = f_{1,V}\otimes \mathbf{1}_{K_1^V}$, $f = f_V \otimes \mathbf{1}_{K^V}$. Alors les restrictions des fonctions f_1 et f aux éléments unipotents de $G_1(\mathbb{A}_F)$ et $G(\mathbb{A}_F)$ s'identifient encore. On voit alors que, pour tout $g_1 \in G_1(\mathbb{A}_F)$, on a l'égalité

$$k_{unip}^{G_1,T}(f_1, g_1) = k_{unip}^{G,T}(f, g),$$

où g est la projection de g_1. On construit $J_{unip}^{G_1,T}(f_1)$, resp. $J_{unip}^{G,T}(f)$, en intégrant cette fonction sur $\mathfrak{A}_{G_1}G_1(F)\backslash G_1(\mathbb{A}_F)$, resp. $\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$. Ces intégrales sont égales, au rapport des mesures près, et ce rapport est bien sûr $mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))$. En prenant ensuite la valeur de ces termes au point $T = T_0$, on obtient (17). Cela achève les preuves de (21) et (19).

2.6 Variante avec caractère central, suite

On continue avec les mêmes données que dans le paragraphe précédent. On se donne d'autres données

$$1 \to C_2 \to G_2 \to G \to 1,\ \tilde{G}_2 \to \tilde{G}$$

λ_2 vérifiant les mêmes hypothèses, munies de données complémentaires comme en 1.15. On suppose donné un caractère automorphe λ_{12} de $G_{12}(\mathbb{A}_F)$ tel que la restriction de λ_{12} à $C_1(\mathbb{A}_F)\times C_2(\mathbb{A}_F)$ soit $\lambda_1 \times \lambda_2^{-1}$. Soit V un ensemble fini de places de F contenant $V_{12,ram}$. On a construit en 1.15 une fonction canonique $\tilde{\lambda}_{12,V}$ sur $\tilde{G}_{12}(F_V)$, dont on déduit un isomorphisme

$$D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^* \simeq D_{g\acute{e}om,\lambda_2}(\tilde{G}_2(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$$

qui se restreint en un isomorphisme

$$D_{orb,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^* \simeq D_{orb,\lambda_2}(\tilde{G}_2(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*.$$

Lemme. *Pour tout $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$, les distributions $A^{\tilde{G}_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O})$ et $A^{\tilde{G}_2}_{\lambda_2}(V,\mathcal{O})$ se correspondent par cet isomorphisme.*

Preuve. Considérons d'abord la situation du paragraphe précédent dans le cas particulier où $\lambda_1 = 1$. Alors $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{A}_F))$ s'identifie à $C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$. Pour un élément f de cet espace et une mesure dg sur $G(\mathbb{A}_F)$, on a défini deux termes $J^{\tilde{G}_1}_{géom,\lambda_1}(f \otimes dg)$ et $J^{\tilde{G}}_{géom}(f \otimes dg)$. Le premier en 2.3 en considérant f comme un élément du premier espace, le second en 2.1 en considérant f comme un élément du second espace. En dévissant les définitions, on vérifie que ces deux termes sont égaux. Plus finement, pour $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$, les deux termes $J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(f \otimes dg)$ et $J^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}}(f \otimes dg)$ définis en 2.3 et 2.1 sont égaux.

D'autre part, soit $f \in C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$ et λ un caractère automorphe de $G(\mathbb{A}_F)$. On en déduit comme en 1.15 une fonction $\tilde{\lambda}$ sur $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ qui vaut 1 sur $\tilde{G}(F)$. On vérifie immédiatement que l'on a l'égalité

$$J^{\tilde{G}}_{géom}((f\tilde{\lambda}) \otimes dg) = J^{\tilde{G}}_{géom}(f \otimes dg).$$

Plus finement, pour tout $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$, on a l'égalité

$$J^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}}((f\tilde{\lambda}) \otimes dg) = J^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}}(f \otimes dg).$$

Revenons maintenant à l'énoncé et fixons des mesures sur tous nos groupes. En considérant la relation 2.3(4), on voit que, par récurrence, il nous suffit de prouver que, pour $f_{1,V} \in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V))$ et $f_{2,V} \in C^\infty_{c,\lambda_2}(\tilde{G}_2(F_V))$ se correspondant par l'isomorphisme ci-dessus, on a l'égalité

$$J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(f_{1,V} \otimes dg) = J^{\tilde{G}_2}_{\mathcal{O},\lambda_2}(f_{2,V} \otimes dg).$$

Posons $f_i = f_{i,V} \otimes \mathbf{1}_{\tilde{K}_i^V,\lambda_i}$ pour $i = 1, 2$. En vertu des définitions, ces fonctions se correspondent par la relation

$$f_2(\gamma_2) = \tilde{\lambda}_{12}(\gamma_1, \gamma_2) f_1(\gamma_1)$$

pour tous $(\gamma_1, \gamma_2) \in \tilde{G}_{12}(\mathbb{A}_F)$. Et la relation à prouver est

$$J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(f_1 \otimes dg) = J^{\tilde{G}_2}_{\mathcal{O},\lambda_2}(f_2 \otimes dg).$$

On s'est ainsi débarrassé de l'ensemble V. Introduisons une fonction $\phi_1 \in C^\infty_c(\tilde{G}_1(\mathbb{A}_F))$ telle que

$$f_1 = \int_{C_1(\mathbb{A}_F)} \phi_1^c \lambda_1(c)\, dc.$$

On peut considérer ϕ_1 comme une fonction sur $\tilde{G}_{12}(\mathbb{A}_F)$, invariante par le sous-groupe $C_2(\mathbb{A}_F)$. En la considérant ainsi, on peut introduire une fonction $\phi_{12} \in C^\infty_c(\tilde{G}_{12}(\mathbb{A}_F))$ telle que

$$\phi_1 = \int_{C_2(\mathbb{A}_F)} \phi_{12}^c\, dc.$$

Notons ϕ_{21} le produit de ϕ_{12} et de la fonction $\tilde{\lambda}_{12}$ sur $\tilde{G}_{12}(\mathbb{A}_F)$. Définissons une fonction ϕ_2 invariante par $C_1(\mathbb{A}_F)$ par

$$\phi_2 = \int_{C_1(\mathbb{A}_F)} \phi_{21}^c\, dc.$$

On peut la considérer comme un élément de $C_c^\infty(\tilde{G}_2(\mathbb{A}_F))$. On vérifie qu'on a alors l'égalité

$$f_2 = \int_{C_2(\mathbb{A}_F)} \phi_2^c \lambda_2(c)\, dc.$$

Utilisons la formule 2.3(3) :

$$J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(f_1 \otimes dg) = m_1^{-1} \int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)} \sum_{\mathcal{O}_1} J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O}_1}(\phi_1^{c_1} \otimes dg_1)\lambda_1(c_1)\, dc_1,$$

où $m_1 = mes(\mathfrak{A}_{C_1} C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))$ et où la somme porte sur les $\mathcal{O}_1$ au-dessus de $\mathcal{O}$. Pour chaque $\mathcal{O}_1$, on utilise la première remarque ci-dessus. Elle entraîne que, pour tout c_1, on a l'égalité

$$J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O}_1}(\phi_1^{c_1} \otimes dg_1) = m_2^{-1} \int_{C_2(F)\backslash C_2(\mathbb{A}_F)} \sum_{\mathcal{O}_{12}} J^{\tilde{G}_{1,2}}_{\mathcal{O}_{12}}(\phi_{12}^{c_1c_2} \otimes dg_{12})\, dc_2,$$

où la signification de m_2 est claire et où la somme porte sur les $\mathcal{O}_{12} \in \tilde{G}_{12,ss}(F)/conj$ au-dessus de $\mathcal{O}_1$. On obtient

$$J^{\tilde{G}_1}_{\mathcal{O},\lambda_1}(f_1 \otimes dg) = m_1^{-1} m_2^{-1} \int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F) \times C_2(F)\backslash C_2(\mathbb{A}_F)} \sum_{\mathcal{O}_{12}} J^{\tilde{G}_{1,2}}_{\mathcal{O}_{12}}(\phi_{12}^{c_1c_2} \otimes dg_{12})\lambda_1(c_1)\, dc_1\, dc_2,$$

où cette fois, la somme porte sur les $\mathcal{O}_{12}$ au-dessus de $\mathcal{O}$. On a une formule analogue en permutant les indices 1 et 2. Il nous suffit de fixer $\mathcal{O}_{12}$ au-dessus de $\mathcal{O}$ et de démontrer que, pour tous c_1, c_2, on a l'égalité

$$J^{\tilde{G}_{1,2}}_{\mathcal{O}_{12}}(\phi_{12}^{c_1c_2} \otimes dg_{12})\lambda_1(c_1) = J^{\tilde{G}_{1,2}}_{\mathcal{O}_{12}}(\phi_{21}^{c_1c_2} \otimes dg_{12})\lambda_2(c_2).$$

Mais on voit que la fonction $\lambda_2(c_2)\phi_{21}^{c_1c_2}$ est le produit de $\lambda_1(c_1)\phi_{12}^{c_1c_2}$ et du caractère automorphe $\tilde{\lambda}_{12}$ de $\tilde{G}_{12}(\mathbb{A}_F)$. L'égalité précédente résulte de la deuxième remarque du début de la preuve. $\square$

2.7 La partie géométrique de la formule des traces ω-équivariante

On revient à la situation de 2.1. On fixe un ensemble fini V de places contenant V_{ram}. On note $\tilde{G}_{ss}(F_V)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples par $G(F_V)$ dans $\tilde{G}(F_V)$, autrement dit l'ensemble des familles $\mathcal{O}_V = (\mathcal{O}_v)_{v\in V}$, où, pour tout $v \in V$, $\mathcal{O}_v$ est une classe de conjugaison semi-simple par $G(F_v)$ dans $\tilde{G}(F_v)$. Soit $\mathcal{O}_V$ une telle famille. Pour $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$, la relation $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_V$ signifie que la classe de conjugaison par $G(F_V)$ engendrée par $\mathcal{O}$ est égale à $\mathcal{O}_V$. On définit un élément $A^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V, \omega) \in D_{orb}(\tilde{G}(F_V), \omega) \otimes Mes(G(F_V))^*$ par la formule

$$A^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V, \omega) = \sum_{\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj, \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_V} A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega).$$

Notons que les $\mathcal{O}$ qui contribuent vérifient non seulement $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_V$, mais aussi que, pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$, cf. 2.2(3). Il n'y en a qu'un nombre fini d'après le lemme 2.1. Pour $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$, la formule 2.2(8) se récrit

$$(1) \qquad J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}, \omega) = \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_V \in \tilde{M}_{ss}(F_V)/conj} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_V, \omega), \mathbf{f}_V).$$

Toutes les distributions intervenant sont à support dans l'ensemble des $\gamma \in \tilde{G}(F_V)$ tels que $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma) = 0$. Elles se prolongent donc à tout $C^\infty_{ac,glob}(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$ et l'égalité ci-dessus reste vraie sur cet espace.

En utilisant le lemme 1.7, on définit une distribution $\mathbf{f} \mapsto I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}, \omega)$ sur $C^\infty_{ac,glob}(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$ par la formule de récurrence

$$(2) \qquad I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om,}(\mathbf{f}, \omega) = J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}, \omega) - \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0), \tilde{L} \neq \tilde{G}} |W^{\tilde{L}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} I^{\tilde{L}}_{g\acute{e}om}(\phi_{\tilde{L}}(\mathbf{f}), \omega).$$

En [3] paragraphe 2, Arthur montre que c'est une distribution ω-équivariante (cette propriété est comme toujours supposée par récurrence pour que la définition ci-dessus ait un sens). Elle se factorise donc en une forme linéaire sur $I_{ac,glob}(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$. Soulignons que cette distribution dépend implicitement des K_v pour $v \notin V$.

Proposition. *Pour $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$, on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}, \omega) = \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_V \in \tilde{M}_{ss}(F_V)/conj} I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_V, \omega), \mathbf{f}).$$

La somme est en fait finie.

Preuve. On démontre plus généralement la formule de l'énoncé pour $\mathbf{f} \in C^\infty_{ac,glob}(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$. En raisonnant par récurrence, on exprime les termes $I^{\tilde{L}}_{g\acute{e}om}(\phi_{\tilde{L}}(\mathbf{f}), \omega)$ qui interviennent dans la relation (2) par la formule de l'énoncé. On exprime le terme $J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}, \omega)$ par la formule (1). En regroupant les termes, on obtient

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}, \omega) = \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_V \in \tilde{M}_{ss}(F_V)/conj}$$

$$\left(J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_V, \omega), \mathbf{f}) - \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} I^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_V, \omega), \phi_{\tilde{L}}(\mathbf{f})) \right).$$

La dernière somme intérieure est par définition $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_V, \omega), \mathbf{f})$ et on obtient la formule de l'énoncé. □

2.8 La partie géométrique de la formule des traces invariante, variante avec caractère central

Dans la situation de 2.3, pour un ensemble fini V de places contenant $V_{1,ram}$, on peut rendre invariante la distribution $\mathbf{f}_V \mapsto J^{\tilde{G}_1}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\mathbf{f}_V)$ sur $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))^*$ par le même procédé qu'au paragraphe précédent. En adaptant les définitions de façon plus ou moins évidente, on obtient la formule

$$(1)\qquad I^{\tilde{G}_1}_{géom,\lambda_1}(\mathbf{f}_V)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1}\sum_{\mathcal{O}\in\tilde{M}_{ss}(F_V)/conj}I^{\tilde{G}_1}_{\tilde{M}_1,\lambda_1}(A^{\tilde{M}_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f}_V).$$

Remarquons que, pour $\mathcal{O}\in\tilde{G}_{ss}(F_V)/conj$, la distribution $A^{\tilde{G}_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O})$ est donnée par une formule similaire à 2.3(11), à savoir avec les notations de ce paragraphe :

$$(2)\qquad I^{\tilde{G}_1}_{\lambda_1}(A^{\tilde{G}}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f}_V)=mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}\int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)}$$

$$\sum_{\mathcal{O}_1\in Fib^{\tilde{G}_1}(\mathcal{O})}I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{O}_1,c^V\tilde{K}_1^V),\phi_V^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(c)\,dc.$$

La somme intérieure porte sur les éléments de $\tilde{G}_{1,ss}(F_V)/conj$ qui se projettent sur $\mathcal{O}$. Cet ensemble n'est pas dénombrable, mais seuls un nombre fini de termes sont non nuls.

Dans la situation de 2.6, on a un résultat similaire à celui du lemme de ce paragraphe :

(3) les distributions $I^{\tilde{G}_1}_{géom,\lambda_1}$ et $I^{\tilde{G}_2}_{géom,\lambda_2}$ définies sur $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$ et $C^\infty_{c,\lambda_2}(\tilde{G}_2(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$ se correspondent par l'isomorphisme défini en 2.6 entre ces espaces.

2.9 Variante pour les K-espaces

Considérons un K-espace comme en 1.16. Soit V un ensemble fini de places contenant V_{ram}. Pour $\mathbf{f}=\oplus_{p\in\Pi}\mathbf{f}_p\in I(K\tilde{G}(F_V),\omega)$, on pose

$$I^{K\tilde{G}}_{geom}(\mathbf{f},\omega)=\sum_{p\in\Pi}I^{\tilde{G}_p}_{geom}(\mathbf{f}_p,\omega).$$

Par simple sommation sur p du développement de $I^{\tilde{G}_p}_{geom}(\mathbf{f}_p,\omega)$ fourni par la proposition 2.7, on obtient

$$I^{K\tilde{G}}_{géom}(\mathbf{f},\omega)=\sum_{K\tilde{M}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)}|W^{K\tilde{M}}||W^{K\tilde{G}}|^{-1}\sum_{\mathcal{O}_V\in K\tilde{M}_{ss}(F_V)/conj}I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(A^{K\tilde{M}}(\mathcal{O}_V,\omega),\mathbf{f}).$$

Donnons quelques explications sur les notations. Un élément $K\tilde{M}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ est une famille $(\tilde{M}_p)_{p\in\Pi^M}$ où Π^M est un sous-ensemble de Π et, pour tout $p\in\Pi^M$, $\tilde{M}_p$ est un espace de Levi de $\tilde{G}_p$ (ces espaces doivent vérifier des conditions de cohérence, cf. 1.17). Un élément $\mathcal{O}_V\in K\tilde{M}_{ss}(F_V)/conj$ est un élément de $\tilde{M}_{p,ss}(F_V)/conj$ pour un certain $p\in\Pi^M$. Par définition, $A^{K\tilde{M}}(\mathcal{O}_V,\omega)=A^{\tilde{M}_p}(\mathcal{O}_V,\omega)$ et

$$I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(A^{K\tilde{M}}(\mathcal{O}_V,\omega),\mathbf{f})=I^{\tilde{G}_p}_{\tilde{M}_p}(A^{\tilde{M}_p}(\mathcal{O}_V,\omega),\mathbf{f}_p).$$

3 Endoscopie

3.1 Données endoscopiques

Une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est un triplet $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ vérifiant les mêmes conditions que dans le cas local (cf. [I] 1.5), à l'unique différence suivante près. On suppose qu'il existe un cocycle $a : W_F \to Z(\hat{G})$ tel que :

- pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$, on ait l'égalité $ad_{\tilde{s}}(g, w) = (a(w)g, w)$;

- l'image de a dans $H^1(W_F, , Z(\hat{G}))/ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$ est égal à $\mathbf{a}$.

La notion d'équivalence de données endoscopiques est la même que dans le cas local. Pour une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ comme ci-dessus, on définit l'espace endoscopique $\tilde{G}' = G' \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$ comme en [I] 1.7 (l'ensemble $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ a une structure sur F). On note $V_{ram}(\mathbf{G}')$ la réunion de V_{ram} et de l'ensemble des places v où $\mathbf{G}'_v$ est ramifié (on rappelle que, pour $v \notin V_{ram}$, on dit que $\mathbf{G}'_v$ est non ramifié si le groupe d'inertie $I_v \subset W_{F_v}$ est contenu dans $\mathcal{G}'_v$). On dit que $\mathbf{G}'$ est relevante si elle vérifie les deux conditions

• $\tilde{G}'(F) \neq \emptyset$;

• pour tout $v \in Val(F)$, la donnée $\mathbf{G}'_v$ est relevante.

Attention. Il ne s'ensuit pas de ces conditions qu'il existe $\delta \in \tilde{G}'(F)$ qui soit $\tilde{G}$-régulier et tel qu'en toute place v, δ corresponde à un élément $\gamma_v \in \tilde{G}(F_v)$. La situation se simplifie toutefois dans le cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, d'après le lemme suivant.

Lemme. *Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Supposons $\tilde{G}'(F) \neq \emptyset$. Alors l'ensemble des éléments $\tilde{G}$-réguliers de $\tilde{G}'(F)$ n'est pas vide et, pour tout élément δ de cet ensemble, il existe $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$ qui correspond à δ.*

La preuve est la même que dans le cas local, cf. [I] lemme 1.9.

Remarque. Il se peut que $\tilde{G}'(F)$ soit vide. Par exemple, soient $d \in F^\times$, $G = SL(2)$, $\tilde{G} = \{\gamma \in GL(2); det(\gamma) = d\}$ et $\mathbf{a} = 1$. Pour toute extension quadratique E de F, il y a une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ telle que $G'(F)$ est le groupe des éléments de E de norme 1. Alors $\tilde{G}'(F)$ est l'ensemble des éléments de E de norme d. On peut trouver choisir d et E de sorte que cet ensemble soit vide.

Comme dans le cas local, on dit que $\mathbf{G}'$ est elliptique si $Z(\hat{G}')^{\Gamma_F,0} = Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$.

On fixe une paire parabolique (P'_0, M'_0) de G', définie sur F et minimale. Pour tout $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$, supposons fixé un sous-groupe compact hyperspécial K'_v de $G'(F_v)$ vérifiant des conditions analogues à celles de 1.1. D'après [I] 6.2, l'espace $\tilde{K}_v$ détermine un espace hyperspécial $\tilde{K}'_v$ dans $\tilde{G}'(F_v)$ associé à K'_v. Ces ensembles vérifient encore la condition de compatibilité globale précédente.

3.2 Plongements de tores et ramification

Soient $\hat{T}$ un tore complexe et E une extension galoisienne finie de F. On suppose $\hat{T}$ muni d'une action algébrique de $Gal(E/F)$. Introduisons le groupe de Weil relatif $W_{E/F}$. C'est un quotient de W_F et il s'insère dans une suite exacte

$$1 \to E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times \to W_{E/F} \to Gal(E/F) \to 1,$$

cf. [22] paragraphe 1. Notons I_F^E le sous-groupe distingué de W_F engendré par les images des groupes d'inertie $I_v \subset W_F$ pour toutes les places finies v de F non ramifiées dans E et notons $I_{E/F}$ son image dans $W_{E/F}$. Le groupe $I_{E/F}$ est aussi l'image dans $W_{E/F}$ du sous-groupe $\prod_w \mathfrak{o}_w^\times$, où le produit est pris sur les places finies w de E au-dessus d'une telle place v de F et où $\mathfrak{o}_w^\times$ est le groupe des unités de $E_w^\times$. Soit a un 2-cocycle de $Gal(E/F)$ dans $\hat{T}$, que l'on relève en un 2-cocycle de $W_{E/F}$ dans $\hat{T}$. Alors

(1) il existe une cochaîne continue $b : W_{E/F} \to \hat{T}$, biinvariante par $I_{E/F}$, telle que a soit le bord de b.

Preuve. Langlands prouve qu'il existe une cochaîne continue $b' : W_{E/F} \to \hat{T}$ telle que a soit le bord de b' ([20] lemme 4). Munissons le groupe compact $I_{E/F}$ de la mesure de Haar de masse totale 1. Pour $w \in W_{E/F}$, posons

$$b(w) = \int_{I_{E/F}} b'(iw)\, di.$$

C'est une cochaîne continue et invariante à gauche par $I_{E/F}$, donc aussi à droite puisque $I_{E/F}$ est distingué. Pour $w_1, w_2 \in W_{E/F}$, on a l'égalité

$$a(w_1, w_2)b'(w_1w_2) = b'(w_1)w_1(b'(w_2)).$$

Soient $i_1, i_2 \in I_{E/F}$. Remplaçons w_1 par i_1w_1 et w_2 par i_2w_2. Puisque les images de i_1 et i_2 dans $Gal(E/F)$ sont triviales, on obtient

$$a(w_1, w_2)b'(i_3w_1w_2) = b'(i_1w_1)w_1(b'(i_2w_2)),$$

où $i_3 = i_1w_1i_2w_1^{-1}$. En intégrant cette égalité en i_1 et i_2, on obtient

$$a(w_1, w_2)b(w_1w_2) = b(w_1)w_1(b(w_2)),$$

c'est-à-dire que a est le bord de b. $\square$

Soient E une extension galoisienne finie de F et $\hat{T}_i$, pour $i = 1, 2, 3$, des tores complexes munis d'actions de $\Gamma_{E/F}$. On suppose donnée une suite exacte

$$1 \to \hat{T}_1 \to \hat{T}_2 \to \hat{T}_3 \to 1$$

équivariante pour ces actions. Soit U un sous-groupe de I_F^E. On a

(2) pour tout cocycle continu $b_3 : W_F \to \hat{T}_3$ biinvariant par U, il existe un cocycle continu $b_2 : W_F \to \hat{T}_2$, biinvariant par U, dont l'image par composition avec l'homomorphisme $\hat{T}_2 \to \hat{T}_3$ soit égale à b_3.

Preuve. D'après la preuve de [20] lemme 4, il existe un cocycle $b_2' : W_F \to \hat{T}_2$ dont l'image par composition avec l'homomorphisme $\hat{T}_2 \to \hat{T}_3$ soit égale à b_3. On peut fixer une extension galoisienne finie E' de E telle que b_2' et b_3 se factorisent par $W_{E'/F}$. Notons U' la clôture de l'image de U dans $W_{E'/F}$ et munissons ce groupe compact de la mesure de Haar de masse totale 1. Le cocycle b_3 est encore biinvariant par U'. Pour $w \in W_{E'/F}$, posons

$$b_2(w) = \int_{U'} b_2'(iw)\, di.$$

Le même calcul que ci-dessus montre que b_2 est encore un cocycle. Son relèvement en un cocycle sur W_F est biinvariant par U. Puisque b_3 est biinvariant par U', b_2 vérifie comme b_2' la dernière condition de l'assertion. $\square$

Remarque. Les deux propriétés ci-dessus ont été prouvées de façon différente par Arthur ([1], preuve du lemme 7.1).

Soient $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ et S' un sous-tore maximal de G' défini sur F. Fixons comme en [I] 1.5 une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$ conservée par $ad_{\tilde{s}}$. On note $\hat{\theta}$ l'automorphisme déterminé par cette paire et on adapte l'action galoisienne de sorte que $\hat{\mathcal{E}}$ soit conservée par la nouvelle action. La paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T}') = (\hat{B} \cap \hat{G}', \hat{T}^{\hat{\theta},0})$ se complète en une paire de Borel épinglée de $\hat{H}$. Le tore dual de S' s'identifie à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \omega_{S',G}(\sigma) \circ \sigma$, où $\omega_{S',G}$ est un cocycle à valeurs dans W^θ. On note $\hat{S}'$ ce tore muni de cette action galoisienne.

Lemme. *Le plongement $\hat{S}' \subset \hat{G}' \subset \mathcal{G}'$ se prolonge en un plongement ${}^LS' \to \mathcal{G}' \subset {}^LG$ de sorte que, pour toute place $v \in Val(F)$ telle que $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$ et S' soit non ramifié en v, l'image d'un élément w du groupe d'inertie I_v soit $(1, w) \in {}^LG$.*

Preuve. Notons V la réunion de $V_{ram}(\mathbf{G}')$ et de l'ensemble des places au-dessus desquelles S' est ramifié. Posons $\hat{G}^1 = \hat{G}^{\hat{\theta},0}$ et ${}^LG^1 = \hat{G}^1 \rtimes W_F \subset {}^LG$. On commence par prouver que

(3) le plongement $\hat{S}' \subset \hat{G}^1$ se prolonge en un plongement ${}^LS' \to {}^LG^1$ qui possède les propriétés de l'énoncé.

Notons E l'extension galoisienne finie de F telle que Γ_E soit l'intersection des noyaux des actions de Γ_F sur $\hat{G}$ et sur $\hat{S}'$. Cette extension n'est pas ramifiée au-dessus des places hors de V. Le cocycle $\omega_{S',G}$ se factorise par $Gal(E/F)$. Tout élément de W^θ se relevant dans $\hat{G}^1$, on peut fixer une application $b : Gal(E/F) \to \hat{G}^1$ de sorte que $b(\sigma)$ soit un relèvement de $\omega_{S',G}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in Gal(E/F)$. Le cobord

$$db(\sigma, \sigma') = b(\sigma)\sigma(b(\sigma'))b(\sigma\sigma')^{-1}$$

est un 2-cocycle de $Gal(E/F)$ dans $\hat{S}'$. D'après (1), on peut fixer une cochaîne continue $\mu : W_F \to \hat{S}'$ telle que $\mu(I_v) = 1$ pour tout $v \notin V$ et $d\mu = db$. Alors le plongement

$$\begin{array}{ccc} {}^LS' & \to & {}^LG^1 \\ (t, w) & \mapsto & (t\mu(w)^{-1}b(w), w) \end{array}$$

satisfait les conditions requises (on a relevé b en une application définie sur W_F via la projection $W_F \to Gal(E/F)$). Cela prouve (3).

On fixe un plongement $(t, w) \mapsto (tg^1(w), w)$ vérifiant (3). Rappelons que, pour tout $w \in W_F$, il existe $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que ad_{g_w} préserve la paire épinglée de $\hat{G}'$ que l'on a fixée plus haut. L'élément $g(w)$ normalise $\hat{T}$, son image $\omega_{G'}(w)$ dans W est fixe par θ. Pour tout $w \in W_F$, on a une égalité $\omega_{S',G}(w) = \omega_{S',G'}(w)\omega_{G'}(w)$, où $\omega_{S',G'}(w) \in W^{G'}$. Il en résulte que, pour tout w, on peut choisir $(x(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que $x(w)$ normalise $\hat{T}$ et que son image dans W soit $\omega_{S',G}(w)$. Notons que $x(w)$ est bien déterminé à multiplication à gauche près par un élément de $\hat{S}'$. Il existe $t(w) \in \hat{T}$ tel que $x(w) = t(w)g^1(w)$. L'image $d(w)$ de $t(w)$ dans $\hat{T}/\hat{S}'$ est uniquement déterminée. Montrons que l'application $d : W_F \to \hat{T}/\hat{S}'$ est continue. Il suffit de montrer que, pour tout w_0, on peut choisir $x(w)$ continu au voisinage de w_0. Par hypothèse, on peut choisir une section continue $w \mapsto s_w$ de la projection $\mathcal{G}' \to W_F$. En général, l'élément s_w ne conserve pas la paire $(\hat{B}', \hat{T}')$. Mais la paire $s_w(\hat{B}', \hat{T}')$ varie continuement en w. Dans un voisinage de w_0, on peut donc fixer une application continue $w \mapsto h(w)$ à valeurs dans $\hat{G}'$ de sorte que

$ad_{h(w)}ad_{s_w}(\hat{B}', \hat{T}') = \omega_{S',G'}(w)(\hat{B}', \hat{T}')$. En posant $h(w)s_w = (x(w), w)$, l'application x ainsi définie au voisinage de w_0 convient. Cela prouve la continuité de d. On peut munir le tore $\hat{T}$ de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \omega_{S',G}(\sigma) \circ \sigma$. Notons $\hat{S}$ ce tore muni de cette action. On peut considérer d comme une application à valeurs dans $\hat{S}/\hat{S}'$. On vérifie qu'alors, c'est un cocycle. De plus, pour $v \notin V$, d est triviale sur I_v. En effet, pour $w \in I_v$, on a $g^1(w) = 1$ et l'hypothèse $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$ nous permet de choisir $x(w) = 1$, d'où $d(w) = 1$. On considère la suite exacte

$$1 \to \hat{S}' \to \hat{S} \to \hat{S}/\hat{S}' \to 1$$

D'après (2), on peut relever d en un cocycle $e : W_F \to \hat{S}$ tel que, pour tout $v \notin V$, e soit trivial sur I_v. Fixons un tel cocycle. Pour tout $w \in W_F$, posons $y(w) = e(w)g^1(w)$. Alors $(y(w), w)$ appartient à $\mathcal{G}'$. L'application

$$\begin{array}{ccc} {}^LS' & \to & \mathcal{G}' \\ (t, w) & \mapsto & (te(w), w) \end{array}$$

vérifie les conditions du lemme. □

3.3 Données auxiliaires

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On suppose $\tilde{G}'(F) \neq \emptyset$. La notion de données auxiliaires G_1', $\tilde{G}_1'$, C_1, $\hat{\xi}_1$ se définit comme dans le cas local ([I] 2.1). A de telles données est associé un caractère λ_1 de $C_1(\mathbb{A}_F)$ et un caractère $\lambda^+_{G_1'}$ de $G_1'(\mathbb{A}_F)$, à valeurs réelles positives (cf. [I] 7.1). Ces deux caractères sont automorphes, c'est-à-dire triviaux respectivement sur $C_1(F)$ et $G_1'(F)$. On dit que les données auxiliaires sont unitaires si $\lambda^+_{G_1'}$ est trivial.

Lemme. *On peut choisir de telles données auxiliaires unitaires de sorte que, pour $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$, le groupe $G'_{1,v}$ soit non ramifié, le plongement $\hat{\xi}_{1,v}$ soit l'identité sur I_v et λ_1 soit non ramifié en v.*

Remarque. C'est le lemme 7.1 de [1]. Nous reprenons la démonstration car Arthur formule les conditions de non-ramification un peu différemment de nous.

Preuve. Fixons une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$ de $\hat{G}$ conservée par l'action galoisienne. Il s'en déduit un automorphisme $\hat{\theta}$. Notons $(\hat{B}, \hat{T})$ la paire de Borel sous-jacente à $\hat{\mathcal{E}}$. On peut supposer que $ad_{\tilde{s}}$ conserve cette paire. Posons $\hat{B}' = \hat{B} \cap \hat{G}'$, $\hat{T}' = \hat{T}^{\hat{\theta},0}$. C'est une paire de Borel de $\hat{G}'$ et on peut supposer qu'elle est conservée par l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. Posons

$$\hat{G}_1' = (\hat{G}' \times \hat{T}')/diag(Z(\hat{G}')).$$

Ce groupe est à centre connexe (isomorphe à $\hat{T}'$) et s'insère dans une extension

$$1 \to \hat{G}' \to \hat{G}_1' \to \hat{T}'_{ad} \to 1.$$

Le tore $\hat{T}'_{ad}$ est induit. Alors $\hat{G}_1'$ vérifie les conditions requises pour appliquer le lemme 2.2.A de [16] : l'inclusion $\hat{G}' \to \hat{G}_1'$ se prolonge en un plongement $\hat{\tau} : \mathcal{G}' \to {}^LG_1'$. Remarquons que l'action galoisienne sur $\hat{G}_1'$ est non ramifiée hors de $V_{ram}(\mathbf{G}')$. Appliquons le lemme 3.2 au tore $\hat{T}'$. Soit $\hat{\iota} : {}^LT' \to \mathcal{G}'$ un plongement vérifiant les propriétés de ce lemme. Pour $w \in W_F$, posons $\hat{\tau} \circ \hat{\iota}(w) = (x(w), w)$. Cet élément agit comme w sur $\hat{T}'$, donc $x(w)$ appartient au commutant $\hat{T}_1$ de $\hat{T}'$ dans $\hat{G}'_1$. L'application $w \mapsto x(w)$ est un cocycle de W_F dans $\hat{T}_1$. Pour $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$ et $w \in I_v$, on a $\hat{\iota}(w) = (1, w) \in {}^L G$, donc $\hat{\iota}(w)$ commute à $\hat{G}'$. Donc $(x(w), w)$ puis $x(w)$ commutent aussi à $\hat{G}'$. Il en résulte que $x(w) \in Z(\hat{G}'_1)$. Notons t_3 le composé de x et de la projection $\hat{T}_1 \to \hat{T}_1/Z(\hat{G}'_1)$. Alors t_3 est un cocycle trivial sur I_v pour tout $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$. Puisque $Z(\hat{G}'_1)$ est connexe, on peut appliquer 3.2(2) (on prend pour E la plus petite extension sur laquelle $\hat{T}'$ est déployée et pour U le sous-groupe de W_F engendré par les I_v pour $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$). Il existe donc un cocycle $t_2 : W_F \to \hat{T}_1$ relevant t_3 et non ramifié hors de $V_{ram}(\mathbf{G}')$. Pour $w \in W_F$, posons $\zeta(w) = x(w)^{-1} t_2(w)$. Alors ζ est un cocycle à valeurs dans $Z(\hat{G}'_1)$. Remplaçons le plongement $\hat{\tau}$ par $\hat{\xi}_1$ défini par

$$\hat{\xi}_1(g, w) = \zeta(w)\hat{\tau}(g, w)$$

pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$. On a alors $\hat{\xi}_1 \circ \hat{\iota}(w) = (t_2(w), w)$ pour tout $w \in W_F$. Pour $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$ et $w \in I_v$, on a $\hat{\iota}(w) = w$ et $t_2(w) = 1$, donc $\hat{\xi}_1(w) = w$. C'est-à-dire que $\hat{\xi}_1$ est l'identité sur I_v. On prend pour G'_1 le groupe quasi-déployé sur F dont $\hat{G}'_1$ est le groupe dual. Alors les deux premières conditions du lemme sont satisfaites. La condition de non-ramification de λ_1 résulte formellement de ces deux premières conditions.

La définition d'un espace tordu $\tilde{G}'_1$ ne pose pas de problème. On fixe $\gamma \in \tilde{G}'(F)$. L'automorphisme ad_γ se relève en un automorphisme θ_1 de G'_1 qui est défini sur F. On prend pour $\tilde{G}'_1$ le sous-ensemble $G'_1 \times \{\theta_1\}$ du produit semi-direct de G'_1 avec son groupe d'automorphismes. La projection $\tilde{G}'_1 \to \tilde{G}'$ est définie en envoyant θ_1 sur γ.

Les données auxiliaires que l'on vient de construire ne sont pas forcément unitaires. Mais cette condition est facile à assurer. Soit b^+ un cocycle de W_F dans $Z(\hat{G}'_1)$ auquel est associé le caractère $\lambda^+_{G'_1}$. Parce que $\lambda^+_{G'_1}$ est à valeurs réelles positives, on peut choisir b^+ à valeurs dans la partie réelle positive du tore complexe $Z(\hat{G}'_1)^{\Gamma_F, 0}$ (cf. [I] 7.1). Alors b^+ est unique, c'est un caractère et il est non ramifié en toute place finie. On définit le plongement $\hat{\xi}'_1 : \mathcal{G}' \to {}^L G'_1$ par $\hat{\xi}'_1(g, w) = b^+(w)^{-1}\hat{\xi}_1(g, w)$. Les données G'_1,..., $\hat{\xi}'_1$ vérifient encore les conditions requises de non-ramification et sont de plus unitaires. $\square$

Dans la suite, toutes les données auxiliaires seront supposées unitaires sans qu'il soit besoin de l'indiquer. Soit V un ensemble fini de places de F contenant $V_{ram}(\mathbf{G}')$. Soient G'_1 etc... des données auxiliaires telles que les conditions de l'énoncé soient satisfaites pour $v \notin V$. Pour $v \notin V$, le sous-groupe hyperspécial K'_v de $G'(F_v)$ détermine un tel sous-groupe $K'_{1,v}$ de $G'_1(F_v)$. On fixe un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}'_{1,v}$ de $\tilde{G}'_1(F_v)$ au-dessus de $\tilde{K}'_v$. On suppose que ces sous-espaces vérifient la même condition de compatibilité globale qu'en 1.1. On adjoint cette famille de sous-espaces hyperspéciaux aux données auxiliaires et on appelle données auxiliaires non ramifiées hors de V les données G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$, $(\tilde{K}'_{1,v})_{v \notin V}$. Si V' est un autre ensemble fini de places contenant V, des données auxiliaires non ramifiées hors de V se restreignent en des données non ramifiées hors de V' en oubliant les $\tilde{K}'_{1,v}$ pour $v \in V' - V$.

Considérons deux séries de données auxiliaires G'_1 etc... et G'_2 etc... non ramifiées hors de V. On définit comme en [I] 2.5 le produit fibré G'_{12} de G'_1 et G'_2 au-dessus de G' et le produit fibré analogue $\tilde{G}'_{12}$. Toujours comme en [I] 2.5, on définit un caractère λ_{12} qui est cette fois un caractère de $G'_{12}(\mathbb{A})$ trivial sur $G'_{12}(F)$. Il est non ramifié hors de V, donc trivial sur $K'_{1,v}$ pour $v \notin V$.

Comme en 1.15, on déduit de λ_{12} des fonctions $\tilde{\lambda}_{12}$ sur $\tilde{G}'_{12}(\mathbb{A}_F)$, $\tilde{\lambda}_{12,v}$ sur $\tilde{G}'_{12}(F_v)$ pour $v \notin V$ et $\tilde{\lambda}_{12,V}$ sur $\tilde{G}'_{12}(F_V)$. Cette dernière fonction permet de recoller les espaces

$C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))$ et $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_2(F_V))$: à $f_1 \in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))$, on associe $f_2 \in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_2(F_V))$ telle que $f_2(\delta_2) = \tilde{\lambda}_{12,V}(\delta_1,\delta_2)f_1(\delta_1)$ où δ_1 est n'importe quel élément de $\tilde{G}'_1(F_V)$ tel que $(\delta_1,\delta_2) \in \tilde{G}'_{12}(F_V)$. Ce recollement vérifie une propriété de transitivité évidente qui permet de définir un espace $C^\infty_c(\mathbf{G}'_V)$ comme la limite inductive des $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))$ sur les données G'_1,...,$(\tilde{K}'_{1,v})_{v\not\in V}$ non ramifiées hors de V, les applications de transition étant celles que l'on vient de définir. Cette définition pose le même problème logique que dans le cas local, que l'on peut lever comme dans ce cas, cf. [I] 2.5. On définit de même les espaces $I(\mathbf{G}'_V)$ et $SI(\mathbf{G}'_V)$. De nouveau, si V' est un ensemble fini de places contenant V, les espaces $C^\infty_c(\mathbf{G}'_V)$ etc... s'identifient à des sous-espaces de $C^\infty_c(\mathbf{G}'_{V'})$ etc...

3.4 Levi

Les relations entre données endoscopiques d'espaces de Levi de $\tilde{G}$ et groupes de Levi de données endoscopiques de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ sont essentiellement les mêmes dans le cas global que dans le cas local, cf. [I] paragraphes 3.2, 3.3 et 3.4. Signalons l'analogue global de la relation 3.2(2) de [I]. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On réalise $\hat{M}$ comme Levi standard de $\hat{G}$ comme dans cette référence. Alors l'homomorphisme

$$H^1(W_F,Z(\hat{G}))/ker^1(W_F,Z(\hat{G})) \to H^1(W_F,Z(\hat{M}))/ker^1(W_F,Z(\hat{M}))$$

est injectif ([11], lemme 2).

Soit $\mathbf{G}' = (G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. On suppose $\tilde{G}'(F) \neq \emptyset$. Soit M' un Levi de G' contenant M'_0, dont on déduit un espace de Levi $\tilde{M}'$. Puisque $\tilde{G}'$ est à torsion intérieure, $\tilde{M}'$ est l'ensemble des $\gamma \in \tilde{G}$ tels qu'il existe $m \in M$ de sorte que $ad_\gamma = ad_m$. Pour une place $v \not\in V_{ram}(\mathbf{G}')$, on définit le sous-groupe hyperspécial $K^{M'}_v = M'(F_v) \cap K'_v$ et l'espace hyperspécial $\tilde{K}^{M'}_v = \tilde{M}'(F_v) \cap \tilde{K}'_v$. On construit comme en [I] 3.4 un sous-groupe $\mathcal{M}' \subset \mathcal{G}'$ qui est une extension de $\hat{M}'$ par W_F. On pose $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{s})$. Il peut exister un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ de sorte que $\mathbf{M}'$ s'identifie à une donnée endoscopique de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. Mais, comme dans le cas local, un tel espace de Levi n'existe pas toujours. Toutefois, indépendamment de l'existence d'un tel espace, pour un ensemble fini de places V contenant $V_{ram}(\mathbf{G}')$, on peut définir des espaces $C^\infty_c(\mathbf{M}'_V)$, $I(\mathbf{M}'_V)$ etc... En effet, on n'a pas besoin qu'il existe un espace $\tilde{M}$ pour définir la notion de données auxiliaires de $\mathbf{M}'$ non ramifiées hors de V ni pour définir des fonctions de recollement $\tilde{\lambda}_{12}$. Et cela suffit pour définir les espaces précédents.

Soit $\tilde{M}'$ un espace de Levi de $\tilde{G}'$. On doit fixer une mesure sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}'}$ (qui est d'ailleurs égal à $\mathcal{A}_{M'}$ puisque la torsion sur $\tilde{G}'$ est intérieure). Comme on vient de le dire, $\tilde{M}'$ peut correspondre ou non à un espace de Levi $\tilde{M}$. Dans le cas où $\tilde{M}'$ ne correspond à aucun espace de Levi $\tilde{M}$, la mesure sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}'}$ ne nous importera pas, on la choisit arbitrairement. Dans le cas où $\tilde{M}'$ correspond à un espace de Levi $\tilde{M}$, on a un isomorphisme naturel $\mathcal{A}_{\tilde{M}'} \simeq \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et on choisit la mesure sur le premier espace qui correspond par cet isomorphisme à celle fixée sur le second. L'espace de Levi $\tilde{M}$ n'est bien défini qu'à conjugaison près, mais notre définition est insensible à une telle conjugaison.

3.5 La partie géométrique de la formule des traces invariante pour une donnée endoscopique

Soit $\mathbf{G}' = (G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. On suppose $\tilde{G}'(F) \neq \emptyset$. Soit V un ensemble fini de places de F contenant $V_{ram}(\mathbf{G}')$. Fixons des données auxiliaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$, $(\tilde{K}'_{1,v})_{v\notin V}$ non ramifiées hors de V. On construit comme en 2.8 une distribution $\mathbf{f}_V \mapsto I^{\tilde{G}'_1}_{géom,\lambda_1}(\mathbf{f}_V)$ sur $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))\otimes Mes(G'(F_V))$. Pour $\mathcal{O} \in \tilde{G}'_{ss}(F)/conj$, on construit une distribution $A^{\tilde{G}'_1}_{\lambda_1}(V,\mathcal{O}) \in D_{orb,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))\otimes Mes(G'(F_V))^*$. Si on change de données auxiliaires, le lemme 2.6 et la relation 2.8(3) disent que ces distributions se recollent selon l'isomorphisme défini au paragraphe précédent. On peut donc les considérer comme des distributions sur les espaces $C^\infty_c(\mathbf{G}'_V)\otimes Mes(G'(F_V))$. On les note alors $I^{\mathbf{G}'}_{géom}$ et $A^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O})$. Soit $M' \in \mathcal{L}(M'_0)$. Notons $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{s})$ la donnée introduite dans le paragraphe précédent. On a une forme bilinéaire sur

$$(D_{orb,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F_V)) \otimes Mes(M'(F_V))^*) \times (C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V)) \otimes Mes(G'(F_V)))$$

qui, à $(\boldsymbol{\gamma}_V,\mathbf{f}_V)$, associe $I^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}'_1,\lambda_1}(\boldsymbol{\gamma}_V,\mathbf{f}_V)$. Comme ci-dessus, quand on change de données auxiliaires, ces formes linéaires se recollent. On obtient une forme bilinéaire

$$(\boldsymbol{\gamma}_V,\mathbf{f}_V) \mapsto I^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\gamma}_V,\mathbf{f}_V)$$

sur

$$(D_{orb}(\mathbf{M}'_V) \otimes Mes(M'(F_V))^*) \times (C^\infty_c(\mathbf{G}'_V) \otimes Mes(G'(F_V))).$$

Il résulte de 2.8(1) que l'on a l'égalité

$$I^{\mathbf{G}'}_{géom}(\mathbf{f}_V) = \sum_{\tilde{M}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0)} |W^{\tilde{M}'}||W^{\tilde{G}'}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}\in\tilde{M}'_{ss}(F_V)/conj} I^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(A^{\mathbf{M}'}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f}_V)$$

pour tout $\mathbf{f}_V \in C^\infty_c(\mathbf{G}'_V) \otimes Mes(G'(F_V))$.

3.6 Facteur de transfert global, cas particulier

Soit $\mathbf{G}' = (G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Rappelons que, puisque $\tilde{G}'$ est à torsion intérieure, à tout tore maximal T' de G' défini sur F est associé un unique tore tordu $\tilde{T}'$, à savoir l'ensemble des $\delta \in \tilde{G}'$ qui commutent à tout élément de T'. On peut toutefois avoir $\tilde{T}'(F) = \emptyset$. On impose dans ce paragraphe l'hypothèse

(Hyp) *il existe un sous-tore maximal T' de G', défini sur F, de sorte que, pour toute place v de F, il existe un couple $(\delta_v,\gamma_v) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}'_v)$ avec $\delta_v \in \tilde{T}'(F_v)$.*

Fixons un tel tore T'. On fixe pour tout $v \in Val(F)$ un couple $(\delta_v,\gamma_v) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}'_v)$ avec $\delta_v \in \tilde{T}'(F_v)$. Nous allons imposer à ces couples des conditions de "non-ramification". On impose d'abord

(1) $\delta_v \in \tilde{K}'_v$ et $\gamma_v \in \tilde{K}_v$ pour presque tout v.

Considérons une place finie v. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_v = (B_v,T_v,(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G telle que (B_v,T_v) soit conservée par ad_{γ_v}. Ecrivons $\gamma_v = t_ve_v$ avec $e_v \in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ et $t_v \in T_v$. Rappelons que l'on note $\Sigma(T_v)$ l'ensemble des racines de T_v dans $\mathfrak{g}$, F^{nr}_v la plus grande extension non ramifiée de F_v, $\mathfrak{o}^{nr}_v$ son anneau d'entiers et $\mathfrak{o}^{nr,\times}_v$ le groupe des unités. Notons aussi $\mathbb{F}_v$ le corps résiduel de $\mathfrak{o}_v$ et $\bar{\mathbb{F}}_v$ sa clôture algébrique, qui est aussi le corps résiduel de $\mathfrak{o}^{nr}_v$. Avec ces notations, on impose

(2) pour presque toute place finie v et pour tout $\alpha \in \Sigma(T_v)$, on a $(N\alpha)(t_v) \in \mathfrak{o}^{nr,\times}_v$ et la réduction de $(N\alpha)(t_v)$ dans $\bar{\mathbb{F}}_v$ est différente de ±1.

Cette condition ne dépend pas des choix de $\mathcal{E}_v$ et de e_v. En effet, on ne peut changer e_v qu'en le multipliant par un élément de $Z(G)$. Cela multiplie t_v par l'inverse de cet élément, ce qui ne change pas les $(N\alpha)(t_v)$. Remplaçons $\mathcal{E}_v$ par une autre paire de Borel épinglée $\mathcal{E}'_v$ dont la paire de Borel sous-jacente est conservée par ad_{γ_v}. Le tore T_v reste le même : puisque γ_v est fortement régulier, c'est le commutant de G_{γ_v} dans G. Soit $x \in G$ tel que $ad_x(\mathcal{E}_v) = \mathcal{E}'_v$. Alors ad_x conserve T_v. D'après [I] 1.3(2), l'image de x dans W (identifié au groupe de Weyl de G pour T_v) est invariante par $\theta = ad_{e_v}$. Un tel élément se relève dans le groupe G_{e_v}. On peut donc écrire $x = \tau y$ avec $\tau \in T_v$ et $y \in G_{e_v}$. Alors $e'_v = ad_\tau(e_v) = (1-\theta)(\tau)e_v \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}'_v)$. On peut prendre pour décomposition relative à $\mathcal{E}'_v$ l'égalité $\gamma_v = t'_v e'_v$ où $t'_v = (\theta - 1)(\tau)t_v$. Puisque $(N\alpha)((\theta-1)(\tau)) = 1$, on voit que la condition (2) ne change pas.

Nous montrerons plus loin qu'il existe des familles $(\delta_v)_{v \in Val(F)}$ et $(\gamma_v)_{v \in Val(F)}$ vérifiant les deux conditions (1) et (2) ci-dessus.

Fixons un ensemble fini V de places de F contenant $V_{ram}(\mathbf{G}')$, ainsi que des données auxiliaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$, $(\tilde{K}'_{1,v})_{v \notin V}$, non ramifiées hors de V. On fixe pour tout v un relèvement $\delta_{1,v} \in \tilde{G}'_1(F_v)$ de δ_v. La condition (1) permet d'imposer que $\delta_{1,v} \in \tilde{K}'_{1,v}$ pour presque tout v.

Posons $\delta_1 = (\delta_{1,v})_{v \in Val(F)}$, $\delta = (\delta_v)_{v \in Val(F)}$, $\gamma = (\gamma_v)_{v \in Val(F)}$. Ce sont des éléments de $\tilde{G}'_1(\mathbb{A}_F)$, resp. $\tilde{G}'(\mathbb{A}_F)$, $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$. Nous allons définir un facteur de transfert global $\Delta(\delta_1, \gamma)$.

On fixe un sous-groupe de Borel B' de G', défini sur $\bar{F}$ et contenant T'. Identifions <u>la</u> paire de Borel épinglée de G à une telle paire $\mathcal{E}^* = (B^*, T^*, (E^*_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ définie sur $\bar{F}$. On fixe une application $\sigma \mapsto u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)$ à valeurs dans $G_{SC}(\bar{F})$, de sorte que $ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ \sigma$ conserve $\mathcal{E}^*$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On peut supposer que cette application est continue, qu'elle se factorise par un quotient fini de Γ_F et que $u_{\mathcal{E}^*}(1) = 1$. On construit une action quasi-déployée de Γ_F sur G notée $\sigma \mapsto \sigma_{G^*} = ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ \sigma$ (on note simplement $\sigma \mapsto \sigma$ l'action naturelle de Γ_F sur G). Des deux paires de Borel se déduit un homomorphisme $\xi_{T^*,T'} : T^* \to T'$. Il existe un cocycle $\omega_T : \Gamma_F \to W^\theta$ de sorte que $\xi_{T^*,T'} \circ \omega_T(\sigma) \circ \sigma_{G^*} = \sigma_{G'} \circ \xi_{T^*,T'}$ sur T^* pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Fixons de plus $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*; \bar{F})$ et posons $\theta^* = ad_e$. D'après [13] corollaire 2.2, on peut trouver $x \in G^{\theta^*}_{SC}(\bar{F})$ tel que, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, $x\sigma_{G^*}(x)^{-1}$ normalise T^* et ait pour image $\omega_T(\sigma)$ dans W. On note T le tore T^* muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_T = \omega_T(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$.

Fixons une extension galoisienne finie E de F telle que

- B' et T' soient définis sur E et T' soit déployé sur E ;
- $\mathcal{E}^*$ soit définie sur E (pour l'action galoisienne naturelle) et T^* soit déployé sur E ;
- $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*; E)$, $x \in G^{\theta^*}_{SC}(E)$;
- l'application $\sigma \mapsto u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)$ se factorise par $Gal(E/F)$ et, pour tout $\sigma \in Gal(E/F)$, on a $u_{\mathcal{E}^*}(\sigma) \in G_{SC}(E)$.

Il en résulte que l'action galoisienne quasi-déployée et l'action naturelle coïncident sur Γ_E. On a $u_{\mathcal{E}^*}(\sigma) = 1$ pour $\sigma \in \Gamma_E$. La paire de Borel (B^*, T^*) est aussi définie sur E et les tores T^* et T sont déployés sur E. Rappelons que, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, il existe un unique $z(\sigma) \in Z(G; \bar{F})$ tel que $\sigma_{G^*}(e) = z(\sigma)^{-1}e$. L'application $\sigma \mapsto z(\sigma)$ se factorise par $Gal(E/F)$ et prend ses valeurs dans $Z(G; E)$.

On note $\mathbb{A}_E$ l'anneau des adèles de E. Le groupe $Gal(E/F)$ agit sur $\mathbb{A}_E$. Pour tout groupe algébrique H défini sur F, le groupe $Gal(E/F)$ agit sur $H(\mathbb{A}_E)$. Soit $v \in Val(F)$, posons $E_v = \prod_{w|v} E_w$ où w parcourt les places de E divisant v. Alors le groupe $Gal(E/F)$ agit sur E_v. Pour tout groupe algébrique H_v défini sur F_v, le groupe $Gal(E/F)$ agit sur $H_v(E_v)$.

Soit $v \in Val(F)$. Comme on l'a dit en 1.1, notre notion de localisation en v dépend du choix d'un prolongement $\bar{v}$ de v à $\bar{F}$. Le corps $\bar{F}_v$ est la clôture algébrique de F_v dans le complété de $\bar{F}$ en $\bar{v}$. Par abus de notation, notons-le plus précisément $\bar{F}_{\bar{v}}$. Le groupe

Γ_{F_v} est le fixateur de $\bar{v}$ dans Γ_F, notons-le plus précisément $\Gamma_{\bar{v}}$. Ici, parce que l'on va travailler avec le corps E, on va devoir faire varier $\bar{v}$. Notons w la restriction de $\bar{v}$ à E. En reprenant la preuve du lemme 1.10 de [I], on voit que pour tout $v \in Val(F)$, on peut fixer un diagramme $(\delta_v, B', T', B_w, T_v, \gamma_v)$ où (B', T') est la paire déjà fixée. Le groupe B_w est défini sur $\bar{F}_{\bar{v}}$ et la condition d'équivariance du diagramme est relative à $\Gamma_{\bar{v}}$.

Remarques. (3) Ce diagramme est unique. En effet, comme on l'a déjà dit, T_v est uniquement déterminé et B_w est en tout cas bien déterminé modulo l'action de W^θ (en identifiant W au groupe de Weyl de G relatif à T_v). Du diagramme se déduit un homomorphisme $\xi_{T_v,T'} : T_v \to T'$, puis une application

$$\tilde{\xi}_{T_v,T'} : (T_v/(1-\theta)(T_v)) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G}) \to T' \times_{\mathcal{Z}(G')} \mathcal{Z}(\tilde{G}').$$

Cette application doit envoyer l'image de γ_v dans l'espace de départ sur l'image de δ_v dans l'espace d'arrivée. Si l'on remplace B_w par $\omega(B_w)$, avec $\omega \in W^\theta$, $\tilde{\xi}_{T_v,T'}$ est remplacé par $\tilde{\xi}_{T_v,T'} \circ \omega^{-1}$. La forte régularité de γ_v et la propriété [I] 1.3(5) entraînent que cette nouvelle application ne vérifie plus la propriété précédente, sauf si $\omega = 1$.

(4) Fixons $g \in G$ tel que $ad_g(B_w, T_v) = (B^*, T^*)$. Alors ad_g identifie T_v au tore T, plus exactement à son localisé en la place v.

Soit w' une autre place de E au-dessus de v. Fixons $\tau \in \Gamma_F$ tel que $\tau(w) = w'$. Notons $\bar{v}'$ l'image de $\bar{v}$ par τ. L'élément τ définit naturellement un isomorphisme de $\bar{F}_{\bar{v}}$ sur $\bar{F}_{\bar{v}'}$ et, pour tout groupe algébrique H_v défini sur F_v, un isomorphisme de $H_v(\bar{F}_{\bar{v}})$ sur $H_v(\bar{F}_{\bar{v}'})$. On note encore τ ces isomorphismes. Puisque T_v et γ_v sont définis sur F_v donc invariants par τ, le couple $(\tau(B_w), T_v)$ est une paire de Borel de G définie sur $\bar{F}_{\bar{v}'}$ et conservée par ad_{γ_v}. En identifiant grâce à cette paire le groupe de Weyl W au groupe de Weyl de T_v, on définit le sous-groupe de Borel $B_{w'} = \omega_T(\tau)^{-1}\tau(B_w)$. Puisque $\omega_T(\tau) \in W^\theta$, la paire $(B_{w'}, T_v)$ est encore conservée par ad_{γ_v}, cf. [I] 1.3(2). Montrons que

(5) le sextuplet $(\delta_v, B', T', B_{w'}, T_v, \gamma_v)$ est un diagramme, le corps $\bar{F}_v$ étant identifié à $\bar{F}_{\bar{v}'}$.

Preuve. Les tores T' et T_v sont déployés sur E_w. Cela implique que le groupe de Borel B_w est défini sur E_w (B' aussi, mais c'est déjà dans l'hypothèse sur E). Les deux paires de Borel (B_w, T_v) et (B^*, T^*) étant toutes deux définies sur E_w, on peut fixer $g_w \in G_{SC}(E_w)$ tel que $ad_{g_w}(B_w, T_v) = (B^*, T^*)$. Posons $g_{w'} = x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(g_w)$. C'est un élément de $G_{SC}(E_{w'})$. Montrons que

(6) on a l'égalité $ad_{g_{w'}}(B_{w'}, T_v) = (B^*, T^*)$.

Puisque $ad_{g_w}(B_w, T_v) = (B^*, T^*)$, on a $ad_{\tau(g_w)}(\tau(B_w), T_v) = \tau(B^*, T^*)$. Donc

$$ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(g_w)}(\tau(B_w), T_v) = ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\tau)} \circ \tau(B^*, T^*) = \tau_{G^*}(B^*, T^*) = (B^*, T^*).$$

C'est donc l'isomorphisme $ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(g_w)}$ qui identifie comme plus haut le groupe de Weyl W au groupe de Weyl de T_v. C'est-à-dire que $B_{w'}$ est le groupe de Borel tel que

$$ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(g_w)}(B_{w'}, T_v) = \omega_T(\tau)^{-1} ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(g_w)}(\tau(B_w), T_v) = \omega_T(\tau)^{-1}(B^*, T^*).$$

D'où

$$\omega_T(\tau) ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(g_w)}(B_{w'}, T_v) = (B^*, T^*).$$

Puisque $x\tau_{G^*}(x)^{-1}$ a pour image $\omega_T(\tau)$ dans W, on peut remplacer dans l'égalité ci-dessus $\omega_T(\tau)$ par $ad_{x\tau_{G^*}(x)^{-1}}$ et on obtient (6).

Aux choix des paires de Borel (B', T') et (B_w, T_v), resp. $(B_{w'}, T_v)$, sont associés des homomorphismes de T_v dans T' notés précisément $\xi_{B_w,T_v,B',T'}$ et $\xi_{B_{w'},T_v,B',T'}$. Montrons qu'ils vérifient la relation

(7) $\xi_{B_{w'},T_v,B',T'} \circ \tau = \tau \circ \xi_{B_w,T_v,B',T'}$.

Les deux homomorphismes sont les restrictions à T_v de $\xi_{T^*,T'} \circ ad_{g_{w'}}$, resp. $\xi_{T^*,T'} \circ ad_{g_w}$. Par définition de $g_{w'}$, on a

$$ad_{g_{w'}} \circ \tau = \omega_T(\tau) \circ \tau_{G^*} \circ ad_{g_w}.$$

Par définition de $\omega_T(\tau)$, on a aussi

$$\xi_{T^*,T'} \circ \omega_T(\tau) \circ \tau_{G^*} = \tau \circ \xi_{T^*,T'}.$$

La relation (7) en résulte.

Pour prouver (5), on doit d'abord montrer que l'homomorphisme $\xi_{B_{w'},T_v,B',T'} : T_v \to T'$ est équivariant pour l'action de $\Gamma_{\bar{v}'}$. Pour $\sigma \in \Gamma_{\bar{v}'}$, on a

$$\xi_{B_{w'},T_v,B',T'} \circ \sigma = \xi_{B_{w'},T_v,B',T'} \circ \tau \circ (\tau^{-1}\sigma\tau) \circ \tau^{-1} = \tau \circ \xi_{B_w,T_v,B',T'} \circ (\tau^{-1}\sigma\tau) \circ \tau^{-1}.$$

Mais $\tau^{-1}\sigma\tau$ appartient à $\Gamma_{\bar{v}}$. En utilisant l'équivariance de $\xi_{B_w,T_v,B',T'}$, on obtient

$$\xi_{B_{w'},T_v,B',T'} \circ \sigma = \tau \circ (\tau^{-1}\sigma\tau) \circ \xi_{B_w,T_v,B',T'} \circ \tau^{-1} = \sigma \circ \tau \circ \xi_{B_w,T_v,B',T'} \circ \tau^{-1} = \sigma \circ \xi_{B_{w'},T_v,B',T'}$$

comme on le voulait.

On doit aussi prouver que l'application déduite

$$\tilde{\xi}_{B_{w'},T_v,B',T'} : (T_v/(1-\theta)(T_v)) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G}) \to T' \times_{\mathcal{Z}(G')} \mathcal{Z}(\tilde{G}')$$

envoie l'image de γ_v dans l'espace de départ sur l'image de δ_v dans l'espace d'arrivée. La définition de l'action galoisienne sur $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ permet d'étendre la relation (7) à ces applications, c'est-à-dire que l'on a la relation

$$\tilde{\xi}_{B_{w'},T_v,B',T'} \circ \tau = \tau \circ \tilde{\xi}_{B_w,T_v,B',T'}.$$

Puisque $\tilde{\xi}_{B_w,T_v,B',T'}$ envoie l'image de γ_v sur celle de δ_v et puisque les éléments γ_v et δ_v sont tous deux invariants par τ, la relation ci-dessus implique l'assertion cherchée. Cela prouve (5). $\square$

Définissons un homomorphisme

$$\xi_{T_v,T'} : T_v(E_v) = \prod_{w'|v} T_v(E_{w'}) \to T'(E_v) = \prod_{w'|v} T'(E_{w'})$$

comme le produit sur les w' divisant v des homomorphismes $\xi_{B_{w'},T_v,B',T'}$. On a

(8) $\xi_{T_v,T'}$ est équivariant pour les actions de $Gal(E/F)$.

Cela résulte de ce que, pour tout w', l'homomorphisme $\xi_{B_{w'},T_v,B',T'}$ est équivariant pour l'action de $\Gamma_{\bar{v}'}$ et que l'on a la relation (7) ci-dessus.

Soit $v \in Val(F)$ telle que $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$ et v soit non-ramifiée dans E. Rappelons que le sous-groupe compact hyperspécial K_v est attaché à un schéma en groupes $\mathcal{K}_v$ défini sur l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_v$ de F_v. Si w' est une place de E au-dessus de v, posons $K_{w'} = \mathcal{K}_v(\mathfrak{o}_{w'})$ et $\tilde{K}_{w'} = K_{w'}\tilde{K}_v$. Alors $K_{w'}$ est un sous-groupe compact hyperspécial de $G(E_{w'})$ et $\tilde{K}_{w'}$ est un sous-espace hyperspécial de $\tilde{G}(E_{w'})$. On note aussi $K_v^{nr} =$

$\mathcal{K}_v(\mathfrak{o}_v^{nr})$, F_v^{nr} étant identifié à une extension de $E_{w'}$. De K_v se déduisent des sous-groupes hyperspéciaux $K_{v,sc}$ de $G_{SC}(F_v)$ et $K_{v,ad}$ de $G_{AD}(F_v)$ et on utilise pour ces groupes des notations similaires. On peut fixer un ensemble fini V' de places de F, contenant V et les places ramifiées dans E, de sorte que, pour $v \not\in V'$ et pour toute place w' de E au-dessus de v, on ait :

- la condition (2) est vérifiée pour v ;

(9) $K_{w'}$ est le sous-groupe compact hyperspécial issu de la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$;

(10) $e \in \tilde{K}_{w'}$, $x \in K_{w'}$ et, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, $u_{\mathcal{E}^*}(\sigma) \in K_{w'}$ et $z(\sigma) \in K_{w'}$.

Montrons que

(11) pour $v \not\in V'$ et pour toute place w' de E au-dessus de v, il existe $g_{w'} \in K_{w',sc}$ tel que $ad_{g_{w'}}(B_{w'}, T_v) = (B^*, T^*)$.

Preuve. On ne perd rien ici à supposer $w' = w$ (qui est la restriction de $\bar{v}$ à E). Fixons un entier $N \geq 1$ tel que $(\theta^*)^N = 1$. L'hypothèse $v \not\in V_{ram}$ assure que l'on peut prendre N premier à la caractéristique résiduelle p de F_v. Introduisons le groupe non connexe $G^+ = G \rtimes \{1, \theta^*, ..., (\theta^*)^{N-1}\}$ défini sur E_w. L'espace $\tilde{G}$ s'identifie à la composante $G\theta^*$: pour $g \in G$, ge s'identifie à $g\theta^*$. Le sous-espace $\tilde{K}_w$ s'identifie à $K_w\theta^*$. Dans cette situation, on a défini en [W] 5.2 la notion d'élément compact de $\tilde{G}(E_w)$: un élément est compact si et seulement si le sous-groupe qu'il engendre dans $G^+(E_w)$ est d'adhérence compacte. Puisque $\gamma_v \in \tilde{K}_v \subset K_w\theta^*$ et que $K_w \rtimes \{1, \theta^*, ..., (\theta^*)^{N-1}\}$ est un groupe compact, l'élément γ_v est compact. D'après [W] 5.2, on peut décomposer γ_v en $u\gamma_{v,p'}$, où $\gamma_{v,p'}$ est d'ordre fini premier à p et u est topologiquement unipotent. Ces éléments appartiennent à l'adhérence du groupe engendré par γ_v et sont définis sur F_v. Comme on vient de le voir, l'intersection de cette adhérence avec $\tilde{G}$, resp. G, est contenue dans $\tilde{K}_w$, resp. K_w. Donc $\gamma_{v,p'} \in \tilde{K}_v$ et $u \in K_v$. Les éléments u et $\gamma_{v,p'}$ commutent entre eux et commutent donc à γ_v. Cela entraîne que $u \in Z_G(\gamma_v; F_v) = T_v^\theta(F_v)$. Ecrivons $\gamma_v = t_v e_v$ comme dans la relation (2). Alors $\gamma_{v,p'} = u^{-1}t_v e_v$. Puisque u est topologiquement unipotent, les valeurs de $(N\alpha)(u)$ sont des éléments de $\mathfrak{o}_w$ de réduction 1 dans le corps résiduel $\mathbb{E}_w$ de $\mathfrak{o}_w$. Alors la relation (2) est encore vérifiée par $\gamma_{v,p'}$, a fortiori $\gamma_{v,p'}$ est régulier. Le lemme [W] 5.4 implique l'existence de $k \in K_v^{nr}$ tel que $ad_k(\gamma_{v,p'}) \in T^*e$. Puisqu'il s'agit d'éléments réguliers, on a automatiquement l'égalité $ad_k(T_v) = T^*$. Donc aussi $ad_k(\gamma_v) \in T^*e$. L'automorphisme ad_k envoie B_w sur un groupe de Borel contenant T^* et conservé par θ^*. Un tel groupe est de la forme $\omega(B^*)$, où $\omega \in W^\theta$. Relevons ω en un élément $h \in K_w \cap G_e$. En remplaçant k par $h^{-1}k$, on obtient l'égalité $ad_k(B_w, T_v) = (B^*, T^*)$. Les théorèmes de structure de Bruhat-Tits entraînent que tout élément de K_v^{nr} est produit d'un élément de $T^*(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et d'un élément de $K_{v,sc}^{nr}$. Quitte à multiplier k à gauche par un élément de $T^*(\mathfrak{o}_v^{nr})$, on peut supposer $k \in K_{v,sc}^{nr}$. La relation (4) entraîne que $ad_k : T_v \to T^*$ est équivariant pour l'action de Γ_{E_w}. Pour $\sigma \in Gal(F_v^{nr}/E_w)$, on a donc $k\sigma(k)^{-1} \in T_{sc}^* \cap K_{v,sc}^{nr} = T_{sc}^*(\mathfrak{o}_v^{nr})$. On obtient un cocycle de $Gal(F_v^{nr}/E_w)$ dans $T_{sc}^*(\mathfrak{o}_v^{nr})$. Un tel cocycle est un cobord. Cela signifie que, quite à multiplier k à gauche par un élément de $T_{sc}^*(\mathfrak{o}_v^{nr})$, on peut supposer $k\sigma(k)^{-1} = 1$ pour tout $\sigma \in Gal(F_v^{nr}/E_w)$. Autrement dit $k \in K_{w,sc}$. Cela prouve (11). $\square$

Pour toute place w' de E, on introduit le diagramme $(\delta_v, B', T', B_{w'}, T_v, \gamma_v)$ qui est unique d'après (3). On introduit un élément $g_{w'} \in G_{SC}(E_{w'})$ tel que $ad_{g_{w'}}(B_{w'}, T_v) = (B^*, T^*)$. On suppose $g_{w'} \in K_{w',sc}$ pour toute place w' au-dessus d'une place $v \not\in V'$. On pose $g = (g_{w'})_{w' \in Val(E)}$. C'est un élément de $G_{SC}(\mathbb{A}_E)$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, posons

$$V_T(\sigma) = x\sigma_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(g)g^{-1}.$$

En utilisant la relation (8), on voit facilement que $V_T(\sigma)$ appartient à $T_{sc}(\mathbb{A}_E)$ (c'est-à-dire $T^*_{sc}(\mathbb{A}_E)$ muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_T$). Le cobord de la cochaîne V_T est égal à celui de $\sigma \mapsto u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)$ donc prend ses valeurs dans $T_{sc}(E)$. En poussant V_T en une cochaîne à valeurs dans $T_{sc}(\mathbb{A}_E)/T_{sc}(E)$, V_T devient un cocycle. On peut le considérer comme un cocycle de Γ_F dans $T_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/T_{sc}(\bar{F})$, où $\mathbb{A}_{\bar{F}}$ est la limite inductive des $\mathbb{A}_{E'}$ sur les extensions finies E' de F. Comme en [I] 2.2, notons $\mathcal{T}_1$ le produit fibré de T'_1 et T au-dessus de T'. Il est muni de l'action galoisienne produit de l'action naturelle sur T'_1 et de l'action $\sigma \mapsto \sigma_T$ sur T. Notons e' l'image naturelle de e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}') \subset \tilde{G}'$ et fixons un relèvement e'_1 de e' dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}'_1, E)$. Ecrivons $g\gamma g^{-1} = \nu e$, $\delta_1 = \mu_1 e'_1$. On a $\nu \in T(\mathbb{A}_E)$, $\mu_1 \in T'_1(\mathbb{A}_E)$. On note ν_1 l'image de (μ_1, ν) dans $\mathcal{T}_1(\mathbb{A}_{\bar{F}})/\mathcal{T}_1(\bar{F})$. Pour deux tores S_1 et S_2 définis sur F et pour un homomorphisme $f : S_1 \to S_2$ défini sur F, on note selon l'usage $H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_1 \xrightarrow{f} S_2)$ le groupe $H^{1,0}(\Gamma_F; S_1(\mathbb{A}_{\bar{F}})/S_1(\bar{F}) \xrightarrow{f} S_2(\mathbb{A}_{\bar{F}})/S_1(\bar{F}))$, c'est-à-dire la limite inductive des $H^{1,0}(Gal(E'/F); S_1(\mathbb{A}_{E'})/S_1(E') \xrightarrow{f} S_2(\mathbb{A}_{E'})/S_2(E'))$ sur les extensions galoisiennes finies E' de F. On note aussi $Z^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_1 \xrightarrow{f} S_2)$ l'ensemble de cocycles correspondant. On vérifie que le couple (V_T, ν_1) appartient à $Z^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T_{sc} \xrightarrow{1-\theta} \mathcal{T}_1)$. Sa classe dans $H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T_{sc} \xrightarrow{1-\theta} \mathcal{T}_1)$ ne dépend pas du choix de l'élément g : on ne peut changer g qu'en le multipliant à gauche par un élément de $T_{sc}(\mathbb{A}_E)$, ce qui multiplie V_T par un cobord.

Dans le cas local, on a construit en [I] 2.2 (en suivant Kottwitz et Shelstad) un cocycle $\hat{V}_{\mathcal{T}_1}$ de W_F dans le tore dual $\hat{\mathcal{T}}_1$. La même construction vaut dans le cas global, à condition bien sûr d'utiliser des χ-data globales (c'est-à-dire que les χ_α sont des caractères automorphes d'extensions F_α de F). Comme dans cette référence, on écrit $\tilde{s} = s\hat{\theta}$, avec $s \in \hat{T}$. On note s_{ad} l'image de s dans $\hat{T}_{ad}$. On vérifie que le couple $(\hat{V}_{\mathcal{T}_1}, s_{ad})$ appartient à $Z^{1,0}(W_F; \hat{\mathcal{T}}_1 \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{ad})$.

D'après [16] (C.2.3), on dispose d'un accouplement

$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T_{sc} \xrightarrow{1-\theta} \mathcal{T}_1) \times H^{1,0}(W_F; \hat{\mathcal{T}}_1 \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{T}_{ad}) \to \mathbb{C}^\times,$$

que l'on note $< ., . >$. On pose

$$\Delta_{imp}(\delta_1, \gamma) = < (V_T, \nu_1); (\hat{V}_{\mathcal{T}_1}, s_{ad}) >^{-1} .$$

On a déjà fixé des χ-data globales pour T. On fixe aussi des a-data globales, c'est-à-dire que les a_α appartiennent à $\bar{F}^\times$. On peut alors définir un facteur $\Delta_{II}(\delta, \gamma)$ comme en [I] 2.2. Le point est ici qu'une expression comme $(N\alpha)(\nu) - 1$ est un élément du groupe d'idèles de l'extension F_α parce que (2) entraîne que c'est une unité pour presque tout v. On pose

$$\Delta(\delta_1, \gamma) = \Delta_{II}(\delta, \gamma)\Delta_{imp}(\delta_1, \gamma).$$

On a utilisé de nombreuses données auxiliaires mais on va montrer que $\Delta(\delta_1, \gamma)$ ne dépend que de δ_1 et γ. Plus généralement, reprenons la construction à partir d'un autre tore $\underline{T}'$ vérifiant aussi l'hypothèse (Hyp). On souligne les données relatives à ce nouveau tore. On introduit de nouveaux éléments $\underline{\delta}_1$, $\underline{\gamma}$. Pour tout $v \in Val(F)$, les couples $(\delta_{1,v}, \gamma_v)$ et $(\underline{\delta}_{1,v}, \underline{\gamma}_v)$ appartiennent à $\mathcal{D}_{1,v}$, le facteur $\boldsymbol{\Delta}_{1,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v; \underline{\delta}_{1,v}, \underline{\gamma}_v)$ est donc bien défini.

Proposition. *(i) Pour presque tout v, on a* $\boldsymbol{\Delta}_{1,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v; \underline{\delta}_{1,v}, \underline{\gamma}_v) = 1$.

(ii) On a l'égalité

$$\Delta(\delta_1, \gamma)\Delta(\underline{\delta}_1, \underline{\gamma})^{-1} = \prod_{v \in Val(F)} \boldsymbol{\Delta}_{1,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v; \underline{\delta}_{1,v}, \underline{\gamma}_v).$$

(iii) Le terme $\Delta(\delta_1,\gamma)$ ne dépend pas des données auxiliaires utilisées pour le définir.

Preuve. Dans la construction de $\Delta(\delta_1,\gamma)$, on a utilisé une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$ définie sur $\bar{F}$, une cochaîne $u_{\mathcal{E}^*}$ à valeurs dans $G_{SC}(\bar{F})$, un élément $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E}^*;\bar{F})$ et un élément $e'_1\in\mathcal{Z}(\tilde{G}'_1;\bar{F})$. Les choix des termes $u_{\mathcal{E}^*}$, e et e'_1 n'influent pas sur $\Delta(\delta_1,\gamma)$. En effet, le choix de $u_{\mathcal{E}^*}$ ne change pas l'action galoisienne $\sigma\mapsto\sigma_{G^*}$. On ne peut modifier $u_{\mathcal{E}^*}$ que par des éléments qui appartiennent à $Z(G_{SC};\bar{F})$, donc à $T_{sc}(\bar{F})$, et de tels termes ne changent pas l'image de V_T dans $T_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/T_{sc}(\bar{F})$. De même, on ne peut modifier le couple (e,e'_1) que par un élément du produit fibré de $Z(G;\bar{F})$ et $Z(G'_1;\bar{F})$ au-dessus de $Z(G';\bar{F})$, ce qui ne modifie pas l'image de ν_1 modulo $\mathcal{T}_1(\bar{F})$. Dans la construction de $\Delta(\underline{\delta}_1,\underline{\gamma}_1)$, on utilise d'autres données $\underline{\mathcal{E}}^*$, $u_{\underline{\mathcal{E}}^*}$, $\underline{e}$, $\underline{e}'_1$. On peut fixer $r\in G_{SC}(\bar{F})$ qui conjugue $\mathcal{E}^*$ en $\underline{\mathcal{E}}^*$. D'après ce que l'on vient de dire, on peut supposer que $u_{\underline{\mathcal{E}}^*}(\sigma)=ru_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(r)^{-1}$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$ et que $\underline{e}=ad_r(e)$. On peut alors supposer que $\underline{e}'_1=e'_1$, puisque e et $\underline{e}$ ont alors la même image e' dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}';\bar{F})$.

On peut aussi modifier la définition de V_T (et aussi de $V_{\underline{T}}$) de la façon suivante. A l'aide des a-data globales que l'on a fixées, on peut définir une cochaîne r_T comme dans le cas local, cf. [I] 2.2. On peut alors définir V_T par

$$V_T(\sigma)=r_T(\sigma)n_{\mathcal{E}^*}(\omega_T(\sigma))u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(g)g^{-1}.$$

En effet, on passe de la définition précédente à celle-ci en multipliant à gauche par $r_T(\sigma)n_{\mathcal{E}^*}(\omega_T(\sigma))\sigma_{G^*}(x)x^{-1}$. Par définition de x, c'est un élément de $T_{sc}(\bar{F})$. Il ne modifie donc pas l'image de V_T modulo ce groupe.

Ces modifications étant faites, on a l'égalité

$$\Delta_{imp}(\delta_1,\gamma)\Delta_{imp}(\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})^{-1}=<((V_T,V_{\underline{T}}^{-1}),(\nu_1,\underline{\nu}_1^{-1})),((\hat{V}_{\mathcal{T}_1},\hat{V}_{\underline{\mathcal{T}}_1}),(s_{ad},s_{ad}))>^{-1},$$

le produit étant celui sur

$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;(T_{sc}\times\underline{T}_{sc})\stackrel{1-\theta}{\to}(\mathcal{T}_1\times\underline{\mathcal{T}}_1))\times H^{1,0}(W_F;(\hat{\mathcal{T}}_1\times\hat{\underline{\mathcal{T}}}_1)\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}(\hat{T}_{ad}\times\hat{\underline{T}}_{ad})).$$

On introduit les tores U et S_1 de [I] 2.2. Dans cette référence, le tore U est égal à $ad_{g^{-1}}(T)\times ad_{\underline{g}^{-1}}(\underline{T}))/diag_-(Z(G_{SC}))$, mais on peut l'identifier à $(T\times\underline{T})/diag_-(Z(G_{SC}))$. De même pour S_1. Alors les deux tores sont définis sur F. Rappelons que $\hat{S}_1$ est le tore des $(t,\underline{t},t_{sc})\in\hat{\mathcal{T}}_1\times\hat{\underline{\mathcal{T}}}_1\times\hat{T}_{sc}$ tels que $j(t_{sc})=t\underline{t}^{-1}$, où on a identifié $\hat{T}$ et $\hat{\underline{T}}$ à un tore commun (muni de deux actions galoisiennes en général distinctes) et où $j:\hat{T}_{sc}\to\hat{T}$ est l'homomorphisme naturel. La structure galoisienne sur $\hat{S}_1$ est un peu compliquée, les formules sont les mêmes que dans le cas local. On a aussi $\hat{U}=(\hat{T}_{sc}\times\hat{\underline{T}}_{sc})/diag(Z(\hat{G}_{SC}))$. On a un diagramme commutatif évident

$$\begin{array}{ccc}\hat{S}_1 & \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{U}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \hat{\mathcal{T}}_1\times\hat{\underline{\mathcal{T}}}_1 & \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{T}_{ad}\times\hat{\underline{T}}_{ad}\end{array}$$

d'où un homomorphisme

$$H^{1,0}(W_F;\hat{S}_1\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U})\to H^{1,0}(W_F;(\hat{\mathcal{T}}_1\times\hat{\underline{\mathcal{T}}}_1)\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}(\hat{T}_{ad}\times\hat{\underline{T}}_{ad})).$$

En copiant les définitions du cas local, on définit un élément $(\hat{V}_1,\mathbf{s})\in H^{1,0}(W_F;\hat{S}_1\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U})$ et on constate que son image dans $H^{1,0}(W_F;(\hat{\mathcal{T}}_1\times\hat{\underline{\mathcal{T}}}_1)\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}(\hat{T}_{ad}\times\hat{\underline{T}}_{ad}))$ est égale à

$$((\hat{V}_{\mathcal{T}_1},\hat{V}_{\underline{\mathcal{T}}_1}),(s_{ad},s_{ad})).$$

Notons $(V,\boldsymbol{\nu}_1)$ l'image de

$$((V_T,V_{\underline{T}}^{-1}),(\nu_1,\underline{\nu}_1^{-1}))$$

dans $H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;U\stackrel{1-\theta}{\to}S_1)$ par l'homomorphisme dual du précédent. Par compatibilité des produits, on a

$$\Delta_{imp}(\delta_1,\gamma)\Delta_{imp}(\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})^{-1}=<(V,\boldsymbol{\nu}_1),(\hat{V}_1,\mathbf{s})>^{-1}.$$

Le terme $(V,\boldsymbol{\nu}_1)$ se relève en un élément de $H^{1,0}(\Gamma_F;U(\mathbb{A}_{\bar{F}})\stackrel{1-\theta}{\to}S_1(\mathbb{A}_{\bar{F}}))$, défini exactement par les mêmes formules (après les modifications apportées ci-dessus). Cet élément appartient en fait à $H^{1,0}(Gal(E/F);U(\mathbb{A}_E)\stackrel{1-\theta}{\to}S_1(\mathbb{A}_E))$, si E désigne maintenant une extension finie de F vérifiant les mêmes propriétés que plus haut mais pour nos deux ensembles de données. Pour toute place $v\in Val(F)$, cet élément relevé définit un élément $(V_v,\boldsymbol{\nu}_{1,v})\in H^{1,0}(\Gamma_{F_v};U\stackrel{1-\theta}{\to}S_1)$. De même, $(\hat{V}_1,\mathbf{s})$ se restreint en un élément $(\hat{V}_{1,v},\mathbf{s}_v)\in H^{1,0}(W_{F_v};\hat{S}_1\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U})$. La compatibilité des produits et le lemme C.1.B de [16] assurent que

(12) on a l'égalité $<(V_v,\boldsymbol{\nu}_{1,v}),(\hat{V}_{1,v},\mathbf{s}_v)>=1$ pour presque tout v ;

$$(13)\qquad <(V,\boldsymbol{\nu}_1),(\hat{V}_1,\mathbf{s})>=\prod_{v\in Val(F)}<(V_v,\boldsymbol{\nu}_{1,v}),(\hat{V}_{1,v},\mathbf{s}_v)>.$$

On a aussi

$$\Delta_{II}(\delta,\gamma)=\prod_{v\in Val(F)}\Delta_{II}(\delta_v,\gamma_v)$$

et les termes du produit sont presque tous égaux à 1. On en déduit

$$\Delta(\delta_1,\gamma)\Delta(\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})^{-1}=\prod_{v\in Val_F}\Delta_{II}(\delta_v,\gamma_v)\Delta_{II}(\underline{\delta}_v,\underline{\gamma}_v)^{-1}<(V_v,\boldsymbol{\nu}_{1,v}),(\hat{V}_{1,v},\mathbf{s}_v)>^{-1}.$$

Pour achever la preuve des deux premières assertions de l'énoncé, il suffit de prouver que, pour tout v, on a l'égalité

$$\Delta_{II}(\delta_v,\gamma_v)\Delta_{II}(\underline{\delta}_v,\underline{\gamma}_v)^{-1}<(V_v,\boldsymbol{\nu}_{1,v}),(\hat{V}_{1,v},\mathbf{s}_v)>^{-1}=\boldsymbol{\Delta}_{1,v}(\delta_{1,v},\gamma_v;\underline{\delta}_{1,v},\underline{\gamma}_v).$$

Pour définir le membre de droite, on utilise les paires de Borel épinglées $\mathcal{E}_w=ad_{g_w^{-1}}(\mathcal{E}^*)$ et $\underline{\mathcal{E}}_w=ad_{\underline{g}_w^{-1}}(\underline{\mathcal{E}}^*)$, où w est encore la place de E fixée au-dessus de v. On choisit $u_{\mathcal{E}_w}(\sigma)=g_w^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(g_w)$ et $u_{\underline{\mathcal{E}}_w}(\sigma)=\underline{g}_w^{-1}u_{\underline{\mathcal{E}}^*}(\sigma)\sigma(\underline{g}_w)$ pour tout $\sigma\in\Gamma_{F_v}$. On constate alors que les deux membres de l'égalité ci-dessus sont définis de la même façon, après l'identification que l'on a faite des tores $ad_{g^{-1}}(T)$ et $ad_{\underline{g}^{-1}}(\underline{T})$ à T et $\underline{T}$. Cela prouve les deux premières assertions de l'énoncé.

L'assertion (iii) s'en déduit : puisque les termes $\Delta_1(\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})$ et $\boldsymbol{\Delta}_{1,v}(\delta_{1,v},\gamma_v;\underline{\delta}_{1,v},\underline{\gamma}_v)$ ne dépendent pas des données auxiliaires utilisées pour définir $\Delta_1(\delta_1,\gamma)$, ce dernier terme n'en dépend pas non plus. $\square$

Revenons à notre tore T'. Il reste à vérifier que l'on peut choisir des éléments δ et γ vérifiant les conditions (1) et (2). On introduit les mêmes données qu'au début du paragraphe, en particulier le corps E. On modifie la définition de l'ensemble V'. On note maintenant V' un ensemble fini de places de F, contenant V et les places ramifiées dans E, de sorte que, pour tout $v \notin V'$ et pour toute place w' de E au-dessus de v, les conditions (9) et (10) soient vérifiées, ainsi que les conditions (14) et (15) ci-dessous. Pour $v \notin V$ telle que v soit non ramifiée dans E, les tores T et T' sont non ramifiés en v et ont donc une structure naturelle sur $\mathfrak{o}_v$. On note $\mathbb{T}_v = T \times_{\mathfrak{o}_v} \mathbb{F}_v$ la fibre de T sur $\mathbb{F}_v$. Un élément de $\Sigma(T)$ est aussi un caractère de ce tore. On impose

(14) l'image naturelle $e' \in \mathcal{Z}(\tilde{G}') \subset \tilde{G}'$ de e appartient à $\tilde{K}'_{w'}$ et $T'(\mathfrak{o}_{w'})$ est inclus dans $K'_{w'}$;

(15) soit $t_0 \in T(\mathfrak{o}_{w'})$; alors il existe $t \in T(\mathfrak{o}_v)t_0$ dont la réduction $\underline{t} \in \mathbb{T}_v(\mathbb{E}_{w'})$ vérifie $N\alpha(\underline{t}) \neq \pm 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma(T)$.

La condition (14) est satisfaite presque partout. Il faut montrer qu'il en est de même de (15). Il s'agit de montrer que, pour presque tout v, $\mathbb{T}_v(\mathbb{F}_v)$ n'est pas contenu dans la réunion sur $\alpha \in \Sigma(T)$ et $\epsilon = \pm 1$ des sous-ensembles $\{\underline{t} \in \mathbb{T}_v(\mathbb{F}_v); N\alpha(\underline{t}\underline{t_0}) = \epsilon\}$, où $\underline{t_0}$ est la réduction de t_0. Notons d la dimension de T et q_v le nombre d'éléments de $\mathbb{F}_v$. Il existe $c > 0$ indépendant de v tel que le nombre d'éléments de $\mathbb{T}_v(\mathbb{F}_v)$ soit au moins égal à cq_v^d. Il suffit de démontrer qu'il existe $c' > 0$ indépendant de v tel que chacun des sous-ensembles ci-dessus ait un nombre d'éléments au plus égal à $c'q_v^{d-1}$. Considérons le sous-ensemble $\{\underline{t} \in \mathbb{T}_v(\mathbb{F}_v); N\alpha(\underline{t}\underline{t_0}) = \epsilon\}$. Il peut être vide. Sinon, il est en bijection avec $\{\underline{t} \in \mathbb{T}_v(\mathbb{F}_v); N\alpha(\underline{t}) = 1\}$, ou encore avec

$$\{\underline{t} \in \mathbb{T}_v(\mathbb{F}_v); \forall \sigma \in Gal(E_{w'}/F_v), (N\sigma\alpha)(\underline{t}) = 1\}.$$

Introduisons le tore S sur $\mathbb{F}_v$ qui est la restriction des scalaires du tore multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{E}_{w'}$. L'homomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \bar{\tau}: & \mathbb{T}_v(\bar{\mathbb{F}}_v) & \to & S(\bar{\mathbb{F}}_v) = \prod_{\sigma \in Gal(E_{w'}/F_v)} \bar{\mathbb{F}}_v^\times \\ & \underline{t} & \mapsto & ((N\sigma\alpha)(\underline{t}))_{\sigma \in Gal(E_{w'}/F_v)} \end{array}$$

est défini sur $\mathbb{F}_v$. L'ensemble précédent est le noyau de l'homomorphisme

$$\tau : \mathbb{T}_v(\mathbb{F}_v) \to S(\mathbb{F}_v).$$

On montre aisément que le nombre de composantes connexes du noyau de $\bar{\tau}$ est borné par un nombre qui ne dépend que de l'homomorphisme $X_*(\mathbb{T}_v) \to X_*(S)$ déduit de $\bar{\tau}$ et de la structure de ces $Gal(E_{w'}/F_v)$-modules. De même, la composante neutre de ce noyau est un tore défini sur $\mathbb{F}_v$ et de dimension au plus $d-1$, dont la structure ne dépend que des mêmes données. Or ces données ne varient que dans un ensemble fini, car le groupe $Gal(E_{w'}/F_v)$ est lui-même toujours un sous-groupe de $Gal(E/F)$. Il en résulte que le nombre d'éléments du noyau est bien borné par $c'q_v^{d-1}$ pour un $c' > 0$ indépendant de v. Cela prouve que (15) est vérifié pour presque tout v.

Soit $v \notin V'$, notons w la restriction de $\bar{v}$ à E. Pour tout $g \in G$, on note g_{ad} son image dans G_{AD}. D'après (10), l'application $\sigma \mapsto x_{ad}\sigma_{G^*}(x_{ad})^{-1}u_{\mathcal{E}^*,ad}(\sigma) = x_{ad}u_{\mathcal{E}^*,ad}(\sigma)\sigma(x_{ad})^{-1}$ est un cocycle de $Gal(E_w/F_v)$ dans $K_{w,ad}$. Par le théorème de Lang, un tel cocycle est un cobord (cf. [24] lemme 4.2(ii)). On peut fixer $y_{ad} \in K_{w,ad}$ tel que $x_{ad}\sigma_{G^*}(x_{ad})^{-1}u_{\mathcal{E}^*,ad}(\sigma) = y_{ad}\sigma(y_{ad})^{-1}$ pour tout $\sigma \in Gal(E_w/F_v)$. Puisque K_w est le groupe hyperspécial associé à $\mathcal{E}^*$ d'après (9), on a $T^*_{ad}(\mathfrak{o}_w) = T_{ad}(\mathfrak{o}_w) \subset K_{w,ad}$ et la décomposition d'Iwasawa montre que l'application

$$\begin{array}{ccc} T_{ad}(\mathfrak{o}_w) \times K_{w,sc} & \to & K_{w,ad} \\ (t,x) & \mapsto & t\pi_{ad}(x) \end{array}$$

est surjective. On relève y_{ad} en $(t,g_w)\in T_{ad}(\mathfrak{o}_w)\times K_{w,sc}$. On a alors

$$x_{ad}\sigma_{G^*}(x_{ad})^{-1}u_{\mathcal{E}^*,ad}(\sigma)=t\pi_{ad}(g_w\sigma(g_w)^{-1})\sigma(t)^{-1},$$

d'où

$$t^{-1}x_{ad}\sigma_{G^*}(x_{ad})^{-1}u_{\mathcal{E}^*,ad}(\sigma)\sigma(t)=\pi_{ad}(g_w\sigma(g_w)^{-1}).$$

On a l'égalité

$$x_{ad}\sigma_{G^*}(x_{ad})^{-1}u_{\mathcal{E}^*,ad}(\sigma)\sigma(t)=\sigma_T(t)x_{ad}\sigma_{G^*}(x_{ad})^{-1}u_{\mathcal{E}^*,ad}(\sigma),$$

d'où

$$t^{-1}\sigma_T(t)x_{ad}\sigma_{G^*}(x_{ad})^{-1}u_{\mathcal{E}^*,ad}(\sigma)\pi_{ad}(\sigma(g_w)g_w^{-1})=1.$$

A fortiori,

$$x_{ad}\sigma_{G^*}(x_{ad})^{-1}u_{\mathcal{E}^*,ad}(\sigma)\pi_{ad}(\sigma(g_w)g_w^{-1})\in T_{ad}(\mathfrak{o}_w),$$

d'où il résulte que $x\sigma_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(g_w)g_w^{-1}\in T_{sc}(\mathfrak{o}_w)$. Notons $t_{sc}(\sigma)$ cet élément. Posons $\mathcal{E}_w=ad_{g_w^{-1}}(\mathcal{E}^*)$ et notons (B_w,T_v) la paire de Borel sous-jacente à $\mathcal{E}_w$. Par le même calcul que dans la preuve de (6), la relation précédente entraîne que T_v est défini sur F_v et que l'homomorphisme $\xi_{B_w,T_v,B',T'}$ déduit des paires (B_w,T_v) et (B',T') est équivariant pour les actions de $\Gamma_{\bar{v}}$. Posons $e_v=ad_{g_w^{-1}}(e)$. C'est un élément de $Z(\tilde{G},\mathcal{E}_w;E_w)$. D'après (10), c'est aussi un élément de $\tilde{K}_w$. Pour $\sigma\in\Gamma_{F_v}$, on a les égalités

$$\sigma(e_v)=ad_{\sigma(g_w^{-1})}\circ\sigma(e)=ad_{\sigma(g_w)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}\sigma_{G^*}(x)x^{-1}}\circ ad_{x\sigma_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)}\circ\sigma(e).$$

On a $ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)}\circ\sigma(e)=z(\sigma)^{-1}e$. Puisque $x\in G_{SC}^{\theta^*}(E_w)$, l'élément $x\sigma_{G^*}(x)^{-1}$ commute à e et aussi, bien sûr, à $z(\sigma)$. Donc

$$ad_{x\sigma_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)}\circ\sigma(e)=z(\sigma)^{-1}e.$$

De plus

$$\sigma(g_w)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}\sigma_{G^*}(x)x^{-1}=g_w^{-1}t_{sc}(\sigma)^{-1}=t_{sc,w}(\sigma)^{-1}g_w^{-1},$$

où $t_{sc,w}(\sigma)=ad_{g_w^{-1}}(t_{sc}(\sigma))\in T_v(\mathfrak{o}_w)$. D'où

$$\sigma(e_v)=z(\sigma)^{-1}ad_{t_{sc,w}(\sigma)^{-1}g_w^{-1}}(e)=z(\sigma)^{-1}t_{sc,w}(\sigma)^{-1}e_wt_{sc,w}(\sigma)=z(\sigma)^{-1}(\theta-1)(t_{sc,w}(\sigma))e_v.$$

L'application $\sigma\mapsto z(\sigma)^{-1}(\theta-1)(t_{sc,w}(\sigma))$ prend ses valeurs dans $T_v(\mathfrak{o}_w)$ et la relation ci-dessus implique que c'est un cocycle de $Gal(E_w/F_v)$ à valeurs dans ce groupe. Un tel cocycle est forcément un cobord. On peut donc fixer $t_0\in T_v(\mathfrak{o}_w)$ tel que $\sigma(t_0)=t_0z(\sigma)(1-\theta)(t_{sc}(\sigma))$ pour tout σ. Alors $t_0e_v\in\tilde{G}(F_v)$. On peut multiplier t_0 par un élément de $T_v(\mathfrak{o}_v)$ de sorte que le produit t vérifie la conclusion de (15) transportée à T_v par l'isomorphisme $ad_{g_w^{-1}}$. Cette condition implique que te_v est régulier. En multipliant encore t par un élément de $T_v(\mathfrak{o}_v)$ assez voisin de l'origine, on peut assurer que te_v est fortement régulier. Posons $\gamma_v=te_v$ et $\delta_v=\xi_{B_w,T_v,B',T'}(t)e'$, où $e'\in\mathcal{Z}(\tilde{G}')$ est l'image naturelle de e (ou e_v, c'est pareil). Les constructions impliquent que $\gamma_v\in\tilde{K}_v$, $\delta_v\in\tilde{K}'_v$ et $(\delta_v,B',T',B_w,T_v,\gamma_v)$ est un diagramme. Le choix de t implique que la condition (2) est satisfaite. Pour $v\notin V'$, on a donc construit des éléments vérifiant (1) et (2).

3.7 Utilisation du facteur de transfert global, cas particulier

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On suppose qu'elle vérifie l'hypothèse (Hyp) du paragraphe précédent. Soit V un ensemble fini de places de F contenant $V_{ram}(\mathbf{G}')$. On a défini l'espace $C_c^\infty(\mathbf{G}'_V)$ en 3.3. Pour $v \in V$, on a défini en [I] 2.5 un espace $C_c^\infty(\mathbf{G}'_v)$ par une tout autre méthode.

Proposition. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$C_c^\infty(\mathbf{G}'_V) \simeq \otimes_{v\in V} C_c^\infty(\mathbf{G}'_v).$$

Preuve. Considérons des données auxiliaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$, $(\tilde{K}'_{1,v})_{v\notin V}$ non ramifiées hors de V. Pour $v \in Val(F) - V$, le choix des espaces hyperspéciaux détermine un facteur de transfert $\Delta_{1,v}$, cf. [I] 6.3. Pour $v \in V$, on ne sait pas normaliser le facteur de transfert. Mais on peut normaliser le produit sur $v \in V$ de ces facteurs. En effet, construisons des éléments comme dans le paragraphe précédent, et il est plus simple ici de les souligner. On a donc des éléments $\underline{\delta}_1 = (\underline{\delta}_{1,v})_{v\in Val(F)} \in \tilde{G}'_1(\mathbb{A}_F)$, $\underline{\gamma} = (\underline{\gamma}_v)_{v\in Val(F)} \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ et le facteur $\Delta_1(\underline{\delta}_1, \underline{\gamma})$. Soient $\delta_{1,V} = (\delta_{1,v})_{v\in V} \in \tilde{G}'_1(F_V)$, $\gamma_V = (\gamma_v)_{v\in V} \in \tilde{G}(F_V)$. Supposons $(\delta_{1,V}, \gamma_V) \in \mathcal{D}_{1,V}$, on entend par là que $(\delta_{1,v}, \gamma_v) \in \mathcal{D}_{1,v}$ pour tout $v \in V$. On pose

$$\Delta_{1,V}(\delta_{1,V}, \gamma_V) = \Delta_1(\underline{\delta}_1, \underline{\gamma}) \left(\prod_{v\notin V} \Delta_{1,v}(\underline{\delta}_{1,v}, \underline{\gamma}_v)^{-1}\right) \left(\prod_{v\in V} \boldsymbol{\Delta}_{1,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v; \underline{\delta}_{1,v}, \underline{\gamma}_v)\right).$$

Il résulte des calculs du paragraphe précédent que les termes du premier produit sont presque tous égaux à 1. Le terme ainsi défini est un facteur de transfert. La proposition du paragraphe précédent montre qu'il ne dépend pas des données auxiliaires $\underline{\delta}_1$ et $\underline{\gamma}$.

D'après 3.3, le choix des $(\tilde{K}'_{1,v})_{v\notin V}$ permet d'identifier $C_c^\infty(\mathbf{G}'_V)$ à $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F_V)) = \otimes_{v\in V} C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F_v))$. D'après [I] 2.5, le choix de $\Delta_{1,V}$ permet d'identifier ce dernier espace à $\otimes_{v\in V} C_c^\infty(\mathbf{G}'_v)$. D'où l'isomorphisme de l'énoncé. Pour qu'il soit "canonique", il suffit qu'il ne dépende pas des données auxiliaires. Considérons une autre famille G'_2, $\tilde{G}'_2$, C_2, $\hat{\xi}_2$, $(\tilde{K}'_{2,v})_{v\notin V}$ de données auxiliaires non ramifiées hors de V. Il y a deux isomorphismes de recollement entre les espaces $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F_V))$ et $C_{c,\lambda_2}^\infty(\tilde{G}'_2(F_V))$: celle de 3.3 utilisant les espaces hyperspéciaux $(\tilde{K}'_{1,v})_{v\notin V}$ et $(\tilde{K}'_{2,v})_{v\notin V}$; celle de [I] 2.5 utilisant les facteurs de transfert $\Delta_{1,V}$ et $\Delta_{2,V}$. On doit prouver que ce sont les mêmes. Les deux isomorphismes $f_1 \mapsto f_2$ sont définis pas une formule $f_2(\delta_{2,V}) = \tilde{\lambda}_{12,V}(\delta_{1,V}, \delta_{2,V}) f_1(\delta_{1,V})$ où $\delta_{1,V}$ est un élément quelconque tel que $(\delta_{1,V}, \delta_{2,V}) \in \tilde{G}'_{12}(F_V)$, mais la fonction $\tilde{\lambda}_{12,V}$ n'est pas a priori la même pour les deux recollements. Notons $\tilde{\lambda}_{12,K,V}$ celle pour le premier recollement et $\tilde{\lambda}_{12,\Delta,V}$ celle pour le second. Soient $(\delta_{1,V}, \delta_{2,V}) \in \tilde{G}'_{12}(F_V)$ et $(x_1, x_2) \in G'_{12}(F_V)$. On a en tout cas

$$\tilde{\lambda}_{12,K,V}(x_1\delta_{1,V}, x_2\delta_{2,V}) = \lambda_{12,V}(x_1, x_2)\tilde{\lambda}_{12,K,V}(\delta_{1,V}, \delta_{2,V}),$$
$$\tilde{\lambda}_{12,\Delta,V}(x_1\delta_{1,V}, x_2\delta_{2,V}) = \lambda_{12,V}(x_1, x_2)\tilde{\lambda}_{12,\Delta,V}(\delta_{1,V}, \delta_{2,V}),$$

pour un même caractère $\lambda_{12,V}$ de $G'_{12}(F_V)$. Il suffit donc de prouver l'égalité $\tilde{\lambda}_{12,K,V}(\delta_{1,V}, \delta_{2,V}) = \tilde{\lambda}_{12,\Delta,V}(\delta_{1,V}, \delta_{2,V})$ pour un seul couple $(\delta_{1,V}, \delta_{2,V})$. On choisit ce couple ainsi : on construit des éléments $\delta \in \tilde{G}'(\mathbb{A}_F)$ et $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ comme en 3.6, on relève δ en $\delta_1 \in \tilde{G}'_1(\mathbb{A}_F)$ et $\delta_2 \in \tilde{G}'_2(\mathbb{A}_F)$; on prend pour $\delta_{1,V}$ et $\delta_{2,V}$ les produits sur $v \in V$ des composantes locales de δ_1 et δ_2. Par définition de $\tilde{\lambda}_{12,\Delta,V}$, on a l'égalité

$$(1) \qquad \Delta_{2,V}(\delta_{2,V}, \gamma_V) = \tilde{\lambda}_{12,\Delta,V}(\delta_{1,V}, \delta_{2,V})\Delta_{1,V}(\delta_{1,V}, \gamma_V).$$

En 1.15, on a normalisé une fonction $\tilde{\lambda}_{12}$ sur $\tilde{G}'_{12}(\mathbb{A})$ de sorte qu'elle vaille 1 sur $\tilde{G}'_{12}(F)$ et des fonctions $\tilde{\lambda}_{12,v}$ pour $v \notin V$. Par définition,

$$\tilde{\lambda}_{12,K,V}(\delta_{1,V}, \delta_{2,V}) = \tilde{\lambda}_{12}(\delta_1, \delta_2) \prod_{v \notin V} \tilde{\lambda}_{12,v}(\delta_{1,v}, \delta_{2,v})^{-1}.$$

On a

(2) $\Delta_{2,v}(\delta_{2,v}, \gamma_v) = \tilde{\lambda}_{12,v}(\delta_{1,v}, \delta_{2,v})\Delta_{1,v}(\delta_{2,v}, \gamma_v)$ pour tout $v \notin V$.

En effet, avec les notations de [I] 6.3, on a l'égalité

$$\Delta_{2,v}(\delta_{2,v}, \gamma_v) = \tilde{\lambda}_{\zeta_1}(\delta_{1,v})\tilde{\lambda}_{\zeta_2}(\delta_{2,v})^{-1}\Delta_{1,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v).$$

Il suffit de comparer les définitions pour constater que

$$\tilde{\lambda}_{\zeta_1}(\delta_{1,v})\tilde{\lambda}_{\zeta_2}(\delta_{2,v})^{-1} = \tilde{\lambda}_{12,v}(\delta_{1,v}, \delta_{2,v}).$$

D'où (2).

Alors

$$\tilde{\lambda}_{12,K,V}(\delta_{1,V}, \delta_{2,V}) = \tilde{\lambda}_{12}(\delta_1, \delta_2) \prod_{v \notin V} \Delta_{2,v}(\delta_{2,v}, \gamma_v)^{-1}\Delta_{1,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v)$$

$$= \tilde{\lambda}_{12}(\delta_1, \delta_2)\Delta_2(\delta_2, \gamma)^{-1}\Delta_1(\delta_1, \gamma)\Delta_{2,V}(\delta_{2,V}, \gamma_V)\Delta_{1,V}(\delta_{1,V}, \gamma_V)^{-1}.$$

En comparant avec (1), il reste à montrer l'égalité

$$(3) \qquad \Delta_2(\delta_2, \gamma) = \tilde{\lambda}_{12}(\delta_1, \delta_2)\Delta_1(\delta_1, \gamma).$$

La démonstration est similaire à celle du lemme [I] 2.5, nous n'en donnons que le squelette. De façon générale, pour un groupe réductif connexe H défini sur F, un élément de $H^1(W_F, Z(\hat{H}))$ détermine non seulement un caractère de $H(\mathbb{A}_F)$ trivial sur $H(F)$, mais plus généralement un caractère du groupe $(H(\mathbb{A}_{\bar{F}})/Z(H;\bar{F}))^{\Gamma_F}$, trivial sur $(H(\bar{F})/Z(H;\bar{F}))^{\Gamma_F} = H_{AD}(F)$. Avec les notations de [I] 2.5, le cocycle $w \mapsto (\zeta_1(w), \zeta_2(w)^{-1})$ de W_F dans $Z(\hat{G}'_{12})$ détermine donc un caractère de $(G'_{12}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/Z(G'_{12};\bar{F}))^{\Gamma_F}$, trivial sur $G'_{12,AD}(F)$. Notons ce caractère $\underline{\tilde{\lambda}}_{12}$. L'ensemble $\tilde{G}'_{12}(\mathbb{A}_F)$ s'envoie naturellement dans $(G'_{12}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/Z(G'_{12};\bar{F}))^{\Gamma_F}$. En effet, pour $(\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2) \in \tilde{G}'_{12}(\mathbb{A}_F)$, on choisit $(e'_1, e'_2) \in \mathcal{Z}(\tilde{G}'_{12};\bar{F})$, on écrit $\underline{\delta}_1 = x_1 e'_1$, $\underline{\delta}_2 = x_2 e'_2$ avec $(x_1, x_2) \in G'_{12}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$. L'image de (x_1, x_2) dans $G'_{12}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/Z(G'_{12};\bar{F})$ ne dépend pas des choix de e'_1 et e'_2 et est invariante par Γ_F. L'application cherchée est $(\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2) \mapsto (x_1, x_2)$. Par cette application, $\underline{\tilde{\lambda}}_{12}$ devient une fonction sur $\tilde{G}'_{12}(\mathbb{A}_F)$. Les mêmes calculs qu'en [I] 2.5 conduisent à l'égalité

$$(4) \qquad \Delta_2(\delta_2, \gamma) = \underline{\tilde{\lambda}}_{12}(\delta_1, \delta_2)\Delta_1(\delta_1, \gamma).$$

Or il résulte des constructions que les fonctions $\tilde{\lambda}_{12}$ et $\underline{\tilde{\lambda}}_{12}$ se transforment selon le même caractère λ_{12} de $G'_{12}(\mathbb{A}_F)$. Par définition, $\tilde{\lambda}_{12}$ vaut 1 sur $\tilde{G}'_{12}(F)$ et la construction ci-dessus montre que $\underline{\tilde{\lambda}}_{12}$ vérifie la même propriété. Les deux fonctions sont donc égales et l'égalité (4) équivaut à (3). $\square$

3.8 Une construction auxiliaire

Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Soit $(H,\tilde{H},\mathbf{b})$ un triplet similaire à $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ et soit $\mathbf{H}'=(H',\mathcal{H}',\tilde{t})$ une donnée endoscopique pour ce triplet. Considérons les hypothèses (1) à (6) suivantes.

(1) Il y a une suite exacte

$$1\to G\stackrel{\iota}{\to} H\to D\to 1$$

d'homomorphismes de groupes définis sur F, où D est un tore; il y a un plongement $\tilde{G}\stackrel{\tilde{\iota}}{\to}\tilde{H}$ défini sur F compatible avec ι.

Pour $\tilde{h}\in\tilde{H}$, l'automorphisme $ad_{\tilde{h}}$ se quotiente en un automorphisme de D qui ne dépend pas de $\tilde{h}$. On le note θ_D. On ne demande pas qu'il soit l'identité. De la suite (1) se déduit une suite duale

$$1\to\hat{D}\to\hat{H}\stackrel{\hat{\iota}}{\to}\hat{G}\to 1$$

et une projection $\hat{\tilde{\iota}}:{}^L\tilde{H}\to{}^L\tilde{G}$ compatible avec $\hat{\iota}$ (on rappelle que ${}^L\tilde{G}={}^LG\hat{\boldsymbol{\theta}}$, cf. [I] 1.4). Notons $\hat{T}^H$ le tore d'une paire de Borel de $\hat{H}$ comme en [I] 1.4.

(2) $\hat{D}\cap\hat{T}^{H,\hat{\boldsymbol{\theta}},0}=\hat{D}^{\hat{\boldsymbol{\theta}},0}$.

(3) On a l'égalité $\tilde{s}=\hat{\tilde{\iota}}(\tilde{t})$.

Puisque $\hat{H}'$ et $\hat{G}'$ sont les composantes neutres des commutants de $\tilde{t}$ et $\tilde{s}$, on a une suite exacte

$$1\to\hat{D}^{\hat{\boldsymbol{\theta}},0}\to\hat{H}'\to\hat{G}'\to 1.$$

(4) On a l'égalité $\mathcal{G}'=\hat{\tilde{\iota}}(\mathcal{H}')$.

Il en résulte que $\mathbf{a}$ est le composé de $\mathbf{b}$ et de la projection $Z(\hat{H})\to Z(\hat{G})$.

(5) On a l'égalité $V_{ram}(\mathbf{H}')=V_{ram}(\mathbf{H})$.

(6) La donnée $\mathbf{H}'$ est relevante et vérifie l'hypothèse (Hyp) de [I] 6.4.

Considérons pour $i=1,2$ des familles de données $(H_i,\tilde{H}_i,\mathbf{b}_i)$ et $\mathbf{H}'_i=(H'_i,\mathcal{H}'_i,\tilde{t}_i)$ vérifiant les hypothèses (1) à (6). On peut dire que la famille indexée par 2 domine la famille indexée par 1 s'il existe un homomorphisme injectif

$$\kappa:H_1\to H_2$$

et une application compatible $\tilde{\kappa}:\tilde{H}_1\to\tilde{H}_2$ de sorte que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

- les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & & H_1\\ & \nearrow\iota_1 & \\ G & & \downarrow\kappa\\ & \searrow\iota_2 & \\ & & H_2\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{H}_1\\ & \nearrow\tilde{\iota}_1 & \\ \tilde{G} & & \downarrow\tilde{\kappa}\\ & \searrow\tilde{\iota}_2 & \\ & & \tilde{H}_2\end{array}$$

sont commutatifs;

en notant $\hat{\kappa} : {}^L H_2 \to {}^L H_1$ et $\hat{\tilde{\kappa}} : {}^L \tilde{H}_2 \to {}^L \tilde{H}_1$ les applications déduites de κ,

- ${}^L\tilde{\kappa}(\tilde{t}_2) = \tilde{t}_1$ et $\hat{\kappa}(\mathcal{H}'_2) = \mathcal{H}'_1$.

Lemme. *(i) Il existe des données vérifiant les hypothèses (1) à (6).*

(ii) Pour deux familles de données $(H_i, \tilde{H}_i, \mathbf{b}_i)$ et $\mathbf{H}'_i = (H'_i, \mathcal{H}'_i, \tilde{t}_i)$ pour $i = 1, 2$ vérifiant toutes deux les hypothèses (1) à (6), il existe une troisième famille vérifiant les mêmes hypothèses et les dominant toutes deux.

Preuve. Notons T^* le tore maximal de G muni de l'action galoisienne quasi-déployée. Il est aussi muni de l'automorphisme θ^*. Posons $H = (G \times T^*)/diag_-(Z(G))$ où $diag_-$ est le plongement anti-diagonal et notons $\tilde{H}$ le quotient de $\tilde{G} \times T^*$ par $Z(G)$ agissant anti-diagonalement par multiplication à gauche. On définit deux actions de $G \times T^*$ sur $\tilde{H}$ par

$$(g, t)(\gamma, \tau)(g', t') = (g\gamma g', t\tau\theta^*(t')).$$

Ces actions se descendent en des actions de H sur $\tilde{H}$ qui font de $\tilde{H}$ un espace tordu sous H. On a une suite exacte

$$1 \to G \xrightarrow{\iota} H \to D = T^*_{ad} \to 1$$

et un plongement compatible $\tilde{\iota} : \tilde{G} \to \tilde{H}$ qui à γ associe l'image de $(\gamma, 1)$ dans $\tilde{H}$. Notons que le centre de H est $(Z(G) \times T^*)/diag_-(Z(G)) \simeq T^*$. Donc

(7) le centre $Z(H)$ est connexe.

On choisit une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$ adaptée à $\tilde{s}$ et on écrit $\tilde{s} = s\hat{\theta}$ avec $s \in \hat{T}$, cf. [I] 1.5. Cette paire se relève en une paire de Borel épinglée de $\hat{H}$. On note $\hat{T}^H$ le tore de cette paire et encore $\hat{\theta}$ l'automorphisme de $\hat{H}$ associé à cette paire. Prouvons que l'égalité (2) est vérifiée. Il s'agit de prouver que la suite

$$1 \to \hat{D}^{\hat{\boldsymbol{\theta}},0} \to \hat{T}^{H,\hat{\boldsymbol{\theta}},0} \to \hat{T}^{\hat{\boldsymbol{\theta}},0} \to 1$$

est exacte. Il revient au même de prouver que la suite

$$0 \to X_*(\hat{D})^{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \to X_*(\hat{T}^H)^{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \to X_*(\hat{T})^{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \to 0$$

est exacte. Seule la surjectivité finale pose problème. Les actions galoisiennes n'interviennent pas ici. On peut travailler sur $\bar{F}$ et identifier T^* à un sous-tore de G. Posons $T^{*H} = (T^* \times T^*)/diag_-(Z(G))$, qui est un sous-tore maximal de H. La surjectivité à prouver équivaut à celle de l'homomorphisme

$$X^*(T^{*H})^\theta \to X^*(T^*)^\theta$$

issue du plongement $t \mapsto (t, 1)$ de T^* dans T^{*H}. Mais on a aussi un homomorphisme $T^{*H} \to T^*$ défini par $(t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2$ dont le composé avec le précédent est l'identité de T^*. Ainsi l'homomorphisme ci-dessus s'inscrit dans une suite

$$X^*(T^*)^\theta \to X^*(T^{*H})^\theta \to X^*(T^*)^\theta$$

dont le composé est l'identité. La deuxième flèche est donc surjective, comme on le voulait.

Pour $v \in Val(F)$, $v \notin V_{ram}(\tilde{G}, \mathbf{a})$, le groupe H est non ramifié sur F_v. Puisque $G_{AD} = H_{AD}$, le sous-groupe compact hyperspécial K_v de $G(F_v)$ détermine un tel sous-groupe K_v^H de $H(F_v)$. L'espace $\tilde{K}_v^H = K_v^H \tilde{\iota}(\tilde{K}_v)$ est un espace hyperspécial pour ce groupe.

On choisit $t \in \hat{T}^H$ d'image s dans $\hat{T}$ et on pose $\tilde{t} = t\hat{\theta}$. La relation (3) est vérifiée. On peut identifier $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ au tore d'une paire de Borel épinglée de $\hat{G}'$. Il s'en déduit une structure galoisienne sur ce tore, de la forme $\sigma \mapsto \sigma_{G'} = \omega_{G'}(\sigma) \circ \sigma_G$, où $\omega_{G'}$ est un cocycle à valeurs dans W^θ. Ce groupe W^θ est le même pour G ou H. On peut donc relever l'action précédente en une action $\sigma \mapsto \sigma_{H'} = \omega_{G'}(\sigma) \circ \sigma_H$ de Γ_F sur $\hat{T}^{H,\hat{\theta},0}$. Ces actions se prolongent en des actions sur $\hat{T}$ et $\hat{T}^H$. Remarquons que ces actions sont non ramifiées en v pour $v \in Val(F) - V_{ram}(\mathbf{G}')$. Notons $\hat{T}'$, resp. $\hat{T}^{G'}$, $\hat{T}'^H$, $\hat{T}^{H'}$, les tores $\hat{T}$, resp. $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$, $\hat{T}^H$, $\hat{T}^{H,\hat{\theta},0}$, munis de ces structures. On note $T^{G'}$ et $T^{H'}$ les tores duaux de $\hat{T}^{G'}$ et $\hat{T}^{H'}$ définis sur F. D'après le lemme 3.2 et la relation (3) de sa preuve, on peut prolonger le plongement $\hat{T}^{H'} \to \hat{H}^{\hat{\theta},0}$, resp. $\hat{T}^{G'} \to \mathcal{G}'$ en des plongements

$$\begin{array}{ccc} {}^L T^{H'} & \to & \hat{H}^{\hat{\theta},0} \rtimes W_F \\ (x,w) & \mapsto & (xh^1(w), w), \end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{ccc} {}^L T^{G'} & \to & \mathcal{G}' \subset {}^L G \\ (x,w) & \mapsto & (xg'(w), w), \end{array}$$

tels que, pour $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$ et $w \in I_v$, on ait $h^1(w) = 1$ et $g'(w) = 1$. Quotientons le premier par $\hat{D} \cap \hat{T}^{H'} = \hat{D} \cap \hat{T}^{H,\hat{\theta},0}$. On obtient un plongement

$$\begin{array}{ccc} {}^L T^{G'} & \to & \hat{G}^{\hat{\theta},0} \rtimes W_F \\ (x,w) & \mapsto & (x\hat{\iota}(h^1(w)), w) \end{array}$$

Les deux plongements précédents ne peuvent différer que par un cocycle. C'est-à-dire qu'il existe un cocycle $u : W_F \to \hat{T}$ tel que $g'(w) = u(w)\hat{\iota}(h^1(w))$ pour tout w. Pour $v \in Val(F) - V_{ram}(\mathbf{G}')$ et $w \in I_v$, on a $u(w) = 1$. En appliquant 3.2(2) à la suite exacte

$$1 \to \hat{D} \to \hat{T}^H \to \hat{T} \to 1,$$

on voit que l'on peut relever u en un cocycle $u^H : W_F \to \hat{T}^H$ tel que $\hat{\iota} \circ u^H = u$ de sorte que, pour tous $v \in Val(F) - V_{ram}(\mathbf{G}')$ et $w \in I_v$, on ait $u^H(w) = 1$. On pose $h'(w) = u^H(w)h^1(w)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} {}^L T^{H'} & \to & {}^L H \\ (x,w) & \mapsto & (xh'(w), w) \end{array}$$

est alors un homomorphisme. Pour $w \in W_F$, soit $b(w) \in \hat{H}$ tel que

$$(8) \qquad ad_{\tilde{t}}(h'(w), w) = (b(w)h'(w), w).$$

En projetant dans ${}^L G$ on voit que $b(w)$ se projette sur l'élément $a(w)$ de $Z(\hat{G})$ tel que $ad_{\tilde{s}}(g'(w), w) = (a(w)g'(w), w)$. Donc $b(w) \in Z(\hat{H})$. L'équation (8) oblige b à être un cocycle. On note $\mathbf{b}$ sa classe modulo $ker^1(W_F; Z(\hat{H}))$. Elle se projette sur $\mathbf{a}$. On note $\hat{H}' = Z_{\hat{H}}(\tilde{t})^0$. L'équation (8) oblige $(h'(w), w)$ à normaliser $\hat{H}'$. On note $\mathcal{H}'$ le groupe engendré par $\hat{H}'$ et les $(h'(w), w)$ pour $w \in W_F$. C'est une extension de $\hat{H}'$. Elle détermine une action galoisienne sur ce groupe qui en conserve une paire de Borel épinglée : par exemple le relèvement dans $\hat{H}'$ d'une telle paire de $\hat{G}'$ conservée par l'action galoisienne. On note H' le groupe quasi-déployé sur F dont le L-groupe est $\hat{H}'$ muni de cette structure galoisienne. Alors $(H',\mathcal{H}',\tilde{t})$ est une donnée endoscopique pour $(H,\tilde{H},\mathbf{b})$ et la relation (3) est vérifiée. Cette donnée est non ramifiée en tout $v\in Val(F)-V_{ram}(\mathbf{G}')$ car, pour une telle place, on a $h'(w)=1$ pour $w\in I_v$. Montrons que cette donnée est relevante. Dualement à l'homomorphisme $\hat{H}'\stackrel{\hat{\iota}}{\to}\hat{G}'$, on a un homomorphisme $\iota':G'\to H'$ qui est défini sur F. On a aussi des plongements compatibles $\mathcal{Z}(G)\to\mathcal{Z}(H)$ et $\mathcal{Z}(\tilde{G})\to\mathcal{Z}(\tilde{H})$. L'homomorphisme ι' se prolonge en

$$\tilde{\iota}':\tilde{G}'=G'\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})\to\tilde{H}'=H'\times_{\mathcal{Z}(H)}\mathcal{Z}(\tilde{H}).$$

Puisque $\tilde{G}'(F)$ n'est pas vide, $\tilde{H}'(F)$ ne l'est pas non plus. Remarquons que, par construction, on a $G_{SC}=H_{SC}$ et $G'_{SC}=H'_{SC}$. Il y a donc une bijection entre paires de Borel pour G et pour H, et entre paires de Borel pour G' et pour H'. Soit $v\in Val(F)$. Puisque $\mathbf{G}'$ est relevante, on peut fixer un diagramme $(\delta,B',T',B,T,\gamma)$ avec $\delta\in\tilde{G}'(F_v)$, $\gamma\in\tilde{G}(F_v)$ et γ fortement régulier. Notons $\delta^{H'}$ et γ^H les images de δ dans $\tilde{H}'(F_v)$ et de γ dans $\tilde{H}(F_v)$. Notons $(B^{H'},T^{H'})$ la paire de Borel de H' correspondant à (B',T') et (B^H,T^H) la paire de Borel de H correspondant à (B,T). Alors $(\delta^{H'},B^{H'},T^{H'},B^H,T^H,\gamma^H)$ est un diagramme et γ^H est fortement régulier. Donc $\mathbf{H}'_v$ est relevante.

Pour achever la preuve de (i), il reste à prouver que $\mathbf{H}'$ vérifie l'hypothèse (Hyp). Elle va être assurée par (7). On peut aussi bien revenir aux données initiales et prouver

(9) si $Z(G)$ est connexe et que $\mathbf{G}'$ est relevante, alors $\mathbf{G}'$ vérifie l'hypothèse (Hyp).

Pour $v\in V_{ram}(\mathbf{G}')$, l'hypothèse que $\mathbf{G}'_v$ est relevante permet de fixer un sous-tore maximal T'_v de G', défini sur F_v, tel qu'il existe $(\delta_v,\gamma_v)\in\mathcal{D}(\mathbf{G}'_v)$ de sorte que $\delta_v\in\tilde{T}'_v(F_v)$. Fixons un élément $Y_v\in\mathfrak{t}'_v(F_v)$ régulier dans $\mathfrak{g}'(F_v)$. On peut fixer un élément $Y\in\mathfrak{g}'(F)$ dont la composante en v soit aussi proche que l'on veut de Y_v pour tout $v\in V_{ram}(\mathbf{G}')$. Notons T' le commutant de Y. C'est un sous-tore maximal de G', défini sur F. Si la composante de Y en v est assez proche de Y_v, ce tore est conjugué à T'_v par un élément de $G'(F_v)$. Il vérifie donc la même condition que T'_v. Il faut montrer qu'il vérifie aussi cette condition pour $v\notin V_{ram}(\mathbf{G}')$. Pour une telle place, on peut identifier <u>*la*</u> paire de Borel épinglée de G à une paire $\mathcal{E}^*=(B^*,T^*,(E^*_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ définie sur F_v et dont K_v soit le groupe hyperspécial associé. D'après [I] 6.2, on peut fixer $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E}^*)(F_v^{nr})\cap T^*(\mathfrak{o}_v^{nr})\tilde{K}_v$, avec les notations de cette référence. Soit $z:\Gamma_{F_v}\to Z(G;\bar{F}_v)$ l'application telle que $\sigma(e)=z(\sigma)^{-1}e$. Alors z est un cocycle non ramifié à valeurs dans $Z(G;\bar{F}_v)\cap T^*(\mathfrak{o}_v^{nr})=Z(G;\mathfrak{o}_v^{nr})$. Puisque $Z(G)$ est connexe, un tel cocycle est un cobord. Quitte à multiplier e par un élément de $Z(G;\mathfrak{o}_v^{nr})$, on a donc $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E}^*)(F_v)\cap\tilde{K}_v$. Posons $\theta=ad_e$ et fixons un sous-groupe de Borel B' de G' contenant T'. Grâce à [13] corollaire 2.2, on peut fixer $x\in G_{SC}^\theta(\bar{F}_v)$ de sorte qu'en posant $ad_{x^{-1}}(B^*,T^*)=(B_v,T_v)$, le tore T_v soit défini sur F_v et l'homomorphisme $\xi_{T_v,T'}$ déduit de (B_v,T_v) et de (B',T') soit équivariant pour les actions galoisiennes. Posons $\mathcal{E}_v=ad_{x^{-1}}(\mathcal{E}^*)$. Puisque x commute à θ, on a encore $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E}_v)(F_v)$. On fixe $\nu\in T_v(F_v)$ en position générale, on pose $\mu=\xi_{T_v,T'}(\nu)$, $\gamma_v=\nu e$ et $\delta_v=\mu e'$, où $e'\in\mathcal{Z}(\tilde{G}';F_v)$ est l'image de e. Alors $(\delta_v,B',T',B,T,\gamma_v)$ est un diagramme avec $\delta_v\in\tilde{T}'(F_v)$ et γ_v fortement régulier. Cela démontre (9) et le (i) de l'énoncé.

Soient maintenant deux familles comme dans le (ii) de l'énoncé. Pour $i=1,2$, on peut écrire $H_i=(G\times Z(H_i))/diag_-(Z(G))$ et identifier $\tilde{H}_i$ au quotient de $(\tilde{G}\times Z(H_i))$ par $Z(G)$ agissant anti-diagonalement par multiplication à gauche. Posons $Z_{12}(G)=$

$\{(z,z_1,z_2)\in Z(G); zz_1z_2=1\}$. Posons $H=(G\times Z(H_1)\times Z(H_2))/Z_{12}(G)$ et notons $\tilde{H}$ le quotient de $\tilde{G}\times Z(H_1)\times Z(H_2)$ par l'action de $Z_{12}(G)$ par multiplication à gauche. On munit $\tilde{H}$ d'une structure d'espace tordu sur H comme au début de la preuve de (i). Il y a un diagramme naturel d'homomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} & & H_1 & & \\ & \nearrow \iota_1 & & \searrow \kappa_1 & \\ G & & & & H \\ & \searrow \iota_2 & & \nearrow \kappa_2 & \\ & & H_2 & & \end{array}$$

On vérifie qu'ils ont tous injectifs. L'homomorphisme composé ι s'insère dans une suite exacte

$$1\to G\xrightarrow{\iota} H\to D_1\times D_2\to 1$$

Tous les homomorphismes se prolongent en des applications compatibles entre les espaces tordus correspondants. Du côté dual, $\hat{H}$ est le produit fibré de $\hat{H}_1$ et $\hat{H}_2$ au-dessus de $\hat{G}$. Comme dans la preuve de (i), on fixe une paire de Borel épinglée de $\hat{G}$ de tore $\hat{T}$ de sorte que $\tilde{s}=s\hat{\theta}$ avec $s\in\hat{T}$. Elle se relève en des paires pour $\hat{H}_1$ et $\hat{H}_2$ de tores $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_2$. Pour $i=1,2$, on a $\tilde{t}_i=t_i\hat{\theta}$ avec $t_i\in\hat{T}_i$. On pose $t=(t_1,t_2)$ et $\tilde{t}=t\hat{\theta}$. On définit $\mathcal{H}'$ comme l'ensemble des éléments $(x_1,x_2,w)\in {}^LH$ tels que $(x_1,w)\in\mathcal{H}'_1$ et $(x_2,w)\in\mathcal{H}'_2$. Comme dans la preuve de (i), on associe à ces données un groupe H' défini et quasi-déployé sur F, ainsi qu'une classe de cocycle $\mathbf{b}$. On laisse le lecteur vérifier que les données $(H,\tilde{H},\mathbf{b})$ et $\mathbf{H}'=(H',\mathcal{H}',\tilde{t})$ satisfont les conditions requises. $\square$

Remarque. La preuve fournit un groupe H et un espace $\tilde{H}$ qui sont indépendants de la donnée endoscopique $\mathbf{G}'$.

3.9 Facteur de transfert global, cas général

Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Soit V un ensemble fini de places de F contenant $V_{ram}(\mathbf{G}')$. Considérons des données $(H,\tilde{H},\mathbf{b})$ et $\mathbf{H}'=(H',\mathcal{H}',\tilde{t})$ vérifiant les hypothèses (1) à (6) du paragraphe précédent. Considérons aussi des données auxiliaires H'_1, $\tilde{H}'_1$, $C_{1,H}$, $\hat{\xi}_{1,H}$ pour $\mathbf{H}'$, non ramifiées hors de V. On a une projection $H'_1\to H'$, un homomorphisme $\iota':G'\to H'$, défini sur F, et la projection duale $\hat{\iota}':\hat{H}'\to\hat{G}'$. Notons G'_1 le produit fibré de H'_1 et G' au-dessus de H' et posons $C_1=C_{1,H}$. On a la suite exacte

$$1\to C_1\to G'_1\to G'\to 1$$

Comme on l'a vu dans la preuve de 3.8, de ι' se déduit une application $\tilde{\iota}':\tilde{G}'=G'\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})\to\tilde{H}'=H'\times_{\mathcal{Z}(H)}\mathcal{Z}(\tilde{H})$. On définit $\tilde{G}'_1$ comme le produit fibré de $\tilde{H}'_1$ et $\tilde{G}'$ au-dessus de $\tilde{H}'$. La projection naturelle $\tilde{G}'_1\to\tilde{G}'$ est compatible avec la suite exacte ci-dessus. Du côté des groupes duaux, on vérifie que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 1 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & \hat{D}^{\hat{\theta},0} & = & \hat{D}^{\hat{\theta},0} & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 1 & \to & \hat{H}' & \to & \hat{H}'_1 & \to & \hat{C}_1 & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 1 & \to & \hat{G}' & \to & \hat{G}'_1 & \to & \hat{C}_1 & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 1 & & 1 & & & & \end{array}$$

dont toutes les suites sont exactes. On a aussi une suite exacte

$$1 \to \hat{D}^{\hat{\theta},0} \to \mathcal{H}' \to \mathcal{G}' \to 1$$

En quotientant par $\hat{D}^{\hat{\theta},0}$, il se déduit du plongement $\hat{\xi}_{1,H} : \mathcal{H}' \to {}^L H'_1$ un plongement

$$\hat{\xi}_1 : \mathcal{G}' \to {}^L G'_1$$

Les données G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$ sont des données auxiliaires pour $\mathbf{G}'$ qui sont non ramifiées hors de V. On les complète par une famille d'espaces hyperspéciaux $(\tilde{K}'_{1,v})_{v \notin V}$ vérifiant les conditions usuelles, cf. 1.1. Les groupes G' et H' ont même groupe adjoint. Pour $v \notin V$, le sous-groupe compact hyperspécial K'_v détermine donc de tels sous-groupes $K'_{H,v}$ de $H'(F_v)$ puis $K'_{1,H,v}$ de $H'_1(F_v)$. Alors l'ensemble $K'_{1,H,v}\tilde{\iota}'_1(\tilde{K}'_{1,v})$ est un espace hyperspécial de $\tilde{H}'_{1,v}(F_v)$. On le note $\tilde{K}'_{1,H,v}$. La famille $(\tilde{K}'_{1,H,v})_{v \notin V}$ vérifie la condition de compatibilité globale de 1.1. On complète les données auxiliaires H'_1 etc... par cette famille.

Pour toute place v, on introduit les ensembles $\mathcal{D}_v$ et $\mathcal{D}_{1,v}$ relatifs à $\tilde{G}'$ et $\tilde{G}'_1$ sur F_v et les ensembles similaires $\mathcal{D}_{H,v}$ et $\mathcal{D}_{1,H,v}$ relatifs à $\tilde{H}'$ et $\tilde{H}'_1$. On a vu dans la preuve de 3.8 que pour $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}_v$, on a $(\tilde{\iota}'(\delta), \tilde{\iota}(\gamma)) \in \mathcal{D}_{H,v}$. Il en résulte que, pour $(\delta_1, \gamma) \in \mathcal{D}_{1,v}$, on a $(\tilde{\iota}'_1(\delta_1), \tilde{\iota}(\gamma)) \in \mathcal{D}_{1,H,v}$, où $\tilde{\iota}'_1 : \tilde{G}'_1 \to \tilde{H}'_1$ est l'application naturelle. Puisque $\mathbf{H}'$ vérifie l'hypothèse (Hyp), on peut lui appliquer les constructions de la preuve de la proposition 3.7 : de nos choix d'espaces hyperspéciaux se déduit un facteur de transfert normalisé, notons-le $\Delta_{1,H,V}$ sur $\mathcal{D}_{1,H,V} = \prod_{v \in V} \mathcal{D}_{1,H,v}$. On définit une fonction $\Delta_{1,V}$ sur $\mathcal{D}_{1,V} = \prod_{v \in V} \mathcal{D}_{1,v}$ par $\Delta_{1,V}(\delta_1, \gamma) = \Delta_{1,H,V}(\tilde{\iota}'_1(\delta_1), \tilde{\iota}(\gamma))$. On a

(1) $\Delta_{1,V}$ est un facteur de transfert.

Preuve. Puisque $\Delta_{1,H,V}$ en est un, il suffit de prouver que

(2) pour toute place v et tous $(\delta_1, \gamma), (\underline{\delta}_1, \underline{\gamma}) \in \mathcal{D}_{1,v}$, on a l'égalité

$$\boldsymbol{\Delta}_{1,H,v}(\tilde{\iota}'_1(\delta_1), \tilde{\iota}(\gamma); \tilde{\iota}'_1(\underline{\delta}_1), \tilde{\iota}(\underline{\gamma})) = \boldsymbol{\Delta}_{1,v}(\delta_1, \gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma}).$$

On reprend les définitions de [I] 2.2 en ajoutant judicieusement des indices H pour les termes relatifs à $\tilde{H}$. Les facteurs Δ_{II} intervenant sont les mêmes des deux côtés car ces facteurs sont insensibles aux centres et on a $G_{AD} = H_{AD}$, $G'_{AD} = H'_{AD}$. Il faut comparer les facteurs $\boldsymbol{\Delta}_{imp,H,v}$ et $\boldsymbol{\Delta}_{imp,v}$. On a des égalités

$$\boldsymbol{\Delta}_{imp,v}(\delta_1, \gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma}) =< (V, \boldsymbol{\nu}_1), (\hat{V}_1, \mathbf{s}) >^{-1},$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{imp,H,v}(\tilde{\iota}'_1(\delta_1), \tilde{\iota}(\gamma); \tilde{\iota}'_1(\underline{\delta}_1), \tilde{\iota}(\underline{\gamma})) =< (V_H, \boldsymbol{\nu}_{1,H}), (\hat{V}_{1,H}, \mathbf{t}) >^{-1},$$

les produits étant respectivement ceux sur

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_v}; U \overset{1-\theta}{\to} S_1) \times H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{S}_1 \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U})$$

et

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_v}; U_H \overset{1-\theta}{\to} S_{1,H}) \times H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{S}_{1,H} \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}_H).$$

En fait, on a $U_H = U$ et des homomorphismes duaux $S_1 \to S_{1,H}$, $\hat{S}_{1,H} \to \hat{S}_1$. En choisissant convenablement les données auxiliaires intervenant, on vérifie que $(\hat{V}_1, \mathbf{s})$ est l'image naturelle de $(\hat{V}_{1,H}, \mathbf{t})$ par l'homorphisme

$$H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{S}_{1,H} \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}_H) \to H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{S}_1 \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}),$$

tandis que $(V_H, \boldsymbol{\nu}_{1,H})$ est l'image naturelle de $(V, \boldsymbol{\nu}_1)$ par l'homomorphisme dual

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_v}; U \overset{1-\theta}{\to} S_1) \to H^{1,0}(\Gamma_{F_v}; U_H \overset{1-\theta}{\to} S_{1,H}).$$

L'égalité (2) résulte alors simplement de la compatibilité des produits. Cela prouve (2) et (1). $\square$

Pour $v \notin V$, on a deux facteurs de transfert normalisés $\Delta_{1,v}$ sur $\mathcal{D}_{1,v}$ et $\Delta_{1,H,v}$ sur $\mathcal{D}_{1,H,v}$. Pour $(\delta_{1,v}, \gamma_v) \in \mathcal{D}_{1,v}$, on a l'égalité

(3) $\Delta_{1,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v) = \Delta_{1,H,v}(\tilde{\iota}'_1(\delta_{1,v}), \tilde{\iota}(\gamma_v))$.

La preuve est similaire à celle de (2).

Comme en 3.7, de l'existence du facteur de transfert $\Delta_{1,V}$ va résulter la proposition suivante.

Proposition. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$C_c^\infty(\mathbf{G}'_V) \simeq \otimes_{v \in V} C_c^\infty(\mathbf{G}'_v).$$

Preuve. On choisit des données $(H, \tilde{H}, \mathbf{b})$ etc... et on construit le facteur de transfert $\Delta_{1,V}$ sur $\mathcal{D}_{1,V}$. Comme en 3.7, on a alors les isomorphismes

$$C_c^\infty(\mathbf{G}'_V) \simeq C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F_V)) \simeq \otimes_{v \in V} C_c^\infty(\mathbf{G}'_v),$$

le premier étant relatif aux données $(\tilde{K}'_{1,v})_{v \notin V}$ et le second au facteur de transfert $\Delta_{1,V}$. Le composé de ces isomorphismes fournit celui de l'énoncé.

On doit montrer qu'il est "canonique", c'est-à-dire qu'il ne dépend pas des données auxiliaires.

Conservons les données $(H, \tilde{H}, \mathbf{b})$, $\mathbf{H}' = (H', \mathcal{H}', \tilde{t})$, mais remplaçons H'_1, $\tilde{H}'_1$, $C_{1,H}$, $\hat{\xi}_{1,H}$ par d'autres données auxiliaires H'_2, $\tilde{H}'_2$, $C_{2,H}$, $\hat{\xi}_{2,H}$. On en déduit de nouvelles données auxiliaires G'_2, $\tilde{G}'_2$, C_2, $\hat{\xi}_2$ pour $\mathbf{G}'$. On fixe des familles $(\tilde{K}'_{1,v})_{v \notin V}$ et $(\tilde{K}'_{2,v})_{v \notin V}$ où $\tilde{K}'_{1,v}$, resp. $\tilde{K}'_{2,v}$ est un sous-espace hyperspécial de $\tilde{G}'_1(F_v)$, resp. $\tilde{G}'_2(F_v)$. Il s'en déduit des familles $(\tilde{K}'_{1,H,v})_{v \notin V}$ et $(\tilde{K}'_{2,H,v})_{v \notin V}$ où $\tilde{K}'_{1,H,v}$, resp. $\tilde{K}'_{2,H,v}$ est un sous-espace hyperspécial de $\tilde{H}'_1(F_v)$, resp. $\tilde{H}'_2(F_v)$. Comme dans la preuve de 3.7, on a deux isomorphismes

$$C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F_V)) \simeq C_{c,\lambda_2}^\infty(\tilde{G}'_2(F_V))$$

dont nous voulons prouver qu'ils sont égaux. Ils sont donnés par des fonctions de recollement $\tilde{\lambda}_{12,K,V}$ et $\tilde{\lambda}_{12,\Delta,V}$ sur $\tilde{G}'_{12}(F_V)$. Comme en 3.7, il s'agit de prouver que ces fonctions sont égales. Mais pour $\mathbf{H}'$, on a aussi des fonctions de recollement $\tilde{\lambda}_{12,H,K,V}$ et $\tilde{\lambda}_{12,H,\Delta,V}$ sur $\tilde{H}'_{12}(F_V)$. Des applications $\tilde{\iota}'_1$ et $\tilde{\iota}'_2$ (avec des notations évidentes) se déduit une application $\tilde{\iota}'_{12} : \tilde{G}'_{12} \to \tilde{H}'_{12}$. Il résulte des définitions et de (2) et (3) que l'on a les égalités

$$\tilde{\lambda}_{12,K,V} = \tilde{\lambda}_{12,H,K,V} \circ \tilde{\iota}'_{12},\ \tilde{\lambda}_{12,\Delta,V} = \tilde{\lambda}_{12,H,\Delta,V} \circ \tilde{\iota}'_{12}.$$

Parce que $\mathbf{H}$ vérifie l'hypothèse (Hyp), on peut lui appliquer la preuve de 3.7 qui montre l'égalité $\tilde{\lambda}_{12,H,K,V} = \tilde{\lambda}_{12,H,\Delta,V}$. L'égalité cherchée $\tilde{\lambda}_{12,K,V} = \tilde{\lambda}_{12,\Delta,V}$ s'ensuit.

Remplaçons maintenant les données auxiliaires $(H, \tilde{H}, \mathbf{b})$, $\mathbf{H}' = (H', \mathcal{H}', \tilde{t})$, H'_1, $\tilde{H}'_1$, $C_{1,H}$, $\hat{\xi}_{1,H}$ par d'autres $(\bar{H}, \tilde{\bar{H}}, \bar{\mathbf{b}})$ etc... vérifiant les mêmes conditions. En utilisant le lemme 3.8 (ii), on introduit des données $(\underline{H}, \underline{\tilde{H}}, \underline{\mathbf{b}})$ et $\underline{\mathbf{H}}' = (\underline{H}', \underline{\mathcal{H}}', \underline{\tilde{t}}')$ qui dominent $(H, \tilde{H}, \mathbf{b})$ et $\mathbf{H}'$ ainsi que $(\bar{H}, \tilde{\bar{H}}, \bar{\mathbf{b}})$ et $\overline{\mathbf{H}}'$. On peut fixer des données auxiliaires $\underline{H}'_1$, $\underline{\tilde{H}}'_1$, $\underline{C}_{1,H}$, $\underline{\hat{\xi}}_{1,H}$. On peut décomposer la preuve en deux : prouver que l'isomorphisme ne change pas quand on remplace les données H etc.. par les données $\underline{H}$ etc... puis qu'il ne change pas quand on remplace les données $\underline{H}$ etc... par $\bar{H}$ etc... Les deux assertions sont similaires. On peut ne démontrer que la première partie et oublier les données $\bar{H}$ etc... On s'est ainsi ramené au cas où les données $(\underline{H}, \underline{\tilde{H}}, \underline{\mathbf{b}})$ et $\underline{\mathbf{H}}' = (\underline{H}', \underline{\mathcal{H}}', \underline{\tilde{t}}')$ dominent $(H, \tilde{H}, \mathbf{b})$ et $\mathbf{H}'$. En particulier, on a des plongements compatibles $\kappa : H \to \underline{H}$, $\tilde{\kappa} : \tilde{H} \to \underline{\tilde{H}}$ et, dualement, des plongements $\hat{\kappa}$ et $\hat{\tilde{\kappa}}$. On a aussi des homomorphismes compatibles $\kappa' : H' \to \underline{H}'$ et $\tilde{\kappa}' : \tilde{H}' \to \underline{\tilde{H}}'$. Le même procédé qui nous a permis de déduire de H'_1 etc... des données auxiliaires G'_1 etc... nous permet maintenant de déduire des données $\underline{H}'_1$ etc... des données auxiliaires pour $\mathbf{H}'$, que l'on note H'_2, $\tilde{H}'_2$ etc... Par exemple, H'_2 est le produit fibré de H' et $\underline{H}'_1$ au-dessus de $\underline{H}'$. D'après ce que l'on a déjà démontré, notre isomorphisme est insensible au changement de ces données auxiliaires, on peut donc supposer que $H'_1 = H'_2$ etc... Il résulte des constructions que les données auxiliaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$ pour $\mathbf{G}'$ déduites de H'_1 etc... sont les mêmes que celles déduites de $\underline{H}'_1$ etc... On a d'ailleurs $C_1 = C_{1,H} = C_{1,\underline{H}}$. On fixe une famille $(\tilde{K}'_{1,v})_{v \notin V}$ d'espaces hyperspéciaux, dont on déduit des familles $(\tilde{K}'_{1,H,v})_{v \notin V}$ et $(\tilde{K}'_{1,\underline{H},v})_{v \notin V}$. Pour $v \notin V$, ces familles déterminent des facteurs de transfert normalisés $\Delta_{1,H,v}$ et $\Delta_{1,\underline{H},v}$. On démontre les assertions similaires à (2) et (3) :

(4) pour $v \in Val(F)$ et $(\delta_{1,v}, \gamma_v), (\underline{\delta}_{1,v}, \underline{\gamma}_v) \in \mathcal{D}_{1,H,v}$, on a l'égalité

$$\boldsymbol{\Delta}_{1,\underline{H},v}(\tilde{\kappa}'_1(\delta_{1,v}), \tilde{\kappa}(\gamma_v); \tilde{\kappa}'_1(\underline{\delta}_{1,v}), \tilde{\kappa}(\underline{\gamma}_v)) = \boldsymbol{\Delta}_{1,H,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v; \underline{\delta}_{1,v}, \underline{\gamma}_v);$$

(5) pour $v \notin V$ et $(\delta_{1,v}, \gamma_v) \in \mathcal{D}_{1,H,v}$, on a l'égalité

$$\Delta_{1,\underline{H},v}(\tilde{\kappa}'_1(\delta_{1,v}), \tilde{\kappa}(\gamma_v)) = \Delta_{1,H,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v).$$

Fixons un tore maximal T'_H de H' vérifiant l'hypothèse (Hyp) et construisons des éléments $(\delta_1, \gamma) \in \tilde{H}'_1(\mathbb{A}_F) \times \tilde{H}(\mathbb{A}_F)$ comme en 3.6. Alors le commutant $T'_{\underline{H}}$ de $\kappa'(T')$ dans $\underline{H}'$ vérifie l'hypothèse (Hyp) et les éléments $(\tilde{\kappa}'(\delta_1), \tilde{\kappa}(\gamma)) \in \underline{\tilde{H}}'_1(\mathbb{A}_F) \times \underline{\tilde{H}}(\mathbb{A}_F)$ vérifient les hypothèses de ce paragraphe. De plus, on a

(6) $\Delta_H(\delta_1, \gamma) = \Delta_{\underline{H}}(\tilde{\kappa}'(\delta_1), \tilde{\kappa}(\gamma))$.

La preuve est similaire à celle de (2).

Il résulte de (4), (5) et (6) que, pour $(\delta_{1,V}, \gamma_V) \in \mathcal{D}_{1,H,V}$, on a l'égalité

$$\Delta_{1,\underline{H},V}(\tilde{\kappa}'_1(\delta_{1,V}), \kappa(\gamma_V)) = \Delta_{1,H,V}(\delta_{1,V}, \gamma_V).$$

Le plongement $\tilde{\iota}_{\underline{H}} : \tilde{G} \to \tilde{\underline{H}}$ est le composé du plongement similaire $\tilde{\iota}_H : \tilde{G} \to \tilde{H}$ et de $\tilde{\kappa}$. De même, l'application $\tilde{\iota}'_{\underline{H}}$ est la composée de $\tilde{\iota}'_H$ et de $\tilde{\kappa}'$. L'égalité précédente montre que le facteur de transfert $\Delta_{1,V}$ pour $\mathbf{G}'$ déduit de $\Delta_{1,\underline{H},V}$ est le même que celui déduit de $\Delta_{1,H,V}$. Donc l'isomorphisme

$$\otimes_{v\in V} C_c^\infty(\mathbf{G}'_v) \simeq C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F_V))$$

est inchangé quand on remplace les données H etc... par $\underline{H}$ etc... L'isomorphisme

$$C_c^\infty(\mathbf{G}'_V) \simeq C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F_V))$$

ne change pas non plus puisqu'il ne dépend que de la famille $(\tilde{K}'_{1,v})_{v\notin V}$. Cela achève la preuve. $\square$

Remarque. En 3.3, on a défini l'espace $C_c^\infty(\mathbf{G}'_V)$ en supposant $\mathbf{G}'$ relevante et $V \supset V_{ram}(\mathbf{G}')$. Supposant toujours $\mathbf{G}'$ relevante et soit V un ensemble fini quelconque de places de F. On peut poser $C_c^\infty(\mathbf{G}'_V) = \otimes_{v\in V} C_c^\infty(\mathbf{G}'_v)$. Il n'y a pas d'ambiguïté puisque la proposition précédente affirme que, dans le domaine commun des deux définitions (c'est-à-dire quand V contient $V_{ram}(\mathbf{G}')$), les deux espaces ainsi définis sont canoniquement isomorphes.

3.10 Adaptation aux K-espaces

Considérons un K-espace comme en 1.16. Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de ce K-espace. On fixe un ensemble fini V de places contenant V_{ram} et des données auxiliaires non ramifiées hors de V.

Soit v une place de F. Le bifacteur $\mathbf{\Delta}_{1,v}$ s'étend à tout le K-espace, c'est-à-dire que l'on peut définir des termes $\mathbf{\Delta}_{1,v}(\delta_1, \gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma})$ pour deux couples (δ_1, γ), $(\underline{\delta}_1, \underline{\gamma})$ se correspondant, avec $\gamma \in \tilde{G}_p(F_v)$ et $\underline{\gamma} \in \tilde{G}_{\underline{p}}(F_v)$. La définition est la même qu'en [I] 2.3. Avec les définitions de 1.16, on a les égalités

$\mathbf{\Delta}_{1,v}(\delta_1, \gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma}) = \mathbf{\Delta}_{1,v}(\delta_1, \tilde{\phi}'_{p',p}(\gamma); \underline{\delta}_1, \tilde{\phi}'_{p',\underline{p}}(\underline{\gamma}))$, si v est finie ou complexe ;

$\mathbf{\Delta}_{1,v}(\delta_1, \gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma}) = \omega(h_p h_{\underline{p}}^{-1}) \mathbf{\Delta}_{1,v}(\delta_1, \tilde{\phi}'_{p',p}(\gamma); \underline{\delta}_1, \tilde{\phi}'_{\underline{p}',\underline{p}}(\underline{\gamma}))$ si v est réelle.

Considérons les deux hypothèses

Hyp′ il existe un sous-tore maximal T' de F, défini sur F, de sorte que, pour toute place v de F, il existe $p_v \in \Pi$ et un couple $(\delta_v, \gamma_v) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}'_v)$ avec $\delta_v \in \tilde{T}'(F_v)$ et $\gamma_v \in \tilde{G}_{p_v}(F_v)$;

Hyp″ il existe un sous-tore maximal T' de F, défini sur F, et un élément $p \in \Pi$ de sorte que, pour toute place v de F, il existe un couple $(\delta_v, \gamma_v) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}'_v)$ avec $\delta_v \in \tilde{T}'(F_v)$ et $\gamma_v \in \tilde{G}_p(F_v)$.

Elles sont équivalentes. En effet, la seconde implique évidemment la première. Supposons **Hyp′** vérifiée. Pour toute place réelle, fixons p_v vérifiant cette hypothèse. D'après le lemme 1.16, il existe $p \in \Pi$, d'ailleurs unique, tel que p soit v-équivalent à p_v pour toute place v réelle. On voit alors que cet p vérifie **Hyp″**.

Supposons ces hypothèses vérifiées. On fixe T' et p vérifiant **Hyp″**. Appliquant la construction de 3.6 à la composante $\tilde{G}_p$, on construit un couple (δ_1, γ) avec $\gamma \in \tilde{G}_p(\mathbb{A}_F)$ et un terme $\Delta(\delta_1, \gamma)$. Si on remplace les données T', p, δ_1 et γ par d'autres données $\underline{T}'$, $\underline{p}$, $\underline{\delta}_1$ et $\underline{\gamma}$, la proposition 3.6(ii) est encore vérifiée, les bifacteurs étant étendus comme ci-dessus au K-espace. La seule modification à faire à la démonstration est la suivante :

en 3.6, on a fixé $r \in G_{SC}(\bar{F})$ tel que $ad_r(\mathcal{E}^*) = \underline{\mathcal{E}}^*$ et on a posé $u_{\underline{\mathcal{E}}^*}(\sigma) = ru_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(r)^{-1}$; il faut maintenant fixer $r \in G_{\underline{p},SC}(\bar{F})$ tel que $ad_r \circ \phi_{\underline{p},p}(\mathcal{E}^*) = \underline{\mathcal{E}}^*$ et poser

$$u_{\underline{\mathcal{E}}^*}(\sigma) = r\phi_{\underline{p},p}(u_{\mathcal{E}^*}(\sigma))\nabla_{\underline{p},p}(\sigma)\sigma(r)^{-1}.$$

Cette construction une fois faite, le reste des paragraphes 3.6 et 3.7 s'adapte sans changement aux K-espaces.

Les paragraphes 3.8 et 3.9 s'adaptent aussi de la façon suivante. Fixons $p \in \Pi$ et effectuons les constructions de 3.8 pour la composante G_p. On construit donc un groupe H_p et un espace $\tilde{H}_p$ comme en 3.8 relatif à G_p et $\tilde{G}_p$. Pour $q \in \Pi$, on introduit un groupe H_q et un espace $\tilde{H}_q$: sur $\bar{F}$, ils sont égaux à H_p et $\tilde{H}_p$; on notant les identités $\phi^H_{p,q} : H_q \to H_p$ et $\tilde{\phi}^H_{p,q} : \tilde{H}_q \to \tilde{H}_p$, on définit les actions galoisiennes sur H_q et $\tilde{H}_q$ de sorte que l'on ait les égalités $\phi^H_{p,q} \circ \sigma(\phi^H_{p,q})^{-1} = ad_{\nabla_{p,q}(\sigma)}$ et $\tilde{\phi}^H_{p,q} \circ \sigma(\tilde{\phi}^H_{p,q})^{-1} = ad_{\nabla_{p,q}(\sigma)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On a alors des plongements $G_q \to H_q$ et $\tilde{G}_q \to \tilde{H}_q$ définis sur F de sorte que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} G_p & \to & H_p & \quad & \tilde{G}_p & \to & \tilde{H}_p \\ \uparrow \phi_{p,q} & & \uparrow \phi^H_{p,q} & & \uparrow \tilde{\phi}_{p,q} & & \uparrow \tilde{\phi}^H_{p,q} \\ G_q & \to & H_q & & \tilde{G}_q & \to & \tilde{H}_q \end{array}$$

La collection $(\tilde{H}_q)_{q\in\Pi}$ n'a pas de raison d'être un K-espace au sens de 1.16 car les applications $H^1(F; G_q) \to H^1(F; H_q)$ ne sont pas bijectives en général. Mais les conditions précises imposées en 1.16 ne servent qu'aux formules d'inversion de [I] 4.9. Elles ne sont pas nécessaires pour définir les facteurs de transfert de la même façon que ci-dessus. Par abus de notations, on notera encore $K\tilde{H}$ la collection $(\tilde{H}_q)_{q\in\Pi}$. Alors, comme en 3.9, on définit les facteurs de transfert pour cette collection puis on les restreint au K-espace de départ $K\tilde{G}$. On obtient les mêmes conséquences qu'en 3.9.

4 Intégrales orbitales pondérées et endoscopie

4.1 Intégrales orbitales pondérées invariantes stables

On suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et soit V un ensemble fini de places. Posons

$$D^{st}_{\diamond}(\tilde{M}(F_V)) = D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\tilde{M}(F_V)) + D^{st}_{tr-orb}(\tilde{M}(F_V)) \subset D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F_V)).$$

On va définir une forme bilinéaire

$$(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) \mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$$

sur le produit

$$\Big(D^{st}_{\diamond}(\tilde{M}(F_V)) \otimes Mes(M(F_V))^*\Big) \times \Big(C^{\infty}_c(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))\Big).$$

Le théorème qui suit énonce une de ses propriétés clés. On le prouvera au paragraphe suivant.

Théorème. *Pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{\diamond}^{st}(\tilde{M}(F_V)) \otimes Mes(M(F_V))^*$, la distribution $\mathbf{f} \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ est stable, c'est-à-dire se factorise par la projection de $C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$ dans $SI(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$.*

Conformément à nos hypothèses de récurrence, on admet cette propriété pour les couples $(G', \tilde{G}')$ vérifiant les mêmes hypothèses que $(G, \tilde{G})$ et tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$.

Supposons définie notre forme bilinéaire. On doit étendre la définition à la situation "avec caractère central" de 1.15. On doit aussi montrer que, pour deux extensions $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ de $\tilde{G}$ et pour une fonction de recollement $\tilde{\lambda}_{12,V}$ comme dans ce paragraphe, les deux définitions de la forme bilinéaire se recollent. Admettons cela par récurrence pour les couples $(G', \tilde{G}')$ comme ci-dessus. Soit $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$. On définit la donnée endoscopique $\mathbf{G}'(s)$ comme dans le cas local (cf. [I] 3.3), dont la donnée endoscopique maximale $\mathbf{M}$ est une "donnée de Levi". Pour $s \notin Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, on a $dim(G'(s)_{SC}) < dim(G_{SC})$ et les propriétés formelles ci-dessus permettent de définir $S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\delta} \in D_{\diamond}^{st}(\mathbf{M}_V) \otimes Mes(M(F_V))^*$ et $\mathbf{f} \in SI(\mathbf{G}'(s)_V) \otimes Mes(G'(F_V))$. On définit d'autre part

$$i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) = \begin{cases} [Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F} : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1}, & \text{si } \mathbf{G}'(s) \text{ est elliptique,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors poser la définition

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Il est clair que cette forme est invariante en $\mathbf{f}$, c'est-à-dire ne dépend que de l'image de $\mathbf{f}$ dans $I(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$.

4.2 Formules de décomposition

La situation est la même que dans le paragraphe précédent. Le lien entre la forme bilinéaire qu'on y a définie et ses avatars locaux définis en [II] 1.10 et [V] 1.4 et 2.4 est donné par la proposition suivante. Soient deux espaces de Levi $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ tels que $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \neq 0$. Alors $\mathcal{A}_{L_1}^G \cap \mathcal{A}_{L_2}^G = \{0\}$. Cette condition entraîne dualement que l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}_1)^{\Gamma_F} \oplus Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}_2)^{\Gamma_F}$$

est surjectif et de noyau fini. On note $k_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ le nombre d'éléments de ce noyau et on pose $e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) = d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) k_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)^{-1}$. Si au contraire $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) = 0$, on pose $e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) = 0$. Soit $\tilde{L}^V = (\tilde{L}^v)_{v \in V} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)$ tel que $d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) \neq 0$. Cette condition entraîne encore que l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to \oplus_{v \in V} Z(\hat{M}_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{L}^v)^{\Gamma_{F_v}}$$

est surjectif et de noyau fini. On note $k_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V)$ le nombre d'éléments de ce noyau et on pose $e_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) = d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) k_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V)^{-1}$. Si au contraire $d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) = 0$, on pose $e_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) = 0$.

Proposition. *Soient* $\boldsymbol{\delta}=\otimes_{v\in V}\boldsymbol{\delta}_v\in D^{st}_{\diamond}(\tilde{M}(F_V))\otimes Mes(M(F_V))^*$ *et* $\mathbf{f}=\otimes_{v\in V}\mathbf{f}_v\in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))$.

(i) On a l'égalité

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}^V\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)}e_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\prod_{v\in V}S_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\boldsymbol{\delta}_v,\mathbf{f}_{v,\tilde{L}^v}).$$

(ii) Supposons V *réunion disjointe de* V_1 *et* V_2. *Pour* $i=1,2$, *posons* $\boldsymbol{\delta}_i=\otimes_{v\in V_i}\boldsymbol{\delta}_v$ *et* $\mathbf{f}_i=\otimes_{v\in V_i}\mathbf{f}_v$. *Alors*

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M})}e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)S_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\boldsymbol{\delta}_1,\mathbf{f}_{1,\tilde{L}_1})S_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\boldsymbol{\delta}_2,\mathbf{f}_{2,\tilde{L}_2}).$$

(iii) Supposons V *réduit à une place* v. *Alors*

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}^v\in\mathcal{L}(\tilde{M}_v)}e_{\tilde{M}_v}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^v)S_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}_{\tilde{L}^v}).$$

Preuve. On ne démontre pas cette proposition car nous ferons une démonstration analogue au paragraphe 4.4, dans une situation plus générale. On va simplement montrer ici que (i) est équivalente à la réunion des deux assertions (ii) et (iii).

On va commencer par l'implication (ii)+(iii) implique (i).On raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de V. Si V est réduit à une place v, l'assertion (i) est identique à (iii). Si V a au moins deux éléments, on décompose V en union disjointe $V_1\sqcup V_2$ de deux sous-ensembles non vides, donc de nombres d'éléments strictement inférieurs à celui de V. On applique (ii). Pour $i=1,2$, on applique (i) par récurrence aux termes $S_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_i}(\boldsymbol{\delta}_i,\mathbf{f}_{i,\tilde{L}_i})$ qui interviennent. Il apparaît des ensembles de sommation $\mathcal{L}^{\tilde{L}_i}(\tilde{M}_{V_i})\subset\mathcal{L}(\tilde{M}_{V_i})$. L'ensemble $\mathcal{L}(\tilde{M}_V)$ est le produit de $\mathcal{L}(\tilde{M}_{V_1})$ et de $\mathcal{L}(\tilde{M}_{V_2})$. On pose

$$\mathcal{L}^{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}(\tilde{M}_V)=\mathcal{L}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M}_{V_1})\times\mathcal{L}^{\tilde{L}_2}(\tilde{M}_{V_2}).$$

Un produit pour $i=1,2$ de sommes sur $\mathcal{L}^{\tilde{L}_i}(\tilde{M}_{V_i})$ est donc une somme sur $\mathcal{L}^{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}(\tilde{M}_V)$. D'où

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\boldsymbol{\delta}_1,\mathbf{f}_{1,\tilde{L}_1})S_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\boldsymbol{\delta}_2,\mathbf{f}_{2,\tilde{L}_2})=\sum_{\tilde{L}^V\in\mathcal{L}^{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}(\tilde{M}_V)}e_{\tilde{M}_{V_1}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_1})e_{\tilde{M}_{V_2}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_2})\prod_{v\in V}S_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\boldsymbol{\delta}_v,\mathbf{f}_{v,\tilde{L}^v})$$

(on a noté $\tilde{L}^{V_i}$ pour $i=1,2$ les deux composantes de $\tilde{L}^V$). En inversant les sommes en $\tilde{L}_1,\tilde{L}_2$ et en $\tilde{L}^V$, on obtient

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}^V\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)}E_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\prod_{v\in V}S_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\boldsymbol{\delta}_v,\mathbf{f}_{v,\tilde{L}^v}),$$

où

$$E_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)=\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}^V\in\mathcal{L}^{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}(\tilde{M}_V)}e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)e_{\tilde{M}_{V_1}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_1})e_{\tilde{M}_{V_2}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_2}).$$

Pour obtenir (i), il reste à prouver que, pour $\tilde{L}^V\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)$, on a

$$(1)\qquad E_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)=e_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V).$$

On montre que

(2) s'il existe $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ tels que $\tilde{L}^V \in \mathcal{L}^{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}(\tilde{M}_V)$ et

$$d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) d_{\tilde{M}_{V_1}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M}, \tilde{L}^{V_1}) d_{\tilde{M}_{V_2}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{M}, \tilde{L}^{V_2}) \neq 0,$$

alors $d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}^V) \neq 0$.

L'hypothèse $d_{\tilde{M}_{V_1}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M}, \tilde{L}^{V_1}) \neq 0$ signifie que

$$\Delta_{V_1}(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}) \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}^{V_1}}^{\tilde{L}_1} = \mathcal{A}_{\tilde{M}_{V_1}}^{\tilde{L}_1},$$

où on utilise les notations de 1.4. En ajoutant l'espace $\oplus_{v \in V_1} \mathcal{A}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}$, qui est en somme directe avec les précédents, on obtient

$$\Delta_{V_1}(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}) \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}^{V_1}}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}_{V_1}}^{\tilde{G}}.$$

De même en remplaçant les indices 1 par 2. En sommant les égalités obtenues, on obtient

$$(3) \qquad \Delta_{V_1}(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}) \oplus \Delta_{V_2}(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}) \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}^V}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}.$$

Montrons que l'on a l'inclusion

$$(4) \qquad \Delta_{V_1}(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}) \oplus \Delta_{V_2}(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}) \subset \Delta_V(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}) + (\Delta_{V_1}(\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}) \oplus \Delta_{V_2}(\mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}})).$$

L'hypothèse $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \neq 0$ entraîne que l'application linéaire somme des projections orthogonales

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} & \rightarrow & \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2} \\ H & \mapsto & (H^{\tilde{L}_1}, H^{\tilde{L}_2}) \end{array}$$

est bijective. Pour $i = 1, 2$, soit $H_i \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_i}$. On introduit l'image réciproque H de (H_1, H_2) par l'application précédente. Alors

$$\Delta_{V_1}(H_1) + \Delta_{V_2}(H_2) = \Delta_V(H) - \Delta_{V_1}(H_{\tilde{L}_1}) - \Delta_{V_2}(H_{\tilde{L}_2}).$$

Le membre de droite appartient au membre de droite de (4), ce qui prouve cette assertion.

L'espace $\mathcal{A}_{\tilde{L}^V}^{\tilde{G}}$ contient $\Delta_{V_1}(\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}) \oplus \Delta_{V_2}(\mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}})$. Grâce à (3) et (4), on obtient l'inclusion

$$(5) \qquad \mathcal{A}_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}} = \Delta_{V_1}(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}) \oplus \Delta_{V_2}(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}) \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}^V}^{\tilde{G}} \subset \Delta_V(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}) + \mathcal{A}_{\tilde{L}^V}^{\tilde{G}}.$$

La somme des dimensions est la même des deux côtés. En effet, $\Delta_V(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}})$ a même dimension que $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et, pour $i = 1, 2$, $\Delta_{V_i}(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_i})$ a même dimension que $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_i}$. Or l'hypothèse $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \neq 0$ entraîne que $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}$. Cela implique l'égalité voulue des dimensions. Mais celle-ci implique que les espaces du membre de droite de (5) sont en somme directe et que l'inclusion est une égalité, c'est-à-dire

$$(6) \qquad \Delta_V(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}) \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}^V}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}.$$

Cela signifie que la conclusion de (2) est vérifiée.

Inversement, on a

(7) si $d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\neq 0$, alors il existe un unique couple $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ vérifiant les hypothèses de (2).

Montrons d'abord l'unicité. La condition $\tilde{L}^{V_1}\in\mathcal{L}^{\tilde{L}_1}(\tilde{M}_{V_1})$ signifie que $\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}\subset\mathcal{A}_{\tilde{L}_v}$ pour tout $v\in V_1$. La condition $d^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}_{V_1}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_1})\neq 0$ entraîne

$$\mathcal{A}^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}}\cap(\cap_{v\in V_1}\mathcal{A}^{\tilde{L}_1}_{\tilde{L}_v})=\{0\}.$$

Leur conjonction conduit à l'égalité

$$(8)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{L}_1}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}\cap(\cap_{v\in V_1}\mathcal{A}_{\tilde{L}_v}).$$

D'où l'unicité de $\tilde{L}_1$ et de même celle de $\tilde{L}_2$. Inversement, notons $\mathcal{B}$ l'intersection de droite ci-dessus, soit T le sous-tore défini sur F de $A_{\tilde{M}}$ tel que $X_*(T)=X_*(A_{\tilde{M}})\cap\mathcal{B}$. Soit $\tilde{L}_1$ le commutant de T dans $\tilde{G}$. Il contient $\tilde{M}$ et les $\tilde{L}_v$ pour $v\in V_1$. A fortiori, il est non vide et c'est donc un espace de Levi. Les inclusions ci-dessus entraînent que $\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}$ est contenu dans $\mathcal{B}$. Mais il contient par définition $X_*(T)$ qui engendre $\mathcal{B}$. Il est donc égal à $\mathcal{B}$. Cela prouve l'existence d'un espace de Levi $\tilde{L}_1$ vérifiant (8). On définit de même l'espace $\tilde{L}_2$. On va montrer que le couple $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ vérifie les hypothèses de (2). La définition de ces espaces n'entraîne pas l'égalité (3), mais elle entraîne que les espaces du membre de gauche de cette égalité sont en somme directe. L'hypothèse $d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\neq 0$ entraîne l'égalité (6). On déduit de ces deux faits l'inégalité

$$dim(\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}})\geq dim(\mathcal{A}^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}})+dim(\mathcal{A}^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}}).$$

L'égalité (8) et son analogue pour $\tilde{L}_2$ entraînent que

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}\cap\mathcal{A}_{\tilde{L}_2}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}\cap(\cap_{v\in V}\mathcal{A}_{\tilde{L}_v}).$$

Mais cette intersection est réduite à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ en vertu de l'hypothèse $d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\neq 0$. Donc les espaces $\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}_1}$ et $\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}_2}$ sont en somme directe. En prenant les orthogonaux, on obtient l'égalité

$$\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}=\mathcal{A}^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}}+\mathcal{A}^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}}.$$

L'inégalité de dimensions prouvée ci-dessus entraîne que la somme de droite est directe. D'où $d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\neq 0$. D'où aussi : cette inégalité de dimensions est une égalité. En reprenant le raisonnement conduisant à cette inégalité, on voit que l'égalité (3) est vérifiée. En la projetant sur $\oplus_{v\in V_i}\mathcal{A}^{\tilde{L}_i}_{\tilde{M}}$, on obtient

$$\Delta_{V_i}(\mathcal{A}^{\tilde{L}_i}_{\tilde{M}})\oplus\mathcal{A}^{\tilde{L}_i}_{\tilde{L}^{V_i}}=\mathcal{A}^{\tilde{L}_i}_{\tilde{M}_{V_i}}.$$

Cela signifie que $d^{\tilde{L}_i}_{\tilde{M}_{V_i}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_i})\neq 0$ pour $i=1,2$. Cela prouve (7).

Grâce à (2) et (7), on obtient

$$E^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)=\left\{\begin{array}{cc}0, & \text{si } d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)=0,\\ e^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)e^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}_{V_1}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_1})e^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}_{V_2}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_2}), & \text{si } d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\neq 0,\end{array}\right.$$

où $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ est le couple déterminé par (7). Pour prouver (1), on peut supposer $d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\neq 0$ et il faut prouver l'égalité

$$e^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)=e^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)e^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}_{V_1}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_1})e^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}_{V_2}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_2}).$$

Elle se décompose en les deux égalités

$$d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)=d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)d^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}_{V_1}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_1})d^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}_{V_2}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_2}),$$

et

$$(9)\qquad k^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)=k^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)k^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}_{V_1}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_1})k^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}_{V_2}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_2}).$$

La première se prouve en reprenant les démonstrations de (2) et (7) et en précisant comment se comportent les mesures selon les différentes décompositions en somme directe. On laisse les détails fastidieux au lecteur. Prouvons (9). L'homomorphisme

$$\frac{Z(\hat{M})^{\Gamma_F}}{Z(\hat{G})^{\Gamma_F}}\to\oplus_{v\in V}\frac{Z(\hat{M}_v)^{\Gamma_{F_v}}}{Z(\hat{L}^v)^{\Gamma_{F_v}}}$$

se décompose en le produit de

$$\frac{Z(\hat{M})^{\Gamma_F}}{Z(\hat{G})^{\Gamma_F}}\to\frac{Z(\hat{M})^{\Gamma_F}}{Z(\hat{L}_1)^{\Gamma_F}}\oplus\frac{Z(\hat{M})^{\Gamma_F}}{Z(\hat{L}_2)^{\Gamma_F}}$$

et de

$$\frac{Z(\hat{M})^{\Gamma_F}}{Z(\hat{L}_1)^{\Gamma_F}}\oplus\frac{Z(\hat{M})^{\Gamma_F}}{Z(\hat{L}_2)^{\Gamma_F}}\to\left(\oplus_{v\in V_1}\frac{Z(\hat{M}_v)^{\Gamma_{F_v}}}{Z(\hat{L}^v)^{\Gamma_{F_v}}}\right)\oplus\left(\oplus_{v\in V_2}\frac{Z(\hat{M}_v)^{\Gamma_{F_v}}}{Z(\hat{L}^v)^{\Gamma_{F_v}}}\right).$$

Tous ces homomorphismes sont surjectifs. Donc le nombre d'éléments $k^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)$ du noyau du composé est le produit des nombres d'éléments des noyaux des deux homomorphismes ci-dessus. Ceux-ci sont respectivement $k^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ et $k^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}_{V_1}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_1})k^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}_{V_2}}(\tilde{M},\tilde{L}^{V_2})$. Cela prouve (9) et achève la preuve de l'implication (ii)+(iii) implique (i).

En fait, on a prouvé que, si on admettait (i) pour les facteurs du membre de droite de (ii), alors ce membre de droite était égal à celui de (i). Mais cela démontre que (i) implique (ii). De plus, (iii) n'est que (i) dans le cas particulier où V n'a qu'un élément. Donc (i) implique (ii)+(iii). $\square$

Le (i) de cette proposition ramène la preuve des propriétés requises de la forme bilinéaire $(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})\mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ à celle des mêmes propriétés pour ses avatars locaux. En ce qui concerne les propriétés formelles, on a fait cette preuve en [II] 1.10. La propriété de stabilité a été prouvée en [III] 2.8 dans le cas non-archimédien, en [V] 1.5 et section 4 dans le cas archimédien. Cela prouve le théorème 4.1.

Variante. Supposons donné un système de fonctions B comme en 1.10. En remplaçant les intégrales $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ par leurs variantes $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$ dans les constructions précédentes, on définit les variantes $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})$ des intégrales orbitales pondérées stables. Elles vérifient des propriétés analogues aux précédentes.

4.3 Une propriété de support

Les hypothèses sont les mêmes que dans le paragraphe précédent mais on suppose que V contient V_{ram}.

Lemme. *Soit $\Xi\subset\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ un ensemble compact et soit $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))$. Alors il existe un sous-ensemble compact $\tilde{C}_V$ de $\tilde{M}(F_V)$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_\diamond(\tilde{M}(F_V))\otimes Mes(M(F_V))^*$ vérifiant les deux conditions :*

- l'image par $\tilde{H}_{\tilde{M}_V}$ du support de $\boldsymbol{\delta}$ est contenu dans Ξ,

- $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})\neq 0$,

il existe un élément du support de $\boldsymbol{\delta}$ qui soit conjugué à un élément de $\tilde{C}_V$ par un élément de $M(F_V)$.

Preuve. On utilise la définition. Pour que $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ soit non nul, il faut que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ soit non nul ou qu'il existe $\tilde{s}\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ avec $\tilde{s}\neq 1$ de sorte que $S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})$ soit non nul. Dans le premier cas, on conclut par le lemme 1.12. Dans le deuxième, l'application $\tilde{H}_{\tilde{M}_V}$ ne dépendant pas des espaces ambiants $\tilde{G}$ ou $\tilde{G}'(\tilde{s})$, les hypothèses restent vérifiées si l'on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{G}'(\tilde{s})$. Puisque $\tilde{s}\neq 1$, on peut appliquer le lemme par récurrence, ce qui conduit encore à la conclusion. $\square$

4.4 Le système de fonctions $B^{\tilde{G}}$

Revenons au cas général. Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Nous allons munir $\tilde{G}'$ d'un système de fonctions comme en 1.10 que nous noterons $B^{\tilde{G}}$. On fixe comme toujours une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$ de $\hat{G}$ pour laquelle on utilise les notations usuelles, cf. [I] 1.5. En particulier, on suppose $\tilde{s}=s\hat{\theta}$, avec $s\in\hat{T}$.

Fixons des paires de Borel épinglées $\mathcal{E}=(B,T(,E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G et $\mathcal{E}'=(B',T',(E'_{\alpha'})_{\alpha'\in\Delta'})$ de G'. On suppose $\mathcal{E}'$ définie sur F. On note $\tilde{T}$ l'ensemble des $\gamma\in\tilde{G}$ tels que ad_γ conserve (B,T) et $\tilde{T}'$ l'ensemble des $\delta\in\tilde{G}'$ tels que ad_δ conserve (B',T'). On a un homomorphisme $\xi:T\to T'$, qui se prolonge en une application $\tilde{\xi}:\tilde{T}\to\tilde{T}'$. Soit $\epsilon\in\tilde{T}'$, fixons $\eta\in\tilde{T}$ tel que $\tilde{\xi}(\eta)=\epsilon$, écrivons $\eta=\nu e$, avec $\nu\in T$ et $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$. Notons $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}$ et $\Sigma_\epsilon^{G'}(T')$ celui des racines de T' dans $\mathfrak{g}'_\epsilon$. On a décrit maintes fois ce dernier ensemble. C'est la réunion des ensembles

(a) les $N\alpha$ pour $\alpha\in\Sigma(T)$ de type 1 tels que $N\alpha(\nu)=1$ et $N\hat{\alpha}(s)=1$;

(b) les $2N\alpha$ pour $\alpha\in\Sigma(T)$ de type 2 tels que $N\alpha(\nu)=1$ et $N\hat{\alpha}(s)=1$;

(c) les $2N\alpha$ pour $\alpha\in\Sigma(T)$ de type 2 tels que $N\alpha(\nu)=-1$ et $N\hat{\alpha}(s)=1$;

(d) les $N\alpha$ pour $\alpha\in\Sigma(T)$ de type 3 tels que $N\alpha(\nu)=1$ et $N\hat{\alpha}(s)=-1$.

On a introduit en 1.10 une décomposition $\tilde{T}'=\sqcup_{\Omega\in\underline{\Omega}}\Omega$. Soit $\Omega\in\underline{\Omega}$ tel que $\epsilon\in\Omega$. Soit ϵ' un autre élément de Ω, que l'on relève en $\eta'=\nu'e\in\tilde{T}$. Les ensembles $\Sigma^{G'_\epsilon}(T')$ et $\Sigma^{G'_{\epsilon'}}(T')$ sont égaux par définition de $\underline{\Omega}$. Une racine $N\alpha$ avec α de type 1 ne saurait être égale à une racine $2N\beta$ avec β de type 2, ni à $N\beta$ avec β du type 3. Donc les racines de type (a) pour ϵ sont aussi de type (a) pour ϵ'. De même, les racines de type (d) pour ϵ sont aussi de type (d) pour ϵ'. Par contre, une racine de type (b), resp. (c), pour ϵ pourrait être de type (b) ou (c) pour ϵ'. Mais, en tout cas, pour une racine $2N\alpha$ de type (b) ou (c) pour ϵ, on a forcément $N\alpha(\nu')=\pm 1$. Or Ω est connexe par définition. Son image réciproque dans $\tilde{T}$ l'est aussi. Cela entraîne que $N\alpha(\nu')$ est constant quand ϵ' parcourt Ω. Alors les racines de type (b), resp. (c), pour ϵ sont aussi de type (b), resp. (c), pour tout $\epsilon'\in\Omega$. On définit alors une fonction $B_\Omega^{\tilde{G}}$ sur $\Sigma(\Omega)=\Sigma^{G'_\epsilon}(T')$ de la façon suivante. Dans le cas (a), $B_\Omega^{\tilde{G}}(N\alpha)=n_\alpha$; dans le cas (b), $B_\Omega^{\tilde{G}}(2N\alpha)=2n_\alpha$; dans le cas (c), $B_\Omega^{\tilde{G}}(2N\alpha)=n_\alpha$; dans le cas (d), $B_\Omega^{\tilde{G}}(N\alpha)=2n_\alpha$. La même preuve qu'en [II] 1.11 montre que la famille de fonctions $(B_\Omega^{\tilde{G}})_{\Omega\in\underline{\Omega}}$ ainsi définie vérifie les conditions de 1.10.

La même construction vaut si l'on travaille avec un K-triplet $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$ puisque seule intervient *la* paire de Borel épinglée associée à ce K-triplet.

4.5 Intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes endoscopiques

Commençons par quelques rappels locaux. Pour quelques instants, supposons que F soit un corps local non-archimédien de caractéristique nulle. Considérons un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ défini sur F, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et une donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$ elliptique et relevante. Pour $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F))^*$ et $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$, on a défini en [II] 1.12 un terme $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$. On en a déduit en [II] 1.15 une forme bilinéaire

$$(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})\mapsto I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$$

sur

$$(D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*)\times(I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))).$$

Le procédé consistait à écrire $\boldsymbol{\gamma}$ comme somme $\sum_{i=1,...,n} transfert(\boldsymbol{\delta}_i)$, où $\boldsymbol{\delta}_i$ est une distribution géométrique stable dans une donnée endoscopiques $\mathbf{M}'_i$, et à poser

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=\sum_{i=1,...,n} I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}'_i,\boldsymbol{\delta}_i,\mathbf{f}).$$

Pour la suite, on doit généraliser la définition de $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ au cas où $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$ qui est relevante mais pas forcément elliptique. Dans ce cas, il correspond à $\tilde{M}'$ un Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ et $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(R,\tilde{R},\mathbf{a})$. On définit

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L})I^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{R}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

En vertu de la relation [II] 1.15(1), on a encore l'égalité

$$(1)\qquad I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),\mathbf{f})=I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}).$$

Supposons maintenant que $F=\mathbb{R}$ ou $F=\mathbb{C}$. Des constructions analogues valent d'après [V] 1.7, 1.8 et 2.4. Il y a quelques modifications. On doit travailler avec un K-espace $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$ et un K-espace de Levi $K\tilde{M}$. Pour une donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a}_M)$ elliptique et relevante, on a défini en [V] 1.7 l'espace $D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\mathbf{M}')$. On note $D^{st}_{\diamond}(\mathbf{M}')$ la somme de cet espace et de $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{M}')$. Les termes $I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ sont définis pour $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{\diamond}(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F))^*$. Comme ci-dessus, les constructions se généralisent au cas où $\mathbf{M}'$ est relevante mais pas elliptique. On a une égalité analogue à (1). Les termes $I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ sont définis pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$.

Revenons à notre corps de nombres F et considérons un K-triplet $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$ comme en 1.16. Soient V un ensemble fini de places de F, $K\tilde{M}$ un élément de $\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ et $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. Pour $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, on définit comme dans le cas local la donnée endoscopique $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ qui contient $\mathbf{M}'$ comme donnée de Levi. On pose $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))=0$ si $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ n'est pas elliptique (on utilise ici et dans la suite la notation symbolique $\tilde{G}$ au lieu de $K\tilde{G}$ chaque fois que cela peut se faire sans ambiguïté). Si cette donnée est elliptique, on pose

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))=[Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}:(Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{M}))][Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}:(Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}))]^{-1}.$$

Comme en [II] 1.12, il y a un homomorphisme naturel

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}.$$

Il est surjectif et de noyau fini. Alors $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$ est l'inverse du nombre d'éléments de ce noyau.

On a défini en [V] 1.7 et ci-dessus les espaces $D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}'_v)$ et $D^{st}_{\diamond}(\mathbf{M}'_v)$ pour une place v archimédienne. Il s'en déduit comme en 1.8 des espaces $D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}'_V)$ et $D^{st}_{\diamond}(\mathbf{M}'_v)$. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{\diamond}(\mathbf{M}'_V) \otimes Mes(M'(F_V))^*$ et $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(F_V),\omega) \otimes Mes(G(F_V))$, on peut alors définir

$$(2) \qquad I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Pour définir des termes $I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$, on ne peut pas appliquer le même procédé que dans le cas local car, dans le cas global, il n'y a pas en général suffisamment de données endoscopiques définies sur F de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a}_M)$ pour écrire $\boldsymbol{\gamma}$ comme somme de transfert à partir de telles données. Mais soient $\boldsymbol{\gamma} = \otimes\boldsymbol{\gamma}_v \in D_{géom,\tilde{G}-équi}(K\tilde{M}(F_V),\omega)\otimes Mes(F_V)^*$ et $\mathbf{f} = \otimes\mathbf{f}_v \in I(K\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))$. Puisqu'on a déjà défini les formes bilinéaires locales, on peut poser

$$(3) \qquad I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L}^V\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_V)} d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\prod_{v\in V} I^{K\tilde{L}^v,\mathcal{E}}_{K\tilde{M}_v}(\boldsymbol{\gamma}_v,\mathbf{f}_{v,\tilde{L}^v,\omega}).$$

Cette définition se prolonge par multilinéarité à tout $\boldsymbol{\gamma}$ et tout $\mathbf{f}$.

Proposition. *Soient $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a}_M)$ et $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))$.*

(i) Soit $\boldsymbol{\delta} = \otimes_{v\in V}\boldsymbol{\delta}_v \in D^{st}_{\diamond}(\mathbf{M}'_V)\otimes Mes(M'(F_V))^*$. On a l'égalité

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}^V\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\prod_{v\in V} I^{K\tilde{L}^v,\mathcal{E}}_{K\tilde{M}_v}(\mathbf{M}'_v,\boldsymbol{\delta}_v,\mathbf{f}_{v,K\tilde{L}^v,\omega}).$$

(ii) Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}'_V)\otimes Mes(M'(F_V))^*$. On a l'égalité

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),\mathbf{f}) = I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}).$$

Preuve. Dans le cas local, la relation (ii) est vraie d'après (1). Dans le cas présent, cette relation résulte donc de (i) et de la définition (3). On pourrait prouver (i) directement. Mais, pour être plus clair, on la décompose en deux assertions :

(4) si $V = V_1 \sqcup V_2$, on a l'égalité

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(K\tilde{M})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2) I^{K\tilde{L}_1,\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}_1,\mathbf{f}_{1,K\tilde{L}_1,\omega}) I^{K\tilde{L}_2,\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}_2,\mathbf{f}_{2,K\tilde{L}_2,\omega})$$

(avec des notations évidentes) ;

(5) si V est réduit à une place v, on a l'égalité

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{K\tilde{L}^v\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_v)}d_{\tilde{M}_v}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^v)I_{K\tilde{M}_v}^{K\tilde{L}^v,\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_v,\boldsymbol{\delta}_v,\mathbf{f}_{v,K\tilde{L}^v,\omega}).$$

Comme dans la démonstration de 4.1, la réunion de ces deux assertions équivaut à (i).

Prouvons (4). Dans le membre de droite de la définition (2), on applique la formule (ii) de la proposition 4.2. Notons que les fonctions $B^{\tilde{L}_i}$ pour $i=1,2$ qui interviennent sont les restrictions de la fonction $B^{\tilde{G}}$. Pour simplifier, on les note encore $B^{\tilde{G}}$. On obtient

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{\tilde{L}'_{\tilde{s},1},\tilde{L}'_{\tilde{s},2}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M})}e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{L}'_{\tilde{s},1},\tilde{L}'_{\tilde{s},2})S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{L}'_1(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_1,B^{\tilde{G}},(\mathbf{f}_1^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathbf{L}'_1(\tilde{s})})S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{L}'_2(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_2,B^{\tilde{G}},(\mathbf{f}_2^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathbf{L}'_2(\tilde{s})}).$$

Expliquons la notation. Un espace de Levi $\tilde{L}'_{\tilde{s},1}$ intervenant dans cette formule détermine un K-espace de Levi $K\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(K\tilde{M})$ par l'égalité $\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}=\mathcal{A}_{\tilde{L}'_{\tilde{s},1}}$. Alors $\tilde{L}'_{\tilde{s},1}$ s'identifie à l'espace $\tilde{L}'_1(\tilde{s})$ associé à la donnée endoscopique elliptique $\mathbf{L}'_1(\tilde{s})$ de $(KL_1,K\tilde{L}_1,\mathbf{a}_{L_1})$. On a l'égalité $(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathbf{L}'_{\tilde{s},1}}=(\mathbf{f}_{\tilde{L}_1,\omega})^{\mathbf{L}'_1(\tilde{s})}$. Regroupons les termes selon les couples $(K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2)$ d'espaces de Levi qui apparaissent. Pour un tel couple, notons $S(K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2)$ l'ensemble des $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tels que $\mathbf{L}'_i(\tilde{s})$ soit elliptique pour $i=1,2$. On obtient

$$(6)\qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(K\tilde{M})}X(K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2),$$

où

$$X(K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2)=\sum_{\tilde{s}\in S(K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2)}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{L}'_1(\tilde{s}),\tilde{L}'_2(\tilde{s}))$$

$$S_{\tilde{M}'}^{\mathbf{L}'_1(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_1,B^{\tilde{G}},(\mathbf{f}_{1,\tilde{L}_1,\omega})^{\mathbf{L}'_1(\tilde{s})})S_{\tilde{M}'}^{\mathbf{L}'_2(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_2,B^{\tilde{G}},(\mathbf{f}_{2,\tilde{L}_2,\omega})^{\mathbf{L}'_2(\tilde{s})}).$$

Fixons $K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(K\tilde{M})$. Soit $\tilde{s}$ contribuant de façon non nulle à la somme $X(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$. La donnée $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ doit être elliptique (sinon $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))=0$). Les données $\mathbf{L}'_i(\tilde{s})$ aussi, pour $i=1,2$. Le coefficient $e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{L}'_1(\tilde{s}),\tilde{L}'_2(\tilde{s}))$ contient $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{L}'_1(\tilde{s}),\tilde{L}'_2(\tilde{s}))$. Celui-ci ne dépend que des espaces $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, $\mathcal{A}_{\tilde{G}'(\tilde{s})}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{L}'_i(\tilde{s})}$ pour $i=1,2$. Mais, par ellipticité, ces derniers sont respectivement égaux à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{L}_i}$ pour $i=1,2$. On obtient l'égalité

$$d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{L}'_1(\tilde{s}),\tilde{L}'_2(\tilde{s}))=d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2).$$

Si ce dernier terme est nul, on a donc $X(K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2)=0$. Supposons $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\neq 0$. Le calcul ci-dessus permet de récrire

$$(7)\qquad X(K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2)=d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\sum_{\tilde{s}\in S(K\tilde{L}_1,K\tilde{L}_2)}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))k_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{L}'_1(\tilde{s}),\tilde{L}'_2(\tilde{s}))^{-1}$$

$$S_{\tilde{M}'}^{\mathbf{L}'_1(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_1,B^{\tilde{G}},(\mathbf{f}_{1,\tilde{L}_1,\omega})^{\mathbf{L}'_1(\tilde{s})})S_{\tilde{M}'}^{\mathbf{L}'_2(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_2,B^{\tilde{G}},(\mathbf{f}_{2,\tilde{L}_2,\omega})^{\mathbf{L}'_2(\tilde{s})}).$$

Introduisons l'homomorphisme

$$q : Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L}_1)^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \oplus Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L}_2)^{\Gamma_F,\hat{\theta}}.$$

L'hypothèse $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \neq 0$ implique qu'il est surjectif et de noyau fini. Pour $\tilde{s} = s\tilde{\zeta}$ avec $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, posons $q(s) = (s_1, s_2)$ et $\tilde{s}_i = s_i\tilde{\zeta}$ pour $i = 1, 2$. On a $\tilde{L}_i(\tilde{s}) = \tilde{L}_i(\tilde{s}_i)$. Montrons que

(8) pour $\tilde{s} \in S(K\tilde{L}_1, K\tilde{L}_2)$, on a l'égalité

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))k_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{L}'_1(\tilde{s}), \tilde{L}'_2(\tilde{s}))^{-1} = k_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)^{-1}i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}_1, \tilde{L}'_1(\tilde{s}_1))i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}_2, \tilde{L}'_2(\tilde{s}_2)).$$

On a

$$\mathcal{A}_{\tilde{G}'(\tilde{s})} \subset \mathcal{A}_{\tilde{L}'_1(\tilde{s})} \cap \mathcal{A}_{\tilde{L}'_1(\tilde{s})} = \mathcal{A}_{\tilde{L}_1} \cap \mathcal{A}_{\tilde{L}_2} = \mathcal{A}_{\tilde{G}}.$$

Donc $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ est elliptique et $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$ est l'inverse du nombre d'éléments du noyau de l'homomorphisme

$$r : Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}.$$

Introduisons les homomorphismes

$$\begin{aligned} r_{12} : Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L}_1)^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \oplus Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L}_2)^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to \quad & Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}'_1(\tilde{s}_1))^{\Gamma_F} \\ & \oplus Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}'_2(\tilde{s}_2))^{\Gamma_F} \end{aligned}$$

et

$$q_{12} : Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}'_1(\tilde{s}_1))^{\Gamma_F} \oplus Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}'_2(\tilde{s}_2))^{\Gamma_F}.$$

On a l'égalité $r_{12} \circ q = q_{12} \circ r$. Tous ces homomorphismes sont surjectifs et de noyaux finis. Le nombre d'éléments du noyau du composé est donc égal au produit des nombres d'éléments des noyaux de r_{12} et de q, ou de q_{12} et de r. Ces noyaux ont pour nombre d'éléments $i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}_1, \tilde{L}'_1(\tilde{s}_1))^{-1}i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}_2, \tilde{L}'_2(\tilde{s}_2))^{-1}$ pour r_{12}, $k_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ pour q, $k_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{L}'_1(\tilde{s}), \tilde{L}'_2(\tilde{s}))$ pour q_{12} et $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))^{-1}$ pour r. L'assertion (8) s'ensuit.

Il résulte de (8) que le terme que l'on somme dans (7) ne dépend que du couple $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$. On peut récrire (7) comme une somme sur ces couples $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$, le terme que l'on somme étant multiplié par le nombre des $\tilde{s} \in S(K\tilde{L}_1, K\tilde{L}_2)$ qui se projettent sur le couple en question. Par définition de $S(K\tilde{L}_1, K\tilde{L}_2)$, ce nombre est nul si l'un des $\tilde{L}'_i(\tilde{s}_i)$ n'est pas elliptique. Sinon, c'est le nombre d'éléments du noyau de q, c'est-à-dire $k_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$. Ce terme compense le même facteur intervenant dans le membre de droite de (8). D'autre part, on se rappelle que la condition $i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}_i, \tilde{L}'_i(\tilde{s}_i)) \neq 0$ équivaut à l'ellipticité de $\tilde{L}'_i(\tilde{s}_i)$. On obtient l'égalité

$$X(K\tilde{L}_1, K\tilde{L}_2) = d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \prod_{i=1,2} \sum_{\tilde{s}_i \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L}_i)^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}_i, \tilde{L}'_i(\tilde{s}_i))$$

$$S_{\tilde{M}'}^{\mathbf{L}'_i(\tilde{s}_i)}(\boldsymbol{\delta}_i, B^{\tilde{G}}, (\mathbf{f}_{i,\tilde{L}_i,\omega})^{\mathbf{L}'_i(\tilde{s}_i)}).$$

La somme en $\tilde{s}_i$ est égale par définition à $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}_i,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{f}_{i,\tilde{L}_i,\omega})$. Donc

$$X(K\tilde{L}_1, K\tilde{L}_2) = d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}_1,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}_1, \mathbf{f}_{1,\tilde{L}_1,\omega})I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}_2,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}_2, \mathbf{f}_{2,\tilde{L}_2,\omega}).$$

Les membres de droite de (4) et (6) sont alors égaux, ce qui démontre (4).

Esquissons la preuve de (5). On a ici $V=\{v\}$. La donnée $\mathbf{M}'_v$ de $(KM_v,K\tilde{M}_v,\mathbf{a}_{M_v})$ n'est pas forcément elliptique mais elle est relevante. Il lui correspond un K-espace de Levi $K\tilde{R}$ de $K\tilde{M}$. D'après nos définitions, le membre de droite de (5) est égal à

$$\sum_{K\tilde{L}^v\in\mathcal{L}(K\tilde{M}_v)} d_{\tilde{M}_v}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^v)\sum_{K\tilde{S}^v\in\mathcal{L}(K\tilde{R}_v)} d_{\tilde{R}_v}^{\tilde{L}^v}(\tilde{M}_v,\tilde{S}^v)I_{K\tilde{R}_v}^{K\tilde{S}^v,\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_v,\boldsymbol{\delta}_v,\mathbf{f}_{v,K\tilde{S}^v,\omega}).$$

En échangeant les lettres L et S, on obtient

$$\sum_{K\tilde{L}^v\in\mathcal{L}(K\tilde{R}_v)} X_{\tilde{R}_v}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^v)I_{K\tilde{R}_v}^{K\tilde{L}^v,\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_v,\boldsymbol{\delta}_v,\mathbf{f}_{v,K\tilde{L}^v,\omega})$$

où

$$X_{\tilde{R}_v}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^v)=\sum_{K\tilde{S}^v\in\mathcal{L}(K\tilde{L}^v)} d_{\tilde{M}_v}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{S}^v)d_{\tilde{R}_v}^{\tilde{S}^v}(\tilde{M}_v,\tilde{L}^v).$$

Un calcul déjà fait plusieurs fois prouve que $X_{\tilde{R}_v}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^v)=d_{\tilde{R}_v}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^v)$. La relation (5) équivaut donc à

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{K\tilde{L}^v\in\mathcal{L}(K\tilde{R}_v)} d_{\tilde{R}_v}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^v)I_{K\tilde{R}_v}^{K\tilde{L}^v,\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_v,\boldsymbol{\delta}_v,\mathbf{f}_{v,K\tilde{L}^v,\omega}).$$

La preuve de cette égalité est similaire à celle de (4) et d'ailleurs presque identique à celle de la proposition [II] 1.14(i). On la laisse au lecteur. □

Remarque. La preuve de (4) est réversible en ce sens que, si l'on suppose vérifiée la relation (i) de l'énoncé ainsi que la formule (ii) de la proposition 4.2 pour tous les termes sauf un du membre de droite de la définition (2), on en déduit cette formule (ii) pour le terme restant. Dans cette direction, cela prouve par récurrence cette formule (ii) de la proposition 4.2, puisque dans la situation de ce paragraphe, l'analogue de la relation (i) est connue pour le terme $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$.

Pourquoi avoir travaillé ici avec des K-espaces ? Parce que, dans le cas local et pour un unique triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$, on ne connaît pas (pas encore, plutôt) l'analogue de la relation (ii) de l'énoncé. Expliquons cela. Supposons qu'un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ soit une composante connexe d'un K-triplet $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$, disons que c'est la composante indexée par $p\in\Pi$. On peut appliquer la relation (ii) de l'énoncé à une fonction $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))$ identifiée à un élément de $I(K\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))$ nul sur les autres composantes connexes. Mais $transfert(\boldsymbol{\delta})$ vit sur toutes les composantes connexes, il est de la forme $\oplus_{q\in\Pi}\boldsymbol{\gamma}_q$, où $\boldsymbol{\gamma}_q\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}_q(F_V),\omega)\otimes Mes(M(F_V))^*$. Le membre de gauche de (ii) est égal à

$$\sum_{q\in\Pi} I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}_q,\mathbf{f}).$$

Bien que $\mathbf{f}$ soit concentrée sur la composante $\tilde{G}_p$, on ne sait pas a priori que $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}_q,\mathbf{f})=0$ pour $q\neq p$. C'est l'unique raison, nous semble-t-il, pour laquelle nous devrons travailler avec des K-espaces. Notons toutefois que, pour un seul triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$, on peut parfaitement définir $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ comme le membre de droite de la formule (1). Si on inclut $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ comme composante connexe d'un triplet $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$, ce terme coïncide avec

$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$, où $\mathbf{f}$ est identifié à une fonction sur $K\tilde{G}(F_V)$ nulle sur les autres composantes.

Dans le cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, si l'on fixe un système de fonctions B comme en 1.10, on peut aussi définir le terme $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$.

4.6 Le résultat de comparaison des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes

Les hypothèses sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

Proposition (à prouver). *Pour tout* $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\tilde{G}-équi}(K\tilde{M}(F_V), \omega) \otimes Mes(M(F_V))^*$ *et tout* $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(F_V), \omega) \otimes Mes(G(F_V))$*, on a l'égalité* $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$.

D'après la définition du membre de gauche et la formule de descente 1.11(1), la proposition résulte de ses analogues locales, c'est-à-dire des théorèmes 1.16 de [II] et 1.10 de [V], qui restent à prouver.

4.7 Une autre forme du résultat de comparaison

On conserve la même situation.

Proposition. *On admet la validité des théorèmes 1.16 de [II] et 1.10 de [V]. Soit* $\mathbf{M}'$ *une donnée endoscopique de* $(KM, K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$ *elliptique et relevante. Soit* $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{M}'_V) \otimes Mes(M'(F_V))^*$*. Alors, pour tout* $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(F_V), \omega) \otimes Mes(G(F_V))^*$*, on a l'égalité*

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}).$$

Remarquons que $transfert(\boldsymbol{\delta})$ appartient à $D_{tr-orb}(K\tilde{M}(F_V), \omega) \otimes Mes(M(F_V))^*$. Comme on l'a vu dans la section 5 de [V], la validité du théorème [V] 1.10 permet de définir le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé.

Preuve. Le membre de gauche de l'égalité à prouver vérifie la formule de descente 1.11(1). Celui de droite vérifie la formule parallèle de la proposition 4.5(i). Cela nous ramène à prouver l'analogue locale de l'égalité. En une place non-archimédienne, cette égalité résulte directement du théorème [II] 1.16. En une place réelle, on a vu dans la section 5 de [V] qu'elle résultait (moins directement) du théorème [V] 1.10. □

4.8 Le cas quasi-déployé et à torsion intérieure

Soient $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet quasi-déployé et à torsion intérieure, B un système de fonctions comme en 1.10 et V un ensemble fini de places de F. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M})$.

Corollaire. *Pour tout* $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F_V))^*$ *et tout* $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$*, on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), B, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}).$$

L'argument est le même que dans le paragraphe précédent. Parce que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, le théorème [II] 1.16 est prouvé (cf. [III] proposition 2.9) et un substitut du théorème [V] 1.10 aussi : c'est la proposition [V] 1.13 dont on a vu dans la section 4 de [V] qu'elle suffisait à notre propos.

5 La formule des traces stable

5.1 Quelques définitions

Soit V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)$ des classes d'équivalence de données endoscopiques de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ qui sont elliptiques, relevantes et non ramifiées hors de V.

Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)$. On munit G' des objets auxiliaires de 3.1. En particulier, pour $v\not\in V_{ram}(\mathbf{G}')$, on fixe un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}_v^{G'}$ de $\tilde{G}'(F_v)$ correspondant à $\tilde{K}_v$. De l'homomorphisme naturel $A_{\tilde{G}}\to A_{G'}$ se déduit un homomorphisme $\mathcal{A}_{\tilde{G}}\to\mathcal{A}_{G'}$. C'est un isomorphisme par l'hypothèse d'ellipticité. Il préserve les mesures par définition de celles-ci.

Considérons <u>*les*</u> paires de Borel épinglées de G et G', dont on note les tores T^* et T'^*. Les classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}(\bar{F})$, resp. $\tilde{G}'(\bar{F})$, sont classifiées par

$$((T^*/(1-\theta)(T^*))/W^\theta)\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G}),$$

resp.

$$(T'^*/W^{G'})\times_{Z(G')}\mathcal{Z}(\tilde{G}').$$

Il y a une application naturelle du second ensemble dans le premier, autrement dit une application qui, à une classe de conjugaison semi-simple dans $\tilde{G}'(\bar{F})$, associe une telle classe dans $\tilde{G}(\bar{F})$. Cette application est équivariante pour les actions galoisiennes. Les classes de conjugaison géométriques (c'est-à-dire par $G(\bar{F})$) semi-simples dans $\tilde{G}(F)$ sont classifiées par un sous-ensemble de

$$\Big(((T^*/(1-\theta)(T^*))/W^\theta)\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})\Big)^{\Gamma_F}.$$

La description exacte de ce sous-ensemble est compliquée.

On définit la conjugaison stable entre éléments semi-simples de $\tilde{G}(F)$ comme dans le cas local. Deux éléments $\eta,\eta'\in\tilde{G}_{ss}(F)$ sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $g\in G(\bar{F})$ tel que $g^{-1}\eta g=\eta'$ et $g\sigma(g)^{-1}\in I_\eta(\bar{F})$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, où $I_\eta=Z(G)^\theta G_\eta$. La correspondance ci-dessus se raffine en une correspondance entre classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}'_{ss}(F)$ et classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ss}(F)$.

De même, si on se place sur l'anneau F_V, la correspondance ci-dessus se raffine en une correspondance entre classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}'_{ss}(F_V)$ et classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)$. Si $\mathcal{O}$ est une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)$, on note $\mathcal{O}_{\tilde{G}'}$ la réunion (finie, éventuellement vide) des classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}'_{ss}(F_V)$ qui correspondent à $\mathcal{O}$.

On note $Aut(\mathbf{G}')$ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{G}'$. En fixant une paire de Borel épinglée convenable de $\hat{G}$, on a une suite exacte

$$1\to(Z(\hat{G})/(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}))^{\Gamma_F}\to Aut(\mathbf{G}')/\hat{G}'\to Out(\mathbf{G}')\to 1,$$

où $Out(\mathbf{G}')$ est un sous-groupe du groupe des automorphismes extérieurs de G'. On note selon l'usage $\pi_0(X)$ le groupe des composantes connnexes d'un groupe algébrique complexe X. On pose

$$i(\tilde{G},\tilde{G}') = |Out(\mathbf{G}')|^{-1}|det((1-\theta)_{|\mathfrak{A}_G/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})||ker^1(F,Z(\hat{G}))|^{-1}$$

$$|\pi_0((Z(\hat{G})/(Z(\hat{G})\cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}))^{\Gamma_F})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})||\pi_0(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F})|^{-1}|ker^1(F,Z(\hat{G}'))|.$$

Remarquons que, par exemple, le produit $|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})||ker^1(F,Z(\hat{G}))|^{-1}$ peut s'interpréter comme le nombre de Tamagawa de G. Notons-le $\tau(G)$. La formule ci-dessus se récrit

$$i(\tilde{G},\tilde{G}') = |\pi_0(Aut(\mathbf{G}'))|^{-1}det((1-\theta)_{|\mathfrak{A}_G/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})|\tau(G)\tau(G')^{-1}.$$

On a défini la distribution $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)\in D_{orb}(\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))^*$ pour une classe de conjugaison par $G(F_V)$ dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)$. Si $\mathcal{O}$ est maintenant une réunion finie de telles classes, on note $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ la somme des distributions associées à chacune de ces classes. En particulier, $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ est défini pour une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$ dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)$.

5.2 Les distributions $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})$

La situation est la même que dans le paragraphe précédent. On suppose de plus $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Pour toute classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$ dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)$, on va définir une distribution $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})\in D_{tr-orb}(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$. Comme toujours, on a besoin de supposer par récurrence que cette distribution vérifie certaines propriétés. Il y a les propriétés formelles qui permettent de "recoller" ces distributions dans la situation de 1.15. Elles sont faciles à vérifier par récurrence et on les abandonne au lecteur. Il y a une autre propriété plus subtile. La distribution $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})$ dépend des $\tilde{K}_v$ pour $v\notin V$, ou plus exactement des classes de conjugaison par $G(F_v)$ des $\tilde{K}_v$. La définition ci-dessous fournit une distribution $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})$ qui en dépend aussi. De fait, elle en dépend. Mais on a besoin de savoir que

(1) elle ne dépend que des classes de conjugaison par $G_{AD}(F_v)$ des $\tilde{K}_v$, pour $v\notin V$.

On a surtout besoin de supposer par récurrence que cette distribution $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})$ est stable. Modulo ces propriétés, si $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',s)$ est une donnée endoscopique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ non ramifiée hors de V, avec $dim(G'_{SC})<dim(G_{SC})$, et si $\mathcal{O}'$ est une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}'_{ss}(F_V)$, on peut définir la distribution $SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}')\in D^{st}_{géom}(\mathbf{G}'_V)\otimes Mes(G'(F_V))^*$.

Remarque. Quant à la dépendance des espaces hyperspéciaux, une extension formelle de la propriété (1) montre que cette distribution ne dépend que des classes de conjugaison par $G'_{AD}(F_v)$ des $\tilde{K}'_v$, pour $v\notin V$. Mais ces classes sont bien déterminées par les $\tilde{K}_v$. Donc $SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}')$ ne dépend que des $\tilde{K}_v$.

On peut alors poser la définition

$$SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}) = A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}) - \sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},V),G'\neq G} i(\tilde{G},\tilde{G}')transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}_{\tilde{G}'})).$$

Remarquons que la définition entraîne par récurrence que $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})$ est à support dans l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F_V)$ dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$.

Enonçons les propriétés de notre distribution sous la forme d'un théorème à prouver.

Théorème (à prouver). *On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{G}(F_V)$. Alors $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})$ est stable et vérifie (1).*

5.3 Propriétés des distributions $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})$

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soient V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram} et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)$. On a

(1) si $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})\neq 0$ alors il existe un élément semi-simple $\gamma\in\tilde{G}_{ss}(F)$ dont la projection dans $\tilde{G}(F_V)$ appartienne à $\mathcal{O}$ et tel que $\tilde{H}_{\tilde{G}_V}(\gamma)=0$.

Preuve. D'après la définition de 5.1, la condition $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})\neq 0$ entraîne que $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})\neq 0$ ou qu'il existe $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},V)$, avec $G'\neq G$, tel que $SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}_{\tilde{G}'})\neq 0$. Si $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O})\neq 0$, la définition de 2.7 entraîne qu'il existe $\gamma\in\tilde{G}_{ss}(F)$ dont la projection dans $\tilde{G}(F_V)$ appartienne à $\mathcal{O}$ et tel que, pour $v\not\in V$, γ soit conjugué à un élément de $\tilde{K}_v$ par un élément de $G(F_v)$. Cette dernière condition et la formule de produit entraîne que $\tilde{H}_{\tilde{G}_V}(\gamma)=0$. Soit $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},V)$, avec $G'\neq G$, supposons $SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}_{\tilde{G}'})\neq 0$. En raisonnant par récurrence, on peut supposer qu'il existe $\gamma'\in\tilde{G}'_{ss}(F)$ dont la projection dans $\tilde{G}'(F_V)$ appartienne à $\mathcal{O}_{\tilde{G}'}$ et tel que $\tilde{H}_{\tilde{G}'_V}(\gamma')=0$. Puisque $\mathcal{O}_{\tilde{G}'}$ est l'ensemble des classes de conjugaison stable correspondant à $\mathcal{O}$, il existe $\gamma\in\mathcal{O}$ et un diagramme $(\gamma',B',T',B,T,\gamma)$. Puisque $\mathbf{G}'$ est elliptique, les applications $\tilde{H}_{\tilde{G}_V}$ et $\tilde{H}_{\tilde{G}'_V}$ sont compatibles, c'est-à-dire que $\tilde{H}_{\tilde{G}_V}(\gamma)=\tilde{H}_{\tilde{G}'_V}(\gamma')=0$. $\square$

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi propre de $\tilde{G}$ et soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable dans $\tilde{M}_{ss}(F_V)$. Fixons un système de fonctions B comme en 1.10. Rappelons que l'on impose que les valeurs des fonctions B_η pour $\eta\in\tilde{G}(\bar{F})$ sont des unités hors de V_{ram}, a fortiori hors de V. On sait définir $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(SA^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O}),B,\mathbf{f})$ pour tout $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))$.

Lemme. *L'égalité*

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(SA^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O}),B,\mathbf{f})=S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(SA^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f})$$

est vérifiée pour tout $\mathcal{O}$.

Remarque. Si le support de $\mathcal{O}$ est formé d'éléments $\gamma\in\tilde{M}(F_V)$ qui sont $\tilde{G}$-équisinguliers, c'est évident. En effet, dans ce cas, l'égalité $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})=S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ est vérifiée pour n'importe quel élément $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(F_V))^*$.

Preuve. En utilisant la définition de 4.1 et en raisonnant par récurrence, il suffit de prouver l'égalité

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(SA^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O}),B,\mathbf{f})=I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(SA^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f}).$$

En utilisant la définition de 5.1, cette égalité résulte de l'égalité

$$(2)\qquad I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O}),B,\mathbf{f})=I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O}),\mathbf{f}),$$

et, pour tout $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta) \in \mathcal{E}(\tilde{M}, V)$, avec $M' \neq M$, de l'égalité

$$(3) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(SA^{\mathbf{M}'}(V, \mathcal{O}_{\tilde{M}'})), B, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(SA^{\mathbf{M}'}(V, \mathcal{O}_{\tilde{M}'})), \mathbf{f}).$$

La distribution $A^{\tilde{M}}(V, \mathcal{O})$ est combinaison linéaire d'intégrales orbitales vérifiant l'hypothèse du lemme 1.14 et l'égalité (2) résulte de ce lemme. Les membres de gauche et de droite de (3) sont respectivement égaux à $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', SA^{\mathbf{M}'}(V, \mathcal{O}_{\tilde{M}'}), B, \mathbf{f})$ et $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', SA^{\mathbf{M}'}(V, \mathcal{O}_{\tilde{M}'}), \mathbf{f})$ d'après le corollaire 4.8. En utilisant la définition 4.5(1) de ce dernier terme et la variante ce cette définition pour le premier, on voit que, pour prouver qu'ils sont égaux, il suffit de fixer $s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ et de prouver l'égalité

$$S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(s)}(SA^{\mathbf{M}'}(V, \mathcal{O}_{\tilde{M}'}), B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}) = S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(s)}(SA^{\mathbf{M}'}(V, \mathcal{O}_{\tilde{M}'}), \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

C'est l'égalité de l'énoncé que l'on peut appliquer par récurrence puisque $M' \neq M$ donc $G'(s) \neq G$. $\square$

5.4 Les distributions $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{O}, \omega)$

Revenons au cas général. Pour une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $\tilde{G}(F_V)$, on pose

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{O}, \omega) = \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)} i(\tilde{G}, \tilde{G}') transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{O}_{\tilde{G}'})).$$

Cette distribution $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{O}, \omega)$ est un élément de $D_{tr-orb}(\tilde{G}(F_V), \omega) \otimes Mes(G(F_V))^*$. Son support est contenu dans l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F_V)$ dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$.

Remarque. Le cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure est un cas particulier. Dans ce cas, nos hypothèses de récurrence ne s'appliquent pas à la donnée endoscopique maximale $\mathbf{G}$. Il convient de remplacer le terme $transfert(SA^{\mathbf{G}}(V, \mathcal{O}))$ intervenant dans la somme par $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O})$. On a alors $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{O}) = A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O})$ par définition de $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O})$.

Théorème (à prouver). *Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{G}(F_V)$. Alors, on a l'égalité $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{O}, \omega) = A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}, \omega)$.*

La définition ci-dessus s'adapte immédiatement aux K-espaces. Pour un tel K-espace, une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ est réunion disjointe de telles classes $\mathcal{O}_p$ pour $p \in \Pi$. On a simplement $A^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{O}, \omega) = \oplus_{p \in \Pi} A^{\tilde{G}_p,\mathcal{E}}(V, \mathcal{O}_p, \omega)$.

5.5 Le théorème d'Arthur

Supposons ici $G = \tilde{G}$, $\mathbf{a} = 1$, $\tilde{K}_v = K_v$ pour tout $v \notin V$.

Théorème. *Sous ces hypothèses, les théorèmes 5.2 et 5.4 sont vérifiés.*

C'est le Global Theorem 1' de [1]. La preuve que nous donnerons des théorèmes 5.2 et 5.4 étant directement inspirée de celle d'Arthur, nous pourrions aussi bien redémontrer l'énoncé ci-dessus. Mais cela n'aurait aucun intérêt. Nous préférons simplifier un peu la nôtre en utilisant le résultat d'Arthur. La propriété 5.2(1) des distributions $SA^G(V,\mathcal{O})$ n'est pas clairement énoncée par Arthur, mais est incluse dans sa démonstration. Elle résulte en tout cas de la démonstration plus générale de cette propriété qui sera donnée ultérieurement.

5.6 Un théorème complémentaire concernant l'endoscopie non standard

Dans ce paragraphe, on considère un triplet endoscopique non standard (G_1,G_2,j_*) défini sur F. La définition est la même que dans le cas local ([24] 1.7), rappelons-la. Les termes G_1 et G_2 sont des groupes réductifs connexes définis sur F, quasi-déployés et simplement connexes. On considère *leurs* paires de Borel épinglées, dont on note les tores T_1 et T_2. Ils sont munis d'actions de Γ_F. Pour $i=1,2$, on note Σ_i l'ensemble de racines de T_i dans G_i. Pour $\alpha\in\Sigma_i$, on note $\check{\alpha}$ la coracine associée. On pose $X_{i,*,\mathbb{Q}}=X_*(T_i)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ et $X^*_{i,\mathbb{Q}}=X^*(T_i)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Le terme j_* est un isomorphisme $j_*:X_{1,*,\mathbb{Q}}\to X_{2,*,\mathbb{Q}}$. On note $j^*:X^*_{2,\mathbb{Q}}\to X^*_{1,\mathbb{Q}}$ l'isomorphisme dual. On suppose

(1) j_* est équivariant pour les actions de Γ_F.

On suppose qu'il existe une bijection $\tau:\Sigma_2\to\Sigma_1$ et une fonction $b:\Sigma_2\to\mathbb{Q}_{>0}$ telles que

(2) $j^*(\alpha_2)=b(\alpha_2)\tau(\alpha_2)$ pour tout $\alpha_2\in\Sigma_2$;

(3) $j_*(\check{\alpha}_1)=b(\alpha_2)\check{\alpha}_2$ pour tout $\alpha_1\in\Sigma_1$, où $\alpha_2=\tau^{-1}(\alpha_1)$.

Remarquons que τ et b sont uniquement déterminés par ces conditions. Les groupes de Weyl W_1 et W_2 de G_1 et G_2 s'identifient, la symétrie relative à une racine $\alpha_2\in\Sigma_2$ s'identifiant à celle relative à $\tau(\alpha_2)$. Soit v une place de F. Alors j_* définit un isomorphisme

$$((\mathfrak{t}_1(\bar{F}_v)\cap\mathfrak{g}_{1,reg}(\bar{F}_v))/W_1)^{\Gamma_{F_v}}\to((\mathfrak{t}_2(\bar{F}_v)\cap\mathfrak{g}_{2,reg}(\bar{F}_v))/W_2)^{\Gamma_{F_v}}.$$

Autrement dit une bijection entre classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples réguliers dans $\mathfrak{g}_1(F_v)$ et $\mathfrak{g}_2(F_v)$. Pour $X_1\in\mathfrak{g}_{2,reg}(F_v)$ et $X_2\in\mathfrak{g}_{2,reg}(F_v)$ dont les classes de conjugaison stable se correspondent, notons S_1 et S_2 leurs commutants dans G_1 et G_2. L'isomorphisme j_* définit un isomorphisme $\mathfrak{s}_1(F_v)\to\mathfrak{s}_2(F_v)$. On munit ces algèbres de mesures de Haar se correspondant par cet isomorphisme. Pour $i=1,2$, on munit $S_i(F_v)$ de la mesure de Haar telle que le jacobien de l'exponentielle vaille 1 au point $0\in\mathfrak{s}_i(F_v)$. On dispose alors de l'intégrale orbitale

$$f_i\otimes dg_i\mapsto I^{G_i}(X_i,f_i\otimes dg_i)=D^{G_i}(X_i)^{1/2}\int_{S_i(F_v)\backslash G_i(F_v)}f_i(ad_{g_i^{-1}}(X_i))\,dg_i$$

sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}_i(F_v))\otimes Mes(G_i(F_v))$, puis de l'intégrale orbitale stable

$$f_i\otimes dg_i\mapsto S^{G_i}(X_i,f_i\otimes dg_i).$$

Disons que $f_1\otimes dg_1$ et $f_2\otimes dg_2$ se correspondent si et seulement si

$$S^{G_1}(X_1,f_1\otimes dg_1)=S^{G_2}(X_2,f_2\otimes dg_2)$$

pour tout couple (X_1,X_2) comme ci-dessus. On a

(4) cette correspondance se quotiente en un isomorphisme

$$SI(\mathfrak{g}_1(F_v))\otimes Mes(G_1(F_v))\simeq SI(\mathfrak{g}_2(F_v))\otimes Mes(G_2(F_v)).$$

Si v est finie, c'est la proposition 1.8(ii) de [24]. Le cas complexe se ramène au cas réel en remplaçant les groupes complexes par les groupes sur $\mathbb{R}$ obtenus par restriction des scalaires. Le cas réel se déduit facilement des résultats de Shelstad comme on l'a vu en [V] 5.1.

Dualement, on en déduit un isomorphisme

$$D^{st}_{géom}(\mathfrak{g}_1(F_v))\otimes Mes(G_1(F_v))^*\simeq D^{st}_{géom}(\mathfrak{g}_2(F_v))\otimes Mes(G_2(F_v))^*.$$

Pour $i=1,2$, notons $D^{st}_{nil}(\mathfrak{g}_i(F_v))$ le sous-espace des éléments de $D^{st}_{géom}(\mathfrak{g}_i(F_v))$ à support nilpotent. L'isomorphisme ci-dessus se restreint en un isomorphisme

$$(5)\qquad D^{st}_{nil}(\mathfrak{g}_1(F_v))\otimes Mes(G_1(F_v))^*\simeq D^{st}_{nil}(\mathfrak{g}_2(F_v))\otimes Mes(G_2(F_v))^*.$$

Soit V un ensemble fini de places de F tel que

- V contient les places archimédiennes de F ;
- G_1 et G_2 sont non ramifiés hors de V ;
- pour $v\not\in V$, notons p la caractéristique résiduelle de F_v et $e_v=[F_v:\mathbb{Q}_p]$; alors $p>e_vN(G_i)+1$ pour $i=1,2$, où $N(G_i)$ est l'entier défini en [24] 4.3 ;
- les valeurs de la fonction b sont des unités hors de V.

Pour $i=1,2$, on a défini en 5.2 la distribution $SA^{G_i}(V,\mathcal{O})$ associée à une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}\subset G_i(F_V)$. On considère ici le cas $\mathcal{O}=\{1\}$ et on note plutôt $SA^{G_i}_{unip}(V)$ la distribution associée à cette classe. On est ici dans le cas non tordu, cette distribution est relative à des sous-groupes compacts hyperspéciaux $K_{i,v}$ de $G_i(F_v)$ pour $v\not\in V$. D'après le théorème d'Arthur cité en 5.5, la condition 5.2(1) est vérifiée. Puisque deux sous-groupes compacts hyperspéciaux de $G_i(F_v)$ sont toujours conjugués par $G_{i,AD}(F_v)$, la distribution $SA^{G_i}_{unip}(V)$ ne dépend pas de ces choix. D'après le même théorème, elle est stable. On sait qu'elle est à support dans l'ensemble des éléments unipotents de $G_i(F_V)$. Par l'exponentielle, on la descend en une distribution à support nilpotent sur $\mathfrak{g}_i(F_V)$, qui est encore stable. Cela l'identifie à un élément de $D^{st}_{géom}(\mathfrak{g}_1(F_V))\otimes Mes(G_1(F_V))^*$.

Théorème (à prouver). *Sous ces hypothèses et modulo les identifications ci-dessus, les distributions $SA^{G_1}_{unip}(V)$ et $SA^{G_2}_{unip}(V)$ se correspondent par le produit tensoriel sur les $v\in V$ des isomorphismes (5).*

Considérons deux triplets endoscopiques non standard (G_1,G_2,j_*) et (G'_1,G'_2,j'_*). On dit qu'ils sont équivalents si et seulement s'il existe des isomorphismes $\iota_i:G_i\to G'_i$ définis sur F et un rationnel b non nul de sorte que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_{1,*,\mathbb{Q}} & \stackrel{j_*}{\to} & X_{2,*,\mathbb{Q}}\\ \iota_1\downarrow & & \downarrow\iota_2\\ X'_{1,*,\mathbb{Q}} & \stackrel{bj'_*}{\to} & X'_{2,*,\mathbb{Q}}\end{array}$$

Comme dans le cas local, on peut classifier tous les triplets possibles. Tout triplet endoscopique non standard (G_1,G_2,j_*) est produit de triplets dont chacun est équivalent à un triplet quasi-élémentaire, cf. [III] 6.1. Evidemment, si un triplet est produit de deux triplets, le thèorème pour chacun de ces deux triplets implique celui pour le produit. On verra au paragraphe suivant que le théorème est insensible à une équivalence. Il suffit donc de le démontrer pour un triplet quasi-élémentaire. Remarquons que le théorème est tautologique dans le cas (1) de [III] 6.1, c'est-à-dire si $G_1 = G_2$ et j_* est l'identité.

5.7 Réduction du théorème 5.6

On considère un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*) et un rationnel $b \neq 0$. Soit V un ensemble fini de places de F vérifiant les conditions du paragraphe précédent pour (G_1, G_2, j_*). On suppose que b est une unité hors de V. Alors V vérifie aussi ces conditions pour le triplet (G_1, G_2, bj_*).

Lemme. *Sous ces hypothèses, si le théorème 5.5 est vérifié pour le triplet* (G_1, G_2, j_*), *il l'est pour le triplet* (G_1, G_2, bj_*).

Preuve. Il y a deux correspondances entre classes de conjugaison stable semi-simples dans $\mathfrak{g}_1(F_V)$ et $\mathfrak{g}_2(F_V)$, qui sont déduites de j_* et de bj_*. Il est clair que la seconde est la composée de la première et de la correspondance entre classes de conjugaison stable semi-simples dans $\mathfrak{g}_2(F_V)$ déduite de l'homothétie $X \mapsto bX$. Il y a deux isomorphismes

$$SI(\mathfrak{g}_1(F_V)) \otimes Mes(G_1(F_V)) \simeq SI(\mathfrak{g}_2(F_V)) \otimes Mes(G_2(F_V)),$$

qui sont déduits de j_* et de bj_*. Le second est le composé du premier et de l'automorphisme de $SI(\mathfrak{g}_2(F_V)) \otimes Mes(G_2(F_V))$ déduit de l'homothétie $X \mapsto bX$. Puisque b est une unité hors de V, on a $\prod_{v\in V} |b|_{F_v} = 1$, d'où $D^{\tilde{G}_2}(bX) = D^{\tilde{G}_2}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_2(F_V)$. De même, si X est fortement régulier, la multiplication par b préserve les mesures sur $\mathfrak{s}(F_V)$, où S est le commutant de X. On voit alors que l'automorphisme ci-dessus de $SI(\mathfrak{g}_2(F_V)) \otimes Mes(G_2(F_V))$ est déduit de l'automorphisme $f \mapsto f^{b^{-1}}$ de $C_c^\infty(\mathfrak{g}_2(F_V))$, où $f^{b^{-1}}(X) = f(b^{-1}X)$. On note encore $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}^{b^{-1}}$ cet automorphisme de $SI(\mathfrak{g}_2(F_V)) \otimes Mes(G_2(F_V))$. Soient $\mathbf{f}_1 \in SI(\mathfrak{g}_1(F_V)) \otimes Mes(G_1(F_V))$ et $\mathbf{f}_2 \in SI(\mathfrak{g}_2(F_V)) \otimes Mes(G_2(F_V))$ se correspondant par l'isomorphisme déduit de j_*. Le theorème pour (G_1, G_2, j_*) affirme que $S^{G_1}(SA^{G_1}_{unip}(V), \mathbf{f}_1) = S^{G_2}(SA^{G_2}_{unip}(V), \mathbf{f}_2)$. Le théorème pour (G_1, G_2, bj_*) affirme que $S^{G_1}(SA^{G_1}_{unip}(V), \mathbf{f}_1) = S^{G_2}(SA^{G_2}_{unip}(V), \mathbf{f}_2^{b^{-1}})$. Pour démontrer que ces assertions ont équivalentes, il suffit de prouver que $S^{G_2}(SA^{G_2}_{unip}(V), \mathbf{f}_2) = S^{G_2}(SA^{G_2}_{unip}(V), \mathbf{f}_2^{b^{-1}})$. Seul le groupe G_2 intervient ici. On peut simplifier la notation en posant $G = G_2$ et en supprimant les indices 2. Toujours pour simplifier, on peut remplacer b par b^{-1} et fixer des mesures de Haar sur les groupes intervenant, ce qui nous débarrasse des espaces de mesures. Puisque l'automorphisme $f \mapsto f^b$ se relève évidemment en un automorphisme de $I(\mathfrak{g}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$, on peut démontrer la relation

(1) $I^G(SA^G_{unip}(V), f) = I^G(SA^G_{unip}(V), f^b)$ pour tout $f \in I(\mathfrak{g}(F_V))$.

En utilisant la définition de 5.2, on est ramené à prouver

(2) $I^G(A^G_{unip}(V), f) = I^G(A^G_{unip}(V), f^b)$,

et, pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G, V)$ avec $G' \neq G$,

(3) $I^{\mathbf{G}'}(SA^{\mathbf{G}'}_{unip}(V), f^{\mathbf{G}'}) = I^{\mathbf{G}'}(SA^{\mathbf{G}'}_{unip}(V), (f^b)^{\mathbf{G}'})$.

Commençons par (3). Soit $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G, V)$ avec $G' \neq G$. Puisqu'on travaille ici avec des algèbres de Lie, les données auxiliaires ne jouent guère de rôle et on peut identifier $f^{\mathbf{G}'}$ à une fonction $f^{G'}$ sur $\mathfrak{g}'(F_V)$. D'après [12] lemme 3.2.1, il existe un caractère automorphe χ de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ tel que $(f^\lambda)^{G'} = \chi(\lambda)(f^{G'})^\lambda$ pour tout $\lambda \in F_V^\times$. Le fait que $\mathbf{G}'$ soit non ramifié hors de V et la définition de ce caractère χ entraînent que χ est non ramifié hors de V. Donc, en notant b_V et b^V les projections de b dans $F_V^\times$ et $\mathbb{A}_F^{V,\times}$, on a $\chi(b_V) = \chi(b^V)^{-1} = 1$. D'où $(f^b)^{G'} = (f^{G'})^b$. Puisque $G' \neq G$, on peut appliquer (1) par récurrence en y remplaçant G par G'. On obtient alors la relation (3).

Pour prouver (2), introduisons sur $D_{orb}(\mathfrak{g}(F_V))$ l'action duale de l'homothétie de rapport b. C'est-à-dire que, pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathfrak{g}(F_V))$, on note $\boldsymbol{\gamma}^b$ la distribution telle que $I^G(\boldsymbol{\gamma}, f^b) = I^G(\boldsymbol{\gamma}^b, f)$ pour tout f. Si $\boldsymbol{\gamma}$ est l'intégrale orbitale associée à un élément $X \in \mathfrak{g}(F_V)$ et à une mesure sur $G_X(F_V)$, $\boldsymbol{\gamma}^b$ est l'intégrale orbitale associée à l'élément bX et à la même mesure sur $G_{bX}(F_V) = G_X(F_V)$. Introduisons le système de fonctions B sur G ainsi défini : pour tout élément semi-simple $\eta \in G$ et toute élément α du système de racines de G_η, $B_\eta(\alpha) = b^{-1}$. Soient M un Levi standard de G et $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathfrak{m}(F_V))$. Montrons que l'on a l'égalité

(4) $J_M^G(\boldsymbol{\gamma}, B, f^b) = J_M^G(\boldsymbol{\gamma}^b, f)$ pour tout f.

Les formules de descente habituelles nous ramènent au cas local. C'est alors l'assertion [III] 6.7(5). Le corps local était non-archimédien dans cette référence, mais cela n'importait pas pour cette assertion.

Revenons à la définition de $A_{unip}^G(V)$. Dans l'égalité (2) à prouver, f est une fonction sur $\mathfrak{g}(F_V)$. Notons-la plutôt f_V et notons comme ci-dessus b_V la projection de b dans F_V. La fonction notée précédemment f^b s'écrit maintenant $(f_V)^{b_V}$. Par l'exponentielle, on relève ces deux fonctions en des fonctions définies sur un voisinage de 1 dans $G(F_V)$ invariant par conjugaison. On continue de noter ces fonctions f_V et $(f_V)^{b_V}$. On les complète globalement en des fonctions $\dot{f} = \mathbf{1}_{K^V} \otimes f_V$, $\dot{f}^{b_V} = \mathbf{1}_{K^V} \otimes (f_V)^{b_V}$. Montrons que l'on a l'égalité

(5) $J_{unip}^G(\dot{f}^{b_V}) = J_{unip}^G(\dot{f})$.

D'après les définitions de 2.1, il suffit de fixer un sous-groupe parabolique standard $P = MU_P$ de G et de prouver l'égalité

$$K_{P,unip}(\dot{f}^{b_V}, g) = K_{P,unip}(\dot{f}, g)$$

pour tout $g \in G(\mathbb{A}_F)$. Rappelons que

$$K_{P,unip}(\dot{f}^{b_V}, g) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A}_F)} \sum_{\gamma \in P_{unip}(F)} \dot{f}^{b_V}(g^{-1}\gamma ug)\, du = \int_{U_P(\mathbb{A}_F)} \sum_{\gamma \in M_{unip}(F)} \dot{f}^{b_V}(g^{-1}\gamma ug)\, du,$$

où P_{unip} et M_{unip} sont les ensembles d'éléments unipotents dans P et M. En introduisant l'ensemble $\mathfrak{m}_{nil}$ des éléments nilpotents de $\mathfrak{m}$, on a

$$K_{P,unip}(\dot{f}^{b_V}, g) = \int_{U_P(\mathbb{A}_F)} \sum_{X \in \mathfrak{m}_{nil}(F)} \dot{f}^{b_V}(g^{-1}exp(X)ug)\, du.$$

On descend aisément l'intégrale à l'algèbre de Lie et on obtient

$$K_{P,unip}(\dot{f}^{b_V}, g) = \int_{\mathfrak{u}_P(\mathbb{A}_F)} \sum_{X \in \mathfrak{m}_{nil}(F)} \dot{f}^{b_V}(g^{-1}exp(X+N)g)\, dN.$$

Puisque $b \in \mathbb{Q}^\times$, on peut remplacer X par $b^{-1}X$ et N par $b^{-1}N$. En décomposant les intégrales selon les places dans v et celles hors de V, on obtient

$$K_{P,unip}(\dot{f}^{b_V}, g) = \sum_{X \in \mathfrak{m}_{nil}(F)} C_V(f_V^{b_V}, b^{-1}X) C^V(\mathbf{1}_{K^V}, b^{-1}X),$$

où

$$C_V(f_V^{b_V}, b^{-1}X) = \int_{u_P(F_V)} f_V^{b_V}(g^{-1}(b^{-1}X + b^{-1}N)g)\, dN$$

et

$$C^V(\mathbf{1}_{K^V}, b^{-1}X) = \int_{u_P(\mathbb{A}_F^V)} \mathbf{1}_{K^V}(g^{-1}exp(b^{-1}X + b^{-1}N)g)\, dN.$$

Il résulte de la définition de $(f_V)^{b_V}$ que l'on a l'égalité

$$C_V(f_V^{b_V}, b^{-1}X) = C_V(f_V, X).$$

Si v est une place hors de V, on a $v \notin V_{ram}$ et la caractéristique résiduelle est "grande". Cela assure la propriété suivante. Notons $\mathfrak{o}_v$ l'anneau des entiers de F_v. Au groupe hyperspécial K_v de $G(F_v)$ est associé une $\mathfrak{o}_v$-algèbre de Lie $\mathfrak{k}_v$. Alors, pour tout élément nilpotent $N \in \mathfrak{g}(F_v)$, on a $exp(N) \in K_v$ si et seulement si $N \in \mathfrak{k}_v$. Puisque b est une unité en v, on a alors l'égalité

$$\mathbf{1}_{K_v}(g^{-1}exp(b^{-1}X + b^{-1}N)g) = \mathbf{1}_{K_v}(g^{-1}exp(X + N)g)$$

pour tous X, N, g intervenant ci-dessus. D'où l'égalité

$$C^V(\mathbf{1}_{K^V}, b^{-1}X) = C^V(\mathbf{1}_{K^V}, X),$$

puis

$$K_{P,unip}(\dot{f}^{b_V}, g) = \sum_{X \in \mathfrak{m}_{nil}(F)} C_V(f_V, X) C^V(\mathbf{1}_{K^V}, X).$$

A partir de là, le même calcul que ci-dessus, en sens inverse, conduit à l'égalité

$$K_{P,unip}(\dot{f}^{b_V}, g) = K_{P,unip}(\dot{f}, g)$$

cherchée. D'où (5).

Par définition, on a

(6) $$I^G(A^G_{unip}(V), f_V^{b_V}) = J^G_{unip}(\dot{f}^{b_V}) - \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0), M \neq G} |W^M||W^G|^{-1} J^G_M(A^M_{unip}(V), f_V^{b_V}).$$

En appliquant (5), le premier terme devient $J^G_{unip}(\dot{f})$. Soit M un Levi tel que $M \neq G$. On est dans la situation où le lemme 1.14 s'applique. Ce lemme est énoncé pour les intégrales orbitales pondérées invariantes, mais sa preuve s'applique aussi bien à leurs versions non invariantes. D'où

$$J^G_M(A^M_{unip}(V), f_V^{b_V}) = J^G_M(A^M_{unip}(V), B, f_V^{b_V}).$$

En appliquant (4), on obtient

$$J^G_M(A^M_{unip}(V), f_V^{b_V}) = J^G_M(A^M_{unip}(V)^{b_V}, f_V).$$

En raisonnant comme toujours par récurrence, on peut supposer l'analogue de (2) connu si l'on remplace G par M. Cette relation équivaut à l'égalité $A^M_{unip}(V)^{b_V} = A^M_{unip}(V)$. D'où encore

$$J^G_M(A^M_{unip}(V), f_V^{b_V}) = J^G_M(A^M_{unip}(V), f_V).$$

Mais alors le membre de droite de (6) est égal à la même expression où $(f_V)^{b_V}$ est remplacée par f_V. D'où l'égalité

$$I^G(A^G_{unip}(V), f_V^{b_V}) = I^G(A^G_{unip}(V), f_V),$$

c'est-à-dire (2). Cela achève la démonstration. $\square$

$\square$

5.8 Insertion du théorème 5.6 dans les hypothèses de récurrence

En [III] 6.1, on a associé un entier $N(G_1, G_2, j_*)$ à tout triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*). On a aussi défini des triplets particuliers $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ en [III] 6.2. Les constructions de cette référence valent sur notre corps de nombres F.

Les hypothèses de récurrence posées en 1.1 doivent être complétées de la façon suivante. Pour démontrer une assertion concernant un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, on ne se soucie pas du théorème 5.6 qu'on n'utilisera pas dans ce cas. Pour démontrer une assertion concernant l'un des triplets particuliers $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ de [III] 6.2, on suppose connu le théorème 5.6 pour tout triplet (G_1, G_2, j_*) tel que $N(G_1, G_2, j_*) < dim(G_{SC})$. Pour démontrer une assertion concernant un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ qui n'est pas l'un de ces triplets particuliers et qui n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure, on suppose connu le théorème 5.6 pour tout triplet (G_1, G_2, j_*) tel que $N(G_1, G_2, j_*) \leq dim(G_{SC})$. Pour démontrer une assertion concernant un triplet (G_1, G_2, j_*), on suppose connu le théorème 5.6 pour tout triplet (G'_1, G'_2, j'_*) tel que $N(G'_1, G'_2, j'_*) < N(G_1, G_2, j_*)$. On suppose connus tous les résultats concernant les triplets $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quelconques tels que $dim(G_{SC}) < N(G_1, G_2, j_*)$. On suppose connus tous les résultats concernant les triplets $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

- ils sont quasi-déployés et à torsion intérieure ou ils font partie des triplets particuliers de [III] 6.2 ;

- on a $dim(G_{SC}) = N(G_1, G_2, j_*)$.

5.9 La formule stable

Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit V un ensemble fini de places contenant V_{ram}. On note $\tilde{G}_{ss}(F_V)/st-conj$ l'ensemble des classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{G}(F_V)$. Pour $\mathbf{f} \in SI(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$, on pose

$$S^{\tilde{G}}_{géom}(\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^M||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \tilde{M}_{ss}(F_V)/st-conj} S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(SA^{\tilde{M}}(\mathcal{O}, V), \mathbf{f}).$$

Lemme. *Cette somme est finie.*

Preuve. On peut évidemment fixer $\tilde{M}$. En utilisant 5.3(1) et le lemme 4.3, on voit qu'il existe un sous-ensemble compact $\tilde{C}_V$ de $\tilde{M}(F_V)$ tel que, si $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(SA^{\tilde{M}}(\mathcal{O}, V), \mathbf{f}) \neq 0$, alors $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{C}_V$. Il reste à prouver

(1) il n'y a qu'un nombre fini de $\mathcal{O} \in \tilde{M}_{ss}(F_V)/st-conj$ tels que $SA^{\tilde{M}}(\mathcal{O}, V) \neq 0$ et $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{C}_V$.

On peut aussi bien supposer $\tilde{M} = \tilde{G}$. On utilise la définition de 5.2. Si $SA^{\tilde{G}}(\mathcal{O}, V) \neq 0$, alors $A^{\tilde{G}}(\mathcal{O}, V) \neq 0$ ou il existe $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, V)$, avec $G' \neq G$, tel que $SA^{\mathbf{G}'}(\mathcal{O}_{\tilde{G}'}, V) \neq 0$. Dans le premier cas, il existe $\gamma \in \tilde{G}_{ss}(F)$ dont la projection dans $\tilde{G}(F_V)$ appartient à $\mathcal{O}$ et tel que, pour tout $v \notin V$, γ soit conjugué à un élément de $\tilde{K}_v$ par un élément de $G(F_v)$. En imposant la condition que $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{C}_V$, l'ensemble de ces γ forme un nombre fini de classes de conjugaison par $G(F)$ (lemme 2.1). A fortiori l'ensemble des classes de conjugaison stable $\mathcal{O}$ contenant un tel élément est fini. Dans le deuxième cas, le compact $\tilde{C}_V$ détermine un compact $\tilde{C}_{V,\tilde{G}'}$ de $\tilde{G}'(F_V)$ tel que la condition que $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{C}_V$ entraîne que $\mathcal{O}_{\tilde{G}'}$ coupe $\tilde{C}_{V,\tilde{G}'}$. Puisque $G' \neq G$, on peut appliquer (1) par récurrence : l'ensemble des $\mathcal{O}_{\tilde{G}'} \in \tilde{G}'_{ss}(F_V)/st-conj$ tels que $SA^{\mathbf{G}'}(\mathcal{O}_{\tilde{G}'},V) \neq 0$ et $\mathcal{O}_{\tilde{G}'}$ coupe $\tilde{C}_{V,\tilde{G}'}$ est fini. L'ensemble des classes $\mathcal{O}$ qui leur correspondent l'est aussi. $\square$

5.10 Le théorème principal

Levons l'hypothèse que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et travaillons plutôt avec un K-triplet $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$. Soit V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. Par un procédé formel familier, de la définition du paragraphe précédent se déduit celle des termes $S^{\mathbf{G}'}_{géom}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'})$ apparaissant dans l'énoncé suivant.

Théorème (à prouver). *Pour tout* $\mathbf{f} \in C_c^\infty(K\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))$, *on a l'égalité*

$$I^{K\tilde{G}}_{géom}(\mathbf{f},\omega) = \sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)} i(\tilde{G},\tilde{G}')S^{\mathbf{G}'}_{géom}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'}).$$

On montrera dans la section 6 que ce théorème résulte assez facilement des autres théorèmes précédemment énoncés.

6 Preuve conditionnelle du théorème 5.10

6.1 Rappel

On considère un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ et une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$. On rappelle le lemme suivant qui se trouve déjà dans [11].

Lemme. *Les flèches naturelles,* $ker^1(F,Z(\hat{G}))\to ker^1(F,\hat{T})$ *et*

$$ker^1(F,Z(\hat{G}'))\to ker^1(F,\hat{T}^{\hat{\theta},0})$$

sont des isomorphismes.

La preuve suit [14] preuve du lemme 4.3.2 et [11] lemme 2 : ces deux flèches sont évidemment analogues puisque $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ est un tore maximal de $\hat{G}'$. On démontre donc la première.

On a la suite exacte : $1\to Z(\hat{G})\to\hat{T}\to\hat{T}/Z(\hat{G})\to 1$ dont se déduit une suite exacte de groupes de cohomologie. Le tore $\hat{T}/Z(\hat{G})$ est induit c'est-à-dire que son groupe des caractères a une base sur laquelle Γ_F agit par permutations ; ainsi $(\hat{T}/Z(\hat{G}))^{\Gamma_F}$ est connexe et la flèche de l'énoncé est injective. Pour la surjectivité, il suffit de remarquer que $ker^1(F,(\hat{T}/Z(\hat{G})))=0$: en effet on se ramène au cas où Γ_F agit transitivement sur une base des caractères de $\hat{T}/Z(\hat{G})$. Dans ce cas $H^1(W_F,(\hat{T}/Z(\hat{G})))$ s'identifie à $H^1(W_{F'},\mathbb{C}^*)$ où F' est une extension galoisienne de F déterminé par le sous-groupe de Γ_F stabilisant un élément de la base des caractères avec l'action triviale de $\Gamma_{F'}$ sur $\mathbb{C}^*$; ainsi ce groupe de cohomologie n'est autre que le groupe des caractères de $W_{F'}$ (continus à valeurs complexes). Un tel caractère correspond à un élément du sous-groupe $ker^1(F,(\hat{T}/Z(\hat{G})))$ si le localisé du caractère en toute place v est trivial ; le caractère est alors nécessairement trivial.

6.2 Au sujet des constantes

Pour $\tilde{G}$ un espace tordu, on note $j(\tilde{G}) := |det_{\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}}(1-\theta)|$ et, pour une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$, on a posé en 5.1, $i(\tilde{G},\tilde{G}') =$

$$j(\tilde{G})^{-1}|\pi_0(Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')/\hat{G}')|^{-1}|ker^1(F,Z(\hat{G}'))||ker^1(F,Z(\hat{G}))|^{-1}\delta(\tilde{G},\tilde{G}'),$$

où $\delta(\tilde{G},\tilde{G}') = |\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})||\pi_0(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap Z(\hat{G}'))|$. On a précisé ici la notation $Aut(\mathbf{G}')$ de 5.1 en $Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')$. Avec la description de 5.1, la composante neutre de $Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')/\hat{G}'$ est exactement l'image de $Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}$ dans ce groupe d'automorphismes. Ainsi

$$|\pi_0(Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}'))| = |Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\hat{G}'|.$$

On pose $\overline{Aut}_{\hat{G}}(\mathbf{G}') = Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')/\hat{G}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ qui est donc un groupe fini. On fixe aussi des espaces de Levi de $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$, notés $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'$. On suppose que $\tilde{M}'$ est un espace endoscopique de $\tilde{M}$. On a alors défini en 4.4, la constante

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}') := |Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}|^{-1}|Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}|.$$

Ici on modifie cette constante car au lieu de sommer à l'intérieur d'une classe sous $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ on va sommer sur une classe sous $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}Z(\hat{G})/Z(\hat{G})(1-\hat{\theta})(Z(\hat{M})^{\Gamma_F})$ (cf. [I] 3.3 (2)) et on pose $i'_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}') :=$

$$j(\tilde{G})^{-1}j(\tilde{M})|Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}|^{-1}|Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}|.$$

et le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante :

Proposition. *Soient $\tilde{G},\mathbf{G}',\tilde{M},\mathbf{M}'$; on a*

$$i(\tilde{G},\tilde{G}')i'_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}')^{-1}i(\tilde{M},\tilde{M}')^{-1} = |\overline{Aut}_{\hat{G}}(\mathbf{G}')|^{-1}|\overline{Aut}_{\hat{M}}(\mathbf{M}')|.$$

Il est clair que les $j(?)$ se compensent. On récrit différemment $\delta(\tilde{G},\tilde{G}')$: par ellipticité, $Z(\hat{G}')^{\Gamma_F,0} = Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$, d'où l'inclusion $Z(\hat{G}')^{\Gamma_F,0}\subset Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}$. Ainsi

$$|\pi_0(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap Z(\hat{G}'))| = |Z(\hat{G}')/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap Z(\hat{G}')|^{-1}.$$

Et $\delta(\tilde{G},\tilde{G}') = |Z(\hat{G})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}||Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}|^{-1}$. On considère la suite exacte :

$$1\to Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}\to Z(\hat{G})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}$$
$$\to Z(\hat{G})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}).$$

Et la suite exacte :

$$1\to Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}\to Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}$$
$$\to Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}.$$

Et on obtient $\delta(\tilde{G},\tilde{G}') =$

$$|Z(\hat{G})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F})||Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}|^{-1}.$$

On remarque que $Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}) = Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\hat{G}'$. Ainsi

$$|Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\hat{G}'||Z(\hat{G})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F})|^{-1} =$$

$$|\overline{Aut}_{\hat{G}}(\mathbf{G}')|.$$

Et

$$\begin{gathered} i(\tilde{G},\tilde{G}') = |\overline{Aut}_{\hat{G}}(\mathbf{G}')|^{-1}|Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}|^{-1} \\ \times|ker^1(F,Z(\hat{G}'))||ker^1(F,Z(\hat{G}))|^{-1} \\ = |\overline{Aut}_{\hat{G}}(\mathbf{G}')|^{-1}i_{\tilde{M}'}(G,G')^{-1}|Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}|^{-1} \\ \times|ker^1(F,Z(\hat{M}'))||ker^1(F,Z(\hat{M}))|^{-1} = \\ |\overline{Aut}_{\hat{G}}(\mathbf{G}')|^{-1}i_{\tilde{M}'}(G,G')^{-1}|\overline{Aut}_{\hat{M}}(\mathbf{M}')|i(\tilde{M},\tilde{M}'), \end{gathered}$$

ce qui est l'assertion cherchée.

6.3 Combinatoire des sommes

On donnera en 6.5 un analogue du lemme 10.2 de [1]. Auparavant, il faut rappeler que, si $\mathbf{G}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ et si $\mathbf{M}'$ est un espace de Levi de $\mathbf{G}'$ (en un sens compréhensible), il ne correspond pas forcément à $\tilde{M}'$ un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. Mais il lui correspond un groupe de Levi $\hat{M}$ de $\hat{G}$ tel qu'il existe un sous-groupe parabolique $\hat{P}\in\mathcal{P}(\hat{M})$ qui soit stable par l'action galoisienne et par $\hat{\theta}$, cf. [I] 3.4. Dans la suite, $\hat{M}$ est supposé vérifier cette propriété. On dira que $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $\hat{M}$. Les constantes définies dans le paragraphe précédent sont encore définies dans cette situation : $\tilde{M}$ n'y intervenait que via $\hat{M}$. On les utilise en remplaçant $\tilde{M}$ par $\hat{M}$ dans les notations.

On fixe une fonction notée $S(\mathbf{G}',\mathbf{M}')$ sur l'ensemble des triplets $\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}$ formé d'un espace endoscopique elliptique de $\tilde{G}$, d'un espace de Levi de cet espace endoscopique et d'un espace de Levi de $\hat{G}$ (vérifiant la condition ci-dessus) tel que $\mathbf{M}'$ en soit un espace endoscopique elliptique. On suppose que cette fonction est invariante sous l'action par conjugaison de $\hat{G}$. On va sommer de deux façons différentes cette fonction (avec des coefficients) sur l'ensemble des triplets $\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}$ modulo conjugaison sous $\hat{G}$; il faut préciser quelques notations.

Les triplets considérés sont formés d'un espace de Levi $\hat{M}$ de $\hat{G}$ et d'un couple $\mathbf{G}'$, $\mathbf{M}'$, où $\mathbf{M}'$ est un espace de Levi de la donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ et où $\mathbf{G}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ tandis que $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $\hat{M}$; donc en particulier, dans la donnée endoscopique $\mathbf{G}'$, on a un élément $\tilde{s}_{\mathbf{G}'}\in\hat{G}\hat{\theta}/Z(\hat{G})$ et dans la donnée endoscopique $\mathbf{M}'$, on a un élément $\tilde{s}_{\mathbf{M}'}\in\hat{M}\hat{\theta}/Z(\hat{M})$. Et on a nécessairement $\tilde{s}_{\mathbf{G}'}=\tilde{s}_{\mathbf{M}'}Z(\hat{M})$. En tenant compte de [I] 3.2 (1), on impose (ce qui est loisible) à $\tilde{s}_{\mathbf{M}'}$ d'être dans la classe canonique sous $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}Z(\hat{G})$ définie en loc. cite, à l'intérieur de sa classe sous $Z(\hat{M})$. Ainsi $\tilde{s}_{\mathbf{G}'}\in\tilde{s}_{\mathbf{M}'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F}Z(\hat{G})/Z(\hat{G})$.

On a besoin de remarquer que $Aut_{\hat{M}}(\mathbf{M}')$ agit par conjugaison sur $\tilde{s}_{\mathbf{M}'}$ en laissant stable sa classe modulo $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}Z(\hat{G})$. En fait cela résulte d'un résultat général prouvé dans le paragraphe suivant, que l'on applique avec $\tilde{G},\mathbf{G}'$ remplacé par $\hat{M},\mathbf{M}'$.

6.4 Remarque sur l'action des groupes d'automorphismes de données endoscopiques

Remarque. *Soit* $\mathbf{G}'$ *une donnée endoscopique (non nécessairement elliptique) de* $\tilde{G}$ *d'où en particulier un élément* $\tilde{s}_{\mathbf{G}'} \in \hat{G}\hat{\theta}$. *Alors pour tout* $x \in Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')$, $x\tilde{s}_{\mathbf{G}'}x^{-1} \in \tilde{s}_{\mathbf{G}'}Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$.

On note z l'élément de $Z(\hat{G})$ tel que $x\tilde{s}_{\mathbf{G}'}x^{-1} = z\tilde{s}_{\mathbf{G}'}$; pour faire agir Γ_F sur z, on utilise les éléments de $\mathcal{G}'$: pour tout $w \in \Gamma_F$, on fixe $h_w \in \mathcal{G}'$ dont l'image dans la projection de $\mathcal{G}'$ sur Γ_F est w. On a $h_w z h_w^{-1} = wzw^{-1}$. On conjugue cette égalité par x :

$$xh_wx^{-1}z\,xh_w^{-1}x^{-1} = x(wzw^{-1})x^{-1} = wzw^{-1},$$

car $wzw^{-1} \in Z(\hat{G})$ et $x \in \hat{G}$. On utilise le fait que h_w commute à $\tilde{s}_{\mathbf{G}'}$ à un cocycle près d'après les définitions de 3.1, cocycle noté a comme en loc.cite. En agissant par conjugaison, x laisse stable $\mathcal{G}'$ et donc xh_wx^{-1} commute aussi à $\tilde{s}_{\mathbf{G}'}$ au même cocycle près et pour tout $w \in \Gamma_F$, $a(w) \in Z(\hat{G})$. D'où :

$$\begin{aligned} z\tilde{s}_{\mathbf{G}'} = x\tilde{s}_{\mathbf{G}'}x^{-1} &= x(a(w)^{-1}h_w\tilde{s}_{\mathbf{G}'}h_w^{-1})x^{-1} \\ &= a(w)^{-1}xh_wx^{-1}\,x\tilde{s}_{\mathbf{G}'}x^{-1}\,xh_w^{-1}x^{-1} \\ &= a(w)^{-1}xh_wx^{-1}zxh_w^{-1}x^{-1}\,xh_wx^{-1}\,\tilde{s}_{\mathbf{G}'}\,xh_w^{-1}x^{-1} = wzw^{-1}\tilde{s}_{\mathbf{G}'}. \end{aligned}$$

Cela donne l'égalité cherchée $z = wzw^{-1}$.

6.5 La combinatoire

On a précisé les notations $\mathbf{G}', \hat{M}, \mathbf{M}'$. Dans l'énoncé ci-dessous, on écrit $\sim H$ pour indiquer que l'on prend l'élément considéré à conjugaison près sous le groupe H. On définit aussi $W(\hat{M}) := Norm_{\hat{G}}\hat{M}/\hat{M}$, qui est muni d'une action galoisienne et d'une action de $\hat{\theta}$. On définit de façon identique $W(\hat{M}') = Norm_{\hat{G}'}\hat{M}'/\hat{M}'$, qui est muni d'une action galoisienne provenant de $\mathcal{M}'$.

Proposition. *Dans les deux sommes suivantes, les* $\mathbf{G}', \mathbf{M}', \hat{M}$ *sont des triplets comme ci-dessus. Et on a :*

$$\sum_{\mathbf{G}'/\sim\hat{G}} i(\tilde{G},\tilde{G}') \sum_{\mathbf{M}'/\sim\hat{G}'} |W(\hat{M}')^{\Gamma_F}|^{-1} S(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}); \tag{1}$$

$$=$$

$$\sum_{\hat{M}/\sim\hat{G}} |W(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}|^{-1} \sum_{\mathbf{M}'/\sim\hat{M}} i(\hat{M},\tilde{M}')$$

$$\sum_{\mathbf{G}'=\mathbf{G}'(\tilde{s});\tilde{s}\in\tilde{s}_{\mathbf{M}'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{M})^{\Gamma_F})} i'_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}')S(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}) \tag{2}$$

$$=$$

$$\sum_{\hat{M}/\sim\hat{G}} |W(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}|^{-1} \sum_{\mathbf{M}'/\sim\hat{M}} i(\hat{M},\tilde{M}')$$

$$\sum_{\mathbf{G}'=\mathbf{G}'(\tilde{s});\tilde{s}\in\tilde{s}_{\mathbf{M}'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}')S(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}). \tag{3}$$

L'égalité de (2) et (3) résulte de [I] 3.3(2). On prouve l'égalité de (1) et (2). Chaque somme est une somme sur les triplets $\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}$ comme expliqué précédemment. Pour $i=1,2$ et pour $\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}$ on note $n_i(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})$ le nombre de représentants de la classe de conjugaison sous $\hat{G}$ de ce triplet qui apparaissent dans la somme (i) (on vérifiera que ces nombres sont finis). Et on doit montrer pour tout tel triplet que :

$$|W(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}|i(\tilde{G},\tilde{G}')n_1(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})\times(|W(\hat{M}')^{\Gamma_F}|i'_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}')i(\hat{M},\tilde{M}')n_2(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}))^{-1}$$

vaut 1. En tenant compte de la proposition 6.2, cela revient au même que de démontrer :

$$|W(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}|n_1(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})|W(\hat{M}')^{\Gamma_F}|^{-1}n_2(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})^{-1} \tag{4}$$
$$=|\overline{Aut}_{\hat{G}}(\mathbf{G}')||\overline{Aut}_{\hat{M}}(\mathbf{M}')|^{-1}$$

Dans (1), le groupe $Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')/\hat{G}'$ opère sur les classes de $\hat{G}'$-conjugaison formées d'éléments $\mathbf{M}'$. Ainsi $n_1(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})=|Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')/\hat{G}'Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')|$. Le sous-groupe $Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ de $Aut_G(\mathbf{G}')$ opère trivialement sur tout $\mathbf{M}'$ espace de Levi de $\mathbf{G}'$ et on peut donc voir $Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')/\hat{G}'Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')$ comme un espace quotient de $\overline{Aut}_G(\mathbf{G}')$ et on a :

$$n_1(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})=|\overline{Aut}_G(\mathbf{G}')||Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')/Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')\cap\hat{G}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}|^{-1}.$$

Or $Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')\cap\hat{G}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}=Norm_{\hat{G}'}(\mathbf{M}')Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$; d'où

$$|Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')/Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')\cap\hat{G}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}|=$$

$$|Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')/\hat{M}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}||Norm_{\hat{G}'}(\mathbf{M}')Z(\hat{G})^{\Gamma_F}/\hat{M}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}|^{-1}$$
$$=|Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')/\hat{M}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}||W(\hat{M}')^{\Gamma_F}|^{-1}|Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap\hat{G}'/\hat{M}'\cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F}|.$$

Or $Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap\hat{G}'\subset Z(\hat{G}')\subset Z(\hat{M}')$, et on trouve donc que $n_1(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})=$

$$|\overline{Aut}_G(\mathbf{G}')||W(\hat{M}')^{\Gamma_F}||Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')/\hat{M}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}|^{-1}.$$

Dans (2), il y a d'abord l'image réciproque $Norm_{\hat{G}}(\hat{M})^*$ de $W(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ dans $Norm_{\hat{G}}(\hat{M})$ qui opère sur les $\mathbf{M}'$ alors que dans la somme on n'a pris en compte que l'action de $\hat{M}$; ensuite, sur les classes de conjugaison de $\mathbf{G}'$ modulo $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$ opère $Aut_{\hat{M}}(\mathbf{M}')/\hat{M}'Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$. Ainsi

$$n_2(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})=|Norm_{\hat{G}}(\hat{M})^*/\hat{M}Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})|$$
$$\times|Aut_{\hat{M}}(\mathbf{M}')/Aut_{\hat{M}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})Z(\hat{M})^{\Gamma_F}|.$$

Ce nombre est évidemment fini et on peut le récrire sous la forme :

$$|W(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}||Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})/Aut_{\hat{M}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})|^{-1}$$

$$\times|\overline{Aut}_{\hat{M}}(\mathbf{M}')||Aut_{\hat{M}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})/\hat{M}'(Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap Aut_{\hat{M}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}))|^{-1}$$
$$=|W(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}||\overline{Aut}_{\hat{M}}(\mathbf{M}')||Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})/\hat{M}'(Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap Aut_{\hat{M}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}))|^{-1}.$$

Ainsi démontrer (4) est équivalent à montrer que

$$|Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}')/\hat{M}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}| =$$

$$|Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})/\hat{M}'(Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap Aut_{\hat{M}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M}))|.$$

Comme $\hat{M}$ est uniquement déterminé par $\mathbf{G}'$ et son espace de Levi $\tilde{M}'$, $Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}') = Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}',\mathbf{M}',\hat{M})$ et il suffit de montrer l'inclusion

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}') \hookrightarrow \hat{M}'Z(\hat{G})^{\Gamma_F}.$$

Pour montrer cette inclusion, on considère l'image de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')$ dans $\hat{T}/Z(\hat{G})$; l'image est incluse dans $(\hat{T}/Z(\hat{G}))^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$; or $\hat{T}/Z(\hat{G})$ est un tore induit au sens suivant : le groupe de ces caractères admet une base sur laquelle $\hat{\theta}$ et Γ_F opère par permutations. Ainsi $(\hat{T}/Z(\hat{G}))^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ est un tore connexe et est nécessairement l'image de $\hat{T}^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$; or $\hat{T}^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$ est un sous-groupe de $(\hat{M}')^{\Gamma_F}$ et ainsi $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap Aut_{\hat{G}}(\mathbf{G}')$ est un sous-groupe de $(\hat{M}')^{\Gamma_F}Z(\hat{G})$ et donc de $(\hat{M}')^{\Gamma_F}Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$.

6.6 Un résultat d'annulation

On travaille ici avec des K-espaces. On fixe un ensemble fini V de places contenant V_{ram}. On fixe comme toujours une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B},\hat{T},(\hat{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$, conservée par l'action galoisienne. Si $K\tilde{M}$ est un K-espace de Levi de $K\tilde{G}$, on sait définir la notion de donnée endoscopique de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. En fait, $K\tilde{M}$ n'intervient dans cette définition que via le Levi $\hat{M}$ de $\hat{G}$ qui lui est associé. On sait que l'on peut supposer ce Levi standard et invariant par $\hat{\theta}$ et par l'action galoisienne. Pour se donner un peu plus de liberté, on peut imposer la condition plus faible

(1) $\hat{T}\subset\hat{M}$ et il existe $\hat{P}\in\mathcal{P}(\hat{M})$ de sorte que $(\hat{P},\hat{M})$ soit conservé par $\hat{\theta}$ et par l'action galoisienne.

Considérons non plus un K-espace de Levi $K\tilde{M}$ de $K\tilde{G}$ mais un Levi $\hat{M}$ de $\hat{G}$ qui vérifie la condition (1). Le cocycle $\mathbf{a}$ se pousse en un cocycle $\mathbf{a}_{\hat{M}}$ à valeurs dans $Z(\hat{M})$. On définit comme en 3.1 la notion de donnée endoscopique disons de $(\hat{M},\mathbf{a}_{\hat{M}})$. Si $\hat{M}$ correspond à un K-espace de Levi $K\tilde{M}$, cette notion coïncide avec celle de donnée endoscopique de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. Mais la présente notion est un peu plus générale puisque $\hat{M}$ ne corresponde pas toujours à un tel K-espace de Levi. Considérons donc un Levi $\hat{M}$ comme ci-dessus et une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ de $(\hat{M},\mathbf{a}_{\hat{M}})$. Un tore maximal de $\hat{M}'$ est isomorphe à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Si on introduit des sous-tores maximaux T de G et T' de M', on a par dualité un homomorphisme $\xi : T\to T'$. Il n'est défini qu'à conjugaison près mais sa restriction à $Z(G)$ est bien définie et envoie $Z(G)$ dans $Z(M')$. On peut donc définir l'espace tordu $\tilde{M}' = M'\times_{Z(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})$ comme en [I] 1.7. Pour une place v hors de V, la situation est non ramifiée. Il existe donc un espace de Levi $\tilde{M}_v$ de $\tilde{G}$ défini sur F_v qui correspond à $\hat{M}$. La donnée localisée $\mathbf{M}'_v$ est une donnée endoscopique de $(M_v,\tilde{M}_v,\mathbf{a}_{M_v})$. Le sous-espace hyperspécial $\tilde{K}_v\cap\tilde{M}_v$ détermine alors un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}_v^{M'}$ de $\tilde{M}'(F_v)$, bien défini modulo conjugaison par $M'_{AD}(F_v)$. On fixe de tels sous-espaces, soumis à la condition de compatibilité globale de 1.1. La notion de données auxiliaires M'_1, $\tilde{M}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$ définies sur F et non ramifiées hors de V se définit comme en 3.3 et la preuve du lemme de ce paragraphe montre que de telles données existent. On adjoint à ces données une familles d'espaces hyperspéciaux $(\tilde{K}_{1,v}^{M'})_{v\notin V}$ relevant les $\tilde{K}_v^{M'}$, soumise à la même condition de compatibilité globale. Considérons maintenant une autre série de données auxilaires M'_2,... $(\tilde{K}^{M'}_{2,v})_{v\not\in V}$. La même construction qu'en 1.15 définit une fonction $\tilde{\lambda}_{12,V}$ qui permet de recoller $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F_V))$ à $C^\infty_{c,\lambda_2}(\tilde{M}'_1(F_V))$, du moins si $\tilde{M}'(F)\neq\emptyset$. On définit alors l'espace $C_c^\infty(\mathbf{M}'_V)$ comme la limite inductive de ces espaces. On a de même des espaces $I(\mathbf{M}'_V)$, $SI(\mathbf{M}'_V)$ etc... Toutes les constructions formelles que l'on a faites dans le cas où $\hat{M}$ correspondait à un K-espace de Levi de $K\tilde{G}$ s'étendent dans notre situation.

Cela étant, supposons $\tilde{M}'(F)\neq\emptyset$ et $\mathbf{M}'$ elliptique, c'est-à-dire que $Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0}=Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. Soient $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_\diamond(\mathbf{M}'_V)\otimes Mes(M'(F_V))^*$ et $\mathbf{f}\in I(K\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))$. On peut poser

$$(2)\qquad I_*^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Par convention, $\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}=0$ si $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ n'est pas relevante. S'il existe un espace de Levi $K\tilde{M}$ correspondant à $\hat{M}$ et si $\mathbf{M}'$ est relevante pour cet espace de Levi, ce n'est autre que le terme $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ du paragraphe 4.4.

Proposition. *Supposons soit qu'il n'existe aucun espace de Levi $K\tilde{M}$ de $K\tilde{G}$ correspondant à $\tilde{M}$, soit qu'un tel espace $K\tilde{M}$ existe mais que $\mathbf{M}'$ soit une donnée non relevante de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. Alors $I_*^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=0$ pour tout $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_\diamond(\mathbf{M}'_V)\otimes Mes(M'(F_V))^*$ et tout $\mathbf{f}\in I(K\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))$.*

Les places archimédiennes compliquent grandement la démonstration, cf. la remarque (30) de 6.10. On va énoncer deux propositions auxiliaires. On montrera en 6.9 que la seconde entraîne la première et que celle-ci entraîne la proposition ci-dessus. On prouvera la seconde proposition auxiliaire en 6.10. Dans les quatre paragraphes suivants, on conserve la présente situation et on impose les hypothèses de la proposition. Pour simplifier, on fixe des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant, ce qui nous débarrasse des espaces de mesures.

6.7 Une première proposition auxiliaire

Soient $v\in V$ et $\hat{\mathfrak{L}}_v$ un Levi de $\hat{G}$. Considérons la condition

(1) $\hat{T}\subset\hat{\mathfrak{L}}_v$ et il existe $\hat{\mathfrak{P}}_v\in\mathcal{P}(\hat{\mathfrak{L}}_v)$ de sorte que $(\hat{\mathfrak{P}}_v,\hat{\mathfrak{L}}_v)$ soit conservé par $\hat{\theta}$ et par l'action de Γ_{F_v},

qui est l'analogue locale de 6.6(1). Notons $\hat{\mathfrak{M}}_v$ le commutant de $Z(\hat{M}')^{\Gamma_{F_v},0}$ dans $\hat{G}$. C'est un Levi de $\hat{G}$ inclus dans $\hat{M}$. L'inclusion peut être stricte. Ce Levi vérifie (1). Posons $\hat{\mathfrak{M}}_V=(\hat{\mathfrak{M}}_v)_{v\in V}$. Notons $\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$ l'ensemble des familles $\hat{\mathfrak{L}}_V=(\hat{\mathfrak{L}}_v)_{v\in V}$ telles que, pour tout $v\in V$, $\hat{\mathfrak{L}}_v$ soit un Levi de $\hat{G}$ vérifiant (1) et contenant $\hat{\mathfrak{M}}_v$. Considérons une telle famille. On pose

$$\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{L}}_V)=Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}\cap(\cap_{v\in V}Z(\hat{\mathfrak{L}}_v))=Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}\cap(\cap_{v\in V}Z(\hat{\mathfrak{L}}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}).$$

Pour une place $v\in V$, les mêmes considérations que dans le paragraphe précédent s'appliquent : on définit la notion de donnée endoscopique (locale) de $(\hat{\mathfrak{L}}_v,\mathbf{a}_{\hat{\mathfrak{L}}_v})$. En particulier, puisque $\mathbf{M}'_v$ est une donnée endoscopique elliptique de $(\hat{\mathfrak{M}}_v,\mathbf{a}_{\hat{\mathfrak{M}}_v})$ et que

$\hat{\mathfrak{M}}_v$ est un Levi de $\hat{\mathfrak{L}}_v$, on peut définir la donnée endoscopique $\mathbf{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})$ de $(\hat{\mathfrak{L}}_v, \mathbf{a}_{\hat{\mathfrak{L}}_v})$ pour $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{\mathfrak{M}})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}/Z(\hat{\mathfrak{L}})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}$. Considérons un élément $s \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{L}}_V)$. Alors $\mathbf{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})$ est défini pour tout $v \in V$ et on pose $\mathbf{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}) = (\mathbf{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s}))_{v\in V}$. Relevons $\tilde{s}$ en un élément de $\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Alors la donnée globale $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ est bien définie. Pour tout $v \in V$, $\mathbf{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})$ est une "donnée de Levi" de la donnée locale $\mathbf{G}'_v(\tilde{s})$. Fixons des données auxiliaires globales $G'_1(\tilde{s})$,... , $(\tilde{K}'_{1,v})_{v\notin V}$ pour $\mathbf{G}'(\tilde{s})$. Il s'en déduit par restriction des données auxilaires locales pour les $\mathbf{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})$, ainsi que des données auxiliaires globales pour $\mathbf{M}'$. Conformément à notre habitude, on note par exemple $\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})$ ou $M'_1(\tilde{s})$ l'image réciproque de $\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})$ ou M' dans $\tilde{G}'_1(\tilde{s})$. En posant $\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,V}(\tilde{s};F_V) = \prod_{v\in V}\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s},F_v)$, on a un espace de fonctions $SI_{\lambda_1}(\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,V}(\tilde{s},F_V))$. Faisons varier le relèvement de $\tilde{s}$ et les données auxiliaires. On remplace l'indice 1 par 2 pour ces nouvelles données. On a une fonction de recollement définie sur le produit fibré $\tilde{\mathfrak{L}}'_{12,V}(\tilde{s};F_V)$ de $\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,V}(\tilde{s};F_V)$ et $\tilde{\mathfrak{L}}'_{2,V}(\tilde{s};F_V)$ au-dessus de $\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s};F_V)$. Elle n'est définie qu'à multiplication près par un scalaire. Mais on a remarqué au paragraphe précédent que l'on pouvait normaliser canoniquement les restrictions de ces fonctions au produit fibré similaire $\tilde{M}'_{12}(F_V)$ qui est inclus dans $\tilde{\mathfrak{L}}'_{12,V}(\tilde{s};F_V)$. Cette normalisation fixe la fonction de recollement sur tout $\tilde{\mathfrak{L}}'_{12,V}(\tilde{s};F_V)$. On peut alors définir par limite inductive un espace que l'on note $SI(\mathbf{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$. Dualement, on a un espace $D^{st}_{géom}(\mathbf{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$.

Soient $v \in V$ et $\delta \in \tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s};F_v)$. Sur la clôture algébrique $\bar{F}_v$, il existe un espace de Levi $\tilde{\mathfrak{L}}_v$ de $\tilde{G}$ qui correspond à $\hat{\mathfrak{L}}_v$. La classe de conjugaison de la partie semi-simple de δ correspond à une classe de conjugaison d'un élément semi-simple γ de $\tilde{\mathfrak{L}}_v$. On dit que δ est $\tilde{G}$-régulier, resp. $\tilde{G}$-équisingulier, si γ est fortement $\tilde{G}$-régulier, resp. $\tilde{G}$-équisingulier. Un élément $\delta = (\delta_v)_{v\in V} \in \tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s};F_V)$ est dit $\tilde{G}$-régulier, resp. $\tilde{G}$-équisingulier, aux places archimédiennes si δ_v est $\tilde{G}$-régulier, resp. $\tilde{G}$-équisingulier, pour tout v archimédienne.

Soit $\hat{\mathfrak{R}}_V \in \mathcal{L}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$. On note $\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{R}}_V)$ l'ensemble des $\hat{\mathfrak{L}}_V \in \mathcal{L}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$ telles que $\hat{\mathfrak{R}}_v \subset \hat{\mathfrak{L}}_v$ pour tout $v \in V$. Soient $s \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{L}}_V)$, $\mathbf{f} \in SI(\mathbf{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$ et $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta})) = D^{st}_{géom}(\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s}))$. Supposons

(2) le support de $\boldsymbol{\delta}$ soit formé d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers aux places archimédiennes.

Fixons des données auxiliaires comme ci-dessus. Pour simplifier, on peut supposer que $\boldsymbol{\delta}$ et $\mathbf{f}$ s'identifient respectivement à $\otimes_{v\in V}\boldsymbol{\delta}_{1,v}$ et $\otimes_{v\in V}\mathbf{f}_{1,v}$. Les termes du produit

$$\prod_{v\in V} S^{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_1}(\boldsymbol{\delta}_{1,v}, B^{\tilde{G}}, \mathbf{f}_{1,v})$$

sont bien définis. Notons que l'hypothèse (2) nous permet si l'on veut de supprimer la mention du système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ aux places archimédiennes. Quand on fait varier les données auxiliaires, le produit ne change pas. On le note $S^{\mathbf{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})}_{\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta})}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}}, \mathbf{f})$.

Soient $\hat{\mathfrak{R}}_V \in \mathcal{L}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$ et $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Supposons $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ et $\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta})$ elliptiques. Notons $\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta}))$ l'ensemble des familles $\tilde{\mathfrak{L}}'_V = (\tilde{\mathfrak{L}}'_v)_{v\in V}$ telles que, pour tout $v \in V$, $\tilde{\mathfrak{L}}'_v$ soit un espace de Levi de $\tilde{G}'(\tilde{s})$ défini sur F_v et contenant $\tilde{\mathfrak{R}}'_v(\tilde{\zeta})$. Pour une telle famille et pour $v \in V$, notons $\hat{\mathfrak{L}}_v$ le commutant de $Z(\hat{\mathfrak{L}}'_v)^{\Gamma_{F_v},0}$ dans $\hat{G}$. Alors la famille $\hat{\mathfrak{L}}_V = (\hat{\mathfrak{L}}_v)_{v\in V}$ appartient à $\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{R}}_V)$. La famille $\tilde{\mathfrak{L}}'_V$ apparaît comme la famille d'espaces de Levi associée à la donnée endoscopique elliptique $\mathbf{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})$ de $(\hat{\mathfrak{L}}_V, \mathbf{a}_{\hat{\mathfrak{L}}_V})$. Pour simplifier les notations, nous noterons directement $\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})$ les éléments de $\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta}))$. Remarquons que l'application "terme constant"

$$\begin{array}{ccc} SI(\mathbf{G}'(\tilde{s})) & \to & SI(\mathbf{\mathfrak{L}}'(\tilde{s})) \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f}_{\mathbf{\mathfrak{L}}'(\tilde{s})} \end{array}$$

est bien définie.

Soient $\hat{\mathfrak{R}}_V \in \mathcal{L}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$, $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta}))$ et $f \in I(K\tilde{G}(F_V),\omega)$. On suppose (2) vérifiée. On suppose aussi

(3) $\mathbf{\mathfrak{R}}'(\tilde{\zeta})$ est elliptique.

On définit

$$J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\boldsymbol{\delta},f) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta}))} e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_V}(\tilde{M}',\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))S^{\mathbf{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})}_{\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta})}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},(f^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathbf{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})}).$$

Proposition. *Soient $\hat{\mathfrak{R}}_V \in \mathcal{L}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$, $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta}))$ et $f \in I(K\tilde{G}(F_V),\omega)$. On suppose que (2) et (3) sont vérifiées et que $\boldsymbol{\delta}$ est l'image par induction d'un élément de $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}'_V)$. Alors $J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\boldsymbol{\delta},f)=0$.*

6.8 Une deuxième proposition auxiliaire

Proposition. *Soient $\hat{\mathfrak{R}}_V \in \mathcal{L}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$, $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta}))$ et $f \in I(K\tilde{G}(F_V),\omega)$. On suppose que $\mathbf{\mathfrak{R}}'(\tilde{\zeta})$ est elliptique et que $\boldsymbol{\delta}$ est l'image par induction d'un élément de $D^{st}_{orb}(\mathbf{M}'_V)$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}$-réguliers aux places archimédiennes. Alors $J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\boldsymbol{\delta},f)=0$.*

6.9 Réduction de la proposition 6.6

Evidemment, la proposition 6.8 est un cas particulier de la proposition 6.7. Mais nous allons prouver qu'inversement, elle implique cette proposition. Considérons la situation de cette proposition 6.7. On peut supposer $f=\otimes_{v\in V}f_v$. On fait jouer aux données $\mathbf{G}'(\tilde{\zeta})$ et $\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta})$ un rôle de référence. Pour simplifier, on supprime le terme $\tilde{\zeta}$ des notations, en posant $\mathbf{G}'=\mathbf{G}'(\tilde{\zeta})$, $\mathbf{\mathfrak{R}}'_V=\mathbf{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{\zeta})$. Fixons des données supplémentaires G'_1,...,$(\tilde{K}'_{1,v})_{v\notin V}$ pour $\mathbf{G}'$. On peut supposer que $\boldsymbol{\delta}$ s'identifie à $\otimes_{v\in V}\boldsymbol{\delta}_{1,v}$, avec $\boldsymbol{\delta}_{1,v}\in D^{st}_{géom,\lambda_{1,v}}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(F_v))$. On peut fixer pour tout $v\in V$ une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}'_v$ dans $\tilde{M}'(F_v)$ de sorte que $\boldsymbol{\delta}_{1,v}$ soit induite d'un élément de $D^{st}_{géom,\lambda_{1,v}}(\tilde{M}'_1(F_v))$ dont le support est formé d'éléments de partie semi-simple dans $\mathcal{O}'_v$. Notons $\mathcal{O}^{\tilde{\mathfrak{R}}_v}_v$ la classe de conjugaison stable dans $\tilde{\mathfrak{R}}'_v(F_v)$ contenant $\mathcal{O}'$. L'hypothèse sur $\boldsymbol{\delta}$ est que $\mathcal{O}^{\tilde{\mathfrak{R}}'_v}_v$ est $\tilde{G}$-équisingulière pour toute place v archimédienne. Nous considérons comme fixés f et les composantes $\delta_{1,v}$ pour v non archimédienne. On va étudier comment $J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\boldsymbol{\delta},f)$ dépend des $\delta_{1,v}$ pour v archimédienne. Pour cela, considérons pour toute place archimédienne un élément $\boldsymbol{\tau}_{1,v}\in D^{st}_{géom,\lambda_{1,v}}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(F_v))$. On suppose soit que $\boldsymbol{\tau}_{1,v}=\boldsymbol{\delta}_{1,v}$, soit que $\boldsymbol{\tau}_{1,v}$ appartient à $D^{st}_{orb,\lambda_{1,v}}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(F_v))$ et que son support est formé d'éléments $\tilde{G}$-réguliers proches de $\mathcal{O}^{\tilde{\mathfrak{R}}'_v}_v$. Pour unifier les notations, on pose $\boldsymbol{\tau}_{1,v}=\boldsymbol{\delta}_{1,v}$ pour toute $v\in V$ non-archimédienne. On note $\boldsymbol{\tau}$ l'élément de $D^{st}_{géom}(\mathbf{\mathfrak{R}}'_V)$ auquel s'identifie $\otimes_{v\in V}\boldsymbol{\tau}_{1,v}$.

Pour tout $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, fixons des données supplémentaires $G'_1(\tilde{s})$,...,$(\tilde{K}'_{1,v}(\tilde{s}))_{v\not\in V}$ pour $\mathbf{G}'(\tilde{s})$. On a deux séries de données auxiliaires pour la donnée $\boldsymbol{\mathfrak{R}}'_V=\boldsymbol{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s})$. Comme on l'a dit, les espaces $SI_{\lambda_1(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,V}(\tilde{s};F_V))$ et $SI_{\lambda_1}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,V}(F_V))$ se recollent canoniquement. On peut décomposer cet isomorphisme canonique en produit d'isomorphismes sur toutes les places $v\in V$. On a alors des isomorphismes duaux entre espaces de distributions. Pour tout $v\in V$, $\boldsymbol{\tau}_{1,v}$ s'identifie ainsi à un élément $\boldsymbol{\tau}_{1,v}(\tilde{s})\in D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s};F_v))$. D'autre part, $f^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}$ s'identifie à un élément $\otimes_{v\in V}f_{1,v}(\tilde{s})$. On a l'égalité

$$(1)\qquad S^{\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})}_{\boldsymbol{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s})}(\boldsymbol{\tau},B^{\tilde{G}},(f^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})})=\prod_{v\in V}S^{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\boldsymbol{\tau}_{1,v}(\tilde{s}),B^{\tilde{G}},f_{1,v}(\tilde{s})_{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}).$$

Si v est archimédienne, on a dit que l'on pouvait oublier le système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ en vertu de l'hypothèse sur le support de $\boldsymbol{\tau}_{1,v}$. On a vu en [V] 1.4 (2) et (3) qu'il existait $\varphi_{1,v}\in SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s};F_v))$ de sorte que

(2) pour tout $\boldsymbol{\tau}_{1,v}$ comme ci-dessus, on a

$$S^{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\boldsymbol{\tau}_{1,v},f_{1,v}(\tilde{s})_{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})})=S^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\boldsymbol{\tau}_{1,v}(\tilde{s}),\varphi_{1,v}).$$

A l'aide des recollements fixés, on peut identifier $\varphi_{1,v}$ à un élément de $SI_{\lambda_{1,v}}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(F_v))$. Comme cet élément dépend de $\tilde{s}$ et de $\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})$, notons-le $\phi_{1,v}[\tilde{s},\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})]$. Le membre de droite de (2) devient

$$S^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}}_{\lambda_{1,v}}(\boldsymbol{\tau}_{1,v},\phi_{1,v}[\tilde{s},\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})]).$$

Notons V_∞ l'ensemble des places archimédiennes de F et indiquons par un indice ∞ les produits ou produits tensoriels sur les places $v\in V_\infty$. Par exemple $\boldsymbol{\tau}_{1,\infty}=\otimes_{v\in V_\infty}\boldsymbol{\tau}_{1,v}$. L'égalité (1) devient

$$S^{\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})}_{\boldsymbol{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s})}(\boldsymbol{\tau},B^{\tilde{G}},(f^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})})=c[\tilde{s},\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})]S^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,\infty}}_{\lambda_{1,\infty}}(\boldsymbol{\tau}_{1,\infty},\phi_{1,\infty}[\tilde{s},\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})]),$$

où $c[\tilde{s},\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})]$ est indépendant des $\boldsymbol{\tau}_{1,v}$ pour $v\in Val_\infty(F)$. Posons

$$\phi_{1,\infty}=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\zeta))}e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_V}(\tilde{M}',\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))c[\tilde{s},\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})]\phi_{1,\infty}[\tilde{s},\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})].$$

Alors

$$(3)\qquad J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\boldsymbol{\tau},f)=S^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,\infty}}_{\lambda_{1,\infty}}(\boldsymbol{\tau}_{1,\infty},\phi_{1,\infty}).$$

Soit $\boldsymbol{\mu}_{1,\infty}\in D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_{1,\infty}}(\tilde{M}'_1(F_\infty))$, à support dans les éléments de $\tilde{M}'(F_\infty)$ de partie semi-simple dans $\mathcal{O}'_\infty$, tel que $\boldsymbol{\delta}_{1,\infty}$ soit l'induite de $\boldsymbol{\mu}_{1,\infty}$. En appliquant (3) à $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\delta}$, on obtient

$$J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\boldsymbol{\delta},f)=S^{\tilde{M}'_{1,\infty}}_{\lambda_{1,\infty}}(\boldsymbol{\mu}_{1,\infty},\phi_{1,\infty,\tilde{M}'_{1,\infty}}).$$

On veut prouver que le membre de gauche est nul. Il suffit de prouver que $\phi_{1,\infty,\tilde{M}'_{1,\infty}}$ est nul au voisinage de $\mathcal{O}'_\infty$. Précisément, il suffit de prouver que, pour $\boldsymbol{\nu}_{1,\infty}\in D^{st}_{orb,\lambda_{1,\infty}}(\tilde{M}'_1(F_\infty))$, à support $\tilde{G}$-régulier et proche de $\mathcal{O}'_\infty$, on a $S^{\tilde{M}'_{1,\infty}}_{\lambda_{1,\infty}}(\boldsymbol{\nu}_{1,\infty},\phi_{1,\infty,\tilde{M}'_{1,\infty}})=0$. Fixons un tel $\nu_{1,\infty}$, notons $\boldsymbol{\tau}_{1,\infty}$ l'induite de $\boldsymbol{\nu}_{1,\infty}$ à $\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,\infty}(F_\infty)$. Complétons $\boldsymbol{\tau}_{1,\infty}$ en un élément $\boldsymbol{\tau}$ de composantes $\boldsymbol{\delta}_{1,v}$ aux places de V non-archimédiennes. Le même calcul que ci-dessus montre que

$$S^{\tilde{M}'_{1,\infty}}_{\lambda_{1,\infty}}(\boldsymbol{\nu}_{1,\infty},\phi_{1,\infty,\tilde{M}'_{1,\infty}})=J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\boldsymbol{\tau},f).$$

Mais $\boldsymbol{\tau}$ vérifie les hypothèses de 6.8. Donc le membre de droite ci-dessus est nul. D'où l'assertion cherchée, ce qui prouve la proposition 6.7.

Nous allons maintenant prouver que cette proposition 6.7 entraîne la proposition 6.6. Considérons la définition 6.6(2). On utilise la proposition 4.2(i) pour développer chaque terme $S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})$. Avec les notations que l'on a introduites, on obtient

$$S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})=\sum_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}'_V)}e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_V}(\tilde{M}',\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))S^{\mathfrak{L}'_V(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'_V}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},(f^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})_{\mathfrak{L}'_V(\tilde{s})}).$$

Fixons des données auxiliaires comme plus haut. Les intégrales du membre de droite se décomposent alors en produit sur $v\in V$ d'intégrales locales. Considérons une place v archimédienne. Le terme local est

$$(4)\qquad S^{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_{1,v}(\tilde{s}),B^{\tilde{G}},(f_v^{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})})_{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}).$$

On peut supposer comme plus haut que les éléments du support de $\boldsymbol{\delta}_{1,v}$ ont leur partie semi-simple dans une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}'_v$. Fixons $H_v\in\mathcal{A}_{\tilde{M}'_v}$ en position générale. Relevons-le en un élément $H_{1,v}\in\mathcal{A}_{\tilde{M}'_{1,v}(\tilde{s})}$. Considérons un Levi de $\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})$ contenant $\tilde{M}'_v$. Conformément aux notations introduites en 6.7, notons-le $\tilde{\mathfrak{R}}'_v(\tilde{s})$. Les définitions de [V] 6.3 s'étendent au cas des distributions se transformant selon le caractère $\lambda_{1,v}(\tilde{s})$ de $C_1(\tilde{s};F_v)$. On a défini dans cette référence un élément

$$\xi^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}),st}(\boldsymbol{\delta}_{1,v}(\tilde{s}),B^{\tilde{G}},H_{1,v}^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})}).$$

C'est une distribution induite à $\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s};F_v)$ d'un élément de $D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{M}'_{1,v}(\tilde{s};F_v))$ dont le support est formé d'éléments de partie semi-simple dans $\mathcal{O}'_v$. La proposition [V] 6.3 entraîne que le (3) est faiblement équivalent à la fonction qui, à $H_{1,v}$ associe

$$\sum_{\tilde{\mathfrak{R}}'_v(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})}(\tilde{M}'_v)}S^{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(exp(H_{1,v,\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})})\xi^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}),st}(\boldsymbol{\delta}_{1,v}(\tilde{s}),B^{\tilde{G}},H_{1,v}^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})}),(f_v^{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})})_{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}).$$

Cela implique que, si l'on remplace dans l'expression ci-dessus $H_{1,v}$ par $H_{1,v}/n$, pour un entier $n\geq 1$, la limite de cette expression quand n tend vers l'infini est égale à (4). Posons

$$\boldsymbol{\tau}_{1,v}^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})}(n)=exp(H_{1,v,\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})}/n)\xi^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}),st}(\boldsymbol{\delta}_{1,v}(\tilde{s}),B^{\tilde{G}},H_{1,v}^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})}/n).$$

Pour unifier les notations, pour une place $v\in V$ non archimédienne, posons

$$\boldsymbol{\tau}_{1,v}^{\tilde{M}'_{1,v}(\tilde{s})}(n)=\delta_{1,v}(\tilde{s}).$$

Enfin, on a défini en 6.7 l'ensemble $\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}'_V)$. Notons $\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_\infty(\tilde{M}'_V)$ le sous-ensemble des $\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}'_V)$ tels que $\tilde{\mathfrak{R}}'_v(\tilde{s})=\tilde{M}'_v$ pour toute place non-archimédienne. Avec ces définitions, on obtient que $S_{\mathbf{M'}}^{\mathbf{G'}(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G'}(\tilde{s})})$ est égale à la limite quand n tend vers l'infini de

$$(5)\qquad \sum_{\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}_{\infty}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}'_V)}\ \sum_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s}))} e_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}',\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$$

$$\prod_{v\in V} S_{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_{1,v}(\tilde{s})}^{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}(\boldsymbol{\tau}_{1,v}^{\tilde{M}'_{1,v}(\tilde{s})}(n),B^{\tilde{G}},(f_v^{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})})_{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}).$$

Les distributions $\boldsymbol{\tau}_{1,v}^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})}(n)$ dépendent des données auxiliaires mais on vérifie sans peine qu'elles se recollent convenablement quand on change de données auxiliaires. On doit toutefois prendre garde au fait que la translation par $exp(H_{1,v,\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})})$ pour v archimédienne n'est compatible au recollement qu'à un caractère près. Plus précisément, pour une telle place, on a introduit en [IV] 2.1 un caractère $\lambda_{\mathfrak{A}_{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})}}$ de $\mathcal{A}_{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}$. Alors les distributions

$$\Big(\prod_{v\in Val_{\infty}(F)}\lambda_{\mathfrak{A}_{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})}}(H_{1,v,\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})}/n)\Big)\otimes_{v\in V}\boldsymbol{\tau}_{1,v}^{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})}(n)$$

se recollent en une distribution que l'on note $\boldsymbol{\tau}^{\mathfrak{R}'_V(\tilde{s})}(n)$. Cette multiplication par le produit des $\lambda_{\mathfrak{A}_{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})}}(H_{1,v,\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})}/n)$ ne nous gêne pas : on peut multiplier (5) par ce terme sans changer les propriétés de cette expression. Alors (5) se récrit

$$\sum_{\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}_{\infty}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}'_V)}\ \sum_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s}))} e_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}',\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))S_{\mathfrak{R}'_V(\tilde{s})}^{\mathfrak{L}'_V(\tilde{s})}(\boldsymbol{\tau}^{\mathfrak{R}'_V(\tilde{s})}(n),B^{\tilde{G}},(f^{\mathbf{G'}(\tilde{s})})_{\mathfrak{L}'_V(\tilde{s})}).$$

En revenant à 6.6(2), on voit que $I_*^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M'},\boldsymbol{\delta},f)$ est égale à la limite quand n tend vers l'infini de

$$(6)\qquad \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))\sum_{\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}_{\infty}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}'_V)}$$

$$\sum_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s}))} e_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}',\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))S_{\mathfrak{R}'_V(\tilde{s})}^{\mathfrak{L}'_V(\tilde{s})}(\boldsymbol{\tau}^{\mathfrak{R}'_V(\tilde{s})}(n),B^{\tilde{G}},(f^{\mathbf{G'}(\tilde{s})})_{\mathfrak{L}'_V(\tilde{s})}).$$

A tout $\mathfrak{R}'_V(\tilde{s})$ intervenant est associé un élément $\hat{\mathfrak{R}}_V\in\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$. Plus précisément, celui-ci appartient au sous-ensemble $\mathcal{L}_{\infty}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$ défini par les conditions $\hat{\mathfrak{R}}_v=\hat{\mathfrak{M}}_v$ pour $v\in V$ non-archimédienne. On peut remplacer la somme en $\mathfrak{R}'_V(\tilde{s})$ par une somme en $\hat{\mathfrak{R}}_V$, que l'on permute avec la somme en $\tilde{s}$. On peut ensuite décomposer cette dernière somme en une somme sur $\tilde{t}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)$ et une somme en $\tilde{s}\in\tilde{t}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. L'expression (6) devient la somme sur $\hat{\mathfrak{R}}_V\in\mathcal{L}_{\infty}(\hat{\mathfrak{M}}_V)$ de

$$\sum_{\tilde{t}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V);\mathfrak{R}'_V(\tilde{t})\text{ elliptique}} J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\tilde{t},\boldsymbol{\tau}^{\mathfrak{R}'_V(\tilde{t})}(n),f),$$

où

$$J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\tilde{t},\boldsymbol{\tau}^{\mathfrak{R}'_V(\tilde{t})}(n),f)=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{t}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s}))} e_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}',\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))S_{\mathfrak{R}'_V(\tilde{s})}^{\mathfrak{L}'_V(\tilde{s})}(\boldsymbol{\tau}^{\mathfrak{R}'_V(\tilde{s})}(n),B^{\tilde{G}},(f^{\mathbf{G'}(\tilde{s})})_{\mathfrak{L}'_V(\tilde{s})}).$$

Dans le cas où $\tilde{t} = \tilde{\zeta}$, cette expression est égale à l'expression $J(\hat{\mathfrak{R}}_V, \boldsymbol{\tau}^{\mathfrak{R}'_V(\tilde{t})}(n), f)$ de 6.7. Pour $\tilde{t}$ quelconque, elle est égale à l'analogue de cette expression quand on remplace la donnée de départ $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ par la donnée équivalente $(M', \mathcal{M}', \tilde{t})$. On peut donc lui appliquer cette proposition 6.7. Les distributions $\boldsymbol{\tau}^{\mathfrak{R}'_V(\tilde{t})}(n)$ vérifient par construction les hypothèses de cette proposition : en une place archimédienne v, la translation par $exp(H_{1,v,\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s})}/n)$ assure que le support de la distribution est $\tilde{G}$-équisingulier puisque H_v est en position générale. La proposition 6.7 implique donc que $J(\hat{\mathfrak{R}}_V, \tilde{t}, \boldsymbol{\tau}^{\mathfrak{R}'_V(\tilde{t})}(n), f) = 0$. Alors l'expression (6) est nulle. Sa limite $I_*^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, f)$ est nulle elle aussi, ce qui prouve la proposition 6.6.

6.10 Preuve de la proposition 6.8

On fixe des données $\hat{\mathfrak{R}}_V$, $\boldsymbol{\delta}$ et f comme dans l'énoncé de la proposition 6.8. On suppose $f = \otimes_{v \in V} f_v$. On a besoin de facteurs de transfert globaux. Pour cela, on fixe les extensions

$$1 \to G \to H \to D \to 1, \ \tilde{G} \to \tilde{H}$$

construites dans la preuve de 3.8. Pour tout $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$, on étend comme dans ce paragraphe la donnée $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ en une donnée $\mathbf{H}'(\tilde{t})$ et on fixe des données auxiliaires $H'_1(\tilde{t})$,...,$\hat{\xi}_1(\tilde{t})$. On en déduit comme en 3.9 des données auxiliaires $G'_1(\tilde{s})$,...,$\hat{\xi}_1(\tilde{s})$ pour $\mathbf{G}'(\tilde{s})$, que l'on complète par le choix d'espaces hyperspéciaux $(\tilde{K}'_{1,v}(\tilde{s}))_{v \notin V}$. Il s'en déduit un facteur de transfert canonique comme en 3.9, que l'on décompose en produit sur $v \in V$ de facteurs locaux. On note $f_v^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}$ le transfert de f_v calculé à l'aide de ce facteur. Comme en 6.9, on considère les données auxiliaires relatives à $\tilde{\zeta}$ comme des données de référence et, pour celles-ci, on supprime $\tilde{\zeta}$ de la notation : $\mathbf{G}' = \mathbf{G}'(\tilde{\zeta})$, $G'_1 = G'_1(\tilde{\zeta})$ etc... On peut supposer que $\boldsymbol{\delta}$ s'identifie à $\otimes_{v \in V} \boldsymbol{\delta}_{1,v}$, avec $\boldsymbol{\delta}_{1,v} \in D^{st}_{géom,\lambda_{1,v}}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(F_v))$ pour tout $v \in V$. Comme on l'a vu en 6.7, on dispose pour tout $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$ de recollements canoniques entre $SI_{\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F_V))$ et $SI_{\lambda_1(\tilde{s})}(\tilde{M}'_1(\tilde{s}; F_V))$ et aussi entre $SI_{\lambda_1}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,V}(F_V))$ et $SI_{\lambda_1(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,V}(\tilde{s}; F_V))$. On décompose ceux-ci en produit tensoriel d'isomorphismes locaux. On fait de même pour les espaces de distributions. Alors chaque $\boldsymbol{\delta}_{1,v}$ s'identifie à $\boldsymbol{\delta}_{1,v}(\tilde{s}) \in D^{st}_{géom,\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}; F_v))$. La définition de $J(\hat{\mathfrak{R}}_V, \boldsymbol{\delta}, f)$ se récrit

$$(1) \qquad J(\hat{\mathfrak{R}}_V, \boldsymbol{\delta}, f) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}) \in \mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s}))} e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_V}(\tilde{M}', \tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})) \prod_{v \in V} S^{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}), \lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_{1,v}(\tilde{s}), B^{\tilde{G}}, (f_v^{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})})_{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}).$$

On peut supposer que, pour tout $v \in V$, il y a une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}'_v \subset \tilde{M}'(F_v)$ de sorte que

- $\boldsymbol{\delta}_{1,v}$ est induite d'un élément de $D^{st}_{orb,\lambda_{1,v}}(\tilde{M}'_{1,v}(F_v))$ dont le support est formé d'éléments de partie semi-simple dans $\mathcal{O}'_v$;

- si v est archimédienne, $\mathcal{O}'_v$ est formé d'éléments $\tilde{G}$-réguliers.

Fixons $\epsilon_v \in \mathcal{O}'_v$ tel que M'_{ϵ_v} soit quasi-déployé sur F_v. On note $\tilde{R}'_v$ le commutant de $A_{M'_{\epsilon_v}}$ dans $\tilde{M}'$. On a $A_{\tilde{R}'_v} = A_{M'_{\epsilon_v}}$. On peut fixer une distribution $\mathbf{d}_v \in D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{R}'_{1,v}(F_v))$ de sorte que

- $\boldsymbol{\delta}_{1,v}$ soit l'induite de $\mathbf{d}_v$ à $\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(F_v)$;

- si v est non-archimédienne, les projections dans $\tilde{R}'_v(F_v)$ des éléments du support de $\mathbf{d}_v$ ont leur partie semi-simple dans la classe de conjugaison stable $\mathcal{O}_{\tilde{R}'_v}$ de ϵ_v dans $\tilde{R}'_v(F_v)$;

- si v est archimédienne, $\mathbf{d}_v$ est une intégrale orbitale stable associée à un relèvement de ϵ_v dans $\tilde{R}'_{1,v}(F_v)$.

On a

(2) ϵ_v appartient à un sous-tore tordu maximal elliptique de $\tilde{R}'_v$.

En effet, soit $T_v^\flat$ un sous-tore maximal elliptique de M'_{ϵ_v} et T_v son commutant dans R'_v. Alors l'ensemble $T_v\epsilon_v$ répond à la question. Pour que cette construction sois-correcte, il faut évidemment que M'_{ϵ_v} possède un sous-tore maximal elliptique. C'est toujours vrai si v est non-archimédienne. Si v est archimédienne, ϵ_v est $\tilde{G}$-régulier par hypothèse donc M'_{ϵ_v} est lui-même un tore et l'assertion s'ensuit.

On note $\hat{R}_v$ le commutant de $Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v},0}$ dans $\hat{G}$. C'est un Levi de $\hat{\mathfrak{M}}_v$. Quitte à remplacer la donnée locale $\mathbf{M}'_v$ par une donnée équivalente, on peut supposer que tous ces Levi sont standard et que la donnée locale $\mathbf{M}'_v$ provient d'une donnée $\mathbf{R}'_v$ pour $\hat{R}_v$, cf. [I] 3.4. C'est-à-dire qu'en posant $\mathcal{R}'_v = \mathcal{M}'_v \cap {}^L R_v$, le triplet $\mathbf{R}'_v = (R'_v, \mathcal{R}'_v, \tilde{\zeta})$ est une donnée endoscopique de $\hat{R}_v$ et que $\mathcal{M}'_v = \hat{M}'\mathcal{R}'_v$. Notons que $\mathbf{R}'_v$ est une donnée elliptique par construction.

Remarque. On pourrait poser des définitions plus sophistiquées évitant de remplacer $\mathbf{M}'_v$ par une donnée équivalente. En tout cas, ce remplacement ne perturbera pas la suite de la démonstration.

Le Levi $\hat{R}_v$ vérifie la condition 6.7(1). On pose $\hat{R}_V = (\hat{R}_v)_{v\in V}$. On définit comme en 6.7 l'ensemble $\mathcal{L}(\hat{R}_V)$ des familles $\hat{L}_V = (\hat{L}_v)_{v\in V}$ telles que, pour tout $v \in V$, $\hat{L}_v$ soit un Levi de $\hat{G}$ vérifiant 6.7(1) et contenant $\hat{R}_v$. Considérons une telle famille. Pour $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ et pour une place $v \in V$, on définit la donnée endoscopique $\mathbf{L}'_v(\tilde{s})$ de $\hat{L}_v$ associée à $\tilde{s}$ et à la donnée endoscopique $\mathbf{R}'_v$ du Levi $\hat{R}_v$ de $\hat{L}_v$. En posant

$$\mathcal{Z}(\hat{L}_V) = Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \cap (\cap_{v\in V} Z(\hat{L}_v)),$$

cette donnée ne dépend que de l'image de $\tilde{s}$ modulo $\mathcal{Z}(\hat{L}_V)$. Considérons deux éléments $\tilde{s}_1$ et $\tilde{s}_2$ de $\tilde{\zeta}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ ayant même image modulo ce groupe. On a choisi ci-dessus des données auxiliaires pour les données $\mathbf{G}'(\tilde{s}_1)$ et $\mathbf{G}'(\tilde{s}_2)$ qui se restreignent pour toute place $v \in V$ en des données auxiliaires pour $\mathbf{L}'_v(\tilde{s}_1) = \mathbf{L}'_v(\tilde{s}_2)$. On dispose donc d'espaces $SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_1)}(\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s}_1;F_v))$ et $SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_2)}(\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s}_2;F_v))$. Ces espaces sont canoniquement isomorphes. En effet, on sait que ces espaces sont isomorphes, l'isomorphisme n'étant en général défini qu'à un scalaire près. Il s'agit de normaliser celui-ci. On a déjà fixé les isomorphismes

$$SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_1)}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}_1;F_v)) \simeq SI_{\lambda_{1,v}}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(F_v)) \simeq SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_2)}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}_2;F_v)).$$

On normalise nos isomorphismes de sorte que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_1)}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}_1;F_v)) & \to & SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_2)}(\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}_2;F_v)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_1)}(\tilde{R}'_{1,v}(\tilde{s}_1;F_v)) & \to & SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_2)}(\tilde{R}'_{1,v}(\tilde{s}_1;F_v)) \\
\uparrow & & \uparrow \\
SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_1)}(\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s}_1;F_v)) & \to & SI_{\lambda_{1,v}(\tilde{s}_2)}(\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s}_2;F_v))
\end{array}$$

où les applications verticales sont les applications "termes constants". De mêmes considérations valent pour les espaces de distributions.

Posons $\tilde{R}'_V = \prod_{v\in V} \tilde{R}'_v$. Soit $\tilde{\zeta}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, supposons $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ elliptique. Notons $\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{R}'_V)$ l'ensemble des familles $\tilde{L}'_V = (\tilde{L}'_v)_{v\in V}$ telles que, pour tout $v \in V$, $\tilde{L}'_v$ soit un espace de Levi de $\tilde{G}'(\tilde{s})$ défini sur F_v et contenant $\tilde{R}'_v$. Pour une telle famille et pour $v \in V$, notons $\hat{L}_v$ le commutant de $Z(\hat{L}'_v)^{\Gamma_{F_v},0}$ dans $\hat{G}$. Alors la famille $\hat{L}_V = (\hat{L}_v)_{v\in V}$ appartient à $\mathcal{L}(\hat{R}_V)$. La famille $\tilde{L}'_V$ apparaît comme la famille d'espaces de Levi associée à la donnée endoscopique elliptique $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ de $(\hat{L}_V, \mathbf{a}_{\hat{L}_V})$. Comme en 6.7, on notera directement $\tilde{L}'_V(\tilde{s})$ les éléments de $\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{R}'_V)$.

Considérons la formule (1). Fixons $\tilde{s}$, $\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})$ y apparaissant et une place $v \in V$. Par les isomorphismes canoniques, la distribution $\mathbf{d}_v$ introduite ci-dessus s'identifie à $\mathbf{d}_v(\tilde{s}) \in D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1(\tilde{s})}(\tilde{R}'_{1,v}(\tilde{s}; F_v))$. La distribution $\boldsymbol{\delta}_{1,v}(\tilde{s})$ est l'induite de $\mathbf{d}_v(\tilde{s})$ à $\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}; F_v)$. On applique les propositions [II] 1.14(ii) ou [V] 1.6(ii). On obtient

$$S^{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\tilde{\mathfrak{R}}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_{1,v}(\tilde{s}), B^{\tilde{G}}, (f_v^{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})})_{\tilde{\mathfrak{L}}'_{1,v}(\tilde{s})}) = \sum_{\tilde{L}'_v(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})}(\tilde{R}'_v)} e^{\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})}_{\tilde{R}'_v}(\tilde{\mathfrak{R}}'_v, \tilde{L}'_v(\tilde{s}))$$

$$S^{\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\tilde{R}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\mathbf{d}_v(\tilde{s}), B^{\tilde{G}}, (f_v^{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})})_{\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s})}).$$

Pour tout $\hat{L}_V \in \mathcal{L}(\hat{R}_V)$, posons

$$(3) \qquad J(\hat{\mathfrak{R}}_V, \hat{L}_V, \boldsymbol{\delta}, f) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}, \mathbf{L}'_V(\tilde{s}) \text{ elliptique}} E(\hat{L}_V, \tilde{s})$$

$$\prod_{v\in V} S^{\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s})}_{\tilde{R}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_{1,v}(\tilde{s})}(\mathbf{d}_v(\tilde{s}), B^{\tilde{G}}, (f_v^{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})})_{\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s})}),$$

où

$$(4) \qquad E(\hat{L}_V, \tilde{s}) = i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) \sum_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_V(\tilde{s}))\cap\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{L}'_V(\tilde{s}))} e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_V}(\tilde{M}', \tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$$

$$\prod_{v\in V} e^{\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})}_{\tilde{R}'_v}(\tilde{\mathfrak{R}}'_v, \tilde{L}'_v(\tilde{s})).$$

Alors la formule (1) se récrit

$$J(\hat{\mathfrak{R}}_V, \boldsymbol{\delta}, f) = \sum_{\hat{L}_V\in\mathcal{L}(\hat{R}_V)} J(\hat{\mathfrak{R}}_V, \hat{L}_V, \boldsymbol{\delta}, f).$$

Pour prouver que le membre de gauche est nul, il nous suffit de fixer $\hat{L}_V$ et de prouver que $J(\hat{\mathfrak{R}}_V, \hat{L}_V, \boldsymbol{\delta}, f) = 0$.

Fixons désormais $\hat{L}_V \in \mathcal{L}(\hat{R}_V)$. Pour $v \in V$, aux Levi $\hat{\mathfrak{M}}_v$, $\hat{\mathfrak{R}}_v$, $\hat{R}_v$ et $\hat{L}_v$ sont associés des espaces $\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_v}$, $\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_v}$, $\mathcal{A}_{\tilde{R}_v}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{L}_v}$. Par exemple, $\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_v} = X^*(Z(\hat{\mathfrak{M}}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On a

$$\left.\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c}\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_v} \\ \mathcal{A}_{\tilde{M}_v}\end{array}\right\} \subset \mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_v} \\ \mathcal{A}_{\tilde{L}_v} \end{array}\right\} \subset \mathcal{A}_{\tilde{R}_v}.$$

Posons par exemple $\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}=\oplus_{v\in V}\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_v}$. Rappelons que l'on a un plongement diagonal $\Delta:\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\to\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}$. Par composition, on obtient des homomorphismes

$$\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\to\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_V}$$

et

$$\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\to\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}\to\mathcal{A}_{\tilde{R}_V}\to\mathcal{A}_{\tilde{R}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{L}_V}.$$

On note

$$D:\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\to\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_V}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{R}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{L}_V}$$

leur somme directe. On obtient dualement un homomorphisme

$$\hat{D}:Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}\to\oplus_{v\in V}(Z(\hat{\mathfrak{M}}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}/Z(\hat{\mathfrak{R}}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}\oplus Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}/Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}).$$

Supposons que D soit un isomorphisme. Alors $\hat{D}$ est surjectif et de noyau fini. On note $k(D)$ le nombre d'éléments de ce noyau. On note $d(D)$ le nombre tel que D identifie la mesure sur son ensemble de départ avec $d(\Delta)$ fois celle sur son ensemble d'arrivée. On pose $e(D)=d(D)k(D)^{-1}$. Pour $v\in V$, l'homomorphisme

$$Z(\hat{\mathfrak{M}}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}/Z(\hat{\mathfrak{R}}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}\to Z(\hat{\mathfrak{M}}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{\mathfrak{R}}'_v)^{\Gamma_{F_v}}$$

est surjectif et de noyau fini (car les données $\mathbf{\mathfrak{M}}'_v$ et $\mathbf{\mathfrak{R}}'_v$ sont elliptiques par définition). On note $i_{\tilde{\mathfrak{M}}'_v}(\hat{\mathfrak{R}}_v,\tilde{\mathfrak{R}}'_v)$ l'inverse du nombre d'éléments de son noyau. De même, soit $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tel que $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ soit elliptique. Alors l'homomorphisme

$$Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}/Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}\to Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{L}'_v(\tilde{s}))^{\Gamma_{F_v}}$$

est surjectif et de noyau fini. On note $i_{\tilde{R}'_v}(\hat{L}_v,\tilde{L}'_v(\tilde{s}))$ l'inverse du nombre d'éléments de son noyau. Soit $\tilde{s}$ comme ci-dessus. On va montrer

(5) si D n'est pas un isomorphisme, $E(\hat{L}_V,\tilde{s})=0$;

(6) supposons que D soit un isomorphisme ; alors

$$E(\hat{L}_V,\tilde{s})=e(D)\prod_{v\in V}i_{\tilde{\mathfrak{M}}'_v}(\hat{\mathfrak{R}}_v,\tilde{\mathfrak{R}}'_v)i_{\tilde{R}'_v}(\hat{L}_v,\tilde{L}'_v(\tilde{s})).$$

Supposons $E(\hat{L}_V,\tilde{s})\neq 0$. Alors $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))\neq 0$ donc $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ est elliptique. On peut fixer $\hat{\mathfrak{L}}_V\in\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{R}}_V)\cap\mathcal{L}(\hat{L}_V)$ de sorte que $\mathbf{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})$ soit elliptique et que les constantes $d_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}',\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$ et $d_{\tilde{R}'_v}^{\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_v,\tilde{L}'_v(\tilde{s}))$, pour $v\in V$, soient non nulles. Notons par exemple $\mathcal{A}_{\tilde{R}_v}^{\tilde{\mathfrak{L}}_v}$ l'orthogonal de $\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{L}}_v}$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{R}_v}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{R}_V}^{\tilde{\mathfrak{L}}_V}=\oplus_{v\in V}\mathcal{A}_{\tilde{R}_v}^{\tilde{\mathfrak{L}}_v}$. Toutes les données endoscopiques intervenant étant elliptiques ($\mathbf{M}'_v$ étant considérée comme une donnée de $\hat{\mathfrak{M}}_v$), ces non-nullités signifient que l'on a les égalités

$$(7)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}^{\tilde{G}}=\Delta(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}})\oplus\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{L}}_V}^{\tilde{G}}$$

et

$$(8)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{R}_V}^{\tilde{\mathfrak{L}}_V}=\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_V}^{\tilde{\mathfrak{L}}_V}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{L}_V}^{\tilde{\mathfrak{L}}_V},$$

L'application D est la composée des deux applications

$$\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\xrightarrow{\Delta}\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}^{\tilde{G}}\to\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{L}}_V}$$

et

$$(9) \qquad \mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{L}}_V} \to \mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_V} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{R}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{L}_V}.$$

La première est un isomorphisme d'après (7). On peut décomposer l'espace de départ de (9) en $\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}^{\tilde{\mathfrak{R}}_V} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{L}}_V}$. Alors (9) devient une application triangulaire. Les termes diagonaux sont les applications

$$\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}^{\tilde{\mathfrak{R}}_V} \to \mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{M}}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_V}$$

et

$$\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{L}}_V} \to \mathcal{A}_{\tilde{R}_V}/\mathcal{A}_{\tilde{L}_V}.$$

La première est évidemment un isomorphisme et la seconde l'est d'après (8). Donc (9) est un isomorphisme et D aussi. Cela démontre (5). Remarquons qu'en précisant ces calculs, on obtient l'égalité

$$(10) \qquad d(D) = d_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})) \prod_{v\in V} d_{\tilde{R}'_v}^{\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_v, \tilde{L}'_v(\tilde{s})).$$

Inversement, supposons que D soit un isomorphisme. Il y a au plus un espace $\hat{\mathfrak{L}}_V$ qui peut contribuer à la somme $E(\hat{L}_V, \tilde{s})$. En effet, l'égalité (8) doit être vérifiée par cet espace, ce qui détermine

$$(11) \qquad \mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{L}}_V} = \mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}_V} \cap \mathcal{A}_{\tilde{L}_V}.$$

Définissons ainsi cet espace. Pour qu'il intervienne vraiment, la donnée $\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})$ doit être elliptique. Par hypothèse, les données $\boldsymbol{\mathfrak{R}}'_V$ et $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ sont elliptiques. Le membre de droite de (11) est donc égal à

$$\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{R}}'_V} \cap \mathcal{A}_{\tilde{L}'_V(\tilde{s})}.$$

L'espace $\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})}$ est inclus dans cette intersection. Il est donc inclus dans le membre de gauche de (11), ce qui implique que $\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})$ est elliptique. En inversant le calcul fait ci-dessus, on voit que l'égalité (8) et l'hypothèse que D est un isomorphisme impliquent (7). Puisque $\boldsymbol{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})$ est elliptique, le dernier terme de cette égalité est égal à $\mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})}^{\tilde{G}}$. Cet espace contient $\Delta(\mathcal{A}_{\tilde{G}'(\tilde{s})}^{\tilde{G}})$. Puisque les deux termes du membre de droite de (7) sont en somme directe, l'espace $\mathcal{A}_{\tilde{G}'(\tilde{s})}^{\tilde{G}}$ est nul. Donc la donnée $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ est elliptique. Considérons la définition (4), où n'intervient plus que notre Levi $\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s})$. Une constante telle que $e_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$ est le produit de $d_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$ et de l'inverse de $k_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$, ce terme étant le nombre d'éléments d'un certain noyau. L'égalité (10) montre que le produit des constantes d est égal à $d(D)$. Pour prouver (6), il suffit de prouver l'égalité

$$(12) \qquad k(D)^{-1} \prod_{v\in V} i_{\tilde{\mathfrak{M}}'_v}(\hat{\mathfrak{R}}_v, \tilde{\mathfrak{R}}'_v) i_{\tilde{R}'_v}(\hat{L}_v, \tilde{L}'_v(\tilde{s})) = i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) k_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))^{-1}$$

$$\prod_{v\in V} k_{\tilde{R}'_v}^{\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_v, \tilde{L}'_v(\tilde{s}))^{-1}.$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} & \stackrel{\hat{D}}{\to} & \oplus_{v\in V}(Z(\hat{\mathfrak{M}}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}/Z(\hat{\mathfrak{R}}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}} \oplus Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}/Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} & \stackrel{\hat{D}'}{\to} & \oplus_{v\in V}(Z(\hat{M}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{\mathfrak{R}}'_v)^{\Gamma_{F_v}} \oplus Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{L}'_v(\tilde{s}))^{\Gamma_{F_v}})
\end{array}$$

Tous les homomorphismes sont surjectifs et de noyaux finis. Calculons l'inverse du nombre d'éléments de l'homomorphisme composé. Si on utilise le chemin nord-est, on trouve le membre de gauche de (12). Si on utilise le chemin sud-ouest, on trouve $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))|ker(\hat{D}')|^{-1}$. L'homomorphisme $\hat{D}'$ se décompose en

$$Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}\to\oplus_{v\in V}Z(\hat{M}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s}))^{\Gamma_{F_v}}$$

$$\stackrel{\oplus_{v\in V}\hat{\iota}_v}{\to}\oplus_{v\in V}(Z(\hat{M}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{\mathfrak{R}}'_v)^{\Gamma_{F_v}}\oplus Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{L}'_v(\tilde{s}))^{\Gamma_{F_v}}).$$

De nouveau, les homomophismes sont surjectifs et de noyaux finis. Le nombre d'éléments du noyau du premier homomorphisme est égal à $k_{\tilde{M}'_V}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}',\tilde{\mathfrak{L}}'_V(\tilde{s}))$. Pour obtenir (12), il reste à prouver que, pour tout $v\in V$, on a

$$(13)\qquad |ker(\hat{\iota}_v)|=k_{\tilde{R}'_v}^{\tilde{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s})}(\tilde{\mathfrak{R}}'_v,\tilde{L}'_v(\tilde{s})).$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & 1 & & \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
Z(\hat{M}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s}))^{\Gamma_{F_v}} & \stackrel{\hat{\iota}_v}{\to} & (Z(\hat{M}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{\mathfrak{R}}'_v)^{\Gamma_{F_v}} & \oplus & Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{L}'_v(\tilde{s}))^{\Gamma_{F_v}}) & \to & 1\\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{\mathfrak{L}}'_v(\tilde{s}))^{\Gamma_{F_v}} & \stackrel{\hat{\kappa}_v}{\to} & (Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{\mathfrak{R}}'_v)^{\Gamma_{F_v}} & \oplus & Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{L}'_v(\tilde{s}))^{\Gamma_{F_v}}) & \to & 1\\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{M}'_v)^{\Gamma_{F_v}} & = & (Z(\hat{R}'_v)^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{M}'_v)^{\Gamma_{F_v}} & \oplus & 1) & & \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
1 & & & & 1 & &
\end{array}$$

Les lignes et colonnes sont exactes. Il en resulte que $|ker(\hat{\iota}_v)|=|ker(\hat{\kappa}_v)|$. Mais ce dernier nombre est égal au membre de droite de (13). Cela prouve (13), (12) et achève la preuve de (6).

Si D n'est pas un isomorphisme, (5) entraîne que $J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\hat{L}_V,\boldsymbol{\delta},f)=0$ et on a fini. On suppose maintenant que D est un isomorphisme. On peut supposer qu'il existe $\tilde{s}$ intervenant dans la définition (3) tel que $(f_v^{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})})_{\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s})}$ soit non nul pour tout $v\in V$. Cela entraîne que le Levi $\tilde{L}'_v(\tilde{s})$ est relevant. A fortiori, $\hat{L}_v$ correspond à un K-espace de Levi $K\tilde{L}_v$ de $K\tilde{G}_v$. On peut fixer une collection $K\tilde{L}_V=(K\tilde{L}_v)_{v\in V}$ de tels K-espaces de Levi et identifier $\mathbf{L}_v(\tilde{s})$ à une donnée endoscopique elliptique de $(KL_V,K\tilde{L}_V,\mathbf{a}_L)$. On a pour tout v l'égalité $(f_v^{\tilde{G}'_{1,v}(\tilde{s})})_{\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s})}=(f_{v,K\tilde{L}_v,\omega_v})^{\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s})}$. On se sert ici de la restriction du facteur de transfert fixé sur $\tilde{G}'_1(\tilde{s},F_v)\times\tilde{G}(F_v)$ pour définir le transfert. Rappelons que le terme $i_{\tilde{R}'_v}(\tilde{L}_v,\tilde{L}'_v(\tilde{s}))$ est nul si $\mathbf{L}'_V(\tilde{s})$ n'est pas elliptique. Compte tenu de l'égalité (6), la définition (3) se récrit

$$(14)\qquad J(\hat{\mathfrak{R}}_V,\hat{L}_V,\boldsymbol{\delta},f)=c\sum_{\tilde{s}\in Z(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}}X(\tilde{s})\prod_{v\in V}S_{\tilde{R}'_{1,v}(\tilde{s}),\lambda_{1,v}(\tilde{s})}^{\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s})}(\mathbf{d}_v(\tilde{s}),B^{\tilde{G}}(f_{v,K\tilde{L}_v,\omega_v})^{\tilde{L}'_{1,v}(\tilde{s})}),$$

où

$$c=e(D)\prod_{v\in V}i_{\tilde{\mathfrak{M}}'_v}(\tilde{\mathfrak{R}}_v,\tilde{\mathfrak{R}}'_v)$$

et

$$X(\tilde{s}) = \prod_{v\in V} i_{\tilde{R}'_v}(\tilde{L}_v, \tilde{L}'_v(\tilde{s})).$$

Pour toute place $v \in V$, introduisons le groupe $Z(\hat{R}_v)_*$ image réciproque dans $Z(\hat{R})$ de $(Z(\hat{R}_v)/Z(\hat{R}_v) \cap Z(\hat{R}'_v))^{\Gamma_{F_v}}$. Le sous-groupe des éléments invariants par $\hat{\theta}$ dans

$$\cap_{v\in V} Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v}}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R}_v)_*)$$

contient $\cap_{v\in V} Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}}$ comme sous-groupe d'indice fini. Le groupe

$$(\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V) \cap \cap_{v\in V} Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta}})/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

est le noyau de $\hat{D}$ donc est fini. Il en résulte que le groupe

$$\left(\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V) \cap \cap_{v\in V} Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v}}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R}_v)_*)\right)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

est fini. Il nous suffit d'en trouver un sous-groupe $\mathcal{Z}$ vérifiant la propriété suivante. Fixons $\tilde{s}_0 \in \tilde{\zeta}\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Alors, dans l'expression (14), la sous-somme sur $\tilde{s} \in \mathcal{Z}\tilde{s}_0$ est nulle. Considérons donc un sous-groupe $\mathcal{Z}$ que l'on précisera plus tard. La propriété requise dépend d'un élément $\tilde{s}_0$. Pour la simplicité de l'écriture, on peut supposer $\tilde{s}_0 = \tilde{\zeta}$. On a

(15) pour $\tilde{s} \in \mathcal{Z}\tilde{\zeta}$, les données endoscopiques $\mathbf{L}'_V(\tilde{s})$ et $\mathbf{L}'_V = \mathbf{L}'_V(\tilde{\zeta})$ sont équivalentes ; si ces données sont elliptiques, on a $X(\tilde{s}) = X(\tilde{\zeta})$.

Soit z un représentant dans $Z(\hat{M})$ d'un élément de $\mathcal{Z}$. Pour toute place $v \in V$, on écrit $z = \tau_v(1-\hat{\theta})(\rho_v)$, avec $\tau_v \in Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v}}$ et $\rho_v \in Z(\hat{R}_v)_*$. Puisque $\rho_v \in \hat{R}_v \subset \hat{L}_v$, ad_{ρ_v} est un automorphisme intérieur de $\hat{L}_v$. On a l'égalité $z\tilde{\zeta} = \rho_v\tau_v\tilde{\zeta}\rho_v^{-1}$, donc ad_{ρ_v} envoie $\hat{L}'_v(\tau_v\tilde{\zeta})$ sur $\hat{L}'_v(z\tilde{\zeta})$. Puisque $\tau_v \in Z(\hat{L}_v)$, on a $\hat{L}'_v(\tau_v\tilde{\zeta}) = \hat{L}'_v$. Les groupes $\mathcal{L}'_v$ et $\mathcal{L}'_v(z\tilde{\zeta})$ sont engendrés par $\mathcal{R}'_v = \mathcal{M}'_v \cap {}^LR_v$ et $\hat{L}'_v$, respectivement $\hat{L}'_v(z\tilde{\zeta})$. Puisque $\rho_v \in Z(\hat{R}_v)_*$, ad_{ρ_v} conserve $\mathcal{R}'_v$. Donc ad_{ρ_v} envoie $\mathcal{L}'_v$ sur $\mathcal{L}'_v(z\tilde{\zeta})$. Autrement dit, ρ_v définit une équivalence entre les données $\mathbf{L}'_v$ et $\mathbf{L}'_v(z\tilde{\zeta})$. L'égalité $X(\tilde{s}) = X(\tilde{\zeta})$ résulte évidemment de la définition de ces termes. Cela prouve (15).

On peut supposer $\mathbf{L}'_V$ elliptique, sinon $X(\tilde{\zeta}) = 0$. La somme que l'on considère est proportionnelle à

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}}\prod_{v\in V} S^{\tilde{L}'_{1,v}(z\tilde{\zeta})}_{\tilde{R}'_{1,v}(z\tilde{\zeta}),\lambda_{1,v}(z\tilde{\zeta})}(\mathbf{d}_v(z\tilde{\zeta}), B^{\tilde{G}}, (f_{\tilde{L}_v,\omega})^{\tilde{L}'_{1,v}(z\tilde{\zeta})}).$$

Fixons $z \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ relevant un élément de $\mathcal{Z}$. Puisque $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} = Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, on peut supposer $z \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. Comme dans la preuve de (15), on écrit $z = \tau_v(1-\hat{\theta})(\rho_v)$ pour toute place $v \in V$, où $\tau_v \in Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v}}$ et $\rho_v \in Z(\hat{R}_v)_*$. Les deux séries de données auxiliaires $M'_1 = M'_1(\tilde{\zeta})$,... et $M'_1(z\tilde{\zeta})$,... fournissent une fonction de recollement $\tilde{\lambda}(z)^M$ sur le produit fibré $\tilde{M}'_{1,V}(F_V) \times \tilde{M}'_{1,V}(z\tilde{\zeta}; F_V)$. Par restriction puis dualité, on en déduit un isomorphisme

$$\iota(z)^{M,*} : \prod_{v\in V} D^{st}_{géom,\lambda_{1,v}(z\tilde{\zeta})}(\tilde{R}'_{1,v}(z\tilde{\zeta}; F_v)) \simeq \prod_{v\in V} D^{st}_{géom,\lambda_{1,v}}(\tilde{R}'_{1,v}(F_v)).$$

En posant $\mathbf{d} = \otimes_{v\in V}\mathbf{d}_v$, on a par définition, $\mathbf{d} = \iota(z)^{M,*}(\mathbf{d}(z\tilde{\zeta}))$.

Pour tout $v \in V$, on complète la paire de Borel $(\hat{B} \cap \hat{L}'_v, \hat{T}^{\hat{\theta},0})$ de $\hat{L}'_v$ en une paire de Borel épinglée invariante par Γ_{F_v}. De même pour $\hat{L}'_v(z\tilde{\zeta})$. On peut supposer que les restrictions à $\hat{R}'_v$ de ces deux épinglages coïncident. Quitte à multiplier ρ_v par un élément de $Z(\hat{R}_v)\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}$, ce qui ne change pas $(1-\hat{\theta})(\rho_v)$, on peut supposer que ad_{ρ_v} échange ces deux épinglages. Alors ad_{ρ_v} devient équivariant pour les actions galoisiennes. On peut identifier les groupes L'_v et $L'_v(z\tilde{\zeta})$ ainsi que les espaces $\tilde{L}'_v$ et $\tilde{L}'_v(z\tilde{\zeta})$. Les données auxiliaires $L'_{1,v}(z\tilde{\zeta})$ etc... se transportent en des données auxiliaires pour $\mathbf{L}'_v$. Le plongement de $\mathcal{L}'_v$ dans ${}^LL'_{1,v}(z\tilde{\zeta})$ est le composé de ad_{ρ_v} et du plongement $\hat{\xi}_1(z\tilde{\zeta})$: $\mathcal{L}'_v(z\tilde{\zeta})\to{}^LL_{1,v}(z\tilde{\zeta})$. Le facteur de transfert n'est bien défini que sur le produit de ces données auxiliaires sur toutes les places $v\in V$. C'est alors la restriction du facteur canonique $\Delta_1(z\tilde{\zeta})$ issu de la donnée $\mathbf{G}'(z\tilde{\zeta})$. On se retrouve avec deux séries de données auxiliaires pour $\mathbf{L}'_V$, d'où une fonction de recollement $\tilde{\lambda}(z)^L$. Il s'en déduit encore un isomorphisme

$$\iota(z)^{L,*}:\prod_{v\in V}D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_{1,v}(z\tilde{\zeta})}(\tilde{R}'_{1,v}(z\tilde{\zeta};F_v))\simeq\prod_{v\in V}D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_{1,v}}(\tilde{R}'_{1,v}(F_v)).$$

Le transfert commute au recollement donc celui-ci envoie $\otimes_{v\in V}(f_{\tilde{L}_v,\omega})^{\tilde{L}'_{1,v}(z\tilde{\zeta})}$ sur $\otimes_{v\in V}(f_{\tilde{L}_v,\omega})^{\tilde{L}'_{1,v}}$. Il envoie $\mathbf{d}(z\tilde{\zeta})$ sur $\iota(z)^{L,*}(\mathbf{d}(z\tilde{\zeta}))=\iota(z)^{L,*}\circ(\iota(z)^{M,*})^{-1}(\mathbf{d})$. En décomposant nos isomorphismes de recollement en produits tensoriels sur les $v\in V$, on obtient l'égalité

$$\prod_{v\in V}S^{\tilde{L}'_{1,v}(z\tilde{\zeta})}_{\tilde{R}'_{1,v}(z\tilde{\zeta}),\lambda_{1,v}(z\tilde{\zeta})}(\mathbf{d}_v(z\tilde{\zeta}),B^{\tilde{G}},(f_{\tilde{L}_v,\omega})^{\tilde{L}'_{1,v}(z\tilde{\zeta})})=$$

$$\prod_{v\in V}S^{\tilde{L}'_{1,v}}_{\tilde{R}'_{1,v},\lambda_{1,v}}((\iota(z)^{L,*}_v\circ(\iota(z)^{M,*}_v)^{-1}(\mathbf{d}_v),B^{\tilde{G}},(f_{\tilde{L}_v,\omega})^{\tilde{L}'_{1,v}}).$$

Il nous suffit de prouver que

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}}\iota(z)^{L,*}\circ(\iota(z)^{M,*})^{-1}(\mathbf{d})=0.$$

L'automorphisme $(\iota(z)^M)^{-1}\circ\iota(z)^L$ de $\prod_{v\in V}C^\infty_{c,\lambda_{1,v}}(\tilde{R}'_{1,v}(F_v))$ est de la forme $\varphi\mapsto\tilde{\lambda}_z\varphi$, où $\tilde{\lambda}_z$ est une fonction lisse sur $\prod_{v\in V}\tilde{R}'_{1,v}(F_v)$. Il nous suffit encore de prouver que

(16) $\sum_{z\in\mathcal{Z}}\tilde{\lambda}_z(\gamma)=0$ pour tout $\gamma\in\prod_{v\in V}\tilde{R}'_{1,v}(F_v)$ dans un voisinage invariant par conjugaison stable de l'élément $\epsilon=\prod_{v\in V}\epsilon_v$ fixé plus haut.

On fixe de nouveau z que l'on écrit comme ci-dessus. On va calculer $\tilde{\lambda}_z$. On simplifie les notations en posant $\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}_z$, $\tilde{\lambda}^M=\tilde{\lambda}(z)^M$ etc... On pose $\tilde{\zeta}_1=\tilde{\zeta}$ et $\tilde{\zeta}_2=z\tilde{\zeta}$. On supprime autant que c'est possible ces termes de la notation. Les données relatives à $\tilde{\zeta}_1$ seront affectées d'un indice 1 et celles relatives à $\tilde{\zeta}_2$ d'un indice 2 (par exemple, on note $\tilde{R}'_{2,v}$ l'espace noté précédemment $\tilde{R}'_{1,v}(z\tilde{\zeta})$). Soit $r'\in\prod_{v\in V}\tilde{R}'_v(F_v)$ et, pour $i=1,2$, soit $r'_i\in\prod_{v\in V}\tilde{R}'_{i,v}(F_v)$ un élément au-dessus de r'. Par définition,

$$\tilde{\lambda}(r'_1)=\tilde{\lambda}^M(r'_1,r'_2)^{-1}\tilde{\lambda}^L(r'_1,r'_2),$$

où $\tilde{\lambda}^M$ et $\tilde{\lambda}^L$ sont les fonctions de recollement introduites ci-dessus. Fixons $m'\in\tilde{M}'(F)$ et, pour $i=1,2$, un élément $m'_i\in\tilde{M}'_i(F)$ au-dessus de m'. Soit (b_1,b_2) l'élément du produit fibré $M'_1(F_V)\times_{M'(F_V)}M'_2(F_V)$ tel que $(r'_1,r'_2)=(b_1m'_1,b_2m'_2)$. On a l'égalité

$$\tilde{\lambda}^M(r'_1,r'_2)=\lambda^M(b_1,b_2)\tilde{\lambda}^M(m'_1,m'_2).$$

On se rappelle la définition de $\tilde{\lambda}^M$. Parce que les éléments m_1' et m_2' sont définis sur F, on a

$$\tilde{\lambda}^M(m_1', m_2') = \prod_{v \notin V} \tilde{\lambda}_v^M(m_1', m_2')^{-1},$$

où les $\tilde{\lambda}_v^M$ pour $v \notin V$ sont les fonctions de recollement associées aux espaces hyperspéciaux $\tilde{K}_{i,v} \cap \tilde{M}_i'(F_v)$ pour $i = 1, 2$. Puisqu'on a supposé que $\mathbf{L}_v' = \mathbf{L}_v'(\tilde{\zeta}_1) \simeq \mathbf{L}_v'(\tilde{\zeta}_2)$ était relevant pour tout $v \in V$, on peut fixer $l \in \prod_{v \in V} K\tilde{L}_v(F_v)$ assez régulier et $l' \in \prod_{v \in V} \tilde{L}_v'(F_v)$ dont les classes de conjugaison stable se correspondent. On note $\tilde{L}_v$ la composante de $K\tilde{L}_v$ telle que l appartienne à $\prod_{v \in V} \tilde{L}_v(F_v)$. On note $\tilde{G}$ la composante de $K\tilde{G}$ telle que $\tilde{L}_v \subset \tilde{G}_v$ pour tout $v \in V$ et on note $\tilde{H}$ la composante de $K\tilde{H}$ qui contient $\tilde{G}$. Pour $i = 1, 2$ on fixe $l_i' \in \prod_{v \in V} \tilde{L}_{i,v}'(F_v)$ au-dessus de l'. Notons (a_1, a_2) l'élément du produit fibré $\prod_{v \in V} L_{1,v}'(F_v) \times_{L'(F_v)} L_{2,v}'(F_v)$ tel que $(r_1', r_2') = (a_1 l_1', a_2 l_2')$. On a l'égalité

$$\tilde{\lambda}^L(r_1', r_2') = \lambda^L(a_1, a_2)\tilde{\lambda}^L(l_1', l_2') = \lambda^L(a_1, a_2)\Delta_2(l_2', l)\Delta_1(l_1', l)^{-1}.$$

Pour calculer les facteurs de transfert, on utilise la définition de 3.9. Pour $i = 1, 2$, on a relève la donnée endoscopique $\mathbf{G}'(\tilde{\zeta}_i)$ en une donnée de $(KH, K\tilde{H}, \mathbf{b})$, que l'on note pour simplifier $\mathbf{H}'(\tilde{\zeta}_i)$, munie de données auxiliaires. On choisit un couple comme en 3.6, qui est noté (δ_1, γ) dans ce paragraphe, et que nous noterons ici $(h_i', h(\tilde{\zeta}_i))$. On dispose du facteur global que l'on note $\Delta_{i,glob}(h_i', h(\tilde{\zeta}_i))$ pour $i = 1, 2$. Par définition

$$\Delta_i(l_i', l) = \Delta_{i,glob}(h_i', h(\tilde{\zeta}_i)) \left(\prod_{v \notin V} \Delta_{i,v}(h_i', h(\tilde{\zeta}_i))^{-1} \right) \left(\prod_{v \in V} \mathbf{\Delta}_{i,v}(l_i', l; h_i', h(\tilde{\zeta}_i)) \right).$$

A ce point, on obtient l'égalité

$$(17) \qquad \tilde{\lambda}(r_1') = \lambda^M(b_1, b_2)^{-1}\lambda^L(a_1, a_2)\Delta_{2,glob}(h_2', h(\tilde{\zeta}_2))\Delta_{1,glob}(h_1', h(\tilde{\zeta}_1))^{-1}$$
$$\left(\prod_{v \notin V} \tilde{\lambda}_v^M(m_1', m_2')\Delta_{1,v}(h_1', h(\tilde{\zeta}_1))\Delta_{2,v}(h_2', h(\tilde{\zeta}_2))^{-1} \right)$$
$$\left(\prod_{v \in V} \mathbf{\Delta}_{2,v}(l_2', l; h_2', h(\tilde{\zeta}_2))\mathbf{\Delta}_{1,v}(l_1', l'; h_1', h(\tilde{\zeta}_1))^{-1} \right).$$

Pour tout $v \in V$, on fixe un diagramme $(l', B_v^{L'}, T_v^{L'}, B_v^L, T_v^L, l)$ et des a-data et des χ-data relatives à ce diagramme. On suppose les χ-data triviales sur les orbites asymétriques. On a la complication que l'on doit plonger G et $G'(\tilde{\zeta}_i)$ pour $i = 1, 2$ dans les groupes plus gros H et $H'(\tilde{\zeta}_i)$. Il est clair que notre diagramme se prolonge en des diagrammes relatifs à ces groupes plus gros, que l'on note $(l', B_v^{L'}(\tilde{\zeta}_i), T_v^{L'}(\tilde{\zeta}_i), B_v^{L,H}, T_v^{L,H}, l)$. On utilise les diagrammes prolongés et les mêmes a-data et χ-data pour calculer les facteurs de transfert intervenant ci-dessus. On doit aussi fixer des diagrammes

$$(h'(\tilde{\zeta}_i), B'(\tilde{\zeta}_i), T'(\tilde{\zeta}_i), B(\tilde{\zeta}_i), T(\tilde{\zeta}_i), h(\tilde{\zeta}_i))$$

pour $i = 1, 2$, où $h'(\tilde{\zeta}_i)$ est l'image de h_i' dans $\tilde{H}'(\tilde{\zeta}_i)$. On peut supposer et on suppose que le tore $T'(\tilde{\zeta}_i)$ est défini sur F et que le groupe de Borel $B'(\tilde{\zeta}_i)$ est défini sur $\bar{F}$. Dans chaque facteur de transfert interviennent des facteurs Δ_{II}. Ceux relatifs aux couples $(h_i', h(\tilde{\zeta}_i))$ disparaissent car leur intervention dans le facteur global compense leurs interventions dans les facteurs locaux. Ceux relatifs aux couples (l'_i, l) disparaissent aussi. En effet, pour chaque $v \in V$, la contribution aux facteurs $\boldsymbol{\Delta}_{i,v}$ des orbites galoisiennes dans $\tilde{L}_v$ est la même pour les deux facteurs. Les orbites hors de $\tilde{L}_v$ sont asymétriques et leur contribution est triviale d'après le choix de nos χ-data. On peut donc remplacer chaque facteur de transfert par le facteur Δ_{imp} correspondant.

Fixons provisoirement $v \in V$ et abandonnons les indices v pour simplifier. Soit $i = 1, 2$. On introduit les tores

$$U_i = (T^L_{sc} \times T_{sc}(\tilde{\zeta}_i))/diag_-(Z(G_{SC}));$$

$\mathcal{T}^L(\tilde{\zeta}_i)$ le produit fibré de $T^{L'}_i(\tilde{\zeta}_i)$ et de $T^{L,H}$ au-dessus de $T^{L'}(\tilde{\zeta}_i)$, où $T^{L'}_i(\tilde{\zeta}_i)$ est l'image réciproque de $T^{L'}(\tilde{\zeta}_i)$ dans la donnée auxiliaire $H'_i(\tilde{\zeta}_i)$;

$\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_i)$ le produit fibré de $T'_i(\tilde{\zeta}_i)$ et de $T(\tilde{\zeta}_i)$ au-dessus de $T'(\tilde{\zeta}_i)$, où $T'_i(\tilde{\zeta}_i)$ est l'image réciproque de $T'(\tilde{\zeta}_i)$ dans la donnée auxiliaire $H'_i(\tilde{\zeta}_i)$;

$S_i = (\mathcal{T}^L(\tilde{\zeta}_i) \times \mathcal{T}(\tilde{\zeta}_i))/diag_-(\mathcal{Z}^H_i)$, où $\mathcal{Z}^H_i$ est le produit fibré de $Z(H'_i(\tilde{\zeta}_i))$ et de $Z(H)$ au dessus de $Z(H'(\tilde{\zeta}_i))$;

le tore dual $\hat{U}_i = (\hat{T}^L_{sc} \times \hat{T}_{sc}(\tilde{\zeta}_i))/diag(Z(\hat{G}_{SC}))$;

le tore dual $\hat{\mathcal{T}}^L(\tilde{\zeta}_i)$ qui est le quotient de $\hat{T}^{L'}_i(\tilde{\zeta}_i)$ et de $\hat{T}^{L,H}$ par $\hat{T}^{L'}(\tilde{\zeta}_i)$ plongé par $t' \mapsto (\hat{\xi}^H_i(t')^{-1}, t')$ (on note $\hat{\xi}^H_i : \mathcal{H}'(\tilde{\zeta}_i) \to {}^L H'_i(\tilde{\zeta}_i)$ le plongement fixé) ;

le tore dual $\hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_i)$ qui se décrit de la même façon ;

le tore dual $\hat{S}_i$ qui se décrit comme le sous-groupe des $(t^L, t, t_{sc}) \in \hat{\mathcal{T}}^L(\tilde{\zeta}_i) \times \hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_i) \times \hat{T}_{sc}$ tels que $j(t_{sc}) = t^L t^{-1}$; on a ici identifié tous les tores à un tore commun, en oubliant leurs actions galoisiennes ; j est l'application naturelle $j : \hat{T}_{sc} \to \hat{\mathcal{T}}^L(\tilde{\zeta}_i) \simeq \hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_i)$; on renvoie à [I] 2.2 pour la description de l'action galoisienne sur $\hat{S}_i$.

Remarque. Dans la description de U_i et $\hat{U}_i$ apparaissent a priori les groupes H et $\hat{H}$. Mais ils n'apparaissent que via leurs revêtements simplement connexes, qui s'identifient à G_{SC} et $\hat{G}_{SC}$.

On construit comme en [II] 2.2, 2.3 :

- une cochaîne $(V^L_i, V^{-1}_i) : \Gamma_{F_v} \to T^L_{sc} \times T_{sc}(\tilde{\zeta}_i)$;

- un élément $(\nu^L(\tilde{\zeta}_i), \nu^{-1}_i) \in \mathcal{T}^L(\tilde{\zeta}_i) \times \mathcal{T}(\tilde{\zeta}_i)$ (la dissymétrie de cette notation et de la suivante s'expliquera plus loin) ;

- un cocycle $(\hat{V}^L(\tilde{\zeta}_i), \hat{V}_i, \hat{V}_{i,sc}) : W_{F_v} \to \hat{S}_i$;

- un élément $(\zeta_{i,sc}, \zeta_{i,sc}) \in \hat{T}^L_{sc} \times \hat{T}^i_{sc}$; pour cela, on note ζ l'élément de $\hat{T}$ tel que $\tilde{\zeta} = \zeta\hat{\theta}$ et on choisit des relèvements ζ_{sc} et z_{sc} dans $\hat{T}_{sc}$ des images de ζ et z dans $\hat{T}_{ad}$; on pose $\zeta_{1,sc} = \zeta_{sc}$ et $\zeta_{2,sc} = z_{sc}\zeta_{sc}$.

On note encore (V^L_i, V^{-1}_i), resp. $(\nu^L(\tilde{\zeta}_i), \nu^{-1}_i)$, $(\zeta_{i,sc}, \zeta_{i,sc})$, les images de ces termes dans U_i, resp. S_i, $\hat{U}_i$. Pour définir les éléments (V^L_i, V^{-1}_i) et $(\nu^L(\tilde{\zeta}_i), \nu^{-1}_i)$, on doit compléter $(B^{L,H}_v, T^{L,H}_v)$ en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^H$ et choisir un élément $e^H \in Z(\tilde{H}, \mathcal{E}^H)$ ainsi qu'une cochaîne $u_{\mathcal{E}^H} : \Gamma_{F_v} \to G_{SC}(\bar{F}_v)$ comme en [I] 1.2. Pour cela, on fixe une fois pour toutes une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$ de G définie sur $\bar{F}$, un élément $e^* \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*)$ et une cochaine $u_{\mathcal{E}^*} : \Gamma_F \to G_{SC}(\bar{F})$. On fixe un élément $g_{sc,v} \in G_{SC}(\bar{F}_v)$ tel que $ad_{g_{sc,v}}(B^*, T^*) = (B^{L,H}_v, T^{L,H}_v)$. L'application $ad_{g_{sc,v}}$ envoie l'épinglage de $\mathcal{E}^*$ sur un épinglage qui complète la paire $(B^{L,H}_v, T^{L,H}_v)$. On suppose que $\mathcal{E}^H$ est cette paire de Borel complétée par cet épinglage. On pose $e^H = ad_{g_{sc,v}}(e^*)$ et $u_{\mathcal{E}^H}(\sigma) = g_{sc,v}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(g_{sc,v})^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$. On notera simplement $e = e^H$ dans la suite.

Par définition, on a l'égalité

$$\boldsymbol{\Delta}_{i,imp,v}(l'_i, l'; h'_i, h(\tilde{\zeta}_i)) =< \Big((V^L_i, V^{-1}_i), (\nu^L(\tilde{\zeta}_i), \nu^{-1}_i)\Big), \Big((\hat{V}^L(\tilde{\zeta}_i), \hat{V}_i, \hat{V}_{i,sc}), (\zeta_{i,sc}, \zeta_{i,sc})\Big) >^{-1},$$

où il s'agit du produit sur

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_v};U_i \stackrel{1-\theta}{\to} S_i)\times H^{1,0}(W_{F_v};\hat{S}_i \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}_i)\to \mathbb{C}^\times.$$

On a des inclusions $G'(\tilde{\zeta}_i)\subset H'(\tilde{\zeta}_i)$. On note $G'_i(\tilde{\zeta}_i)$ l'image réciproque de $G'(\tilde{\zeta}_i)$ dans la donnée auxiliaire $H'_i(\tilde{\zeta}_i)$ et $T_i^{L'}$ l'image réciproque de $T^{L'}$ dans $G'_i(\tilde{\zeta}_i)$. Notons $\mathcal{T}_i^L$ le produit fibré de $T_i^{L'}$ et de T^L au-dessus de $T^{L'}$. La différence avec $\mathcal{T}^L(\tilde{\zeta}_i)$ est qu'ici, les tores restent dans des groupes issus de G et non pas de H. Posons $\underline{S}_i=(\mathcal{T}_i^L\times\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_i))/diag_-(\mathcal{Z}_i)$, où $\mathcal{Z}_i$ est le produit fibré de $Z(G'_i(\tilde{\zeta}_i))$ et de $Z(G)$ au dessus de $Z(G'(\tilde{\zeta}_i))$. On a une application naturelle $\underline{S}_i\to S_i$. Parce que les éléments l'_i et l sont dans $\tilde{G}'_i(\tilde{\zeta}_i)$ et $\tilde{G}$ (et pas seulement dans $\tilde{H}'_i(\tilde{\zeta}_i)$ et $\tilde{H}$) et parce que l'on a choisi $e\in\tilde{G}$, on vérifie que le couple $(\nu^L(\tilde{\zeta}_i),\nu_i^{-1})$ appartient à $\mathcal{T}_i^L\times\mathcal{T}^i$ et définit donc un élément de $\underline{S}_i$, que l'on note plutôt (ν_i^L,ν_i^{-1}). Toujours d'après le choix de e, on vérifie que le couple $\big((V_i^L,V_i^{-1}),(\nu_i^L,\nu_i^{-1})\big)$ est un cocycle appartenant à $Z^{1,0}(\Gamma_{F_v};U_i\stackrel{1-\theta}{\to}\underline{S}_i)$. Le tore dual $\hat{\mathcal{T}}_i^L$ est le quotient de $\hat{T}_i^{L'}\times\hat{T}^L$ par $\hat{T}^{L'}$ plongé par $t'\mapsto(\hat{\xi}_i(t')^{-1},t')$. Le tore dual $\hat{\underline{S}}_i$ est le groupe des $(t^L,t,t_{sc})\in\hat{\mathcal{T}}_i^L\times\hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_i)\times\hat{T}_{sc}$ tels que t^L est l'image naturelle dans $\hat{\mathcal{T}}_i^L$ de l'élément $j(t_{sc})t$. On note $\hat{V}_i^L$ l'image naturelle de $\hat{V}^L(\tilde{\zeta}_i)$ dans $\hat{\mathcal{T}}_i^L$. Par compatibilité des produits, on obtient l'égalité

$$\boldsymbol{\Delta}_{i,imp,v}(l'_i,l';h'_i,h(\tilde{\zeta}_i))=<\big((V_i^L,V_i^{-1}),(\nu_i^L,\nu_i^{-1})\big),\Big((\hat{V}_i^L,\hat{V}_i,\hat{V}_{i,sc}),(\zeta_{i,sc},\zeta_{i,sc})\Big)>^{-1},$$

où il s'agit du produit sur

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_v};U_i \stackrel{1-\theta}{\to} \underline{S}_i)\times H^{1,0}(W_{F_v};\hat{\underline{S}}_i \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}_i).$$

Notons U_{12} le produit $T_{sc}^L\times T_{sc}^1\times T_{sc}^2$ quotienté par $Z(G_{SC})$ plongé par $z\mapsto(z,z^{-1},z^{-1})$. Parce que l'on a choisi les mêmes diagrammes et les mêmes objets auxiliaires pour construire V_1^L et V_2^L, ces deux cochaînes sont égales. Notons-les simplement V^L. Alors (V^L,V_1^{-1},V_2^{-1}) est une cochaîne à valeurs dans $T_{sc}^L\times T_{sc}^1\times T_{sc}^2$, qui se descend en un cocycle à valeurs dans U_{12}. Rappelons la construction des éléments ν_i^L. On note e'_i l'image de e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}'(\tilde{\zeta}_i))$. On écrit $l'_i=\mu_ie'_i$ et $l=\nu e$. Alors ν_i^L est le couple (μ_i,ν). Notons $\mathcal{T}_{12}^L$ le produit fibré de $T_1^{L'}$, $T_2^{L'}$ et T^L au-dessus de $T^{L'}$. On définit l'élément $\nu_{12}^L=(\mu_1,\mu_2,\nu)\in\mathcal{T}_{12}^L$. Notons $\mathcal{Z}_{12}$ le groupe des triplets $(z_1,z_2,z)\in Z(G'_1(\tilde{\zeta}_1))\times Z(G'_2(\tilde{\zeta}_2))\times Z(G)$ tels que, pour $i=1,2$, z_i a même image que z dans $Z(G'(\tilde{\zeta}_i))$. Notons $\underline{S}_{12}$ le quotient de $\mathcal{T}_{12}^L\times\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_1)\times\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_2)$ par le groupe $\mathcal{Z}_{12}$ plongé par $(z_1,z_2,z)\mapsto((z_1,z_2,z),(z_1,z)^{-1},(z_2,z)^{-1})$. Le triplet $(\nu_{12}^L,\nu_1^{-1},\nu_2^{-1})$ définit un élément de ce quotient et on voit que la paire $\big((V^L,V_1^{-1},V_2^{-1}),(\nu_{12}^L,\nu_1^{-1},\nu_2^{-1})\big)$ est un cocycle appartenant à $Z^{1,0}(\Gamma_{F_v};U_{12}\stackrel{1-\theta}{\to}\underline{S}_{12})$. Il y a des homomorphismes d'oubli d'une série de variables

$$\begin{array}{ccc} & U_{12}\stackrel{1-\theta}{\to}\underline{S}_{12} & \\ \swarrow p_1 & & \searrow p_2\\ U_1\stackrel{1-\theta}{\to}\underline{S}_1 & & U_2\stackrel{1-\theta}{\to}\underline{S}_2\end{array}$$

En notant encore $p_i:H^{1,0}(\Gamma_{F_v};U_{12}\stackrel{1-\theta}{\to}\underline{S}_{12})\to H^{1,0}(\Gamma_{F_v};U_i\stackrel{1-\theta}{\to}\underline{S}_i)$ l'homomorphisme déduit par fonctorialité, on a $p_i((V^L,V_1^{-1},V_2^{-1}),(\nu_{12}^L,\nu_1^{-1},\nu_2^{-1}))=((V_i^L,V_i^{-1}),(\nu_i^L,\nu_i^{-1}))$. On note $\hat{p}_i:H^{1,0}(W_{F_v};\hat{\underline{S}}_i\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_i)\to H^{1,0}(W_{F_v};\hat{\underline{S}}_{12}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_{12})$ l'homomorphisme dual de p_i. Par compatibilité des produits, on en déduit que $\boldsymbol{\Delta}_{i,imp,v}(l'_i,l';h'_i,h(\tilde{\zeta}_i))$ est égal à

$$<\big((V^L,V_1^{-1},V_2^{-1}),(\nu_{12}^L,\nu_1^{-1},\nu_2^{-1})\big),\hat{p}_i\Big((\hat{V}_i^L,\hat{V}_i,\hat{V}_{i,sc}),(\zeta_{i,sc},\zeta_{i,sc})\Big)>^{-1},$$

où il s'agit du produit sur

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_v};U_{12}\stackrel{1-\theta}{\to}\underline{S}_{12})\times H^{1,0}(W_{F_v};\underline{\hat{S}}_{12}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_{12}).$$

Le tore dual $\underline{\hat{S}}_{12}$ est le groupe des $(t^L,t_1,t_2,t_{sc})\in\hat{\mathcal{T}}^L_{12}\times\hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_1)\times\hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_2)\times\hat{T}_{sc}$ tels que t^L soit le produit des images naturelles de t_{sc}, t_1 et t_2 dans $\hat{\mathcal{T}}^L_{12}$. Le tore dual $\hat{U}_{12}$ est le quotient de $\hat{T}^L_{sc}\times\hat{T}_{sc}(\tilde{\zeta}_1)\times\hat{T}_{sc}(\tilde{\zeta}_2)$ par le groupe des triplets $(z,z_1,z_2)\in Z(\hat{G}_{SC})^3$ tels que $z=z_1z_2$. L'élément

$$\hat{p}_1\left((\hat{V}^L_1,\hat{V}_1,\hat{V}_{1,sc}),(\zeta_{1,sc},\zeta_{1,sc})\right)\hat{p}_2\left((\hat{V}^L_2,\hat{V}_2,\hat{V}_{2,sc}),(\zeta_{2,sc},\zeta_{2,sc})\right)^{-1}$$

est de la forme

$$\left((\hat{V}^L_{12},\hat{V}_1,\hat{V}_2^{-1},\hat{V}_{12,sc}),(z_{sc}^{-1},\zeta_{sc},z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})\right).$$

On obtient

$$\boldsymbol{\Delta}_{2,imp,v}(l'_2,l';h'_2,h(\tilde{\zeta}_2))\boldsymbol{\Delta}_{1,imp,v}(l'_1,l';h'_1,h(\tilde{\zeta}_1))^{-1}=$$
$$<\left((V^L,V_1^{-1},V_2^{-1}),(\nu^L_{12},\nu_1^{-1},\nu_2^{-1})\right),\left((\hat{V}^L_{12},\hat{V}_1,\hat{V}_2^{-1},\hat{V}_{12,sc}),(z_{sc}^{-1},\zeta_{sc},z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})\right)>.$$

Le calcul de $\hat{V}^L_{12}$ et $\hat{V}_{12,sc}$ est long mais on l'a fait dans la preuve de la proposition 1.14(iii) de [II] et on va décrire le résultat. On a implicitement fixé des paires de Borel épinglées de $\hat{G}'(\tilde{\zeta}_1)$ et $\hat{G}'(\tilde{\zeta}_2)$, les paires de Borel sous-jacentes étant évidemment les intersections de $(\hat{B},\hat{T})$ avec chacun des groupes. Puisque ces deux groupes ont en commun le Levi $\hat{M}'$, on peut supposer que ces paires prolongent en un sens plus ou moins clair une paire de Borel épinglée de de Levi. Pour $i=1,2$, le groupe $\hat{H}(\tilde{\zeta}_i)$ est en réalité déterminé par le choix d'un relèvement $\tilde{t}_i$ de $\tilde{\zeta}_i$ dans $\hat{H}$. Notons $\hat{M}^H$ l'image réciproque de $\hat{M}$ dans $\hat{H}$. Puisque $z\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$, on peut le relever en un élément $z^H\in Z(\hat{M}^H)^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$ et supposer $\tilde{t}_2=z^H\tilde{t}_1$. Alors $\hat{H}'(\tilde{\zeta}_1)$ et $\hat{H}'(\tilde{\zeta}_2)$ ont en commun un Levi $\hat{M}^{H'}$ qui relève $\hat{M}'$. Les paires de Borel épinglées de $\hat{G}'(\tilde{\zeta}_1)$, $\hat{G}'(\tilde{\zeta}_2)$ et $\hat{M}'$ se relèvent en de telles paires de $\hat{H}'(\tilde{\zeta}_1)$, $\hat{H}'(\tilde{\zeta}_2)$ et $\hat{M}^{H'}$. Ces paires de Borel épinglées déterminent précisément les actions galoisiennes sur chaque groupe. Ainsi, les actions galoisiennes sur $\hat{H}'(\tilde{\zeta}_1)$ et $\hat{H}'(\tilde{\zeta}_2)$ se restreignent en une même action sur $\hat{M}^{H'}$. Pour $w\in W_F$ et $i=1,2$, on fixe des éléments $(h_i(w),w)\in\mathcal{H}'(\tilde{\zeta}_i)$ tels que $ad_{h_i(w)}\circ w_H=w_{H'(\tilde{\zeta}_i)}$. La propriété précédente assure que $h_2(w)=m^{H'}(w)h_1(w)$, avec $m^{H'}(w)\in Z(\hat{M}^{H'})$. Puisque ce groupe est produit de $Z(\hat{M}^{H'})^0$ et de $Z(\hat{H}'(\tilde{\zeta}_2))$, on peut supposer $m^{H'}(w)\in Z(\hat{M}^{H'})^0$. On note $g_1(w)$, $g_2(w)$ et $m'(w)$ les projections de $h_1(w)$, $h_2(w)$ et $m^{H'}(w)$ dans $\hat{G}$. Ces éléments vérifient des propriétés analogues aux précédents. Pour $i=1,2$, on note $\hat{\xi}_i:\mathcal{G}'(\tilde{\zeta}_i)\to{}^LG'_i(\tilde{\zeta}_i)$ le plongement fixé et, pour $w\in W_F$, on pose $\hat{\xi}_i(g_i(w),w)=(\varphi_i(w),w)$. L'élément $\varphi_i(w)$ appartient à $Z(\hat{G}'_i(\tilde{\zeta}_i))$. On pose $\varphi'_2(w)=\hat{\xi}_2(m'(w))^{-1}\varphi_2(w)$, autrement dit $\hat{\xi}_2(g_1(w),w)=(\varphi'_2(w),w)$. On fixe un relèvement $\rho_{v,sc}\in\hat{G}_{SC}$ de l'image de ρ_v dans $\hat{G}_{AD}$ et, pour tout $w\in W_F$, un relèvement $m'_{sc}(w)$ dans $\hat{G}_{SC}$ de l'image de $m'(w)$ dans $\hat{G}_{AD}$. On suppose ainsi qu'il est loisible que $m'_{sc}(w)\in Z(\hat{M}'_{sc})^0$. Pour $w\in W_{F_v}$, on a alors

$$\hat{V}^L_{12}(w)=(\varphi_1(w),\varphi'_2(w)^{-1},w_G(\rho_v)w_{T^L}(\rho_v)^{-1}),$$

$$\hat{V}_{12,sc}(w)=(t_{sc}(\tilde{\zeta}_1)(w)^{-1}t_{sc}(\tilde{\zeta}_2)(w)m'_{sc}(w)w_G(\rho_{v,sc})w_{T^L}(\rho_{v,sc})^{-1}),$$

où, pour $i=1,2$, $t_{sc}(\tilde{\zeta}_i)$ est une cochaîne ne dépendant que des objets issus de $(h'_i,h(\tilde{\zeta}_i))$.

Remarque. Il y a un changement de signe par rapport à la référence [II] car on y calculait un rapport $\boldsymbol{\Delta}_1/\boldsymbol{\Delta}_2$ alors que l'on calcule ici un rapport inverse. Par ailleurs, le résultat n'est pas tout-à-fait exact. Il faudrait multiplier les formules ci-dessus par un cobord qui disparaît immédiatement dans la suite du calcul.

On a fixé plus haut des éléments m', m'_1, m'_2. On peut les supposer assez réguliers. Notons $T^{M'}, T_1^{M'}, T_2^{M'}$ leurs commutants et notons $T_{12}^{M'}$ le produit fibré de $T_1^{M'}$ et $T_2^{M'}$ au-dessus de $T^{M'}$. On écrit $m'_i = \mu_i^{M'} e'_i$ pour $i = 1, 2$. Alors le couple $\mu_{12}^{M'} = (\mu_1^{M'}, \mu_2^{M'})$ appartient à $T_{12}^{M'}$. Notons Σ le quotient de $\mathcal{T}_{12}^L \times T_{12}^{M'} \times \mathcal{T}(\tilde{\zeta}_1) \times \mathcal{T}(\tilde{\zeta}_2)$ par le groupe $\mathcal{Z}_{12}$ plongé par $(z_1, z_2, z) \mapsto ((z_1, z_2, z), (z_1, z_2)^{-1}, (z_1, z)^{-1}, (z_2, z)^{-1})$. Le quadruplet $(\nu_{12}^L, (\mu_{12}^{M'})^{-1}, \nu_1^{-1}, \nu_2^{-1})$ définit un élément de Σ. On a un homomorphisme d'oubli

$$\begin{array}{c} U_{12} \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma \\ \downarrow \\ U_{12} \stackrel{1-\theta}{\to} \underline{S}_{12} \end{array}$$

Il est clair que

$$\big((V^L, V_1^{-1}, V_2^{-1}), (\nu_{12}^L, \nu_1^{-1}, \nu_2^{-1})\big)$$

est l'image de

$$\Big((V^L, V_1^{-1}, V_2^{-1}), (\nu_{12}^L, (\mu_{12}^{M'})^{-1}\nu_1^{-1}, \nu_2^{-1})\Big)$$

par l'homorphisme

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_v}; U_{12} \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma) \to H^{1,0}(\Gamma_{F_v}; U_{12} \stackrel{1-\theta}{\to} \underline{S}_{12})$$

déduit par fonctorialité du précédent. Le tore dual $\hat{\Sigma}$ est le groupe des $(t^L, t^{M'}, t_1, t_2, t_{sc}) \in \hat{\mathcal{T}}_{12}^L \times \hat{T}_{12}^{M'} \times \hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_1) \times \hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_2) \times \hat{T}_{sc}$ tels que t^L soit le produit des images naturelles de $t^{M'}$, t_1, t_2 et t_{sc}. Par l'homomorphisme dual du précédent, l'élément

$$\Big((\hat{V}_{12}^L, \hat{V}_1, \hat{V}_2^{-1}, \hat{V}_{12,sc}), (z_{sc}^{-1}, \zeta_{sc}, z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})\Big)$$

s'envoie sur

$$\Big((\hat{V}_{12}^L, 1, \hat{V}_1, \hat{V}_2^{-1}, \hat{V}_{12,sc}), (z_{sc}^{-1}, \zeta_{sc}, z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})\Big). \tag{18}$$

Par compatibilité des produits, on obtient

$$\boldsymbol{\Delta}_{2,imp,v}(l'_2, l'; h'_2, h(\tilde{\zeta}_2))\boldsymbol{\Delta}_{1,imp,v}(l'_1, l'; h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))^{-1} =$$

$$< \Big((V^L, V_1^{-1}, V_2^{-1}), (\nu_{12}^L, (\mu^{M'})^{-1}, \nu_1^{-1}, \nu_2^{-1})\Big), \Big((\hat{V}_{12}^L, 1, \hat{V}_1, \hat{V}_2^{-1}, \hat{V}_{12,sc}), (z_{sc}^{-1}, \zeta_{sc}, z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})\Big) >,$$

où il s'agit du produit sur

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_v}; U_{12} \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma) \times H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{\Sigma} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}_{12}).$$

Notons Σ_{ML} le quotient de $\mathcal{T}_{12}^L \times T_{12}^{M'}$ par $\mathcal{Z}_{12}$ plongé par $(z_1, z_2, z) \mapsto ((z_1, z_2, z), (z_1, z_2)^{-1})$. Son dual $\hat{\Sigma}_{ML}$ est le groupe des $(t^L, t^{M'}, t_{sc})$ tels que $t^L(t^{M'})^{-1} = j(t_{sc})$. Pour $w \in W_{F_v}$, posons

$$X_{ML}^L(w) = \hat{V}_{12}^L(w) \in \hat{\mathcal{T}}_{12}^L,\ X_{ML}^M(w) = (\varphi_1(w), \varphi'_2(w)^{-1}) \in \hat{T}_{12}^{M'}$$
$$X_{ML,sc}(w) = (w_G(\rho_{v,sc})w_{T^L}(\rho_{v,sc})^{-1}) \in \hat{T}_{sc}.$$

Posons $X_{ML}(w) = (X_{ML}^L(w), X_{ML}^M(w), X_{ML,sc}(w))$. Ce terme appartient à $\hat{\Sigma}_{ML}$. On a fixé arbitrairement l'élément z_{sc}. Mais on se rappelle que, par définition, z appartient à $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. L'image de ce groupe dans $\hat{G}_{AD}$ étant connexe, on peut supposer et on suppose que $z_{sc}\in Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. On vérifie alors que le couple (X_{ML},z_{sc}^{-1}) est un cocycle qui définit un élément de $H^{1,0}(W_{F_v};\hat{\Sigma}_{ML}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}_{sc}^L)$. On a un homomorphisme plus ou moins évident

$$\begin{array}{c}\hat{\Sigma}_{ML}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}_{sc}^L\\ \downarrow\\ \hat{\Sigma}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_{12}\end{array}$$

Par l'homomorphisme qui s'en déduit par fonctorialité, (X_{ML},z_{sc}^{-1}) s'envoie sur le cocycle

$$\Big((\hat{V}_{12}^L,X_{ML}^M,1,1,X_{ML,sc}),(z_{sc}^{-1},1,1)\Big).$$

Le cocycle (18) est le produit de celui-ci avec le cocycle

$$(19)\qquad \Big((1,(X_{ML}^M)^{-1},\hat{V}_1,\hat{V}_2^{-1},\underline{\hat{V}}_{12,sc}),(1,\zeta_{sc},z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})\Big),$$

où

$$\underline{\hat{V}}_{12,sc}(w)=(t_{sc}(\tilde{\zeta}_1)(w)^{-1}t_{sc}(\tilde{\zeta}_2)(w)m'_{sc}(w)).$$

Il est clair que ce dernier cocycle vit dans des groupes plus petits, où l'on supprime la première composante. C'est-à-dire, notons $\Sigma_\star$ le quotient de $T_{12}^{M'}\times\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_1)\times\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_2)$ par le groupe $\mathcal{Z}_{12}$ plongé par $(z_1,z_2,z)\mapsto((z_1,z_2),(z_1,z),(z_2,z))$. Notons $U_\star=(T_{sc}(\tilde{\zeta}_1)\times T_{sc}(\tilde{\zeta}_2))/diag(Z(G_{SC}))$. On a un homomorphisme

$$\begin{array}{c}\hat{\Sigma}_\star\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_\star\\ \downarrow\\ \hat{\Sigma}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_{12}\end{array}$$

Par l'homomorphisme qui s'en déduit par fonctorialité, le cocycle (19) est l'image du cocycle

$$\Big(((X_{ML}^M)^{-1},\hat{V}_1,\hat{V}_2^{-1},\underline{\hat{V}}_{12,sc}),(\zeta_{sc},z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})\Big)\in H^{1,0}(W_{F_v};\hat{\Sigma}_\star\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_\star).$$

On a des homomorphismes duaux aux précédents

$$\begin{array}{ccc} & & H^{1,0}(\Gamma_{F_v};T_{ad}^L\stackrel{1-\theta}{\to}\Sigma_{ML})\\ & \nearrow & \\ H^{1,0}(\Gamma_{F_v};U_{12}\stackrel{1-\theta}{\to}\Sigma) & & \\ & \searrow & \\ & & H^{1,0}(\Gamma_{F_v};U_\star\stackrel{1-\theta}{\to}\Sigma_\star)\end{array}$$

Par ces homomorphismes, le cocycle

$$\Big((V^L,V_1^{-1},V_2^{-1}),(\nu_{12}^L,(\mu^{M'})^{-1},\nu_1^{-1},\nu_2^{-1})\Big)$$

s'envoie respectivement sur $(V_{L,ad},(\nu_{12}^L,(\mu^{M'})^{-1}))$ et l'inverse de $((V_1,V_2),(\mu^{M'},\nu_1,\nu_2))$. La décomposition ci-dessus et la compatibilité des produits conduit à l'égalité

$$(20)\qquad \boldsymbol{\Delta}_{2,imp,v}(l'_2,l';h'_2,h(\tilde{\zeta}_2))\boldsymbol{\Delta}_{1,imp,v}(l'_1,l';h'_1,h(\tilde{\zeta}_1))^{-1}=A_vB_v^{-1},$$

où
$$A_v =< (V_{L,ad},(\nu_{12}^L,(\mu^{M'})^{-1})),(X_{ML},z_{sc}^{-1}) >,$$
$$B_v =< ((V_1,V_2),(\mu^{M'},\nu_1,\nu_2)),\Big(((X_{ML}^M)^{-1},\hat{V}_1,\hat{V}_2^{-1},\underline{\hat{V}}_{12,sc}),(\zeta_{sc},z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})\Big) > .$$
On va d'abord se préoccuper du terme B_v. Evidemment, ce qui nous intéresse est le produit de ces termes sur toutes les places $v\in V$. Compte tenu du choix des éléments m_i', h_i' et $h(\tilde{\zeta}_i)$, le terme B_v peut aussi bien être défini pour une place $v\notin V$. De plus, bien que les éléments h_i' et $h(\tilde{\zeta}_i)$ soient seulement adéliques, les tores qui interviennent dans les définitions sont les localisés de tores définis sur F. Les cochaînes intervenant sont aussi "adéliques". Par exemple, le terme noté V_1 est la localisée d'une cochaîne encore notée $V_1:\Gamma_F\to T_{sc}(\tilde{\zeta}_1)$. On peut donc définir un terme
$$B =< ((V_1,V_2),(\mu^{M'},\nu_1,\nu_2)),\Big(((X_{ML}^M)^{-1},\hat{V}_1,\hat{V}_2^{-1},\underline{\hat{V}}_{12,sc}),(\zeta_{sc},z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})\Big) >,$$
où il s'agit cette fois du produit dans
$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;U_\star\stackrel{1-\theta}{\to}\Sigma_\star)\times H^{1,0}(W_F;\hat{\Sigma}_\star\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_\star).$$
D'après les propriétés générales de ce produit, on a
$$B=\prod_{v\in Val(F)}B_v,$$
les termes du produit étant presque tous égaux à 1. On a un homomorphisme naturel
$$\begin{array}{c} T_{sc}(\tilde{\zeta}_1)\times T_{sc}(\tilde{\zeta}_2)\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_1)\times\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_2)\\ \downarrow\\ U_\star\stackrel{1-\theta}{\to}\Sigma_\star.\end{array}$$
Le quadruplet $((V_1,V_2),(\nu_1,\nu_2))$ définit naturellement un élément de
$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;T_{sc}(\tilde{\zeta}_1)\times T_{sc}(\tilde{\zeta}_2)\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_1)\times\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_2)).$$
Le cocycle $((V_1,V_2),(\mu^{M'},\nu_1,\nu_2))$ en est l'image dans $H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;U_\star\stackrel{1-\theta}{\to}\Sigma_\star)$ par l'homomorphisme déduit par fonctorialité du précédent. En effet, parce que μ_1' et μ_2' sont définis sur F et parce que les éléments e_1' et e_2' sont définis sur $\bar{F}$, le terme $\mu^{M'}$ appartient à $T_{12}^{M'}(\bar{F})$. Il disparaît par définition des groupes de cohomologie "globaux". Par compatibilité des produits, on obtient
$$B =< ((V_1,V_2),(\nu_1,\nu_2)),((\hat{V}_1,\hat{V}_2^{-1}),(\zeta_{ad},z_{ad}^{-1}\zeta_{ad}^{-1})) >,$$
où il s'agit du produit sur
$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;T_{sc}(\tilde{\zeta}_1)\times T_{sc}(\tilde{\zeta}_2)\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_1)\times\mathcal{T}(\tilde{\zeta}_2))\times H^{1,0}(W_F;\hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_1)\times\hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_2)\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}_{ad}(\tilde{\zeta}_1)\times\hat{T}_{ad}(\tilde{\zeta}_2)).$$
Ce produit se décompose selon les composantes indexées par 1 et 2. On n'a pas de mal à reconnaître ces composantes comme les facteurs $\Delta_{i,glob}(h_i',h(\tilde{\zeta}_i))$ privés de leurs facteurs Δ_{II}. Notons ces facteurs $\Delta_{i,imp,glob}(h_i',h(\tilde{\zeta}_i))$. Il y a toutefois une inversion de signe sur le facteur d'indice 1 et on obtient
$$(21)\qquad B=\Delta_{2,imp,glob}(h_2',h(\tilde{\zeta}_2))\Delta_{1,imp,glob}(h_1',h(\tilde{\zeta}_1))^{-1}.$$

Pour $v \in V$, la relation (20) et le fait que le terme A_v ne dépend pas des couples $(h'_i, h(\tilde{\zeta}_i))$ entraîne que, si l'on remplace dans les constructions ces couples par d'autres $(\underline{h}'_i, \underline{h}(\tilde{\zeta}_i))$, et si l'on note $\underline{B}_v$ le terme obtenu, on a l'égalité

$$B_v = \underline{B}_v \boldsymbol{\Delta}_{1,imp,v}(\underline{h}'_1, \underline{h}(\tilde{\zeta}_1); h'_1, h(\tilde{\zeta}_1)) \boldsymbol{\Delta}_{2,imp,v}(\underline{h}'_2, \underline{h}(\tilde{\zeta}_2); h'_2, h(\tilde{\zeta}_2))^{-1}.$$

On a

(22) cette propriété perdure pour tout $v \in Val(F)$.

Dans le calcul conduisant à l'égalité (20), on est parti d'un produit dépendant de trois données (l'_1, l'_2, l), $(h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))$ et $(h'_2, h(\tilde{\zeta}_2))$. On a inséré une quatrième donnée (m'_1, m'_2), puis on a décomposé le produit obtenu en deux produits, l'un relatif aux données (l'_1, l'_2, l) et (m'_1, m'_2), l'autre aux données (m'_1, m'_2), $(h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))$ et $(h'_2, h(\tilde{\zeta}_2))$. Le même procédé permet d'insérer dans B_v de nouvelles données, disons $(\underline{h}'_1, \underline{h}(\tilde{\zeta}_1))$ puis de décomposer le produit obtenu en deux produits, l'un relatif aux données (m'_1, m'_2), $(\underline{h}'_1, \underline{h}(\tilde{\zeta}_1))$ et $(h'_2, h(\tilde{\zeta}_2))$, l'autre relatif aux données $(\underline{h}'_1, \underline{h}(\tilde{\zeta}_1))$ et $(h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))$. On reconnaît ces produits comme étant $\underline{B}_v$ et $\boldsymbol{\Delta}_{1,imp,v}(\underline{h}'_1, \underline{h}(\tilde{\zeta}_1); h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))$. On laisse les détails au lecteur. Cela prouve (22).

Fixons une place $v \notin V$. La situation étant non ramifiée, $\mathbf{M}'_v$ est relevant. On peut fixer un élément $y \in \tilde{M}_v(F_v)$ assez régulier et $y' \in M'(F_v)$ de sorte que leurs classes de conjugaison stable se correspondent. On fixe des relèvements y'_1 et y'_2 de y' dans $\tilde{G}'_1(\tilde{\zeta}_1)$, resp. $\tilde{G}'_2(\tilde{\zeta}_2)$. On construit $\underline{B}_v$ comme ci-dessus, relatif aux couples $(\underline{h}'_i, \underline{h}(\tilde{\zeta}_i)) = (y'_i, y)$ pour $i = 1, 2$. La situation étant non ramifiée, on dispose de facteurs de transfert canoniques et la relation précédant (22) devient

$$B_v = \underline{B}_v \Delta_{1,imp,v}(y'_1, y) \Delta_{2,imp,v}(y'_2, y)^{-1} \Delta_{1,imp,v}(h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))^{-1} \Delta_{2,imp,v}(h'_2, h(\tilde{\zeta}_2)). \tag{23}$$

On va calculer $\underline{B}_v$. Par rapport à la situation antérieure, les tores $T(\tilde{\zeta}_1)$ et $T(\tilde{\zeta}_2)$ se confondent en un unique tore T^H_y. Les cocycles V_1 et V_2 sont égaux à un unique cocycle V_y. Les éléments ν_1 et ν_2 ne sont pas égaux, mais sont de la forme $(\mu_{y,1}, \nu_y)$, $(\mu_{y,2}, \nu_y)$, où les $\mu_{y,i}$ appartiennent aux sous-tores $T'^H_{y,i}$ de $H'_i(\tilde{\zeta}_i)$ associés à T^H_y. En fait, on peut simplifier puisqu'on a choisi $y \in \tilde{M}_v(F_v)$ et non pas seulement $y \in \tilde{M}^H_v(F_v)$. On note $T_y = G \cap T^H_y$ et $T'_{y,i} = T'^H_{y,i} \cap G'_i(\tilde{\zeta}_i)$ pour $i = 1, 2$. On introduit le tore $\mathcal{T}_y$ produit fibré de $T'_{y,1}$, $T'_{y,2}$ et T_y au-dessus du tore T'_y de M' (qui est un Levi commun de $G'(\tilde{\zeta}_1)$ et $G'(\tilde{\zeta}_2)$). On note $\nu_{y,12}$ l'élément $(\mu_{y,1}, \mu_{y,2}, \nu_y)$ de $\mathcal{T}_y$. On note Σ_y le quotient de $T^{M'} \times \mathcal{T}_y$ par $\mathcal{Z}_{12}$ plongé par $(z_1, z_2, z) \mapsto ((z_1, z_2), (z_1, z_2, z))$. Le couple $(V_y, (\mu^{M'}, \nu_{y,12}))$ définit un élément de $H^{1,0}(\Gamma_{F_v}; T_{y,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma_y)$. On a un homomorphisme évident

$$\begin{array}{c} T_{y,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma_y \\ \downarrow \\ U_\star \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma_\star \end{array}$$

Par l'homomorphisme fonctoriellement associé, le cocycle précédent s'envoie sur celui intervenant dans la définition de $\underline{B}_v$. Pour utiliser la compatibilité des produits, on doit calculer l'image de $(((X^M_{ML})^{-1}, \hat{V}_1, \hat{V}_2, \underline{\hat{V}}_{12,sc}), (\zeta_{sc}, z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1}))$ par l'homomorphisme dual

$$H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{\Sigma}_\star \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}_\star) \to H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{\Sigma}_y \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{y,ad}).$$

Le premier terme X^M_{ML} se conserve tel quel. On peut remplacer $\hat{V}_i$ par son image dans l'analogue de $\hat{\mathcal{T}}(\tilde{\zeta}_i)$ où le groupe $\hat{G}$ remplace $\hat{H}$. Une fois fait ce remplacement, reportons-nous aux définitions de [I] 2.2. On a une égalité $\hat{V}_i(w) = (\varphi_i(w), t(\tilde{\zeta}_i)(w))$ pour tout

$w \in W_{F_v}$. Parce que y appartient à l'espace de Levi commun $\tilde{M}_v$, on voit que $t(\tilde{\zeta}_i)$ est de la forme $t(\tilde{\zeta}_i)(w) = N(w)g_i(w)^{-1}N'(w)$, où $N(w) \in \hat{M}_{v,sc}$ et $N'(w) \in \hat{M}'_{sc}$ sont les mêmes pour $i = 1, 2$. L'image de $(\hat{V}_1, \hat{V}_2)$ dans $\hat{\mathcal{T}}_y$ est le triplet $(\varphi_1, \varphi_2^{-1}, t(\tilde{\zeta}_1)t(\tilde{\zeta}_2)^{-1})$, que l'on calcule grâce aux formules ci-dessus. C'est $(\varphi_1, \varphi_2^{-1}, m')$. Ce terme vit en fait dans un quotient par le groupe $(\hat{T}'_y)^2$ plongé par $(t_1, t_2) \mapsto (\hat{\xi}_1(t_1), \hat{\xi}_2(t_2), t_1^{-1}t_2^{-1})$. Cela permet de remplacer le triplet précédent par $(\varphi_1, {\varphi'_2}^{-1}, 1)$. Le terme $\underline{V}_{12,sc}$ se simplifie. Avec les mêmes notations que ci-dessus et en fixant un relèvement $g_{1,sc}(w)$ de l'image de $h_1(w)$ dans $\hat{G}_{AD}$, on a

$$\underline{V}_{12,sc}(w) = t_{sc}(\tilde{\zeta}_1)(w)^{-1}t_{sc}(\tilde{\zeta}_2)(w)m'_{sc}(w)$$
$$= N'(w)^{-1}g_{1,sc}(w)N(w)^{-1}N(w)g_{1,sc}(w)^{-1}m'_{sc}(w)^{-1}N'(w)m'_{sc}(w) = 1$$

(on se rappelle que $m'_{sc}(w)$ appartient à $Z(\hat{M}'_{sc})^0$). Enfin, le couple $(\zeta_{sc}, z_{sc}^{-1}\zeta_{sc}^{-1})$ s'envoie évidemment sur z_{ad}^{-1}. On obtient

$$\underline{B}_v = < \left(V_y, (\mu^{M'}, \nu_{y,12})\right), \left(((\varphi_1^{-1}, \varphi'_2), (\varphi_1, {\varphi'_2}^{-1}, 1), 1), z_{ad}^{-1}\right) > .$$

D'après nos choix, on a $z_{ad} \in Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_{F_v},0}$. Ce groupe est contenu dans $\hat{T}_{y,ad}^{\Gamma_{F_v},0}$ puisque $\hat{T}_y \subset \hat{M}$. Or le groupe $\hat{T}_{y,ad}^{\Gamma_{F_v},0}$ est le noyau de l'accouplement sur

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_v}; T_{y,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma_y) \times H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{\Sigma}_y \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{y,ad}).$$

On peut donc aussi bien supprimer le terme z_{ad} de la formule ci-dessus. Le couple $(\varphi_1, {\varphi'_2}^{-1})$, modulo le tore $\hat{T}'_y$ plongé par $t \mapsto (\hat{\xi}_1(t), \hat{\xi}_2(t)^{-1})$, ne dépend pas du choix de $g_1(w)$. On peut modifier cette cochaîne g_1. La situation étant non ramifiée, on peut supposer que c'est un cocycle non ramifié. Il en est alors de même de φ_1 et φ'_2. Pour $i = 1, 2$, notons $Z(G'_i(\tilde{\zeta}_i); G)$ la projection dans $Z(G'_i(\tilde{\zeta}_i))$ du produit fibré de ce groupe avec $Z(G)$, au-dessus de $Z(G'(\tilde{\zeta}_i))$. Introduisons le tore Y_i quotient de $T_i^{M'} \times T'_{y,i}$ par $Z(G'_i(\tilde{\zeta}_i); G)$ agissant diagonalement. Son dual $\hat{Y}_i$ est l'ensemble des $(t^{M'}, t_y, t_{sc}) \in \hat{T}^{M'} \times \hat{T}'_{y,i} \times \hat{T}_{sc}^{\hat{\theta}}$ tels que $t^{M'}t_yt_{sc} = 1$. On a un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \hat{Y}_i & & \\ \downarrow & & \\ \hat{\Sigma}_y & \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{T}_{y,ad} \end{array}$$

dont on déduit un homomorphisme

$$H^1(W_{F_v}; \hat{Y}_i) \to H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{\Sigma}_y \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{y,ad}).$$

Le triplet $(\varphi_1^{-1}, \varphi_1, 1)$ définit un élément de $H^1(W_{F_v}; \hat{Y}_1)$ tandis que le triplet $(\varphi'_2, {\varphi'_2}^{-1}, 1)$ définit un élément de $H^1(W_{F_v}; \hat{Y}_2)$. Le cocycle $((\varphi_1^{-1}, \varphi'_2), (\varphi_1, {\varphi'_2}^{-1}, 1), 1), 1)$ est le produit des images de ces deux cocycles. Par compatibilité des produits ([17] 4.3), on obtient

$$\underline{B}_v = < (\mu'_1, \mu_{y,1}), (\varphi_1^{-1}, \varphi_1, 1) >< (\mu'_2, \mu_{y,2}), (\varphi'_2, {\varphi'_2}^{-1}, 1) >,$$

où il s'agit des produits sur $H^0(\Gamma_{F_v}; Y_i) \times H^1(W_{F_v}; \hat{Y}_i)$. Posons

$${}^2M'_i = (M'_i(\tilde{\zeta}_i) \times M'_i(\tilde{\zeta}_i))/diag(Z(G'_i(\tilde{\zeta}_i); G)).$$

Le tore Y_i est un sous-tore maximal de ce groupe. On a un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} H^1(W_{F_v}; Z(\hat{M}'_1(\tilde{\zeta}_1))) & \to & H^1(W_{F_v}; Z(^2\hat{M}'_1)) \\ \varphi_1 & \mapsto & (\varphi_1, \varphi_1^{-1}, 1) \end{array}$$

et un homomorphisme analogue concernant φ'_2. Notons λ_{φ_1} le caractère de $M'_1(\tilde{\zeta}_1)$ déterminé par φ_1. On définit de même $\lambda_{\varphi'_2}$. On calcule alors

$$\underline{B}_v = \lambda_{\varphi_1}({\mu'_1}^{-1}\mu_{y,1})\lambda_{\varphi'_2}(\mu'_2\mu_{y,2}^{-1}).$$

On note aussi $\tilde{\lambda}_{\varphi_1}$ l'unique fonction sur $\tilde{M}'_1(\tilde{\zeta}_1)$ qui se transforme selon le caractère λ_{φ_1} et qui vaut 1 sur l'espace hyperspécial fixé par les données auxiliaires. On peut aussi bien récrire

$$\underline{B}_v = \tilde{\lambda}_{\varphi_1}(m'_1)^{-1}\tilde{\lambda}_{\varphi_1}(y'_1)\tilde{\lambda}_{\varphi'_2}(m'_2)\tilde{\lambda}_{\varphi'_2}(y'_2)^{-1}.$$

Il résulte des définitions que

$$\tilde{\lambda}_{\varphi_1}(y'_1)\tilde{\lambda}_{\varphi'_2}(y'_2)^{-1} = \Delta_{1,imp,v}(y'_1, y)^{-1}\Delta_{2,imp,v}(y'_2, y).$$

Cela assure en même temps que

$$\tilde{\lambda}_v^M(m'_1, m'_2) = \tilde{\lambda}_{\varphi_1}(m'_1)\tilde{\lambda}_{\varphi'_2}(m'_2)^{-1}.$$

D'où l'égalité

$$\underline{B}_v = \tilde{\lambda}_v^M(m'_1, m'_2)^{-1}\Delta_{1,imp,v}(y'_1, y)^{-1}\Delta_{2,imp,v}(y'_2, y).$$

Grâce à (23), on obtient

$$B_v = \tilde{\lambda}_v^M(m'_1, m'_2)^{-1}\Delta_{1,imp,v}(h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))^{-1}\Delta_{2,imp,v}(h'_2, h(\tilde{\zeta}_2)).$$

Rassemblons cette égalité avec les égalités (20) et (21). On obtient

$$\prod_{v\in V}\boldsymbol{\Delta}_{2,imp,v}(l'_2, l'; h'_2, h(\tilde{\zeta}_2))\boldsymbol{\Delta}_{1,imp,v}(l'_1, l'; h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))^{-1}$$

$$= (\prod_{v\in V} A_v)B^{-1}\prod_{v\notin V} B_v$$

$$= (\prod_{v\in V} A_v)\Delta_{1,imp,glob}(h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))\Delta_{2,imp,glob}(h'_2, h(\tilde{\zeta}_2))^{-1}$$

$$\prod_{v\notin V}\tilde{\lambda}_v^M(m'_1, m'_2)^{-1}\Delta_{1,imp,v}(h'_1, h(\tilde{\zeta}_1))^{-1}\Delta_{2,imp,v}(h'_2, h(\tilde{\zeta}_2)).$$

Revenons maintenant à la formule (18), en se rappelant que l'on a déjà éliminé les facteurs Δ_{II} de cette formule. On obtient

$$(24)\qquad \tilde{\lambda}_z(r'_1) = \lambda^M(b_1, b_2)^{-1}\lambda^L(a_1, a_2)\prod_{v\in V} A_v,$$

où on a rétabli l'indice z pour plus de précision.

Il faut revenir au calcul du terme A_v. Il s'avère que c'est exactement le même que celui qui intervenait dans la preuve de la proposition 1.14(iii) de [II]. On peut utiliser les calculs de cette preuve. On décompose le problème en deux. Supposons d'abord que

(25) il existe une place $v \in V$ telle que $\hat{R}_v$ ne corresponde à aucun K-espace de Levi de $K\tilde{G}$.

Dans ce cas, on choisit pour $\mathcal{Z}$ le groupe

$$(26) \qquad \left(\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V) \cap \bigcap_{v \in V} Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v}}(1-\hat{\theta}) \circ \pi(Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_{F_v}})\right)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

(on note comme toujours $\pi : \hat{G}_{SC} \to \hat{G}$ l'homomorphisme naturel). Dans les constructions précédentes, on peut supposer que, pour $v \in V$, ρ_v est l'image d'un élément $\rho_{v,sc} \in Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_{F_v}}$. On rappelle que l'on a choisi un relèvement $z_{sc} \in Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. On pose $\tau_{v,sc} = z_{sc}(1-\hat{\theta})(\rho_{v,sc})^{-1}$. On voit qu'il s'agit d'un élément de $Z(\hat{L}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v}}$. L'homomorphisme

$$Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v},0} \to Z(\hat{L}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{L}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},0}$$

est surjectif. Fixons $x_v \in Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v},0}$ qui s'envoie sur l'image de $\tau_{v,sc}$ dans le groupe de droite. Rappelons qu'au groupe G est associé un élément de $H^1(F; G_{AD})$: la classe du cocycle $\sigma \mapsto u_{\mathcal{E}}(\sigma)_{ad}$ pour une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ quelconque. On la note u_G. Pour tout $v \in V$, le groupe $H^1(F; G_{AD})$ s'envoie dans son analogue $H^1(F_v; G_{AD})$. On note $u_{G,v}$ l'image de u_G. Pour tout $v \in V$, on a un produit naturel sur

$$H^1(F_v; G_{AD}) \times Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v},0}.$$

A partir de l'égalité (24), les calculs de [II] prouvent que, pour z dans le groupe $\mathcal{Z}$ défini par (26), la fonction $\tilde{\lambda}_z$ est constante, de valeur

$$\prod_{v \in V} < u_{G,v}, x_v > .$$

La famille $(u_{G,v})_{v \in V}$ définit un caractère de $\prod_{v \in V} Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v},0}$, notons-le χ_G. La formule ci-dessus est l'évaluation de ce caractère χ_G au point $(x_v)_{v \in V}$. On a effectué divers choix pour définir les x_v. La formule montre que ces choix n'affectent la famille $(x_v)_{v \in V}$ qu'en la multipliant par un élément du noyau de χ_G. On a donc une application

$$\mathcal{Z} \to \left(\prod_{v \in V} Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v},0}\right)/Ker(\chi_G),$$

qui est clairement un homomorphisme. Pour obtenir (17), il suffit de prouver que cet homomorphisme est non trivial. L'hypothèse (25) et le lemme [I] 3.5 (qui reprend le lemme 2.1 de [8]) entraînent que le sous-groupe

$$\prod_{v \in V}(Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v}} \cap Z(\hat{R}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},0})/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v},0} \subset \prod_{v \in V} Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v},0}$$

n'est pas contenu dans $Ker(\chi_G)$.

Il suffit de prouver que tout élément de ce sous-groupe peut être choisi comme famille $(x_v)_{v \in V}$ associée à un élément de $\mathcal{Z}$. Soit donc pour tout $v \in V$ un élément $x_v \in Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{F_v}} \cap Z(\hat{R}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},0}$. Grâce à l'égalité

$$Z(\hat{R}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},0} = Z(\hat{R}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},0},$$

on peut écrire $x_v = y_v(1-\hat{\theta})(\rho_{v,sc})^{-1}$, avec $y_v \in Z(\hat{R}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}$ et $\rho_{v,sc} \in Z(\hat{R}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},0}$. Notons $\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)_{sc}$ l'image réciproque de $\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)$ dans $\hat{G}_{SC}$ et $\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)^0_{sc}$ sa composante neutre. Puisque $\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V) \subset Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, on a $\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)^0_{sc} \subset Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. On définit un homomorphisme

$$(27) \qquad \mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)^0_{sc} \times \prod_{v\in V} Z(\hat{L}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0} \to \prod_{v\in V} Z(\hat{R}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}.$$

Sur $\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)^0_{sc}$, c'est le plongement diagonal. Sur chaque $Z(\hat{L}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}$, c'est le plongement naturel $Z(\hat{L}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0} \to Z(\hat{R}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}$. La surjectivité de $\hat{D}$ entraîne que l'homomorphisme ainsi défini est surjectif. On peut donc choisir $z_{sc} \in \mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)^0_{sc} \subset Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$ et, pour tout $v \in V$, un élément $\tau'_{v,sc} \in Z(\hat{L}_{v,sc})^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}$ de sorte que $y_v = z_{sc}(\tau'_{v,sc})^{-1}$. Pour tout $v \in V$, on pose $\tau_{v,sc} = x_v\tau'_{v,sc}$. On a alors $z_{sc} = \tau_{v,sc}(1-\hat{\theta})(\rho_{v,sc})$. On voit que l'élément $z = \pi(z_{sc})$ appartient à $\mathcal{Z}$ et que, pour cet élément, on peut choisir la famille $(x_v)_{v\in V}$ comme famille associée. Cela achève la preuve sous l'hypothèse (25).

Supposons maintenant que pour tout $v \in V$, le Levi $\hat{R}_v$ est associé à un K-espace de Levi de $\tilde{G}$ (sur F_v). On fixe un tel espace $K\tilde{R}_v$. On introduit le groupe $R_{v,0}$ quasi-déployé sur F_v et dual de $\hat{R}_v^{\hat{\theta},0}$. Il lui est associé un espace $\tilde{R}_{v,0}$. D'après [I] 1.12, on a des homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} KR_{v,ab}(F_v) & & \\ & N^{R_v} \searrow & \\ & & R_{v,0,ab}(F_v) \\ & N^{R'_v,R_v} \nearrow & \\ R'_{v,ab}(F_v) & & \end{array}$$

et des applications compatibles

$$\begin{array}{ccc} K\tilde{R}_{v,ab}(F_v) & & \\ & N^{\tilde{R}_v} \searrow & \\ & & \tilde{R}_{v,0,ab}(F_v) \\ & N^{\tilde{R}'_v,\tilde{R}_v} \nearrow & \\ \tilde{R}'_{v,ab}(F_v) & & \end{array}$$

Tout élément $\rho_v \in Z(\hat{R}_v)_*$ définit un caractère χ_{ρ_v} de $R_{v,0,ab}(F_v)/N^{R_v}(KR_{v,ab}(F_v))$: c'est le caractère associé au cocycle $w \mapsto w_G(\rho_v)\rho_v^{-1}$ de W_{F_v} dans $Z(\hat{R}_{v,0})$. L'application $\rho_v \mapsto \chi_{\rho_v}$ se quotiente en une surjection

$$Z(\hat{R}_v)_*/(Z(\hat{R}_v)\cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v}} \to (R_{v,0,ab}(F_v)/N^{R_v}(KR_{v,ab}(F_v)))^\vee,$$

l'exposant $^\vee$ désignant le groupe des caractères. On note $\tilde{\chi}_{\rho_v}$ la fonction sur $\tilde{R}_{v,0,ab}(F_v)$ qui se transforme selon le caractère χ_{ρ_v} et qui vaut 1 sur l'image de $N^{\tilde{R}_v}$.

On choisit pour $\mathcal{Z}$ le groupe

$$\left(\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V) \cap \bigcap_{v\in V} Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v}}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R}_v)_*)\right)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

tout entier. Comme précédemment, pour $z \in \mathcal{Z}$ et $v \in V$, on écrit $z = \tau_v(1-\hat{\theta})(\rho_v)$, avec $\tau_v \in Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v}}$ et $\rho_v \in Z(\hat{R}_v)_*$. A partir de (24), le calcul de [II] conduit cette fois au résultat suivant : on a l'égalité

$$\tilde{\lambda}_z(r'_1) = \prod_{v\in V} \tilde{\chi}_{\rho_v}(N^{\tilde{R}'_v,\tilde{R}_v}(r'_v)),$$

où on a écrit $r'=(r'_v)_{v\in V}$ l'image de r'_1 dans $\prod_{v\in V}\tilde{R}'_v(F_v)$. Ici encore, le résultat montre que le membre de droite ne dépend que de z et pas des choix des ρ_v. On peut donc écrire

$$(28)\qquad \sum_{z\in\mathcal{Z}}\tilde{\lambda}_z(r'_1)=\sum_{(\rho_v)_{v\in V}\in J}\prod_{v\in V}\tilde{\chi}_{\rho_v}(N^{\tilde{R}'_v,\tilde{R}_v}(r'_v)),$$

où J est le sous-groupe de

$$(29)\qquad \prod_{v\in V}Z(\hat{R}_v)_*/(Z(\hat{R}_v)\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v}}$$

formé des images naturelles des familles $(\rho_v)_{v\in V}$ que l'on peut associer comme ci-dessus à un élément $z\in\mathcal{Z}$. On se rappelle la propriété (2) : pour tout $v\in V$, l'élément ϵ_v appartient à un sous-tore tordu elliptique de $\tilde{R}'_v$. Il y a donc pour tout $v\in V$ des éléments elliptiques réguliers dans $\tilde{R}'_v(F_v)$ qui sont aussi voisins qu'on le veut de ϵ_v. Mais, puisque $\mathbf{M}'$ n'est pas relevante, il y a a fortiori au moins une place $v\in V$ où $\tilde{R}'_v$ n'est pas relevant. La proposition [I] 1.14 implique alors que, pour cette place v, on a $N^{\tilde{R}'_v,\tilde{R}_v}(\epsilon_v)\not\in N^{\tilde{R}_v}(K\tilde{R}_{v,ab}(F_v))$. Pour prouver (16), il suffit de prouver que le membre de droite de (28) est nul pour r' assez voisin de ϵ. D'après la propriété que l'on vient de voir de cet élément, il suffit que J soit égal au groupe (29) tout entier. Soit donc $(\rho_v)_{v\in V}\in\prod_{v\in V}Z(\hat{R}_v)_*$. Pour tout $v\in V$, on a

$$(1-\hat{\theta})(\rho_v)\in Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v}}=Z(\hat{G})^{\Gamma_{F_v}}Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v},0}=Z(\hat{G})^{\Gamma_{F_v}}Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v},0}).$$

Quitte à multiplier ρ_v par un élément de $Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v},0}$, ce qui ne change pas l'image dans (29) de la famille $(\rho_v)_{v\in V}$, on peut supposer $(1-\hat{\theta})(\rho_v)=\xi_vx_v$, avec $\xi_v\in Z(\hat{G})^{\Gamma_{F_v}}$ et $x_v\in Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}$. On a un homomorphisme

$$\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)^0\times\prod_{v\in V}Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}\to\prod_{v\in V}Z(\hat{R}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}$$

similaire à (27), qui est surjectif car $\hat{D}$ l'est. On peut donc trouver $z\in\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{R}}_V)^0$ et, pour tout $v\in V$, un élément $\tau'_v\in Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v},\hat{\theta},0}$, de sorte que $z\tau'_v=x_v$. Posons $\tau_v=(\xi_v\tau'_v)^{-1}$. C'est un élément de $Z(\hat{L}_v)^{\Gamma_{F_v}}$ et on a $z=\tau_v(1-\hat{\theta})(\rho_v)$. On voit alors que z appartient à $\mathcal{Z}$ et que $(\rho_v)_{v\in V}$ est une famille associée à z comme plus haut. Cela achève cette brève démonstration. □

Remarques. (30) Les complications du début de la preuve, à savoir le passage par les propositions auxiliaires 6.7 et 6.8, sont dues aux places archimédiennes. Cela parce que, sur un corps de base F_v archimédien, on n'a pas défini les intégrales orbitales pondérées stables $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ pour tout $\boldsymbol{\delta}\in D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F_v))\otimes Mes(M(F_v))^*$. Cela nous oblige à des contorsions pour assurer que les distributions $\mathbf{d}_v$ de la démonstration ci-dessus sont dans le domaine de définition de ces intégrales orbitales pondérées stables. Si on remplace ces intégrales par leurs avatars spectraux, cette difficulté disparaît et une même démonstration s'applique tout en se simplifiant.

(31) Si on oublie cette difficulté aux places archimédiennes, on voit que l'on démontre en fait un résultat plus fin que la proposition 6.6, qui est le suivant. Ecrivons $\boldsymbol{\delta}=(\boldsymbol{\delta}_v)_{v\in V}$ et supposons que, pour tout $v\in V$, $\boldsymbol{\delta}_v$ soit induite à partir d'un espace de Levi $\tilde{R}'_v$ de $\tilde{M}'_v$. Supposons qu'il existe v tel que $\tilde{R}'_v$ ne corresponde à aucun K-espace de Levi de $K\tilde{G}_v$ ou qu'il existe un tel K-espace de Levi mais que $\tilde{R}'_v$ ne soit pas relevant. Alors $I_*^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=0$.

6.11 Le théorème 5.10

Dans ce paragraphe, on suppose démontrés les théorèmes [II] 1.16, [V] 1.10 et 5.2 et 5.4 ci-dessus. On va alors prouver le théorème 5.10. Notons

$$X = \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)} i(\tilde{G}, \tilde{G}') S^{\mathbf{G}'}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'})$$

le membre de droite de l'égalité de ce théorème. Développons X en appliquant les définitions. On obtient

$$X = \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)} i(\tilde{G}, \tilde{G}') \sum_{\tilde{M}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}'_0)} |W^{M'}||W^{G'}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}' \in \tilde{M}'_{ss}(F_V)/st-conj} S^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V), \mathbf{f}^{\mathbf{G}'}).$$

Le terme $\mathbf{M}'$ est le triplet $(M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ associé naturellement aux données $\mathbf{G}'$ et à l'espace de Levi $\tilde{M}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}'_0)$. Notons que $\tilde{M}'(F) \neq \emptyset$ pour tous les $\tilde{M}'$ intervenant. Le lemme 5.3 nous autorise à remplacer les termes $S^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V), \mathbf{f}^{\mathbf{G}'})$ par leurs variantes $S^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V), B^{\tilde{G}}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'})$. Il n'est pas difficile d'adapter la proposition 6.5 à nos présentes notations. Elle entraîne que l'on peut récrire cette somme sous la forme

$$X = \sum_{\hat{M}} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}_*(\tilde{M}, \mathbf{a}_M, V)} i(\tilde{M}, \tilde{M}') \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{\mathcal{O}' \in \tilde{M}'_{ss}(F_V)/st-conj} S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', B, V), B^{\tilde{G}}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Ici, $\hat{M}$ parcourt les Levi de $\hat{G}$ contenant $\hat{M}_0$ qui sont des composantes de Levi de sous-groupes paraboliques invariants par $\hat{\theta}$ et par Γ_F. Un tel Levi ne correspond pas toujours à un K-espace de Levi $K\tilde{M}$ de $K\tilde{G}$ mais on peut lui associer divers objets que, par anticipation, nous notons comme si un tel K-espace existait. Par exemple $W^{\tilde{M}}$ est le sous-groupe des éléments invariants par $\hat{\theta}$ et Γ_F dans $Norm_{\hat{G}}(\hat{M})/\hat{M}$. Si $K\tilde{M}$ existe, l'ensemble $\mathcal{E}_*(\tilde{M}, \mathbf{a}_M, V)$ est celui des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques $(M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ de $(KM, K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$ qui sont non ramifiées hors de V et telles que $\tilde{M}'(F) \neq \emptyset$. La définition de ces notions ne faisant intervenir que le groupe $\hat{M}$, la définition s'étend au cas où $K\tilde{M}$ n'existe pas. L'indice $*$ signifie que l'on n'impose pas que la donnée soit relevante, contrairement à nos ensembles habituels $\mathcal{E}(\tilde{M}, \mathbf{a}_M, V)$. Avec la définition de 6.6, on obtient

$$X = \sum_{\hat{M}} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}_*(\tilde{M}, \mathbf{a}_M, V)} i(\tilde{M}, \tilde{M}') \sum_{\mathcal{O}' \in \tilde{M}'_{ss}(F_V)/st-conj} I^{K\tilde{G}, \mathcal{E}}_*(\mathbf{M}', SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V), \mathbf{f}).$$

La proposition 6.6 nous dit que, pour que le terme que l'on somme soit non nul, il faut que $\hat{M}$ corresponde à un K-espace de Levi $K\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et que $\mathbf{M}'$ soit relevant pour $(KM, K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$. Cela permet de récrire

$$X = \sum_{K\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M}, \mathbf{a}_M, V)} i(\tilde{M}, \tilde{M}')$$

$$\sum_{\mathcal{O}' \in \tilde{M}'_{ss}(F_V)/st-conj} I^{K\tilde{G}, \mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V), \mathbf{f}).$$

Les hypothèses de la proposition 4.6 sont vérifiées. Cela nous permet de remplacer les termes $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V), \mathbf{f})$ par $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(transfert(SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V)), \mathbf{f})$. On peut maintenant se limiter aux classes de conjugaison stable $\mathcal{O}'$ qui correspondent à une telle classe dans le K-espace de Levi correspondant $K\tilde{M}(F_V)$: pour les autres, $transfert(SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V)) = 0$. On peut regrouper ces classes selon la classe qui leur correspond dans $K\tilde{M}(F_V)$. On obtient

$$X = \sum_{K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in K\tilde{M}_{ss}(F_V)/st-conj} \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M}, \mathbf{a}_M, V)} i(\tilde{M}, \tilde{M}')$$

$$\sum_{\mathcal{O}' \in \tilde{M}'_{ss}(F_V)/st-conj; \mathcal{O}' \mapsto \mathcal{O}} I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(transfert(SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V)), \mathbf{f}),$$

où $\mathcal{O}' \mapsto \mathcal{O}$ désigne la correspondance entre classes de conjugaison stable. Pour tous $K\tilde{M}$ et $\mathcal{O}$ intervenant ci-dessus, on a l'égalité

$$\sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M}, \mathbf{a}_M, V)} i(\tilde{M}, \tilde{M}') \sum_{\mathcal{O}' \in \tilde{M}'_{ss}(F_V)/st-conj; \mathcal{O}' \mapsto \mathcal{O}} transfert(SA^{\mathbf{M}'}(\mathcal{O}', V))$$

$$= A^{K\tilde{M},\mathcal{E}}(\mathcal{O}, V, \mathbf{a})$$

d'après la définition de 5.4. C'est encore égal à $A^{K\tilde{M}}(\mathcal{O}, V, \omega)$ d'après le théorème 5.4. Les hypothèses de la proposition 4.6 sont vérifiées et on obtient

$$X = \sum_{K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \tilde{M}_{ss}(F_V)/st-conj} I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(A^{K\tilde{M}}(\mathcal{O}, V, \omega), \mathbf{f}).$$

Ceci n'est autre que $I_{géom}^{K\tilde{G}}(\mathbf{f}, \omega)$, cf. 2.9. Cela prouve le théorème 5.10.

Références

[1] J. Arthur : *A stable trace formula I. General expansions*, JIMJ 1 (2002), p. 175-277

[2] J. Arthur : *The invariant trace formula I. Local theory*, J. AMS 1 (1988), p. 323-383

[3] ———- : *The invariant trace formula II. Global theory*, J. AMS 1 (1988), p. 501-554

[4] J. Arthur : *Canonical normalization of weighted characters and a transfer conjecture*, C. R. Math. Acad. Sci. Canada 20 (1998), p. 35-52

[5] ——— : *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 56 (1988), p. 223-293

[6] ——— : *On a family of distributions obtained from Eisenstein series II : explicit formulas*, Amer. J. of Math. 104 (1982), p. 1289-1336

[7] J. Arthur : *A measure on the unipotent variety*, Can. J. Math. 37 (1985), p. 1237-1274

[8] ——— : *On the transfer of distributions : weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 99 (1999), p.209-283

[9] ——— : *The trace formula in invariant form*, Annals of Math. 114 (1981), p. 1-74

[10] J. Arthur : *On a family of distributions obtained from orbits*, Can. J. Math. 38 (1986), p. 179-214

[11] ——— : *Endoscopic L-functions and a combinatorial identity*, Can. J. of Math. 51 (1999), p. 1135-1148

[12] A. Ferrari : *Théorème de l'indice et formule des traces*, manuscripta math. 124 (2007), p. 363-390

[13] R. Kottwitz : *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. 49 (1982), p. 785-806

[14] ———— : *Stable trace formula : cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. 51 (1984), p. 611-650

[15] ———— : *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Annalen 275 (1986), p. 365-399

[16] ———, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[17] ————————- : *On splitting invariants and sign conventions in endoscopic transfer*, prépublication 2012

[18] J.-P. Labesse : *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque 257 (1999)

[19] ————, J.-L. Waldspurger : *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar*, prépublication 2012

[20] R. P. Langlands : *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Can. J. of Math 31 (1979), p. 700-725

[21] J.-L. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, Journal für die reine u. ang. Math. 327 (1981), p.12-80

[22] J. Tate : *Number theoretic background*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, A. Borel et W. Casselman ed., Proc. of Symp. in Pure Math. XXXIII, part 2, AMS 1979

[23] J.-L. Waldspurger : *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012

[24] —————— : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Memoirs AMS 908 (2008)

[I] —————— : *Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local*, prépublication 2014

[II] ——————- : *Stabilisation de la formule des traces tordue II : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; définitions et énoncés des résultats*, prépublication 2012

[III] —————— : *Stabilisation de la formule des traces tordue III : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; réductions et preuves*, prépublication 2014

[IV]—————— : *Stabilisation de la formule des traces tordue IV : transfert spectral archimédien*, prépublication 2014

[V]—————— : *Stabilisation de la formule des traces tordue V : intégrales orbitales et endoscopie sur le corps réel*, prépublication 2014

Institut de Mathématiques de Jussieu -CNRS
2 place Jussieu, 75005 Paris
e-mail : colette.moeglin@imj-prg.fr, jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr