# Stabilisation de la formule des traces tordue X: stabilisation spectrale

Colette Moeglin et Jean-Loup Waldspurger
CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu

## 1 Introduction

Le but de cette partie est de finir la stabilisation de la formule des traces tordues.

La méthode est très voisine de celle de [11]. Le principe même de cette méthode due à Langlands et Arthur, est de mener de front des réductions pour l'expression géométrique et l'expression spectrale de cette stabilisation,

$$I^{\tilde{G}}(\omega, f) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI^{\mathbf{G}'}(f^{\mathbf{G}'}), \tag{1}$$

où les notations sont expliquées dans le texte mais sont à peu près standard, en fait, pour être correct, il faut fixer un ensemble fini de places $V$ suffisamment grand (la condition précise est que $V$ contient l'ensemble $V_{ram}$ défini en [21] 1.1) et ne considérer que les fonctions $f$ qui hors de $V$ sont les fonctions caractéristiques d'un espace compact hyperspecial ; ce n'est qu'avec ce choix de $V$ que les distributions (vues uniquement pour les places dans $V$) sont invariantes pour le côté gauche et stables pour le côté droit. Dans ce cas seules les données endoscopiques elliptiques non ramifiées hors de $V$ interviennent dans le membre de droite et il n'y a qu'un nombre fini de telles données endoscopiques.

Très schématiquement, la réduction spectrale montre que (1) est une distribution qui s'exprime avec des caractères de représentations (ce serait même une somme discrète de traces de représentations si le sous-groupe du centre de $G$ invariant sous $\tilde{G}$ était un groupe algébrique compact) ; la réduction géométrique avec d'autres résultats montre, elle, qu'en fait (1) n'est pas du tout une distribution discrète si elle n'est pas nulle. Cette incompatibilité prouve la nullité cherchée.

Ce qui est intéressant est la traduction de (1) en une égalité de transfert spectral qui ne fait intervenir que la partie discrète du côté spectral de la formule des traces ; ce résultat fait partie de la démonstration et se raffine de la façon suivante. En toute place archimédienne, on fixe un caractère infinitésimal et on note le produit de ces caractères infinitésimaux, $\nu$. On fixe aussi $V$ un ensemble fini de places suffisamment grand (précisément $V$ doit contenir $V_{ram}$ comme ci-dessus) et pour toute place $v$ hors de $V$, on fixe un caractère de l'algèbre de Hecke sphérique de $G(F_v)$, $c_v$. On note $c^V$ le produit de ces caractères pour toutes les places $v$ non dans $V$. On note alors $\pi_\nu^{\tilde{G}}[c^V]$ la somme des $\omega$ représentations de $\tilde{G}$ intervenant dans la partie discrète du côté spectral de la formule des traces (on ne voit évidemment que la trace tordue de ces représentations), qui ont $\nu$ comme caractère infinitésimal et $c^V$ comme action de l'algèbre de Hecke sphérique hors de $V$. Alors on considère l'ensemble des fonctions $f$ qui en une place $v$ finie ont une composante cuspidale nulle (au sens de la décomposition de Paley-Wiener) et pour ces fonctions on montre le transfert :

$$tr\, \pi_\nu^{\tilde{G}}[c^V](f) = \sum_{\mathbf{G'}} i(\tilde{G}, \mathbf{G'}) tr \pi_{\nu,st}^{G'}[c^V](f^{\mathbf{G'}}), \tag{2}$$

où $\mathbf{G'}$ parcourt l'ensemble des données endoscopiques elliptiques et non ramifiées hors de $V$ de $\tilde{G}, \omega$ et où

$$\pi_{\nu,st}^{G'}[c^V] = \sum_{\nu', c^{V,G'}} \pi_{\nu',st}^{G'}[c^{V,G'}]$$

la somme portant sur les caractères infinitésimaux $\nu'$ de $G'$ se transférant en $\nu$ par la fonctorialité entre algèbres de Lie et sur les caractères des algèbres de Hecke hors de $V$ pour $G'$ se tranférant en $c^V$ pour la fonctorialité non ramifiée de Langlands (il y a une inclusion de $L$-groupes qui fixe cette fonctorialité et les facteurs de transfert de façon compatible) et $\pi_{\nu',st}^{G'}[c^{V,G'}]$ est l'analogue stable de $\pi_\nu^{\tilde{G}}[c^V]$. En d'autres termes on montre que le terme de gauche de (2) moins le transfert du terme de droite est une somme discrète de $\omega$-représentations elliptiques en toute place de $V$. Comme on a toujours le droit d'ajouter à $V$ un ensemble fini de places $V_0$ et de n'appliquer la formule qu'aux fonctions non ramifiées en les places $V_0$, on conclut facilement si les fonctions non ramifiées en une place de $V_0$ ont leur composante elliptique nulle (dans la réalisation de Paley-Wiener de cet espace) ; ceci est exactement équivalent au fait qu'il n'y ait pas de donnée endoscopique elliptique qui soit un tore non ramifié et n'est donc pas toujours vrai. On se tire de cet ennui en faisant agir le groupe adjoint de $G$ ou plutôt dans le cas tordu le groupe $(G/Z(G)^\theta)(\mathbb{A}_F)$. Ce groupe agit du côté gauche via son action sur les fonctions et on montre que cette action se décompose suivant un nombre fini de caractères automorphes non ramifiés hors de $V$ (du moins si $V$ est suffisamment grand). Il agit aussi du côté droit en fait sur les facteurs de transfert ; en [28] 2.7, il est montré que chaque donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}, \omega$ donne un caractère de $(G/Z(G)^\theta)(\mathbb{A}_F)$ dont la restriction à l'image de $G(\mathbb{A}_F)$ est le caractère $\omega$ ; on note $\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}$ ce caractère. Et l'égalité (2) se raffine en une égalité, pour tout caractère automorphe $\chi_\sharp$ de $(G/Z(G)^\theta)(\mathbb{A}_F)$ :

$$tr\, \pi_{\nu,\chi_\sharp}^{\tilde{G}}[c^V](f) = \sum_{\mathbf{G}'; \omega_\sharp^{\mathbf{G}'} = \chi_\sharp} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') tr \pi_{\nu,st}^{G'}[c^V](f^{\mathbf{G}'}). \tag{3}$$

Et c'est cette égalité plus fine que l'on démontre ; on vérifie qu'elle est vraie pour toute fonction $f = f_V 1_{\tilde{K}^V}$ si l'une des composantes $f_v$ a sa composante elliptique nulle ; c'est le raffinement de l'égalité (2). Mais pour $\chi_\sharp$ fixé, il existe une place $v$ dans $V$ où ce caractère est trivial. Le côté gauche appliqué à $f$ valant $1_{\tilde{K}_v}$ prend la même valeur qu'en la fonction où on remplace simplement la composante $1_{\tilde{K}_v}$ par la fonction

$$\gamma \in \tilde{G}(F_v) \mapsto \sum_{g_\sharp} 1_{\tilde{K}_v}(ad(g_\sharp)\gamma)\chi_\sharp^{-1}(g_\sharp),$$

où $g_\sharp$ parcourt un ensemble de représentants de $(G/Z(G)^\theta)(F_v)/G(F_v)$ (l'image dans $I(\tilde{G}(F_v), \omega)$ de cette fonction ne dépend pas de l'ensemble de représentants) ; le côté droit ne change pas quand on remplace $f_v$ par cette nouvelle fonction. On gagne car la nouvelle fonction a sa composante elliptique nulle. en la place $v$. On connaît donc l'égalité pour cette fonction ce qui permet de conclure.

Les réductions géométriques sont les plus difficiles et ont été menées dans les articles précédents. Elles ramènent le problème à deux assertions : d'une part la stabilisation des intégrales pondérées locales invariantes pour des éléments semi-simples réguliers et d'autre part une identification des coefficients pour les intégrales orbitales ordinaires mais correspondant aux éléments exceptionnels au sens de [30] 6.2 (c'est [33] 3.3, 3.4, 3.5 qui donne les réductions).

La réduction spectrale est effectuée ici et est bien plus simple (cf 5.9) ; on montre que par récurrence on sait stabiliser la partie continue de cette forme spectrale de la formule des traces et donc la formule (1) s'écrit en termes de caractères de représentations.

Admettons pour le moment le point clé, c'est-à-dire la preuve de la stabilisation locale des intégrales pondérées invariantes. Alors les réductions géométriques montrent que (1) est nulle si en une place, $v$, que l'on peut choisir arbitrairement, la fonction $f$ est nulle près des éléments exceptionnels de $\tilde{G}(F_v)$. Quand on fixe $f$ aux autres places et que l'on fait varier $f_v$ disons parmi les fonctions non ramifiées, alors (1) définit une distribution en $f_v$ qui est une combinaison linéaire des intégrales orbitales en les composantes en $v$ des éléments exceptionnels (il n'y en a qu'un nombre fini) ; or les intégrales orbitales sont des transformées de Fourier de caractères de représentations elliptiques de sous-espaces de Levi de $\tilde{G}$ ([5] généralisé en [19]) et on peut supposer que ces Levi sont propres car on a supposé $f_v$ non ramifié. En revenant à l'écriture spectrale de (1) on montre une incompatibilité entre ces deux expressions qui forcent leur nullité. Quand on fixe $f$, on peut toujours trouver $v$ tel que $f_v$ soit non ramifié et c'est ce qui fournit suffisamment de fonctions pour lesquelles on sait stabiliser la formule des traces et permet de conclure comme expliqué plus haut.

Il faut donc montrer la stabilisation locale géométrique ; la première partie de l'article relie cette stabilisation géométrique à la stabilisation de la formule des traces locales ; la stabilisation géométrique entraîne la stabilisation de la formule des traces locales, la réciproque est loin d'être claire mais c'est bien cela que l'on démontre (cf. 3.2.3 et 3.5). La stabilisation de la formule des traces locales a elle aussi une écriture géométrique et une écriture spectrale. L'écriture spectrale est simple, c'est essentiellement une combinaison linéaire de traces de représentations discrètes. Là aussi il faut montrer que l'écriture géométrique s'apparente à une distribution continue au sens que c'est une intégrale pour des espaces de Levi propres de représentations discrètes de ces Levi. On aura encore une incompatibilité entre les deux formes de la distribution qui assure sa nullité. Malheureusement la démonstration est compliquée par le fait que les hypothèses clés de 3.5 sont démontrées par voie globale en 7.7 et nécessitent donc elles aussi de jouer avec la réduction du côté spectral. De plus dans le cas tordu, il est encore plus difficile de globaliser une situation locale que dans le cas non tordu ; on utilise pour cela les travaux de Kottwitz et Rogawski ([16]) qu'il faut compléter (cf 7.6).

## Table des matières

# 2 Notations générales

Le corps de base, toujours noté $F$ sera parfois local (p-adique ou archimédien) et parfois un corps de nombres. Si $F = \mathbb{R}$ ou si $F$ est un corps de nombres, on doit travailler avec des $K$-espaces, cf. [28] 1.11 et [21] 1.16. Pour notre propos, cela ne change rien. Aussi, pour simplifier, on négligera dans la notation ce passage aux $K$-espaces que l'on notera comme des espaces -appelés aussi bitorseurs- connexes. On fixe $\tilde{G}$ un bitorseur sous un groupe algébrique $G$ ; On reprend la notation $\tilde{M}$ pour les espaces de Levi de $\tilde{G}$ et on note $\mathcal{L}(\tilde{M})$ les espaces de Levi de $\tilde{G}$ qui contiennent $\tilde{M}$ ; on renvoie à [28] pour ces notations/définitions. Pour $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, on note $M$ le sous-groupe de Levi de $G$ sous-jacent et on pose :

$$W(\tilde{M}) := Norm_{G(F)}(\tilde{M})/M(F).$$

Tout objet invariant attaché à $\tilde{M}$ sera invariant par ce groupe donc dans les formules faisant intervenir une somme sur les espaces de Levi $\tilde{M}$ pris à conjugaison près de tels objets, cette somme sera très naturellement quotientée par $|W(\tilde{M})|^{-1}$. Mais, il est en fait plus simple de sommer sur les Levi semi-standard, ce qui a l'avantage de donner des formules qui fonctionnent aussi dans certains cas où les objets attachés à $\tilde{M}$ ne sont pas invariants : c'est-à-dire on fixe un espace de Levi $\tilde{M}_0$ minimal de $\tilde{G}$ et un Levi semi-standard est un Levi qui contient $\tilde{M}_0$. Pour un tel espace de Levi, on note $\tilde{W}_M := Norm_{M(F)}(\tilde{M}_0)/M_0(F)$ et $\tilde{W}_G := Norm_{G(F)}(\tilde{M}_0)/M_0(F)$, c'est le groupe que l'on avait auparavant noté $W(\tilde{M}_0)$. Dans les formules qui font intervenir des sommes d'espaces de Levi semi-standard, le coefficient qui revient quasiment en permanence est :

$$w(\tilde{M}) := |\tilde{W}_M|/|\tilde{W}_G|.$$

Pour tout espace de Levi $\tilde{M}$, on note $A_M$ le tore déployé maximal du centre de $M$ et $A_{\tilde{M}}$ le tore dèployé maximal de $A_M$ inclus dans le centralisateur de $\tilde{M}$. Pour certaines formules, on a une somme alternée sur les espaces de Levi semi-standard, le signe est alors $(-1)^{a_{\tilde{M},\tilde{G}}}$ où

$$a_{\tilde{M},\tilde{G}} := rang\,(A_{\tilde{M}}/A_{\tilde{G}}).$$

Si $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$, les fonctions sur $\tilde{G}(F)$ que l'on considérera seront toujours supposées $K$-finies à droite et à gauche. Si $F$ est un corps de nombres, les fonctions sur $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ que l'on considérera seront toujours supposées $K$-finies à droite et à gauche aux places archimédiennes. On ne fait pas figurer cette condition dans la notation pour alléger celle-ci.

# 3 Stabilisation de la formule des traces locales tordues

Dans ce paragraphe, le corps $F$ est local. On va montrer que la stabilisation de la formule des traces locales tordues est équivalente à la stabilisation des intégrales orbitales pondérées tordues invariantes pour les éléments semi-simples réguliers, modulo des hypothèses de récurrence tout à fait naturelles, précisément sur cette stabilisation des intégrales orbitales pour des groupes "plus petits".

## 3.1 Le côté géométrique de la formule des traces locales

### 3.1.1 Rappel du côté géométrique de la formule des traces locales et de sa variante endoscopique

En [27] 6.6, la formule des traces locale invariante est définie. Le côté géométrique est, pour toute paire de fonctions $f_1, f_2 \in I(\tilde{G}, \omega)$ :

$$I_{geo}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{M}} (-1)^{a_{\tilde{M},\tilde{G}}} w(\tilde{M}) I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2),$$

où $w(\tilde{M})$ et $a_{\tilde{M},\tilde{G}}$ sont définis dans le paragraphe 2 et où

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = \int_{\tilde{M}_{ell}/\sim} i'(\gamma) I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_1, f_2)\, d\gamma,$$

où on renvoie à loc.cite pour la description de la mesure sur $\tilde{M}_{ell}/\sim$, où

$$i'(\gamma) = mes(Cent_M^0(\gamma, F)/A_{\tilde{M}}(F)) |Cent_M(\gamma, F)/Cent_M^0(\gamma, F)|^{-1},$$

et $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_1, f_2) =$

$$\sum_{\tilde{L}_i \in \mathcal{L}(\tilde{M}); i=1,2} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \overline{I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\gamma, \omega, f_{1,\tilde{L}_1})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\gamma, \omega, f_{2,\tilde{L}_2}), \qquad (S)_1$$

avec $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ vaut zéro si l'application naturelle $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ n'est pas bijective et vaut le jacobien de cette application sinon, ce qui reflète le rapport des mesures sur ces espaces indispensables pour construire des intégrales orbitales pondérées.

Pour le côté endoscopique, on précise ici quelques notations : on est dans une situation locale. Pour $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique du bitorseur $\tilde{G}$ et du caractère $\omega$, on pose $i(\tilde{G}, \mathbf{G}') :=$

$$|det_{\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}}(1-\theta)|^{-1} |\pi_0(Aut(\mathbf{G}')/\hat{G}')|^{-1}$$

$$|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})| |\pi_0(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F})|^{-1} |\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G}'))|.$$

C'est la notation $c(\tilde{G},\mathbf{G}')$ de [28] 4.17 (ce qui suit la formule (3)).

Il faut aussi définir la variante stable de la formule des traces locales pour un tel $\mathbf{G}'$. En [28] 4.17 ( formule (3)), cette formule stable est écrite pour la partie elliptique de $\mathbf{G}'$. Avec un choix de mesure complètement explicité, c'est l'intégrale sur les points elliptiques de $\mathbf{G}'$, des intégrales orbitales stables. Pour $\mathbf{M}'$ un Levi de $\mathbf{G}'$, on généralise la définition de façon immédiate en remplaçant l'intégrale sur les éléments elliptiques de $\mathbf{G}'$ par l'intégrale sur les éléments elliptiques de $\mathbf{M}'$ et en remplaçant les intégrales orbitales stables par les intégrales orbitales pondérées stables, c'est-à-dire

$$SI^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}',geo}(f'_1,f'_2)=$$
$$\int_{\tilde{M}'(F)_{ell}/st-conj} k_{M'}(\delta)^{-1} mes(A_{M'}(F)\backslash M'_\delta(F)) SI^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\delta,f'_1,f'_2)$$

où $k_{M'}(\delta)$ est le nombre de classes de conjugaison par $M'(F)$ contenues dans la classe de conjugaison stable de $\delta$ (la définition doit être adaptée dans le cas $F=\mathbb{R}$, cf. loc. cit.) et où $SI^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\delta,f'_1,f'_2)$ se calcule par la formule de scindage

$$SI^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\delta,f'_1,f'_2)=$$
$$\sum_{\mathbf{L}'_i\in\mathcal{L}(\mathbf{M}');i=1,2} e^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\mathbf{L}'_1,\mathbf{L}'_2)\overline{SI^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\delta,f'_{1,\mathbf{L}'_1})}SI^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\delta,f'_{2,\mathbf{L}'_2}) \qquad (S)_2$$

où les intégrales orbitales pondérées stables sont celles de [29] 1.10 (8) (c'est la définition standard due à Arthur généralisée au cas tordu) et où $e^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\mathbf{L}'_1,\mathbf{L}'_2)$ est défini en [29] 1.14, ce sont les constantes "universelles" qui interviennent dans des formules de scindage pour des distributions stables et que l'on rappelle même si on va utiliser (S)$_3$ ci-dessous au lieu de (S)$_2$ ;

$$e^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\mathbf{L}'_1,\mathbf{L}'_2)=d^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}'}(\mathbf{L}'_1,\mathbf{L}'_2)|(Z(\hat{L}'_1)^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{L}'_2)^{\Gamma_F})/Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}|^{-1}.$$

On a aussi $d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(L_1,L_2)=d^{G'}_{M'}(L'_1,L'_2)$ si $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}$ et si $\mathbf{L}'_i$ pour $i=1,2$ est une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{L}_i$.

Pour toute paire de fonctions $f_i$ pour $i=1,2$ sur $\tilde{G}$, et pour $\mathbf{G}',\mathbf{M}'$ comme ci-dessus, on pose :

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}',geo}(f_1,f_2)=0, \qquad (1)$$

si $\mathbf{M}'$ n'est pas une donnée endoscopique elliptique d'un espace de Levi de $\tilde{G}$ et

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}',geo}(f_1,f_2)=\sum_{\mathbf{G}'} i'_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}')SI^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}',geo}(f_1^{\mathbf{G}'},f_2^{\mathbf{G}'}), \qquad (2)$$

où la somme porte sur les données endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$ contenant $\mathbf{M'}$ et où $i'_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G'}) =$

$j(\tilde{G})^{-1}j(\tilde{M})|Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}|^{-1}|Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}|$,

avec $j(\tilde{G}) = |det_{\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}}(1-\theta)|$ et $j(\tilde{M})$ est son analogue pour $\tilde{M}$. On remarque que (2) ne dépend que de $\hat{M}$ et pas de l'espace $\tilde{M}$ et est donc défini même si $\mathbf{M'}$ n'est pas relevant pour un espace de Levi de $\tilde{G}$ (cf. [21] 6.6). Mais une preuve analogue à celle de la proposition de [21] 6.6 montre que (2) est alors nul, ce qui est compatible avec (1).

On donne tout de suite la formule de scindage suivante, pour $\mathbf{M'}$ un donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}$ et pour $\delta$ une classe de conjugaison stable d'éléments elliptiques de $M'$

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\delta,f_1,f_2) =$$
$$\sum_{\tilde{L}_i\in\mathcal{L}(\tilde{M});i=1,2} d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\overline{I^{\tilde{L}_1,\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\delta,f_{1,\tilde{L}_1})}I^{\tilde{L}_2,\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\delta,f_{2,\tilde{L}_2}). \qquad (S)_3$$

Ceci est similaire à [21] 4.5 proposition (i), où $V$ n'a que deux places.

### 3.1.2 Séparation suivant les espaces de Levi

**Proposition** *Pour toute paire de fonctions $f_i$ pour $i=1,2$ sur $\tilde{G}$, on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}_{geo}(\omega,f_1,f_2) - \sum_{\mathbf{G'}} i(\tilde{G},\mathbf{G'})SI^{\mathbf{G'}}_{geo}(f_1^{\mathbf{G'}},f_2^{\mathbf{G'}}) =$$
$$\sum_{\tilde{M}} w(\tilde{M})(-1)^{a_{\tilde{M},\tilde{G}}}\left(I^{\tilde{G}}_{\tilde{M},geo}(\omega,f_1,f_2) - \sum_{\mathbf{M'}} i(\tilde{M},\mathbf{M'})I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M'},geo}(f_1,f_2)\right) \quad (3),$$

*où $\tilde{M}$ parcourt l'ensemble des espaces de Levi de $\tilde{G}$ semi-standard et où $\mathbf{M'}$ parcourt l'ensemble des données endoscopiques elliptiques relevantes de $\tilde{M}$.*

Il y a deux étapes dans cette proposition ; la première consiste à vérifier que les sous-groupes de Levi des données endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$ qui ne sont pas relevants pour un sous-espace de Levi de $\tilde{G}$ ne contribuent pas, c'est ce que l'on a expliqué avant l'énoncé. Et la deuxième partie est purement combinatoire : on utilise [21] 6.3 pour échanger la somme sur les données endoscopiques elliptiques pour $\tilde{G}$ et celles sur d'abord les espaces de Levi $\tilde{M}$ puis les données endoscopiques elliptiques de $\tilde{M}$ ; les constantes $i(\tilde{G},\mathbf{G'})$ n'y étaient pas les mêmes mais le quotient $i(\tilde{G},\mathbf{G'})/i(\tilde{M},\mathbf{M'})$ est bien le même (les $Ker^1$ qui sont les objets globaux ne jouent pas de rôle dans cette combinatoire).

## 3.2 Stabilisation du côté géométrique de la formule des traces locales et stabilisation des intégrales orbitales pondérées

### 3.2.1

On note $d(\theta)$ le déterminant défini précisément dans ce qui précède le théorème de [28] 2.4 et qui si $\theta$ stabilise un épinglage est la valeur absolue du déterminant de $1-\theta$ dans $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}^{\theta}$ (où $T$ est le tore de l'épinglage). Cette constante va redisparaître aussi vite qu'elle est intervenue.

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\gamma \in \tilde{M}$ ; on a déjà défini $i'(\gamma)$. On note $\mathcal{X}(\gamma)$ l'ensemble des classes de conjugaison sous $M(F)$ à l'intérieur de la classe de conjugaison stable de $\gamma$ et on voit cet ensemble comme un ensemble fini de cardinal $k(\gamma)$. On note $\mathcal{X}^{\mathcal{E}}(\gamma)$ l'ensemble des couples $(\mathbf{M}', \delta')$ où $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique relevante de $\tilde{M}$ et où $\delta'$ est une classe de conjugaison stable de $M'$ qui se transfère en la classe de conjugaison stable de $\gamma$ ; on prend ces couples à conjugaison près, c'est-à-dire que le groupe des automorphismes stabilisant $\mathbf{M}'$ agit sur la classe de $\delta'$ et c'est le quotient $Out(\mathbf{M}')$ qui agit et il agit librement. Pour $\gamma$ un élément elliptique de $\tilde{M}$, on pose :

$$x(\gamma) := |Cent_M(\gamma, F)/Cent^0_M(\gamma, F)|k(\gamma)^{-1}.$$

**Lemme** *Le terme (3) dans la proposition de 3.1.2 est la somme sur les espaces de Levi $\tilde{M}$ semi-standard du produit de $w(\tilde{M})$ par l'intégrale sur les classes de conjugaison d'éléments elliptiques de $\tilde{M}$, dont un représentant est noté $\gamma$ de la fonction*

$$i'(\gamma)\Bigg(I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, f_1, f_2) - d(\theta)^{-1}x(\gamma)^2 \sum_{(\mathbf{M}',\delta')\in\mathcal{X}^{\mathcal{E}}(\gamma)} I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{M'}(\delta', f_1, f_2)\Bigg).$$

Le deuxième membre de l'égalité (3) de la section 3.1.2 est une intégrale sur les classes de conjugaison des éléments elliptiques dans $\tilde{M}$ avec une mesure (et des coefficients) écrits en [28] 4.17, où il faut généraliser de $\tilde{G}$ à tous ses espaces de Levi ; comme expliqué en loc. cite les choix de mesures sont cohérents avec ceux de [27]. Le terme indexé par $\tilde{M}$ est donc, pour $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M},geo}(\omega, f_1, f_2)$ une intégrale sur les classes de conjugaison elliptiques de $\tilde{M}$, représentées par un élément noté $\gamma$ de l'intégrale orbitale pondérée $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_1, f_2)$ affectée du coefficient $i'(\gamma)$.

Le deuxième terme intervenant est une somme sur $\mathbf{M}'$, les groupes endoscopiques elliptiques relevants de $\tilde{M}$, pris à isomorphisme près, de l'intégrale sur les classes de conjugaison stable d'éléments elliptiques de $M'$ avec un représentant noté $\delta'$, chaque terme étant affecté du produit du coefficient général $i(\tilde{M},\mathbf{M}')$ avec $k(\delta')^{-1}mes(A_{M'}(F)\backslash M'_{\delta'}(F))$ où $k(\delta')$ est le nombre de classes de conjugaison sous $M'(F)$ à l'intérieur de la classe de conjugaison stable de $\delta'$ (dans le cas où le corps de base est archimédien, c'est la classe dans le $K$-groupe qui intervient évidemment). On reprend les calculs de [28] preuve de la proposition 4.16 ; on fixe $\gamma$ un élément elliptique de $\tilde{M}$, ou plutôt sa classe de conjugaison sous $M(F)$. On peut récrire le deuxième terme en faisant une somme sur les classes de conjugaison stable d'éléments elliptiques de $\tilde{M}$ comme

$$\sum_{(\mathbf{M}',\delta)\in\mathcal{X}^{\mathcal{E}}(\gamma)} i(\tilde{M},\mathbf{M}')|Out(\mathbf{M}')|k(\delta)^{-1}mes(A_{M'}(F)\backslash M'_{\delta}(F))I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{M'}(\delta,f_1,f_2), \tag{1}$$

ce qui ressemble à [28] 4.17 (4). On peut simplifier les coefficients car il est démontré en [28] 4.17 (5), pour $(\mathbf{M}',\delta)\in\mathcal{X}^{\mathcal{E}}(\gamma)$, l'égalité : $i(\tilde{M},\mathbf{M}')=$

$$d(\theta)^{-1}|Out(\mathbf{M}')|^{-1}k(\delta)mes(A_{M'}(F)\backslash M'_{\delta}(F))^{-1}k(\gamma)^{-1}$$

$$mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash Cent_M(\gamma,F)).$$

Ainsi (1) devient

$$\sum_{(\mathbf{M}',\delta)\in\mathcal{X}^{\mathcal{E}}(\gamma)} d(\theta)^{-1}k(\gamma)x(\gamma)^{-1}i'(\gamma)I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{M'}(\delta,f_1,f_2).$$

Cela montre l'énoncé puisque dans l'énoncé on somme sur les classes de conjugaison et non comme ci-dessus sur les classes de conjugaison stable (d'où la disparition du $k(\gamma)$)

### 3.2.2

On peut encore simplifier l'énoncé du lemme précédent ; on fixe $\tilde{M}$ et $\gamma$ une classe de conjugaison d'élément elliptique de $\tilde{M}$ ; on reprend les notations précédentes en particulier $x(\gamma)$. On pose

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\gamma,f):=d(\theta)^{-1/2}x(\gamma)\sum_{(\mathbf{M}',\delta)\in\mathcal{X}^{\mathcal{E}}(\gamma)}\Delta(\delta,\gamma)^{-1}I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{M'}(\delta,f).$$

On généralise la définition à $\tilde{G}$ remplacé par un de ses sous-espaces de Levi contenant $\tilde{M}$. Pour $i=1,2$ fixons des espaces de Levi $\tilde{L}_i$ contenant $\tilde{M}$. Alors on a :

**Remarque** *$d(\theta)^{-1}x(\gamma)\sum_{(\mathbf{M}',\delta)\in\mathcal{X}^{\mathcal{E}}(\gamma)}\overline{I_{M'}^{\tilde{L}_1}(\delta,f_{1,\tilde{L}_1})}I_{M'}^{\tilde{L}_2}(\delta,f_{2,\tilde{L}_2})$*

$$=\sum_{\gamma'}\overline{I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1,\mathcal{E}}(\gamma',f_{1,\tilde{L}_1})}I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2,\mathcal{E}}(\gamma',f_{2,\tilde{L}_2}),$$

*où la somme porte sur les classes de conjugaison $\gamma'$ stablement conjuguées de $\gamma$.*

C'est simplement la formule d'inversion des facteurs de transfert.

**Corollaire** *Avec les notations précédentes et $\gamma'$ parcourant le même ensemble que ci-dessus,*

$$\left(\sum_{\gamma'}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_1,f_2)-\sum_{(\mathbf{M}',\delta)\in\mathcal{X}^{\mathcal{E}}(\gamma)}d(\theta)^{-1}x(\gamma)^2I_{M'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\delta,f_1,f_2)\right)=$$

$$\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$$

$$\sum_{\gamma'}\left(\overline{I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\gamma,f_{1,\tilde{L}_1})}I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\gamma,f_{2,\tilde{L}_2})-\overline{I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1,\mathcal{E}}(\gamma,f_{1,\tilde{L}_1})}I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2,\mathcal{E}}(\gamma,f_{2,\tilde{L}_2})\right),$$

*où la somme porte sur les couples d'espaces de Levi de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{M}$.*

Chacun des termes de la première égalité vérifie une formule de scindage (cf 3.1.1 $(S)_1$ et $(S)_3$). Pour $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, on scinde en sommant sur les couples d'espaces de Levi contenant $\tilde{M}$ comme dans l'énoncé. Pour $I_{M'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}$, il s'agit des couples de Levi $L'_1,L'_2$ contenant $M'$ et inclus dans un groupe endoscopique elliptique $G'$ de $\tilde{G}$. Dans ce dernier cas, on note évidemment $\tilde{L}_1,\tilde{L}_2$ les espaces de Levi de $\tilde{G}$ ; ainsi, pour $i=1,2$, $L'_i$ et $\mathbf{M}'$ définissent une donnée endoscopique elliptique pour $\tilde{L}_i$. Et il résulte alors de la définition même donnée en loc.cite que $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)=d_{M'}^{G'}(L'_1,L'_2)$. Le corollaire résulte alors de la remarque précédente.

### 3.2.3 Réduction pour la stabilisation géométrique

**Hypothèse de récurrence locale géométrique :** on suppose que l'on connaît l'égalité $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,f)=I_{\tilde{M}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\gamma,f)$ pour tout espace de Levi propre $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et pour tout espace de Levi propre $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{M}$.

On remarque que l'on a de toute façon cette égalité si $\tilde{M}=\tilde{L}=\tilde{G}$ ce qui permet de commencer la récurrence quand $\tilde{L}$ n'a pas de Levi propre.

**Proposition** *Avec les hypothèses faites, pour toute paire de fonctions $f_i$ pour $i = 1, 2$ sur $\tilde{G}$, on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}_{geo}(\omega, f_1, f_2) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI^{\mathbf{G}'}_{geo}(f_1^{\mathbf{G}'}, f_2^{\mathbf{G}'}) =$$

$$\sum_{\tilde{M}} w(\tilde{M})^{-1}(-1)^{a_{\tilde{M},\tilde{G}}} \int_{\tilde{M}_{ell}/\sim} i'(\gamma)$$

$$\overline{\left(I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_1) - I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\gamma, f_1)\right)} I^{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_{2,\tilde{M}}) +$$

$$\overline{I^{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_{1,\tilde{M}})} \left(I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_2) - I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\gamma, f_2)\right)$$

C'est un corollaire des paragraphes précédents.

## 3.3 Le côté spectral de la formule des traces locales et sa stabilisation

### 3.3.1 Rappel des notations

On note $Rat(G(F))$ le groupe des caractères rationnels $Hom_{alg}(G(F), F^*)$ ; c'est un $\mathbb{Z}$-module et on pose $\mathcal{A}^*_{G,\mathbb{C}} := Rat(G(F)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. On a ainsi défini un espace vectoriel avec une structure réelle ; $\tilde{G}(F)$ opère sur cet espace vectoriel de façon semi-simple et on note $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ le sous-espace vectoriel des éléments invariants pour cette action ; ce sous-espace vectoriel a aussi une structure réelle et il existe une application injective, $\tilde{G}(F)$ invariante de $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{A}^*_{G,\mathbb{C}}$. Les éléments de $\mathcal{A}^*_{G,\mathbb{C}}$ s'identifient à des caractères continus à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ de $G(F)$ par l'application

$$\forall g \in G(F), (\chi \otimes c)(g) = |\chi(g)|^c.$$

On notera $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ la partie imaginaire de $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, c'est-à-dire $Rat(G(F)) \otimes_{\mathbb{Z}} i\mathbb{R}$.

Par les définitions ci-dessus, on a une application (c'est l'application usuelle) $H_G$ de $G(F)$ dans l'espace vectoriel dual de $\mathcal{A}^*_G$ et qui, par projection donne une application $H_{\tilde{G}}$ dans l'espace vectoriel dual de $\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ ; on note $\mathcal{A}_G$ et $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ les espaces vectoriels duaux. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ qui envoient dans $2\pi i\mathbb{Z}$ l'image de $H_{\tilde{G}}$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ ; $\mathcal{L}$ est trivial si $F$ est un corps archimédien et est un réseau de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ si $F$ est $p$-adique. Dans la suite, on note $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ le quotient de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ par ce réseau (trivial si $F$ est un corps archimédien).

On veut faire opérer $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ sur toute $\omega$-représentation de $\tilde{G}$ ; on ne peut pas le faire canoniquement mais dès que l'on fixe $\tilde{g}_0 \in \tilde{G}(F)$, on pose pour tout élément $g\tilde{g}_0 \in \tilde{G}(F)$, $H_{\tilde{G}}(g\tilde{g}_0) = H_{\tilde{G}}(g)$ et en composant avec $H_{\tilde{G}}$, tout élément de $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ s'identifie en une fonction sur $\tilde{G}(F)$. La mutiplication d'une $\omega$-représentation par une telle fonction est encore une $\omega$-représentation.

On a ainsi défini une action de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ sur l'ensemble des $\omega$-représentations.

On généralise toutes ces notations aux sous-espaces de Levi, $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ en remplaçant l'indice $G$ par un indice $M$.

La partie spectrale de la formule des traces locales est écrite en [27] 3.25, 3.26 et 6.6, pour toute fonction $f_1, f_2 \in I(\tilde{G})$

$$I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f_1, f_2) = \sum_\tau \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} d\lambda \iota(\tau)|Stab_{W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}}(\tau)|^{-1}\overline{\tau_\lambda(f_1)}\tau_\lambda(f_2),$$

où $\tau$ parcourt un système de représentants de l'action de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ agissant par tensorisation sur l'ensemble des $\omega$-représentations discrètes de $\tilde{G}$ ; $\iota(\tau)$ est défini en [27] à la fin de 2.11 et le stabilisateur à la fin de [27] 2.9 et leurs valeurs explicites n'ont guère d'importance pour nous ici.

### 3.3.2 Une remarque sur les mesures

Le côté spectral de la formule des traces locale pour $\tilde{G}$ fait intervenir des intégrales sur les espaces $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ de $\omega$-représentations de $\tilde{G}$. Tous les termes ont un coefficient qui tient compte du stabilisateur de la représentation sous $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ ce groupe agissant par tensorisation.

Dans le cas des corps $p$-adiques, on peut donc modifier l'espace d'intégration en intégrant sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}/\mathcal{L}'$ où $\mathcal{L}'$ est un sous-réseau inclus dans le réseau $\mathcal{L}$ décrit ci-dessus. Cela modifiera le coefficient calculant le stabilisateur et ne modifiera pas l'intégrale.

C'est une remarque à faire car on va comparer le côté spectral de la formule des traces pour $\tilde{G}$ à celle de ses données endoscopiques elliptiques ; notant $\mathbf{G}'$ une telle donnée. L'éllipticité assure que $\mathcal{A}_{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{G'}$ mais n'assure évidemment pas que $i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}$ soit égal à son analogue pour $G'$, $i\mathcal{A}_{G',F}$ si le corps de base est p-adique.Et la remarque précédente montre que l'on peut quand même intégrer sur le même espace pour $\tilde{G}$ et pour ses données endoscopiques elliptiques à condition de prendre les stabilisateurs dans l'espace sur lequel on intégre.

### 3.3.3 Définition du côté spectral stable de la formule des traces locales, préliminaires

Ici on suppose que $\tilde{G}$ est un bi-torseur sous un groupe $G$ quasi-déployé, qu'il est à torsion intérieure et que $\omega$ est trivial. Il faut définir $SI^{\tilde{G}}_{spec}$. Par tensorisation $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ opère dans l'ensemble des caractères unitaires de $A_{\tilde{G}}(F)$ et on fixe un ensemble, $\mathcal{X}$, de représentants pour ces orbites. Pour chacun de ces caractères, $\chi$, on fixe une base des représentations tempérées et stables de $\tilde{G}$ se transformant sous $A_{\tilde{G}}(F)$ par ce caractère $\chi$ et on note $\mathcal{B}_\chi$ cette base. On impose en plus à cette base d'avoir la propriété d'orthogonalité suivante : on considère le produit scalaire elliptique défini pour les représentations elliptiques. On commence d'abord par choisir une base des représentations elliptiques stables orthogonale pour ce produit scalaire, ceci est possible grâce à [28] 4.17 qui montre la compatibilité de ce produit scalaire avec le transfert des fonctions cuspidales. Ensuite on utilise le fait que la décomposition d'une représentation tempérée stable en induites de représentations elliptiques (modulo le centre) ne fait intervenir que des induites de représentations elliptiques stables. En tensorisant par des éléments de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ on obtient alors une base pour les représentations elliptiques stables sans hypothèse sur le caractère de $A_{\tilde{G}}(F)$. On fait la même construction pour les espaces de Levi de $\tilde{G}$ et en induisant on a ainsi une base des représentations tempérées stables grâce aux propriétés des décompositions des représentations tempérées stables en combinaison linéaires d'induites de représentations elliptiques nécessairement stables (cf. le paragraphe 3 de [18] et [31] 3.2).

**Remarque :** Fixons un ensemble fini de couples $(\tilde{M}, \chi_M)$ formés d'un espace de Levi de $\tilde{G}$ et d'un élément de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$. Fixons aussi un $K$-type. Alors il n'existe qu'un nombre fini de représentations tempérées irréductibles admettant un vecteur invariant sous ce $K$-type et qui soient un sous-module d'une combinaison linéaire d'induites de représentations elliptiques à partir de données $\tilde{M}, \sigma$ où en notant $\chi_\sigma$ le caractère de $\sigma$ restreint à $A_{\tilde{M}}(F)$, les couples $(\tilde{M}, \chi_\sigma)$ soient dans l'ensemble fixé.

Cette propriété de finitude est une généralisation simple d'un résultat analogue pour les séries discrètes dû à Harish-Chandra : en effet le résultat d'Harish-Chandra se généralise aux représentations elliptiques (cf. [19] paragraphe 6) et donc aux sous-modules des induites comme dans l'énoncé.

On fixe $\chi$ et on considère un ensemble de nombres complexes $b_{\phi,\phi'}$ indexés par les couples $\phi, \phi'$ d'éléments de $\mathcal{B}_\chi$ ; on dit qu'un tel système est centralement fini si il existe un nombre fini de couples $\tilde{M}, \chi_M$ tel que $b(\phi, \phi') = 0$ sauf éventuellement si $\phi$ et $\phi'$ ont une composante sous-quotient d'une induite d'une représentation elliptique de l'un des $\tilde{M}$ avec comme restriction à $A_{\tilde{M}}(F)$ le caractère $\chi_M$.

Il résulte de la remarque que, pour un tel ensemble de nombres complexes, et pour toute paire de fonctions $f_1, f_2$ sur $\tilde{G}$, la somme

$$\sum_\chi \sum_{\phi,\phi' \in \mathcal{B}_\chi} b(\phi, \phi') tr\, \phi(f_1) \overline{tr\, \phi'(f_2)} \tag{1}$$

est finie. Elle définit alors une distribution stable.

#### 3.3.4 Quelques propriétés de finitude

Le lecteur est en droit de se demander pourquoi ces définitions techniques. C'est à cause de problème de définition du côté spectral de la formule des traces locales, on ne veut que des sommes finies et c'est justifié par le lemme suivant :

**Lemme** *Soit $\chi$ un élément de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$. Alors il existe un ensemble fini de couples $(\tilde{M}, \chi_M)$ comme ci-dessus tel que toute représentation discrète de $\tilde{G}$, dont le caractère se restreint en le caractère $\chi$ de $A_{\tilde{G}}(F)$, soit sous-module d'une combinaison linéaire d'induites de représentations elliptiques des sous-groupes de Levi $\tilde{M}$ en n'autorisant que l'un des caractères $\chi_M$ en restriction à $A_{\tilde{M}}(F)$.*

La démonstration repose sur la remarque suivante :

**Remarque** *Soit $\pi$ une représentation discrète associée à un triplet discret comme dans [27] 2.11. Alors il existe un unique couple $(\tilde{M}, \sigma_M)$ (unique à conjugaison près sous $G$) formé d'un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et d'une représentation elliptique $\sigma_M$ de $\tilde{M}$ tel que $\pi$ soit l'induite de $\sigma_M$.*

On prend $\tilde{M}$ minimal contenant le triplet définissant $\pi$. Comme expliqué en [27] 2.11, ce triplet pour $\tilde{M}$ correspond à une représentation elliptique $\sigma_M$ de $\tilde{M}$ et [27] 2.12 montre alors que $\pi$ est l'induite de $\sigma_M$. Et cette référence montre aussi l'unicité à conjugaison près.

La remarque entraîne le lemme. En effet si $\pi$ comme dans la remarque a pour restriction à $A_{\tilde{G}}(F)$ le caractère $\chi$, $\sigma_M$ a la même propriété. La représentation $\sigma_M$ a pour restriction à $A_{\tilde{M}}(F)$ la restriction du caractère central d'une représentation d'un sous-groupe de Levi de $G$ invariant sous un élément régulier du groupe de Weyl de ce sous-groupe de Levi. Par définition de la régularité cela ne laisse qu'un nombre fini de possibilités.

### 3.3.5 Définition du côté spectral stable de la formule des traces locales

On revient à la situation de 3.3.3 On suppose défini par récurrence le côté spectral stable pour les groupes endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$ propres, noté $SI^{G'}_{spec}$, de la forme :

$$SI^{G'}_{spec}(f'_1, f'_2) = \sum_{\chi} \sum_{\phi,\phi' \in \mathcal{B}^{\mathbf{G}'}_{\chi}} \int_{i\mathcal{A}^*_{\mathbf{G}',F}} d\lambda b^{\mathbf{G}'}(\phi,\phi') \overline{tr\, \phi_\lambda(f'_1)} tr\, \phi'_\lambda(f'_2)$$

avec un ensemble de nombres complexes $b^{\mathbf{G}'}(\phi,\phi')$ centralement fini.

Il faut remarquer que le sous-groupe de $i\mathcal{A}^*_{\mathbf{G}',F}$ formé des caractères dont la restriction à $A_{\mathbf{G}'}(F)$ est trivial opère sur l'ensemble des représentations stables ayant un caractère sur $A_{\mathbf{G}'}(F)$ fixé. Comme on intégre sur $i\mathcal{A}^*_{\mathbf{G}',F}$, on demande aussi à $\sum_{\phi,\phi'} b^{\mathbf{G}'}(\phi,\phi')\overline{\phi} \otimes \phi'$ d'être invariant sous cette action.

**Proposition** *Il existe un système de coefficients centralement fini $b(\phi,\phi')$ associé au triplet $\chi, \phi, \phi'$ comme ci-dessus tel que en notant $SI^{\tilde{G}}_{spec}$ la distribution obtenue en intégrant (1) sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$, on ait pour toute paire de fonctions $f_1, f_2$ sur $\tilde{G}$*

$$I^{\tilde{G}}_{spec}(f_1, f_2) - \sum_{\mathbf{G}' \neq \tilde{G}} SI^{G'}_{spec}(f_1^{\mathbf{G}'}, f_2^{\mathbf{G}'}) = SI^{\tilde{G}}_{spec}(f_1, f_2).$$

Ce que dit la proposition est que le côté gauche est stable et s'écrit sous la forme (1) pour des bons choix. On montre d'abord que le côté gauche de l'égalité est une intégrale sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ d'une somme comme dans (1) mais où $\phi$ et $\phi'$ parcourt une base de l'ensemble des représentations tempérées et pas seulement des représentations stables. Pour cela, on transfère terme à terme les éléments de la somme sur $\mathbf{G}'$ (cf. le théorème du paragraphe 3 de [18] et [31] 3.2 dans le cas archimédien) ; un caractère $\chi'$ pour $A_{G'}(F)$ se transfère en un caractère $\chi_1$ de $A_{\tilde{G}}(F)$ par l'application naturelle du deuxième groupe dans le premier. On tensorise par un élément de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ pour le ramener en l'un des représentants fixés, $\chi$. On fait la somme sur toutes les données et tous les caractères et on obtient l'assertion (sans la stabilité). On montre maintenant que les sommes que l'on intégre pour $\chi$ fixé sont des distributions stables ; c'est ici qu'il faut commencer par faire agir le sous-groupe de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ qui agit trivialement. Ce sous-groupe est fini et après cette opération l'intégrale porte sur le quotient de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ par ce sous-groupe.

Dans le cas de torsion intérieure que nous sommes en train de considérer, il a été montré en [32] 1.13, que les intégrales orbitales pondérées équivariantes pour les éléments fortement réguliers sont stabilisables c'est-à-dire que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, f) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, f)$ en de tels points $\gamma$. Ainsi la partie géométrique de la formule des traces locales est stabilisable ou encore le membre de gauche de (3) dans 3.1.2 est nul (cf. 3.2.3).

Ainsi on a une distribution du côté spectral qui est stable c'est-à-dire nulle si on l'applique à un couple de fonctions $f_1, f_2$ où l'une des fonctions annule toutes les intégrales orbitales semi-simples stables.

Fixons $f_1 \in I(\tilde{G})$ d'image nulle dans $SI(\tilde{G})$ ; $f_2$ varie librement donc l'application $\pi \mapsto tr\, \pi(f_2)$ décrit toutes les fonctions de Paley-Wiener sur l'ensemble des représentations tempérées de $\tilde{G}$. Cela prouve que si $\phi'$ parcourt une base des représentation tempérées (ayant les propriétés d'orthogonalité que nous avons fixées), le coefficient de $\phi'$ qui est une fonction de $f_1$ est nul quand on l'évalue en $f_1$. Ainsi on peut faire parcourir à $\phi$ une base des représentations stables (cf. [18] paragraphe 2 et [31] 2.8 dans le cas archimédien) modulo l'action de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ ; comme l'application $I(\tilde{G}) \to SI(\tilde{G})$ est surjective, on échange les rôles de $f_1$ et $f_2$ pour obtenir le résultat annoncé.

### 3.3.6 Description plus fine du côté spectral de la formule des traces locale

On peut améliorer la proposition précédente en découpant suivant les espaces de Levi de $\tilde{G}$ et leurs représentations elliptiques. On fixe toujours un ensemble de représentants des caractères unitaires de $A_{\tilde{G}}(F)$ modulo l'action de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$. Pour $\chi$ un tel représentant, on considère l'ensemble fini de couples $(\tilde{M}, \chi_M)$ satisfaisant le lemme de 3.3.4. Pour $(\tilde{M}, \chi_M)$ dans cet ensemble on fixe Quand on a fixé un tel caractère et si $\tilde{G}, \omega$ est à torsion intérieure comme dans le paragraphe précédent, on fixe aussi une base orthogonale (pour le produit scalaire elliptique) de l'ensemble des représentations elliptiques stables de $\tilde{M}$ sur lesquelles $A_{\tilde{M}}(F)$ agit par ce caractère ; on note $\mathcal{B}(\chi_M)$ cette base.

On utilise la notation ambiguë suivante : soit $\tilde{L}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et soit $\tau$ une représentation elliptique de $\tilde{L}$, c'est à dire correspondant à un triplet elliptique de [27] 2.11 qui avec les notations de loc.cite est de la forme $(M, \sigma, \tilde{w})$ ; ici $M$ est un sous-groupe de Levi de $L$ et n'a rien à voir avec les $\tilde{M}$ de ce paragraphe. On dit que l'induite de $\tau$ de $\tilde{L}$ à $\tilde{G}$ est irréductible si le $\tilde{R}$-groupe de $\sigma$ calculé dans $\tilde{L}$ est aussi celui calculé dans $\tilde{G}$, c'est-à-dire que le morphisme de $W^{\tilde{L}}(\sigma)$ dans $W_0^G(\sigma)\backslash W^{\tilde{G}}(\sigma)$ est un isomorphisme ; ce morphisme est injectif car $\tau$ a été supposé elliptique et c'est la surjectivité qui est la condition. La représentation induite de $\tau$ est une représentation discrète de $\tilde{G}$ pour laquelle $\iota(ind\,\tau)$ est bien défini ([27] 2.11).

**Proposition** *(i) On ne fait pas d'hypothèse sur $\tilde{G}, \omega$.*

$$I_{spec}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} d\lambda$$

$$\sum_{\tilde{M}, \chi_{\tilde{M}}, \tau} |Stab_{W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}}(ind\,\tau)|^{-1} \iota(ind\,\tau) \overline{tr\,\tau_\lambda(f_{1,\tilde{M}})} tr\,\tau_\lambda(f_{2,\tilde{M}})$$

*où $\tilde{M}$ parcourt les classes de conjugaison d'espaces de Levi et où les $\tau$ parcourt l'ensemble des représentations elliptiques de $\tilde{M}$ dont l'induite à $\tilde{G}$ est irréductible (modulo conjugaison sous le normalisateur de $\tilde{M}$ dans $G$) de caractère central $\chi_M$.*

*(ii) Ici on suppose que $\tilde{G}, \omega$ est à torsion intérieure avec $\omega = 1$ et $G$ quasi-déployé. Il existe un système de coefficients $b(\tilde{M}, \chi_{\tilde{M}}, \phi, \phi')$ centralement fini indexé par les données précédant l'énoncé (les espaces de Levi sont pris à conjugaison près), identiquement nul pour presque tout $\chi_M$ tel que pour toute paire de fonctions $f_1, f_2$,*

$$SI_{spec}^{\tilde{G}}(f_1, f_2) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} \sum_{\tilde{M}, \chi_M, \phi, \phi'} b(\tilde{M}, \chi_M, \phi, \phi') \overline{tr\,\phi_\lambda(f_{1,\tilde{M}})} tr\,\phi'_\lambda(f_{2,\tilde{M}})\, d\lambda,$$

*où l'indice $\lambda$ est la tensorisation par $\lambda$.*

(i) Il faut d'abord remarquer que dans $I_{spec}^{\tilde{G}}$ seules des représentations discrètes de $\tilde{G}$ interviennent. De plus, on a bien une somme d'intégrales sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ de produit $\overline{tr\,\tau_\lambda(f_1)} tr\,\tau_\lambda(f_2)$, où comme on vient de le dire $\tau$ est discrète. Or une représentation discrète est induite d'une représentation elliptique comme on l'a vu dans 3.3.4 pour un unique espace de Levi de $\tilde{G}$ (unique à conjugaison près). Cela donne (i)

(ii) On raisonne comme dans la proposition précédente : on applique le résultat par récurrence aux données endoscopiques elliptiques propres. On remarque qu'un sous-groupe de Levi, $\mathbf{M'}$ d'une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G'}$ qui n'est pas relevant pour $\tilde{G}$ a une contribution nulle car il s'applique à $f_{M'}^{\mathbf{G'}} = 0$. On n'a donc qu'à transférer des représentations elliptiques stables de sous-groupes endoscopiques elliptiques d'espaces de Levi de $\tilde{G}$. Un tel transfert est une combinaison linéaire de représentations elliptiques de ce sous-espace de Levi. Cela montre une formule comme dans l'énoncé mais sans savoir que les $\phi$ et $\phi'$ sont stables.

Pour avoir cette stabilité, on utilise encore [31] 2.8 dans le cas archimédien et le paragraphe 2 de [18] dans le cas $p$-adique.

### 3.3.7 Remarque sur la stabilisation locale spectrale

Ici on revient à un espace $\tilde{G}$ général, donc on ne connaît plus la stabilisation des intégrales orbitales pondérées et on n'a ni la stabilisation géométrique ni la stabilisation spectrale. Comme dans le cas à torsion intérieure, on fixe un ensemble de représentants dans le quotient du groupe des caractères unitaires de $A_{\tilde{G}}(F)$ modulo l'action par tensorisation de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ et pour $\chi$ un tel représentant, on considère les couples $\tilde{M},\chi_M$ formés d'un espace de Levi de $\tilde{G}$ et d'un caractère unitaire de $A_{\tilde{M}}(F)$ prolongeant $\chi$. On fixe une base $\mathcal{B}(\tilde{M},\chi_M)$ du groupe de Grothendieck des représentations elliptiques de $\tilde{M}$ se transformant via $\chi_M$ sous $A_{\tilde{M}}(F)$.

**Lemme** *Pour tout $\chi$ et pour tout $\tilde{M},\chi_M$ et $\tau,\tau' \in \mathcal{B}(M,\chi_M)$, il existe un système de coefficients $a(\tilde{M},\chi_M,\tau,\tau')$ nul pour presque tout $\chi_M$, tel que pour toute paire de fonctions $f_1, f_2$ sur $\tilde{G}$, on ait :*

$$I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f_1, f_2) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}') SI^{\mathbf{G}'}_{spec}(f_1^{\mathbf{G}'}, f_2^{\mathbf{G}'}) = \qquad (*)$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} d\lambda \sum_{\tilde{M},\chi_M} \sum_{\tau,\tau' \in \mathcal{B}^{\tilde{M}}(\chi_M)} a(\tilde{M},\chi_M,\tau,\tau') \overline{tr\, \tau_\lambda(f_{1,\tilde{M}})} tr\, \tau'_\lambda(f_{2,\tilde{M}}). \qquad (1)$$

Cela se démontre comme dans le cas de torsion intérieure, et ici on s'attend à ce que les coefficients soient tous nuls et on le démontrera.

**Remarque** *Dans l'énoncé précédent, la somme ne porte que sur les $\tilde{M}$ sous-espace de Levi propre de $\tilde{G}$.*

En effet, supposons que $f_1$ et $f_2$ soient cuspidales. Alors dans (1) ne reste que le terme pour $\tilde{M} = \tilde{G}$. On écrit (*) à l'aide de l'écriture géométrique de 3.2.3. Comme on suppose que $f_1$ et $f_2$ sont cuspidales les termes constants de $f_1$ et $f_2$ pour les espaces de Levi propres de $\tilde{G}$ ont toutes leurs intégrales orbitales nulles. Avec 3.2.3, on sait que (*) est nul. Donc (1) est nul pour toutes $f_1$, $f_2$ cuspidales. Via la trace tordue, les fonctions cuspidales séparent les éléments d'une base $\mathcal{B}(\tilde{G},\chi)$ pour $\chi$ fixé. Par inversion de Fourier, on conclut alors à la nullité des $a(\tilde{G}, \chi, \tau, \tau')$ quand $\tau$ et $\tau'$ parcourt une base des représentations elliptiques de $\tilde{G}$ de caractère $\chi$ en restriction à $A_{\tilde{G}}(F)$ comme dans l'énoncé du lemme.

## 3.4 Elimination de certaines conditions

On va aussi en déduire le corollaire ci-dessous. On a besoin de la terminologie suivante. Une fonction $f \in I(\tilde{G}, \omega)$ se décompose suivant le théorème de Paley-Wiener en une composante cuspidale et une composante dite non elliptique dont la trace est nulle sur toute les $\omega$ représentations elliptiques de $\tilde{G}$. On a aussi besoin de la notion d'éléments isolés ou plus exactement exceptionnels. Ils sont définis en [34] 4.4 : ces éléments n'apparaissent que pour certains choix de $\tilde{G}, \omega$ (donnés en [30] 6.3) et sont tels que leur partie semi-simple stabilise une paire de Borel épinglée ; appelons un tel élément un élément isolé. C'est une généralisation de la notion d'élément unipotents modulo le centre du cas non tordu mais ils ne gênent que pour certains $\tilde{G}, \omega$ et on ne les considère que dans ces cas. On a besoin de les considérer séparément à cause des hypothèses de la proposition de [34] 4.4. C'est pour cela qu'il vaut mieux les appeler exceptionnels. Ceci dit pour nous la seule chose qui nous importe est qu'ils n'apparaissent pas sur un corps local archimédien.

On fixe un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et une fonction $f \in I(\tilde{G}, \omega)$. On dit que $f$ est $\tilde{M}$ cuspidale si les termes constants de $f$ sont nuls pour tout espace de Levi qui ne contient pas, à conjugaison près, $\tilde{M}$ (c'est la généralisation immédiate de la définition donnée en [11] avant le lemme 2.3)

**Corollaire** *On fixe $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et on fixe $f_2 \in I(\tilde{G}, \omega)$ en supposant que $f_2$ est $\tilde{M}$-cuspidale.*

*(i)*

$$I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f_1, f_2) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI^{\mathbf{G}'}_{spec}(f_1^{\mathbf{G}'}, f_2^{\mathbf{G}'}) = 0 \qquad (1)$$

*pour toute fonction $f_1 \in I(\tilde{G}, \omega)$ si et seulement si cela est vrai pour toute fonction $f_1$ qui est $\tilde{M}$-cuspidale.*

*(ii) On suppose que le corps de base est p-adique. Alors*

$$I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f_1, f_2) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI^{\mathbf{G}'}_{spec}(f_1^{\mathbf{G}'}, f_2^{\mathbf{G}'}) = 0$$

*pour toute fonction $f_1 \in I(\tilde{G}, \omega)$ si et seulement si cela est vrai pour toute fonction $f_1 \in I(\tilde{G}, \omega)$ où l'on suppose que $f_1$ est $\tilde{M}$ cuspidale et a une composante non elliptique nulle près des éléments isolés.*

Comme on suppose que $f_2$ est $\tilde{M}$ cuspidale, dans (1) il suffit de sommer sur les espaces de Levi contenant $\tilde{M}$. On fixe $f_1$ et on note $f'_1$ une fonction dans $I(\tilde{G},\omega)$ qui a même composante de Paley-Wiener que $f_1$ pour tous les espaces de Levi contenant $\tilde{M}$ et qui vaut 0 ailleurs. Vérifions que $f'_1$ est $\tilde{M}$ cuspidale : puisque les traces de cette fonction pour toute induite à partir d'un espace de Levi ne contenant pas $\tilde{M}$ sont nulles, on applique le théorème 0 de [27] 5.5. Pour cela on fixe $\tilde{L}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ dont aucun conjugué ne contient $\tilde{M}$ et une représentation $\pi_{\tilde{L}}$ de cet espace de Levi. Comme la trace de $f'_1$ sur l'induite de $\pi_{\tilde{L}}$ est nulle, la trace du terme constant $f'_{1,\tilde{L}}$ sur $\pi_{\tilde{L}}$ est nulle. On sait alors que le terme constant de $f'_1$ pour un tel espace de Levi a toutes ses intégrales orbitales semi-simples régulières nulles et donc que $f'_1$ est bien $\tilde{M}$-cuspidale. Cela démontre le (i) du corollaire.

Pour le (ii) du corollaire, on suppose comme dans l'énoncé que le corps de base est p-adique. Comme on l'a remarqué dans le corollaire précédent, dans (1) n'interviennent que des espaces de Levi propres de $\tilde{G}$ et des représentations elliptiques de ces espaces de Levi. Ainsi (1) est certainement nul si $f_1$ est cuspidale. On peut donc dès le départ supposer que $f_1$ a sa composante elliptique nulle.

Ainsi avec l'hypothèse on sait que (1) est nulle si en plus $f_1$ est nulle près des éléments exceptionnels, on voit que (1) restreint à $f_2$ fixé comme dans l'énoncé est une forme linéaire sur les éléments de $I(\tilde{G},\omega)$ de composante elliptique nulle qui est nécessairement une combinaison linéaire convenable des intégrales orbitales en les points isolés. A la suite de [5], on a montré qu'une intégrale orbitale est une somme d'intégrales sur les espaces $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}$ (quand $\tilde{L}$ parcourt l'ensemble des sous-espaces de Levi de $\tilde{G}$) de traces d'induites de représentations elliptiques de l'espace de Levi $\tilde{L}$ (cf [19], théorème du paragraphe 5). Par hypothèse sur la composante elliptique de $f_1$, seuls les espaces $\tilde{L}$ propres interviennent de façon éventuellement non nulle. Mais en revenant à la définition de (1) comme intégrale sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ l'égalité des deux distributions est impossible sans que chacune des distributions soit nulle. Ainsi (1) est nul sous la seule hypothèse que $f_1$ a sa composante elliptique nulle, ce qui prouve (ii).

**Remarque** *En jouant sur la symétrie entre $f_1$ et $f_2$, on vient de montrer que (1) est nulle pour tout couple de fonctions $(f_1, f_2)$ dans $I(\tilde{G},\omega)$ dont l'une est $\tilde{M}$ cuspidale si et seulement si cela est vrai pour tout couple de fonctions $(f_1, f_2)$ dont on suppose que les deux sont $\tilde{M}$ cuspidales et que les deux ont une composante non elliptique nulle près des éléments isolés (condition que l'on n'impose que pour les places p-adiques).*

**Remarque** *On fixe un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. Supposons que l'on sache que pour toute fonction $f$ et pour tout espace de Levi contenant $\tilde{M}$, y compris $\tilde{L} = \tilde{M}$, on ait pour tout $\gamma$ élément semi-simple régulier de $\tilde{L}$,*

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\omega, \gamma, f) = I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\gamma, f), \tag{2}$$

*alors pour toute fonction $f$ qui est $\tilde{M}$-cuspidale, (2) est vrai pour tout espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ sans restriction. En particulier (2) est vrai pour toute fonction cuspidale sur $\tilde{G}$ et pour tout espace de Levi $\tilde{L}$.*

En effet, d'après l'hypothèse, la formule des traces locales pour deux fonctions $f_1, f_2$ de $\tilde{G}$ toutes deux $\tilde{M}$ cuspidales est stabilisable, c'est-à dire que (1) est nulle sous ces conditions. D'après la remarque précédente, (1) est nulle sous la seule hypothèse que $f_1$ est $\tilde{M}$ cuspidale, donc sans hypothèse sur $f_2$. Cela force la nullité du côté géométrique de 3.2.3 pour toute fonction $f_2$ et pour $f_1 = f$ comme dans l'énoncé. En utilisant l'hypothèse (2) et la $\tilde{M}$ cuspidalité de $f = f_1$, on obtient qu'une combinaison linéaire des termes

$$\int_{\tilde{L}_{ell}/\sim} i'(\gamma)\overline{(I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\omega, \gamma, f) - I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\gamma, f))} I^{\tilde{L}}(\gamma, \omega, f_{2,\tilde{L}})$$

est nulle sans hypothèse sur $f_2$. Cela force la nullité des fonctions

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\omega, \gamma, f) - I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\gamma, f).$$

## 3.5 Stabilisation géométrique sous hypothèses

**Hypothèses de récurrence locales géométriques propres :** on suppose que pour tout espace de Levi propre $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ et pour tout espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{L}$, on sait que pour tout $f \in I(\tilde{L}, \omega)$ et pour tout élément $\gamma$ semi-simple régulier de $\tilde{R}$, on a $I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\omega, \gamma, f) = I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}, \mathcal{E}}(\gamma, f)$.

**Hypothèses de récurrence locales géométriques dépendant d'un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ fixé :** on suppose aussi que pour tout espace de Levi, $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ contenant strictement $\tilde{M}$ et pour tout $f \in I(\tilde{G}, \omega)$ et tout $\gamma$ élément semi-simple régulier de $\tilde{L}$, $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\omega, \gamma, f) = I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\gamma, f)$.

Ce sont des hypothèses de récurrence que l'on a évidemment le droit de faire puisqu'on les initialise sans problème pour $\tilde{M} = \tilde{G}$. Par contre les deux hypothèses ci-dessous sont d'une autre nature, on les démontrera via un argument global en 7.7. On fixe $\tilde{M}$ un espace de Levi propre de $\tilde{G}$. On fixe aussi $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}$ ; on fixe des données auxiliaires $M'_1$,..., $\Delta_{\mathbf{M}'}$ ; soit $\delta$ un élément semi-simple régulier de $\tilde{M}'(F)$ que l'on relève en un élément $\delta_1 \in \tilde{M}'_1(F)$. On pose, pour tout $f \in I(\tilde{G},\omega)$ nul près des éléments exceptionnels (quand il y en a)

$$\epsilon^{\mathbf{M}'}_{\tilde{M}}(f)(\delta_1) := \sum_{\gamma\in\tilde{M}} \Delta_{\mathbf{M}'}(\delta_1,\gamma) z(\gamma)^{-1} I^{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\epsilon_{\tilde{M}}(f)), \tag{1}$$

où $z(\gamma)$ est le nombre d'éléments de $Cent_M(\gamma,F)/Cent^0_M(\gamma,F)$. La fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(f)$ est celle définie en [34] et [35], c'est-à-dire que l'on a $I^{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\epsilon_{\tilde{M}}(f)) = I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\gamma,f) - I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,f)$. Dans le cas $p$-adique, elle n'est définie que si $f$ est nulle près des éléments exceptionnels.

**hypothèse clé 1** *On suppose que pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'$ de $\tilde{M}$ comme ci-dessus il existe une fonction lisse sur l'ensemble des éléments semi-simples réguliers fortement réguliers de $\tilde{M}'(F)$, $\epsilon(\mathbf{M}',\delta)$ telle que pour toute fonction $f$ sur $\tilde{G}$, nulle près des éléments exceptionnels et pour tout élément semi-simple fortement régulier $\delta$ de $\mathbf{M}'$, on a*

$$\epsilon^{\mathbf{M}'}_{\tilde{M}}(f)(\delta_1) = \epsilon(\mathbf{M}',\delta) f^{\mathbf{M}'}_{\tilde{M}}(\delta_1),$$

*où le terme de droite est évidemment défini comme dans (1)*

Puisque les deux fonctions de $\delta_1$ se transforment selon le même caractère du tore central $C_1(F)$, le terme $\epsilon(\mathbf{M}',\delta)$ ne dépend bien que de $\delta$. On voit facilement qu'il ne dépend pas du choix des données auxiliaires. Dans la suite, on oublie ces données qui ne sont pas importantes et on note simplement $\delta$ l'élément $\delta_1$.

Dans les cas courants (avec $\omega = 1$ ou seulement quadratique) par exemple les cas de GL(n) tordu, cette seule hypothèse va suffire pour la stabilisation locale des intégrales orbitales pondérées. Mais dans le cas général et en particulier si $\omega$ n'est pas quadratique on a besoin de plus. On va utiliser l'hypothèse suivante, qui est très facile à démontrer au moment où on démontre l'hypothèse clé 1 :

**hypothèse clé 2** *on suppose que la situation locale est une composante locale d'une situation globale : c'est-à-dire que $F$ est un corps global, que $v_0$ est une place de $F$ et que ce qui nous intéresse est ce qui se passe en la place $v_0$. On suppose aussi que $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique de la situation globale et que $\delta$ est un élément semi-simple régulier de $\mathbf{M}'(F)$. On fixe encore un ensemble $V$ de places de $F$ contenant $V_{ram}$ et tel que, pour*

*$v \notin V$, $\mathbf{M'}$ soit non ramifiée en $v$ et $\delta \in \tilde{K}_v^{M'}$ et on a donc défini pour tout $v \in V$, $\epsilon(\mathbf{M'}, \delta_v)$ noté $\epsilon_v(\mathbf{M'}, \delta)$ alors :*

$$\sum_{v \in V} \epsilon_v(\mathbf{M'}, \delta) = 0.$$

**Théorème** *Sous les hypothèses faites, pour toute fonction $f$ sur $\tilde{G}$ et pour tout élément $\gamma$ fortement régulier de $\tilde{M}$, $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\omega, \gamma, f) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, f)$.*

On fait d'abord la réduction suivante : il suffit de montrer que $\epsilon(\mathbf{M'}, \delta)$ est une fonction identiquement nulle pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M'}$ de $\tilde{M}$. En effet supposons qu'il en soit ainsi, par inversion des facteurs de transfert, on en déduit que pour toute fonction $f \in I(\tilde{G}, \omega)$, nulle près des éléments exceptionnels si $F_{v_0}$ est p-adique et sans restriction si $F_{v_0}$ est archimédien, la fonction $\epsilon_{\tilde{M}}(\gamma, f)$ est identiquement nulle. C'est le résultat cherché pour ces fonctions $f$. Il faut donc enlever la restriction dans le cas où $F_{v_0}$ est p-adique. Avec les formules de descente, on se ramène immédiatement au cas où $\gamma$ est elliptique dans $\tilde{M}$.

Comme le théorème est déjà montré pour les fonctions cuspidales (cf. la deuxième remarque de 3.4), on a le théorème pour toute fonction $f$ dont la composante de Paley-Wiener non cuspidale est nulle près des éléments exceptionnels. On considère $f_1, f_2$ un couple d'éléments dans $I(\tilde{G}, \omega)$ ; on suppose que la fonction $f_2$ est $\tilde{M}$ cuspidale et nulle près des éléments exceptionnels. Pour tout $f_1$ $\tilde{M}$-cuspidale et nulle près des éléments exceptionnels, on a :

$$I_{geo}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) - I_{geo}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(f_1, f_2) = 0.$$

Ainsi les hypothèses du corollaire de 3.3.7 sont satisfaites et on sait que

$$I_{spec}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) - I_{spec}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(f_1, f_2) = 0,$$

sous la seule hypothèse que $f_2$ est $\tilde{M}$ cuspidale et sans hypothèse sur $f_1$. On récrit

$$I_{geo}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) - I_{geo}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(f_1, f_2) = 0,$$

avec l'hypothèse que $f_2$ est $\tilde{M}$-cuspidale. En utilisant 3.2.3 cela se traduit par :

$$\forall f_1 \in I(\tilde{G}, \omega) \qquad 0 =$$

$$\sum_{\tilde{L}} w(\tilde{L})(-1)^{a_{\tilde{L},\tilde{G}}} \int_{\tilde{L}_{ell}/\sim} \left( I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_2) - I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, f_2) \right) \overline{I^{\tilde{L}}(\gamma, \omega, f_{1,\tilde{L}})}\, d\gamma \quad (1)$$

$$+w(\tilde{M})(-1)^{a_{\tilde{M},\tilde{G}}}\int_{\tilde{M}_{ell}/\sim}\overline{\left(I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_1)-I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma,f_1)\right)}I^{\tilde{M}}(\gamma,\omega,f_{2,\tilde{M}})\,d\gamma \tag{2}$$

$$+w(\tilde{M})(-1)^{a_{\tilde{M},\tilde{G}}}\int_{\tilde{M}_{ell}/\sim}\overline{I^{\tilde{M}}(\gamma,\omega,f_{1,\tilde{M}})}\left(I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_2)-I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma,f_2)\right)d\gamma, \tag{3}$$

où la première somme ne porte que sur les espaces de Levi $\tilde{L}$ ne contenant pas $\tilde{M}$ à conjugaison près (pour ces espaces de Levi, par définition, $f_{2,\tilde{L}}=0$).

Rajoutons l'hypothèse que $f_1$ est nulle près des éléments exceptionnels ce qui permet d'avoir la nullité des termes (2) ; ainsi on obtient que pour toute fonction $f_1$ nulle près des éléments exceptionnels, on a

$$\sum_{\tilde{L}}w(\tilde{L})(-1)^{a_{\tilde{L},\tilde{G}}}\int_{\tilde{L}_{ell}/\sim}\left(I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_2)-I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma,f_2)\right)\overline{I^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,f_{1,\tilde{L}})}\,d\gamma=0,$$

où la somme porte sur les espaces de Levi de $\tilde{G}$ ne contenant pas $\tilde{M}$ à conjugaison près et $\tilde{M}$ lui-même.

En modifiant les coefficients, on peut ne sommer que sur les espaces de Levi pris à conjugaison près. Mais en faisant varier $f_1$, les fonctions $I^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,f_{1,\tilde{L}})$ définie sur $\tilde{L}_{ell}$ sont soumises uniquement au fait qu'elles sont invariantes sous le normalisateur dans $G$ de $\tilde{L}$. Les fonctions $\Big(I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_2)-I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma,f_2)\Big)$ ont la même propriété d'invariance. Ainsi chaque terme est nul et les fonctions que l'on intégre sont nulles elles aussi au moins presque partout. Par continuité elles sont nulles sur tous ces éléments. D'où pour tout espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ et pour toute fonction $f$ que l'on suppose $\tilde{M}$-cuspidale :

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)-I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma,f)=0. \tag{4}$$

On reporte cette nullité dans (1),(2), (3), où on ne fait plus d'hypothèse sur $f_1$ et on obtient alors la nullité :

$$\forall f_1\in I(\tilde{G}),\quad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_1)=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma,f_1).$$

Ceci est la réduction cherchée. Au passage on a démontré que les hypothèses de récurrence et l'hypothèse clé, entraînent la stabilisation locale géométrique pour toute fonction $f$ supposée $\tilde{M}$-cuspidale et pour tout espace de Levi $\tilde{L}$ ; mais cette propriété ne sert pas dans la suite.

#### 3.5.1 Début de la preuve de la nullité de $\epsilon(\mathbf{M}', \delta)$.

On fait les hypothèses locales de récurrence et l'hypothèse clé 1.

**Lemme** *Avec les notations précédentes,* $\epsilon(\mathbf{M}', \delta) + \overline{\epsilon(\mathbf{M}', \delta)} = 0$.

C'est la même preuve que [11] 6.5. On récrit 3.2.3 pour des fonctions $f_1$ et $f_2$ que l'on suppose $\tilde{M}$ cuspidales, nulles près des éléments isolés si le corps est $p$-adique. On suppose aussi que le terme constant $f_{1,\tilde{M}}$ est à support dans l'ensemble des éléments réguliers de $\tilde{M}$. On voit que

$$\int_{\tilde{M}_{ell}/\sim} \overline{I^{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{\tilde{M}}(f_1))} f_{2,\tilde{M}}(\gamma) + \overline{f_{1,\tilde{M}}(\gamma)} I^{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \epsilon_{\tilde{M}}(f_2))\, d\gamma \qquad (1)$$

vaut $I^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') I^{G'}(f_1^{\mathbf{G}'}, f_2^{\mathbf{G}'})$. On récrit cela avec le côté spectral et (1) vaut donc :

$$\sum_{\tilde{L}, \chi_L, \tau, \tau'} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} d\lambda\, b(\tilde{L}, \chi_L, \tau, \tau') \overline{tr\, \tau_\lambda f_{1,\tilde{L}}} tr \tau'_\lambda\, f_{2,\tilde{L}}. \qquad (2)$$

Dans le terme de droite, seuls interviennent les espaces de Levi contenant $\tilde{M}$ puisque les fonctions considérées sont $\tilde{M}$ cuspidales. On montre par récurrence descendante que le terme de (2) indexé par un espace de Levi $\tilde{L}$ contenant strictement $\tilde{M}$ est nul : en effet le terme de (2) indexé par un espace de Levi $\tilde{L}$ est nul si et seulement si il est nul pour les fonctions $\tilde{L}$-cuspidales. Quand $\tilde{L}$ contient strictement $\tilde{M}$, on a déjà démontré la stabilisation locale géométrique (hypothèse de récurrence) et (1) est donc nul ; c'est l'argument utilisé pour $\tilde{L} = \tilde{G}$ dans le premier corollaire de 3.3.7. D'où l'assertion.

Ainsi (2) est réduit au terme indexé par $\tilde{M}$ que l'on récrit :

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} d\lambda \sum_{\chi_M \tau', \tau''} b(\chi_M, \tau', \tau'') \overline{tr\, \tau'_\lambda f_{1,\tilde{M}}} tr \tau''_\lambda\, f_{2,\tilde{M}}, \qquad (3)$$

où la somme porte sur une base des représentations elliptiques de $\tilde{M}$ modulo l'action par tensorisation de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ identifié à des caractères de $\tilde{M}$.

On revient à (1) que l'on interprète comme le terme géométrique de la formule des traces locale pour $\tilde{M}$ pour des fonctions cuspidales. On écrit ce côté géométrique comme transfert, donc une somme sur les groupes endoscopiques elliptiques $\mathbf{M}'$ de $\tilde{M}$ des termes

$$\int_{\mathbf{M}'_{ell}/\sim} d\delta\, \overline{\epsilon_{\tilde{M}}^{\mathbf{M}'}(f_1)(\delta)} f_{2,\tilde{M}}^{\mathbf{M}'}(\delta)$$

plus un terme où on échange les rôles de $f_1$ et $f_2$, à la conjugaison complexe près. Avec l'hypothèse clé 1, cela se récrit comme somme sur les données endoscopiques elliptiques $\mathbf{M}'$ de

$$\int_{\mathbf{M}'_{ell}/\sim} d\delta(\epsilon(\mathbf{M}',\delta)+\overline{\epsilon(\mathbf{M}',\delta)})\overline{f^{\mathbf{M}'}_{1,\tilde{M}}(\delta)}f^{\mathbf{M}'}_{2,\tilde{M}}(\delta).$$

Ici on a la forme stable de la formule des traces pour $\mathbf{M}'$ et la paire de fonction $((\epsilon(\mathbf{M}',\delta)+\overline{\epsilon(\mathbf{M}',\delta)})f^{\mathbf{M}'}_{1,\tilde{M}}(\delta), f^{\mathbf{M}'}_{2,\tilde{M}}(\delta))$. On récrit (1) en utilisant la forme spectrale de cette formule des traces donnée en 3.3.6 (b). On se rappelle que les fonctions $f_{2,\tilde{M}}$ sont cuspidales et on obtient donc une intégrale sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$ de traces de représentations nécessairement elliptiques de $\mathbf{M}'$ (on n'a pas besoin de les écrire). On compare (3) avec ce résultat comme distributions en $f_{2,\tilde{M}}$. Ces deux distributions ne peuvent être égales que si elles sont toutes les deux nulles.

### 3.5.2 Fin de la preuve du théorème dans certains cas

En [28] en particulier dans le paragraphe 7.4 de cette référence, il a été défini une bijection entre les classes d'isomorphie de données endoscopiques elliptiques pour $\tilde{M},\omega$ et celles pour $\tilde{M},\omega^{-1}$, notée $\mathbf{M}'\mapsto\mathbf{M}'_{\nabla}$. A une classe de conjugaison stable $\delta$ de $\mathbf{M}'$ correspond une classe de conjugaison stable de $\mathbf{M}'_{\nabla}$ mais ces deux classes s'identifient naturellement (cf. [28] 7.4 (2)) et on garde la notation $\delta$ pour la classe dans $\mathbf{M}'_{\nabla}$. Les facteurs de transfert sont modifiés par le passage au complexe conjugué.

**Lemme** *Avec les notations du paragraphe précédent,* $\overline{\epsilon(\mathbf{M}',\delta)}=\epsilon(\mathbf{M}'_{\nabla},\delta)$.

En [28] 7.4, il est démontré que pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ de $\tilde{G},\omega$ et pour toute fonction $f\in I(\tilde{G})$, on a

$$\overline{f^{\mathbf{G}'}}=(\overline{f})^{\mathbf{G}'_{\nabla}}.$$

Avec les propriétés des facteurs de transfert, on a immédiatement, pour tout élément $\gamma$ semi-simple régulier de $\tilde{G}$ :

$$\overline{I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\omega}(\gamma,f)}=I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\omega^{-1}}(\gamma,\overline{f});$$

on rajoute dans la notation le caractère puisqu'il varie.

$$\overline{\epsilon_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,f)}=I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega^{-1},\overline{f})-I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\omega^{-1}}(\gamma,\overline{f})=\epsilon_{\tilde{M}}(\gamma,\omega^{-1},\overline{f});$$

$$\overline{\epsilon_{\tilde M}^{\mathbf{M}'}(\delta, f)} = \sum_{\gamma\in\tilde M} \overline{\Delta_{\mathbf{M}'}(\gamma,\delta)} I^{\tilde M}(\gamma, \omega^{-1}, \epsilon_{\tilde M,\omega^{-1}}(\overline{f})) = \epsilon^{\mathbf{M}'_\nabla}(\delta, \overline{f}).$$

D'autre part, on a aussi $\overline{f_{\tilde M}^{\mathbf{M}'}}(\delta) = \overline{f_{\tilde M}}^{\mathbf{M}'_\nabla}(\delta)$ d'où en récrivant la définition de $\epsilon(\mathbf{M}', \delta)$ ou plutôt du conjugué de ce nombre :

$$\epsilon^{\mathbf{M}'_\nabla}(\delta, \overline{f}) = \overline{\epsilon(\mathbf{M}', \delta)}\, \overline{f_{\tilde M}}^{\mathbf{M}'_\nabla}(\delta)$$

et en comparant à la définition de $\epsilon(\mathbf{M}'_\nabla, \delta)$ on obtient le lemme.

**Corollaire** *On suppose que pour toute donnée endoscopique elliptique* $\mathbf{M}'$ *de* $\tilde M$*, on a* $\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_\nabla$ *(cela force* $\omega^2 = 1$*), alors pour tout élément semi-simple régulier de* $\tilde M$*, on a*

$$I_{\tilde M}^{\tilde G}(\omega, \gamma, f) = I_{\tilde M}^{\tilde G, \mathcal{E}}(\omega, \gamma, f).$$

Avec les formules d'inversion des facteurs de transfert, et les réductions déjà faites, il suffit de montrer que pour toute donnée endoscopique elliptique de $\tilde M$ et pour tout $f \in I(\tilde G, \omega)$ nulle près des éléments exceptionnels s'il y en a, la fonction $\epsilon_{\tilde M}^{\mathbf{M}'}(f)$ est identiquement nulle. Il suffit donc de montrer que la fonction $\epsilon(\mathbf{M}', \delta)$ est identiquement nulle. Or on a vu en 3.5.1 que cette fonction est à valeurs dans l'ensemble des nombres complexes purement imaginaires. Le lemme précédent assure que puisque $\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_\nabla$ elle est aussi à valeurs dans l'ensemble des nombres réels. Elle est donc nulle.

**Remarque** *L'hypothèse du corollaire précédent équivaut à ce que les facteurs de transfert puissent être choisis à valeurs réelles (ce qui force* $\omega^2 = 1$*). On peut démontrer ce corollaire plus directement.*

En effet, pour $\gamma, \gamma'$ des éléments semi-simples réguliers de $\tilde M$, on pose

$$a(\gamma, \gamma') := c^{-1} \sum_{\mathbf{M}', \delta} \Delta_{\mathbf{M}'}(\delta, \gamma) \Delta_{\mathbf{M}'}(\delta, \gamma')^{-1} \epsilon(\mathbf{M}', \delta),$$

où $c$ est le nombre d'éléments de l'ensemble de sommation. On calcule directement, en utilisant les inversions des facteurs de transfert :

$$I_{\tilde M}^{\tilde G}(\gamma, \omega, f) - I_{\tilde M}^{\tilde G, \mathcal{E}}(\gamma, f) = \sum_{\gamma'} a(\gamma, \gamma') I^{\tilde M}(\gamma', \omega, f_{\tilde M}),$$

où la somme sur $\gamma'$ porte sur des représentants des classes de conjugaison d'éléments semi-simples dans $\tilde M$. Les nombres $a(\gamma, \gamma')$ sont purement imaginaires sous l'hypothèse de la remarque puisque c'est le cas des nombres

$\epsilon(\mathbf{M}',\delta)$. On applique l'égalité ci-dessus à $f$ remplacé par $\overline{f}$. Le terme de gauche est remplacé par son conjugué puisque $\omega^2=1$ et $I^{\tilde M}(\gamma',\omega,f_{\tilde M})$ aussi. Donc on obtient, en appliquant d'abord l'égalité à $\overline{f}$

$$\overline{I_{\tilde M}^{\tilde G}(\gamma,\omega,f)-I_{\tilde M}^{\tilde G,\mathcal{E}}(\gamma,f)}=\sum_{\gamma'}a(\gamma,\gamma')\overline{I^{\tilde M}(\gamma',\omega,f_{\tilde M})}$$

puis en conjuguant simplement l'égalité pour $f$

$$\overline{I_{\tilde M}^{\tilde G}(\gamma,\omega,f)-I_{\tilde M}^{\tilde G,\mathcal{E}}(\gamma,f)}=-\sum_{\gamma'}a(\gamma,\gamma')\overline{I^{\tilde M}(\gamma',\omega,f_{\tilde M})}.$$

Cela force la nullité du terme de gauche.

**Remarque** *Les hypothèses de la remarque précédente sont satisfaites si $\omega=1$ pour $GL(n)$ tordu que ce soit dans la situation du changement de base ou de la torsion avec l'automorphisme $g\mapsto {}^tg^{-1}$.*

## 3.6 Une construction uniforme d'extensions de corps de nombres

**Lemme** *Ici $F$ est un corps global et $S$ est un ensemble fini de places de $F$. On fixe aussi un entier $d$ et pour tout $v\in S$, on fixe une extension galoisienne $K^v$ de $F_v$ de degré inférieur ou égal à $d$. Alors il existe un corps $K$ qui est une extension galoisienne de $F$ de degré inférieur ou égal à $d!$ telle que tout $v\in S$ et pour toute place $v'$ de $K$ au-dessus de $v$, on ait $K_{v'}=K^v$.*

Pour $v\in S$, on fixe un polynôme de degré $d$ à coefficients dans $F_v$ dont les racines sont distinctes (mais peuvent être dans $F_v$) et engendrent $K^v$ sur $F_v$. On note

$$X^d+a_{1,v}X^{d-1}+\cdots+a_{d,v}$$

ces polynômes. On fixe $\epsilon>0$. Par approximation forte, on fixe un polynôme à coefficients dans $F$

$$X^d+a_1X^{d-1}+\cdots+a_d$$

tel que pour tout $i\in[1,d]$ et pour tout $v\in S$, on ait $|a_i-a_{i,v}|_v\le\epsilon$. Et on note $K$ l'extension de $F$ engendrée par toutes les racines de ce polynômes. Pour $\epsilon$ suffisamment petit, $K$ répond aux conditions du lemme.

## 3.7 Une réduction étonnament simple

On revient momentanément à la situation locale mais on suppose qu'elle vient d'une situation globale ; on verra en 7.4 et 7.6 que l'on peut approximer les situations locales et que ce n'est donc pas restrictif. On note donc $F$ le corps de nombres, $v_0$ la place qui nous intéresse. On fixe aussi $\tilde{M}, \omega$ et $\mathbf{M'}$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}, \omega$. On a aussi un élément $\gamma \in \tilde{M}(F)$ un élément rationnel que l'on suppose semi-simple et régulier, et un élément $\delta \in \tilde{M}'(F)$ qui correspond à $\gamma$. On fixe un ensemble de places $V$ vérifiant les conditions de la deuxième hypothèse clé de 3.5 pour $\mathbf{M'}$ et $\delta$.

**Lemme** *On suppose que $\tilde{M}$ n'est pas un tore et que les hypothèses de 3.5 sont satisfaites. Alors $\epsilon_{v_0}(\mathbf{M'}, \delta) = 0$.*

On reprend la notation $\tilde{T}$ pour un tore tordu maximal contenant $\gamma$. Si $\tilde{T}$ n'est pas elliptique dans $\tilde{M}$, par les formules de descente, en toute place $v$, $\epsilon_v(\mathbf{M'}, \delta) = 0$ pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M'}$ et pour tout $\delta$ dont la classe stable correspond à $\gamma_v$ et il n'y a rien de non trivial à démontrer. Puisque le lemme porte sur la place $v_0$, on suppose plus précisément que $\tilde{T}$ est sur $F_{v_0}$ un tore elliptique de $\tilde{M}$. On suppose comme dans l'énoncé que $\tilde{M}$ n'est pas un tore et on va conclure. On note $T$ le tore sous-jacent à $\tilde{T}$.

On note $d$ le degré d'une extension galoisienne de $F$ qui déploie $T$ et on note $S$ l'ensemble des places de $F$ qui contient $v_0$, $V$ et l'ensemble des places $v'$ de $F$ tel que l'on ait $p_{v'} \leq N(G)e_{v'}d!$ où ces termes sont définis en [21] 1.1 (c'est une condition technique). Pour tout $v \in S$ on fixe $K^v$ : si $v = v_0$, $K^{v_0} = F_{v_0}$ et si $v \neq v_0$, $K^v$ est une extension galoisienne de $F_v$ qui déploie $T_v$ et qui est de degré inférieur ou égal à $d$. Avec le lemme de 3.6, on fixe une extension galoisienne, $K$, de $F$ de degré inférieur ou égal à $d!$ et qui en toute place $v'$ de $K$ au-dessus d'une place $v$ de $F$ qui est dans $S$, $K_{v'} \simeq K^v$. On considère la situation sur $K$ au lieu de la considérer sur $F$. Au dessus de $v_0$, on n'a pas changé grand chose, on a démultiplié la place $v_0$ ; en particulier $\mathbf{M'}$ définit naturellement une donnée endoscopique de $\tilde{M}$ sur $K$ qui se localise en toute place au dessus de $v_0$ en la donnée endoscopique de départ. Donc elle est elliptique. Le nouveau $V_{ram}$ est inclus dans $S_K$ où $S_K$ est l'ensemble des places de $K$ situées au dessus d'une place de $S$ : grâce à la définition de $S$, la condition technique qui doit être satisfaite hors de $V_{ram}$ de [21] 1.1, l'est grâce à la définition de $S$ et les conditions de non ramification hors de $V_{ram}$ proviennent de celles qui sont déjà vérifiées avant le changement de corps. Mais en toute place $v'$ de $S_K$ qui n'est pas au-dessus de $v_0$, $\gamma_{v'}$ n'est plus elliptique. Donc on sait que $\epsilon_{\tilde{M}}(f_{v'})$ est nulle sur la classe de conjugaison stable de $\gamma_{v'}$ et donc que $\epsilon_{v'}(\mathbf{M'}, \delta) = 0$. La deuxième hypothèse clé de 3.5

donne alors simplement :

$$D\epsilon_{v_0}(\mathbf{M}',\delta)=0, \tag{1}$$

où $D$ est le degré de $K$ sur $F$. Ceci est la nullité cherchée.

**Remarque** *Pour éviter de faire deux fois la même preuve, on remarque que la démonstration que l'on vient de faire donne aussi le résultat suivant : supposons que l'on sache que, pour tout corps local $F_{v'}$, $\epsilon_{\tilde{M}}(f_{v'})$ est nul (avec les notations ci-dessus) si $\tilde{M}$ est un tore déployé sur $F_{v'}$ , alors on a aussi $\epsilon_{v_0}(\mathbf{M}',\delta)=0$ sans restriction sur $\tilde{M}$.*

Grâce au résultat précédent, on suppose que $\tilde{M}$ est un tore. Comme dans la preuve ci-dessus, on déploie $\tilde{M}$ sur une extension galoisienne puis on fixe $K$ qui déploie $\tilde{M}$ sur $S-\{v_0\}$ où $S$ est comme ci-dessus et tel que, au dessus de $v_0$, l'extension de corps est totalement scindée. Et on a encore (1) qui donne le résultat cherché.

## 3.8 Le cas des tores déployés

Dans le cas de l'endoscopie ordinaire, le cas des tores déployés est trivial, il n'en est pas de même pour l'endoscopie tordue. C'est ici que l'on va utiliser 3.5.2. On rappelle qu'à toute donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ est attaché un caractère $\omega_\sharp$ du groupe $M_\sharp(F):=(M/Z(M)^\theta)(F)$ ([28] 2.7), cela se fait d'abord localement, puis comme ce caractère est une propriété de transformation des facteurs de transfert, ces caractères locaux donnent un caractère automorphe du groupe $M_\sharp$. Le caractère $\omega_\sharp$ dépend de la donnée endoscopique, on le note donc plutôt $\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}$. La restriction de ce caractère à l'image de $M(F)$ dans $M_\sharp(F)$ est $\omega$. Par la définition même, on voit que

$$\omega_\sharp^{\mathbf{M}'_\nabla}=\overline{\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}}=(\omega_\sharp^{\mathbf{M}'})^{-1}.$$

**Lemme** *La situation est locale et on suppose que $\tilde{M}$ est un tore déployé. L'application qui a une classe d'isomorphie, $\mathbf{M}'$ de données endoscopiques elliptiques de $\tilde{M}$, $\omega$, associe le caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}$ induit une bijection de cet ensemble de classes d'isomorphie sur l'ensemble des caractères de $M_\sharp(F)$ dont la restriction à l'image de $M(F)$ est $\omega$. En particulier les données endoscopiques elliptiques fixes par l'opération $\nabla$ (cf. 3.5.2) sont exactement les données endoscopiques pour lesquelles $(\omega_\sharp^{\mathbf{M}'})^2=1$*

Comme on suppose que $\tilde{M}$ est un tore déployé, tout se simplifie : une donnée endoscopique est un triplet $(M',\mathcal{M}',\hat{s})$. L'élément $\hat{s}\in\hat{\tilde{M}}$ est déterminé modulo $Z(\hat{M}) = \hat{M}$. Ainsi on prend $\hat{s} = \hat{\theta}$. Alors $\hat{M}' = \hat{M}^{\hat{\theta},0}$. Et $\mathcal{M}'$ est uniquement déterminé par un homomorphisme de $W_F$ dans $\hat{M}/\hat{M}^{\hat{\theta},0}$ qui se relève en une application $w \in W_F \mapsto a_w \in \hat{M}$ vérifiant que l'application $w \mapsto a_w^{-1}\hat{\theta}(a_w)$ est le cocycle de $W_F$ dans $\hat{M}$ donnant le caractère $\omega$ de $M(F)$. Or $M_\sharp = M/M^\theta$ est lui aussi un tore ; il s'identifie (comme groupe algébrique) à $(1-\theta)M$. Son groupe dual est alors $\hat{M}/\hat{M}^{\hat{\theta},0}$. Et l'application $w \mapsto a_w$ après passage au quotient par $\hat{M}^{\hat{\theta},0}$ est par définition un morphisme de groupes. Il est facile de voir que ce morphisme correspond exactement au caractère $\omega_\sharp$ de la donnée endoscopique. La réciproque est claire : soit $w \mapsto a_w$ une application de $W_F$ dans $\hat{M}$ qui après passage au quotient par $\hat{M}^{\hat{\theta},0}$ est un morphisme et qui est tel que $w \mapsto a_w^{-1}\hat{\theta}(a_w)$ soit le cocycle correspondant à $\omega$. On définit alors $\mathcal{M}'$ comme le sous-groupe de $\hat{M}$ engendré par $\hat{M}^{\hat{\theta},0}$ et les éléments $(a_w, w)$ et c'est la donnée endoscopique nécessairement elliptique cherchée.

**Corollaire** *La situation est locale ; on suppose que $\tilde{M}$ est un tore déployé et que $\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}$ est un caractère trivial. Alors $\epsilon(\mathbf{M}', \delta) = 0$.*

On vérifie que sous les hypothèses faites, $\mathbf{M}'$ satisfait aux conditions du corollaire de 3.5.2 grâce au lemme précédent.

**Lemme** *On suppose que $\omega$ est d'ordre fini, alors $\epsilon(\mathbf{M}', \delta) = 0$ pour toute donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}, \omega$.*

Le fait que $\omega$ soit d'ordre fini, entraîne le fait que pour tout $\mathbf{M}'$, le caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}$ est lui aussi d'ordre fini. Par exemple si la place est une place complexe, cela force $\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}$ à être trivial et on applique alors le corollaire précédent. En général on se ramène au cas où $\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}$ est trivial. On se remet dans une situation globale, on fixe la place $v_0$ qui nous intéresse et $\omega$ est toujours d'ordre fini. On note $d$ le degré d'une extension galoisienne de $F$ qui trivialise $\omega$ et on procède comme dans 3.7, en construisant une extension galoisienne de $F$ telle qu'on ne change rien au-dessus de $v_0$, et en toute place $v \neq v_0$ appartenant à l'ensemble $S$ construit en 3.7, le caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}$ est trivial. On conclut alors comme dans 3.7.

**Remarque** *On suppose qu'il existe un caractère $\mu$ de $G(F)$ tel que $\omega(g) = \mu(g\theta(g)^{-1})$ où $\theta$ est $ad_{\gamma_0}$ pour $\gamma_0 \in \tilde{G}(F)$. Alors l'application $f \mapsto \epsilon_{\tilde{M}}( \,, \omega, f)$ est nulle et en particulier toutes les fonctions $\epsilon(\mathbf{M}', \,)$ sont identiquement nulles.*

Le choix de $\theta$ dépend du choix d'un élément $\gamma_0$ de $\tilde{G}(F)$ ; fixons donc $\gamma_0 \in \tilde{G}(F)$ ; on peut changer de $\theta$, cela ne change pas $\mu$. On définit la fonction $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{G}$ en posant $\tilde{\mu}(\gamma) = \mu(g_0)$ où $g_0$ est l'unique élément de $G(F)$ tel que $g_0\gamma_0 = \gamma$. Evidemment pour tout $g, g' \in G(F)$, on a :

$$\tilde{\mu}(g\gamma g') = \mu(gg_0\theta(g')) = \mu(g)\mu(\theta(g)')\tilde{\mu}(\gamma).$$

On associe ainsi à tout élément, $f$, de $I(\tilde{G}, \omega)$ un élément $f_\mu := \tilde{\mu}f$ de $I(\tilde{G}, 1)$. Les $\omega$-intégrales orbitales pondérées de $f$ deviennent des intégrales orbitales pondérées de $f_\mu$ :

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\omega, \gamma, f) = \tilde{\mu}(\gamma)I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, f_\mu).$$

Le point à vérifier est donc que

$$I_{\tilde{M},\omega}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, f) = \tilde{\mu}(\gamma)I_{\tilde{M},1}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, f_\mu).$$

On vérifie aisément, qu'en notant $a_\mu()$ un cocycle à valeurs dans $Z(\hat{G})$ définissant $\mu$, il existe une bijection entre les classes d'isomorphie de données endoscopiques elliptiques pour $\tilde{G}$ et le cocycle fixé définissant le caractère $\omega$ de $G$ et les données endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$ sans caractère et cette bijection est donnée simplement en modifiant $\mathcal{G}'$ en $\mathcal{H}'$ où si $(x(w), w) \in \mathcal{G}'$ pour $w \in W_F$ alors $(a_\mu(w)x(w), w) \in \mathcal{H}'$. Notons $\mathbf{G}' \mapsto \mathbf{H}'$ cette correspondance ; il faut montrer que les facteurs de transfert se déduisent par multiplication par $\mu(g_0)$ où $g_0$ relie $\gamma$ au point de base choisi pour normaliser les facteurs de transfert. Précisément :

$$\Delta^{\tilde{G},\mathbf{G}'}(\gamma, \delta) = \mu(g_0)\Delta^{\tilde{G},\mathbf{H}'}(\gamma, \delta).$$

On revient aux définitions rappelées en [28] 2.2. Ce qui change est le cocycle $w \mapsto \hat{V}_1(w)$ qui est multiplié par $a_\mu(w)^{-1}$ (cela intervient dans la définition de $t_T(w)$). Donc $\Delta_{imp}$ a bien la propriété de transformation écrite.

Avec cela, on en déduit que $f^{\mathbf{G}'} = (f_{\tilde{\mu}})^{\mathbf{H}'}$ en regardant le transfert des intégrales orbitales des éléments semi-simples réguliers. D'où l'assertion cherchée. Ce raisonnement prouve la remarque car il nous ramène au cas $\omega = 1$ qui est traité par le lemme précédent.

## 3.9 Fin des réductions

**Proposition** *On fait les hypothèses de 3.5 et alors l'application*

$$f \mapsto \epsilon_{\tilde{M}}(f)$$

*est identiquement nulle.*

Il ne nous reste plus qu'à faire le cas où $\tilde{M}$ est un tore déployé et où $\omega$ est un caractère qui n'est pas de la forme $(1-\theta)\mu$. On suppose donc que $\tilde{M}$ est un tore déployé et il n'y a rien à démontrer si $\omega$ n'est pas trivial sur $M(F)^\theta$ où $\theta$ est l'automorphisme obtenu par conjugaison sous n'importe quel élément de $\tilde{M}$.

On globalise ; si $v_0$ est une place complexe on globalise avec une extension totalement imaginaire $F$ de $\mathbb{Q}$. D'abord par une extension convenable, $K'$ de $F$, on se ramène au cas où $\omega \circ Norm_{K'/F}$ est non ramifié en toutes les places finies. On note $d$ le degré de cette extension. On remarque que pour toute place $v$ finie de $K'$, si un caractère de $G(K')$ est non ramifié, il est uniquement déterminé par l'image du Frobenius, $Fr_v$ dans $Z(\hat{G})$. On note $a_{v,Fr,\omega}$ l'élément de $\hat{G}$ correspondant à cet élément. Comme $\omega$ est la restriction des caractères $\omega_\sharp$ décrit en 3.8, $a_{v,Fr,\omega}$ est nécessairement dans $(1-\hat{\theta})\hat{G}$. (Cela traduit le fait que $\omega$ est nul sur $G(F)^\theta$). On fixe $z_{v,Fr} \in \hat{G}$ tel que $a_{v,Fr,\omega} = z_{v,Fr}\hat{\theta}(z_{v,Fr})^{-1}$. On note $\mu_v$ le caractère non ramifié pour lequel qui $z_{v,Fr}$ est l'image du Frobenius (via la théorie du corps de classe). Alors $(\omega\circ Norm_{K'/F})_v = \mu_v(\mu_v\circ\theta)^{-1}$. Par la méthode de 3.7 et grâce à la remarque de 3.8 on se débarrasse ainsi des places finies pour obtenir le résultat aux places complexes. Ensuite, puisqu'on a le résultat aux places complexes, on peut encore appliquer la méthode de 3.7 et le même raisonnement que ci-dessus pour n'avoir que la place $v_0$ qui nous intéresse et on conclut.

# 4 Les caractères pondérés $\omega$-équivariants et leur stabilisation

Comme pour les intégrales orbitales pondérées invariantes, on a une définition locale des caractères pondérés invariants et une définition semi-globale de ces caractères. La définition semi-globale se ramenant à la définition locale par une formule de scindage. Avant de revenir sur ces définitions, il faut considérer les places non ramifiées hors de $V$, celles où l'on ne rend pas les objets invariants. Donc ici $F$ est un corps de nombres.

## 4.1 Caractère pondéré aux places non ramifiées et stabilisation

On fixe $V$ un ensemble fini de places de $F$ contenant $V_{ram}$ (cf. [21] 1.1 pour la définition de $V_{ram}$). On fixe pour $v \notin V_{ram}$, $\tilde{K}_v$ un sous-espace hyperspécial (cf. [28] 6.1 pour la définition de $\tilde{K}_v$). On note $1_{\tilde{K}^V}$ la fonction caractéristique du sous-espace compact $\tilde{K}^V$ de $\tilde{G}(F^V)$. La notion d'invariance n'a pas de sens dans cette situation, par contre on peut calculer $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi^V, 1_{\tilde{K}^V})$ et stabiliser cette formule. C'est fait en [7] que l'on reprend ici pour adapter les coefficients à la situation tordue. On utilise la classification de Langlands des représentations non ramifiées des groupes p-adiques. Ainsi les caractères pondérés pour les représentations non ramifiées et pour l'unité de l'algèbre de Hecke sphérique hors de $V$ s'expriment en termes de fonctions $L$. On va les calculer.

### 4.1.1 Rappel

On rappelle le lemme suivant qui s'inspire fortement du lemme 2 de [7] pour pouvoir y référer facilement. Soit $\tilde{M}$ un sous-espace de Levi de $\tilde{G}$. On dispose des $L$-groupes, ${}^LG, {}^LM$ et de l'automorphisme $\hat{\theta}$ et des composantes neutres $\hat{M}$ et $\hat{G}$ des $L$-groupes. On fixe aussi une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ de $\tilde{G}, \omega$ et $\mathbf{M}'$ de $\tilde{M}, \omega$. On suppose que $\mathbf{M}'$ est un espace de Levi de $\mathbf{G}'$. Alors :

**Lemme** *On a l'égalité $Z(\hat{M})^{\hat{\theta}} = Z(\hat{G})^{\theta}(Z(\hat{M})^{\hat{\theta}})^0$. Et aussi $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} = Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}(Z(\hat{M}))^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$*

**Corollaire** *On a $Z(\hat{G}) \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0} \subset Z(\hat{G}')$ et*

$$i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \mathbf{G}') = |Z(\hat{G}') \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}/Z(\hat{G}) \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}|^{-1}.$$

La première assertion est claire car $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0} = Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0}$ par ellipticité. D'après le lemme précédent, l'application naturelle

$$Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}')^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{G}) \to Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{M}')^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{M})$$

est surjective. Et $i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}')$ est l'inverse du nombre d'éléments du noyau. Or un élement $z' \in Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}$ est dans le noyau si son image dans $Z(\hat{G}')/Z(\hat{G}') \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ est nulle. C'est-à-dire $z' = zm$ avec $z \in Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ et $m \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. Ainsi $m \in \hat{G}'$ et $z \in Z(\hat{G}) \cap \hat{G}'$ et $z \in Z(\hat{G}')$, plus précisément $z \in Z(\hat{G}')^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{G})$. Ainsi le noyau est exactement isomorphe à

$$Z(\hat{G}') \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}/Z(\hat{G}) \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}.$$

Cela termine la preuve.

### 4.1.2 Factorisation des facteurs $L$

On fixe un sous-espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et on fixe $\alpha$ un caractère, non trivial, de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. On suppose que ce caractère intervient dans l'action de $Z(\hat{M})^{\hat{\theta},0}$ dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$ ; sinon la fonction attachée à un tel $\alpha$ est, par définition, la fonction identiquement 1. Avec cette hypothèse, il est clair qu'il existe un unique prolongement de $\alpha$ à $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ trivial sur $Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. On peut donc voir indifféremment $\alpha$ comme un caractère de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ trivial sur $Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ ou de la composante neutre de ce groupe.

On note $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha]$ l'espace propre de valeur propre $\alpha$ pour l'action de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$. On remarque que $\hat{M}$ et plus généralement le $L$-groupe de $M$, agit trivialement par conjugaison dans $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ et agit donc par conjugaison dans $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha]$.

Soit $v$ une place de $F$ et $c_v$ un homomorphisme de $W_{F_v}$ dans le groupe dual de $M$. On a le facteur $L$, $L_v(\alpha, c_v, s)$ qui correspond à la représentation de $W_{F_v}$ dans $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha]$ via le composé de $c_v$ avec la représentation adjointe de ${}^LM$ dans $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha]$. Il est clair que ce facteur $L$ est un produit fini d'objets définis en [7], précisément le produit des $L_v(\beta, c_v, s)$ où $\beta$ parcourt l'ensemble des caractères de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$ ayant $\alpha$ comme restriction à $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. On fixe encore $V$ un ensemble fini de places de $V$ contenant $V_{ram}$ et on suppose que $c_v$ est donné pour tout $v \notin V$ ; on note $c^V$ le produit de ces $c_v$. On définit alors $L^V(\alpha, c^V, s)$ en faisant le produit sur toutes les places $v$ en tant que fonction méromorphe de $s$ : ceci est bien défini sous des hypothèses assez faibles sur $c^V$, puisqu'il suffit que ce soit vrai pour les fonctions $L^V(\beta, c^V, s)$, on peut donc prendre les hypothèses de [7] qui suivent la formule (1) du paragraphe 2. Pour nous, il suffit par exemple que $c^V$ soit la composante non ramifiée hors de $V$ d'une représentation automorphe de $\tilde{M}$ puisque cela donne aussi une représentation automorphe de $M$. On peut aussi poser l'hypothèse plus faible que $c^V$ soit la composante non ramifiée hors de $V$ d'une représentation automorphe d'une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'$ de $\tilde{M}, \omega$ ; en fait ce sont les représentations des données auxiliaires attachées à une donnée endoscopique elliptique qui interviennent. Les représentations considérées ont alors en restriction au tore induit central un caractère déterminé par la donnée endoscopique et le choix de la donnée auxiliaire (cf [7] paragraphe 2, le même phénomène existant dans le cas non tordu). On dira pour simplifier qu'une telle représentation est une représentation de $\mathbf{M}'$.

On peut encore affaiblir l'hypothèse sur $c^V$ de la façon suivante. On définit de façon inductive la notion de caractère quasi-automorphe de l'algèbre de Hecke sphérique de $M$. Un caractère $c^V$ est dit quasi-automorphe si :

- ou bien il est automorphe (disons précisément qu'il intervient dans la partie discrète de la formule des traces tordue pour $\tilde{M}$, cf. 5.1 ci-dessous) ;

- ou bien il existe une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'$ de $\tilde{M}$, $\omega$, relevante et non ramifiée hors de $V$, avec $M' \neq M$ dans le cas où $M$ est quasi-déployé, $\tilde{M}$ est à torsion intérieure et $\omega = 1$, de sorte que $c^V$ soit le transfert d'un caractère quasi-automorphe de $\mathbf{M}'$.

Remarquons qu'un caractère quasi-automorphe est unitaire, c'est-à-dire que chaque représentation correspondant à $c_v$ pour $v \notin V$ est unitaire.

Pour de tels caractères, la factorisation que l'on va démontrer ci-dessous, en suivant la méthode de [7], montre que les fonctions $L$ partielles sont bien définies comme fonctions méromorphes.

Soit $\mathbf{M}' =: (M', \mathcal{M}', \hat{s}_{M'})$ un espace endoscopique elliptique de $\tilde{M}$ ; on suppose que $c^V$ est à valeurs dans $\mathcal{M}'$ et que $c^V$ est quasi-automorphe pour $\mathbf{M}'$.

On écrit $\hat{s}_{M'} = s_{M'}\hat{\theta}$. Soit $s \in s_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ on associe un espace endoscopique $\mathbf{G}' = (G'(\hat{s}), \mathcal{G}', \hat{s} = s\hat{\theta})$ de $\tilde{G}$ où tout simplement, $\hat{G}' := \hat{G}'(\hat{s})$ est la composante neutre du centralisateur de $\hat{s}$ dans $\hat{G}$, $\mathcal{G}' = \hat{G}'\mathcal{M}'$, ce qui donne une action de $\Gamma_F$ sur $\hat{G}'$ et un groupe quasidéployé $G'$. Avec l'égalité $(Z(\hat{M}')^{\Gamma_F})^0 = (Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}})^0$, on voit $\alpha$ comme un caractère de $(Z(\hat{M}')^{\Gamma_F})^0$ et on le note alors $\alpha'$. On définit alors $L_{G'(\hat{s})}(\alpha', c^V, s)$ (avec un double emploi de la lettre $s$ qu'on espère compréhensible). On remarque que $\hat{\mathfrak{g}}'[\alpha'] = \hat{\mathfrak{g}}[\alpha] \cap \hat{\mathfrak{g}}'$ et que cet espace peut être vide, la fonction est alors égale à 1. Clairement $\hat{\mathfrak{g}}'$ est l'algèbre de Lie du centralisateur de $\hat{s}$ agissant par conjugaison dans $\hat{\mathfrak{g}}$. Soit $z \in Ker\,\alpha$ et considérons la donnée endoscopique associée à $\hat{s}z$. On a : $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha] \cap Cent_{\hat{\mathfrak{g}}} s \subset \hat{\mathfrak{g}}[\alpha] \cap Cent_{\hat{\mathfrak{g}}} \hat{s}z$ puisque $z$ commute à $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha]$ et par la même raison l'inclusion inverse est vraie, d'où l'égalité $L^V_{G'(\hat{s})}(\alpha', c^V, s) = L^V_{G(sz)}(\alpha', c^V, s)$.

**Proposition** $L^V_G(\alpha, c^V, s) = \prod_{\hat{s} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} Ker\,\alpha} L^V_{G'(\hat{s})}(\alpha', c^V, s)$ *et le membre de gauche est une fonction méromorphe de $s$.*

Comme $\hat{s}_{M'}$ commute aux éléments de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, il agit par conjugaison dans $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha]$ et on décompose $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha]$ sous l'action de $\hat{s}_{M'}$. L'élément $\hat{s}_{M'}$ opère donc de façon semi-simple dans cet espace vectoriel. Ainsi,

$$\hat{\mathfrak{g}}[\alpha] = \oplus_x \hat{\mathfrak{g}}[\alpha, x], \tag{1}$$

où $x$ parcourt l'ensemble des valeurs propres de l'action de $\hat{s}_{M'}$ ; en particulier $x \neq 0$ puisque $\hat{s}_{M'}$ est un élément inversible. Pour toute valeur propre $x$ intervenant, on fixe $t_x \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$ tel que $\alpha(t_x) = x^{-1}$ et on pose $\hat{s}_x := \hat{s}_{M'} t_x$ ;

évidemment, $t_x$ est bien déterminé modulo $Ker\,\alpha$. On note $\mathbf{G}'(\hat{s}_x)$ l'espace endoscopique correspondant à $\hat{s}_x$ et $\mathbf{M}'$. On remarque que $\hat{s}_x$ commute aux éléments de $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha, x]$ et cet espace est donc inclus dans $\hat{\mathfrak{g}}'(\hat{s}_x)$, d'où

$$\hat{\mathfrak{g}}[\alpha, x] \subset \hat{\mathfrak{g}}'(\hat{s}_x)[\alpha'].$$

L'inclusion inverse est tout aussi claire d'où $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha, x] = \hat{\mathfrak{g}}'(\hat{s}_x)[\alpha']$.

Réciproquement soit $\hat{s} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$, c'est-à-dire $\hat{s} = \hat{s}_{M'} z$ avec $z \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$. On suppose que $\hat{\mathfrak{g}}'(\hat{s})[\alpha'] \neq 0$ ; cela veut dire qu'il existe $v \in \hat{\mathfrak{g}}'(\hat{s})[\alpha']$ non nul commutant à $\hat{s}$ ou avec ce qui précède appartenant à $\hat{\mathfrak{g}}[\alpha, \alpha(z)^{-1}]$. Ainsi $\alpha(z)^{-1}$ est l'un des $x$ considérés ci-dessus et $z \in t_x Ker\,\alpha$. Ainsi (1) se récrit

$$\hat{\mathfrak{g}}[\alpha] = \oplus_{\hat{s} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}} / Ker\,\alpha} \hat{\mathfrak{g}}[\alpha] \cap \hat{\mathfrak{g}}'(\hat{s}).$$

Et l'égalité du lemme résulte de cette décomposition par définition des facteurs $L$. Comme on l'a rappelé ci-dessus, la fonction $L_G^V(\alpha, c^V, s)$ est méromorphe en $s$ si $c^V$ est vraiment automorphe. Si $c^V$ n'est pas automorphe, il provient d'une donnée $\mathbf{M}'$ avec $M' \neq M$. On applique l'égalité que l'on vient de démontrer. Par récurrence, les termes du membre de droite sont méromorphes en $s$ donc le membre de gauche aussi. C'est exactement la démonstration de [7] que l'on a recopiée.

### 4.1.3 Définition des caractères pondérés non ramifiés dans le cas d'un espace de Levi maximal

Soit $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M}, \mathbb{C}}$. Ici on considère les éléments invariants sous l'action de $\tilde{M}$. On identifie, $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}, \mathbb{C}}$ à un sous-groupe des homomorphismes non ramifiés de $W_{F^V}$ dans $Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0}$. Pour tout $\lambda$ on tensorise $c^V$ (notations du paragraphe précédent) par $\lambda$ et on note $c^V_\lambda$ le résultat. On remarque alors que si $c^V$ est à valeurs dans $\mathcal{M}'$ comme précédemment, il en est de même de $c^V_\lambda$. Pour $\alpha$ comme dans le paragraphe précédent, on définit $L^V(\alpha, c^V_\lambda, s)$ ou $L(\alpha, c^V_\lambda, s)$ (le $V$ étant déjà dans la notation $c^V$). On remarque que pour $s$ fixé, cette fonction de $\lambda$ est méromorphe non identiquement nulle : en effet en voyant $\lambda$ comme un homomorphisme de $W_{F^V}$ dans $Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0}$, on considère $\alpha \circ \lambda$ comme un homomorphisme de $W_{F^V}$ dans $\mathbb{C}^*$, non ramifié. On voit $d\alpha$ comme une forme linéaire sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}, \mathbb{C}}$ et $d\alpha(\lambda) \in \mathbb{C}$ est tel que le caractère précédent soit $|\,|_{W_F}^{d\alpha(\lambda)}$. On a ainsi $L(\alpha, c^V_\lambda, s) = L(\alpha, c^V, d\alpha(\lambda) + s)$. On pose alors

$$r(\alpha, c^V, \lambda) := L(\alpha, c^V_\lambda, 0) / L(\alpha, c^V_\lambda, 1).$$

Et sous l'hypothèse que $c^V$ est à valeurs dans $\mathcal{M}'$, on a encore une factorisation :

$$r(\alpha, c^V, \lambda) = \prod_{\hat{s} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0}/Ker(\alpha)} r^{G'(\hat{s})}(\alpha', c^V, \lambda).$$

On pose donc, pour tout $\lambda, \Lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$

$$r(\alpha, c^V, \Lambda, \lambda) :=$$

$$r(\alpha, c^V, \lambda + 1/2\Lambda)^{-1} r(\alpha, c^V, \lambda + \Lambda) r(-\alpha, c^V, \lambda + 1/2\Lambda)^{-1} r(-\alpha, c^V, \lambda + \Lambda),$$

où $-\alpha$ est la notation additive pour le caractère inverse de $\alpha$ qui jouit des mêmes propriétés que $\alpha$.

La fonction en $\Lambda$ ci-dessus est, comme on l'a vu en 4.1.2 une fonction de $d\alpha(\Lambda)$ ; on écrit alors plus simplement $\tilde{r}^V(\alpha, c^V_\lambda, s) := r^V(\alpha, c^V, \Lambda, \lambda)$ où $s = d\alpha(\Lambda)$.

**Lemme** *On suppose que $c^V$ est quasi-automorphe. La dérivée en $s = 0$ de $\tilde{r}^V(\alpha, c^V_\lambda, s)$ est holomorphe en $\lambda$ au voisinage de tout point $\lambda_0$ imaginaire.*

On écrit $\tilde{r}(\alpha, c^V_\lambda, s)$ comme fonction méromorphe de $s$ et de $\lambda$. On calcule sa dérivée logarithmique en $s$ et on obtient :

$$\tilde{r}'(\alpha, c^V_\lambda, s)\tilde{r}(\alpha, c^V_\lambda, s)^{-1} = -1/2 r'(\alpha, c^V_\lambda, s/2) r(\alpha, c^V_\lambda, s/2)^{-1}$$

$$+ r'(\alpha, c^V_\lambda, s) r(\alpha, c^V_\lambda, s)^{-1} - 1/2 r'(-\alpha, c^V_\lambda, s/2) r(-\alpha, c^V_\lambda, s/2)^{-1}$$

$$+ r'(-\alpha, c^V_\lambda, s) r(-\alpha, c^V_\lambda, s)^{-1}$$

On fait $s = 0$ et on obtient

$$\tilde{r}'(\alpha, c^V_\lambda, 0) = 1/2 \Big( r'(\alpha, c^V_\lambda, 0)/r(\alpha, c^V_\lambda, 0) + r'(-\alpha, c^V_\lambda, 0)/r(-\alpha, c^V_\lambda, 0) \Big) \quad (1)$$

ce qui fort heureusement est une formule symétrique en $\alpha$ et $-\alpha$. On fixe $\lambda_0$ imaginaire et on pose $\lambda = \lambda_0 + \mu$. On a alors

$$r'(\alpha, c^V_\lambda, 0)/r(\alpha, c^V_\lambda, 0) = r'(\alpha, c^V_{\lambda_0}, d\alpha(\mu))/r(\alpha, c^V_{\lambda_0}, d\alpha(\mu));$$

$$r'(-\alpha, c^V_\lambda, 0)/r(-\alpha, c^V_\lambda, 0) = r'(-\alpha, c^V_{\lambda_0}, -d\alpha(\mu))/r(-\alpha, c^V_{\lambda_0}, -d\alpha(\mu))$$

Pour éviter les confusions, on pose $\sigma := d\alpha(\mu)$ et on développe la fonction écrite en (1) au voisinage de $\sigma = 0$. Pour $\eta = \pm$, on note $d_\eta$ l'ordre en $\sigma = 0$ de la fonction $r(\eta\alpha, c^V_{\lambda_0}, s)$ et on voit que (1) est la somme de fonctions holomorphes en $\sigma = 0$ avec $(d_+ - d_-)\sigma^{-1}$. Le lemme est donc équivalent à montrer que $d_+ = d_-$.

Comme on suppose que $\phi$ est unitaire et que $\lambda_0$ est imaginaire, on peut remplacer $c^V$ par $c^V_{\lambda_0}$ et oublier $\lambda_0$. On note $c^{V*}$ le morphisme correspondant à la représentation contragrédiente de la représentation définie par $c^V$. On vérifie sur les définitions que $r(-\alpha, c^V, s) = r(\alpha, c^{V*} - s)$ ; cela vient du fait que l'espace propre pour la valeur propre $\alpha$ pour l'action de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0}$ est en dualité avec son analogue pour la valeur propre $-\alpha$. En utilisant l'unitarité, on a encore $\overline{r(\alpha, c^{V*}, -s)} = r(\alpha, c^V, -\overline{s})$. D'où $r(-\alpha, c^V, s) = \overline{r(\alpha, c^V, -\overline{s})}$. Ainsi l'ordre en $s = 0$ de la fonction $r(-\alpha, c^V, s)$ est égal à l'ordre en $s = 0$ de la fonction $r(\alpha, c^V, -s)$, c'est-à-dire aussi de la fonction $r(\alpha, c^V, s)$.

Pour un caractère $\alpha$ de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0}$ qui intervient dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$, on a interprété ci-dessus $d\alpha$ comme une forme linéaire sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}, \mathbb{C}}$, autrement dit comme un élément de $\mathcal{A}_{\tilde{M}, \mathbb{C}}$. Il est clair que $d\alpha \in \mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$. On se rappelle que cet espace est muni d'une mesure. Supposons que $\tilde{M}$ est un espace de Levi maximal de $\tilde{G}$. On pose alors

$$d^{\tilde{G}}(\alpha) = \frac{1}{2} vol(\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}} / \mathbb{Z} d\alpha).$$

**Définition :** Dans le cas où $\tilde{M}$ est un espace de Levi maximal de $\tilde{G}$, avec les notations précédentes, on pose :

$$r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(c^V, \lambda) := \sum_{\alpha} r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\alpha, c^V_\lambda),$$

où $\alpha$ parcourt les caractères de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0}$ qui interviennent dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$ et

$$r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\alpha, c^V_\lambda) = d^{\tilde{G}}(\alpha) r'(\alpha, c^V_\lambda, 0) / r(\alpha, c^V_\lambda, 0).$$

.

### 4.1.4 Stabilisation dans le cas d'un espace de Levi maximal

On définit aussi $s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\alpha, c^V_\lambda)$ sous l'hypothèse que $\tilde{G}$ est à torsion intérieure, que $\omega$ est trivial et que $\tilde{M}$ est maximal ; cette dernière hypothèse assure que la composante neutre du groupe $Ker(\alpha)$ est incluse dans $Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ et donc dans $Z(\hat{G}) \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F, 0}$. On pose

$$s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\alpha, c^V_\lambda) = |Ker(\alpha)/Z(\hat{G}) \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F, 0})|^{-1} d^{\tilde{G}}(\alpha) r'(\alpha, c^V_\lambda, 0) / r(\alpha, c^V_\lambda, 0);$$

et dans le cas que l'on considère ici où $\tilde{M}$ est un espace de Levi maximal de $\tilde{G}$, on pose aussi
$$s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(c^V,\lambda)=\sum_{\alpha} s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\alpha,c_\lambda^V),$$
où $\alpha$ parcourt l'ensemble des caractères de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$ (ici, dans le cas de torsion intérieure, $\hat{\theta}$ est trivial) agissant dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$. Et cette définition coïncide avec celle du cas non tordu quand $\tilde{G}=G$, ce qui est indispensable, évidemment, précisément parce que l'on a repris la définition de [7]. La définition précédente s'adapte au formalisme des données endoscopiques, ce qui donne naissance aux fonctions qui interviennent ci-dessous.

**Lemme** *Sans hypothèse sur $\tilde{G},\omega$, supposons que $c^V$ provienne d'une donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ de $\tilde{M}$, $\omega$. Alors*
$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\alpha,c_\lambda^V)=\sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\hat{s}))s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\hat{s})}(\alpha',c_\lambda^V).$$
*D'où l'égalité de fonctions méromorphes :*
$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(c^V,\lambda)=\sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\hat{s}))s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\hat{s})}(c^V,\lambda).$$
Pour $\hat{s}$ intervenant dans cette somme, tel que $\alpha$ soit aussi une racine dans $\hat{G}'(\hat{s})$ notée $\alpha'$, l'isomorphisme $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\simeq\mathcal{A}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\hat{s})}$ préserve les mesures par définitions et il envoie $d\alpha$ sur $d\alpha'$. Donc $d^{\tilde{G}}(\alpha)=d^{\tilde{G}'(\hat{s})}(\alpha')$. De 4.1.2, on a la formule
$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\alpha,c_\lambda^V)=\sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Ker(\alpha)} (r^{\tilde{G}'(\hat{s})})'(\alpha',c_\lambda^V,0)/r^{\tilde{G}'(\hat{s})}(\alpha',c_\lambda^V,0).$$
On peut sommer sur $\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$ à condition de mettre devant chaque terme le bon coefficient, c'est-à-dire $|Ker(\alpha)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}|^{-1}$. Il faut donc montrer pour tout $\hat{s}$ fixé, l'égalité $i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\hat{s}))=$
$$|Ker(\alpha)/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}|^{-1}|Ker(\alpha')/Z(\hat{G}'(\hat{s}))\cap Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0})|. \quad (1)$$
Evidemment $Ker(\alpha)=Ker(\alpha')$. Ainsi (1) vaut
$$|Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}/Z(\hat{G}'(\hat{s}))\cap Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0})|.$$
Par ellipticité $Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0}=Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$ et on trouve $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\hat{s}))$ d'après 4.1.1.

### 4.1.5 Stabilisation dans le cas non ramifié

Le caractère pondéré dans le cas non ramifié et pour un espace de Levi qui n'est pas maximal se calcule par une formule de descente que l'on va récrire.

On fixe $V$ un ensemble fini de places contenant $V_{ram}$ et un espace de Levi $\tilde{M}$. Soit $c^V$ un caractère quasi-automorphe de l'algèbre de Hecke sphérique de $\tilde{M}(\mathbb{A}_F^V)$. Pour un caractère $\alpha$ de $Z(\hat{M})^{\hat{\theta},0}$ intervenant dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$, on a déjà défini $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\alpha, c^V, \lambda)$ dans le cas où $\tilde{M}$ était un espace de Levi propre maximal de $\tilde{G}$. Si cette condition n'est pas vérifiée, on pose $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\alpha, c^V, \lambda) = 0$. En remplaçant $\tilde{G}$ par $\tilde{L}$, on a ainsi défini $r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\alpha, c^V, \lambda)$ comme fonction méromorphe de $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ pour tout espace de Levi $\tilde{L}$ contenant $\tilde{M}$.

**formule de descente.**

Soit $A$ un ensemble de caractères de $Z(\hat{M})^{\hat{\theta},0}$ intervenant dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$. Si $A$ est réduit à un seul élément $\alpha$, on pose

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A, c^V, \lambda) := r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\alpha, c^V, \lambda).$$

En général, soit $A = A_1 \cup A_2$ une décomposition de $A$. On pose alors en utilisant les définitions par récurrence :

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A, c^V, \lambda) := \sum_{\tilde{L}, \tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}(\tilde{L}, \tilde{L}') r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(A_1, c^V, \lambda) r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(A_2, c^V, \lambda), \qquad (1)$$

ce qui donne une définition. Il faut évidemment remarquer que le membre de gauche est aussi celui qui est associé à la $\tilde{G}, \tilde{M}$-famille formée avec les fonctions $L$ partielles définies avec les éléments de $A$ comme dans le paragraphe 4 de [7] et ainsi la définition du membre de gauche ne dépend pas de la décomposition $A = A_1 \cup A_2$ choisie. C'est la formule de descente pour les $\tilde{G}, \tilde{M}$ familles couplée au lemme 7.1 de [2] dans le cas non tordu et [17] lemme 2.10.2.

**version stable des caractères pondérés.**

Dans le cas où $\tilde{G}$ est à torsion intérieure avec un groupe sous-jacent quasi-déployé et un caractère trivial, on a une formule de descente pour le caractère pondéré stable. On pose, avec $A = A_1 \cup A_2$ comme ci-dessus.

$$s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A, c^V, \lambda) = \sum_{\tilde{L}, \tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} e_{\tilde{M}}(\tilde{L}, \tilde{L}') s_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(A_1, c^V, \lambda) s_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(A_2, c^V, \lambda). \qquad (2)$$

Comme on a défini les caractères pondérés stables dans le cas d'un espace de Levi maximal, cela donne une définition en toute généralité qui a priori dépend de la décomposition. Cette définition coïncide avec celle de [7] theorem 5 dans les cas déjà connus, c'est à dire les cas où il n'y a pas de torsion et quand on aura démontré la proposition ci-dessous, on aura en prime que la définition est indépendante de la décomposition de $A$. Ici encore, la définition passe au formalisme des données endoscopiques.

**version endoscopique des caractères pondérés.**

On revient à la situation de $\tilde{G}$ général considérée ci-dessus et on suppose que $c^V$ provient d'une donnée endoscopique $\mathbf{M'}$ de $\tilde{M}$, $\omega$. On pose :

$$r_{\mathbf{M'}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(A, c^V, \lambda) = \sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \mathbf{G}'(\hat{s}))s_{\mathbf{M'}}^{\mathbf{G}(\hat{s})}(A, c^V, \lambda).$$

**Proposition** *On a l'égalité entre fonctions méromorphes*

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A, c^V, \lambda) = r_{\mathbf{M'}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(A, c^V, \lambda).$$

On a déjà montré la proposition dans le cas des espaces de Levi maximaux. Et pour la montrer en toute généralité, il suffit donc de démontrer que la fonction $r_{\mathbf{M'}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(c^V, \lambda)$ vérifie la même formule de descente écrite en (1) que $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(c^V, \lambda)$. C'est la combinatoire de [27] 1.14 (i) (dans le cas non tordu c'est le paragraphe 6 de [8]).

**Définition :** On pose $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(c^V, \lambda) := r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A, c^V, \lambda)$ et $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(c^V, \lambda) := s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A, c^V, \lambda)$, où $A$ est exactement la réunion des caractères non triviaux pour l'action de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$ agissant dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$.

### 4.1.6 Une propriété de croissance

On généralise dans ce paragraphe le lemme 3.2 de [9].

**Lemme** *Soit $c^V$ un caractère quasi-automorphe de l'algèbre de Hecke sphérique de $\tilde{M}(\mathbb{A}_F^V)$. La fonction de $\lambda$, $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(c^V, \lambda)$ définie dans le paragraphe précédent est holomorphe sur l'axe imaginaire et comme fonction de $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ c'est une distribution tempérée ce qui veut dire qu'il existe un nombre entier $N$ tel que $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(c^V, \lambda)(1 + \|\lambda\|)^{-N}$ soit intégrable en $\lambda$.*

On commence par considérer le cas où $\tilde{M}$ est un espace de Levi maximal et on va se ramener aux résultats du cas non tordu démontrés par J. Arthur. Supposons d'abord $c^V$ automorphe. On a donné une formule explicite pour $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(c^V,\lambda)$ comme somme de dérivées logarithmiques de fonctions $L$-partielles. De plus chacun de ces termes est lui-même somme de dérivées logarithmiques

$$L'^{V}_{G}(\beta, c^V_\lambda, 0)/L^V_{G)}(\beta, c^V_\lambda, 0) + L'^{V}_{G}(-\beta, c^V_\lambda, 0)/L^V_{G}(-\beta, c^V_\lambda, 0)$$

où $\beta$ parcourt l'ensemble des caractères non triviaux de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$ qui interviennent dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$. Il suffit donc d'avoir le résultat pour une telle fonction. Il suffit d'appliquer le résultat de [9] 3.2. Plus exactement, ce résultat s'applique à une somme sur différents $\beta$ et non pas à une fonction indépendamment. Ce problème est résolu dans la preuve de la proposition 1 de [7] où il est montré que quitte à changer encore de groupe on se ramène facilement au cas où la somme est réduite à un seul terme.

Supposons maintenant que $c^V$ provienne d'une donnée endoscopique $\mathbf{M'}$ de $\tilde{M}$, $\omega$, avec $M' \neq M$. Alors on a encore donné une formule explicite pour $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(c^V,\lambda)$ comme somme de dérivées logarithmiques de fonctions $L$-partielles. Ces termes sont sommes de dérivées logarithmiques

$$L'^{V}_{\mathbf{G'}(\hat{s})}(\alpha', c^V_\lambda, 0)/L^V_{\mathbf{G'}(\hat{s}))}(\alpha', c^V_\lambda, 0) + L'^{V}_{\mathbf{G'}(\hat{s})}(-\alpha', c^V_\lambda, 0)/L^V_{\mathbf{G'}(\hat{s})}(-\alpha', c^V_\lambda, 0)$$

où $\mathbf{G'}(\hat{s})$ est une donnée endoscopique de $\tilde{G}$ et où $\alpha'$ est une racine convenable pour l'action de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$ dans $\hat{G}'(\hat{s})$. En raisonnant par récurrence, chacune de ces fonctions vérifie la propriété de l'énoncé.

On passe maintenant au cas général. On revient à la formule (1) de 4.1.5 ; pour tout couple $\tilde{L}, \tilde{L}'$ y intervenant, on peut appliquer le lemme par récurrence puisque l'on a déjà démontré le cas des espaces de Levi maximaux ; le fait que $d_{\tilde{M}}(\tilde{L}, \tilde{L}')$ soit non nul, entraîne la décomposition en somme directe :

$$i(\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}/\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}) = i(\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}/\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}) \oplus i(\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}/\mathcal{A}^*_{\tilde{L}'}).$$

Donc l'intégration en $\lambda$ se décompose en produit d'intégrations et chacune d'elle est convergente. Cela entraîne le lemme.

## 4.2 Caractères pondérés invariants

Dans tout ce paragraphe le corps de base est local.

### 4.2.1 Rappel des définitions

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et soit $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. On voit $\lambda$ comme un caractère de $\tilde{M}$ ce qui nécessite d'avoir choisi une application $H_{\tilde{M}}$ de $\tilde{M}/M^1$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. On fixe donc une telle application comme en [29] 1.6.

Soit encore $\pi$ une $\omega$ représentation de $\tilde{M}$. On a défini pour tout $f \in I(\tilde{G},\omega)$, la fonction méromorphe de $\lambda$ : $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda, f)$. Soit $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ ; pour tout espace de Levi $\tilde{L}$ contenant $\tilde{M}$, on note $X_{\tilde{L}}$ la projection de $X$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$. Pour tout $\lambda \in \mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}^*$ tel que $\lambda + i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ ne coupe pas les hyperplans singuliers de la fonction $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda, f)$, on pose :

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) := \int_{\mu\in\lambda+i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} d\mu\, e^{-\mu(X)} J(\pi_\mu, f).$$

Cette fonction de $\lambda$, est localement constante sur son espace de définition ; elle ne dépend que de la restriction de $f$ à l'ensemble des éléments $\gamma \in \tilde{G}$ tels que $H_{\tilde{G}}(\gamma) = X$. Cette distribution s'étend donc aux éléments de $I_{ac}(\tilde{G},\omega)$ et cela permet de définir, par induction, les distributions invariantes :

$$f \in I_{ac}(\tilde{G},\omega) \mapsto$$

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) =: J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda,X,f) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{E}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi,\lambda,X,\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)),$$

où encore $\lambda$ est tel que $\lambda + i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ ne coupe pas un réseau d'hyperplans dépendant de $\pi$ et où $\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$ est l'application de $I(\tilde{G},\omega)$ dans $I_{ac}(\tilde{L},\omega)$ définie par la proposition de [27] 6.4.

La propriété qui résulte de la définition des fonctions $\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$ est que pour tout $\pi$ tempérée, pour tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et tout $f \in I(\tilde{G},\omega)$, $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) = 0$ si $\lambda$ est imaginaire. De plus dans tous les cas, $I(\pi,\lambda,X,f)$ ne dépend que de la restriction de $f$ à l'ensemble des éléments $\gamma \in \tilde{G}$ tels que $H_{\tilde{G}}(\gamma) = X$. Et en tant que fonction de $\lambda$, $I(\pi,\lambda,X,f)$ est une fonction localement constante mais non partout définie.

**Lemme** (**formule de descente**) *On fixe $\tilde{R}$ un sous-espace de Levi de $\tilde{M}$ et on suppose qu'il existe une $\omega$ représentation de $\tilde{R}$ telle que $\pi$ soit l'induite de $\sigma$. Alors, on a pour tout $f \in I(\tilde{G},\omega)$ et pour tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{M}) \int_{Y\in\mathcal{A}_{\tilde{R}};Y_{\tilde{M}}=X} dY\, I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\sigma,\lambda,Y,f_{\tilde{L}}),$$

*formule qui mérite les explications ci-dessous.*

D'abord on commence par remarquer que si la place considérée est non archimédienne, l'intégrale est une somme finie : en effet, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans $\mathcal{L}(\tilde{R})$ et le coefficient $d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{M})$ est non nul seulement si l'application naturelle de $\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}$ est un isomorphisme. Ainsi on somme sur $Y \in X + \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}$ et sur cet ensemble la projection orthogonale $Y \mapsto Y_{\tilde{L}}$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ est injective : en effet le noyau est $\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}} \cap \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}$ qui est nul d'après ce que l'on vient de voir. Ainsi dans la somme sur les $Y$ la composante de $Y$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ est fixée et par contre la composante de $Y$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$ est laissée libre ; mais cette dernière composante concerne le centre de $\tilde{L}$ et $f_{\tilde{L}}$ est à support compact. D'où la finitude. Dans le cas archimédien, le même argument dit que l'intégrale porte sur un compact, elle est donc bien définie.

Montrons le résultat cherché : on part de la formule de descente pour les caractères pondérés non invariants donnée en [27] 5.4 (iv) (comme les termes ne sont pas invariants, il faut des données auxiliaires pour définir les termes constants comme ceci est expliqué en loc.cite) :

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(ind\,\sigma_\lambda, f) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{M}) J_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\sigma_\lambda, f_{\tilde{L}}).$$

On intègre cette formule sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ :

$$\int_{\mu\in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} d\mu\, J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(ind\,\sigma_{\lambda+\mu}, f) e^{-(\lambda+\mu)(X)} = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(ind\sigma_\lambda, X, f)$$

car c'est la définition. Pour traiter le côté droit, on reprend la définition pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})$ et pour $Z \in \mathcal{A}_{\tilde{R}}$ de $J_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\sigma_\lambda, Z, f_{\tilde{L}})$ comme une intégrale sur $i\mathcal{A}_{\tilde{R}}^*$. Puisque l'on n'intègre que sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, on obtient une formule d'inversion de Fourier, que l'on écrit dans le cas d'un corps de base non archimédien :

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{M}) \sum_{Z\in\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}} J_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\sigma_\lambda, X+Z, f_{\tilde{L}}).$$

Autrement dit, on a la même formule que dans l'énoncé avec les distributions $J$ au lieu de $I$. D'après les définitions, il suffit donc d'obtenir une formule analogue pour

$$\sum_{\tilde{L}'} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(ind\,\sigma, \lambda, X, \phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(f)),$$

où l'on somme sur les espaces de Levi propres $\tilde{L}'$ contenant $\tilde{M}$. Soit $\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ un tel espace de Levi ; on considère $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(ind\sigma, \lambda, X, \phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(f))$. On applique la formule de l'énoncé par récurrence à ce terme, ce qui est loisible car on peut restreindre $\phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(f)$ à l'ensemble des $\gamma \in \tilde{L}'$ tels que $H_{\tilde{L}'}(\gamma) = X_{\tilde{L}'}$ et alors la fonction ainsi restreinte est à support compact. On obtient :

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(ind\,\sigma, \lambda, X, \phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(f)) = \sum_{\tilde{L}'' \in \mathcal{L}(R), \tilde{L}'' \subset \tilde{L}'} d_{\tilde{R}}^{\tilde{L}'}(\tilde{L}'', \tilde{M})$$

$$\sum_{Y \in \mathcal{A}_{\tilde{R}}; Y_{\tilde{M}} = X} I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}''}(\sigma, \lambda, Y, (\phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}})(f)_{\tilde{L}''}).$$

Il faut encore utiliser la formule de scindage pour les termes $(\phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}})(f)_{\tilde{L}''}$ donnée en [27] 6.4 (11) :

$$(\phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}})(f)_{\tilde{L}''} = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R}); \tilde{L}'' \subset \tilde{L}} d_{\tilde{L}''}^{\tilde{G}}(\tilde{L}', \tilde{L})(\phi_{\tilde{L}''}^{\tilde{L}})(f_{\tilde{L}}).$$

D'où

$$\sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}); \tilde{L}' \neq \tilde{G}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(ind\,\sigma, \lambda, X, \phi_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(f)) =$$

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})}$$

$$\sum_{\tilde{L}', \tilde{L}'' \in \mathcal{L}(\tilde{R}); \tilde{L}' \neq \tilde{G}, \tilde{L}'' \subset \tilde{L}' \cap \tilde{L}} d_{\tilde{R}}^{\tilde{L}'}(\tilde{M}, \tilde{L}'') d_{\tilde{L}''}^{\tilde{G}}(\tilde{L}', \tilde{L})$$

$$\sum_{Y \in \mathcal{A}_{\tilde{R}}; Y_{\tilde{M}} = X} I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}''}(\sigma, \lambda, Y, \phi_{\tilde{L}''}^{\tilde{L}}(f_{\tilde{L}})).$$

Dans la somme de droite on fait disparaître $\tilde{L}'$ en utilisant [29] 1.7 (5) : l'ensemble $B$ de loc. cite est ici celui des triplets $(\tilde{L}, \tilde{L}'', \tilde{L}')$ (au lieu de $(\tilde{L}', \tilde{R}', \tilde{R})$ in loc.cite), $\tilde{R}$ ici joue le rôle de $\tilde{M}$ in loc.cite et $\tilde{M}$ ici joue le rôle de $\tilde{L}$ in loc. cite. On a en particulier l'égalité

$$d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) = d_{\tilde{R}}^{\tilde{L}'}(\tilde{M}, \tilde{L}'') d_{\tilde{L}''}^{\tilde{G}}(\tilde{L}', \tilde{L}).$$

et on obtient que le côté droit vaut :

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L})$$

$$\sum_{Y \in \mathcal{A}_{\tilde{R}}, Y_{\tilde{M}} = X} \sum_{\tilde{L}'' \in \mathcal{L}(\tilde{R}); \tilde{L}'' \subsetneq \tilde{L}} I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}''}(\sigma, \lambda, Y, \phi_{\tilde{L}''}^{\tilde{L}}(f_{\tilde{L}})).$$

Et on obtient le lemme.

### 4.2.2 Les caractères pondérés, variante compacte

Il est défini en [34] 1.4 et [35] 5.8 une variante compacte de l'application $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ ; dans le cas où le corps local est archimédien, il y a deux variantes compacte et on va utiliser celle construite à partir de ${}^c\phi_{\tilde{M}}$. C'est une application de $I(\tilde{G},\omega)$ dans $I(\tilde{M},\omega)$. On pose

$$ {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,f) := J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda,f) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M});\tilde{L}\neq\tilde{G}} {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi,\lambda,\,{}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)). \tag{1} $$

Cette distribution dépend méromorphiquement de $\lambda$ et l'on n'a pas besoin de prendre de coefficients de Fourier pour définir cette distribution car ${}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$ préserve le caractère compact du support.

Cette distribution vérifie une formule de descente, pour des représentations induites, plus simple que sa variante non compacte : pour tout sous-espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ et pour toute $\omega$ représentation de $\tilde{R}$ :

$$ {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(ind\,\sigma,\lambda,f) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}(\tilde{L},\tilde{M})\,{}^cI_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\sigma,\lambda,f_{\tilde{L}}). $$

Pour comparer cette distribution à celle déjà définie, on définit comme dans le paragraphe précédent les coefficients de Fourier

$$ {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) := \int_{\mu\in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} d\mu\,{}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda+\mu,f)e^{-(\lambda+\mu)(X)}. $$

Dans les références déjà mentionnées, il a été construit une application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ de $I(\tilde{G},\omega)$ dans $I_{ac}(\tilde{G},\omega)$ qui relie les définitions de $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et ${}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ par la formule :

$$ \forall f\in I(\tilde{G},\omega),\quad {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f) = \phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}} {}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)). \tag{2} $$

Cette application sert à relier les distributions définies ici et dans le paragraphe précédent.

**Lemme** *Pour tout $\lambda\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ où les termes ci-dessous sont définis, on a l'égalité*

$$ {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi,\lambda,X,\,{}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)). $$

On utilise la définition (1) pour calculer le membre de gauche et on applique tout de suite le lemme par récurrence pour les termes faisant intervenir un espace de Levi strictement inclus dans $\tilde{G}$ à la place de $\tilde{G}$. On obtient

$$^{c}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)-$$

$$\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}_1\neq\tilde{G}}\ \sum_{\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}_2\subset\tilde{L}_1} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\pi,\lambda,X,\,^{c}\theta_{\tilde{L}_2}^{\tilde{L}_1}(\,^{c}\phi_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}(f))).$$

On échange la somme sur $\tilde{L}_1$ et la somme sur $\tilde{L}_2$ et on a donc une somme sur les espaces de Levi $\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M})$ vérifiant $\tilde{L}_2\neq\tilde{G}$ de $-I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\pi,\lambda,X,F_{2,1})$ où

$$F_{2,1}:=\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{L}_2),\tilde{L}_1\neq\tilde{G}} {}^{c}\theta_{\tilde{L}_2}^{\tilde{L}_1}(\phi_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}(f)).$$

Avec (2), on a $F_{2,1}=\phi_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(f)-\,^{c}\theta_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(f)$. Ainsi $^{c}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)=$

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)-\sum_{\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M});\tilde{L}_2\neq\tilde{G}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\pi,\lambda,X,\phi_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(f)) \qquad (3)$$

$$+\sum_{\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M});\tilde{L}_2\neq\tilde{G}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\pi,\lambda,X,\,^{c}\theta_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}(f)) \qquad (4).$$

Le terme (3) est $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)$ par définition ; or $^{c}\theta_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}(f)=f$ et en ajoutant (3) et (4), on obtient le lemme.

### 4.2.3 Les caractères pondérés compacts des représentations tempérées

On suppose que $\pi$ est une $\omega$-représentation tempérée. Il a été vérifié en [35] 5.11 que le coefficient de Fourier $I^{\tilde{M}}(\pi,X,\,^{c}\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))$ est la transformée de Fourier d'une fonction sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{*}$. Ceci n'est autre par définition que $tr\pi_\lambda(\,^{c}\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))$. La fonction de $\lambda$, $tr\pi_\lambda(\,^{c}\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))$ se prolonge méromorphiquement en $\lambda$. On note $I^{\tilde{M}}(\pi_\lambda,\,^{c}\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))$ ce prolongement.

**Lemme** *On suppose que $\pi$ est une $\omega$-représentation tempérée ; on a l'égalité, pour tout $f\in I(\tilde{G},\omega)$, des fonctions méromorphes en $\lambda$*

$$^{c}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,f)=I^{\tilde{M}}(\pi_\lambda,\,^{c}\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f)).$$

Chaque terme de l'égalité est une fonction méromorphe en $\lambda$ et il suffit donc de montrer l'égalité pour $\lambda$ imaginaire. Sous cette hypothèse

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,f)=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,f)-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}{}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi_\lambda,{}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)).$$

Par construction de $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(f)$, on a l'égalité : $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda,f)=tr\,\pi_\lambda(\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))$ et avec une récurrence facile, on obtient l'égalité :

$$^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,f)=tr\pi_\lambda\big(\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f)-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}{}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}({}^c\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f))\big).$$

C'est exactement la formule (2) ci-dessus qui donne alors le lemme.

## 4.3 Le cas de la torsion intérieure

### 4.3.1 Les caractères pondérés invariants stables, premières définitions

On suppose ici que $\tilde{G}$ est à torsion intérieure, c'est-à-dire que $\hat{\theta}=1$, $\omega=1$ et que le groupe $G$ est quasidéployé. Dans ce cas, on a besoin de définir les caractères pondérés stables. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On fixe $\pi$ une représentation de $\tilde{M}$, on définit pour $X\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et $\lambda\in\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ général, la distribution $f\in I(\tilde{G})\mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,X,\lambda,f)$. La condition sur $\lambda$ pour que cette distribution soit définie est que $\lambda+i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ ne coupe pas un réseau d'hyperplans. On suppose que $\pi$ est stable. Pour tout $f\in I(\tilde{G})$, on pose en recopiant les définitions de J. Arthur :

$$SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f):=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)-$$
$$\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F},s\neq1}i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(s))SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\pi,\lambda,X,f^{\mathbf{G}'(s)})\qquad(1)$$

Bien sûr cette définition n'a de sens que si les distributions $SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\pi,\lambda,X,.)$ sont stables. On l'admet par récurrence en remarquant que puisque si $s\neq1$ le groupe $G'(s)$ est plus "petit" que $G$ et on doit évidemment montrer la stabilité de $SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,.)$ ce qui sera fait dans le paragraphe 4.3.2 qui suit.

On a aussi défini les variantes compactes avec les mêmes propriétés de stabilité admises par récurrence pour $\mathbf{G}'(s)$ si $s\neq1$ et à démontrer pour $\tilde{G}$. On pose donc aussi pour tout $f\in I(\tilde{G})$ :

$$^c(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f):={}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)-$$

$$\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\mathbf{s}))\, {}^c(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\pi,\lambda,X,f^{\mathbf{G}'(\mathbf{s})}). \qquad (2)$$

Pour relier ces deux définitions, il faut utiliser les applications ${}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$ et on pose pour tout $f\in I(\tilde{G})$ :

$${}^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f) := {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f) - \sum_{s\in Z(\hat{L})^{,\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{L}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(s))\, {}^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}'(s)}(f^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Il a été montré en [34] 2.2 (dont la preuve est en [34] 4.2) et [35] 6.1 (dont la preuve est en [35] 7.3) que cette application $f\mapsto {}^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)$ est stable, c'est-à-dire que ${}^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)$ ne dépend que de l'image de $f$ dans $SI(\tilde{G})$.

**Lemme** *Pour tout $f\in I(\tilde{G})$, on a l'égalité*

$${}^c(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi,\lambda,X,\, {}^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)).$$

On écrit

$$\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\mathbf{s}))\, {}^c(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\pi,\lambda,X,f^{\mathbf{G}'(\mathbf{s})}) \qquad (3)$$

en utilisant le lemme par récurrence puisque $s\neq 1$. On obtient :

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\ \sum_{s_{\tilde{L}}\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F}, s_{\tilde{L}}\neq 1}$$

$$\sum_{s\in s_{\tilde{L}}Z(\hat{L})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(s)) SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'(s_{\tilde{L}})}(\pi,\lambda,X,\, {}^c(S\theta)_{\tilde{L}'(s_{\tilde{L}})}^{\tilde{G}'(s)}(f^{\mathbf{G}'(s)}))$$

$$+\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\ \sum_{s\in Z(\hat{L})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(s)) SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi,\lambda,X,\, {}^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}'(s)}(f^{\mathbf{G}'(s)})),$$

où cette dernière somme correspond aux $s_{\tilde{L}}=1$ et en gardant évidemment l'hypothèse que $s\neq 1$. Soit $s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ et pour $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$, on note $s_{\tilde{L}}$ l'image de $s$ modulo $Z(\hat{L})^{\Gamma_F}$. On a l'égalité :

$$i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(s)) = i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\mathbf{L}'(s_{\tilde{L}}))\, i_{\tilde{L}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(s)).$$

On est dans le cas de torsion intérieure, donc la stabilisation des intégrales orbitales est connue. Cela entraîne avec [34], 3.8 et 4.3 et [35] 6.11 (A), qu'avec les notations ci-dessus pour tout $s_{\tilde{L}} \neq 1$ :

$$\sum_{s \in s_{\tilde{L}} Z(\hat{L})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{L}}(\tilde{G}, \mathbf{G}'(s))^c(S\theta)_{\tilde{L}'(s_{\tilde{L}})}^{\tilde{G}'(s)}(f^{\mathbf{G}'(s)}) = {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)^{\mathbf{L}'(s_{\tilde{L}})}. \qquad (4)$$

Donc la somme sur les $s_{\tilde{L}} \neq 1$ ci-dessus est la somme des termes

$$i_{\tilde{M}}(\tilde{L}, \mathbf{L}'(s_{\tilde{L}}))SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'(s_{\tilde{L}})}(\pi, \lambda, X, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)^{\mathbf{L}'(s_{\tilde{L}})}).$$

Par définition ceci n'est autre que

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi, \lambda, X, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)) - SI(\pi, \lambda, X, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)).$$

Considérons la somme correspondant à $s_{\tilde{L}} = 1$ ; l'égalité (4) se remplace par la tautologie

$$\sum_{s \in Z(\hat{L})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{L}}(\tilde{G}, \mathbf{G}'(s))^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}'(s)}(f^{\mathbf{G}'(s)}) = {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)$$

et on obtient que les termes correspondant à $s_{\tilde{L}} = 1$ contribuent simplement par

$$SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi, \lambda, X, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)) - {}^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)).$$

En regroupant avec ce que l'on a trouvé ci-dessus, on voit que (3) vaut

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi, \lambda, X, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)) - SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi, \lambda, X, {}^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)).$$

Avec le lemme de 4.2.2 ceci n'est autre que

$${}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi, \lambda, X, f) - \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi, \lambda, X, {}^c(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)).$$

En revenant à la définition de ${}^c(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi, \lambda, X, f)$ on obtient le lemme cherché.

### 4.3.2 Preuve de la stabilité

On fixe $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et une représentation stable $\pi$ de $\tilde{M}$ (on rappelle que l'on est dans le cas de la torsion intérieure et que $\omega = 1$).

**Proposition** *Les distributions* $f \in I(\tilde{G}) \mapsto SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)$ *et* $f \in I(\tilde{G}) \mapsto {}^{c}(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)$ *sont stables en tout point* $\lambda$ *où elles sont définies*

On fixe $f \in I(\tilde{G})$ et on suppose que les intégrales orbitales stables de $f$ sont toutes nulles, en bref, on dit qu'une telle fonction $f$ est instable. On doit montrer que $SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)=0$ et ${}^{c}SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)=0$. On reprend la formule du lemme 4.3.1 et son côté droit. Considérons le terme correspondant à $\tilde{L}=\tilde{G}$ : d'après les formules données, on a ${}^{c}(S\theta)_{\tilde{G}}^{\tilde{G}} = {}^{c}\theta_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}(f) = f$. Ce terme est donc $SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)$. Considérons maintenant les termes $SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi,\lambda,X,{}^{c}(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f))$, pour $\tilde{L}$ un espace de Levi propre de $\tilde{G}$. Puisque $f$ est instable, on sait que ${}^{c}(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)=0$ dans $SI(\tilde{L})$. Par récurrence on sait aussi que $SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi,\lambda,X,.)$ est une distribution stable. Ainsi pour $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, on a $SI_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi,\lambda,X,{}^{c}(S\theta)_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f))=0$ et l'égalité

$$ {}^{c}(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) = SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f). $$

Il suffit donc de montrer que le membre de gauche est nul. En utilisant les formules de descente, on se ramène au cas où $\pi$ est tempérée modulo le centre. On écrit la définition : ${}^{c}(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) =$

$$ {}^{c}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(s))\, {}^{c}(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\pi,\lambda,X,f^{\mathbf{G}'(s)}). $$

Ce sont des coefficients de Fourier des distributions qui se déduisent de ${}^{c}I(\pi_\lambda,f)$ de façon formelle. Par méromorphie, il suffit donc encore de considérer le cas où $\pi$ est tempérée (et non seulement tempérée modulo le centre). On a donc par définition l'égalité : ${}^{c}(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda,f) =$

$$ {}^{c}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda,f) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(s))\, {}^{c}(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\pi_\lambda,f^{\mathbf{G}'(s)}). $$

On sait que ${}^{c}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda,f) = tr\,\pi_\lambda({}^{c}\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))$ (cf. 4.2.3). On admet par récurrence pour tout $s\neq 1$ comme ci-dessus que

$$ {}^{c}(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\pi_\lambda,,f^{\mathbf{G}'(s)}) = tr\,\pi_\lambda({}^{c}(S\theta)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(f^{\mathbf{G}'(s)})) $$

puisque l'égalité ci-dessus donne alors : ${}^{c}(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda,f) = tr\pi_\lambda(F)$, avec

$$ F = {}^{c}\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\mathbf{G}'(s))\, {}^{c}(S\theta)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(f^{\mathbf{G}'(s)}). $$

Par définition $F = {}^c(S\theta)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f)$ et on sait que si $f$ est instable, l'image de $F$ dans $SI(\tilde{M})$ est nulle. Comme $\pi_\lambda$ est une représentation stable par hypothèse, si $f$ est instable, sa trace contre $F$ est nulle. On a donc bien montré que ${}^c(SI)_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi, \lambda, X, f) = 0$ si $f$ est instable ce qui termine la preuve de la proposition.

## 4.4 Les caractères pondérés endoscopiques

### 4.4.1 Définition

On fixe $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique non nécessairement elliptique de $\tilde{G}$ ; on a besoin de la notation $\hat{s}_{M'}$ qui fait partie de la donnée. On fixe aussi $\pi'_{M'}$ une représentation de $\mathbf{M}'$. On entend par là que, si l'on fixe des données auxiliaires $M'_1$, $C_1$ etc... $\pi'_{M'}$ s'identifie à une représentation de $\tilde{M}'_1$ qui se transforme selon le caractère $\lambda_1$ de $C_1(F)$ déterminé par la situation. On suppose que cette représentation est stable. Pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ de $\tilde{G}$ contenant $\mathbf{M}'$ comme espace de Levi, on sait définir le caractère pondéré invariant en tant que distribution stable $SI_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'}(\pi'_{M'}, \lambda, X, .)$. On suppose qu'il existe un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ tel que $\mathbf{M}'$ soit une donnée endoscopique elliptique relevante de $\tilde{M}$. On peut alors normaliser les facteurs de transfert, en fixant les facteurs de transfert pour le couple $\tilde{M}$, $\mathbf{M}'$ de façon à poser pour tout $f \in I(\tilde{G})$ :

$$I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\pi'_{M'}, \lambda, X, f) := \sum_{\hat{s} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \mathbf{G}'(\hat{s})) SI_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\hat{s})}(\pi'_{M'}, \lambda, X, f^{\mathbf{G}'(\hat{s})}). \quad (1)$$

C'est ce que l'on appelle le caractère pondéré endoscopique. On a aussi une variante compacte :

$${}^cI_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\pi'_{M'}, \lambda, X, f) := \sum_{\hat{s} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \mathbf{G}'(\hat{s}))\, {}^c(SI)_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\hat{s})}(\pi'_{M'}, \lambda, X, f^{\mathbf{G}'(\hat{s})}). \quad (2)$$

**Lemme** *Avec les deux premières hypothèses de récurrence géométriques de 3.5, pour tout $\lambda$ tel que la distribution suivante est définie et pour tout $X$, on a l'égalité :*

$${}^cI_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\pi'_{M'}, \lambda, X, f) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\pi'_{M'}, \lambda, X, {}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)) +$$

$$I^{\mathbf{M}'}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'},\lambda,X,(\,^c\theta^{\tilde G,\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'})(f)-(\,^c\theta^{\tilde G}_{\tilde M}(f))^{\mathbf{M}'}).$$

On utilise le lemme de 4.3.1 pour écrire le terme de droite de (2) : d'où avec les mêmes manipulations que dans cette référence

$$^cI^{\tilde G,\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'},\lambda,X,f)=\sum_{\tilde L\in\mathcal{L}(\tilde M)}$$

$$\sum_{\hat s_{\tilde L}\in\hat s_{M'}Z(\hat M)^{\Gamma_F,\hat\theta}/Z(\hat L)^{\Gamma_F,\hat\theta}\cap Z(\hat M)^{\Gamma_F,\hat\theta}} i_{\tilde M'}(\tilde L,\mathbf{L}'(\hat s_{\tilde L}))\,^c(SI)^{\mathbf{L}'(\hat s_{\tilde L})}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'},\lambda,X,F(\hat s_{\tilde L})),$$

où $F(\hat s_{\tilde L}):=\sum_{\hat s\in\hat s_{\tilde L}Z(\hat L)^{\Gamma_F,\hat\theta}/Z(\hat G)^{\Gamma_F,\hat\theta}} i_{\tilde L'(\hat s_{\tilde L})}(\tilde G,\mathbf{G}'(\hat s))\,^c(S\theta)^{\mathbf{G}'(\hat s)}_{\mathbf{L}'(\hat s_{\tilde L})}(f^{\mathbf{G}'(s)})$. Ainsi $F(\hat s_{\tilde L})=\,^c\theta^{\tilde G,\mathcal{E}}_{\mathbf{L}'(\hat s_{\tilde L})}(f)$. Tant que $\tilde L\neq\tilde M$, la deuxième hypothèse de récurrence faite assure que l'on connaît la stabilisation géométrique. Ainsi on connaît aussi l'égalité :

$$^c\theta^{\tilde G,\mathcal{E}}_{\mathbf{L}'(\hat s_{\tilde L})}(f)=(\,^c\theta^{\tilde G}_{\tilde L}(f))^{\mathbf{L}'(\hat s_{\tilde L})}$$

d'après [33] 3.8 et 4.3 et [35] 6.11, que l'on est en droit d'appliquer. On a donc alors :

$$^cI^{\tilde G,\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'},\lambda,X,f)=\sum_{\tilde L\in\mathcal{L}(\tilde M);\tilde L\neq\tilde M} I^{\tilde L,\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'},\lambda,X,\,^c\theta^{\tilde G}_{\tilde L}(f))$$

$$+\sum_{\hat s\in\hat s_{M'}Z(\hat M)^{\Gamma_F,\hat\theta}/Z(\hat G)^{\Gamma_F,\hat\theta}} i_{\tilde M'}(\tilde G,\mathbf{G}'(\hat s))I^{\mathbf{M}'}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'},\lambda,X,\,^c(S\theta)^{\mathbf{G}'(\hat s)}_{\mathbf{M}'}(f^{\mathbf{G}'(\hat s)})).$$

La première somme de l'énoncé du lemme donne la première somme ci-dessus excepté le terme correspondant à $\tilde L=\tilde M$ qui (dans l'énoncé du lemme) est simplement

$$I^{\mathbf{M}'}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'},\lambda,X,^c\theta^{\tilde G}_{\tilde M}(f)^{\mathbf{M}'});$$

c'est-à-dire que ce terme manque dans la première somme ci-dessus. La deuxième somme ci-dessus est exactement égale à

$$I^{\mathbf{M}'}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'},\lambda,X,(\,^c\theta^{\tilde G,\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'})(f)).$$

On en déduit le lemme.

### 4.4.2 Propriétés de descente des caractères pondérés endoscopiques

Il faut un analogue de la proposition 1.14 de [29] pour les caractères pondérés endoscopiques à la place des intégrales orbitales pondérées endoscopiques. On fixe $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique non elliptique de $\tilde{G}$ comme dans le paragraphe précédent et on fixe $\pi'$ une représentation stable de $\mathbf{M}'$. On fixe aussi un sous-groupe de Levi $R'$ de $M'$. On peut définir $\mathbf{R}'$ à partir de $\mathbf{M}'$ mais même si il existe un sous-espace de Levi $\tilde{R}$ tel que $\mathbf{R}'$ en soit une donnée endoscopique elliptique rien n'assure que $\mathbf{R}'$ est relevant. On fixe une représentation stable $\sigma'$ de $\mathbf{R}'$.

Pour la proposition ci-dessous, on suppose que $\pi'$ est l'induite de $\sigma'$.

**Proposition** *(i) On suppose que $\tilde{R}$ existe de telle sorte que $\mathbf{R}'$ en soit une donnée endoscopique elliptique relevante. Alors si $F$ est un corps non archimédien :*

$$I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\pi',\lambda,X,f) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}) \sum_{Y} I_{\mathbf{R}'}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\sigma',\lambda,Y,f_{\tilde{L}}),$$

*où l'on somme sur les $Y \in \mathcal{A}_{\tilde{R}}$ ayant $X$ pour projection dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ ; si $F$ est un corps archimédien, la somme est une intégrale sur l'ensemble défini de façon analogue.*

*(ii) On suppose que $\mathbf{R}'$ n'est pas une donnée endoscopique elliptique relevante pour un sous-espace de Levi de $\tilde{M}$, alors $I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\pi',\lambda,X,f) = 0$.*

Le début de la preuve est commun à (i) et (ii). On écrit la définition :

$$I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\pi',\lambda,X,f) = \sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\hat{s})) SI_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\hat{s})}(\pi',\lambda,X,f^{\mathbf{G}'(\hat{s})}).$$

On écrit la formule de descente pour les termes du membre de droite et on obtient :

$$\sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\hat{s})) \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\hat{s})}(\tilde{R}')}$$
$$\sum_{Y\in\mathcal{A}_{R'};Y_{M'}=X} e_{\tilde{R}'}(\tilde{M}',\tilde{L}') SI_{\mathbf{R}'}^{\mathbf{L}'}(\sigma',\lambda,Y,(f^{\mathbf{G}'(\hat{s})})_{\mathbf{L}'}).$$

On remarque que dans les formules ci-dessus, $(f^{\mathbf{G}'(\hat{s})})_{\mathbf{L}'} = 0$ sauf si $\mathbf{L}'$ est une donnée endoscopique elliptique pour un espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$. On regroupe donc les termes correspondant à un espace de Levi $\tilde{L}$ fixé. Nécessairement un tel $\tilde{L}$ intervient s'il existe $\mathbf{L}'$ une de ses données endoscopiques elliptiques telle que $d_{\tilde{R}'}(\tilde{M}', \tilde{L}') \neq 0$. Comme en loc. cite, même si $\mathbf{R}'$ n'est pas une donnée endoscopique elliptique d'un espace de Levi de $\tilde{G}$, on pose $\hat{R}$ l'unique sous-groupe de Levi de $\hat{G}$ tel que $Z(\hat{R})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0} = Z(\hat{R}')^{\Gamma_F, 0}$. La condition sur $L'$ se traduit alors par le fait que $\mathcal{A}_{\hat{R}}^{\hat{G}}$ est la somme directe de $\mathcal{A}_{\hat{R}}^{\hat{M}}$ et de $\mathcal{A}_{\hat{R}}^{\hat{L}}$ ; en considérant les orthogonaux de ces espaces dans $\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}$, on obtient le fait que $\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}$ est la somme directe de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ avec $\mathcal{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$, ce qui est équivalent à la non nullité de $d_{\hat{R}}(\tilde{M}, \tilde{L})$. Réciproquement pour un $\tilde{L}$ satisfaisant cela et pour $\mathbf{L}'$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{L}$, on a aussi $d_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}'}(\tilde{M}', \tilde{L}') \neq 0$ pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ de $\tilde{G}$ contenant $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{L}'$.

L'application naturelle de $Z(\hat{M})/Z(\hat{G})$ dans $Z(\hat{R})/Z(\hat{L})$ est surjective et donne encore une application surjective (cf 4.1.1) de

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0} \to Z(\hat{R})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0} / Z(\hat{L}) \cap Z(\hat{R})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0}. \tag{1}$$

Donc pour $\mathbf{L}'$ comme ci-dessus, l'ensemble des données endoscopiques elliptiques $\mathbf{G}'$ contenant $\mathbf{L}'$ et $\mathbf{M}'$ est non vide.

On se place maintenant dans la situation de (i) ; ici $\mathbf{R}'$ est une donnée endoscopique elliptique relevante d'un espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ ; les facteurs de transfert ont été normalisés à l'aide du couple $\tilde{M}, \mathbf{M}'$, ils impliquent une normalisation pour le couple $\tilde{R}, \mathbf{R}'$ (puisque ce couple est un "espace" de Levi de $\tilde{M}, \mathbf{M}'$) et donc une normalisation directe pour le couple $\tilde{L}, \mathbf{L}'$ sans passer par l'un des couples $\tilde{G}, \mathbf{G}'(\hat{s})$ et pour tout choix de $\hat{s}$, on a $(f^{\mathbf{G}'(\hat{s})})_{\mathbf{L}'} = (f_{\tilde{L}})^{\mathbf{L}'(\hat{s}')}$ où $\hat{s} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0} / Z(\hat{G}) \cap Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0}$ a pour image $\hat{s}'$ dans $\hat{s}_{M'} Z(\hat{R})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0} / Z(\hat{L}) \cap Z(\hat{R})^{\Gamma_F, \hat{\theta}, 0}$. Ainsi dans la formule de descente écrite ci-dessus, $\mathbf{G}'(\hat{s})$ disparaît au profit de $\mathbf{L}'(\hat{s}')$ pour $\hat{s}$ et $\hat{s}'$ ayant la propriété précédente. Il y a donc un calcul de coefficients à faire mais qui a été fait en [29] 1.14 pour passer en (5) et (6). Ce calcul donne exactement le résultat cherché comme en loc.cite.

Pour (ii) on se raccroche évidemment à 1.14 de [29] qui construit un sous-groupe $\mathcal{Z}$ du noyau de l'application (1) tel que l'analogue géométrique de

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}} SI_{\mathbf{R}'}^{\mathbf{L}'(\hat{s}'z)}(\sigma', \lambda, Y, (f^{\mathbf{G}'(\hat{s}'z)})_{\mathbf{L}'}) \tag{2}$$

soit nul. C'est un subtil problème de facteurs de transfert qui nécessite l'introduction des données auxiliaires mais qui n'est pas à refaire puisqu'il a déjà été fait. Introduisons des données auxiliaires $M_1'$, $C_1$, etc... pour la donnée $\mathbf{M}'$, qui se restreignent en des données $R_1'$, $C_1$, etc... Ce que montre ce qui suit

(10) de 1.14 [29], est que l'introduction de $z \in \mathcal{Z}$ induit un automorphisme de $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{R}'_1)$ et donne donc dualement un automorphisme sur l'ensemble des représentations de $\tilde{R}'_1$ dont le caractère central se restreint en le caractère $\lambda_1$ de $C_1(F)$. C'est l'ensemble de ce qu'on a appelé les représentations de $\mathbf{R}'$. Ainsi (2) est en fait une somme sur un ensemble de représentations $\sigma'(z)$ dépendant de $z \in \mathcal{Z}$. L'automorphisme de $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{R}'_1)$ est la multiplication par une fonction sur $\tilde{R}'$. Cette fonction est calculée en loc.cite près des éléments elliptiques. D'où l'intérêt pour nous de se ramener au cas où $\sigma'$ est elliptique ; c'est tout à fait loisible quitte à remplacer $\tilde{R}'$ par un de ses sous-groupes de Levi qui ne sera pas plus relevant et on ne perd pas l'hypothèse de stabilité grâce à la section 2 de [18] et [31] 2.8. L'automorphisme se lit alors sur l'ensemble des fonctions cuspidales dont le support est formé d'éléments elliptiques et il est montré en loc. cite qu'en sommant sur $z$, on obtient 0. Dualement on a donc aussi 0 pour $\sigma'$ elliptique et c'est ce qui était cherché.

## 4.5 La stabilisation géométrique et la stabilisation spectrale

Ici on démontre que la stabilisation locale géométrique entraîne la stabilisation locale spectrale. On fixe $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}$. On fixe aussi une représentation stable $\pi'_{M'}$ de $M'$ et on note $\pi$ la $\omega$-représentation de $\tilde{M}$ que l'on obtient par transfert.

**Corollaire** *(i) Sous les deux premières hypothèses de 3.5 (avec $\tilde{M}$ fixé comme en loc.cite) et sous l'hypothèse que pour toutes les intégrales orbitales pondérées de la forme $I^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}$ et $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}$ sont égales, pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ y compris $\tilde{L} = \tilde{M}$, alors on a la stabilisation des caractères pondérés :*

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'}, \lambda, X, f) = I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi, \lambda, X, f).$$

*(ii) On ne suppose que l'hypothèse de stabilisation géométrique pour $\tilde{G}$ remplacé par ses espaces de Levi propres. Alors la conclusion est vraie pour les représentations $\pi'_{M'}$ de caractère central unitaire et pour $\lambda$ dans un petit voisinage de l'axe imaginaire.*

Le (ii) est un point clé de la stabilisation et résulte d'une astuce (cf. la preuve) remarquée par J. Arthur

(i) L'hypothèse de (i) assure que ${}^c\theta^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(f) = ({}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(f))^{\mathbf{M}'}$ et donc dans le lemme de 4.4.1, on a simplement l'égalité

$${}^cI^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'}, \lambda, X, f) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} I^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_{M'}, \lambda, X, {}^c\theta^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(f)).$$

On rappelle aussi la formule :

$$ {}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\pi,\lambda,X,{}^c\theta_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f)). $$

Ainsi le lemme est équivalent à l'égalité

$$ {}^cI_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\pi'_{M'},\lambda,X,f)={}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f). $$

On doit donc montrer l'égalité des fonctions méromorphes en $\lambda$ :

$$ \sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G}^{\Gamma_F,\hat{\theta}})} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\hat{s}))\,{}^c(SI)_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\hat{s})}(\pi'_{M',\lambda},f^{\mathbf{G}'(s)})={}^cI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda,f). \tag{1} $$

On se ramène par les formules de descente au cas où $\pi'_{M'}$ et donc $\pi$ sont tempérées ; on a alors le droit de supposer que $\lambda$ est unitaire par méromorphie et on sait alors que le membre de gauche vaut :

$$ \sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\hat{s}))\,tr\,\pi'_{M',\lambda}({}^c(S\theta)_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\hat{s})}(f^{\mathbf{G}'(\hat{s})})) $$

ce qui vaut aussi par définition $tr\,\pi'_{M',\lambda}({}^c\theta_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(f))$. Et avec l'hypothèse faite cela vaut $tr\,\pi'_{M',\lambda}({}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f)^{\mathbf{M}'})$. Par définition du transfert de $\pi'_{M'}$ cela n'est autre que $tr\,\pi_\lambda({}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(f))$. Ce qui est le membre de droite de (1). Cela termine la preuve de (i)

(ii) On décompose $\pi'_{M'}$ dans son groupe de Grothendieck ; le caractère central de $\pi'_{M'}$ est unitaire par hypothèse et cela force $\pi'_{M'}$ d'être la somme d'une représentation tempérée avec des induites propres. Pour les représentations tempérées les caractères pondérés invariants sont nuls et l'égalité cherchée est triviale ; il reste le cas des induites propres, en acceptant que $\lambda$ soit dans un voisinage de 0 puisqu'il peut y avoir un problème de définition en certains points de l'axe imaginaire. Les formules de descente ramènent à démontrer l'assertion cherchée pour $\tilde{G}$ remplacé par des espaces de Levi propres ; pour les espaces de Levi propres l'hypothèse faite en (i) est vérifiée et on a donc le résultat cherché.

**Remarque** *Dans (ii) si on suppose $\pi'_{M'}$ unitaire, alors $I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\pi'_{M'},\lambda,X,f)=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi,\lambda,X,f)$ pour tout $\lambda$ imaginaire.*

Cela vient du fait que les distributions sont alors définies en tout $\lambda$ unitaire et sont localement constantes en $\lambda$.

## 4.6 Caractères pondérés semi-globaux

Ici le corps de base est global, c'est-à-dire un corps de nombres. On fixe $V$ un ensemble fini de places de $F$ contenant au moins une place archimédienne. On fixe $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\pi_V$ une $\omega$-représentation de $\tilde{M}(F_V)$. On note $\mathcal{L}(\tilde{M})$ l'ensemble des sous-espaces de Levi de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{M}$. Ceci est un objet global. On définit une application :

$$\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{M},V} : I(\tilde{G}(F_V),\omega) \mapsto I_{ac}(\tilde{M}(F_V),\omega)$$

comme en [21] 1.6 et 1.7. ce qui permet de définir un caractère pondéré invariant semi-global : $\quad \forall f \in I(\tilde{G}(F_V),\omega)$

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_V,\lambda,X,f) := J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_V,\lambda,X,f) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\pi_V,\lambda,X,\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{L},V}(f)). \quad (1)$$

Dans la définition de $J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_V,\lambda,X,f)$ il y a une intégrale sur $\lambda + i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ qui est un espace affine car on a supposé que $V$ contient au moins une place archimédienne.

On peut remplacer l'hypothèse que $V$ contient au moins une place archimédienne par l'hypothèse que $V$ ne contient que des places ayant même caractéristique résiduelle ; on intègre alors sur un tore si ces places sont p-adiques. On peut donc définir de façon semi-globale $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_v,\lambda,X,f_v)$ pour toute place $v$ en considérant que $V=\{v\}$. Montrons que cette définition s'exprime en fonction de la définition locale des paragraphes précédents ainsi :

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_v,\lambda,X,f_v) =$$

$$\sum_{\tilde{L}(v)\in\mathcal{L}(\tilde{M}_v)} d_{\tilde{M}_v}(\tilde{M},\tilde{L}(v)) \int_{Y\in\mathcal{A}_{\tilde{M}_v};Y_{\tilde{M}}=X} dY\, I^{\tilde{L}(v)}_{\tilde{M}_v}(\pi_v,\lambda,X,f_{v,\tilde{L}(v)}), \quad (2)$$

où $Y_{\tilde{M}}$ est la projection orthogonale de $Y \in \mathcal{A}_{\tilde{M}_v}$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$.
En effet, pour prouver une telle formule, il faut d'abord la prouver pour $J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_v,\lambda,X,f_v)$. Cette distribution s'obtient par transformation de Fourier à partir de la distribution $J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_{v,\lambda},f_v)$. Par les propriétés de $\tilde{G},\tilde{M}$ famille, on a l'égalité de fonctions méromorphes en $\lambda\in\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ :

$$J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_{v,\lambda},f_v) = \sum_{\tilde{L}(v)\in\mathcal{L}(\tilde{M}_v)} d_{\tilde{M}_v}(\tilde{M},\tilde{L}(v)) J^{\tilde{L}(v)}_{\tilde{M}_v}(\pi_{v,\lambda},f_{v,\tilde{L}(v)}).$$

Le terme de gauche doit être intégré sur $\lambda+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ contre $e^{-\lambda(X)}$ pour trouver $J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_v,\lambda,X,f_v)$. Du côté droit, il faut intégrer sur $\lambda+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_v}$ contre $e^{-\lambda(X)}$

pour trouver $J_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}(v)}(\pi_v, \lambda, X, f_{v,\tilde{L}(v)})$. On passe de l'une des intégrales à l'autre en faisant précisément une transformée de Fourier sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}_v}/\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. D'où le résultat annoncé.

Ensuite, on passe aux termes en $I$ au lieu de $J$ par un calcul standard utilisant les formules de descente. On ne le fait pas.

On revient à l'ensemble $V$ ; on ramène la définition (1) à une définition locale, par récurrence sur le nombre de places dans $V$ ; pour simplifier on suppose que $\pi_V$ est un produit tensoriel, $\otimes_{v\in V}\pi_v$ ; on se ramène à ce cas en faisant des combinaisons linéaires.

Pour cela on définit aussi $\mathcal{L}(\tilde{M}_V)$ comme l'ensemble des familles $\tilde{L}^V = (\tilde{L}^v; v \in V)$ où pour tout $v \in V$, $\tilde{L}^v \in \mathcal{L}(\tilde{M}(F_v))$ et on a les formules de scindage qui relient cette définition aux définitions locales : pour toute fonction $f_V \in I(\tilde{G}(F_V), \omega)$ produit de ses composantes locales :

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_V, \lambda, X, f_V) =$$

$$\sum_{\{\tilde{L}^v\}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \{\tilde{L}^v\}) \int_{\{X_v\in\mathcal{A}_{\tilde{M}_v};\sum_v X_{v,\tilde{M}}=X\}} \prod_{v\in V} I_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\pi_v, \lambda, X_v, f_{v;\tilde{L}_v})dX_v.$$

## 4.7 Caractères pondérés semi-globaux et endoscopie, théorème d'annulation

On définit les variantes stables et endoscopiques de caractères pondérés semi-globaux.

On suppose d'abord que $\omega = 1$ que $G$ est quasi-déployé et que $\tilde{G}$ est à torsion intérieure. On pose, pour toute fonction $f_V \in I(\tilde{G}(F_V))$ produit de ses composantes locales :

$$SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_V, \lambda, X, f_V) = \sum_{\{\tilde{L}^v\}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)} e_{\tilde{M}_V}(\tilde{M}, \{\tilde{L}^v\})$$

$$\int_{\{X_v\in\mathcal{A}_{\tilde{M}_v};\sum_v X_{v,\tilde{M}}=X\}} \prod_{v\in V} SI_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\pi_v, \lambda, X_v, f_{v;\tilde{L}_v})dX_v. \qquad (1)$$

Avec une telle définition, la distribution est certainement stable parce que c'est le cas des distributions locales. Et cela est conforme à la définition usuelle (cf. [21] (i) de la proposition 4.2)

$$SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_V, \lambda, X, f_V) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_V, \lambda, X, f_V) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F};s\neq 1} SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\pi_V, \lambda, X, f_V^{\mathbf{G}'(s)}).$$

On ne fait plus d'hypothèse sur $\tilde{G}$ ; soit $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique non nécessairement elliptique ni même relevante de $\tilde{G}$. On fixe une représentation $\pi'_V$, stable, de $\mathbf{M}'$ sur $F_V$) ; c'est nécessairement par définition de la stabilité, une combinaison linéaire de représentations stables elles mêmes produit tensoriel de représentations stables en toute place $v \in V$. Dans $\hat{G}$, on note $\hat{M}$ le sous-groupe de Levi tel que $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0} = Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0}$ ; plus précisément $\hat{M}$ est la composante neutre du centralisateur dans $\hat{G}$ de $Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0}$. On pose alors pour toute fonction $f_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega)$ produit de ses composantes locales : $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_V,\lambda,X,f_V) :=$

$$\sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{M'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\mathbf{G}'(\hat{s}))(SI)^{\mathbf{G}'(\hat{s})}_{\mathbf{M}'}(\pi'_V,\lambda,X,f_V^{\mathbf{G}'(\hat{s})}).$$

Les facteurs de transfert sont normalisés globalement. Dans le cas où $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique d'un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, on a la décompostion, sous l'hypothèse que $\pi'_V$ est un produit tensoriel :

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_V,\lambda,X,f_V) = \sum_{\{\tilde{L}^v\}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}_V}(\tilde{M},\{\tilde{L}^v\})$$

$$\int_{\{X_v\in\mathcal{A}_{\tilde{M}_v};\sum_v X_{v,\tilde{M}}=X\}} \prod_{v\in V} I^{\tilde{L}^v,\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'_v}(\pi'_v,\lambda,X_v,f_{v;\tilde{L}_v})dX_v. \tag{2}$$

On renvoie au (i) de la proposition de [21] 4.5 pour la preuve de cette formule, c'est juste un calcul de coefficients fait en loc. cite.

**Lemme** *Avec les notations précédentes, on suppose qu'en toute place $v \in V$ la représentation $\pi'_v$ est une induite de la forme $ind^{\mathbf{M}'_v}_{\mathbf{R}'(v)}\sigma_v$ avec $\sigma_v$ une représentation stable et elliptique modulo le centre de $\mathbf{R}'(v)$ où $\mathbf{R}'(v)$ est un espace de Levi de $\mathbf{M}'_v$. On suppose aussi que pour au moins une place $v$, $\mathbf{R}'(v)$ n'est pas une donnée endoscopique relevante de $\tilde{G}(F_v)$, alors*

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_V,\lambda,X,f_V) = 0$$

On a utilisé l'écriture $\mathbf{R}'(v)$ pour signifier que $\mathbf{R}'(v)$ est un espace de Levi de $\mathbf{M}'_v$ qui ne provient pas forcément par localisation d'une donnée globale.

C'est bien l'analogue géométrique de cet énoncé qui est démontré en 6.10, (31) de [21] mais comme ce n'est pas exactement l'hypothèse faite en [21] 6.1 et suivant on commence par s'y ramener. On commence donc par supposer que $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique relevante de $\tilde{G}$. Et on montre la nullité : on considère (2) et on fixe $v$ tel que $\mathbf{R}'(v)$ ne soit pas une donnée endoscopique relevante de $\tilde{G}(F_v)$. On a alors montré en 4.4.2 (ii) que les termes $I_{\mathbf{M}'_v}^{\tilde{L}^v,\mathcal{E}}(\pi'_v,\lambda,X_v,f_{v,\tilde{L}_v})$ sont tous nuls. D'où l'assertion dans ce cas.

Maintenant on a exactement l'hypothèse que $\mathbf{M}'$ n'est pas une donnée endoscopique relevante de $\tilde{G}$ comme dans 6.6 de [21] et la même preuve s'applique avec beaucoup moins (voire pas du tout) de difficultés aux places archimédiennes.

## 4.8 Caractères pondérés semi-globaux et endoscopie, théorème de transfert

Dans ce paragraphe on fait l'hypothèse de récurrence géométrique de 3.2.3. On fixe $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique relevante de $\tilde{M}$. On fixe une représentation $\pi'_V$, stable, de $\mathbf{M}'$ dont on note $\pi_V$ le transfert en une $\omega$-représentation de $\tilde{M}$. On suppose que ces représentations ont un caractère central.

**Proposition** *Avec les hypothèses et notations précédentes et en supposant que le caractère central de $\pi'_V$ est unitaire, on a l'égalité des distributions pour tout $\lambda$ très voisin de 0 où ces distributions sont définies*

$$\forall f_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega), \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_V,\lambda,X,f_V) = I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\pi'_V,\lambda,X,f_V).$$

On se ramène aisément au cas où $\pi_V$ est un produit tensoriel. On compare les définitions de 4.6 et 4.7 (2). Il suffit donc de montrer avec les notations de ces références que pour tout $\tilde{L}^v \in \mathcal{L}(\tilde{M}_v)$, on a l'égalité

$$\forall f \in I(\tilde{G}(F_v)) \quad I_{\mathbf{M}'_v}^{\tilde{L}^v,\mathcal{E}}(\pi'_v,\lambda,X_v,f_v) = I_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\pi_v,\lambda,X_v,f_v).$$

Ceci a été montré en 4.5 (ii) parce que l'on a supposé que $\pi'_V$ a un caractère central unitaire, pour tout $\lambda$ dans un voisinage de 0 comme dans l'énoncé.

**Remarque** *Les fonctions, en $\lambda$, de l'énoncé sont localement constantes. Si l'une est définie en $\lambda = 0$ l'autre l'est aussi au moins par continuité. Donc avec la seule hypothèse que soit $\pi'_V$ soit $\pi_V$ est somme de représentations unitaires, on aura une égalité de distributions en $\lambda = 0$. On supprime alors $\lambda$ de la notation.*

Une difficulté mineure de cette théorie est que l'on ne sait pas que le transfert préserve l'unitarité, il n'y a même sans doute pas de raison que ce soit vrai, d'où l'intérêt de la remarque.

## 4.9 Caractères pondérés globaux

### 4.9.1 Définition des caractères pondérés globaux

On fixe $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On fixe un ensemble fini de places $V$ contenant $V_{ram}$. Pour tout $v \notin V$, on fixe un morphisme $c_v : W_{F_v} \to {}^L M(F_v)$ (en notant ainsi le $L$-groupe de $M$ vu sur $F_v$). On pose $c^V = (c_v)_{v \notin V}$ et on suppose que $c^V$ est quasi-automorphe, cf. 4.1.2.

On a défini en 4.1.3 la fonction méromorphe de $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(c^V_\lambda)$ ; cette fonction est invariante sous $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$. On généralise cette définition en remplaçant $\tilde{G}$ par un espace de Levi $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. Et la fonction méromorphe de $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, notée $r^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(c^V_\lambda)$, est invariante sous $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ et elle ne dépend donc que de la projection $\lambda^{\tilde{L}}$ de $\lambda$ dans $\mathcal{A}^{*\tilde{L}}_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. Comme on l'a dit en 4.1.2, les représentations paramétrées par $c_v$ pour tout $v \notin V$ sont unitaires. La fonction méromorphe ainsi définie est donc holomorphe en tout $\lambda$ tel que $\lambda^{\tilde{L}}$ est imaginaire.

On fixe $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ ; pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, on décompose $\lambda = \lambda^{\tilde{L}} + \lambda_{\tilde{L}}$ suivant la décomposition orthogonale $\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}} = \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}} \oplus \mathcal{A}^{*\tilde{L}}_{\tilde{M},\mathbb{C}}$. Dans les paragraphes précédents, pour toute $\omega$ représentation $\pi_V$ de $\tilde{G}(F_V)$, on a défini la distribution

$$f_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega) \mapsto I^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(ind^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\pi_V \otimes \lambda^{\tilde{L}}), \lambda_{\tilde{L}}, X_{\tilde{L}}, f_V),$$

où $X_{\tilde{L}} \in \mathcal{A}_{\tilde{L}}$. Cette distribution n'est pas partout définie, elle est localement constante en $\lambda_{\tilde{L}}$ (là où elle est définie) et elle dépend méromorphiquement de $\lambda^{\tilde{L}}$ : cela résulte des formules de descente. Si $\pi_V$ est unitaire la distribution est définie pour $\lambda$ imaginaire. On peut donc la calculer en $\lambda_{\tilde{L}} = 0$.

On suppose que $\pi_V$ est unitaire et on revient à $c^V$ qui est aussi unitaire ; pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ on définit $r^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(c^V_\lambda)$. Cette fonction méromorphe de $\lambda$ ne dépend que de $\lambda^{\tilde{L}}$. On définit alors pour tout $f_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega)$

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_V \otimes c^V, f) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}/i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}} d\lambda^{\tilde{L}}\, r^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(c^V_\lambda) I^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(ind^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\pi_V \otimes \lambda^{\tilde{L}}), 0, 0, f_V). \tag{1}$$

Cette intégrale converge grâce à 4.1.6. C'est le caractère pondéré global.

### 4.9.2 Caractères pondérés globaux stables (cas de la torsion intérieure)

Dans ce paragraphe, on suppose que $\tilde{G}$ est à torsion intérieure avec $\omega = 1$ et $G$ quasidéployé. On définit une version stable des caractères pondérés globaux. On fixe encore $\tilde{M}$, $c^V$ et $\pi_V$ comme dans le paragraphe précédent. Pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$ et pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, on considère encore la décomposition $\lambda = \lambda_{\tilde{L}} + \lambda^{\tilde{L}}$. Fixons $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. On a défini en 4.1.5 les fonctions méromorphes de $\lambda$, $s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(c^V_\lambda)$ que l'on considère pour $\tilde{G}$ remplacé par $\tilde{L}$, ce sont donc des fonctions $s^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(c^V_\lambda)$ qui ne dépendent que de $\lambda^{\tilde{L}}$. Et on pose, avec les notations précédentes

$$(SI)^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_V \otimes c^V, f) =$$
$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}/i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}} d\lambda^{\tilde{L}}\, s^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(c^V_{\lambda^{\tilde{L}}})(SI)^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(ind^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\pi_V \otimes \lambda^{\tilde{L}}), 0, 0, f_V). \qquad (2)$$

Il est clair d'après 4.7 qu'une telle distribution est stable.

### 4.9.3 Caractères pondérés globaux endoscopiques, transfert

On ne fait plus d'hypothèses sur $\tilde{G}$ et on définit aussi les variantes endoscopiques des caractères pondérés globaux. On fixe $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Soit $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}$ et $\pi'_V$ une représentation unitaire de $\mathbf{M}'(F_V)$ que l'on suppose stable. On suppose aussi donné $c'^V$ produit tensoriel pour tout $v \notin V$ de morphisme de $W_{F_v}$ dans $\mathcal{M}'$. Et on suppose aussi que $c'^V$ est quasi-automorphe. Par inclusion de $\mathcal{M}'$ dans le $L$-groupe de $M$, on obtient un morphisme du type de ceux considérés précédemment et on le note encore $c'^V$. Si $\mathbf{M}'$ n'est pas relevant, on pose $\pi_V = 0$ et sinon on note $\pi_V$ la représentation de $\tilde{M}(F_V)$ obtenue à partir de $\pi'_V$ par transfert. On pose pour tout $f_V \in I(\tilde{G}(F_V), \omega)$

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_V \otimes c'^V, f_V) =$$
$$\sum_{\hat{s}\in\hat{s}_{\mathbf{M}'}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \mathbf{G}'(\hat{s}))(SI)^{\mathbf{G}'(\hat{s})}_{\mathbf{M}'}(\pi'_V \otimes c'^V, f^{\mathbf{G}'(\hat{s})}_V). \qquad (3)$$

**Proposition** *Avec les hypothèses et notations précédentes, pour tout $f_V \in I(\tilde{G}(F_V), \omega)$ on a l'égalité :*

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi'_V \otimes c'^V, f_V) = I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_V \otimes c'^V, f_V).$$

*En particulier si $\mathbf{M}'$ n'est pas relevant le terme de gauche est nul.*

Il faut montrer que le terme de gauche vérifie une propriété de descente analogue à 4.9.1 (1). Pour $\mathbf{L}'$ une donnée endoscopique de $\tilde{G}$ on dit que $\mathbf{L}' \in \mathcal{L}(\mathbf{M}')$ si $\mathbf{L}' = (L', \mathcal{L}', \hat{s}_{L'})$ et $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \hat{s}_{M'})$ sont telles que $M'$ est un sous-groupe de Levi de $L'$, $\hat{s}_{L'} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$ et $\mathcal{L}' = \hat{L}'\mathcal{M}'$. A une telle donnée on associe le sous-groupe de Levi $\hat{L}$ de $\hat{G}$ défini par le fait que $\hat{L}$ est le commutant dans $\hat{G}$ de $Z(\hat{L}')^{\Gamma_F, 0}$. A chaque terme $(SI)_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\hat{s})}(\pi'_V \otimes c'^V, f_V^{\mathbf{G}'(\hat{s})})$ on applique la définition 4.9.2 (2), ce qui fait intervenir une somme sur les $\mathbf{L}'$ contenant $\mathbf{M}'$ et inclus dans $\mathbf{G}'(\hat{s})$. On peut modifier l'ordre des sommes (cf [21], 6.6) pour avoir une somme sur les sous-groupes de Levi, $\hat{L}$ de $\hat{G}$ contenant $\hat{M}$ et sur les données endoscopiques $\mathbf{L}'$ donnant $\hat{L}$ puis sur les données $\mathbf{G}'(\hat{s})$ contenant $\mathbf{L}'$ : comme toujours la somme en $\hat{s}$ se décompose en une somme sur $\hat{s}_{L'} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$ et $\hat{s} \in \hat{s}_{L'} Z(\hat{L})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$. On a déjà vu que quand on fixe $\mathbf{L}'$ la deuxième somme donne le terme (5) ci-dessous et on obtient donc que le terme correspondant à un $\mathbf{L}'$ fixé est

$$i_{\tilde{M}'}(\hat{L}, \hat{L}') \int_{\lambda^{L'} \in i\mathcal{A}^*_{M'}/i\mathcal{A}^*_{L'}} d\lambda^{L'}\, s_{M'}^{L'}(c'^V_{\lambda^{L'}}) \tag{4}$$

$$I_{\mathbf{L}'}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(ind_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{L}'}(\pi'_V \otimes \lambda^{L'}), 0, 0, f_V). \tag{5}$$

Si $\mathbf{M}'$ n'est pas relevant tous les termes (5) sont nuls d'après 4.7. On est donc ramené au cas où $\mathbf{M}'$ est relevant. Dans ce cas là, les $\mathbf{L}'$ sont aussi relevants et on note $\tilde{L}$ l'espace de Levi de $\tilde{G}$ correspondant et, d'après 4.1.5, on a :

$$\sum_{\hat{s} \in \hat{s}_{M'} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\hat{\Gamma_F}, \hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\hat{L}, \hat{L}'(\hat{s})) s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{L}'(\hat{s})}(c'^V_\lambda) = r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(c^V_\lambda),$$

où $c^V_\lambda$ est l'image de $c'^V_\lambda$ dans le $L$-groupe de $M$ via l'inclusion de $\mathcal{M}'$ dans ce groupe. On utilise encore la proposition de 4.8 pour transformer (5) en $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(ind_{\tilde{M}}^{\tilde{L}} \pi_V, 0, 0, f_V)$. Et on obtient exactement (1), ce qui prouve la proposition.

Oublions l'espace de Levi $\tilde{M}$ et considérons une donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ de $\tilde{G}$, $\omega$ qui ne correspond à aucun espace de Levi de $\tilde{G}$. Soit $\pi'_V$ et $c'^V$ comme ci-dessus. On peut associer à $\mathbf{M}'$ un Levi $\hat{M}$ de $\hat{G}$. On définit encore $I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\pi'_V \otimes c'^V, f_V)$ par la formule (3) qui conserve un sens. La même preuve que ci-dessus montre que :

**Proposition** *Sous ces hypothèses,* $I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\pi'_V \otimes c'^V, f_V) = 0$.

# 5 Le côté spectral de la formule des traces

## 5.1 Rappel des termes discrets

Il y a deux notions pour "discret" en ce qui concerne les représentations automorphes ; la notion habituelle est que ce sont les représentations intervenant discrètement dans la décomposition spectrale des fonctions de carré intégrable. L'autre notion qui nous concerne ici est le fait que ces représentations interviennent dans la partie discrète de la formule des traces, qui va être décrite ci-dessous. Il serait plus logique mais beaucoup trop lourd de distinguer en parlant de représentations discrètes pour les premières et de représentation $t$-discrète pour les secondes. On va quand même le faire dans ce paragraphe, en utilisant la notation générique $\rho$ pour les représentations puis on posera $\pi_{disc} = \rho_{t-disc}$ et donc le *disc* utilisé avec $\pi$ sera pour les représentations $t$-discrètes et c'est la notation qui sera ensuite utilisée.

On reprend [17] 6.1.

On ne peut pas parler de représentations discrètes sans caractère unitaire du centre du groupe. Pour faire simple (et pas le plus général possible) on reprend les définitions $\mathfrak{A}_G$ et $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ introduites en [21] fin de 1.3 : pour $\mathfrak{A}_G$ c'est la composante neutre topologique des points sur $\mathbb{R}$ d'un tore déployé maximal dans $G$ vu comme groupe sur $\mathbb{Q}$ et $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ en est le sous-ensemble des éléments invariants sous $\theta$. Ces espaces s'identifient naturellement (via l'application log) à $\mathcal{A}_G$ et $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On utilise alors l'inclusion diagonale de $\mathfrak{A}_G$ dans $G(F_\infty)$ pour identifier $G(\mathbb{A}_F) = \mathfrak{A}_{\tilde{G}} G(\mathbb{A}_F)^1$. Les représentations que nous allons considérer sont invariantes ont un caractère sous $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ unitaire et un caractère pour l'action de $\mathfrak{A}_G$ qui est $\theta$- semi-invariant au sens $\theta(\chi) = \chi\omega$ si $\chi$ est ce caractère ; on a supposé que l'action de $\tilde{G}(F)$ sur le centre de $G(F)$ est d'ordre fini et que $\omega$ est unitaire. Donc un tel caractère $\chi$ est nécessairement unitaire et donc toute $\omega$-représentation irréductible de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ ayant un caractère unitaire pour l'action de $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ a un caractère unitaire pour l'action de $\mathfrak{A}_G$. Remarquons qu'il y a un unique caractère $\chi$ de $\mathfrak{A}_G$ qui vérifie l'égalité ci-dessus et qui est trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. On le note $\chi_G$.

Le groupe des points rationnels $\tilde{G}(F)$ agit naturellement par conjugaison dans l'ensemble des formes automorphes se transformant par le caractère $\chi_G$ de $\mathfrak{A}_G$ et de carré intégrable modulo $\mathfrak{A}_G$ et on pose pour toute telle forme automorphe de carré intégrable $\phi$, pour tout $g \in G(\mathbb{A}_F)$, $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$

$$\rho_{disc}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega)\phi(g) = \omega(\delta^{-1}g\gamma)\phi(\delta^{-1}g\gamma),$$

où $\delta$ est n'importe quel élément de $\tilde{G}(F)$ et où $\delta^{-1}g\gamma \in G(\mathbb{A}_F)$ est défini par l'égalité $g\gamma = \delta(\delta^{-1}g\gamma)$ dans $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$. On remarque que cette formule est indépendante de $\delta$.

Soit $x, y \in G(\mathbb{A}_F)$ est appliquons cette formule avec $\gamma$ remplacé par $x\gamma y$ :

$$\rho_{disc}^{\tilde{G}}(x\gamma y, \omega)\phi(g) = \omega(\delta^{-1}gx\gamma y)\phi(\delta^{-1}gx\gamma y) = \omega(y)\omega(\delta^{-1}gx\gamma)\rho(y)(\phi)(\delta^{-1}gx\gamma).$$

Or

$$\omega(\delta^{-1}gx\gamma)\rho(y)(\phi)(\delta^{-1}gx\gamma) = \rho_{disc}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega)(\rho(y)\phi)(gx).$$

D'où

$$\rho_{disc}^{\tilde{G}}(x\gamma y, \omega)\phi(g) = \omega(y)\rho(x)\rho_{disc}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega)(\rho(y)\phi)(g).$$

ce qui est bien une $\omega$ représentation.

Les autres termes à ajouter pour avoir la partie discrète de la formule spectrale viennent des sous groupes de Levi de $G$, $M$ tel que $Norm_{\tilde{G}(F)}M$ non seulement est non vide mais en plus contient un élément régulier, c'est-à-dire un élément $u$ qui agit sans point fixe sur $\mathcal{A}_M^*/\mathcal{A}_{\tilde{G}}^*$. Soit $u$ un tel élément. La partie discrète associée à $M$ et $u$ est écrite en [17] dans la section 14.3 (avant l'énoncé de 14.3.2) dans le cas non invariant. Rappelons la construction. On fixe un sous-groupe parabolique $P$ de $G$ de sous-groupe de Levi $M$ ; on note $u.P$ le sous-groupe parabolique de $G$ obtenu en conjuguant $P$ par $u$. On note, pour tout sous-groupe parabolique $Q$ de $G$ de sous-groupe de Levi $M$, $U_Q$ son radical unipotent.

Soit $\phi$ une fonction sur $G(\mathbb{A}_F)$ invariante à gauche sous $M(F)U_P(\mathbb{A}_F)$. Pour tout $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$, on définit la fonction $\gamma_\omega.\phi$ en posant pour tout $g \in G(\mathbb{A}_F)$ :

$$(\gamma_\omega.\phi)(g) = \omega(u^{-1}g\gamma)\phi(u^{-1}g\gamma).$$

C'est une fonction sur $G(\mathbb{A}_F)$ invariante à gauche sous $M(F)U_{u.P}(\mathbb{A}_F)$.

Pour revenir en une fonction invariante à gauche sous $M(F)U_P(\mathbb{A}_F)$ on utilise l'opérateur d'entrelacement standard. Pour que cette opérateur soit holomorphe il suffit que $\phi$ se transforme à gauche sous $\mathfrak{A}_M$ par un caractère unitaire.

Pour cela, on note $\mathcal{A}^2(U_P(\mathbb{A}_F)M(F)\mathfrak{A}_{M,\omega}\backslash G(\mathbb{A}_F))$ l'espace des formes automorphes de carré intégrable au sens de [20] I.2.17, invariantes pour l'action à gauche de $U_P(\mathbb{A}_F)M(F)\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ et de $\mathfrak{A}_M^G$ et se transformant sous l'action à gauche de $\mathfrak{A}_G$ par le caractère $\chi_G$. Remarquons que $\omega$ est forcément trivial sur $\mathfrak{A}_M^G$ puisque ce groupe est dans l'image de $G_{SC}(\mathbb{A}_F)$. Puisque $a \mapsto a^{-1}(u.a)$ est une bijection de $\mathfrak{A}_M/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ sur lui-même, on peut aussi dire que ces formes automorphes sont invariantes par $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ et se transforment sous l'action à gauche par un élément de $\mathfrak{A}_M$ de la forme $a^{-1}(u.a)$ (avec $a \in \mathfrak{A}_M$) par la multiplication par $\omega(a)$. Puisque $\omega$ est unitaire, il est clair que ces formes se transforment sous l'action à gauche de $\mathfrak{A}_M$ par un caractère unitaire.

On sait alors définir l'opérateur d'entrelacement par prolongement méromorphe

$$M_{P|u.P}(0) : \mathcal{A}^2(U_{u.P}(\mathbb{A}_F)M(F)\mathfrak{A}_{M,\omega}\backslash G(\mathbb{A}_F)) \to$$

$$\mathcal{A}^2(U_P(\mathbb{A}_F)M(F)\mathfrak{A}_{M,\omega}\backslash G(\mathbb{A}_F)).$$

Et l'action de $\gamma$ sur $\phi$ est alors

$$\rho_{t-disc}(\gamma)(\phi) := M_{P|u.P}(0)\gamma_\omega\phi.$$

On vérifie comme ci-dessus que cela donne une $\omega$-représentation de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ dans $\mathcal{A}^2(U_P(\mathbb{A}_F)M(F)\mathfrak{A}_{M,\omega}\backslash G(\mathbb{A}_F))$. On la note $\rho_{disc,M,u,\omega}$.

On pose $w(M) := |Norm_{G(F)}(M)/M(F)|$ et :

$$\rho_{t-disc,\omega} := \sum_{M,u} w(M)\frac{1}{|\det(u-1)_{|\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G}|}\rho_{disc,M,u,\omega},$$

où $M$ parcourt l'ensemble des sous-groupes de Levi de $G$, pris à conjugaison près et où $u$ parcourt l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F)$ normalisant $M$ réguliers au sens ci-dessus et pris à translation près par l'action de $M(F)$ opérant à gauche ou à droite (cela n'a pas d'importance).

**Définition et Notations :** on fixe un ensemble fini de places, $V$, de $F$ contenant $V_{ram}$. Pour tout $v$ non dans $V$, on note $c_v$ un morphisme non ramifié de $W_{F_v}$ dans ${}^LG(F_v)$, où encore ${}^LG(F_v)$ désigne le $L$-groupe de $G$ sur $F_v$. On note $c^V$ le produit tensoriel de ces morphismes ; ainsi $c^V$ donne une représentation non ramifiée de $G(\mathbb{A}_F^V)$ ou suivant le point de vue un caractère du produit des algèbres de Hecke sphériques en toute place hors de $V$. On suppose que $c^V$ est $\omega, \hat{\theta}$ invariant. En faisant opérer trivialement $\tilde{K}^V$ sur les vecteurs $K^V$-invariants de la représentation, hors de $V$ la représentation s'étend en une représentation de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F^V)$ ; c'est la normalisation, canonique, que nous utiliserons systématiquement hors de $V$.

Aux places archimédiennes, on fixe $\nu$ un caractère infinitésimal tel que $\theta(\nu) = \nu + d\omega$ ; on réalise $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ comme un sous-groupe du centre de $G(F_\infty)$ formé d'éléments invariants sous $\tilde{G}(F_\infty)$. On suppose que $\nu$ est trivial sur l'algèbre de Lie de ce groupe (vu comme sous espace du centre de l'algèbre enveloppante).

On note alors $\pi_{disc,\nu}(c^V)$ la $\omega$ représentation de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ qui est le produit du scalaire $|det(1-\theta)_{|\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}}|^{-1}$ et de la somme des sous-représentations de

$\rho_{t-disc,\omega}$ ayant des vecteurs invariants sous $\tilde{K}^V$ et sur lesquelles l'algèbre enveloppante de $G(F_\infty)$ opère par le caractère central $\nu$ et où toute fonction sur $K^V\backslash G(\mathbb{A}_F^V)/K^V$ opère, sur les vecteurs $\tilde{K}^V$ invariants par le caractère $c^V$. On voit cette représentation comme une $\omega_V$-représentation de $\tilde{G}(F_V)$ en se limitant aux éléments $\tilde{K}^V$ invariants. Le scalaire $|det(1-\theta)_{|\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}}|^{-1}$ a été mis un peu formellement pour que les formules soient cohérentes entre l'espace $\tilde{G}$ et ses espaces de Levi, (cf. [21])

D'après les constructions, cet espace de représentations se réalise dans un espace de fonctions invariantes à gauche sous $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. On fixe $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ cela donne un caractère unitaire de $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ qui s'étend en un caractère unitaire de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ trivial évidemment sur $G(\mathbb{A}_F)^1$. On note alors $\pi_{disc,\nu,\lambda}(c^V)$ le produit tensoriel de ce caractère $\lambda$ avec $\pi_{disc,\nu}(c^V)$ et on voit cette représentation comme une $\omega_V$-représentation de $\tilde{G}(F_V)$. Il faut faire attention aux places hors de $V$, ce n'est plus $c^V$ le caractère de l'algèbre de Hecke sphérique mais $c^V \otimes \lambda$. C'est la distribution suivante sur laquelle on a prise via la formule des traces :

$$f_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega) \mapsto tr\, \pi_{disc,\nu,\lambda}(c^V)(f_V). \qquad (1)$$

On a évidemment $\pi_{disc,\nu,\lambda+\mu}(c^V) = \pi_{disc,\nu,\lambda}(c^V)\otimes \mu$ pour tout $\lambda,\mu \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$.

Mais dans la formule des traces, c'est le coefficient de Fourier de cette distribution qui intervient : pour $X \in \mathcal{A}_{\tilde{G}}$, on définit la distribution, $\forall f_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega)$

$$I_\nu(c^V, X, f_V) := \int_{\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}} d\lambda\, tr\, \pi_{disc,\nu,\lambda}(c^V)(f_V) e^{-\lambda(X)}.$$

Et la partie discrète de la formule des traces invariante dans $V$ est la distribution $\oplus_{\nu,c^V} I_\nu(c^V,0,f_V)$, ce qui veut dire que l'on ne considère que les traces des représentations restreintes à $\tilde{G}(F_V)\tilde{K}^V \cap G(\mathbb{A})^1\tilde{G}(F)$.

## 5.2 Rappel des termes continus

On fixe un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ ; on généralise la définition $\pi_{disc,\nu,\lambda}(c^V)$ en supposant ici que $\nu$ est un caractère infinitésimal de $M(F_\infty)$ et $c^V$ est un caractère automorphe de l'algèbres de Hecke sphérique de $M(\mathbb{A}_F^V)$ ; on note alors plutôt $\pi^{\tilde{M}}_{disc,\nu,\lambda}(c^V)$. On a donc défini en 4.9.1 la distribution sur $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$,

$$f_V \mapsto I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi^{\tilde{M}}_{disc,\nu}(c^V), f_V).$$

La partie continue de la formule des traces invariantes est d'après [4] Theorem 4.4 la distribution sur $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$ obtenue en sommant (on reviendra ci-dessous sur les problèmes de convergence)

$$\sum_{\tilde{M}} w(\tilde{M}) \sum_{\nu, c^V} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\nu,disc}^{\tilde{M}}(c^V), f_V);$$

la présentation ici est un peu différente qu'en loc. cite car, d'une part, on a choisi de faire entrer ce qui est noté $a^M(\pi)$ dans [4] (4.5) pour la partie "multiplicité" dans $\tilde{M}$ (noté $a_{disc}^{M_1}$, le $M_1$ est notre $\tilde{M}$) dans $\pi_{\nu,disc}^{\tilde{M}}(c^V)$ et d'autre part le $r_{M_1}^M(\pi_{1,\lambda})$ a été pris en compte dans la définition de $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\nu,disc}^{\tilde{M}}(c^V), f_V)$ dans 4.9.1. Ensuite on remplace dans l'énoncé de [4] theorem 4.4, l'intégrale sur $\Pi(M,t)$ par sa valeur donnée avant (4.5) de loc. cite ; cela devient une intégrale sur $\Pi_{disc}(M_1,t)$, ce qui est essentiellement notre formulation. La différence avec [4] est le fait que l'on n'a pas mis de somme sur la partie imaginaire du caractère infinitésimal (le $t$) ; ici on utilise les résultats de Finis, Lapid et Müller qui assurent la convergence comme pour la formule des traces non invariantes dans le paragraphe 14.3 de [17].

Pour tout $\tilde{M}$ sous espace de Levi propre de $\tilde{G}$, on a une intégrale sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ ce qui explique que l'on a une partie continue.

## 5.3 Représentations semi-finies

### 5.3.1 Définition

On a besoin de cette définition : soit $\pi$ une $\omega$ représentation de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ ou plutôt un élément du groupe de Grothendieck de ces $\omega$-représentations ; on dit que $\pi$ est semi-finie si les conditions suivantes sont vérifiées :

- pour toute composante irréductible $\pi'$ de $\pi$, les caractères infinitésimaux de $\overline{\pi}'$ et de $\check{\pi}'$ sont égaux ;

- pour tout ensemble fini de $K$-types, $\mathcal{K}$, il existe $R \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que les composantes de $\pi$ admettant des vecteurs se transformant sous au moins un de ces $K$-types ont toutes un caractère infinitésimal dont la partie réelle est de norme inférieure ou égale à $R$ ; si en plus, en fixant $R' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, parmi ces représentations il n'y en a plus qu'un nombre fini (en comptant les multiplicités) dont la partie imaginaire du caractère infinitésimal est de norme bornée par $R'$ ;

- pour $\nu$ un caractère infinitésimal fixé, on note $\pi_\nu^{\mathcal{K}}$ la somme des composantes irréductibles de $\pi$ ayant des vecteurs se transformant sous au moins un $K$-type dans $\mathcal{K}$ et ayant pour caractère infinitésimal $\nu$. Cette représentation est de longueur finie d'après les propriétés demandées et on demande en plus que la somme sur $\nu$ des traces ces représentations évaluées sur des fonctions $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}_F))$, se transformant selon des $K$-types inclus dans l'ensemble fixé $\mathcal{K}$, converge absolument.

Fixons $\pi$ une représentation semi-finie et $V$ un ensemble fini de places. On suppose que toutes les composantes de $\pi$ sont non ramifiées hors de $V$. On décompose alors $\pi = \sum_\nu \pi_\nu$ où $\pi_\nu$ est la somme des termes de caractère infinitésimal $\nu$ et pour $\nu$ fixé on décompose $\pi_\nu = \sum_{c^V} \pi_\nu(c^V)$, où $c^V$ parcourt l'ensemble des caractères des algèbres de Hecke sphériques hors de $V$.

Soit $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique de $\tilde{G}$ que l'on ne suppose pas elliptique mais que l'on suppose relevante ; plus exactement on note $M_1'$ une donnée auxiliaire relative à cette donnée endoscopique de sorte que le groupe $\mathcal{M}'$ (de la donnée endoscopique) soit plongé dans le groupe dual, ${}^LM_1'$ de $M_1'$ ; ainsi $M_1'$ est une extension par un tore induit du groupe $M'$ de la donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ et il existe un caractère de ce tore (donné par $\mathbf{M}'$ et le plongement de $\mathcal{M}'$ dans ${}^LM_1'$) tel que tous les objets attachés à $M_1'$ intervenant dans l'endoscopie définie par $\mathbf{M}'$ se transforment par ce caractère sous l'action du tore induit. Surtout pour ce que l'on fait ici, on peut simplifier les notations en "oubliant" que $\tilde{M}' \neq \tilde{M}_1'$ : au lieu d'objets attachés à $\tilde{M}_1'$ se transformant selon ce caractère, on parlera symboliquement d'objets attachés à $\mathbf{M}'$. A tout caractère infinitésimal $\nu'$ de $\mathbf{M}'$ est associé un caractère infinitésimal $\nu$ de $G$ tel que le transfert d'un paquet stable de représentations de $\mathbf{M}'$ de caractère infinitésimal $\nu'$ à un espace de Levi de $\tilde{G}$ ait $\nu$ pour caractère infinitésimal. On écrira $\nu' \mapsto \nu$ pour signifier cette relation qui n'est ni injective ni surjective. Soit aussi $c'^V$ un caractère de l'algèbre de Hecke sphérique de $\mathbf{M}'$ hors de $V$. Par la correspondance de Langlands, cela définit un caractère pour l'algèbre de Hecke sphérique hors de $V$ de $\tilde{G}$. On note encore $c'^V \mapsto c^V$ cette relation qui n'est là aussi ni injective ni surjective.

### 5.3.2 Les représentations semi-finies et la partie discrète de la formule des traces

On fixe $V$ un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes. On reprend la notation $I_{disc}^{\tilde{G}}(\omega, f_V 1_{\tilde{K}^V})$ pour la partie discrète de la formule des traces.

**Remarque** *Cette distribution s'exprime comme la trace d'une représentation semi-finie*

Ceci est loin d'être évident mais les arguments sont déjà dans la littérature comme on va l'expliquer. Le premier point qu'il nous faut est la propriété suivante. On fixe un ensemble fini de $K_\infty$-types. Soit $\pi$ une des représentations irréductibles intervenant dans $I_{disc}$ ; on suppose que $\pi_\infty$ a au moins un $K_\infty$-type dans l'ensemble fixé. Alors la partie réelle du caractère infinitésimal de $\pi$ est bornée indépendamment de $\pi$. C'est utilisé en [11] preuve de 4.1 qu'on peut remonter à [4] fin de la preuve de 6.5. Faute de référence dans ces citations (le résultat doit être bien connu des experts dès la fin des années 80, cf. [1] (4) du corollaire 7.2), on explique le résultat ainsi : une représentation unitaire, $\pi$, est unitairement induite à partir d'une représentation unitaire, $\pi'$ d'un de ses sous-groupes de Levi ayant un caractère infinitésimal réel (voir [25] paragraphe 3). Pour les représentations unitaires, Müller a montré en [24] (8.1) qui renvoie à (3.4) (et qui n'est pas difficile) que pour $\pi'$ une représentation unitaire d'un groupe de Lie réel et pour $\sigma$ l'un de ses $K_\infty$-types l'action de l'opérateur de Casimir agissant sur $\pi'$ est bornée par l'action du Laplacien de $K_\infty$ agissant sur $\sigma$. Avec l'hypothèse que le caractère infinitésimal de $\pi'$ est réel cela borne ce caractère infinitésimal. Comme le fait que l'on impose à $\pi$ de contenir au moins certains $K_\infty$-types se propage à $\pi'$ (pour des types qui dépendent du sous-groupe de Levi mais pas des représentations), on obtient l'assertion.

Ensuite la propriété de convergence absolue résulte des travaux de Müller sur la traçabilité du spectre discret ([23]) et les propriétés restantes sont des propriétés générales de finitude du nombre de représentations automorphes quand on a fixé le caractère infinitésimal et la ramification. Cela prouve la remarque.

### 5.3.3 Utilisation des multiplicateurs sur les représentations semi-finies

Cette théorie des multiplicateurs est due à Arthur et permet de séparer les caractères infinitésimaux ([3] 4.2). On l'utilise comme dans [11], en montrant ici la propriété qui servira.

Soit $V$ un ensemble fini de places contenant $V_{ram}$ et soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions dans $I(\tilde{G}(F_V), \omega)$ (donc en particulier $K_V$ finies). On suppose que $\mathcal{F}$ est stable par convolution pour tout multiplicateur $\alpha$. On fixe aussi $\pi$ une représentation semi-finie de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$ dont toutes les composantes sont non ramifiées hors de $V$. On reprend la notation $\pi = \sum_{\nu, c^V} \pi_\nu(c^V)$ de 5.3.1.

**Lemme** *(i) On suppose que* $tr\, \pi(f_V 1_{\tilde{K}}^V) = 0$ *pour tout* $f_V \in \mathcal{F}$. *Alors* $tr\, \pi_\nu(f_V 1_{\tilde{K}^V}) = 0$ *pour tout* $f_V \in \mathcal{F}$ *et tout caractère infinitésimal* $\nu$.

*(ii) On suppose en plus que pour tout ensemble fini de places* $V'$ *de* $F$ *contenant* $V$ *et pour toute fonction* $f_{V'-V}$ *dans* $I(\tilde{G}(F_{V'-V}), \omega)$ *non ramifiée,*

*on a* $tr\,\pi(f_V f_{V'-V} 1_{\tilde{K}^{V'}}) = 0$ *alors* $tr\,\pi_\nu(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V}) = 0$ *pour tout couple* $\nu, c^V$ *comme précédemment.*

On fixe $f \in \mathcal{F}$ ; il suffit de supposer que $\mathcal{F}$ est exactement l'ensemble des éléments $f_\alpha$ pour $\alpha$ parcourant l'ensemble des mutliplicateurs ; on rappelle que $\alpha$ est une fonction à support compact sur $\mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie (complexifiée) d'un tore de $G(F_\infty)$, invariante sous $W_\infty$, le groupe de Weyl de ce tore complexifié. On note $\breve{\alpha}$ la transformée de Fourier de $\alpha$ et $\breve{\alpha}$ parcourt donc l'ensemble des fonctions de Paley Wiener sur $\mathfrak{h}^*$ invariantes sous $W_\infty$. Comme $f_V$ est $K_V$-fini et que $\pi$ est non ramifié hors de $V$, l'hypothèse de semi-finitude assure qu'il existe $R \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que si $\pi_\nu$ a des vecteurs invariants sous l'un des $K$-types fixés, alors $||Re\,\nu|| \leq R$. On fixe $\nu_0$ avec cette propriété sur les invariants. On fixe aussi, grâce à [13], 2e partie, lemme 15.2, $\alpha$ tel que $\breve{\alpha}(\nu) \in [0,1]$ pour tout caractère infinitésimal $\nu$ de partie réelle bornée en norme par $R$ et tel que $\nu$ soit le caractère infinitésimal $\nu_\pi$ d'une représentation $\pi$ vérifiant $\nu_{\overline{\pi}} \simeq \nu_{\check{\pi}}$ ; et on impose en plus (avec la même référence) que $\breve{\alpha}(\nu) = 1$ pour un tel $\nu$ uniquement si $\nu = \nu_0$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on note $*^m\alpha$ le convolé de $\alpha$ $m$-fois. Alors $tr\,\pi(f_{*^m\alpha}) = \sum_\nu \breve{\alpha}(\nu)^m tr\,\pi_\nu(f_V 1_{\tilde{K}^V})$. Pour $\nu$ intervenant dans cette somme, avec $\nu \neq \nu_0$, $\breve{\alpha}(\nu)^m$ tend vers 0 quand $m$ tend vers l'infini. On utilise alors l'hypothèse de convergence absolue pour montrer que quand $m$ tend vers l'infini cette somme converge vers $tr\,\pi_{\nu_0}(f_V 1^V_{\tilde{K}})$. On a ainsi montré (i).

Montrons (ii). On fixe $\nu_0$ et $f_V \in \mathcal{F}$. On fixe aussi un ensemble de $K$-types qui sont les $K^V$ types triviaux hors de $V$ et tel que $f_V$ se transforme suivant ces $K_V$-types. On sait alors que $\pi_{\nu_0}$ a un nombre fini de composantes irréductibles admettant ces $K$-types et on les décompose en $\sum_{c^V} \pi_{\nu_0}(c^V)$. On fixe $V'$ un ensemble fini de places contenant $V$ et tel que les caractères des représentations constituant $\pi_{\nu_0}(c^V)$ restreints en des distributions sur $\otimes_{v\in V'} I(\tilde{G}(F_v), \omega)$ soient linéairement indépendants, ou encore que $\otimes_{v\in V'} I(\tilde{G}(F_v), \omega)$ séparent les différentes représentations $\pi_{\nu_0}(c^V)$. Par hypothèse $tr\,\pi(f_V f_{V'-V} 1_{\tilde{K}^{V'}}) = 0$ donc d'après (i) appliqué à $V'$ ce qui est loisible, $tr\,\pi_{\nu_0}(f_V f_{V'-V} 1_{\tilde{K}^{V'}}) = 0$ et en faisant varier $f_{V'-V}$ on obtient $tr\,\pi_{\nu_0}(c^V)(f_V f_{V'-V} 1_{\tilde{K}^{V'}}) = 0$ pour tout choix de $f_{V'-V}$ et pour tout $c^V$. Cela entraîne a fortiori (ii).

### 5.4 Représentation semi-finie et stabilité

On suppose ici $G$ quasi-déployé, $\tilde{G}$ à torsion intérieure et $\omega = 1$. Soit $\pi$ une représentation semi-finie de $\tilde{G}$, on la suppose stable ; cela veut dire que pour toute place $v_0$, pour tout ensemble fini de places $V'$ contenant

$V_{ram}$ et $v_0$ et pour toute fonction $f_{V'} \in I(\tilde{G}(F_{V'}))$ décomposée, dont la composante en la place $v_0$ annule toutes les intégrales orbitales stables de $\tilde{G}(F_{v_0})$, $tr\,\pi(f_{V'}1_{\tilde{K}^{V'}})=0$. On fixe $V$ contenant $V_{ram}$ comme précédemment et on décompose $\pi$ en $\sum_{\nu,c^V}\pi_\nu(c^V)$

**Corollaire** *Pour tout $\nu, c^V$, les distributions*

$$f_V \in I(\tilde{G}(f_V)) \mapsto tr\,\pi_\nu(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V})$$

*sont stables.*

On fixe $\nu, c^V$ et $v_0 \in V$. et on doit montrer que pour toute fonction $f_{v_0} \in I(\tilde{G}(F_{v_0}))$ qui annule les intégrales orbitales stables en la place $v_0$ et pour toute fonction $f_V \in I(\tilde{G}(F_v))$ décomposée et ayant $f_{v_0}$ comme composante en la place $v_0$, on a $tr\,\pi_\nu(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V})=0$. On applique 5.3.3 à l'ensemble $\mathcal{F}$ qui est précisément l'ensemble des $f_{V,\alpha}$ où $\alpha$ parcourt l'ensemble des multiplicateurs. Mais pour cela il faut vérifier que pour tout $f'_V$ dans cet ensemble $f'_{v_0}$ annule encore toutes les intégrales orbitales stables. C'est évident d'après les définitions si $v_0$ n'est pas une place archimédienne. Supposons donc que $v_0$ est une place archimédienne. Pour toute représentation stable, $\pi'_{v_0}$ de $\tilde{G}(F_{v_0})$, on a

$$tr\,\pi'_{v_0}(f_{v_0,\alpha}) = \check{\alpha}(\nu_{\pi'_{v_0}})tr\,\pi'_{v_0}(f_{v_0})=0,$$

par hypothèse sur $f_{v_0}$. D'après [31] 2.3, la fonction $f_{v_0,\alpha}$ annule donc toutes les intégrales orbitales stables en la place $v_0$. Cela permet d'appliquer 5.3.3 (i) et (ii) pour obtenir le corollaire.

## 5.5 Enoncé du lemme fondamental tordu

La situation ici est locale et on note $v$ la place considérée. On suppose que $v \notin V_{ram}$. On fixe $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique non ramifiée de $\tilde{G}(F_v)$, $\omega$. A tout morphisme non ramifié de $W_{F_v}$ dans $\mathcal{G}'$, on associe un morphisme non ramifié de $W_{F_v}$ dans le $L$-groupe de $G$. Dans notre cas non ramifié, on peut fixer un isomorphisme $\mathcal{G}' \simeq {}^L G'$. Cela donne une correspondance entre les représentations non ramifiées de $G'(F_v)$ dans l'ensemble des représentations non ramifiées $\pi$ de $G(F_v)$ telles que $\pi^\theta \simeq \pi\otimes\omega$. Comme on a supposé que $v \notin V_{ram}$, une telle représentation non ramifiée de $G(F_v)$ s'étend canoniquement en une représentation de $\tilde{G}(F_v)$ en demandant que $\tilde{K}_v$ agisse trivialement sur l'espace des invariants sous $K_v$ (cet espace est de dimension 1, bien entendu). Si la donnée endoscopique a elle aussi une torsion (nécessairement intérieure) on étend aussi les représentations non ramifiées de $G'(F_v)$ à l'espace tordu. Le lemme fondamental tordu pour toute l'algèbre de Hecke sphérique dit que si $f_v \in I(\tilde{G}(F_v),\omega)$ est bi-invariante sous $K_v$ et alors on peut choisir une fonction $f_v^{\mathbf{G}'}$ dans $I(\tilde{G}'(F_v))$ bi-invariante sous $K_{G',v}$ qui soit un transfert de $f_v$ et qui vérifie $tr\pi(f_v) = tr\pi'(f_v^{\mathbf{G}'})$ si $\pi$ et $\pi'$ se correspondent dans la correspondance que l'on vient de décrire. C'est la même formulation que [28] 6.4.

Dans le cas non tordu et pour l'élément unité de l'algèbre de Hecke ceci est démontré par Ngo et la démonstration de Ngo a fait sauter le verrou bloquant la stabilisation de la formule des traces. Hales a montré en [15] que l'assertion pour l'élément unité de l'algèbre de Hecke entraîne le lemme fondamental pour tous les éléments de l'algèbre de Hecke sphérique, dans le cas non tordu. Dans le cas tordu, il est démontré que le résultat de Ngo entraîne le lemme fondamental pour l'élément unité de l'algèbre de Hecke dans le cas tordu ([26]). Il reste à étendre le résultat de Hales, c'est un travail en cours mais d'ores et déjà Arthur a remarqué que le cas de GL(n) tordu résulte de [6] et de son extension au cas tordu [18].

On admet ici ce lemme fondamental.

### 5.6 La variante stable de la partie discrète de la formule des traces

On suppose ici que $\tilde{G}$ est à torsion intérieure et que $G$ est quasi-déployé avec $\omega = 1$. On fixe un ensemble fini de places $V$ de $F$ contenant $V_{ram}$. On considère la distribution qui à $f_V \in I(\tilde{G}(F_V))$ associe

$$SI^{\tilde{G}}_{disc}(f_V 1_{\tilde{K}^V}) := I^{\tilde{G}}_{disc}(f_V 1_{\tilde{K}^V}) - \sum_{\mathbf{G}';G'\neq G} i(\tilde{G},\mathbf{G}') SI^{\mathbf{G}'}_{disc}(f_V^{\mathbf{G}'} 1_{\tilde{K}^V_{G'}}); \quad (2)$$

seuls les groupes endoscopiques elliptiques non ramifiés hors de $V$ interviennent non trivialement. Ainsi on vérifie facilement que cette distribution est la trace d'une représentation semi-finie (parce que le transfert d'une représentation semi-finie est semi-finie).

On a une décomposition d'après 5.3.1,

$$SI^{\tilde{G}}_{disc}(f_V 1_{\tilde{K}^V}) = \sum_{\nu,c^V} tr\, \pi_{\nu,st}(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V}),$$

la notation anticipe la proposition suivante où on va montrer les propriétés de stabilité

**Proposition** *On fixe $\nu$ et $c^V$. Alors* $\pi_{\nu,st}(c^V) =$

$$\pi_{disc,\nu}(c^V) - \sum_{\mathbf{G}';G'\neq G} i(\tilde{G},\mathbf{G}') \sum_{\nu'\mapsto\nu;c'^V\mapsto c^V} transfert(\pi^{\mathbf{G}'}_{\nu',st}(c'^V)) \quad (2)$$

*et les représentations $\pi_{\nu,st}(c^V)$ sont stables.*

L'égalité (2) est facile : on part de la définition (1) que l'on écrit, pour tout $f_V \in I(\tilde{G}(F_V))$

$$SI_{disc}^{\tilde{G}}(f_V 1_{\tilde{K}^V}) - \left( I_{disc}^{\tilde{G}}(f_V 1_{\tilde{K}^V}) - \sum_{\mathbf{G}'; G' \neq G} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI_{disc}^{\mathbf{G}'}(f_V^{\mathbf{G}'} 1_{\tilde{K}^V_{G'}}) \right) = 0.$$

Il faut remarquer que si $V'$ est un ensemble fini de places contenant $V$, on a une égalité analogue en remplaçant $V$ par $V'$ avec une compatibilité évidente si on prend pour $f_{V'} = f_V 1_{\tilde{K}^{V'-V}}$. Comme on a démontré que les représentations sous-jacentes aux deux membres de (2) sont semi-finies, on applique 5.3.3 pour obtenir (2) et il faut savoir évidemment comment se comporte le transfert vis à vis des caractères infinitésimaux et des caractères des algèbres de Hecke sphériques. Pour le caractère infinitésimal on renvoie à [28] corollaire de 2.8 et pour les algèbres de Hecke sphériques, c'est le lemme fondamental tel que rappelé en 5.5.

Montrons la stabilité. On sait que la distribution

$$f_V \in I(\tilde{G}(F_V)) \mapsto I^{\tilde{G}}(f_V 1_{\tilde{K}^V}) - \sum_{\mathbf{G}'; G' \neq G} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI^{\mathbf{G}'}(f_V^{\mathbf{G}'} 1_{\tilde{K}^V_{G'}}),$$

écrite sous forme géométrique est stable ([33] 3.4 sachant que le théorème 3.3 de [33] est démontré de [33] 3.5 à 3.8). Sous forme spectrale, elle est une somme de termes indexés par les espaces de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. Et on va isoler le terme qui nous intéresse c'est-à-dire celui correspondant à $\tilde{M} = \tilde{G}$. Fixons $\tilde{M}$ un sous-espace de Levi propre de $\tilde{G}$ et écrivons le terme lui correspondant ; on utilise la combinatoire de [21] 6.5. C'est une somme sur les couples $\nu_M, c_M^V$ où $\nu_M$ parcourt l'ensemble des caractères infinitésimaux de $M(F_\infty)$ triviaux sur $\mathfrak{A}_{\tilde{M}}$ et $c_M^V$ l'ensemble des caractères quasi-automorphes des algèbres de Hecke sphériques hors de $V$, du terme ci-dessous multiplié par le coefficient $w(\tilde{M})$ :

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\nu_M}(c_M^V), f_V 1_{\tilde{K}^V}) \tag{1}$$

$$- \sum_{\mathbf{M}' \neq M} i(\tilde{M}, \mathbf{M}') \sum_{\nu_{M'}, c_{M'}^V \mapsto \nu_M, c_M^V} I_{\mathbf{M}'}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\pi_{\nu_{M'}, st}, f_V 1_{\tilde{K}^V}) \tag{2}$$

$$- \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s \neq 1)} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \mathbf{G}'(s)) SI_{\tilde{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\pi_{\nu,st}, f^{\mathbf{G}'(s)_V} 1_{\tilde{K}'^V}). \tag{3}$$

On a montré que dans les termes de (1), on peut enlever l'exposant $\mathcal{E}$ en remplaçant les représentations stables de $\mathbf{M}'$ par leur transfert à $\tilde{M}$.

Ainsi (1) moins (2) est exactement $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\nu_M,st}(c_M^V), f_V 1_{\tilde{K}^V})$. Quand on enlève à ce terme les termes écrits en (3), on a exactement la définition de $SI_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\nu_M,st}(c_M^V), f_V 1_{\tilde{K}^V})$. Et on a montré que cette distribution est stable en 4.9.2. Ainsi la somme des trois termes (1), (2), (3) est une distribution stable. Et on en déduit que la distribution $f_V \mapsto SI_{disc}^{\tilde{G}}(f_V 1_{\tilde{K}^V})$ est stable. Il reste à séparer les termes en fonction des couples $\nu, c^V$ et montrer que chaque terme est stable, ce qui a été fait en 5.4

## 5.7 Enoncé de la stabilisation spectrale

On a défini les représentations semi-finies $\pi_{\nu',st}^{\mathbf{G}'}(c'^V)$ pour toute donnée endoscopique de $\tilde{G}$, $\omega$, où $\nu'$ est un caractère infinitésimal de $\mathbf{G}'$ trivial sur $\mathfrak{A}_{G'}$ et $c'^V$ est un caractère quasi-automorphe du produit des algèbres de Hecke sphériques hors de $V$. On pose

$$\pi_\nu^{\tilde{G},\mathcal{E}}(c^V) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') \sum_{\nu' \mapsto \nu; c'^V \mapsto c^V} transfert\, \pi_{\nu',st}^{\mathbf{G}'}(c'^V).$$

On rappelle que $V$ contient $V_{ram}$ et que $\mathbf{G}'$ ne parcourt que les groupes endoscopiques elliptiques non ramifiés hors de $V$ et relevants.

La stabilisation de la partie discrète spectrale de la formule des traces consiste à montrer que

$$\pi_{disc,\nu}^{\tilde{G}}(c^V) = \pi_\nu^{\tilde{G},\mathcal{E}}(c^V) \tag{1}$$

pour tout couple $\nu, c^V$. En termes plus explicites, on veut montrer que pour toute fonction $f_V \in I(\tilde{G}(F_V), \omega)$, on a

$$tr\, \pi_{\nu,disc}^{\tilde{G}}(c^V)(f_V 1_K^V) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') \sum_{\nu' \mapsto \nu; c'^V \mapsto c^V} tr\, \pi_{\nu',st}^{\mathbf{G}'}(c'^V)(f_V^{\mathbf{G}'} 1_{\tilde{K}'^V}).$$

Comme la dépendance en $V$ n'est qu'un problème de ramification et que l'on a admis le lemme fondamental (5.5) cela veut dire que pour toute fonction $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{A}_F), \omega)$, qui hors d'un nombre fini de places, $V'$ contenant $V$ est la fonction caractéristique du compact $K_v$ (pour $v \notin V'$) et qui est bi-invariante par $K_v$ pour tout $v \in V' - V$, on a

$$tr\pi_{disc,\nu}^{\tilde{G}}(c^V)(f) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') \sum_{\nu' \mapsto \nu; c'^V \mapsto c^V} \pi_{\nu',st}^{\mathbf{G}'}(c'^V)(f^{\mathbf{G}'}).$$

## 5.8 L'hypothèse spectrale de récurrence

On peut évidemment généraliser les définitions en remplaçant $\tilde{G}$ par l'un de ses espaces de Levi et l'hypothèse spectrale de récurrence est exactement que pour tout espace de Levi propre $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, on a l'égalité :

$$\pi^{\tilde{M}}_{disc,\nu_M}(c^V_M) = \pi^{\tilde{M},\mathcal{E}}_{\nu_M}(c^V_M).$$

## 5.9 Réduction de la stabilisation spectrale

Pour une fonction $f$ de la forme $f_V 1_{\tilde{K}^V}$, on note ici $I^{\tilde{G}}(V,\omega,f)$ la formule des traces tordue de 5.2 appliquée à $f_V$. On note $SI^{\mathbf{G}'}(V,f^{\mathbf{G}'})$ sa version stable.

**Proposition** *Sous l'hypothèse spectrale de récurrence et sous l'hypothèse de récurrence locale géométrique de 3.5, pour toute fonction $f$ de la forme $f_V 1_{\tilde{K}^V}$, on a :*

$$I^{\tilde{G}}(V,\omega,f) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}')SI^{\mathbf{G}'}(V,f^{\mathbf{G}'}) = I^{\tilde{G}}_{disc}(f) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}')SI^{\mathbf{G}'}_{disc}(f^{\mathbf{G}'}).$$

*En particulier le membre de gauche ne dépend pas de $V$. La somme sur $\mathbf{G}'$ ne porte que sur les données endoscopiques de $\tilde{G},\omega$ non ramifiées hors de $V$ et relevantes.*

La présence de $V$ mérite explications : les distributions $I$ et $SI$ dépendent du choix de $V$ car elles ne sont invariantes qu'en tant que distributions sur $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$. Dans le membre de droite $I^{\tilde{G}}_{disc}$ qui est spontanément une distribution invariante, n'en dépend pas.

En tenant compte de 5.3.3 la stabilisation de la partie discrète de la formule des traces, c'est-à-dire la nullité du membre de droite de l'énoncé, est exactement équivalente à la preuve de l'égalité (1) de 5.7 pour tout $\nu, c^V$.

Montrons la proposition. On fixe $V$ et on décompose :

$$\sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}')(SI^{\mathbf{G}'}(V,f^{\mathbf{G}'}) - SI^{\mathbf{G}'}_{disc}(f^{\mathbf{G}'})).$$

Comme en [21] 6.5, on transforme cette expression en une somme sur les sous-groupes de Levi des données endoscopiques $\mathbf{G}'$ ; si $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique pour un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, le terme correspondant est (à un scalaire près)

$$i(\tilde{M},\mathbf{M}') \sum_{\nu_{M'},c^V_{M'}} I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\mathbf{M}'}(\pi_{\nu_{M'},st}(c^V_{M'}), f_V 1_{\tilde{K}^V}). \quad (1)$$

Si $\mathbf{M}'$ n'est relevant pour aucun espace de Levi de $\tilde{G}$, on a une expression similaire avec une définition formelle de $i(\tilde{M},\mathbf{M}')$ et on a montré en 4.9.3 que ce terme correspondant (1) est nul. Revenant au cas où $\mathbf{M}'$ est une donnée relevante et elliptique pour un espace de Levi $\tilde{M}$, on a déjà montré en 4.9.3 que sous l'hypothèse géométrique de récurrence, l'expression (1) vaut

$$i(\tilde{M},\mathbf{M}')\sum_{\nu_{M'},c^V_{M'}} I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(transfert\,\pi_{\nu_{M'},st}(c^V_{M'}),f_V 1_{\tilde{K}^V}). \tag{2}$$

Et ceci vaut encore par les définitions $\sum_{\nu_M,c^V_M} I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi^{\tilde{M},\mathcal{E}}_{\nu_M}(c^V_M),f_V 1_{\tilde{K}^V})$. Avec l'hypothèse spectrale de récurrence, on obtient le terme indexé par $\tilde{M}$ dans l'écriture spectrale de la distribution $f\mapsto I^{\tilde{G}}(V,\omega,f)$. Ainsi en sommant sur les espaces de Levi $\tilde{M}$, la somme des contributions des données non elliptiques relevantes de $\tilde{G}$ est exactement $I^{\tilde{G}}(V,\omega,f)-I^{\tilde{G}}_{disc}(f)$.

# 6 Digression, automorphismes de la situation

## 6.1 Action du groupe adjoint ou de son analogue dans le cas tordu

On se place dans une situation locale en fixant une place $v$. Pour simplifier, on remplace $F_v$ par $F$. On note $G_\sharp$ le groupe $G/Z(G)^\theta$. Il a été montré en [28] 2.6 que ce groupe opère sur les facteurs de transfert : soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G},\omega$ alors il existe un caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}$ de $G_\sharp(F)$ qui vaut $\omega$ sur l'image de $G(F)$ dans $G_\sharp(F)$ et tel que, pour tout $g_\sharp\in G_\sharp(F)$, pour tout $\gamma\in\tilde{G}_{reg}(F)$ et $\delta$ dans une donnée auxiliaire attachée à $\mathbf{G}'$ :

$$\Delta(\delta,ad(g_\sharp)^{-1}\gamma)=\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}(g_\sharp)\Delta(\delta,\gamma).$$

D'autre part $G_\sharp(F)$ opère sur $I(\tilde{G},\omega)$ et opère donc sur les $\omega$-représentations de $\tilde{G}(F)$. Par définition, le transfert commute à ces actions.

Pour ce qui suit, on suppose que $\omega=1$.

Soit $\xi$ un caractère de $G_\sharp(F)/G(F)$ ; on fixe un système de représentants du groupe fini $G_\sharp(F)/G(F)$, noté $\mathcal{R}$. Pour tout $f\in I(\tilde{G},\omega)$ et tout $\gamma\in\tilde{G}(F)$ on pose

$$f^\xi(\gamma):=|G_\sharp(F)/G(F)|^{-1}\sum_{g_\sharp\in\mathcal{R}}\xi(g_\sharp)f(ad(g_\sharp)^{-1}\gamma).$$

L'image de $f^\xi$ dans $I(\tilde{G},\omega)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{R}$.

**Lemme** *Avec les notations précédentes :*

*(i) l'élément $f^\xi$ de $I(\tilde{G},\omega)$ est nul s'il n'existe pas une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G'}$ telle que $\xi = \omega_\sharp^{\mathbf{G'}}$. Et pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G'}$ de $\tilde{G}$, le transfert $(f^\xi)^{\mathbf{G'}}$ vérifie : $(f^\xi)^{\mathbf{G'}} = 0$ si $\omega_\sharp^{\mathbf{G'}} \neq \xi$ et $(f^\xi)^{\mathbf{G'}} = f^{\mathbf{G'}}$ sinon.*

*(ii) On suppose que $\tilde{G} = G$, que la place locale n'est pas dans $V_{ram}$ et que $f$ est bi-invariante par le compact maximal $K$. Alors la composante elliptique de $f^{1_{G_\sharp}}$ est nulle sauf éventuellement si $G$ est un tore (ici $1_{G_\sharp}$ est la notation pour le caractère trivial de $G_\sharp$).*

*(iii) On revient à $\tilde{G}$ mais on suppose que $G$ n'est pas un tore. On suppose aussi que $G$ est déployé et que les données endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$ sont à torsion intérieure triviale. On suppose encore que $f$ est bi-invariante par le compact maximal $K$. Alors la composante elliptique de $f^{1_{G_\sharp}}$ est nulle*

Soit $\pi$ une représentation tempérée de $\tilde{G}(F)$. On écrit $\pi$ comme transfert à partir de représentations tempérées stables de données endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}(F)$, c'est-à-dire que pour tout $\mathbf{G'}$ une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}(F)$, il existe $\pi_{st}^{G'}$ tel que pour tout $f \in I(\tilde{G})$

$$tr\pi(f) = \sum_{\mathbf{G'}} tr\pi_{st}^{G'}(f^{\mathbf{G'}}).$$

On fait agir $G_\sharp(F)$. On calcule le transfert $(f^\xi)^{\mathbf{G'}}$ en partant des définitions : pour $g_\sharp \in G_\sharp(F)$, le transfert $({}^{g_\sharp}f)^{\mathbf{G'}}$ vaut $\omega_\sharp^{\mathbf{G'}}(g_\sharp)^{-1} f^{\mathbf{G'}}$. On obtient alors les formules de la deuxième partie de (i) et

$$tr\pi(f^\xi) = \sum_{\mathbf{G'};\omega_\sharp^{\mathbf{G'}}=\xi} tr\pi_{st}^{G'}(f^{\mathbf{G'}}). \tag{1}$$

Avec (1) on démontre la totalité de (i).

On utilise cette égalité (1) pour la preuve de (ii) et (iii) et dans (1) on se limite aux représentations $\pi$ qui sont elliptiques ; les représentations stables du côté droit de l'égalité sont alors elles aussi elliptiques. On se place d'abord sous l'hypothèse de (ii). Ici $\tilde{G} = G$ et la situation est non ramifiée. En particulier $f$ est non ramifiée. Pour que le membre de gauche de (1) soit non nul il faut que l'une des représentations $g_\sharp.\pi$ pour $g_\sharp \in G_\sharp(F) = G_{ad}(F)$ soit non ramifiée. On peut évidemment supposer que $\pi$ est "irréductible" au sens qu'elle correspond à un triplet $(M,\sigma,r)$ de [27] 2.10, 2.11. Cela veut dire que $g_\sharp.\pi$ est une représentation elliptique incluse dans une série principale non ramifiée donc $M$ est un tore. On sait que $G_{ad}(F)/G(F)$ agit transitivement par permutation dans l'ensemble des sous-quotients irréductibles d'une telle induite. Ainsi $\sum_{g_\sharp \in G_{ad}(F)/G(F)} g_\sharp.\pi$ vaut un multiple de :

$$(\sum_{\mu \in \hat{R}} \mu(r))(\sum_{\pi_\tau} \pi_\tau),$$

où $\mu$ parcourt les caractères du R-groupe évalué en l'élément $r \in R$ déterminant $\pi$ et où $\pi_\tau$ parcourt l'ensemble des sous-quotients irréductibles de la série principale considérée. Ceci vaut 0 puisque $r$ est un élément régulier de $R$, sauf si $M = G$. Dans ce dernier cas, $\pi$ est la série principale nécessairement irréductible et $G$ est un tore. Cela montre (ii).

Montrons (iii), on a mis comme hypothèse que les données endoscopiques de $\tilde{G}$ sont des groupes non tordus. Le côté droit de (1) est nul sauf s'il existe $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique de caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}$ trivial et ayant des représentations elliptiques stables n'annulant pas une fonction non ramifiée ; ici on utlise encore le lemme fondamental tordu. Fixons une telle donnée $\mathbf{G}'$. Le groupe adjoint de $G'$ agit trivialement dans $SI_{cusp}(G')$. Donc on peut reprendre l'argument donné pour démontrer (ii) qui entraîne que $\mathbf{G}'$ ne contribue au côté droit de (1) que si $G'$ est un tore. On exploite maintenant le fait que le caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}$ est trivial. On revient à la définition de ce caractère donnée en [28] 2.7. Soit $w \in W_F$ et $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ donnant l'action de $\Gamma_F$ sur $\hat{G}'$ ; on utilise tout de suite le fait que $\Gamma_F$ agit trivialement dans $\hat{G}$. Donc par hypothèse $g(w)$ respecte un épinglage de $\hat{G}'$ et vérifie, en écrivant $\hat{s} = s\hat{\theta}$ l'élement de la donnée endoscopique dont le centralisateur est $\hat{G}'$

$$s\hat{\theta}(g(w))s^{-1} = g(w).$$

On relève $s$ et $g(w)$ dans le revêtement simplement connexe, $\hat{G}_{SC}$, de $\hat{G}$ en $s_{sc} \in \hat{G}_{SC}$ et $g(w)_{sc}$ et il existe donc $a_{sc}(w) \in Z(\hat{G}_{SC})$ tel que ($\hat{\theta}$ se relève canoniquement en un automorphisme de $\hat{G}_{SC}$)

$$s_{sc}\hat{\theta}(g(w)_{sc})s_{sc}^{-1} = a_{sc}(w)g(w)_{sc}.$$

On écrit $g(w) = z(w)g(w)_{sc}$, avec $z(w) \in Z(\hat{G})$, en identifiant $g(w)_{sc} \in \hat{G}_{SC}$ à son image dans $\hat{G}$. Le caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}$ est donné par le cocycle qui, à $w \in W_F$, associe l'image de $(z(w), a_{sc}(w))$ dans $Z(\hat{G}_\sharp)$ (cf. ce qui précède l'énoncé du lemme en [28] 2.7). Par hypothèse ce cocycle est trivial et comme $\Gamma_F$ agit trivialement sur $\hat{G}$, cela signifie qu'il existe $z(w)_{sc} \in Z(\hat{G}_{SC})$ de sorte que $z(w) \in z(w)_{sc}\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ et $a_{sc}(w) = (1-\hat{\theta})(z(w)_{sc})$. On modifie la décomposition $g(w) = z(w)g(w)_{sc}$ en remplaçant $z(w)$ par $z(w)z(w)_{sc}^{-1}$ et $g(w)_{sc}$ par $z(w)_{sc}g(w)_{sc}$. Les relations précédentes deviennent $z(w) \in \hat{T}^{\hat{\theta},0}$

et $a_{sc}(w) = 1$. Alors $g(w)_{sc}$ est dans le centralisateur de l'automorphisme $ad(s_{sc}) \circ \hat{\theta}$. Comme $\hat{G}_{SC}$ est simplement connexe le centralisateur d'un automorphisme semi-simple est connexe. Cette connexité entraîne que l'image du centralisateur de $ad(s_{sc}) \circ \hat{\theta}$ est exactement $\hat{G}'$ et donc que l'image de $g(w)_{sc}$ est dans $\hat{G}'$. Puisque $z(w) \in \hat{T}^{\hat{\theta},0} \subset \hat{G}'$, $g(w)$ est aussi dans $\hat{G}'$. Comme $g(w)$ stabilise un épinglage de $\hat{G}'$, $g(w)$ est central dans $\hat{G}'$. Ainsi $g_w$ agit trivialement sur $\hat{G}'$. Comme $\hat{G}'$ fait partie d'une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ qui est un tore, on a :

$$\hat{G}' = (\hat{G}')^{\Gamma_F,0} = Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}.$$

Puisque $\hat{G}'$ contient $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$, ce tore est inclus dans $Z(\hat{G})$, ce qui ne peut se produire que si $\hat{G}$ est un tore. Cela termine la preuve.

## 6.2 Fonction caractéristique du compact et action du groupe adjoint

On garde la situation locale de 6.1. On suppose que la place fixée n'est pas dans $V_{ram}$, en particulier, on est dans une situation locale p-adique non ramifiée. On note encore $1_{\tilde{K}_v}$ la fonction caractéristique du compact hyperspecial fixé et pour tout caractère $\xi$ de $G_\sharp(F)/G(F)$, on a défini $1^{\xi}_{\tilde{K}_v}$. On note $K_{\sharp,v}$ le compact maximal hyperspecial de $G_\sharp(F)$ contenant l'image de $K_v$ dans $G_\sharp(F)$.

**Lemme** *(i) La fonction $1^{\xi}_{\tilde{K}_v}$ est non nulle seulement si $\xi$ est non ramifié, c'est-à-dire trivial sur $K_{\sharp,v}$.*

*(ii) On suppose que $\xi = 1$ ; la composante elliptique de $1^{\xi}_{\tilde{K}_v}$ est nulle dans le cas non tordu, pourvu que $G$ ne soit pas un tore. C'est aussi vrai dans le cas tordu au moins si $\tilde{G}(F_v)$ a des classes de conjugaison exceptionnelles.*

(i) est une reformulation du (ii) de la proposition de [33] 2.1 appliqué à $\tilde{M} = \tilde{G}$. En effet en appliquant cette proposition à $\tilde{M} = \tilde{G}$ on voit que le transfert de la fonction caractéristique de $\tilde{K}_v$ est nulle pour tout espace endoscopique qui n'est pas non ramifié. D'où avec le (i) du lemme de 6.1 pour que $1^{\xi}_{\tilde{K}_v}$ soit non nul il faut que $\xi = \omega_\sharp^{\mathbf{G}'}$ pour une donnée endoscopique non ramifiée $\mathbf{G}'$. Pour une telle donnée $\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}$ est non ramifié d'après [33] 2.1 (3).

L'assertion (ii) dans le cas non tordu est conséquence du (ii) du lemme 6.1. Dans le cas tordu, on suppose que $\tilde{G}(F_v)$ a des classes de conjugaison exceptionnelles. D'après [30] 6.3, cela entraîne que $\tilde{G}$ provient par changement de base (ce qui est inoffensif) d'un espace pour lequel les hypothèses du (iii) du lemme 6.1 sont satisfaites. Cela entraîne de plus que $G$ est simplement connexe. Alors l'assertion résulte de cette assertion (iii) du lemme 6.1.

## 6.3 Action globale du groupe adjoint et de son analogue dans le cas tordu

On revient à une situation globale. On définit sur $F$, le groupe $G_\sharp := G/Z(G)^\theta$. Et les caractères automorphes de $G_\sharp(\mathbb{A}_F)$ sont définis de façon usuelle. On fixe un ensemble $V$ de places de $F$ contenant $V_{ram}$.

**Remarque** *Il n'existe qu'un nombre fini de caractères automorphes de $G_\sharp$ non ramifiés hors de $V$, triviaux sur l'image de $G(\mathbb{A}_F)$ ou plus généralement prolongeant un caractère fixé de $G(\mathbb{A}_F)$.*

On fixe un ensemble $V'$ de places de $F$, contenant $V$ et tel que

$$G_\sharp(\mathbb{A}_F) = G_\sharp(F)G_\sharp(F_{V'})K_\sharp^{V'} \qquad (1).$$

La remarque résulte alors facilement du fait que $G_\sharp(F_{V'})/G(F_{V'})$ est un groupe fini.

Pour tout $v$ on fixe un caractère $\xi(v)$ de $G_\sharp(F_v)$ prolongeant $\omega_v$. On a donc défini $f_v^{\xi(v)}$ pour tout $f_v \in I(\tilde{G}(F_v), \omega)$. On note $\xi(V) := \prod_v \xi(v)$ et on définit $f_V^{\xi(V)}$ pour tout $f_V \in I(\tilde{G}(F_V), \omega)$, décomposée, en faisant le produit des $f_v^{\xi(v)}$.

On note $\mathcal{C}(V)$ l'ensemble des caractères de la remarque précédente prolongeant $\omega$ et pour $\nu$ un caractère infinitésimal de $G(F_\infty)$, on note $\pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}$ la somme des $\pi_{disc,\nu}^{\tilde{G}}(c^V)$ de 5.1 quand $c^V$ varie. C'est la partie discrète de la formule des traces pour un caractère infinitésimal fixé et non ramifiée hors de $V$.

**Lemme** *Soit $f_V \in I(\tilde{G}(F_V), \omega)$. Alors $tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}(f_V^{\xi(V)} 1_{K^V}) = 0$ s'il n'existe par $\xi \in \mathcal{C}(V)$ tel que $\xi(V) = \xi_V$ c'est-à-dire que $\xi(V)$ soit la restriction de $\xi$ à $G_\sharp(F_V)$.*

Pour démontrer ce lemme, on est en droit d'augmenter $V$ : en effet soit $V' \supset V$. On a clairement $tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}(f_V^{\xi(V)} 1_{K^V}) = tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V'}(f_V^{\xi(V)} 1_{K^V})$.

On décompose $1_{K_{V'-V}}$ suivant les caractères nécessairement non ramifiés du groupe $G_\sharp(F_{V'-V})$ et il suffit évidemment de démontrer la proposition pour $V'$ et le produit de $\xi(V)$ avec l'un de ces caractères. On suppose donc que $V$ est tel que (1) ci-dessus soit vérifié pour $V'=V$. Pour démontrer la proposition, on doit donc montrer que $\xi_V$ est trivial sur $G_\sharp(F)K_\sharp^V \cap G(F_V)$. Soit $g_{\sharp,V}$ dans cet intersection. On calcule ${}^{g_\sharp}f^{\xi(V)} = \xi(V)(g_\sharp)^{-1}f^{\xi(V)}$. On écrit aussi $g_{\sharp,V}g^V = g_F$ où $g_F \in G_\sharp(F)$ et $g^V \in K_\sharp^V$. Le groupe $G_\sharp(F)$ opère directement sur l'espace de la représentation $\pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}$ à une double difficulté près : la partie $t$-discrète mais non discrète décrite en 5.1 fait intervenir des induites, un élément de $G_\sharp(F)$ transforme cette induite en une autre induite mais les semi-simplifiés sont les mêmes. L'autre difficulté vient du fait que les espaces de formes automorphes considérés sont $K_\infty$-finis et $G_\sharp(F)$ ne conserve pas cette finitude puisque les éléments de $G_\sharp(F)$ remplacent $K_\infty$ en un de ses conjugués sous $G(F_\infty)$ (les compacts maximaux sont conjugués en les places archimédiennes) ; mais on peut élargir l'espace des représentations automorphes considérées pour qu'il soit conservé par l'action de $G_\sharp(F)$ et ensuite on ne calcule la trace que sur les éléments de $I(\tilde{G}(F_\infty),\omega)$, or cet espace est en fait indépendant du choix de $K_\infty$ puisque les différents choix sont conjugués.

On remarque aussi que l'action de $G_\sharp(F)$ préserve le caractère infinitésimal. On fait agir un élément $g_F = g_{\sharp,V}g^V$ avec $g^V$ dans $\tilde{K}^V$ ainsi $g_F$ préserve la non ramification hors de $V_{ram}$. Et pour toute fonction $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{A}_F),\omega)$ et pour tout $g_F \in G_\sharp(F)$ comme précédemment, on a

$$tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}({}^{g_F}f) = tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}(f).$$

Les éléments de $K_\sharp^V$ agissent trivialement sur $f_V 1_{K^V}$ et on en déduit donc que l'action de

$$\xi(V)(g_{\sharp,V})^{-1} tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}(f_V^{\xi(V)}1_{K^V}) = tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}({}^{g_{\sharp,V}}f_V^{\xi(V)}1_{K^V}) = tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}(f_V^{\xi(V)}1_{K^V})$$

ce qui force $\xi(V)(g_{\sharp,V})=1$ comme voulu.

On fixe $V$ suffisamment grand pour que (1) soit satisfait. Soit $f_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega)$ et $\xi \in \mathcal{C}$. On note $\xi(V)$ la restriction de $\xi$ à $G_\sharp(F_V)$.

**Proposition** *Avec ces hypothèses et notations, on a pour toute place $v'$ de $F$ non dans $V$ :*

$$tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}(f_V^{\xi(V)}1_{K^V}) = tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V\cup\{v'\}}(f_V^{\xi(V)}1_{K_{v'}}^{\xi_{v'}}1_{K^{V-\{v'\}}})$$

On a évidemment $tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V}(f_V^{\xi(V)}1_{K^V}) = tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V\cup\{v'\}}(f_V^{\xi(V)}1_{K^V}) =$

$$\sum_{\xi(v')} tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{G},V\cup\{v'\}}(f_V^{\xi(V)}1_{K_{v'}}^{\xi(v')}1_{K^{V-\{v'\}}}),$$

où la somme porte sur les caractères de $G_\sharp(F_{v'})/G(F_{v'})$. On a vu en 6.2 que $\xi(v')$ est nécessairement non ramifié pour réellement intervenir. Par le lemme précédent on sait que $\xi(V)\xi(v')$ est la restriction à $G_\sharp(F_{V\cup\{v'\}})$ d'un caractère dans $\mathcal{C}$ et comme $V$ est suffisamment grand pour que (1) soit satisfait, ce caractère est uniquement déterminé par $\xi(V)$ et vaut donc $\xi$. D'où la proposition.

# 7 Fin de la stabilisation locale géométrique

## 7.1 Mise en place des objets

**Hypothèse de récurrence** *On suppose que l'hypothèse locale géométrique de récurrence de 3.5 est satisfaite pour tout espace de Levi $\tilde{L}$ contenant strictement $\tilde{M}$, c'est-à-dire que pour tout $\tilde{L}$ contenant strictement $\tilde{M}$, pour toute place $v \in V$, pour tout $f_v \in I(\tilde{G}(F_v), \omega)$ et pour tout $\gamma \in \tilde{L}(F_v)$, on a $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_v) = I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma, f_v)$.*

*On suppose aussi que pour toute place $v \in V$ et pour toute paire $(\tilde{L}, \tilde{L}')$ où $\tilde{L}'$ est un espace de Levi propre de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{L}$, on a la stabilisation locale géométrique c'est-à-dire que pour tout $f_v \in I(\tilde{L}'(F_v), \omega)$ et pour tout $\gamma \in \tilde{L}(F_v)$, on a $I_{\tilde{L}}^{\tilde{L}'}(\gamma, \omega, f_v) = I_{\tilde{L}}^{\tilde{L}',\mathcal{E}}(\gamma, f_v)$.*

*On suppose aussi que l'hypothèse spectrale globale de récurrence est satisfaites, c'est-à-dire qu'avec les notations de 5.8, pour tout sous-espace de Levi propre, $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$, et pour tout $f_V \in I(\tilde{L}(F_V), \omega)$, on a $tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{L}}(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^{V,\tilde{L}}}) = tr\, \pi_{disc,\nu}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^{V,\tilde{L}}})$.*

Soit $f_V \in I(\tilde{G}(F_V), \omega)$ et fixons $v_0 \in V$. On reprend les constructions de l'application $\epsilon_{\tilde{M},v_0}$ donnée en [34] 4.4 pour $v_0$, $p$-adique et dans le paragraphe 8 de [35] si $v_0$ est une place archimédienne ; cette application envoie l'ensemble des fonctions sur $\tilde{G}(F_v)$ nulles près des éléments exceptionnels de $\tilde{G}(F_{v_0})$, s'il y en a et si $v_0$ est $p$-adique, dans $I_{ac}(\tilde{M}(F_{v_0}), \omega)$. On pose, pour de telles fonctions $f_V$ :

$$h^f(v_0) := \epsilon_{\tilde{M},v_0}(f_{v_0}) \prod_{v \in V, v \neq v_0} f_{v,\tilde{M}}.$$

C'est un élément de $I_{ac}(\tilde{M}(F_V), \omega)$. Soit $\pi_V$ une représentation de longueur finie de $\tilde{M}(F_V)$ triviale sur $\mathfrak{A}_{\tilde{M}}$ et ayant un caractère infinitésimal, noté $\mu_\pi$. On suppose en plus que $\pi_V$ est unitaire.

Pour $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on a défini $I^{\tilde{M}}(\pi_V, X, h^f(v_0))$, ce qui utilise l'unitarité de $\pi_V$. On va montrer que c'est un coefficient de Fourier d'une fonction que l'on va un peu expliciter pour pouvoir contrôler l'action des multiplicateurs de $\tilde{G}$ agissant sur $f_V$.

**Lemme** *Il existe une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, notée $I^{\tilde{M}}(\lambda, h^f(v_0))$ à décroissance rapide quand on restreint cette fonction à l'axe des $\lambda$ unitaires et telle que*

$$I^{\tilde{M}}(\pi_V, X, h^f(v_0)) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}} d\lambda\, I^{\tilde{M}}(\lambda, h^f(v_0)) e^{-\lambda(X)}.$$

*De plus pour tout élément $z$ du centre de l'algèbre enveloppante de $G(F_\infty)$, on a :*

$$I^{\tilde{M}}(\lambda, h^{z.f}(v_0)) = z(\mu_\pi + \lambda) I^{\tilde{M}}(\lambda, h^f(v_0)).$$

On note $\pi_{V,v_0}$ l'unique représentation de $\tilde{M}(F_V)$, elliptique (modulo le centre) en la place $v_0$ et qui a même trace que $\pi_V$ sur toutes les fonctions dans $I(\tilde{M}(F_V), \omega)$ cuspidales en la place $v_0$. Cela revient à décomposer dans le groupe de Grothendieck en la place $v_0$ suivant la base formée par les induites de représentations elliptiques et en enlevant toutes les induites propres. Montrons que

$$I^{\tilde{M}}(\pi_V, X, h^f(v_0)) = I^{\tilde{M}}(\pi_{V,v_0}, X, h^f(v_0));$$

on sait que les intégrales orbitales de $h^f(v_0)$ sont nulles en les points de $\tilde{M}(F_V)$ dont la composante en la place $v_0$ est conjuguée d'un élément non elliptique de $\tilde{M}(F_{v_0})$ (cf. [34] 4.4 et [35] 8.9 (ii)). Donc le seul problème est que $h^f(v_0)$ n'a pas dans ses propriétés d'être à support compact. Soit $b$ une fonction à support compact sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ qui vaut 1 en $X$. On voit $b$ comme une fonction sur $\tilde{M}(F_V)$ et le produit $bh^f(v_0)$ est maintenant à support compact. Ce produit vérifie toujours les propriétés de nullité de certaines intégrales orbitales au même titre que $h^f(v_0)$. D'où

$$I^{\tilde{M}}(\pi_V, X, bh^f(v_0)) = I^{\tilde{M}}(\pi_{V,v_0}, X, bh^f(v_0));$$

mais aussi

$$I^{\tilde{M}}(\pi_V, X, h^f(v_0)) = I^{\tilde{M}}(\pi_V, X, bh^f(v_0))$$
$$\text{et } I^{\tilde{M}}(\pi_{V,v_0}, X, h^f(v_0)) = I^{\tilde{M}}(\pi_{V,v_0}, X, bh^f(v_0)),$$

d'où le résultat annoncé.

Fixons $v \in V$ ; si $v \neq v_0$, pour toute représentation $\rho_v$ de $\tilde{M}(F_v)$ et pour tout $X_v \in \mathcal{A}_{\tilde{M}(F_v)}$, on a

$$I^{\tilde{M}}(\rho_v, X_v, f_{v,\tilde{M}}) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}(F_v)}} d\lambda_v I^{\tilde{M}}(\rho_v, \lambda_v, f_v), \tag{2}$$

où $I^{\tilde{M}}(\rho_v, \lambda_v, f_v) = tr\, ind(\rho_{v\otimes\lambda_v})(f_v) e^{-\lambda_v(X_v)}$.

En $v_0$, il existe encore, (cf. le début de la preuve de [35], 8.9) une fonction méromorphe de $\lambda_{v_0} \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M}(F_{v_0})}$, notée $I^{\tilde{M}}(\rho_{v_0}, \lambda_{v_0}, \epsilon_{\tilde{M},v_0}(f_{v_0}))$ telle que l'on ait l'analogue de (2) pour $\rho_{v_0}$ une représentation tempérée de $\tilde{M}(F_{v_0})$, c'est-à-dire

$$I^{\tilde{M}}(\rho_{v_0}, X_{v_0}, \epsilon_{\tilde{M},v_0}(f_{v_0})) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}(F_{v_0})}} d\lambda_{v_0} I^{\tilde{M}}(\rho_{v_0}, \lambda_{v_0}, \epsilon_{\tilde{M},v_0}(f_{v_0})).$$

Et si $v_0$ est une place archimédienne, remplacer $f$ par $zf$ avec $z$ dans le centre de l'algèbre enveloppante de $\tilde{G}(F_{v_0})$ multiplie par la fonction méromorphe de $\lambda_{v_0}$ par $z(\mu_{\rho_{v_0}} + \lambda_{v_0})$ (si $\rho_{v_0}$ a un caractère infinitésimal, $\mu_{\rho_{v_0}}$) d'après la même référence dans le cas où $v_0$ est une place archimédienne.

Dans le cas où $v$ est une place archimédienne différente de $v_0$ la transformation sous le centre de l'algèbre enveloppante est évidemment complètement claire.

Puisque l'on peut remplacer $\pi_V$ par $\pi_{V,v_0}$ pour calculer $I^{\tilde{M}}(\pi, X, h^f(v_0))$, on peut réaliser cette fonction de $X$ comme transformée de Fourier de la fonction de $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$ qui vaut en $\lambda$ (cf. 4.6 appliqué à $\tilde{G} = \tilde{M}$),

$$I(\rho_{v_0}, \lambda, \epsilon_{\tilde{M},v_0}(f_{v_0})) \prod_{v \neq v_0} I(\rho_v, \lambda, f_v),$$

où on a écrit $\pi_{V,v_0} = \otimes_{v\in V} \rho_v$. Cela donne le lemme.

**Corollaire** *Pour tout multiplicateur $\alpha$ de $\tilde{G}$, on a l'égalité*

$$I^{\tilde{M}}(\pi_V, X, h^{f_\alpha}_{v_0}) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}} d\lambda\, \hat{\alpha}(\nu_{\pi_V} + \lambda) I^{\tilde{M}}(\lambda, h^f_{v_0}) e^{-\lambda(X)}.$$

La famille de formes linéaires (dépendant méromorphiquement de $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$)

$$\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M}} \mapsto \ell(\lambda, f_V) := I^{\tilde{M}}(\lambda, h^f(v_0))$$

se voit sur l'ensemble des fonctions de Paley-Wiener sur l'espace des $\omega$-représentations tempérées de $\tilde{G}(F_V)$ ; ces applications linéaires, $f_V \mapsto \ell(\lambda, f_V)$, vérifient $\ell(\lambda, z.f_V) = z(\nu_{\pi_V} + \lambda)\ell(\lambda, f_V)$.

Fixons $\lambda$ telle que la forme linéaire $\ell(\lambda, f_V)$ soit définie. C'est une forme linéaire sur $I(\tilde{G}(F_V), \omega)/\mathcal{M}_{\chi_\lambda} I(\tilde{G}(F_V), \omega)$, où $\mathcal{M}_{\chi_\lambda}$ est l'idéal maximal du centre de l'algèbre enveloppante correspondant au caractère infinitésimal $\nu_{\pi_V} + \lambda$. Soit $q$ l'application naturelle de $I(\tilde{G}(F_V), \omega)$ dans ce quotient et on va montrer l'assertion : *pour tout* $\alpha, f_V$ *comme ci-dessus,* $q(f_{V,\alpha}) = \breve{\alpha}(\nu_{\pi_V}+\lambda)q(f_V)$.

Pour démontrer cette assertion, il suffit de le faire pour $f_{v_\infty}$ dans une composante de Paley-Wiener. On fixe donc une telle composante que l'on note $\mathcal{F}$ et on utilise le lemme de [31] 2.5 de la façon suivante. On note $\Pi_{\chi_\lambda}$ l'ensemble des représentations induites de représentations elliptiques de sous-espaces de Levi de $\tilde{G}(F_{v_\infty})$ ayant même caractère infinitésimal que l'induite de $\pi_\infty \otimes \lambda$ de $\tilde{M}$ à $\tilde{G}$. C'est un ensemble fini. Si la composante de Paley-Wiener ne coupe pas $\Pi_{\chi_\lambda}$ alors $\mathcal{M}_{\chi_\lambda}\mathcal{F} = \mathcal{F}$ d'après le (i) de ce lemme. Si l'intersection est non vide, alors $\mathcal{M}_{\chi_\lambda}\mathcal{F}$ contient les éléments de $\mathcal{F}$ nuls à un ordre suffisant, notons le $N$, en les points de l'intersection ; c'est le (ii) du lemme. Soit $\phi$ un élément de $\mathcal{F}$ et $\alpha$ un multiplicateur ; si $f_{v_\infty} \in I(\tilde{G}(F_{v_\infty}),\omega)$ correspond à $\phi$ alors $f_{v_\infty,\alpha}$ correspond au produit $\breve{\alpha}\phi$ où $\breve{\alpha}\phi$ en une représentation $\pi$ est le produit de $\phi(\pi)$ avec la valeur de $\breve{\alpha}$ sur le caractère infinitésimal de $\pi$. On peut approximer la restriction de $\breve{\alpha}$ à $\Pi_{\chi_\sigma} \cap \mathcal{F}$ en utilisant le centre de l'algèbre enveloppante, c'est à dire qu'il existe $z_\alpha$ dans ce centre tel que $\breve{\alpha} - z_\alpha$ s'annule en l'ordre au moins $N$ en le caractère infinitésimal $\chi_\lambda$. Et alors

$$q(f_{v_\infty,\alpha}) = q(z_\alpha f) = z_\alpha(\nu_{\pi_V}+\lambda)q(f) = \breve{\alpha}(\nu_{\pi_V}+\lambda)q(f),$$

ce qui est l'assertion cherchée. Et le corollaire s'en déduit.

## 7.2 Stabilisation de la formule des traces pour certaines fonctions

Soit $f_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega)$ ; on suppose que pour tout $v \in V$, $f_v$ est nulle près des éléments exceptionnels, s'il y en a et si $v$ est $p$-adique, et on suppose qu'il y a au moins une place $v$ pour laquelle $f_v$ est à support dans les éléments réguliers (c'est une condition qui vient du problème technique suivant : tant que l'on ne sait pas stabiliser les termes locaux de la formule des traces, les termes $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\gamma_v, v_v)$ ne sont pas définis pour $\gamma_v$ un élément singulier). On pose pour une telle fonction $f_V$ :

$$h_V^f := \sum_{v\in V} \epsilon_{\tilde{M},v}^{\tilde{G}}(f_v) \prod_{v''\in V-\{v\}} f_{v'',\tilde{M}}.$$

L'ensemble $V$ contient au moins deux places (il contient $V_{ram}$ qui contient les places divisant 2, 3 et 5) et on fixe $v_1, v_2 \in V$. On suppose que les fonctions $f_V$ considérées sont $\tilde{M}$-cuspidales en $v_1$ et $v_2$. Cela veut dire que, pour $i = 1, 2$ et pour tout sous-espace de Levi $\tilde{L}^{v_i}$ de $\tilde{G}$ défini sur $F_{v_i}$, on a $f_{v_i,\tilde{L}^{v_i}} = 0$

si $\tilde{L}^{v_i}$ ne contient pas un conjugué de $\tilde{M}$. A fortiori $f_{v_i,\tilde{M}}$ est cuspidale pour $i = 1, 2$. Ainsi $h_V^f$ est somme de fonctions cuspidales en au moins deux places ; on rappelle que $\epsilon_{\tilde{M},v}^{\tilde{G}}$ est une application de $I(\tilde{G}(F_v), \omega)$ dans $I_{cusp,ac}(\tilde{M}(F_v), \omega)$. On rappelle aussi que la première somme sur $v$ ne porte en fait que sur les éléments de $v \in V$ tel que $\mathcal{A}_{\tilde{M}} = \mathcal{A}_{\tilde{M},v}$ car sinon on sait déjà avec les formules de descente que $\epsilon_{\tilde{M},v}^{\tilde{G}}$ est une application identiquement nulle. Notons $V'$ l'ensemble des places de $F$ appartenant à $V$ où l'égalité $\mathcal{A}_{\tilde{M}} = \mathcal{A}_{\tilde{M},v}$ est satisfaite.

**Lemme** *Sous l'hypothèse de récurrence de 7.1, on a pour tout $f_V$ comme ce qui précède l'énoncé, avec les notations des paragraphes précédents :*

$$I_{geo}^{\tilde{G}}(\omega, f_V 1_{\tilde{K}^V}) - I_{geo}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\omega, f_V 1_{\tilde{K}^V}) = x I_{geo}^{\tilde{M}}(\omega, h_V^f 1_{\tilde{K}^{M,V}}),$$

*où $x$ est un scalaire non nul explicite (indépendant de $f_V$)*

On reprend les notations de [21] 6.11. Le terme de gauche de l'énoncé est une somme sur les espaces de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ des termes :

$$\sum_{\mathcal{O}^{\tilde{L}}} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(A^{\tilde{L}}(\mathcal{O}^{\tilde{L}}, V, \omega), f)$$

$$- \sum_{\mathbf{L}' \in \mathcal{E}(\tilde{L}, \omega, V)} i(\tilde{L}, \mathbf{L}') \sum_{\mathcal{O}^{\mathbf{L}'} \in \tilde{L}'_{ss}(F_V)/st-conj; \mathcal{O}^{L'} \mapsto \mathcal{O}^{\tilde{L}}} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}', SA^{L'}(\mathcal{O}^{\mathbf{L}'}), V, f).$$

C'est la différence entre les deux valeurs de $X$ de [21] 6.11. On sait que les termes correspondants à $\tilde{L} = \tilde{G}$ sont nuls, d'après [33] 3.3 sauf (éventuellement) pour les éléments exceptionnels où le résultat est encore à montrer. Mais l'hypothèse que $f_V$ est nulle près de ces éléments en les places non-archimédiennes assure aussi la nullité de ces termes.

Supposons que $\tilde{L}$ soit un espace de Levi propre de $\tilde{G}$ ; par récurrence on sait que $A^{\tilde{L}}(\mathcal{O}^{\tilde{L}}, V, \omega)$ est le transfert de $\sum_{\mathbf{L}'} i(\tilde{L}, \mathbf{L}') SA^{\mathbf{L}'}(\mathcal{O}^{\mathbf{L}'}, V)$ ; le terme écrit est donc une combinaison linéaire de distributions de la forme $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\omega, \gamma, f_V) - I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\omega, \gamma, f_V)$ pour $\gamma$ des éléments rationnels de $\tilde{L}$ pris à conjugaison près. Par hypothèse de récurrence et les formules de descente, il ne reste qu'une combinaison linéaire de termes, de la forme à un scalaire près

$$\sum_{v_0 \in V} \left( I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\omega_{v_0}, \gamma_{v_0}, f_{v_0}) - I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\omega_{v_0}, \gamma_{v_0}, f_{v_0}) \right) \prod_{v \in V - \{v_0\}} I_{\tilde{L}}^{\tilde{L}}(\omega_v, \gamma_v, f_{v,\tilde{L}}). \quad (2)$$

En utilisant les propriétés de cuspidalité de la fonction $f_V$ en les places $v_1$ et $v_2$ un tel terme est certainement nul si $\tilde{L}$ ne contient pas (à conjugaison près) $\tilde{M}$ ; il est donc ici important de sommer sur les classes de conjugaison d'espaces de Levi et non pas sur les espaces de Levi semi-standard, d'où des coefficients qu'il n'est pas important de calculer. Si $\tilde{L}$ contient strictement $\tilde{M}$, les hypothèses de récurrence donnent la stabilisation locale géométrique pour les éléments semi-simples réguliers et on a donc cette stabilisation géométrique pour tout élément grâce à [32] 1.11.

Finalement il ne reste que les termes avec $\tilde{L} = \tilde{M}$ ; en utilisant les propriétés de descente, la première somme ne porte que sur $v_0 \in V'$ (où $V'$ a été défini avant l'énoncé). Par cuspidalité, il reste encore uniquement les termes correspondant à des éléments semi-simples réguliers elliptiques de $\tilde{M}$. Or (2) n'est autre que $I^{\tilde{M}}_{\tilde{M}}(\omega, \gamma_V, h^f_V)$. En revenant à $A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}^{\tilde{M}}, V, \omega)$, on voit que le terme de gauche de l'énoncé est exactement

$$\sum_{\mathcal{O}^{\tilde{M}}} I^{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}^{\tilde{M}}, V, \omega), h^f_V).$$

Maintenant on utilise les propriétés de cuspidalité de $h^f_V$ pour vérifier que ceci est exactement $I^{\tilde{M}}_{geo}(\omega, V, h^f_V)$.

**Proposition** *Avec les hypothèses et notations du lemme précédent et celles de 7.1, pour tout $\nu, c^V$*

$$tr\, \pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V}) = tr\, \pi^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{disc,\nu}(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V})$$

Le lemme précédent donne l'égalité

$$I^{\tilde{G}}_{geo}(\omega, f_V) - I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{geo}(\omega, f_V) = x I^{\tilde{M}}_{geo}(\omega, h^f_V). \tag{1}$$

On remplace ces distributions, écrites à l'aide du côté géométrique, par les distributions qui leur sont égales mais écrites à l'aide du côté spectral. On a vu en 5.9 que le terme de gauche vaut

$$I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega, f_V) - I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{disc}(\omega, f_V). \tag{2}$$

Le terme de droite vaut $x I^{\tilde{M}}_{disc}(\omega, h^f_V 1_{\tilde{K}^{\tilde{M},V}})$ car $h^f_V$ est une somme finie de fonctions cuspidales en deux places.

On fixe $f_V$ et $\nu$ et on a déjà vu qu'en fixant convenablement un multiplicateur $\alpha$, en remplaçant $f_V$ par $f_{\alpha_m,V}$ avec $m \in \mathbb{N}$ où $\alpha_m$ est le convolé $m$ fois de $\alpha$, (2) a une limite qui est la somme sur les caractères $c^V$ de

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}} d\lambda \, \Big( tr\, \pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu,\lambda}(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V}) - tr\, \pi^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{disc,\nu,\lambda}(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V}) \Big) \tag{2}$$

où l'indice $\lambda$ indique la tensorisation par le caractère $\lambda$ de $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$.

Quant à $I_{disc}^{\tilde{M}}(\omega, h_V^{f_{\alpha^m}} 1_{\tilde{K}^{\tilde{M},V}})$ c'est la somme absolument convergente des coefficients de Fourier $I^{\tilde{M}}(\pi_{disc,\nu_M}^{\tilde{M}}(c_M^V), 0, h_V^{f_{\alpha^m}})$ calculés en 7.1. On a vu en 7.1 qu'un tel terme valait

$$\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} d\lambda \, \hat{\alpha}^m(\lambda + \nu_M) I(\pi_{disc,\nu_M}^{\tilde{M}}(c^V), \lambda, h_V^f). \tag{3}$$

On sait, d'après [35] 8.9, que la fonction $h_V^f$ est $K \cap M$ finie. Ainsi dans le calcul de l'expression (3), grâce aux propriétés de semi-finitude de $\pi_{disc}^{\tilde{M}}$, seuls interviennent les caractères infinitésimaux de partie réelle bornée, la borne dépendant de $K \cap M$. Ainsi, pour un bon choix de $\alpha$ (qui ne dépend que des $K$-types déterminés par $f$) la limite quand $m$ tend vers l'infini de $\hat{\alpha}^m(\lambda+\nu_M)$ est 0 presque partout. On en déduit que la limite de (3) quand $m$ tend vers l'infini est nulle grâce à la propriété de convergence absolue démontrée dans la proposition ci-dessous (cf. 7.3).

On trouve que la limite quand $m$ tend vers l'infini de $I_{disc}^{\tilde{M}}(\omega, h_{\alpha_m,V}^f 1_{\tilde{K}^{\tilde{M},V}})$ est nulle. Ainsi, pour $\nu$ fixé, la somme sur $c^V$ des termes écrits en (2) est nulle pour toute fonction $f_V$. Par inversion de Fourier sur $i\mathcal{A}_{\tilde{G}}^*$ qui est dual de $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$, on en déduit :

$$\sum_{c^V} tr \left(\pi_{disc,\nu}^{\tilde{G}}(c^V) - \pi_\nu^{\tilde{G},\mathcal{E}}(c^V)\right)(f_V 1_{\tilde{K}^V}) = 0.$$

On en déduit l'égalité cherchée pour $c^V$ fixé en utilisant 5.3.3 (ii).

## 7.3 Propriété de convergence absolue pour la formule des traces

On veut démontrer que (3) de 7.2 (ou une variante) converge absolument. On veut donc montrer

**Proposition** $\sum_{\pi^{\tilde{M}}} \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} d\lambda \, |I(\lambda, \pi^{\tilde{M}}, h_V^f)|$ *converge où la somme porte sur les représentations discrètes (au sens de la formule des traces) de* $\tilde{M}(\mathbb{A}_F)$*, non ramifiées hors de* $V$ *et ayant des* $K_V$ *types dans un ensemble fixé a priori par le choix de* $f$.

Comme on se ramène aux résultats de Müller sur le spectre discret de $M(\mathbb{A}_F)$, on modifie l'énoncé. Pour toute représentation automorphe irréductible unitaire, $\pi_M$, de $M(\mathbb{A}_F)$ vérifiant :

$$\forall \gamma \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F), \ {}^\gamma\pi_M \simeq \pi_M \otimes \omega$$

on fixe une $\omega$-représentation de $\tilde{M}(\mathbb{A}_F)$ unitaire. On note $\mathcal{A}^2[\pi]$ la somme des sous-espaces des formes automorphes de carré intégrable sur $M(\mathbb{A}_F)$ isomorphes à $\pi$ ; on note $m(\pi) := dim\, Hom_{M(\mathbb{A}_F)}(\pi, \mathcal{A}^2[\pi])$. Cet espace $\mathcal{A}^2[\pi]$ est une $\omega$-représentation de $\tilde{M}(\mathbb{A}_F)$ (cf. 5.1) et on vérifie que pour tout $f \in I(\tilde{M}(A))$

$$|tr_{\mathcal{A}^2[\pi]}(f)| = |z(\tilde{\pi})||tr\, \tilde{\pi}(f)|, \tag{1}$$

avec $z(\tilde{\pi})$ un nombre complexe vérifiant $|z(\tilde{\pi})| \leq m(\pi)$ : le $z(\tilde{\pi})$ est la trace d'un opérateur unitaire défini par un élément de $\tilde{M}(F)$ dans l'espace de dimension $m(\pi)$, $Hom_{M(\mathbb{A}_F)}(\pi, \mathcal{A}^2(M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)))$ et la valeur absolue de ce nombre ne dépend pas du choix de $\tilde{\pi}$. On rappelle le résultat clé de [24] : il existe un entier $k$ tel que

$$\sum_{\pi} m(\pi)(1 + |\nu(\pi_\infty)|)^{-k} \leq \infty \tag{2}$$

converge, où la somme porte sur les représentations $\pi$ incluses dans le spectre discret de $M(\mathbb{A}_F)$, non ramifiées hors de $V$ et ayant des $K_V$-types dans un ensemble fixé a priori. Ce résultat s'étend au spectre $t$-discret en suivant toujours [24], comme on va l'expliquer ici. Le spectre $t$-discret de $\tilde{M}(\mathbb{A}_F)$ fait intervenir, plus généralement (cf. 5.1), les représentations dans

$$\mathcal{A}^2(U_P(\mathbb{A}_F)L(F)\mathfrak{A}_L\backslash M(\mathbb{A}_F))$$

où $P$ est un sous-groupe parabolique de $M$ de radical unipotent $U_P$ et de sous-groupe de Levi $L$. Comme on ne regarde que les représentations non ramifiées hors de $V$, cela fixe dans ces induites uniquement la composante hors de $V$ et l'induite se décompose donc en au plus $N_V$-représentations irréductibles où $N_V$ est le produit du cardinal de $V$ avec

$$sup_{v \in V}|Norm_{M(F_v)}(L(F_v))/L(F_v)|.$$

Ainsi le résultat (2) s'étend en sommant sur les représentations $t$-discrètes de $M(\mathbb{A}_F)$, non ramifiées hors de $V$ et ayant des $K_V$-types dans un ensemble fixé a priori. Il n'y a évidemment aucune difficulté à vérifier que (1) s'étend aussi pour toute représentation $\pi$ de $M(\mathbb{A}_F)$ donnant lieu à une représentation $t$-discrète de $\tilde{M}(\mathbb{A}_F)$. On a donc

$$\sum_{\pi} |z(\tilde{\pi})(1 + |\nu(\pi_\infty)|)^{-k} \leq \infty, \tag{3}$$

pour $k$ convenable et où la somme porte sur les représentations $\pi$ de $M(\mathbb{A}_F)$ intervenant dans la construction du spectre $t$-discret de $\tilde{M}(\mathbb{A}_F)$ comme expliqué en 5.1. En tenant compte de (3), pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que pour tout entier $N$, il existe une constante positive $c_N$ tel que pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, on ait, pour tout $\pi$ comme ci-dessus :

$$|I(\tilde{\pi}, \lambda, h^f_V)| \leq c_N(1 + |\nu(\pi_\infty)| + |\lambda|)^{-N}. \tag{4}$$

Comme $h^f_V$ est une somme sur les places de $v$, il suffit de montrer cette assertion pour tout place $v$ de $V$ en remplaçant $h^f_V$ par $\epsilon_{\tilde{M}}(f_v)f^v_{\tilde{M}}$. De plus avec les formules de descente, il suffit de prouver que les inégalités suivantes :

si $v$ est une place archimédienne :

$$|I(\tilde{\pi}_v, \lambda, f_{v,\tilde{M}})| \leq c_N(1 + |\nu(\pi_\infty)| + |\lambda|)^{-N} \tag{5}$$

si $v$ est une place $p$-adique

$$|I(\tilde{\pi}_v, \lambda, f_{v,\tilde{M}})| \leq c_N \tag{6}$$

donc une inégalité indépendante de $\lambda$

si $v$ est une place archimédienne

$$|I(\tilde{\pi}_v, \lambda, \epsilon_{\tilde{M}}(f_v))| \leq c_N(1 + |\nu(\pi_\infty)| + |\lambda|)^{-N} \tag{7}$$

si $v$ est une place $p$-adique

$$|I(\tilde{\pi}_v, \lambda, \epsilon_{\tilde{M}}(f_v))| \leq c_N \tag{8}$$

Pour les assertions (5) et (6), on commence par remarquer que puisque le terme constant $f_{v,\tilde{M}}$ est à support compact, $I(\lambda, \tilde{\pi}_v, f_{v,\tilde{M}})$ n'est autre que la trace de $\tilde{\pi}_{\lambda,v}$ sur $f_{v,\tilde{M}}$. L'assertion (5) est alors démontrée en 2.1 de [14] ; l'exponentielle en la partie réelle de $\nu_\infty(\pi)$ est bornée ici puisque l'on a fixé les $K_\infty$-types possibles.

L'assertion (6) ; la trace est une somme de coefficients matriciels où on ne considère que les $K_v$-types sous-lesquels se transforment $f_{v,\tilde{M}}$. Or ces $K_v$-types sont fixés et leur multiplicité dans $\tilde{\pi}_{\lambda,v}$ est bornée indépendamment de cette représentation. Donc le terme de gauche de (6) est borné par une constante dépendant uniquement des $K_v$ type fois $\int_{\tilde{M}(F_v)} |f_{v,\tilde{M}}(\gamma)|\, d\gamma$ qui est fini puisque $f_{v,\tilde{M}}$ est à support compact. D'où (6).

Montrons (8). On va d'abord montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tilde{\pi}_v$ pour lesquelles $I(\lambda, \tilde{\pi}_v, \epsilon_{\tilde{M}}(f_v))$ est non nul. Les représentations globales qui interviennent ont un caractère central trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{M}}$. Elles sont non ramifiées hors de $V$ et leur caractère sous les points adéliques du tore $A_{\tilde{M}}(\mathbb{A}_F)$ ne parcourt donc qu'un ensemble fini de caractères automorphes unitaires. De plus la fonction $\epsilon_{\tilde{M},v}(f_v)$ n'intervient que si $\mathcal{A}^*_{\tilde{M}} = \mathcal{A}^*_{\tilde{M},v}$ ce que l'on suppose. Donc l'action de $\tilde{\pi}_v$ restreinte à $A_{\tilde{M},v}(F_v)$ se fait via un caractère unitaire dans un ensemble fini. On utilise le fait que $\epsilon_{\tilde{M},v}(f_v)$ est une fonction cuspidale donc $I(\tilde{\pi}_v, \lambda, \epsilon_{\tilde{M}}(f_v)) = I(\rho_v, \lambda, \epsilon_{\tilde{M}}(f_v))$ si $\tilde{\pi}_v - \rho_v$ est une induite propre. On peut trouver $\rho_v$ ayant cette propriété, étant elliptique, avec même caractère que $\pi_v$ sur $A_{\tilde{M},v}(F_v)$ et pour que $I(\rho_v, \lambda, \epsilon_{\tilde{M}}(f_v))$ soit non nul, $\rho_v$ doit contenir certains $K_v$-types déterminés uniquement par $f_v$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de possibilités ; en particulier le support cuspidal de $\rho_v$ varie dans un ensemble fini et il en est donc de même de $\pi_v$, en tout cas pour que $I(\pi_v, \lambda, \epsilon_{\tilde{M}}(f_v))$ soit non nul. D'où l'assertion de finitude ; cette assertion entraîne (8) car $\lambda$ parcourt un ensemble compact, la place étant finie, et la dépendance en $\lambda$ est continue.

Montrons (7). L'assertion de finitude est analogue, on remplace l'usage du support cuspidal par l'action du centre de l'algèbre enveloppante. Ici $\lambda$ ne varie pas dans un tore compact. La fonction $\lambda \mapsto I(\tilde{\pi}_v, \lambda, \epsilon_{\tilde{M}}(f_v))$ est à décroissance rapide, il existe donc, pour tout entier $N$, une constante $c_N$ indépendante de $\tilde{\pi}_v$ tel que

$$|I(\tilde{\pi}_v, \epsilon_{\tilde{M}}(f_v))| \leq c_N(1 + |\lambda|)^{-N}.$$

Comme

$$(1 + |\lambda|)^{-N} \leq (1 + |\nu_\infty(\pi_\infty)|)^N (1 + |\nu_\infty(\pi_\infty)| + |\lambda|)^{-N},$$

en modifiant la constante, on obtient (7).

## 7.4 Globalisation

On note avec des indices $_0$ les termes locaux que l'on veut globaliser. On a un corps local $F_0$, un espace tordu $\tilde{G}_0$ avec un caractère $\omega_0$ et un groupe $G_0$, en fait c'est le cocycle $\underline{a}_0$ qui détermine $\omega_0$ qui compte et on a aussi un espace de Levi $\tilde{M}_0$ de $\tilde{G}_0$. D'après [16] paragraphe 2, il existe un corps de nombres $F$, des données $G, \tilde{G}, \tilde{M}$ définies sur $F$ et une place $v_0$ de $F$ qui se localisent en les données locales précédentes. Et on peut en plus supposer comme nous le ferons que $\tilde{M}(F)$ est dense dans $\tilde{M}(F_{v_0})$ et que $A_{\tilde{M}} = A_{\tilde{M},v}$.

On fixe $\mathbf{M}'_0$ une donnée endoscopique elliptique relevante de $\tilde{M}_0, \underline{a}_0$. Puisque $\tilde{M}(F)$ est dense dans $\tilde{M}(F_{v_0})$, l'ensemble des éléments $\delta_0$ dans $\mathbf{M}'_0$ qui appartiennent à une classe de conjugaison stable formées d'éléments semi-simples réguliers correspondant à une classe de conjugaison stable d'éléments semi-simples réguliers de $\tilde{M}(F)$ est dense dans $\mathbf{M}'_0$. On fixe $\delta_0$ dans cet ensemble et $\gamma \in \tilde{M}(F)$ lui correspondant. On note $\tilde{T}$ le tore tordu maximal de

$\tilde{M}$ contenant $\gamma$. Le seul cas qui nous intéresse est le cas elliptique, donc on suppose que $\tilde{T}$ est elliptique dans $\tilde{M}$.

**Proposition** *Il existe un cocycle $\underline{a}$ de $W_F$, une donnée endoscopique de $\tilde{M}, \underline{a}$, notée $\mathbf{M}'$, et un élément $\delta$ de cette donnée, défini sur $F$, tel que la localisation de $\underline{a}$ en la place $v_0$ soit le cocycle $\underline{a}_0$ et la localisation de $\mathbf{M}', \delta$ soit $\mathbf{M_0'}, \delta_0$.*

La démonstration de cette proposition est reportée en 9.

Cette globalisation n'est pas suffisante pour séparer les éléments de la classe de conjugaison stable de $\gamma$ qui interviennent dans les formules globales, uniquement par des considérations locales. A $\mathbf{M}'$ est associé un caractère de $M_\sharp(\mathbb{A}_F)$ ; comme $M_\sharp = M/Z(M)^\theta$, il y a une application naturelle de $M_\flat := M/Z(G)^\theta$ dans $M_\sharp$. On a besoin des propriétés suivantes, pour toute place $v$ de $F$ :

l'application naturelle $M_\flat(F_v)/M(F_v) \to G_\sharp(F_v)/G(F_v)$ est bijective et l'application naturelle $M_\flat(F_v) \to M_\sharp(F_v)$ est surjective.

En effet, $G_\sharp(F_v)$ est engendré par un Levi minimal et par $G_{SC}(F_v)$, d'où la surjectivité de la première application et son injectivité est claire. Pour la deuxième application, on remarque que l'application de groupes algébriques,

$$M_\flat = M/Z(G)^\theta \to M_\sharp = M/Z(M)^\theta$$

a pour noyau le tore $Z(M)^\theta/Z(G)^\theta = Z(M)^{\theta,0}/Z(G)^\theta \cap Z(M)^{\theta,0}$. Ce tore est induit et la surjectivité annoncée s'en déduit.

On peut donc relever $\omega_\sharp$ en $\omega_\flat$ un caractère de $M_\flat(F_v)$ (pour toute place $v$ de $F$) et cette application de relèvement est injective. Et en utilisant le premier isomorphisme ci-dessus, on voit $\omega_\sharp$ comme un caractère de $G_\sharp(F_v)$. C'est le caractère de $G_\sharp(F_v)$ associé à $\mathbf{M}'$ vu comme groupe endoscopique non elliptique de $\tilde{G}$. On note ce caractère $\omega_{\sharp,v}^{\mathbf{M}'}$.

## 7.5 Propriétés de finitude du nombre de certaines données endoscopiques

On se place dans une situation globale où $\tilde{G}$ est défini sur un corps de nombres $F$, que le caractère $\omega$ est donné par un cocycle fixé, $\underline{a}$ et où on a un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. On fixe aussi un nombre fini de places $V$ de $F$ contenant $V_{ram}$. On note $\mathcal{E}_F(\tilde{M}, \omega, V)$ l'ensemble des données endoscopiques (à équivalence près) de $\tilde{M}$, $\omega$, définies sur $F$, qui sont elliptiques, relevantes et non ramifiées hors de $V$. C'est un ensemble fini. Rappelons que l'on a montré en [33] 2.1(3) que, pour une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'$ de

$\tilde{M}$, $\omega$, la donnée $\mathbf{M'}$ est non ramifiée hors de $V$ si et seulement si le caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{M'}}$ est non ramifié hors de $V$. Fixons un sous-tore tordu maximal $\tilde{T}$ de $\tilde{M}$, défini sur $F$ et elliptique. On suppose en plus qu'il existe une extension galoisienne $E$ de $F$ qui déploie le tore $T$ et une place $u$ de $F$ tel que $E_u$ soit un corps. L'application de localisation de $Gal(E/F)$ dans $Gal(E_u/F_u)$ est alors bijective.

On fixe $\gamma \in \tilde{T}(F)$ fortement régulier et on considère les couples $(\mathbf{M'}, \delta)$ formés d'un élément de $\mathcal{E}_F(\tilde{M}, \omega, V)$ et d'une classe de conjugaison stable $\delta$ dans cette donnée qui se transfère en la classe de conjugaison stable de $\gamma$.

Soit $\mathbf{M''}, \delta''$ satisfaisant à ces conditions. On commence par considérer la situation après extension de $F$ à $E$ ; sur $E$ le tore $T$ se déploie par hypothèse et les données endoscopiques relatives à des classes de conjugaison stable de $\tilde{T}(E)$ donnent lieu à des caractères automorphes de $M_\sharp(\mathbb{A}_E)$ qui valent $\omega \circ Norm_{E/F}$ sur l'image de $M(\mathbb{A}_F)$ ; d'où un homomorphisme de $W_E$ dans $Z(\hat{M}_\sharp)$. Ce dernier groupe est décrit en [28] 2.7. On reprend la suite exacte qui suit (2) de cette référence :

$$1 \to Z(\hat{M}_{SC})/Z(\hat{M}_{SC})^{\hat{\theta}} \overset{(\pi, 1-\hat{\theta})}{\to} Z(\hat{M})/(Z(\hat{M}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}) \times Z(\hat{M}_{SC})$$
$$\to Z(\hat{M}_\sharp) \to 1. \qquad (*)$$

On pose $\hat{U} := Z(\hat{M})\hat{T}^{\hat{\theta},0}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Le couple $(\mathbf{M''}, \delta'')$ est associé à un cocycle dans
$$Z^{1,0}(W_F; \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0} \overset{(1-\hat{\theta})}{\to} \hat{T}/Z(\hat{M})).$$

On note simplement $\delta''$ ce cocycle. En restreignant à $W_E$, on obtient un morphisme de $W_E$ dans $\hat{U}$ (qui ne dépend pas des choix). On note $\chi_{\delta''}$ ce morphisme. Montrons :

(1) L'application qui, à $(\mathbf{M''}, \delta'')$ comme ci-dessus, associe le localisé en la place $u$, $(\mathbf{M''_u}, \delta''_u)$ et le caractère $\chi_{\delta''}$ est injective :

en effet soit pour $i = 1, 2$, des données $(\mathbf{M'_i}, \delta'_i)$ ayant même image. Alors $\delta'_1(\delta'_2)^{-1}$ est un cocycle trivial sur $W_E$ puisque $\chi_{\delta_1} = \chi_{\delta_2}$. Il se factorise donc par $Gal(E/F)$ mais en la place $u$ les localisés sont les mêmes. Comme on a supposé que la localisation de $Gal(E/F)$ dans $Gal(E_u/F_u)$ est bijective, cela veut dire que l'on a l'égalité de cocycles $\delta'_1 = \delta'_2$. D'où l'injectivité.

Il est clair que l'ensemble des couples $(\mathbf{M'}, \delta)$ vérifiant les conditions ci-dessus est fini. On peut toutefois retrouver cette propriété de la façon suivante. D'après (1), il suffit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de caractères $\chi_{\delta''}$ possibles. Et pour cela on montre d'abord que $\chi_{\delta''}$ est non ramifié hors des places de $E$ au-dessus de places de $F$ dans $V$ : soit $v$ une place de $F$ hors de $V$ et $v'$ une place de $E$ au dessus. On sait que $\omega_{\sharp,v'}^{\mathbf{M}''}$ est non ramifié puisque $\mathbf{M}'' \in \mathcal{E}_F(\tilde{M}, \omega, V)$. On vérifie que $\omega_{\sharp,v'}^{\mathbf{M}''}$ est l'image de $\chi_{\delta'',v'}$ dans (*) : ces cocycles doivent être cohomologues et comme la situation est déployée sur $E$, ils coïncident. Soit $w \in I_{E_{v'}}$ le groupe d'inertie de $W_{E_{v'}}$. On vient de vérifier que $(\chi_{\delta'',v'}(w), 1)$ est d'image triviale dans $Z(\hat{M}_\sharp)$. D'après l'exactitude de (*) cela entraîne l'existence de $z \in Z(\hat{M}_{SC})/Z(\hat{M}_{SC}^{\hat{\theta}})$ tel que $1 = (1-\hat{\theta})z$ et $\chi_{\delta'',v'}(w) = \pi(z)$ où $\pi$ est l'application naturelle. Comme $(1-\hat{\theta})$ est injective sur $Z(\hat{M}_{SC})/Z(\hat{M}_{SC})^{\hat{\theta}}$ cela force $z = 1$ et la non ramification cherchée de $\chi_{\delta'',v'}$.

Pour avoir la finitude du nombre de caractères, il ne reste plus qu'à remarquer que si l'on fixe un point de base $\mathbf{M}', \delta$, les cocycles $\chi_{\delta''}\chi_\delta^{-1}$ sont à valeurs dans $Z(\hat{M})^{\hat{\theta}}/Z(\hat{M})^{\hat{\theta}} \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}$ qui est un groupe fini : en effet $(1-\hat{\theta})\chi_{\delta''}$ est à valeurs dans $Z(\hat{M})$ et doit coïncider avec le cocyle $\underline{a}$ déterminant $\omega \circ Norm_{E/F}$. D'où l'assertion qui prouve la finitude.

## 7.6 Globalisation fine

On fixe $\mathbf{M}'_0$ une donnée endoscopique elliptique en la place $v_0$. On globalise une première fois à l'aide de 7.4, d'où un corps de nombres $F$. On fixe aussi un tore tore tordu elliptique $\tilde{T}$ de $\tilde{M}$ qui en la place $v_0$ se localise en un tore tordu elliptique. On fixe aussi une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'$ de $\tilde{M}$ et un élément $\delta'$ de cette donnée dont on suppose qu'il appartient à un tore se transférant en $\tilde{T}$.

On dit que $E$, une extension finie de $F$, est une bonne extension pour la place $v_0$ si les conditions suivantes sont satisfaites. D'une part, il existe une place $v'_0$ de $E$ au-dessus de $v_0$ telle que $E_{v'_0} = F_{v_0}$. D'autre part, il existe une extension galoisienne $E'$ de $E$ qui déploie $\tilde{T}$ et deux places $u_1$ et $u_2$ de $E$ distinctes de $v'_0$ telles que $E'_{u_i}$ soit un corps pour $i = 1, 2$, donc telles que la localisation de $Gal(E'/E)$ dans $Gal(E'_{u_i}/E_{u_i})$ soit un isomorphisme. Il existe de bonnes extensions pour la place $v_0$.

On fixe de telles données. On note $V_{ram}^E$ l'analogue de $V_{ram}$ sur le corps $E$. Pour $V$ un ensemble de places de $E$ contenant $V_{ram}^E$ et tel que $\tilde{T}$ soit non ramifié hors de $V$, on reprend la notation $\mathcal{E}_E(\tilde{M}, \omega, V)$ de 7.4, c'est l'ensemble des données endoscopiques elliptiques et relevantes pour $\tilde{M}$ (vu sur $E$) qui sont non ramifiées hors de $V$. Pour la suite, on aura besoin de deux places, pour le lemme qui suit il suffit d'une place $u$ ayant les propriétés de $u_1$ et $u_2$. On fixe donc une telle place.

**Lemme** *Il existe un ensemble fini de places $V$ de $E$ (contenant $V_{ram}^E$) tel* *que pour toute donnée endoscopique elliptique* $\mathbf{M}'' \in \mathcal{E}_E(\tilde{M}, \omega, V)$ *contenant un élément* $\delta''$ *dans un tore se transférant en* $\tilde{T}$ *telles que le localisé de* $\mathbf{M}'', \delta''$ *coïncide avec le localisé de* $\mathbf{M}', \delta'$ *en la place* $u$*, on a :*

*soit* $(\mathbf{M}'', \delta'') = (\mathbf{M}', \delta')$ *à équivalence près*

*soit le caractère automorphe associé à* $\mathbf{M}''$ *est différent du caractère automorphe associé à* $\mathbf{M}$*'.*

Comme annoncé on reprend l'assertion (1) de la preuve de 7.5 en remplaçant $F$ et $E$ par $E$ et $E'$ ; l'hypothèse faite sur $E$ et chacune des places $u_i$ pour $i = 1, 2$ assure que l'on peut l'utiliser. On fixe $\mathbf{M}'', \delta''$ satisfaisant à la condition du lemme. D'après l'assertion (1) de 7.5, soit $(\mathbf{M}'', \delta'') = (\mathbf{M}', \delta')$ soit, avec les notations introduites à cette place, $\chi_{\delta''} \neq \chi_{\delta'}$. On va montrer que cela force

$$\omega_\sharp^{\mathbf{M}'} \circ Norm_{E'/E} \neq \omega_\sharp^{\mathbf{M}''} \circ Norm_{E'/E}.$$

En effet soit $v'$ une place de $E'$ tel que $\chi_{\delta'',v'} \neq \chi_{\delta',v'}$ ; on note $\omega_{\sharp,v'}^{\mathbf{M}'}$ la composante en la place $v'$ du caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{M}'} \circ Norm_{E'/E}$ et on utilise une notation analogue avec $\mathbf{M}'$ remplacé par $\mathbf{M}''$. Et comme dans la preuve de 7.5, on voit que $\omega_{\sharp,v'}^{\mathbf{M}'}(\omega_{\sharp,v'}^{\mathbf{M}''})^{-1}$ est l'image du cocycle $(\chi_{\delta',v'}\chi_{\delta'',v'}^{-1}, 1)$ dans la suite exacte (*) de cette preuve. Et on conclut comme en loc. cite.

## 7.7 Preuve de la stabilisation géométrique locale

### 7.7.1 La première hypothèse clé

On démontre ici la première hypothèse clé faite en 3.5.

Dans 3.5 la situation est locale ; on la globalise grâce à 7.4 et 7.6

On a ainsi construit une situation globale où en la place $v = v_0$ on retrouve la situation locale de 3.5 et tel que $M(F)$ est dense dans $M(F_{v_0})$ ; comme $\tilde{M}(F)$ est non vide et que $M(F)$ est dense dans $M(F_{v_0})$, $\tilde{M}(F)$ est dense dans $\tilde{M}(F_{v_0})$. D'après la construction, on a aussi $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_{M_0}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{M}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$. On a construit la situation globale de façon à globaliser le caractère de $M(F_{v_0})$ et les données endoscopiques elliptiques $\mathbf{M}'_0$ en la place locale.

**Lemme** *Il existe une fonction lisse* $\epsilon(\mathbf{M}', \delta_0)$ *sur l'ensemble des classes de conjugaison stable d'éléments fortement réguliers de* $\mathbf{M}'(F_{v_0})$ *telle que pour toute fonction* $f_{v_0} \in I(\tilde{G}(F_{v_0}), \omega)$ *nulle près des éléments exceptionnels s'il y en a et si* $v_0$ *est p-adique :*

$$\epsilon_{\tilde{M}}^{\mathbf{M}'}(f)(\delta_0) = \epsilon(\mathbf{M}', \delta_0) f_{\tilde{M}}^{\mathbf{M}'}(\delta_0), \quad (1)$$

On commence par remarquer que si $\epsilon(\mathbf{M}', \delta_0)$ existe en tant que fonction elle est nécesssairement lisse. Le problème est donc de démontrer l'existence de cette fonction. On sait que le membre de gauche est l'intégrale orbitale en $\delta_0$ d'une fonction cuspidale. Il suffit donc de démontrer l'existence de cette fonction pour les éléments $\delta_0$ qui sont elliptiques dans $\mathbf{M}'(F_{v_0})$.

On remarque aussi qu'il suffit de prouver l'existence d'une telle fonction en tout point de $\mathbf{M}'(F_{v_0})$ qui correspond à un élément $\gamma \in \tilde{M}(F_{v_0})$ qui provient, par localisation, de $\tilde{M}(F)$, puisque l'on a supposé que $\tilde{M}(F)$ est dense dans $\tilde{M}(F_{v_0})$. On fixe un tel $\gamma$, on note $\tilde{T}$ le tore tordu maximal le contenant et on peut supposer que $\tilde{T}$ est elliptique en $v_0$.

On reprend à peu près telle quelle la démonstration de [11] 7.3 avec les modifications nécessaires puisque la globalisation est plus compliquée.

On remplace éventuellement $F$ par une extension finie $E$ de $F$, bonne pour la place $v_0$ comme en 7.6, munie de ses places $v_0'$, $u_1$ et $u_2$. On fixe $V$ un ensemble de places de $E$ contenant $v_0'$, contenant $V_{ram}^E$ ainsi que $u_i$ pour $i = 1, 2$ et satisfaisant pour $u = u_1$ et $u = u_2$ au lemme de 7.6. Ici on peut remplacer $F$ par $E$, $v_0$ par $v_0'$, $E$ disparaît et on a donc $\mathcal{E}_F(\tilde{M}, \omega, V)$ l'ensemble des données endoscopiques elliptiques relevantes de $\tilde{M}$, $\omega$, qui sont non ramifiées hors de $V$. On sait que cet ensemble est fini. On suppose bien évidemment (quitte à élargir $V$) que $\mathbf{M}'$ est dans cet ensemble et on a $\delta \in \mathbf{M}'$ une globalisation de $\delta_{v_0}$. En utilisant les lemmes de 7.5 et 7.6, on fixe $S$ un ensemble de places de $F$ hors de $V$ tel que pour tout couple $\mathbf{M}'', \delta''$ comme dans 7.6, pour lequel en la place $u_1$ ou (c'est bien "ou" et pas "et") la place $u_2$, le localisé de ce couple est le même que le localisé du couple $\mathbf{M}', \delta$, soit $(\mathbf{M}'', \delta'') = (\mathbf{M}', \delta)$, soit il existe au moins deux places distinctes dans $S$ où le caractère associé à $\mathbf{M}''$ diffère du caractère associé à $\mathbf{M}'$.

On pose $V' = V \cup S$.

On construit maintenant des fonctions auxquelles on va pouvoir appliquer 7.2. On considère une fonction $f_{V'} = \otimes_{v \in V'} f_{v'}$ vérifiant les hypothèses de cette référence. En particulier, $f_{v_0}$ est une fonction quelconque vérifiant l'hypothèse de l'énoncé. On affine les constructions de la façon suivante : en les places $u_i$ pour $i = 1, 2$, on suppose que $f_{u_i}$ vérifie en plus, $f_{u_i, \tilde{M}}$ est cuspidale et $(f_{u_i, \tilde{M}})^{\mathbf{M}''} = 0$ si $\mathbf{M}''$ n'a pas la même localisation que $\mathbf{M}'$ en $u_i$ et $f^{\mathbf{M}'}_{\tilde{M}, u_i}(\delta_i') = 0$ pour tout $\delta_i'$ correspondant à $\gamma$ qui n'est pas dans la classe de conjugaison stable de $\delta_{u_i}$ ni dans un de ses conjugués sous $Norm_G(\tilde{M})$. . En toutes les places de $V'$ hormis celles au dessus de $v_0$, on impose en plus que $f^{\mathbf{M}'}_{v, \tilde{M}}(\delta_v) = 1$. Pour $v \in S$, on impose en plus que la fonction considérée soit de la forme $f_v^{\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}}$, et en particulier se transforme sous l'action de $M_\flat(F_v)$

suivant la composante locale du caractère associé à $\mathbf{M}'$.

On applique la proposition de 7.2 à $f_{V'}$, c'est-à-dire que l'on connaît pour une telle fonction la stabilisation spectrale. On revient alors au lemme de 7.2 et le membre de gauche de ce lemme est nul ; il en est donc de même du membre de droite de ce lemme c'est-à-dire :

$$I_{geo}^{\tilde{M}}(\omega, h_{V'}^{f} 1_{\tilde{K}^{V'}}) = 0. \tag{2}$$

Le membre de gauche de (2) est une somme d'intégrales orbitales sur les éléments rationnels de $\tilde{M}(F)$. La somme est finie et plus précisément, l'ensemble de sommation est contenu dans un ensemble fini qui ne dépend que du support de $f_{V'}$. Ceci n'est pas évident à cause des fonctions $\epsilon_{\tilde{M},v}(f_v)$ qui apparaissent dans la définition de $h_{V'}^{f}$ et dont on ne contrôle pas le support. Mais l'argument est le même que dans le cas non tordu, cf. [11] p. 849. C'est-à-dire que (2) a été construit à partir de la formule de traces tordues de $\tilde{G}$ et des formules de traces stables de ses espaces endoscopiques. Un raisonnement par récurrence montre qu'il suffit que l'ensemble de sommation dans la formule de traces tordues de $\tilde{G}$ soit contenu dans un ensemble fini qui ne dépend que du support de $f_{V'}$. Or c'est l'assertion du théorème 3.3 de [4].

**Remarque** *On peut aussi montrer directement que, pour $v \in V'$ telle que $\mathcal{A}_{\tilde{M},v} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, l'ensemble de sommation de*

$$I_{geo}^{\tilde{M}}(\omega, \epsilon_{\tilde{M},v}(f_v) \otimes (\otimes_{v' \in V', v' \neq v} f_{v',\tilde{M}}) 1_{\tilde{K}^{V'}})$$

*est contenu dans un ensemble fini qui ne dépend que des supports des $f_{v',\tilde{M}}$ pour $v' \neq v$, donc aussi que des supports des $f_{v'}$ pour $v' \neq v$. Cela résulte facilement du fait que $\epsilon_{\tilde{M},v}(f_v)$ est cuspidale.*

En restreignant les supports des fonctions $f_{u_i}$ pour $i = 1, 2$, on peut alors sortir de l'ensemble de sommation les éléments qui ne sont pas dans la réunion sur $n \in Norm_G(\tilde{M})$ des classes de conjugaison stable de $n\gamma n^{-1}$. Il ne reste plus qu'une double somme sur $n \in Norm_G(\tilde{M})$ et sur les éléments stablement conjugués à $n\gamma n^{-1}$. Les fonctions intervenant étant invariantes par $Norm_G(\tilde{M})$, on obtient simplement la somme sur les éléments stablement conjugués à $\gamma$, multipliée par le nombre d'éléments de $Norm_G(\tilde{M})$. On écrit alors (2) en termes endoscopiques en considérant séparément chaque terme composant $h_{V'}^{f}$ (qui, on le rappelle, est une somme sur $v \in V'$). A cause des conditions en $u_i$ pour $i = 1$ et 2, on est sûr que les couples $\mathbf{M}'', \delta''$ intervenant dans la somme se localisent en au moins une de ces places en le localisé de $\mathbf{M}', \delta$. Ainsi soit $(\mathbf{M}'', \delta'') = (\mathbf{M}', \delta)$ soit il existe deux places dans $S$ où le caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{M}''}$ diffère du caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{M}'}$. Or pour contribuer la donnée endoscopique doit évidemment avoir son caractère qui coïncide avec celui de $\mathbf{M}'$ en toute place de $S$ (sauf éventuellement une) puisque qu'en toute place de $S$, le terme constant de $f_{V',\tilde{M}}$ a cette propriété de transformation. Contradiction, qui entraîne $(\mathbf{M}'',\delta'')=(\mathbf{M}',\delta)$.

Alors le terme de gauche de (2) n'est autre que $SI^{\mathbf{M}'}(\delta, h^f_{V'}\otimes 1_{\tilde{K}}^{\mathbf{M}',V'})$. Cela donne l'égalité

$$0 = xSI^{\mathbf{M}'}(\delta_{v_0},\epsilon_{\tilde{M}}^{\mathbf{M}'}(f_{v_0}))\prod_{v\in V';v\neq v_0} SI^{\mathbf{M}'}(\delta, f_{v,\tilde{M}}) + ySI^{\mathbf{M}'}(\delta_{v_0}, f_{v_0,\tilde{M}}),$$

où $x$ est un scalaire non nul et $y$ un autre scalaire (éventuellement nul) qui est la contribution des places $v\neq v_0$ faisant intervenir $\epsilon_{\tilde{M}}^{\mathbf{M}'}(f_v)$ D'où encore

$$SI^{\mathbf{M}'}(\delta_{v_0},\epsilon_{\tilde{M}}^{\mathbf{M}'}(f_{v_0}))=0 \tag{3}$$

si $SI^{\mathbf{M}'}(\delta_{v_0}, f_{v_0,\tilde{M}})=0$. Ainsi la première forme linéaire est proportionnelle à la seconde et cela termine la preuve de la première hypothèse clé.

### 7.7.2 Preuve de la deuxième hypothèse clé

La situation est encore globale. On dispose de $\tilde{G},\tilde{M},\underline{a}$. Pour toute donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'$ de $\tilde{M}$ et en toute place $v$, on a défini la fonction sur les éléments très réguliers de $\mathbf{M}'(F_v)$, $\epsilon_v(\mathbf{M}',\ )$. On sait que cette fonction est nulle sauf éventuellement sur les éléments elliptiques.

**Lemme** *Pour tout ensemble fini $V$ de places contenant $V_{ram}$, pour toute donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ de $\tilde{M}$ non ramifiée hors de $V$ et pour tout élément $\delta\in\mathbf{M}'(F)$ non ramifié hors de $V$ c'est-à-dire $\delta\in\tilde{K}_v^{M'}$ pour $v\notin V$ :*

$$\sum_{v\in V}\epsilon_v(\mathbf{M}',\delta_v)=0.$$

On écrit 7.2 : on considère des fonctions $f_V=\prod_{v\in V} f_v\in I(\tilde{G}(F_V),\omega)$, qui sont $\tilde{M}$ cuspidales en au moins deux places et qui sont nulles près des éléments isolés pour tout $v\in V$ s'il y en a et si $v$ est $p$-adique. On connaît donc la stabilisation spectrale pour ces fonctions et donc $I_{geo}^{\tilde{M}}(\omega, h_V^f 1_{\tilde{K}^{M,V}})=0$ (avec les notations de loc.cite). Par définition $h_V^f$ est une somme sur les places $v_0\in V$ des fonctions $h_{v_0}:=\epsilon_{\tilde{M},v_0}^{\tilde{G}}(f_{v_0})\prod_{v''\in V-\{v_0\}} f_{v'',\tilde{M}}$. On écrit

$I_{geo}^{\tilde{M}}$ sous forme endoscopique pour chacune de ces fonctions et on obtient une somme sur $v_0 \in V$ des termes

$$\sum_{\mathbf{M}'} i(\tilde{M}, \mathbf{M}') SI_{geo}^{\mathbf{M}'}(h_{v_0}^{\mathbf{M}'} 1_{\tilde{K}^{\mathbf{M}',V}}).$$

On calcule

$$h_{v_0}^{\mathbf{M}'} = (\epsilon_{\tilde{M},v_0}(f_{v_0}))^{\mathbf{M}'(F_{v_0})} \prod_{v \in V - \{v_0\}} (f_{v,\tilde{M}})^{\mathbf{M}'(F_v)} = \epsilon_{v_0}(\mathbf{M}', ) \prod_{v \in V} (f_{v,\tilde{M}})^{\mathbf{M}'(F_v)}.$$

Donc finalement on obtient :

$$\sum_{\mathbf{M}'} i(\tilde{M}, \mathbf{M}') SI_{geo}^{\mathbf{M}'}((\sum_{v \in V} \epsilon_v(\mathbf{M}', )) \prod_{v \in V} (f_{v,\tilde{M}})^{\mathbf{M}'(F_v)} 1_{\tilde{K}^{\mathbf{M}',V}}) = 0. \qquad (1)$$

Un terme indexé par une donnée $\mathbf{M}'$ est une somme sur les classes de conjugaisons stables coupant les points rationnels de $\mathbf{M}'$, et quand $f_V$ est fixée la somme est nécessairement finie puisque la fonction à laquelle on l'applique est à support compact. On fixe en toute place de $V$ un sous ensemble compact et on s'autorise encore à restreindre le support des fonctions en supposant qu'il se trouve à l'intérieur de ce compact. On fixe $\mathbf{M}'_0$ et $\delta \in \mathbf{M}'_0(F)$. On note $\delta_V$ la composante dans $V$ de $\delta$ ; on considère en fait la classe de conjugaison stable de $\delta_V$ sous l'action du normalisateur de $\tilde{M}$ dans $G$. En jouant sur les fonctions $f_V$, on peut restreindre la somme aux données endoscopiques elliptiques qui se localisent en toute place de $V$ en le localisé de $\mathbf{M}'_0$ ; on peut encore imposer que la somme sur les points rationnels d'une telle donnée ne porte que sur les classes de conjugaison stable qui en toute place de $V$ se localisent en la même classe que $\delta_V$. On obtient alors :

$$\left( \sum_{v \in V} \epsilon_v(\mathbf{M}', \delta_v) \right) \sum_{\mathbf{M}', \delta'} SI^{\mathbf{M}'}((\delta')^V, 1_{\tilde{K}^{\mathbf{M}',V}}) = 0,$$

où la somme porte sur les couples $\mathbf{M}', \delta'$ décrits. Mais les termes $SI^{\mathbf{M}'}((\delta')^V, 1_{\tilde{K}^{\mathbf{M}',V}})$ sont à valeurs positives ou nulles et au moins l'un d'eux est strictement positif d'après l'hypothèse de non-ramification de $\delta$ hors de $V$. Et on obtient le lemme.

# 8 Stabilisation de la formule des traces

## 8.1 Stabilisation spectrale

**Théorème** *Pour toute fonction $f \in \tilde{G}(\mathbb{A})$,*

$$I_{disc}(\omega, f) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI_{disc}^{\mathbf{G}'}(f^{\mathbf{G}'}). \qquad (1)$$

*où $\mathbf{G}'$ parcourt l'ensemble des données endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$. Ou encore, pour tout caractère infinitésimal $\nu$ de $G(F_\infty)$ et pour tout ensemble fini de places $V$ contenant les places archimédiennes et les places où $\tilde{G}$ est ramifié (c'est-à-dire $V_{ram}$) et pour tout caractère quasi-automorphe de l'algèbre de Hecke sphérique $c^V$ hors de $V$, on a l'égalité (dans le groupe de Grothendieck des $\omega$ représentations de $\tilde{G}(\mathbb{A})$)*

$$\pi_{disc,\nu}(c^V) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}') \sum_{\nu' \mapsto \nu; c'^V \mapsto c^V} transfert(\pi^{\mathbf{G}'}_{disc,st,\nu'}(c'^V)), \qquad (2)$$

*où ici $\mathbf{G}'$ parcourt l'ensemble des données endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$ non ramifiées hors de $V$ et relevantes*

On fixe un ensemble fini $V'$ de places contenant $V_{ram}$. On suppose en plus que $V' - V_{ram}$ contient au moins une place et on en fixe une $v_0$. On a démontré la stabilisation locale des intégrales orbitales pondérées. On considère

$$I^{\tilde{G}}_{geo}(\omega, f_{V'} 1_{\tilde{K}^{V'}}) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}') SI^{\mathbf{G}'}_{geo}(f^{\mathbf{G}'}_{V'} 1_{K^{G',V'}}). \qquad (3)$$

Il ne reste que les termes correspondant aux éléments exceptionnels (cf. la preuve de 7.2). Donc (3) est nulle pour toute fonction $f$ qui en $v_0$, est nulle près des éléments exceptionnels (s'il y en a). Ainsi pour une telle fonction on a l'égalité (1) du théorème. On a vérifié en 5.3.3 que cela entraine l'égalité des traces en (2) à condition de se limiter aux fonctions que l'on vient de préciser. On pose $V = V' - \{v_0\}$.

On fixe $f_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega)$, on note alors $f^{v_0}$ le produit de cette fonction avec $1_{\tilde{K}^{V'}}$. La forme linéaire

$$f_{v_0} \in I(\tilde{G}(F_{v_0}),\omega) \mapsto$$

$$tr\, \pi_\nu(c^{V'})(f_{v_0} f^{v_0}) - \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}') \sum_{\nu' \mapsto \nu; c'^{V'} \mapsto c^{V'}} \pi^{\mathbf{G}'}_{st,\nu'}(c'^{V'})(f^{\mathbf{G}'}_{v_0} f^{v_0,\mathbf{G}'})$$

est nulle sur l'intersection des noyaux des formes linéaires définies par les $\omega$-intégrales orbitales en les éléments isolés de $\tilde{G}(F_{v_0})$. On sait comme dans 3.4 que cette nullité se propage à toutes les fonctions $f_{v_0}$ dont la composante elliptique est nulle ; pour nous il suffit de l'avoir pour les fonctions $f_{v_0}$ dans l'algèbre de Hecke sphérique.

Malheureusement, il n'est pas vrai en toute généralité que de telles fonctions ont leur composante elliptique nulle. Comme ce bug apparaît déjà dans la stabilisation de la formule des traces non tordue, on explique ici comment faire fonctionner cette preuve dans le cas tordu et dans le cas non tordu. Dans le cas non tordu les éléments exceptionnels sont les produits d'éléments centraux et d'éléments unipotents et il y en a dans tous les cas (mais ils ne posent pas de problème si $G$ est un tore) et dans le cas tordu, il n'y en a que si $\omega = 1$ et $G$ vérifie les hypothèses du (iii) de 6.1 (pas tout à fait, le groupe n'est déployé qu'à une restriction des scalaires près, opération insignifiante).

On reprend les notations de 6.3, en particulier $\pi^V_{disc,\nu}$ et on suppose que $V$ est suffisamment grand pour que le (1) de loc.cite soit vérifié. On veut montrer que

$$tr\pi^V_{disc,\nu}(f_V 1_{\tilde{K}^V}) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}') tr\pi^{\mathbf{G}',V}_{\nu,st}(f_V^{\mathbf{G}'} 1_{\tilde{K}^V_{\mathbf{G}'}}). \tag{4}$$

On reprend la notation $\mathcal{C}(V)$ de 6.3 et pour $\xi \in \mathcal{C}(V)$ on note $\xi(V)$ la restriction de $\xi$ à $G_\sharp(F_V)$ et pour tout $v_0 \notin V$ on note $\xi(v_0)$ la restriction de $\xi$ à $G_\sharp(F_{v_0})$. On garde aussi les notations $f_V^{\xi(V)}$ de loc.cite. Le côté gauche de (4) est, d'après la proposition de 6.3

$$tr\pi^V_{disc,\nu}(f_V 1_{\tilde{K}^V}) = \sum_{\xi\in\mathcal{C}(V)} tr\pi^V_{disc,\nu}(f_V^{\xi(V)} 1_{\tilde{K}^V}). \tag{5}$$

Fixons $\xi \in \mathcal{C}(V)$ et avec 6.3 fixons $v_0$ tel que $\xi(v_0) = 1$. On sait alors (cf. 6.2) que $1^{\xi(v_0)}_{\tilde{K}_{v_0}}$ a sa composante elliptique nulle. D'après la proposition 6.3, on a :

$$tr\pi^V_{disc,\nu}(f_V^{\xi(V)} 1_{\tilde{K}^V}) = tr\pi^{V\cup\{v_0\}}_{disc,\nu}(f_V^{\xi(V)} 1^{\xi(v_0)}_{\tilde{K}_{v_0}} 1_{\tilde{K}^{V\cup\{v_0\}}}) \tag{6}$$

et on va pouvoir appliquer la stabilisation grâce à la propriété de $1^{\xi(v_0)}_{\tilde{K}_{v_0}}$. Il faut d'abord remarquer que

$$\sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}') tr\pi^{\mathbf{G}',V}_{\nu,st}((f_V^{\xi(V)})^{\mathbf{G}'} 1_{\tilde{K}^V_{\mathbf{G}'}}) =$$

$$\sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}') tr\pi^{\mathbf{G}',V\cup\{v_0\}}_{\nu,st}((f_V^{\xi(V)})^{\mathbf{G}'} (1^{\xi(v_0)}_{\tilde{K}_{v_0}})^{\mathbf{G}'} 1_{\tilde{K}^{V\cup\{v_0\}}_{\mathbf{G}'}}). \tag{7}$$

En effet le membre de gauche de (7) ne voit que les $\mathbf{G}'$ tel que le caractère $\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}$ soit dans $\mathcal{C}(V)$ : le caractère doit être non ramifié hors de $V$ car les données endoscopiques le sont et il doit être trivial sur l'image de $G(\mathbb{A}_F)$. De plus comme la fonction qui intervient est le transfert de $f_V^{\xi(V)}$, ce terme ne voit que les éléments de $\mathcal{C}(V)$ ayant pour à $G_\sharp(F_V)$ le caractère $\xi(V)$ (cf. 6.1). Ainsi pour de telles données endoscopiques en la place $v_0$ on a aussi le caractère $\xi(v_0)$ et donc, avec 6.1 $(1_{\tilde{K}_{v_0}}^{\xi(v_0)})^{\mathbf{G}'} = (1_{\tilde{K}_{v_0}})^{\mathbf{G}'}$ c'est-à-dire la fonction caractéristique de $\tilde{K}_{v_0}^{G'}$. D'où l'égalité. On a l'égalité du terme de droite de (6) avec le terme de droite de (7) puisque la composante elliptique de $1_{\tilde{K}_{v_0}}^{\xi(v_0)}$ est nulle. D'où

$$tr\pi_{disc,\nu}^{V}(f_V^{\xi(V)}1_{\tilde{K}^V}) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}')tr\pi_{\nu,st}^{\mathbf{G}',V}((f_V^{\xi(V)})^{\mathbf{G}'}1_{\tilde{K}_{\mathbf{G}'}^V}).$$

On a aussi

$$\sum_{\xi\in\mathcal{C}(V)}\sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}')tr\pi_{\nu,st}^{\mathbf{G}',V}((f_V^{\xi(V)})^{\mathbf{G}'}1_{\tilde{K}_{\mathbf{G}'}^V}) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}')tr\pi_{\nu,st}^{\mathbf{G}',V}(f_V^{\mathbf{G}'}1_{\tilde{K}_{\mathbf{G}'}^V}). \tag{8}$$

En effet, $f_V = \sum_{\xi'(V)} f_V^{\xi'(V)}$ où cette fois les $\xi'(V)$ parcourt tous les caractères de $G_\sharp(F_V)/G(F_V)$. Mais pour une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{G}'$ fixée, $tr\pi_{\nu,st}^{\mathbf{G}',V}((f_V^{\xi'(V)})^{\mathbf{G}'}1_{\tilde{K}_{\mathbf{G}'}^V}) = 0$ si $\xi'(V)$ n'est pas la restriction de $\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}$ à $G_\sharp(F_V)$ dont si $\xi'(V)$ n'est pas de la forme $\xi(V)$ avec $\xi \in \mathcal{C}(V)$. D'où (8). Puisque le terme de droite de (6) vaut le terme de gauche de (8), on obtient l'égalité du terme de gauche de (6) avec le terme de droite de (8) ce qui est (4) et termine la preuve dans le cas tordu comme dans le cas non tordu.

## 8.2 Une décomposition parfois plus fine de l'égalité de stabilisation

On généralise un peu les constructions de 6.1 pour inclure le cas où $\omega$ n'est pas trivial. On ne s'intéresse qu'au cas global. On fixe $\xi$ un caractère automorphe de $G_\sharp(\mathbb{A}_F)$. On suppose que la restriction de $\xi$ à l'image de $G(\mathbb{A}_F)$ est $\omega$. On fixe $V$ un ensemble de places de $F$ (contenant $V_{ram}$) tel que

$$G_\sharp(\mathbb{A}_F) = G_\sharp(F)G_\sharp(F_V)K_\sharp^V,$$

où $K_\sharp^V$ est un compact maximal hyperspecial hors de $V$. On reprend la notation $\pi_{disc,\nu}^{\tilde{G}}(c^V)$ des paragraphes précédent. On peut définir la distribution sur $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$,

$$f_V \mapsto tr\,\pi_{disc,\nu}^{\tilde{G}}(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V}).$$

Soit $g_{\sharp,V} \in G_\sharp(F_V)$, cet élément agit par conjugaison sur $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$ et donc sur la distribution. On suppose en plus que $g_{\sharp,V} \in (G_\sharp(F)K_\sharp^V \cap G(F_V))$. Un tel élément laisse invariante cette distribution. Et si $g_{\sharp,V}$ est dans l'image de

$G(F_V)$, l'action se fait via le caractère $\omega^{-1}$. On suppose que le caractère $\xi$ est non ramifié hors de $V$. La distribution

$$f_V \mapsto \xi(g_{\sharp,V}) tr\, \pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V)({}^{g_{\sharp,V}} f_V 1_{\tilde{K}^V})$$

ne dépend que de l'image de $g_{\sharp,V}$ dans le groupe fini

$$H := G_\sharp(F_V)/G(F_V)(G_\sharp(F) K_\sharp^V \cap G(F_V)).$$

On la note $\xi(g_{\sharp,V}) tr\, {}^{g_{\sharp,V}} \pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V)$. Et on définit la distribution

$$tr\, \pi^{\tilde{G},\xi}_{disc,\nu}(c^V) := |H|^{-1} \sum_{g_{\sharp,V} \in H} \xi(g_{\sharp,V}) tr\, {}^{g_{\sharp,V}} \pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V).$$

**Théorème** *Avec $\xi$ et $V$ satisfaisant les hypothèses précédentes, c'est-à-dire que $V$ est suffisamment grand et $\xi$ est non ramifié hors de $V$, on a pour tout élément $f_V \in I(\tilde{G}(F_V), \omega)$*

$$tr\, \pi^{\tilde{G},\xi}_{disc,\nu}(c^V)(f_V 1_{\tilde{K}^V}) = \sum_{\mathbf{G}'; \omega_\sharp^{\mathbf{G}'} = \xi} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') tr\, \pi^{\mathbf{G}'}_{\nu,st}(c^V)(f_V^{\mathbf{G}'} 1_{\tilde{K}^V_{G'}}),$$

*où l'on a regroupé dans le terme de droite la somme sur les $\nu'$ et les $c'^V$ de 8.*

La preuve est élémentaire : le terme de gauche est la valeur de $tr\, \pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(f_V^\xi 1_{\tilde{K}^V})$ où la fonction $f^\xi$ vaut, après un choix de représentant de $H$ dans $G_\sharp(F_V)$

$$f_V^\xi = |H|^{-1} \sum_{g_{\sharp,V}} \xi(g_{\sharp,V})\, {}^{g_{\sharp,V}} f_V.$$

On applique la stabilisation spectrale à cette fonction, on obtient un analogue du terme de droite en généralisant simplement le (i) de 6.1 où la somme porte sur les données endoscopiques elliptiques non ramifiées hors de $V$ et dont le caractère associé de $G_\sharp(\mathbb{A}_F)$ coïncide avec $\xi$ sur $G_\sharp(F_V)$. Mais comme $V$ est suffisamment grand cela force l'égalité de ce caractère avec $\xi$.

## 8.3 Un exemple, le cas de $GL(n)$ tordu

On va donner l'exemple de $GL(n)$ tordu par l'automorphisme $g \mapsto {}^t g^{-1}$. Dans ce cas, $\pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V)$ est une représentation irréductible. Le groupe $G_\sharp$ vaut $GL(n)/\{\pm 1\}$. Soit $v$ une place de $F$ et $z$ un élément du centre de $GL(n, F_v)$. On note $E$ l'extension au plus quadratique de $F_v$ tel que $z$ y admette une racine carré, notée $z^{1/2}$. L'image de $z^{1/2}$ dans $G_\sharp(E)$ est en fait dans $G_\sharp(F_v)$. Et on vérifie aisément que $G_\sharp(F_v)$ est engendré par l'image de $GL(n,F_v)$ et par ces éléments. Pour un caractère quadratique $\mu$ du centre de $GL(n,F_v)$ et un caractère $\xi$ de $G_\sharp(F_v)$ trivial sur $GL(n,F_v)$, on dit que $\xi$ et $\mu$ se correspondent si et seulement si $\xi(z^{1/2})=\mu(z)$ pour tout élément $z$ du centre de $GL(n,F_v)$. Pour des caractères automorphes $\mu$ du centre de $GL(n,\mathbb{A}_F)$ et $\xi$ de $G_\sharp(\mathbb{A}_F)$ vérifiant les mêmes conditions, on dit qu'ils se correspondent si leurs composantes locales se correspondent en toute place. On note $\xi\simeq\mu$ cette correspondance.

**Proposition** *Avec les notations du paragraphe précédent, la distribution* $tr\,\pi^{\tilde{G},\xi}_{disc,\nu}(c^V)$ *est nulle sauf si* $\xi$ *correspond au caractère central de la représentation irréductible de* $\pi^{\tilde{G},\xi}_{disc,\nu}(c^V)$. *Et dans ce dernier cas,* $tr\,\pi^{\tilde{G},\xi}_{disc,\nu}(c^V)= tr\,\pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V)$.

**Corollaire** *On note* $\omega_{(c^V)}$ *le caractère central de* $\pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V)$ *et la représentation* $\pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V)$ *est un transfert de*

$$\sum_{\mathbf{G}';\omega_\sharp^{\mathbf{G}'}\simeq\omega_{(c^V)}} i(\tilde{G},\mathbf{G}')\pi^{\mathbf{G}'}_{\nu,st}(c^V). \tag{1}$$

Cela n'est qu'un exemple car [12] donne beaucoup plus de précisions. Toutefois, par exemple si $n$ est impair et si $\pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V)$ est de carré intégrable (par exemple cuspidale) cela permet de démontrer assez vite (uniquement avec le paragraphe 3 de [12]) que la somme à droite n'a qu'un terme. Si $n$ est pair, sous les mêmes hypothèses pour $\pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c_V)$, si le caractère central de cette représentation est non trivial, ce caractère central détermine une extension quadratique de $F$ et dans la somme on ne trouve encore qu'une donnée endoscopique elliptique, celle correspondant au groupe orthogonal pair quasidéployé non déployé qui se déploie dans l'extension de $F$ à $E$. Si le caractère central est trivial, on ne peut pas distinguer par cette méthode une donnée endoscopique avec le groupe orthogonal impair $SO(n+1)$ de la donnée endoscopique avec le groupe orthogonal pair déployé et on n'évite pas l'utilisation des fonctions $L$ partielles et les derniers chapitres de [12].

## 8.4 Une remarque sur la finitude de $\pi_{disc,\nu}(c^V)$ et son calcul pour les groupes classiques

Dans le cas où $G=GL(n,F)$ et $\tilde{G}$ est l'espace tordu considéré en 8.3, Arthur a démontré en [12] en toute généralité que pour $\mathbf{G}'$ n'importe laquelle des données endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$, les représentations $\pi^{G'}_{disc,\nu'}(c^{G',V})$ sont de longueur finie (ici l'indice *st* est remplacé par *disc*). On peut renforcer cette propriété de finitude en

**Remarque** *Soit* $\mathbf{G}'$ *une donnée endoscopique elliptique de* $\tilde{G}$*. Alors pour tout* $\nu, c^V$ *comme ci-dessus, la représentation automorphe de* $G'(\mathbb{A}_F)$*,*

$$\oplus_{\nu'\mapsto\nu, c^{G',V}\mapsto c^V}\pi^{G'}_{disc,\nu'}(c^{G',V})$$

*est de longueur finie. Ceci est même vrai pour* $c^V$ *fixé et en n'imposant rien au caractère infinitésimal. C'est-à-dire avec des notations évidentes : la représentation* $\oplus_{c^{G',V}\mapsto c^V}\pi^{G'}_{disc}(c^{G',V})$ *est de longueur finie.*

Cela résulte évidemment des résultats de [12]. Arthur montre entre autre que toute composante locale d'une des composantes irréductibles d'une des représentations $\pi^{G'}_{disc,\nu'}(c^{G',V})$ en une place $v \in V$ est nécessairement dans un paquet de représentations qui ne dépend que de la composante locale en la place $v$ de $\pi^{\tilde{G}}_{disc,\nu}(c^V)$ (qui est une représentation irréductible) et qui est caractérisé par des relations de transfert (cf. [12]). En particulier il n'y a qu'un nombre fini de possibilités. L'ensemble des représentations automorphes de carré intégrable de $G'(\mathbb{A}_F)$ qui dans $V$ sont l'une des représentations déterminées et qui sont non ramifiées hors de $V$ sont en nombre fini (on rappelle que $V$ contient les places archimédiennes et que le caractère infinitésimal est donc fixé dans un ensemble fini). D'où la finitude ; la toute petite difficulté qu'il a fallu contourner est qu'il y a en général un nombre infini de $c^{G',V}$ qui se transfèrent en $c^V$ si $G'$ est un produit de groupes classiques l'un étant un groupe special orthogonal pair. Et on vient de voir que seul un nombre fini de $c^{G',V}$ intervient vraiment dans l'ensemble des formes automorphes de carré intégrable, ceci est bien sûr dans [12].

**Remarque** *La représentation* $\oplus_{c^{G',V}\mapsto c^V}\pi^{G'}_{st}(c^{G',V})$ *est aussi de longueur finie.*

C'est la même démonstration.

Le même résultat de finitude est vrai d'après [22] si $E/F$ est une extension quadratique, $G = GL(n,E)$ et $\tilde{G}$ est défini par l'automorphisme $g \mapsto {}^t\overline{g}^{-1}$ où $\overline{g}$ est la conjugaison induite par l'extension $E$ de $F$.

Soit $G$ une forme intérieure d'un groupe classique, c'est-à-dire que le groupe quasi-déployé correspondant est un groupe spécial orthogonal, symplectique ou unitaire. Les résultats d'Arthur seront très certainement généralisés à terme à un tel groupe mais on peut déjà avoir une description qualitative des représentations $\pi^G_{disc,\nu}(c^V)$.

**Remarque** *Les représentations $\pi^G_{disc}(c^V)$ sont de longueur finie*

On applique (1) de 8.1 avec $\tilde{G} = G$. Il n'y a qu'un nombre fini de termes dans le membre de droite de (1) : en effet il n'y a qu'un nombre fini de données endoscopiques elliptiques non ramifiées hors de $V$. Fixons l'un de ces groupes, $\mathbf{G'}$ et $c^{G',V}$ un système de caractères de Hecke qui par transfert non ramifié s'envoie sur $c^V$ et tel que pour au moins un caractère infinitésimal $\nu'$, $\pi^{G'}_{disc,\nu'}(c^{G',V})$ ne soit pas nul. Alors $G'$ est un produit de groupes classiques et il existe un entier $m = m_1 + m_2$ (dépendant de $G'$) et une représentation automorphe irréductible de $GL(m_1, \mathbb{A}_F) \times GL(m_2, \mathbb{A}_F)$ qui est une induite de représentations automorphes de carré intégrable et qui en toutes places hors de $V$ a pour caractères de Hecke le transfert de $c^{G',V}$. Ainsi la représentation de $GL(m_1 + m_2, \mathbb{A}_F)$ obtenue par induction (ou série d'Eisenstein) est une induite de représentations de carré intégrable avec hors de $V$ un système de caractères de Hecke qui s'obtient directement par transfert non ramifié à partir de $c^V$. Ainsi il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour cette représentation de $GL(m_1 + m_2, \mathbb{A}_F)$ et donc aussi pour les représentations de $GL(m_i, \mathbb{A}_F)$ pour $i = 1, 2$. Avec la remarque précédente le membre de droite de (1) est de longueur finie, son transfert est donc certainement de longueur finie.

**Question :** *Soit $G$ un groupe réductif défini sur $F$, et $V, c^V$ comme précédemment. Soit $\nu$ un caractère infinitésimal. Il est naturel de se demander si $\pi^G_{disc,\nu}(c^V)$ est de longueur finie. Il est même vraisemblable que pour $c^V$ fixé, la somme $\oplus_\nu \pi^G_{disc,\nu}(c^V)$ est de longueur finie*

## 8.5 Vérification de toutes les hypothèses de récurrence, récapitulatif

Pour arriver à la stabilisation de la formule des traces, nous avons fait un certain nombre d'hypothèses de récurrence et il faut donc les vérifier pour $\tilde{G}$.

On avait récapitulé les hypothèses en 7.1 ; il y a des hypothèses locales géométriques. Pour $\tilde{G}$ leurs vérification est faite en 7.7. Disons tout de suite que nous n'avions pas d'hypothèses locales spectrales car on les avait résolues en 4.5.

Et il y a les hypothèses de récurrence globales ; l'hypothèse spectrale de récurrence est le théorème 8 que l'on vient de démontrer. Il reste l'hypothèse géométrique c'est-à-dire que pour tout $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple de $\tilde{G}(F_V)$ (notations de [21] 5.3 et 5.4)

$$A^{\tilde{G}}(\mathcal{O},V)=A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{O},V). \tag{1}$$

Des réductions ont été faites en [33] 3.5 ramenant la preuve de cette assertion aux éléments exceptionnels (cf. 3.4), cette réduction a servi pour la preuve de la stabilisation spectrale.

La distribution $f_V\mapsto I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(\mathcal{O},V),f_V1_{\tilde{K}^V})$ est une combinaison linéaire d'intégrales orbitales d'après le (ii) de la proposition de 2.3 dans [21] associées à des éléments $u\gamma$ (cf. loc. cite) où $u$ est un élément unipotent du centralisateur de $\gamma$ et où $\gamma$ est un élément de $\mathcal{O}$. Il en est de même de la distribution construite avec $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{O},V)$ par la définition de [21] 5.4 (cf. le début de ce paragraphe). Rappelons que quand $\gamma,u$ varient avec les propriétés précédentes, ces intégrales orbitales sont des distributions linéairement indépendantes. Or on sait déjà que $I^{\tilde{G}}(\omega,f_V1_{\tilde{K}^V})-I^{\tilde{G},\mathcal{E}}(f_V1_{\tilde{K}^V})=0$ pour tout $f_V\in I(\tilde{G}(F_V),\omega)$ puisque l'on a démontré la stabilisation spectrale (en 5.9 et 8.1). Avec les réductions déjà connues, ceci est la somme des distributions

$$I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(\mathcal{O},V),f_V1_{\tilde{K}^V})-I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{O},V),f_V1_{\tilde{K}^V})$$

quand $\mathcal{O}$ varie (cf. [21] 6.11). Ainsi chacune de ces distributions doit être nulle par indépendance linéaire. Cela termine la preuve.

## 8.6 Stabilisation géométrique

Le théorème de [21] 5.9 est démontré :

$$I^{\tilde{G}}_{geo}(\omega,f)=\sum_{\mathbf{G}'}i(\tilde{G},\mathbf{G}')SI^{\mathbf{G}'}_{geo}(f^{\mathbf{G}'}).$$

La démonstration a été donnée en [21] 6.11 sous les hypothèses que l'on a vérifiées en 8.5 mais bien évidemment c'est aussi un corollaire de 8.1.

## 8.7 Stabilisation de la formule des traces locales

### 8.7.1 La partie elliptique

Ici $F$ est un corps local ; pour simplifier les formules on suppose que $A_{\tilde{G}}=1$, sinon il faut intégrer sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$. Pour toute donnée endoscopique $\mathbf{G}'$

de $\tilde{G}, \omega$, on fixe une base orthonormale des caractères elliptiques stables de $G'$, notée $\mathcal{B}_{st}^{G'}$. Pour $\tau$ une représentation elliptique, on note $i'(\tau)$ son produit scalaire elliptique, il est calculé dans le (ii) du théorème de [27] 7.3.

**Théorème** *Pour tout couple de fonctions $f_1, f_2 \in I(\tilde{G}, \omega)$, on a l'égalité*

$$\sum_{\tau \in Rep_{ell}(\tilde{G})} i'(\tau)\overline{tr\,\tau(f_1)}tr\,\tau(f_2) = \sum_{\mathbf{G'}} i(\tilde{G}, \mathbf{G'}) \sum_{\phi^{G'} \in \mathcal{B}_{st}^{G'}} \overline{tr\,\phi^{G'}(f_1^{\mathbf{G'}})}tr\,\phi^{G'}(f_2^{\mathbf{G'}}).$$

Ce théorème est une traduction spectrale de la proposition de [28] 4.17 : en effet supposons d'abord que $f_1$ et $f_2$ soient des fonctions cuspidales. Alors le côté gauche s'interprète comme le produit scalaire de $f_1$ et $f_2$ pour le produit scalaire elliptique grâce au fait que la norme d'une représentation elliptique $\tau$ est précisément $i'(\tau)$ par définition (cf. [27] 7.3). Cette égalité est donc une égalité de transfert entre représentations elliptiques qui est vraie pour les fonctions cuspidales. Elle est donc vraie pour toute fonction d'après le résultat principal de [18] pour les corps p-adiques et [31] 3.2 pour les corps archimédiens.

### 8.7.2 La partie discrète non elliptique

On rappelle que l'on a montré en 3.3.6 qui s'appuie sur les paragraphes précédents, que l'on pouvait décomposer $I^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2)$ et les analogues stables pour les groupes endoscopiques en une somme sur les espaces de Levi :

$$I^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{M}} I^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \omega, f_1, f_2),$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison d'espace de Levi de $\tilde{G}$ et où

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \omega, f_1, f_2) = \sum_{\tau} i'(\tau)\overline{tr\,\tau(f_{1,\tilde{M}})}tr\,\tau(f_{2,\tilde{M}}),$$

où la somme porte sur les représentations elliptiques $\tau$ de $\tilde{M}$ dont l'induite est une représentation discrète de $\tilde{G}$ modulo conjugaison sous le normalisateur de $\tilde{M}$ dans $G$ et où $\iota'(\tau)$ est le coefficient intervenant dans loc.cite.

On a aussi montré en 3.3.7 que l'on avait aussi une décomposition pour la variante stable de cette distribution bien que l'écriture soit moins jolie et surtout moins explicite. Notons $SI^{\mathbf{G'}}(\mathbf{M'}, f_1', f_2')$ la distribution correspondant.

**Proposition** *Pour tout $\tilde{M}$ espace de Levi de $\tilde{G}$ et pour tout couple de fonctions $f_1, f_2 \in I(\tilde{G}, \omega)$, on a l'égalité :*

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \omega, f_1, f_2) = \sum_{\mathbf{M}'} i(\tilde{M}, \mathbf{M}') \sum_{\mathbf{G}'} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI^{\mathbf{G}'}(\mathbf{M}', f_1^{\mathbf{G}'}, f_2^{\mathbf{G}'}),$$

*où la somme sur $\mathbf{M}'$ est la somme sur les données endoscopiques elliptiques relevantes de $\tilde{M}$ et où la somme sur $\mathbf{G}'$, quand $\mathbf{M}'$ est fixé est la somme sur les groupes endoscopiques elliptiques de $\tilde{G}$ contenant $M'$ comme sous groupe de Levi.*

Les distributions sont des combinaisons linéaires de traces de représentations induites à partir de représentations elliptiques de $\tilde{M}$ pour le côté gauche et $\mathbf{M}'$ pour le côté droit. Elles s'expriment donc en fonction des termes constants $f_{1,\tilde{M}}, f_{2,\tilde{M}}$ et de leurs transferts à $\mathbf{M}'$. Il suffit donc de montrer cette égalité pour $f_1$ et $f_2$ des fonctions $\tilde{M}$-cuspidales. Puisqu'on a démontré la stabilisation des intégrales orbitales pondérées, on sait stabiliser la formule des traces locale ; on a donc l'égalité cherchée en sommant sur les espaces de Levi mais avec l'hypothèse sur $f_1$ et $f_2$ il suffit de sommer sur les espaces de Levi contenant $\tilde{M}$ et on obtient la proposition avec une récurrence facile qui est initialisée par le cas elliptique du paragraphe précédent.

# 9 Preuve de 7.4

Suivant Kottwitz-Rogawski, on peut choisir un corps de nombres $F$, des données, $G, \tilde{G}, \tilde{M}$ sur $F$ et une place $v_0$ de $F$ de sorte que $F_{v_0} \simeq F_0$ et que, modulo cet isomorphisme, les données $G, \tilde{G}, \tilde{M}$ localisées en $v_0$ soient isomorphes à $G_0, \tilde{G}_0, \tilde{M}_0$. On peut de plus supposer que $\tilde{M}(F)$ soit dense dans $\tilde{M}(F_0)$ et que $A_{\tilde{M}_0}$ soit le localisé de $A_{\tilde{M}}$. L'ensemble des $\delta_0 \in \mathbf{M}'_0(F_0)_{ell}$ qui correspondent à la classe de conjugaison stable d'un élément de $\tilde{M}(F)$ est dense dans $\mathbf{M}'_0(F_0)^{rel}_{ell}$ (on désigne ainsi l'ensemble des éléments qui se transfèrent à $\tilde{M}_0(F_0)$). On note $D$ cet ensemble. On fixe $\delta_0 \in D$ et $\gamma \in \tilde{M}(F)$ dont la classe de conjugaison stable correspond à $\delta_0$. On note $\tilde{T}$ le tore tordu maximal de $\tilde{M}$ contenant $\gamma$. Il est nécessairement elliptique.

Fixons une extension galoisienne $E_0$ de $F_0$ finie que l'on précisera plus loin telle que le tore localisé $T_{v_0}$ se déploie sur $E_0$. On peut choisir une extension galoisienne finie $E'/F$, une place $v'_0$ de $E'$ au-dessus de $v_0$ de sorte que $T$ se déploie sur $E'$ et $E'_{v'_0}$ contienne $E_0$ via l'isomorphisme $F_0 \simeq F_{v_0}$. Le groupe $Gal(E'_{v'_0}/F_0)$ s'identifie au fixateur de $v'_0$ dans $Gal(E'/F)$. On remplace $F$

par le corps des points fixes de ce fixateur et $v_0$ par la place $v_0'$ restreinte à ce sous-corps. Alors $Gal(E'_{v_0'}/F_0) = Gal(E'/F)$. On note $E$ l'extension intermédiaire $F \subset E \subset E'$ telle que $Gal(E'/E) = Gal(E'_{v_0'}/E_0)$. Alors $E/F$ est galoisienne, $Gal(E/F) = Gal(E_0/F_0)$ et les actions galoisiennes globale et locale en $v_0$ coïncident sur $X_*(T)$. Donc $T$ est déployé sur $E$ ce qui entraîne que $G$ et $M$ le sont aussi. Puisque $\tilde{T}_{v_0}$ est elliptique dans $\tilde{M}_{v_0}$ et que le plus grand tore déployé $A_{\tilde{M}}$ central dans $\tilde{M}$ a pour localisé en $v_0$ le plus grand tore déployé $A_{\tilde{M}_{v_0}}$ dans $\tilde{M}_{v_0}$, $\tilde{T}$ est elliptique dans $\tilde{M}$.

**Remarque** *On peut supposer que ces dernières propriétés sont aussi vérifiées pour deux autres places $u_1, u_2$ de $F$.*

Il suffit pour cela de fixer une extension galoisienne finie $K/F$ telle que $v_0$ soit totalement décomposée dans $K$ avec $[K : F] \geq 3$. On remplace $F$ par $K$ et $E$ par $EK$ qui est nécessairement un corps. On remplace $v_0$ par une place au-dessus du $v_0$ initial et on choisit pour $u_1, u_2$ deux autres places au-dessus du $v_0$ initial.

**Globalisation du caractère $\omega_0$ et de l'élément $\delta_0$.**

On commence par quelques rappels sur la classe de conjugaison stable de $\gamma$ dans $\tilde{M}_0(F_0)$. Pour ces rappels on suppose que $F_0 \neq \mathbb{R}$, le cas $F_0 = \mathbb{R}$ se traite de la même façon mais avec des $K$-espaces.

La classe de conjugaison stable de $\gamma$ est $\mathcal{C}^{st}(\gamma) := \{\gamma' \in \tilde{M}_0(F_0); \exists m \in M_0(\overline{F}_0); \gamma' = m^{-1}\gamma m\}$. Si $\gamma' = m^{-1}\gamma m$ la condition d'être dans $\tilde{M}_0(F_0)$ se traduit exactement par le fait que pour tout $\sigma \in Gal(\overline{F}_0/F_0)$, $m\sigma(m)^{-1} \in T^\theta$. On pose :

$$\mathcal{Y} := \{m \in M_0(\overline{F}_0); \forall \sigma \in Gal(\overline{F}_0/F_0), m\sigma(m)^{-1} \in T^\theta\}.$$

On note $\pi$ la projection naturelle de $M_{0,SC}$ dans $M_0$. On a une bijection :

$$T^\theta \backslash \mathcal{Y}/\pi(M_{0,SC}(F_0)) \simeq H^{1,0}(\Gamma_{F_0}; T_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)T),$$

où $T_{sc}$ est l'image réciproque de $T$ dans $M_{0,SC}$.

Rappel de la construction : pour $m \in \mathcal{Y}$, on écrit $m = z\pi(m_{sc})$ avec $z \in Z(M_0)(\overline{F}_0)$, $m_{sc} \in M_{0,SC}(\overline{F}_0)$. Pour $\sigma \in \Gamma_{F_0}$, on pose $u(\sigma) = m_{sc}\sigma(m_{sc})^{-1}$. On voit que $u(\sigma) \in T_{sc}$ et que le couple $(u, (1-\theta)z)$ définit un élément de $H^{1,0}(\Gamma_{F_0}; T_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)T)$.

Notons $\mathcal{K}_{F_0}(T,\omega_0)$ l'ensemble des caractères de $H^{1,0}(\Gamma_{F_0};T_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)T)$ qui via la bijection ci-dessus, deviennent des fonctions sur $T^\theta\backslash\mathcal{Y}$ qui se transforment selon le caractère $\omega_0$ par multiplication à droite par $M_0(F_0)$.

D'après la théorie générale, l'ensemble des couples $(\mathbf{M}'_1,\delta_1)$ où $\mathbf{M}'_1$ est une donnée endoscopique elliptique de $(M_0,\tilde{M}_0,\underline{a}_0)$ et $\delta_1$ est un élément de $\mathbf{M}'_1(F_0)$ correspondant à $\gamma$, couples pris à équivalence près, est naturellement en bijection avec $\mathcal{K}_{F_0}(T,\omega_0)$. En particulier, le couple fixé $(\mathbf{M}'_0,\delta_0)$ correspond à un élément de $\mathcal{K}_{F_0}(T,\omega_0)$, que l'on note simplement $\delta_0$.

On a défini le groupe $M_{0,ab}(F_0) := \pi(M_{0,SC}(F_0))\backslash M_0(F_0) \simeq H^{1,0}(\Gamma_{F_0};T_{sc}\to T)$. On a le diagramme commutatif (cf [28], 1.12) :

$$\begin{array}{ccc} T_{sc} & \longrightarrow & T \\ \Big\downarrow = & & \Big\downarrow (1-\theta) \\ T_{sc} & \xrightarrow{(1-\theta)} & (1-\theta)T. \end{array}$$

D'où un homomorphisme

$$H^{1,0}(\Gamma_{F_0};T_{sc}\to T) \to H^{1,0}(\Gamma_{F_0};T_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)T). \qquad (*)$$

On voit que l'action par multiplication à droite de $M_{0,ab}(F_0)$ sur $T^\theta\backslash\mathcal{Y}/\pi(M_{0,SC}(F_0))$ correspond à la multiplication par $H^{1,0}(\Gamma_{F_0};T_{sc}\to T)$ via l'homomorphisme ci-dessus. Donc $\mathcal{K}_{F_0}(T,\omega_0)$ est l'ensemble des caractères de $H^{1,0}(\Gamma_{F_0};T_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)T)$ qui poussés par l'homomorphisme ci-dessus deviennent le caractère $\omega_0$ de $H^{1,0}(\Gamma_{F_0};T_{sc}\to T)$. Les groupes de caractères des deux groupes de (*) sont les deux derniers groupes de la suite exacte :

$$H^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T})/Im\,\hat{T}^{\Gamma_{F_0},0} \to H^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{ad})/Im\,\hat{T}_{ad}^{\Gamma_{F_0},0}$$
$$\to H^{1,0}(W_{F_0},\hat{T}\to\hat{T}_{ad}) \simeq H^1(W_{F_0};Z(\hat{M})),$$

où ici $\hat{T}_{ad} = \hat{T}/Z(\hat{M})$. Donc $\delta_0$ s'interprète comme un élément du groupe central qui s'envoie sur l'élément $\underline{a}_0$ du dernier groupe.

On s'est placé dans l'espace ambiant $\tilde{M}_0$. On peut faire la même construction en remplaçant $\tilde{M}_0$ par $\tilde{G}_0$. Pour préciser les notations avec $\tilde{M}_0$, on a l'ensemble $\mathcal{K}_{F_0}^{\tilde{M}_0}(T,\omega_0)$ et avec $\tilde{G}_0$, l'ensemble $\mathcal{K}_{F_0}^{\tilde{G}_0}(T,\omega_0)$. En fait ces ensembles sont identiques : ceci est bien connu mais nous allons le revérifier. Du côté dual, ce qui change est le tore $\hat{T}_{ad}$ qui dans un cas est $\hat{T}/Z(\hat{M})$ et dans l'autre est $\hat{T}/Z(\hat{G})$. Pour vérifier l'égalité annoncée, on montre :

**Lemme** *(i) L'homorphisme*

$$H^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}/Z(\hat{G}))/Im\,(\hat{T}/Z(\hat{G}))^{\Gamma_{F_0},0}\to$$

$$H^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}/Z(\hat{M}))/Im\,(\hat{T}/Z(\hat{M}))^{\Gamma_{F_0},0}$$

*est injectif.*

*(ii) Un élément de* $H^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}/Z(\hat{M}))/Im\,(\hat{T}/Z(\hat{M}))^{\Gamma_{F_0},0}$ *qui s'envoie sur* $\underline{a}_0$ *est dans l'image de l'homorphisme de (i).*

Remarquons que $(\hat{T}/Z(\hat{G}))^{\Gamma_{F_0},0}$ et $(\hat{T}/Z(\hat{M}))^{\Gamma_{F_0},0}$ sont les images naturelles du même groupe $\hat{T}^{\Gamma_{F_0},0}$. Donc le noyau de l'homomorphisme écrit dans l'énoncé de (i) est la projection du noyau de l'homomorphisme

$$H^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}/Z(\hat{G}))\to H^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}/Z(\hat{M})).\quad(1)$$

On a la suite exacte de tores complexes :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z(\hat{M})/Z(\hat{G}) \arrow[r] & \hat{T}/Z(\hat{G}) \arrow[r] & \hat{T}/Z(\hat{M}) \arrow[r] & 1\,. \\
 & 1 \arrow[r] \arrow[u] & \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0} \arrow[r, "="] \arrow[u] & \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0} \arrow[r] \arrow[u] & 1
\end{tikzcd}$$

Le noyau de (1) est donc l'image de

$$(Z(\hat{M})/Z(\hat{G}))^{\Gamma_{F_0}}=H^0(W_{F_0};Z(\hat{M})/Z(\hat{G}))\to$$

$$H^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}/Z(\hat{G})).$$

Or $Z(\hat{M})/Z(\hat{G})$ est un tore induit ce qui entraîne que $(Z(\hat{M})/Z(\hat{G}))^{\Gamma_{F_0}}$ est connexe et son image tombe dans l'image de $(\hat{T}/Z(\hat{G}))^{\Gamma_{F_0},0}$. Cela prouve (i).

Considérons un cocycle $(u,t)\in Z^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}/Z(\hat{M}))$ qui s'envoie sur $\underline{a}_0$ dans $H^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}/Z(\hat{M}))$.

Cette image est $((1-\hat{\theta})u,t)$. Représentons $\underline{a}_0$ par un cocycle à valeurs dans $Z(\hat{G})$ en revenant à $\underline{a}_0\in H^1(W_{F_0},Z(\hat{G}))$. Alors $((1-\hat{\theta})u,t)$ est cohomologue à $(\underline{a}_0,1)$. Il existe donc $x\in\hat{T}$ tel que $(1-\hat{\theta})u(\sigma)=a_0(\sigma)x^{-1}\sigma(x)$ pour tout $\sigma\in W_{F_0}$ et $t=x$ modulo $Z(\hat{M})$. Le couple $(u,x_{ad})$, où $x_{ad}$ est l'image de $x$ dans $\hat{T}/Z(\hat{G})$ est un cocycle dans $Z^{1,0}(W_{F_0};\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}/Z(\hat{G}))$. On voit que son image par l'homomorphisme du (i) est le cocycle de départ $(u,t)$. Cela prouve (ii).

On peut donc identifier $\delta_0$ à un élément de

$$H^{1,0}(W_{F_0}; \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}/Z(\hat{G}))/Im\,(\hat{T}/Z(\hat{G}))^{\Gamma_{F_0},0}$$

qui s'envoie sur $\underline{a}_0$ dans $H^{1,0}(W_{F_0}, \hat{T} \to \hat{T}/Z(\hat{G}))$. On le représente par un cocycle $(u_0, t)$. Soit $K_0/F_0$ l'extension galoisienne qui déploie $T$. La restriction de $u_0$ à $W_{K_0}$ est un homomorphisme $W_{K_0} \to \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ qui vérifie $(1-\hat{\theta})u_0(\sigma)_{ad} = \sigma(t)t^{-1} = 1$ pour tout $\sigma \in W_{K_0}$ (l'indice $ad$ désigne la projection dans $\hat{T}_{ad} = \hat{T}/Z(\hat{G})$). Or l'ensemble des éléments $x \in \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ tels que $(1-\hat{\theta})(x)_{ad} = 1$ est $\hat{U} := Z(\hat{G})\hat{T}^{\hat{\theta},0}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ qui n'est pas connexe en général. Si $F_0 = \mathbb{R}$, on pose $E_0 = \mathbb{C}$ et comme $W_{E_0} = \mathbb{C}^*$, la restriction de $u_0$ à $W_{E_0}$ est à valeurs dans $\hat{U}^0$. Si $F_0$ est $p$-adique, on interprète la restriction de $u_0$ à $W_{K_0}$ comme un caractère $\chi_{K_0}$ de $K_0^*$ dans $\hat{U}$. Soit $C$ le noyau de la restriction de ce caractère au groupe des unités $O_{K_0}^*$. Parce que $u_0$ est un cocycle, $\chi_{K_0}(\sigma(x)) = \sigma\chi_{K_0}(x)$ pour tout $\sigma \in Gal(K_0/F_0)$ et tout $x \in K_0^*$. En particulier $\chi_{K_0}$ envoie $F_0^*$ dans $\hat{U}^{\Gamma_{F_0}}$. En notant $n := [\hat{U}^{\Gamma_{F_0}} : \hat{U}^{\Gamma_{F_0},0}]$, $\chi_{K_0}$ envoie $F_0^{*,n} := \{x^n; x \in F_0^*\}$ dans $\hat{U}^{\Gamma_{F_0},0}$. Le groupe $CF_0^{*,n}$ est ouvert d'indice fini dans $K_0^*$. Par le corps de classes, c'est le groupe des normes d'une extension abélienne finie $E_0$ et parce que $u_0$ est un cocycle, on vérifie que l'extension $E_0$ de $F_0$ est elle aussi galoisienne. On a maintenant défini le corps $E_0$ que l'on utilise dans la construction précédente de globalisation.

On va construire l'élément $\delta \in H^{1,0}(W_{F_0}; \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}/Z(\hat{G}))$ qui par localisation s'envoie sur $\delta_0$. On dispose des quotients $W_{E/F}$ et $W_{E_0/F_0}$. On a fait ce qu'il fallait pour que $u_0$ se quotiente par $W_{E_0/F_0}$. Et parce que $Gal(E/F) = Gal(E_0/F_0)$, on voit que $W_{E/F}$ s'identifie au produit semi-direct de $\mathbb{A}_E^*/E^* \rtimes W_{E_0/F_0}$ quotienté par $E_0^*$ plongé antidiagonalement. Pour prolonger $u_0$ en un cocycle $u : W_{E/F} \to \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}$, il suffit de prolonger le caractère $\chi_0 := u_{0|E_0^*} : E_0^* \to \hat{U}$ en un caractère $\chi : \mathbb{A}_E^*/E^* \to \hat{U}$ qui soit équivariant pour $Gal(E/F)$. Si $F_0 = \mathbb{C}$, on a aussi $E_0 = F_0$ donc $E = F$. La condition d'équivariance est triviale. D'autre part, on a vu que $\chi_0$ prend ses valeurs dans $\hat{U}^0$. Il est trivial que l'on peut prolonger $\chi_0$ en $\chi$. Si $F_0$ est p-adique, on s'est arrangé pour que $\chi_0$ soit non ramifié et prenne ses valeurs dans $\hat{U}^{\Gamma_{F_0},0}$. Ecrivons $\hat{U}^{\Gamma_{F_0},0} = (\mathbb{C}^*)^N$. Alors $\chi_0$ est de la forme $(|\,|_{E_0}^{s_1}, \cdots, |\,|_{E_0}^{s_N})$ que l'on prolonge par $(|\,|_{\mathbb{A}_E}^{s_1}, \cdots, |\,|_{\mathbb{A}_E}^{s_N})$.

Reste le cas, $F_0 = \mathbb{R}$, $E_0 = \mathbb{C}$, $E/F$ quadratique. Le caractère $\chi_0$ prend ses valeurs dans $\hat{U}^0$. On sait que l'on peut décomposer $\hat{U}^0$ muni de l'action de $Gal(E/F) = \{1, \sigma\}$ en produits de trois types de tores : $\mathbb{C}^*$ avec $\sigma(x) = x$,

$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ l'action du groupe de Galois échangeant les deux copies et $\mathbb{C}^*$ avec $\sigma(x) = x^{-1}$. Il suffit de traiter chaque cas. On traite le dernier qui est le plus difficile.

La condition d'équivariance est que $\chi$ doit être trivial sur les normes $N_{E/F}(E^*)$. On vérifie que $E^* N_{E/F}(\mathbb{A}_E^*)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{A}_E^*$, on munit $\mathbb{A}_E^*/E^* N_{E/F}(\mathbb{A}_E^*)$ de la topologie quotient. C'est un groupe compact. L'homomorphisme $E_0^*/N_{E_0/F_0}(E_0^*) \to \mathbb{A}_E^*/E^* N_{E/F}(\mathbb{A}_E^*)$ est continu. On va voir qu'il est injectif. Alors son image est un sous-groupe compact de $\mathbb{A}_E^*/E^* N_{E/F}(\mathbb{A}_E^*)$ et on peut considérer que $\chi_0$ est défini sur ce sous-groupe. Il est connu qu'un caractère continu d'un sous-groupe compact d'un groupe compact à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ se prolonge au groupe tout entier en un caractère continu. Cela conclut modulo l'assertion d'injectivité admise. Montrons-la : soit $e_0 \in E_0^*$ et supposons que $e_0 \in E^* N_{E/F}(\mathbb{A}_E^*)$. Ainsi il existe $e \in E^*$ tel que $e \in e_0 N_{E_0/F_0}(E_0^*)$ et $e \in N_{E_v/F_v}(E_v^*)$ pour toute place $v \neq v_0$. Cela entraîne que $e \in F^*$ et, en notant $\kappa$ le caractère quadratique associé à $E/F$, on a $\kappa_v(e) = 1$ pour tout $v \neq v_0$. La formule de produit entraîne que $\kappa_{v_0}(e) = 1$ donc $e_0 \in N_{E_0/F_0}(E_0^*)$ ce qu'il fallait démontrer.

On a maintenant défini $\delta \in H^{1,0}(W_{F_0}; \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0} \stackrel{(1-\hat{\theta})}{\to} \hat{T}/Z(\hat{G}))$ qui par localisation s'envoie sur $\delta_0$. On note $\underline{a}$ l'image de $\delta$ dans $H^{1,0}(W_F; \hat{T} \to \hat{T}/Z(\hat{G})) = H^1(W_F; Z(\hat{G}))$, ou plutôt son image modulo $ker^1(W_F; Z(\hat{G}))$. Il est clair que $\underline{a}$ s'envoie sur $\underline{a}_0$ par localisation. Il définit un caractère $\omega$ de $G(\mathbb{A}_F)$, automorphe, qui se restreint en $\omega_0$ en la place $v_0$.

**Remarque** *Le caractère $\omega$ est trivial sur $T^\theta(\mathbb{A}_F)$.*

En effet la restriction de $\omega$ à $T(\mathbb{A}_F)$ est associée à l'élément de $H^1(W_F; \hat{T})$ qui est égal à $(1-\hat{\theta})u$, si $\delta$ est représenté par $(u,t)$. Donc cette restriction est composée de $T(\mathbb{A}_F) \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T)(\mathbb{A}_F)$ et du caractère de ce dernier groupe déterminé par $u$. En tout cas, c'est trivial sur $T^\theta(\mathbb{A}_F)$.

## Références


[1] J. Adams, M. van Leeuwen, P. Trapa, D. Vogan *Unitary representations of real reductive groups* prépublication 2012, 200 pages

[2] J. Arthur *On a family of distributions obtained from Eisenstein series II : Explicit formulas* Amer. J. Math. 104 (1982), pp. 1289-1 336.

[3] J. Arthur, *A Paley-Wiener theorem for real reductive groups,* Acta Mathematica, 150, 1983, pp. 1-89

[4] J. Arthur, *The invariant trace formula, II. Global theory* JAMS, vol 1, 1988, pp. 501-554

[5] J. Arthur *On the Fourier transforms of weighted orbital integrals* J. reine angew. Math. **452** (1994), pp. 163-217

[6] J. Arthur, *On local character relations*, Selecta Math. 2, 1996, pp. 501-579

[7] J. Arthur, *Endoscopic L-functions and a combinatorial identity*, Canad. J. Math. 51, 1999, pp. 1135Ð1148.

[8] J. Arthur, *On the transfer of distributions : weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 99, 1999, pp. 209-283.

[9] J. Arthur – *A stable trace formula I. General expansions*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 1 (2002), 175-277

[10] J. Arthur – *A stable trace formula II. Global descent*, Invent. Math. 143 (2001), 157-220.

[11] J. Arthur – *A stable trace formula III. Proof of the main theorems*, Annals of Math. 158 (2003), 769-873

[12] J. Arthur *The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic Groups*, AMS Colloquium Publ. vol 61 (2013)

[13] J. Arthur, L. Clozel, *Simple Algebras, Base Change, and the Advanced Theory of the Trace Formula*, Ann. of Math. Stud. 120, Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.

[14] L. Clozel, P. Delorme *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs. II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 23, no. 2, 1990, pp.193–228

[15] T. Hales *On the fundamental lemma for standard endoscopy : reduction to unit elements*, Canadian Journal of Mathematics 47 (5), 1995, pp. 974-994

[16] R. Kottwitz, J. Rogawski, *The Distributions in the Invariant Trace Formula Are Supported on Characters* Canad. J. Math. Vol. 52 (4), 2000, pp. 804-814

[17] J.-P. Labesse, J.-L. Waldspurger, *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar*, CRM Monograph Series 31 (2013)

[18] C. Mœglin *Représentations elliptiques ; caractérisation et formule de transfert de caractères*, prépublication

[19] C. Mœglin *Appendice à la formule des traces locales*, prépublication

[20] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein* Birkhäuser, PM 113 (1994)

[21] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger *Stabilisation VI : la partie géométrique de cette formule*

[22] C. P. Mok *Endoscopic classification of representations of representations of quasi-split unitary groups I et II*, prépublications 2012

[23] W. Müller *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms* Annals of Math. 130, 1989, 473-529

[24] W. Müller *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms. II,* GAFA, vol 8, 1998, pp. 315-355

[25] D. Vogan *A Langlands classification for unitary representations* Advanced Studies in Pure Mathematics 26, 1998 Analysis on Homogeneous Spaces and Representations of Lie Groups pp. 1-26

[26] J.-L. Waldspurger *A propos du lemme fondamental pondéré tordu,* Math. Annalen 343 (2009), p. 103-174

[27] J.-L. Waldspurger, *La formule des traces locale tordue* prépublication

[28] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation I : endoscopie tordue sur un corps local*

[29] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation II : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; définitions et énoncés des résultats*

[30] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation III : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; réductions et preuves*

[31] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation IV : transfert spectral archimédien*

[32] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation V : intégrales orbitales et endoscopie sur le corps réel*

[33] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation VII : descente globale*

[34] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation VIII : l'application* $\epsilon_{\tilde{M}}$ *sur un corps de base local non-archimédien*

[35] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation IX : l'application* $\epsilon_{\tilde{M}}$ *sur un corps de base local archimédien*

colette.moeglin@imj-prg.fr
jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr