

---

**DONNÉES ENDOSCOPIQUES  
D'UN GROUPE RÉDUCTIF CONNEXE :  
APPLICATIONS D'UNE CONSTRUCTION DE LANGLANDS**

*par*

Bertrand Lemaire & Jean-Loup Waldspurger

---

**Résumé.** — Soient  $F$  un corps global, et  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $F$ . On prouve que si deux données endoscopiques de  $G$  sont équivalentes en presque toute place de  $F$ , alors elles sont équivalentes. Le résultat est encore vrai pour l'endoscopie (ordinaire) avec caractère. On donne aussi, pour  $F$  global ou local et  $G$  quasi-simple simplement connexe, une description des données endoscopiques elliptiques de  $G$ .

**Abstract.** — Let  $F$  be a global field, and  $G$  a connected reductive group defined over  $F$ . We prove that two endoscopic data of  $G$  which are equivalent almost everywhere, are equivalent. The result remains true for (non-twisted) endoscopy with character. We also give, for  $F$  global or local and  $G$  quasi-simple simply connected, a description of the elliptic endoscopic data of  $G$ .

### Introduction

Soit  $F$  un corps global, et soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $F$ . On fixe une clôture séparable algébrique  $\overline{F}$  de  $F$ . On note  $\Gamma_F$  le groupe de Galois de  $\overline{F}/F$ , et  $W_F$  son groupe de Weil. Pour  $v$  une place de  $F$ , on note  $F_v$  le complété de  $F$  en  $v$ , et on pose  $G_v = G \times_F F_v$ . Fixons un élément  $\mathbf{a} \in H^1(W_F, Z(\hat{G}))/\ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$  — cf. ???. Soit  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  une donnée endoscopique de  $G$ . Pour chaque place  $v$  de  $F$ , cette donnée définit par localisation une donnée endoscopique  $\mathbf{G}'_v = (G'_v, \mathcal{G}'_v, s)$  de  $(G_v, \mathbf{a}_v)$ . Le premier résultat prouvé ici est :

**PROPOSITION 1.** — *Si  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  sont deux données endoscopiques de  $(G, \mathbf{a})$  telles que les données locales  $\mathbf{G}'_{1,v}$  et  $\mathbf{G}'_{2,v}$  soient équivalentes pour presque tout  $v$ , alors les données  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  sont équivalentes.*

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — 22E50, 22E55.

*Mots clefs.* — endoscopie ordinaire, donnée endoscopique elliptique, localisation.

L'élément  $\mathbf{a}$  ne joue en fait aucun rôle puisqu'on se ramène facilement au cas où  $G$  est  $F$ -quasi-simple et simplement connexe et (forcément)  $\mathbf{a} = 1$ . Par restriction des scalaires à la Weil, on se ramène ensuite au cas où  $G$  est (absolument) quasi-simple et simplement connexe. On peut donc supposer, et l'on suppose, que le groupe dual  $\hat{G}$  est adjoint et simple. Comme les constructions que nous allons faire sont valables aussi bien dans le cas global que dans le cas local, la lettre  $F$  désigne maintenant un corps commutatif qui est soit un corps global soit un corps local. Enfin pour alléger l'écriture, on considère plutôt la forme « galoisienne » des  $L$ -groupes. L'adaptation des constructions ci-dessous à leur forme « groupes de Weil » ne pose aucun problème.

Le groupe dual  $\hat{G} = \hat{G}_{\text{AD}}$  est muni d'une action galoisienne  $\sigma \mapsto \sigma_G$ . On fixe une paire de Borel  $(\hat{B}, \hat{T})$  de  $\hat{G}$  conservée par cette action galoisienne. On note  $\Delta$  l'ensemble de racines simples déterminé par  $\hat{B}$ , et  $\alpha_0$  l'opposée de la plus grande racine positive. On pose  $\Delta_{\mathbf{a}} = \{\alpha_0\} \cup \Delta$ . On note  $\mathcal{D}$ , resp.  $\mathcal{D}_{\mathbf{a}}$ , le diagramme de Dynkin dont l'ensemble des sommets est  $\Delta$ , resp.  $\Delta_{\mathbf{a}}$ . L'ensemble  $\Omega$  des éléments de  $W = N_{\hat{G}}(\hat{T})/\hat{T}$  qui conservent  $\Delta_{\mathbf{a}}$  s'identifie à un sous-groupe abélien distingué du groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(\mathcal{D}_{\mathbf{a}})$  de  $\mathcal{D}_{\mathbf{a}}$ , et on a la décomposition

$$\text{Aut}(\mathcal{D}_{\mathbf{a}}) = \Omega \rtimes \text{Aut}(\mathcal{D}).$$

Puisque l'action galoisienne conserve la paire  $(\hat{B}, \hat{T})$ , elle induit une action sur  $\mathcal{D}$ . On note  $E$  l'extension galoisienne finie de  $F$  telle que  $\Gamma_E = \ker(\Gamma_F \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}))$ .

Soit  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  une donnée endoscopique de  $G$  (on a donc  $\mathcal{G}' \subset {}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_F$ ). On suppose que  $s$  est d'ordre fini  $d$ . À équivalence près, on peut supposer  $s \in \hat{T}$ . On fixe un sous-groupe de Borel  $\hat{B}'$  de  $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ . Pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ , on peut choisir un élément  $(g(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'$  dont l'action par conjugaison conserve la paire de Borel  $(\hat{B}', \hat{T})$  de  $\hat{G}'$ . Il détermine un élément  $w_{G'}(\sigma) \in W$ , ainsi qu'une action galoisienne sur  $\hat{T}$

$$\sigma \mapsto \sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G.$$

Son image est contenue dans le groupe d'automorphismes de  $\hat{T}$  qui fixent  $s$  et conservent  $\hat{B}'$ . Le point-clé de la construction est une conséquence des résultats de Langlands [?]. À  $s$  et  $\hat{B}'$ , Langlands associe un ensemble de racines  $\mathfrak{X} = \bigcup_{k=0, \dots, d-1} \mathfrak{X}_k$ . Il démontre qu'à conjugaison près par un élément de  $W$ , cet ensemble est soit  $\Delta$  soit  $\Delta_{\mathbf{a}}$ . Quitte à conjuguer  $\hat{G}'$  par un élément  $u \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$  et à remplacer  $\hat{B}'$  par  $u(\hat{B}')$ , on peut supposer que  $\mathfrak{X} = \Delta$  ou  $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathbf{a}}$ . Alors l'application  $\sigma \mapsto w_{G'}(\sigma)$  est à valeurs dans  $\Omega$ , et  $w_{G'}(\sigma)$  conserve  $\mathfrak{X}$ . Notons  $K$  l'extension galoisienne finie de  $F$  telle que  $\Gamma_K$  soit le noyau de l'homomorphisme  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ . On distingue deux cas :

- **Cas 1** : si  $\mathfrak{X} = \Delta$ , alors  $w_{G'}(\sigma) = 1$  et  $\mathcal{G}' = \hat{G}' \rtimes \Gamma_F$ .
- **Cas 2** : si  $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathbf{a}}$ , alors  $E \subset K$  et la restriction de l'application  $\sigma \mapsto w_{G'}(\sigma)$  à  $\Gamma_E$  se quotiente en une injection de  $\Gamma_{K/E} = \text{Gal}(K/E)$  dans  $\Omega$ .

Considérons deux données endoscopiques  $\mathbf{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s)$  et  $\mathbf{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s)$  de  $G$ , avec le même  $s$  d'ordre fini  $d$ . On note encore  $\hat{G}'$  le groupe  $Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ . On applique les constructions ci-dessus à ces deux données, en choisissant le même sous-groupe de Borel  $\hat{B}'$  de  $\hat{G}'$  pour les deux constructions. On obtient les mêmes ensembles  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{X}_k$

pour les deux données, seules diffèrent (éventuellement) les actions galoisiennes  $\sigma_{G'_1}$  et  $\sigma_{G'_2}$ . On obtient :

- **Cas 1** : si  $\mathfrak{X} = \Delta$ , les deux données sont équivalentes.
- **Cas 2** : si  $\mathfrak{X} = \Delta_a$ , les données  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  sont équivalentes si et seulement si il existe  $\omega \in \Omega$  tel que  $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$  pour  $k = 1, \dots, d-1$  et  $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ .

Grâce à ce résultat, on démontre la proposition 1 dans le cas où les éléments  $s_1$  et  $s_2$  sont d'ordre fini. Notons qu'il suffit de traiter le cas  $s_1 = s_2 = s$ . On supprime ensuite la restriction sur  $s$  grâce aux constructions de Langlands [?] pp. 704-705 : elles permettent de construire des données endoscopiques  $\mathbf{G}''_1 = (G''_1, \mathcal{G}'_1, t)$  et  $\mathbf{G}''_2 = (G''_2, \mathcal{G}'_2, t)$  de  $G$  avec  $t$  d'ordre fini, telles que les données  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  sont équivalentes si et seulement si les données  $\mathbf{G}''_1$  et  $\mathbf{G}''_2$  le sont (idem pour les données locales  $\mathbf{G}'_{i,v}$  et  $\mathbf{G}''_{i,v}$ ).

Les constructions ci-dessus permettent aussi de décrire les données endoscopiques elliptiques de  $G$ . Les hypothèses sont les mêmes qu'avant :  $F$  est global ou local ;  $\hat{G}$  est adjoint et simple ; et on considère la forme « galoisienne » des  $L$ -groupes. Notons  $\underline{\mathcal{E}}(G)$  l'ensemble des couples  $(\omega_{G'}, \mathcal{O})$  où  $\omega_{G'} : \Gamma_F \rightarrow \Omega$  est une application telle que l'application

$$\sigma \mapsto \sigma_{G'} \stackrel{\text{déf}}{=} \omega_{G'}(\sigma)\sigma_G$$

soit un homomorphisme de  $\Gamma_F$  dans  $\text{Aut}(\mathcal{D}_a)$ , et  $\mathcal{O}$  est un sous-ensemble non vide de  $\Delta_a$  qui est conservé par l'action  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$  et qui forme une unique orbite pour cette action. Deux tels couples  $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$  et  $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$  sont dits équivalents s'il existe  $\omega \in \Omega$  tel que  $\mathcal{O}_2 = \omega(\mathcal{O}_1)$  et  $\sigma_{G'_2} = \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ . Notons  $\underline{\mathcal{E}}(G)$  l'ensemble des classes d'équivalence dans  $\underline{\mathcal{E}}(G)$ .

Considérons un couple  $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$ . Posons

$$d = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha).$$

Fixons  $\zeta_d \in \mathbb{C}^\times$  une racine primitive de 1 d'ordre  $d$ . Soit  $s$  l'unique élément de  $\hat{T}$  tel que  $\alpha(s) = 1$  pour tout  $\alpha \in \Delta \setminus (\mathcal{O} \cap \Delta)$  et  $\alpha(s) = \zeta_d$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$ . Il est fixe par l'action galoisienne  $\sigma_{G'}$ . Posons  $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ . Notons  $\mathcal{G}'$  le sous-ensemble de  ${}^L G$  formé des éléments  $(g\tilde{\omega}_{G'}(\sigma), \sigma)$  pour  $g \in \hat{G}'$  et  $\sigma \in \Gamma_F$ , où  $\tilde{\omega}_{G'}(\sigma)$  est un représentant quelconque de  $\omega_{G'}(\sigma)$  dans  $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ . L'ensemble  $\mathcal{G}'$  est un groupe qui normalise  $\hat{G}'$ . On en déduit de la façon habituelle une  $L$ -action de  $\Gamma_F$  sur  $\hat{G}'$ . Soit  $G'$  un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur  $F$  dont  $\hat{G}'$ , muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. Le triplet  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  est une donnée endoscopique de  $G$ . L'hypothèse que  $\mathcal{O}$  est une seule orbite sous l'action de  $\Gamma_F$  implique que cette donnée est elliptique. Le second résultat prouvé ici est :

**PROPOSITION 2.** — *L'application qui, à un couple  $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$ , associe la donnée  $\mathbf{G}'$ , se quotiente en une bijection de  $\underline{\mathcal{E}}(G)$  sur l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de  $G$ .*

L'article comporte deux sections, la première est dédiée à la preuve de la proposition 1, la seconde à celle de la proposition 2. À partir de ??, le groupe  $G$  est (absolument) quasi-simple et simplement connexe, et on utilise la forme « galoisienne » des  $L$ -groupes.

## 1. Équivalence presque partout de données endoscopiques

**1.1. Le résultat.** — On considère un corps commutatif  $F$  qui est soit un corps global (corps de nombres ou corps de fonctions) soit un corps local ( $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ , une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  ou de  $\mathbb{F}_p((t))$ ). On fixe une clôture séparable algébrique  $\overline{F}$  de  $F$ . On note  $\Gamma_F$  le groupe de Galois de  $\overline{F}/F$ , et  $W_F$  son groupe de Weil. Via l'homomorphisme naturel  $W_F \rightarrow \Gamma_F$ , le groupe  $W_F$  agit sur tout ensemble sur lequel agit  $\Gamma_F$ . Toutes les extensions séparables finies de  $F$  seront supposées incluses dans  $\overline{F}$ . Pour une extension séparable finie  $K$  de  $F$ , on note  $\Gamma_K$  le groupe de Galois de  $\overline{F}/K$ , et  $W_K$  son groupe de Weil. Si de plus  $K/F$  est galoisienne, on note  $\Gamma_{K/F}$  ( $= \Gamma_F/\Gamma_K$ ) le groupe de Galois de  $K/F$ .

Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $F$ . On note  $\hat{G}$  le groupe dual de  $G$ . Il est muni d'une action galoisienne notée  $\sigma \mapsto \sigma_G$ . On note  ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F$  le  $L$ -groupe de  $G$ , et  $Z(\hat{G})$  le centre de  $\hat{G}$ . Dans le cas local on fixe un élément  $\mathbf{a} \in H^1(W_F, Z(\hat{G}))$ , et dans le cas global on fixe  $\mathbf{a} \in H^1(W_F, Z(\hat{G}))/\ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$ , où  $\ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$  est le noyau de l'homomorphisme de localisation

$$H^1(W_F, Z(\hat{G})) \rightarrow \prod_v H^1(W_{F_v}, Z(\hat{G})).$$

D'après un théorème de Langlands, à cet élément  $\mathbf{a}$  correspond un caractère (i.e. un homomorphisme continu dans  $\mathbb{C}^\times$ )  $\omega$  de  $G(F)$  — cf. [?, ?]. On peut supposer, mais ce n'est pas nécessaire, que  $\omega$  est trivial sur  $Z(G; F)$ ; sinon la théorie est vide. Ici  $Z(G; F)$  est le groupe des points  $F$ -rationnels du centre de  $G$ . Nous utilisons la notion de *donnée endoscopique de  $(G, \mathbf{a})$*  telle qu'elle est définie dans [?, I.1.5, VI.3.1]<sup>(1)</sup>. Il s'agit donc d'endoscopie ordinaire (i.e. non tordue) avec caractère. Une telle donnée est notée  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ . On définit la notion d'équivalence, ou d'isomorphisme, entre deux telles données, et en particulier, le groupe  $\text{Aut}(\mathbf{G}')$  des automorphismes de  $\mathbf{G}'$ . Ce groupe contient  $\hat{G}' = \mathcal{G}' \cap \hat{G}$ . Rappelons que  $\hat{G}'$  est la composante neutre  $Z_{\hat{G}}(s)^\circ$  du centralisateur de  $s$  dans  $\hat{G}$  (munie d'une action galoisienne  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$  qui en fait un groupe dual de  $G'$ ).

On suppose maintenant que  $F$  est un corps global. Pour chaque place  $v$  de  $F$ , on fixe un prolongement  $\bar{v}$  de  $v$  à  $\overline{F}$ . Le fixateur  $\Gamma_v$  de  $\bar{v}$  dans  $\Gamma_F$  s'identifie à  $\Gamma_{F_v}$  où  $F_v$  est le complété de  $F$  en  $v$ . On a aussi une identification  $W_{F_v} \subset W_F$ . Soit  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  une donnée endoscopique de  $(G, \mathbf{a})$ . Pour chaque place  $v$  de  $F$ , on en déduit par localisation une donnée endoscopique  $\mathbf{G}'_v = (G'_v, \mathcal{G}'_v, s)$  de  $(G_v, \mathbf{a}_v)$ , où  $G_v = G \times_F F_v$  et  $\mathbf{a}_v \in H^1(W_{F_v}, Z(\hat{G}))$ . En particulier, le caractère  $\omega_v$  de  $G(F_v)$  correspondant à  $\mathbf{a}_v$

1. Le peu que nous utilisons de loc. cit. est valable en toute caractéristique.

est le prolongement (par continuité) de  $\omega$ , et  $\mathcal{G}'_v$  est le sous-groupe des  $(g, w) \in \mathcal{G}'$  tels que  $w \in W_{F_v}$ .

La proposition suivante est le résultat principal de cette section ??.

**PROPOSITION.** — *Considérons deux données endoscopiques  $\mathbf{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$  et  $\mathbf{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$  de  $(G, \mathbf{a})$ . On suppose que pour presque toute place  $v$  de  $F$ , les données  $\mathbf{G}'_{1,v}$  et  $\mathbf{G}'_{2,v}$  sont équivalentes. Alors les données  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  sont équivalentes.*

**REMARQUE.** — On a besoin en fait que les données locales soient équivalentes en un ensemble de places auquel s'applique le théorème de Tchebotarev, c'est-à-dire qui soit analytiquement dense. Sinon, il est possible de produire un groupe  $G$  et deux données endoscopiques elliptiques  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  de  $G$  (avec  $\mathbf{a} = 1$ ) qui vérifient les conditions suivantes :

- les données locales  $\mathbf{G}'_{1,v}$  et  $\mathbf{G}'_{2,v}$  sont simultanément elliptiques ou non elliptiques, et l'ensemble des places  $v$  de  $F$  où elles sont elliptiques est infini ;
- les données locales  $\mathbf{G}'_{1,v}$  et  $\mathbf{G}'_{2,v}$  sont équivalentes en toute place  $v$  de  $F$  où elles sont elliptiques ;
- les données  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  sont non équivalentes.

**1.2. Réduction au cas où  $\hat{G} = \hat{G}_{\text{AD}}$  est simple.** — Revenons à  $F$  global ou local. Soit  $G_{\text{SC}}$  le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de  $G$ . Son groupe dual est le groupe adjoint  $\hat{G}_{\text{AD}} = \hat{G}/Z(\hat{G})$ , et toute donnée endoscopique  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  de  $(G, \mathbf{a})$  définit une donnée endoscopique  $\overline{\mathbf{G}}' = (\overline{G}, \overline{\mathcal{G}}', \overline{s})$  de  $G_{\text{SC}}$ . L'élément  $\overline{s}$  est l'image de  $s$  dans  $\hat{G}_{\text{AD}}$ , la composante neutre de son centralisateur  $Z_{\hat{G}_{\text{AD}}}(\overline{s})^\circ = \hat{G}'/Z(\hat{G}')$  est munie de l'action galoisienne déduite de  $\sigma_{G'}$ ,  $\overline{\mathbf{G}}'$  est un  $F$ -groupe réductif connexe quasi-déployé dont  $\hat{G}'/Z(\hat{G}')$  est le groupe dual, et  $\overline{\mathcal{G}}' = \mathcal{G}'/Z(\hat{G}')$ .

Soient  $\mathbf{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$  et  $\mathbf{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$  deux données endoscopiques de  $(G, \mathbf{a})$ . Elles définissent comme ci-dessus des données endoscopiques  $\overline{\mathbf{G}}'_1$  et  $\overline{\mathbf{G}}'_2$  de  $G_{\text{SC}}$ . Par définition, un élément  $x$  de  $\hat{G}$  est une équivalence entre  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  si et seulement si l'image  $\overline{x}$  de  $x$  dans  $\hat{G}_{\text{AD}}$  est une équivalence entre  $\overline{\mathbf{G}}'_1$  et  $\overline{\mathbf{G}}'_2$ . Si  $F$  est global, l'application  $\mathbf{G}' \mapsto \overline{\mathbf{G}}'$  commute à la localisation. On en déduit qu'il suffit de prouver la proposition de ?? dans le cas où  $G$  est semisimple simplement connexe et (forcément)  $\mathbf{a} = 1$ .

On suppose désormais  $G = G_{\text{SC}}$  (et toujours  $F$  global ou local). On fixe une paire de Borel  $(\hat{B}, \hat{T})$  de  $\hat{G}$  conservée par l'action galoisienne  $\sigma \mapsto \sigma_G$ . On note  $\Sigma$  l'ensemble des racines de  $\hat{T}$  dans  $\hat{G}$  et  $\Sigma^+$ , resp.  $\Delta$ , le sous-ensemble de racines positives, resp. simples, déterminé par  $\hat{B}$ . Notons  $\mathcal{D}$  le diagramme de Dynkin dont l'ensemble de sommets est  $\Delta$ . Puisque la paire  $(\hat{B}, \hat{T})$  est stable par l'action galoisienne, cette dernière induit une action sur  $\mathcal{D}$  et peut-être considérée comme un homomorphisme  $\Gamma_F \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D})$ . On a la décomposition

$$\hat{G} = \hat{G}_1 \times \cdots \times \hat{G}_d$$

où  $\hat{G}_i$  est simple et adjoint. On note

$$G = G_1 \times \cdots \times G_d$$

la décomposition duale :  $G_i$  est un groupe semisimple simplement connexe, défini sur  $\overline{F}$  et (absolument) quasi-simple. Pour  $i = 1, \dots, d$ , on note  $\mathcal{D}_i$  la composante connexe de  $\mathcal{D}$  correspondant à  $\hat{G}_i$ . On a la décomposition

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_d.$$

Le groupe  $G$  est un produit direct de  $F$ -groupes semisimples simplement connexes et  $F$ -quasi-simples, chacun d'eux correspondant à une orbite de  $\Gamma_F$  dans l'ensemble  $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_d\}$ .

On suppose dans un premier temps que  $G$  est  $F$ -quasi-simple, c'est-à-dire que  $\Gamma_F$  agit transitivement sur l'ensemble  $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_d\}$ . Soit  $F_1/F$  l'extension séparable finie (de degré  $d$ ) telle que  $\Gamma_{F_1}$  soit le stabilisateur de  $\mathcal{D}_1$  dans  $\Gamma_F$ . Alors [?, 6.21]  $G_1$  est défini sur  $F_1$  et  $G \simeq R_{F_1/F}(G_1)$  où  $R_{F_1/F}$  est le foncteur restriction des scalaires à la Weil. Reprenons brièvement la description de  ${}^L G$  telle qu'elle est donnée dans [?, 5.1]. Pour un groupe  $A$ , un sous-groupe d'indice fini  $A_1 \subset A$ , et un groupe  $V_1$  muni d'une structure de  $A_1$ -module (à gauche), on note  $V = I_{A_1}^A(V_1)$  l'ensemble des fonctions  $v : A \rightarrow V_1$  telles que  $v(a_1 a) = a_1 \cdot v(a)$  pour tout  $(a_1, a) \in A_1 \times A$ . On munit  $V$  de la structure de groupe donnée par  $(vv')(a) = v(a)v'(a)$ , et de la structure de  $A$ -module donnée par  $(a \cdot v)(a') = v(a'a)$ . Pour  $a \in A$ , on note  $V_a$  le sous-groupe de  $V$  formé des fonctions  $v$  à support dans  $A_1 a$ . On a la décomposition  $V = \prod_{a \in A_1 \backslash A} V_a$  et les groupes  $V_a$  sont permutés par  $A$ . Notons  $e$  l'élément neutre de  $A$ . Le groupe  $V_e$  est un sous- $A_1$ -module de  $V$ , et l'application  $V \rightarrow V_1, v \mapsto v(e)$  est un homomorphisme de  $A_1$ -modules qui induit un isomorphisme de  $V_e$  sur  $V_1$ . Appliquons cela à  $A = \Gamma_F$  et  $A_1 = \Gamma_{F_1}$ , et à  $V_1 = \hat{G}_1$  muni de l'action galoisienne  $\tau \mapsto \tau_{G_1}$  de  $\Gamma_{F_1}$ . Le groupe  $\hat{G}$  s'identifie à  $I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{G}_1)$  muni de l'action galoisienne  $\sigma \mapsto \sigma_G$  de  $\Gamma_F$  donnée par

$$\sigma_G(g)(\sigma') = g(\sigma'\sigma), \quad \sigma' \in \Gamma_F.$$

La paire de Borel  $(\hat{B}, \hat{T})$  de  $\hat{G}$  est égale à  $(I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{B}_1), I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{T}_1))$  pour une paire de Borel  $(\hat{B}_1, \hat{T}_1)$  de  $\hat{G}_1$  bien déterminée, et la paire  $(\hat{B}, \hat{T})$  est conservée par l'action de  $\Gamma_F$  si et seulement si la paire  $(\hat{B}_1, \hat{T}_1)$  est conservée par l'action de  $\Gamma_{F_1}$ , ce que l'on suppose. Enfin puisque l'homomorphisme naturel  $W_F \rightarrow \Gamma_F$  induit une bijection  $W_{F_1} \backslash W_F \rightarrow \Gamma_{F_1} \backslash \Gamma_F$ , l'application  $g \mapsto g \circ (W_F \rightarrow \Gamma_F)$  induit un isomorphisme  $I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{G}_1) \xrightarrow{\simeq} I_{W_{F_1}}^{W_F}(\hat{G}_1)$  dont l'inverse est  $W_F$ -équivariant. On pose

$${}^L G = I_{W_{F_1}}^{W_F}(\hat{G}_1) \rtimes W_F = I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{G}_1) \rtimes W_F.$$

Posons  $W = N_{\hat{G}}(\hat{T})/\hat{T}$  et  $W_1 = N_{\hat{G}_1}(\hat{T}_1)/\hat{T}_1$ . On a l'égalité  $W = I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(W_1)$ .

Soit  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  une donnée endoscopique de  $G$ , avec  $s \in \hat{T}$ . On lui associe comme suit une donnée endoscopique

$$\mathbf{G}'_{F_1} = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$$

de  $G_1$ . Posons  $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$  et  $\hat{B}' = \hat{B} \cap \hat{G}'$ . Pour chaque  $w \in W_F$  d'image  $\sigma$  dans  $\Gamma_F$ , choisissons un élément  $(g(w), w) \in \mathcal{G}'$  tel que  $\text{Int}_{g(w)} \circ \sigma_G$  conserve la paire de Borel  $(\hat{B}', \hat{T})$  de  $\hat{G}'$ . La classe  $\hat{T}g(w)$  est uniquement déterminée. Il existe donc un élément

bien déterminé  $\eta_{G'}(\sigma)$  de  $W$  tel que l'action par conjugaison de  $(g(w), w)$  sur  $\hat{T}$  soit égale à

$$\sigma_{G'} = \eta_{G'}(\sigma)\sigma_G;$$

où l'on identifie  $\eta_{G'}(\sigma)$  à l'automorphisme  $\text{Int}_{\eta_{G'}(\sigma)}$  de  $\hat{T}$ . L'élément  $s$  est fixé par l'action  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ . L'application  $\sigma \mapsto \eta_{G'}(\sigma)$  est un 1-cocycle de  $\Gamma_F$  à valeurs dans  $W$ . Pour  $\tau \in \Gamma_{F_1}$ , posons<sup>(2)</sup>  $\eta_{G',1}(\tau) = \eta_{G'}(\tau)(1)$ . L'application  $\tau \mapsto \eta_{G',1}(\tau)$  est un 1-cocycle de  $\Gamma_{F_1}$  à valeurs dans  $W_1$ . Notons  $\tau \mapsto \tau_{G',1}$  l'action de  $\Gamma_{F_1}$  sur  $\hat{T}_1$  donnée par

$$\tau_{G',1} = \eta_{G',1}(\tau)\tau_{G_1}.$$

On prend pour  $s_1$  l'élément  $s(1) \in \hat{T}_1$ . Il est fixé par l'action galoisienne  $\tau \mapsto \tau_{G',1}$  sur  $\hat{T}_1$ . Posons  $\hat{G}'_1 = Z_{\hat{G}_1}(s_1)^\circ$  et  $\hat{B}'_1 = \hat{B}_1 \cap \hat{G}'_1$ . Pour chaque  $w_1 \in W_{F_1}$  d'image  $\tau$  dans  $\Gamma_{F_1}$ , choisissons un représentant  $\tilde{\eta}_{G',1}(w_1) = \tilde{\eta}_{G',1}(\tau)$  de  $\eta_{G',1}(\tau)$  dans  $N_{\hat{G}_1}(\hat{T}_1)$ . L'automorphisme  $\text{Int}_{\tilde{\eta}_{G',1}(\tau)} \circ \tau_{G_1}$  conserve la paire de Borel  $(\hat{B}'_1, \hat{T}_1)$  de  $\hat{G}'_1$ . Soit

$$\mathcal{G}'_1 = \{(g'_1 \tilde{\eta}_{G',1}(w_1), w_1) : g'_1 \in \hat{G}'_1, w_1 \in W_{F_1}\} \subset {}^L(G_1).$$

L'ensemble  $\mathcal{G}'_1$  est un groupe qui normalise  $\hat{G}'_1$ . On en déduit de la manière habituelle une  $L$ -action de  $\Gamma_{F_1}$  sur  $\hat{G}'_1$ . Soit  $G'_1$  un  $F_1$ -groupe réductif connexe quasi-déployé dont  $\hat{G}'_1$ , muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. Le triplet  $\mathbf{G}'_{F_1} = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$  est une donnée endoscopique de  $G_1$ .

**LEMME.** — *L'application  $\mathbf{G}' \mapsto \mathbf{G}'_{F_1}$  induit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques de  $G$  sur l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques de  $G_1$ .*

*Démonstration.* — Réciproquement, soit  $\mathbf{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$  une donnée endoscopique de  $G_1$ , avec  $s_1 \in \hat{T}_1$ . On lui associe comme suit une donnée endoscopique

$$\text{Res}_{F_1/F}(\mathbf{G}'_1) = (G', \mathcal{G}', s)$$

de  $G$ . Posons  $\hat{G}'_1 = Z_{\hat{G}_1}(s_1)^\circ$  et  $\hat{B}'_1 = \hat{B}_1 \cap \hat{G}'_1$ . Pour chaque  $w_1 \in W_{F_1}$  d'image  $\tau$  dans  $\Gamma_{F_1}$ , choisissons un élément  $(g_1(w_1), w_1) \in \mathcal{G}'_1$  tel que l'automorphisme  $\text{Int}_{g_1(w_1)} \circ \tau_{G_1}$  conserve la paire de Borel  $(\hat{B}'_1, \hat{T}_1)$  de  $\hat{G}'_1$ . La classe  $\hat{T}_1 g_1(w_1)$  est bien déterminée. Il existe donc un élément bien déterminé  $\eta_{G',1}(\tau)$  de  $W_1$  tel que l'action par conjugaison de  $(g_1(w_1), w_1)$  sur  $\hat{T}_1$  soit donnée par

$$\tau_{G'_1} = \eta_{G',1}(\tau)\tau_{G_1}.$$

L'application  $\tau \mapsto \eta_{G',1}(\tau)$  est un 1-cocycle. Notons  $\alpha_1 \in H^1(\Gamma_{F_1}, W_1)$  sa classe de cohomologie, et soit  $\alpha \in H^1(\Gamma_F, W)$  l'image de  $\alpha_1$  par l'inverse de l'isomorphisme de Shapiro

$$H^1(\Gamma_F, I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(W_1)) \xrightarrow{\simeq} H^1(\Gamma_{F_1}, W_1), \beta \mapsto (\tau \mapsto \beta(\tau)(1)).$$

Choisissons un 1-cocycle  $\sigma \mapsto \eta_{G',G}(\sigma)$  de  $\Gamma_F$  à valeurs dans  $W$  qui soit dans la classe de cohomologie  $\alpha$ . Quitte à remplacer  $\eta_{G',G}$  par un 1-cocycle cohomologue, on

2. La notation n'est pas très heureuse : rappelons que pour  $\sigma \in \Gamma_F$ ,  $\eta_{G'}(\sigma)$  est un élément de  $W = \prod_{\sigma' \in \Gamma_{F_1} \setminus \Gamma_F} W_{\sigma'}$ , et que pour  $\sigma' \in \Gamma_F$ ,  $\eta_{G'}(\sigma)(\sigma')$  est la composante de  $\eta_{G'}(\sigma)$  sur  $W_{\sigma'}$ .

peut supposer, et on suppose, que  $\eta_{G'_1, G}(\tau)(1) = \eta_{G'_1}(\tau)$  pour tout  $\tau \in \Gamma_{F_1}$ . Notons  $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1, G}$  l'action de  $\Gamma_F$  sur  $\hat{T}$  donnée par

$$\sigma_{G'_1, G} = \eta_{G'_1, G}(\sigma)\sigma_G.$$

Soit  $\Gamma_F \rightarrow \hat{T}_1$ ,  $\sigma \mapsto s(\sigma)$  l'application définie par

$$s(\sigma) = \eta_{G'_1, G}(\sigma)(1)^{-1}(s_1).$$

Pour  $\tau \in \Gamma_{F_1}$  et  $\sigma \in \Gamma_F$ , on a

$$\begin{aligned} s(\tau\sigma) &= [\eta_{G'_1, G}(\tau)\tau_G(\eta_{G'_1, G}(\sigma))](1)^{-1}(s_1) \\ &= \tau_G(\eta_{G'_1, G}(\sigma))(1)^{-1}\eta_{G'_1, G}(\tau)(1)^{-1}(s_1). \end{aligned}$$

Or

$$\tau_G(\eta_{G'_1, G}(\sigma))(1) = \eta_{G'_1, G}(\sigma)(\tau) = \tau_{G_1}(\eta_{G'_1, G}(\sigma)(1)),$$

d'où

$$\begin{aligned} s(\tau\sigma) &= \tau_{G_1}[\eta_{G'_1, G}(\sigma)(1)^{-1}(\eta_{G'_1}(\tau)\tau_{G_1})^{-1}(s_1)] \\ &= \tau_{G_1}(s(\sigma)) \end{aligned}$$

car  $s_1$  est fixé par l'action  $\tau \mapsto \tau_{G_1} = \eta_{G'_1}(\tau)\tau_{G_1}$  de  $\Gamma_{F_1}$ . Par conséquent l'application

$$\Gamma_F \rightarrow \hat{T}, \sigma \mapsto s(\sigma)$$

est un élément de  $\hat{T}$ , qui vérifie  $s(1) = s_1$ . On vérifie facilement que  $s$  est fixé par l'action  $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1, G}(\sigma)$  de  $\Gamma_F$ . Posons  $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$  et  $\hat{B}' = \hat{G}' \cap \hat{B}$ . Pour chaque  $w \in W_F$  d'image  $\sigma$  dans  $\Gamma_F$ , choisissons un représentant  $\tilde{\eta}_{G'_1, G}(w) = \tilde{\eta}_{G'_1, G}(\sigma)$  de  $\eta_{G'_1, G}(\sigma)$  dans  $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ . L'automorphisme  $\text{Int}_{\tilde{\eta}_{G'_1, G}(\sigma)} \circ \sigma_G$  conserve la paire de Borel  $(\hat{B}', \hat{T})$  de  $\hat{G}'$ . Soit

$$\mathcal{G}' = \{(g'\tilde{\eta}_{G'_1, G}(w), w) : g' \in \hat{G}', w \in W_F\} \subset {}^L G.$$

L'ensemble  $\mathcal{G}'$  est un groupe qui normalise  $\hat{G}'$ . On en déduit une  $L$ -action de  $\Gamma_F$  sur  $\hat{G}'$ . Soit  $G'$  un  $F$ -groupe réductif connexe quasi-déployé dont  $\hat{G}'$ , muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. Le triplet  $\text{Res}_{F/F_1}(\mathbf{G}'_1) = (G', \mathcal{G}', s)$  est une donnée endoscopique de  $G$ , bien déterminée à équivalence près par un élément  $x$  de  $N_{\hat{G}}(\hat{T})$  tel que  $x(1) \in \text{Aut}(\mathbf{G}'_1)$  et  $\text{Int}_{\eta_{G'_1}(\tau)} \circ \tau_{G_1}(\bar{x}(1)) = \bar{x}(1)$  pour tout  $\tau \in W_{F_1}$ ; où  $\bar{x}$  est l'image de  $x$  dans  $W$ . Par construction, on a

$$(\text{Res}_{F/F_1}(\mathbf{G}'_1))_{F_1} = \mathbf{G}'_1.$$

Cela prouve le lemme.  $\square$

Soit  $\mathbf{G}''$  une autre donnée endoscopique de  $G$ . Si  $x \in \hat{G}$  est une équivalence entre  $\mathbf{G}'$  et  $\mathbf{G}''$ , alors  $x(1)$  est une équivalence entre  $\mathbf{G}'_{F_1}$  et  $\mathbf{G}''_{F_1}$ . Réciproquement, si  $x_1 \in \hat{G}_1$  est une équivalence entre  $\mathbf{G}'_{F_1}$  et  $\mathbf{G}''_{F_1}$ , alors on peut construire un  $x \in \hat{G}$  qui est une équivalence entre  $\mathbf{G}'$  et  $\mathbf{G}''$  et tel que  $x(1) = x_1$ .

Comme la propriété d'être  $F$ -quasi-simple n'est pas conservée par localisation, il nous faut maintenant revenir au cas général. Écrivons  $\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^r (\mathcal{D}_{k,1} \cup \dots \cup \mathcal{D}_{k,d_k})$  où, pour chaque  $k$ ,  $\mathcal{D}_{k,1} \cup \dots \cup \mathcal{D}_{k,d_k}$  est une orbite dans l'ensemble des composantes



connexes de  $\mathcal{D}$ . Pour  $k = 1, \dots, r$ , soit  $F_k/F$  l'extension séparable finie telle que  $\Gamma_{F_k}$  soit le stabilisateur de  $\mathcal{D}_{k,1}$  dans  $\Gamma_F$ . Le groupe  $G_k$  correspondant à  $\mathcal{D}_{k,1}$  est défini sur  $F_k$ , et l'on a  $G \simeq \prod_{k=1}^r H_k$  où  $H_k = \text{Res}_{F_k/F}(G_k)$ . Pour  $k = 1, \dots, r$ , soit  $\mathbf{H}'_k = (H'_k, \mathcal{H}'_k, s_k)$  une donnée endoscopique de  $H_k$ . La famille des  $\mathbf{H}'_k$  définit une donnée endoscopique  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  de  $G$  : on prend  $s = (s_1, \dots, s_r)$ ,  $G' = H'_1 \times \dots \times H'_r$ , et  $\mathcal{G}'$  est l'ensemble des  $((h_1, \dots, h_r), \sigma) \in {}^L G$  tels que pour chaque  $k$ ,  $(h_k, \sigma)$  appartient à  $\mathcal{H}'_k$ . Toute donnée endoscopique de  $\mathbf{G}$  est obtenue de cette manière. Par abus d'écriture, on note  $\mathbf{G}' = \prod_{k=1}^r \mathbf{H}'_k$ . À chaque donnée  $\mathbf{H}'_k$  est associée comme ci-dessus une donnée endoscopique  $\mathbf{G}'_k = (\mathbf{H}'_k)_{F_k}$  de  $G_k$ . L'application qui à  $\mathbf{G}'$  associe la famille  $\{\mathbf{G}'_1, \dots, \mathbf{G}'_r\}$  est compatible à la relation d'équivalence entre données endoscopiques en un sens évident (dédié par produit du cas  $r = 1$ ).

Si  $F$  global, pour chaque place  $v$  de  $F$ , chaque  $k$ , et chaque place  $w$  de  $F_k$  au-dessus de  $v$ , le complété  $F_{k,w}$  de  $F_k$  en  $w$  est une extension séparable finie de  $F_v$ . Le groupe  $G_v = G \times_F F_v$  est isomorphe à  $\prod_{k=1}^r H_{k,v}$  avec

$$H_{k,v} = \text{Res}_{F_k/F}(G_k) \times_F F_v \simeq \prod_{w_k|v} \text{Res}_{F_{k,w_k}/F_v}(G_{k,w_k})$$

où  $w_k$  parcourt les places de  $F_k$  au-dessus de  $v$ , et  $G_{k,w_k} = G_k \times_{F_k} F_{k,w_k}$ . C'est donc encore un groupe du même type, c'est-à-dire un produit fini de groupes  $F_v$ -quasi-simples simplement connexes. L'application qui à une donnée endoscopique  $\mathbf{G}'$  de  $G$  associe la famille  $\{\mathbf{G}'_1, \dots, \mathbf{G}'_r\}$  est compatible à la localisation au sens suivant. Écrivons  $\mathbf{G}' = \prod_{k=1}^r \mathbf{H}'_k$ . Pour chaque place  $v$  de  $F$ , et pour chaque  $k$ , la donnée endoscopique  $\mathbf{H}'_{k,v}$  de  $H_{k,v}$  obtenue par localisation de  $\mathbf{H}'_k$  en  $v$  se décompose (avec le même abus d'écriture que plus haut) en

$$\mathbf{H}'_{k,v} = \prod_{w_k|v} \mathbf{H}'_{k,w_k}$$

pour des données endoscopiques  $\mathbf{H}'_{k,w_k}$  de  $H_{k,w_k} = \text{Res}_{F_{k,w_k}/F_v}(G_{k,w_k})$ . D'autre part pour chaque place  $w_k$  de  $F_k$  au-dessus de  $v$ , la donnée endoscopique  $\mathbf{G}'_k = (\mathbf{H}'_k)_{F_k}$  de  $G_k$  donne par localisation une donnée endoscopique  $\mathbf{G}'_{k,w_k}$  de  $G_{k,w_k}$ . La compatibilité en question est (pour tout  $v$ , tout  $k$ , et tout  $w_k|v$ )

$$(\mathbf{H}'_{k,w_k})_{F_{k,w_k}} = \mathbf{G}'_{k,w_k}.$$

On en déduit qu'il suffit de prouver la proposition de ?? dans le cas  $r = 1$  et  $d_1 = 1$ , c'est-à-dire le cas où  $\hat{G} (= \hat{G}_{\text{AD}})$  est simple.

**1.3. Hypothèses et définitions.** — Continuons avec les notations de ?? et ??. Sauf précision, le corps  $F$  est global ou local. On suppose jusqu'à la fin de l'article que  $G$  est quasi-simple et simplement connexe, c'est-à-dire que  $\hat{G} = \hat{G}_{\text{AD}}$  et  $\mathcal{D}$  est connexe. Pour alléger l'écriture, nous utilisons désormais la forme « galoisienne » des  $L$ -groupes :  ${}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_F$ . L'adaptation de ce qui suit à la forme « groupes de Weil » ne pose aucun problème.

Notons  $\alpha_0$  l'opposée de la plus grande racine dans  $\Sigma^+$  et  $\Delta_a = \{\alpha_0\} \cup \Delta$ . En écrivant  $-\alpha_0$  dans la base  $\Delta$ , on obtient une relation

$$(1) \quad \sum_{\alpha \in \Delta_a} d(\alpha)\alpha = 0$$

où  $d(\alpha_0) = 1$  et, pour  $\alpha \in \Delta$ ,  $d(\alpha)$  appartient à l'ensemble  $\mathbb{N}_{>0}$  des entiers strictement positifs. On sait que l'espace des relations entre les éléments de  $\Delta_a$  est la droite portée par la relation (1). Cela implique que

(2) la relation (1) est la seule relation linéaire entre les éléments de  $\Delta_a$  dont les coefficients sont entiers relatifs et dont au moins un coefficient vaut 1.

Rappelons aussi la propriété suivante. Pour  $\beta \in \Sigma^+$ , écrivons  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\alpha$  avec  $m(\alpha) \in \mathbb{N}$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ . Alors

(3)  $m(\alpha) \leq d(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ .

Notons  $\mathcal{D}_a$  le diagramme de Dynkin complété dont l'ensemble de sommets est  $\Delta_a$ . Notons  $\text{Aut}(\mathcal{D}) \subset \text{Aut}(\mathcal{D}_a)$  les groupes d'automorphismes de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}_a$ . Remarquons que, puisque  $\hat{G}$  est adjoint,  $\text{Aut}(\mathcal{D}_a)$  se plonge naturellement dans le groupe d'automorphismes de  $\hat{T}$ . Puisque la paire  $(\hat{B}, \hat{T})$  est conservée par l'action galoisienne, l'action galoisienne se restreint en une action sur  $\Delta$  et  $\Delta_a$ , et peut être considérée comme un homomorphisme  $\Gamma_F \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D})$ . D'ailleurs comme on le sait, la donnée de l'action galoisienne est équivalente à celle de cet homomorphisme. On note  $E$  l'extension galoisienne finie de  $F$  telle que  $\Gamma_E$  soit le noyau de cet homomorphisme.

Rappelons qu'on a noté  $W$  le groupe de Weyl de  $\hat{G}$  relatif à  $\hat{T}$ . Soit  $\Omega$  le sous-groupe des éléments de  $W$  qui conservent  $\Delta_a$ . L'application qui à un élément de  $\Omega$  associe son action sur  $\mathcal{D}_a$  identifie  $\Omega$  à un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathcal{D}_a)$ . On sait [?][VI.4.3] que c'est un sous-groupe abélien distingué de  $\text{Aut}(\mathcal{D}_a)$ , et que

$$\text{Aut}(\mathcal{D}_a) = \Omega \rtimes \text{Aut}(\mathcal{D}).$$

Signalons que, pour  $\tau \in \text{Aut}(\mathcal{D}_a)$ , on a  $d(\tau(\alpha)) = d(\alpha)$  pour toute racine  $\alpha \in \Delta_a$  : en appliquant  $\tau^{-1}$  à (1), on obtient  $\sum_{\alpha \in \Delta_a} d(\tau(\alpha))\alpha = 0$  ; c'est une relation entre les éléments de  $\Delta_a$  qui vérifie les conditions de (2), donc c'est la relation (1). On voit en inspectant chaque système de racines que :

(4) l'application  $\omega \mapsto \omega(\alpha_0)$  est une bijection de  $\Omega$  sur l'ensemble des racines  $\alpha \in \Delta_a$  telles que  $d(\alpha) = 1$ .

**1.4. La construction de Langlands.** — On fixe pour tout  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  un élément  $\zeta_n \in \mathbb{C}^\times$  qui est une racine primitive de 1 d'ordre  $n$ . Soit  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  une donnée endoscopique de  $G$  (rappelons que  $\mathcal{G}' \subset {}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_F$ ). À équivalence près, on peut supposer, et on suppose,  $s \in \hat{T}$ . Dans ce paragraphe ??, on impose la condition :

(1)  $s$  est d'ordre fini.

On note  $d$  cet ordre.

Nous allons rappeler les résultats de Langlands [?, pp. 708-709]. Commençons par reprendre la construction habituelle (cf. ??). On pose  $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ \supset \hat{T}$ , et on fixe un sous-groupe de Borel  $\hat{B}'$  de  $\hat{G}'$  contenant  $\hat{T}$ . Pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ , on peut choisir

un élément  $(g(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'$  dont l'action par conjugaison conserve la paire  $(\hat{B}', \hat{T})$ . La classe  $\hat{T}g(\sigma)$  est uniquement déterminée. Il existe donc un élément bien déterminé  $w_{G'}(\sigma) \in W$  tel que l'action par conjugaison de  $(g(\sigma), \sigma)$  sur  $\hat{T}$  soit égale à  $w_{G'}(\sigma)\sigma_G$ . L'application

$$\sigma \mapsto \sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G$$

est un homomorphisme de  $\Gamma_F$  dans le groupe d'automorphismes de  $\hat{T}$  qui fixent  $s$ .

Pour  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ , posons  $\mathfrak{Y}_k = \{\alpha \in \Sigma; \alpha(s) = \zeta_d^k\}$ . L'ensemble  $\mathfrak{Y}_0$  est celui des racines de  $\hat{T}$  dans  $\hat{G}'$ . On note  $\mathfrak{X}_0$  l'ensemble de racines simples relatif à  $\hat{B}'$ . On introduit dans  $\Sigma$  la relation d'ordre partiel  $\leq_{\hat{B}'}$  suivante : pour  $\alpha, \beta \in \Sigma$ ,  $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$  si et seulement si  $\beta - \alpha$  est égal à une combinaison linéaire des éléments de  $\mathfrak{X}_0$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$ . Pour  $k \in \{1, \dots, d-1\}$ , notons  $\mathfrak{Z}_k$  l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{Y}_k$  qui ne sont pas combinaisons linéaires d'éléments de  $\bigcup_{j=0, \dots, k-1} \mathfrak{Y}_j$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . En particulier  $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Y}_1$ . On note  $\mathfrak{X}_k$  l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{Z}_k$  qui sont minimaux pour l'ordre  $\leq_{\hat{B}'}$ . On pose  $\mathfrak{X} = \bigcup_{k=0, \dots, d-1} \mathfrak{X}_k$ . Le résultat de Langlands est :

(2) il existe  $u \in W$  tel que  $u(\mathfrak{X}) = \Delta$  ou  $u(\mathfrak{X}) = \Delta_a$ .

Quitte à remplacer  $G'$  par la donnée équivalente conjuguée par un relèvement de  $u$  dans le normalisateur  $N_{\hat{G}'}(\hat{T})$  de  $\hat{T}$  dans  $\hat{G}'$  et à remplacer  $\hat{B}'$  par  $u(\hat{B}')$ , on peut supposer  $u = 1$  ; donc  $\mathfrak{X} = \Delta$  ou  $\mathfrak{X} = \Delta_a$ . Remarquons que, jusque-là, les constructions ne dépendent que de  $s$  et d'un choix de  $\hat{B}'$  mais pas de  $\mathcal{G}'$ .

Justement, puisque les constructions ne dépendent que de  $s$  et de  $\hat{B}'$ , elles sont conservées par le groupe des automorphismes de  $\hat{T}$  qui fixent  $s$  et conservent  $\hat{B}'$  (conserver  $\hat{B}'$  revient à conserver l'ensemble  $\mathfrak{X}_0$  de racines simples relatif à  $\hat{B}'$ ). En particulier, pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ , l'automorphisme  $\sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G$  de  $\hat{T}$  conserve chaque  $\mathfrak{X}_k$  et  $\mathfrak{X}$  tout entier. L'automorphisme  $\sigma_G$  conservant  $\Delta$  et  $\Delta_a$ , donc  $\mathfrak{X}$ ,  $w_{G'}(\sigma)$  conserve aussi  $\mathfrak{X}$ . Supposons d'abord  $\mathfrak{X} = \Delta$ . Le seul élément de  $W$  qui conserve  $\Delta$  est l'identité. Donc  $w_{G'}(\sigma) = 1$ . Il en résulte que

(3) si  $\mathfrak{X} = \Delta$ , alors  $\mathcal{G}' = \hat{G}' \rtimes \Gamma_F$ .

Supposons maintenant  $\mathfrak{X} = \Delta_a$ . Puisque  $w_{G'}(\sigma)$  conserve  $\Delta_a$ , on a  $w_{G'}(\sigma) \in \Omega$ . Dans la suite,  $w_{G'}(\sigma)$  et  $\sigma_{G'}$  seront la plupart du temps considérés comme des automorphismes de  $\mathcal{D}_a$ . Notons  $K$  l'extension galoisienne finie de  $F$  telle que  $\Gamma_K$  soit le noyau de l'homomorphisme  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ . On a

(4)  $E \subset K$  et la restriction à  $\Gamma_E$  de l'application  $\sigma \mapsto w_{G'}(\sigma)$  se quotiente en une injection de  $\Gamma_{K/E}$  dans  $\Omega$ .

En effet, pour  $\sigma \in \Gamma_K$ , on a  $w_{G'}(\sigma)\sigma_G = 1$ . Puisque  $\text{Aut}(\mathcal{D}_a)$  est produit semi-direct de  $\Omega$  et  $\text{Aut}(\mathcal{D})$ , cette égalité entraîne  $w_{G'}(\sigma) = 1$  et  $\sigma_G = 1$ . L'assertion (4) s'en déduit.

**1.5. Equivalences de données endoscopiques.** — On considère maintenant deux données endoscopiques  $G'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s)$  et  $G'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s)$  de  $G$ , dont l'élément  $s$  est le même. Les groupes  $\hat{G}'_1$  et  $\hat{G}'_2$  sont donc les mêmes et on note simplement  $\hat{G}'$  ce groupe. On suppose comme dans le paragraphe précédent que  $s$  est d'ordre fini  $d$ .

On applique les constructions précédentes aux deux données, en affectant d'indices 1 et 2 les objets associés à nos deux données. On peut choisir le même groupe de Borel  $\hat{B}'$  pour les deux constructions. Puisque celles-ci ne dépendent que de  $s$  et de ce choix de Borel, on obtient les mêmes ensembles  $\mathfrak{X}_k$  et  $\mathfrak{X}$  pour les deux données. Les seules différences entre nos données sont les actions galoisiennes  $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1}$  et  $\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}$ . L'assertion ??.(3) entraîne que

(1) si  $\mathfrak{X} = \Delta$ , les deux données sont équivalentes.

Supposons  $\mathfrak{X} = \Delta_a$ . Montrons que

(2) les données  $G'_1$  et  $G'_2$  sont équivalentes si et seulement s'il existe  $\omega \in \Omega$  tel que  $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$  pour  $k = 1, \dots, d-1$  et  $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ .

Si un tel  $\omega$  existe, on le relève en un élément quelconque  $x \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$  et on vérifie que  $x$  est une équivalence entre les deux données. Inversement, soit  $x$  une telle équivalence qui conjugue  $G'_1$  en  $G'_2$ . On peut multiplier  $x$  à gauche ou à droite par un élément de  $\hat{G}'$  et supposer que la conjugaison  $\text{Int}_x$  conserve la paire de Borel  $(\hat{B}', \hat{T})$ . Par définition,  $\text{Int}_x$  fixe  $s$ . Notons  $\omega$  l'image de  $\text{Int}_x$  dans  $W$ . Comme on l'a déjà dit, un automorphisme de  $\hat{T}$  qui fixe  $s$  et conserve  $\hat{B}'$  conserve tous les objets définis au paragraphe précédent. Donc  $\omega$  conserve  $\mathfrak{X} = \Delta_a$ , c'est-à-dire  $\omega \in \Omega$ . On a  $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$  pour  $k = 1, \dots, d-1$  comme on vient de le dire. Soit  $\sigma \in \Gamma_F$ . Pour  $i = 1, 2$ , on relève  $w_{G'_i}(\sigma)$  en un élément  $g_i(\sigma) \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$ . On a  $(g_i(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'_i$ . Par définition d'une équivalence, on a  $x(g_1(\sigma), \sigma)x^{-1} \in \mathcal{G}'_2$ , donc  $xg_1(\sigma)\sigma_G(x)^{-1} = hg_2(\sigma)$  pour un  $h \in \hat{G}'$ . Tous les éléments autres que  $h$  normalisant  $\hat{T}$ ,  $h$  le normalise aussi. Puisque les conjugaisons par  $x$ ,  $(g_1(\sigma), \sigma)$  et  $(g_2(\sigma), \sigma)$  conservent le groupe  $\hat{B}'$ , la conjugaison par  $h$  le conserve aussi. Un élément  $y$  de  $\hat{G}'$  tel que  $\text{Int}_y$  conserve  $(\hat{B}', \hat{T})$  appartient à  $\hat{T}$ , donc  $h \in \hat{T}$ . En projetant dans  $W$  l'égalité  $xg_1(\sigma)\sigma_G(x)^{-1} = hg_2(\sigma)$ , on obtient  $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$ . Cela démontre (2).

Considérons une unique donnée  $G' = (G', \mathcal{G}', s)$ . On note  $\text{Out}(G')$  le groupe des composantes connexes du groupe d'automorphismes de  $G'$ . Si  $s$  est d'ordre fini et  $\mathfrak{X} = \Delta_a$ , on démontre de la même façon que

(3)  $\text{Out}(G')$  est le groupe des  $\omega \in \Omega$  tels que  $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$  pour  $k = 1, \dots, d-1$  et  $\omega\sigma_{G'}\omega^{-1} = \sigma_{G'}$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ .

**1.6. Équivalence presque partout, cas particulier.** — On suppose dans ce paragraphe et le suivant que  $F$  est un corps de nombres. Soit  $G' = (G', \mathcal{G}', s)$  une donnée endoscopique de  $G$ . Rappelons que pour chaque place  $v$  de  $F$ , on en déduit une donnée endoscopique  $G'_v = (G'_v, \mathcal{G}'_v, s)$  de  $G_v = G \times_F F_v$ , cf. ??. En particulier,  $\mathcal{G}'_v$  est le sous-groupe des  $(g, \sigma) \in \mathcal{G}'$  tels que  $\sigma \in \Gamma_v$ .

Considérons deux données endoscopiques  $G'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$  et  $G'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$  de  $G$ . On suppose :

- (1) les éléments  $s_1$  et  $s_2$  sont d'ordre fini ;
- (2) les données  $G'_{1,v}$  et  $G'_{2,v}$  sont équivalentes pour presque toute place  $v$ .

**PROPOSITION.** — *Sous ces hypothèses, la proposition de ?? est vraie : les données  $G'_1$  et  $G'_2$  sont équivalentes.*

*Démonstration.* — L'équivalence en au moins une place entraîne que  $s_1$  et  $s_2$  sont conjugués. Quitte à remplacer l'une de nos données par une donnée équivalente, on peut supposer  $s_1 = s_2$  et on note simplement  $s$  cet élément. On applique les constructions des paragraphes précédents, on obtient en particulier un ensemble  $\mathfrak{X}$  commun qui est égal soit à  $\Delta$  soit à  $\Delta_a$ . Si  $\mathfrak{X} = \Delta$ , l'assertion ??.(1) entraîne que  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  sont équivalentes. Supposons  $\mathfrak{X} = \Delta_a$ . Notons  $\Omega^\sharp$  le sous-groupe des  $\omega \in \Omega$  tels que  $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$  pour tout  $k = 1, \dots, d-1$ . Montrons que

(3) pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ , il existe  $\omega \in \Omega^\sharp$  tel que  $\omega \sigma_{G'_1} \omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$ .

D'après le théorème de Tchebotarev et l'hypothèse (2), il existe une place  $v$  et un élément  $\gamma \in \Gamma_F$  tels que les données  $\mathbf{G}'_{1,v}$  et  $\mathbf{G}'_{2,v}$  soient équivalentes et  $\gamma \sigma \gamma^{-1} \in \Gamma_{F_v}$ . En appliquant ??.(2) aux données locales, il existe  $\omega' \in \Omega^\sharp$  tel que

$$\omega' \gamma_{G'_1} \sigma_{G'_1} \gamma_{G'_1}^{-1} \omega'^{-1} = \gamma_{G'_2} \sigma_{G'_2} \gamma_{G'_2}^{-1}.$$

Posons  $\omega = \gamma_{G'_2}^{-1} \omega' \gamma_{G'_1} = \gamma_G^{-1} \omega_{G'_2}(\gamma)^{-1} \omega' \omega_{G'_1}(\gamma) \gamma_G$ . Puisque  $\Omega$  est distingué dans  $\text{Aut}(\mathcal{D}_a)$ , on a  $\omega \in \Omega$ . Puisque  $\omega'$  et  $\gamma_{G'_2}$  conservent tous deux les ensembles  $\mathfrak{X}_k$ ,  $\omega$  les conserve aussi, donc  $\omega \in \Omega^\sharp$ . Enfin, on a bien  $\omega \sigma_{G'_1} \omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$ . Cela démontre (3).

On a

(4)  $w_{G'_1}(\sigma) = w_{G'_2}(\sigma)$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_E$ .

En effet, pour  $\sigma \in \Gamma_E$ , on a simplement  $\sigma_{G'_i} = w_{G'_i}(\sigma)$  pour  $i = 1, 2$ . Ces éléments  $w_{G'_i}(\sigma)$  appartiennent à  $\Omega$  et sont conjugués par un élément de  $\Omega$  d'après (3). Puisque  $\Omega$  est commutatif, ils sont égaux.

Si  $E = F$ , l'assertion (4) entraîne que  $\mathbf{G}'_1 = \mathbf{G}'_2$ . Supposons maintenant que  $\Gamma_{E/F}$  soit cyclique et fixons un élément  $\gamma \in \Gamma_F$  dont l'image dans  $\Gamma_{E/F}$  soit un générateur de ce groupe. Appliquons (3) et fixons  $\omega \in \Omega^\sharp$  tel que  $\omega \gamma_{G'_1} \omega^{-1} = \gamma_{G'_2}$ . Considérons les deux homomorphismes  $\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}$  et  $\sigma \mapsto \omega \sigma_{G'_1} \omega^{-1}$  de  $\Gamma_F$  dans  $\text{Aut}(\mathcal{D}_a)$ . L'ensemble des  $\sigma \in \Gamma_F$  en lesquels ils coïncident est un sous-groupe de  $\Gamma_F$ . Ce sous-groupe contient  $\Gamma_E$  d'après (4) et parce que  $\Omega$  est commutatif. Il contient aussi  $\gamma$  par le choix de  $\omega$ . Mais le sous-groupe engendré par  $\Gamma_E$  et  $\gamma$  est  $\Gamma_F$  tout entier. Donc  $\sigma_{G'_2} = \omega \sigma_{G'_1} \omega^{-1}$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ . D'après ??.(2), nos deux données endoscopiques sont donc équivalentes.

Remarquons que l'application  $\sigma \mapsto \sigma_G$  se quotiente en une injection de  $\Gamma_{E/F}$  dans  $\text{Aut}(\mathcal{D})$ . Donc l'hypothèse que  $\Gamma_{E/F}$  est cyclique est vérifiée sauf dans le cas où  $G$  est de type  $D_4$  et où  $\sigma \mapsto \sigma_G$  se quotiente en un isomorphisme de  $\Gamma_{E/F}$  sur  $\text{Aut}(\mathcal{D}) = \mathfrak{S}_3$ . Supposons ces hypothèses vérifiées. Notons  $L$  l'extension quadratique de  $F$  contenue dans  $E$  telle que l'image de  $\Gamma_L$  dans  $\mathfrak{S}_3$  soit le sous-groupe distingué d'ordre 3 de ce groupe. On fixe un élément  $\gamma \in \Gamma_L$  dont l'image dans  $\Gamma_{E/L}$  engendre ce groupe. Appliquons (3) et fixons  $\omega \in \Omega^\sharp$  tel que  $\omega \gamma_{G'_1} \omega^{-1} = \gamma_{G'_2}$ . Le même raisonnement que ci-dessus montre que les homomorphismes  $\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}$  et  $\sigma \mapsto \omega \sigma_{G'_1} \omega^{-1}$  coïncident sur  $\Gamma_L$ . Soit  $\sigma \in \Gamma_F$ . On a  $\sigma \gamma \sigma^{-1} \in \Gamma_L$ , donc, en appliquant ce que l'on vient de démontrer à cet élément et à  $\gamma$ , on a les deux égalités

$$\sigma_{G'_2} \gamma_{G'_2} \sigma_{G'_2}^{-1} = \omega \sigma_{G'_1} \gamma_{G'_1} \sigma_{G'_1}^{-1} \omega^{-1}, \quad \gamma_{G'_2} = \omega \gamma_{G'_1} \omega^{-1}.$$

Posons

$$\omega_1 = \omega^{-1} \sigma_{G'_2}^{-1} \omega \sigma_{G'_1} = \omega^{-1} \sigma_G^{-1} w_{G'_2}(\sigma)^{-1} \omega w_{G'_1}(\sigma) \sigma_G.$$

C'est un élément de  $\Omega$  puisque ce groupe est distingué dans  $\text{Aut}(\mathcal{D}_a)$ . Les égalités précédentes entraînent  $\omega_1 \gamma_{G'_1} \omega_1^{-1} = \gamma_{G'_1}$ , c'est-à-dire  $\omega_1 w_{G'_1}(\gamma) \gamma_G = w_{G'_1}(\gamma) \gamma_G \omega_1$ . Parce que  $\Omega$  est commutatif, on peut supprimer les termes  $w_{G'_1}(\gamma)$  : on a

$$(5) \quad \omega_1 \gamma_G = \gamma_G \omega_1.$$

Notons  $(\alpha_i)_{i=1,\dots,4}$  les éléments de  $\Delta$ ,  $\alpha_2$  étant la racine centrale, liée aux trois autres. Les racines  $\alpha \in \Delta_a$  telles que  $d(\alpha) = 1$  sont les  $\alpha_i$  pour  $i = 0, 1, 3, 4$ . Donc  $\omega_1(\alpha_0)$  est l'une de ces racines d'après ??.(4). Par hypothèse,  $\gamma_G$  est un automorphisme d'ordre 3. Il fixe  $\alpha_2$  et  $\alpha_0$  et permute cycliquement  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ . L'égalité (5) entraîne que  $\omega_1(\alpha_0)$  est fixe par  $\gamma_G$  et ne peut donc être que  $\alpha_0$ . L'assertion ??.(4) entraîne alors  $\omega_1 = 1$ . En revenant à la définition de  $\omega_1$ , cela signifie que  $\sigma_{G'_2} = \omega \sigma_{G'_1} \omega^{-1}$ . Cela étant vrai pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ , nos deux données endoscopiques sont équivalentes. Cela achève la preuve.  $\square$

**1.7. Equivalence presque partout, cas général.** — Dans ce paragraphe, on prouve la proposition de ?? dans le cas général.

Considérons deux données endoscopiques  $G'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$  et  $G'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$  de  $G$ . On suppose que les données  $G'_{1,v}$  et  $G'_{2,v}$  sont équivalentes pour presque toute place  $v$ . On doit montrer que les données  $G'_1$  et  $G'_2$  sont équivalentes.

Encore une fois, l'équivalence en au moins une place entraîne que  $s_1$  et  $s_2$  sont conjugués. Quitte à remplacer l'une de nos données par une donnée équivalente, on peut supposer  $s_1 = s_2$  et on note simplement  $s$  cet élément. On va utiliser la construction de Langlands, cf. [?, pp. 704-705]. Notons  $\mu_\infty$  le groupe des racines de l'unité dans  $\mathbb{C}^\times$ . Le groupe  $\mathbb{C}^\times / \mu_\infty$  est sans torsion. Notons  $p : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times / \mu_\infty$  la projection naturelle et  $R$  le sous-groupe engendré par l'ensemble  $\{p(\alpha(s)); \alpha \in \Sigma\}$ . C'est un groupe abélien de type fini et sans torsion, donc il est isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Fixons-en une base  $(r_i)_{i=1,\dots,n}$ . Un élément  $r \in R$  s'écrit  $r = \prod_{i=1,\dots,n} r_i^{n_i(r)}$  avec  $n_i(r) \in \mathbb{Z}$ . Notons  $R^+$ , resp.  $R^-$ , le sous-ensemble des  $r \in R$  tels que, ou bien  $r = 1$ , ou bien, pour le plus petit entier  $i$  tel que  $n_i(r) \neq 0$ , on a  $n_i(r) > 0$ , resp.  $n_i(r) < 0$ . Il est clair que  $R^+$  et  $R^-$  sont stables par multiplication, que  $R^-$  est l'ensemble des inverses d'éléments de  $R^+$  et que  $R^+ \cap R^- = \{1\}$ . Notons  $\Sigma^P$ , resp.  $\Sigma^M$ , l'ensemble des  $\alpha \in \Sigma$  tels que  $p(\alpha(s)) \in R^+$ , resp.  $p(\alpha(s)) = 1$ . Les propriétés précédentes entraînent qu'il existe un sous-groupe parabolique  $\hat{P}$  de  $\hat{G}$  et une composante de Levi  $\hat{M}$  de  $\hat{P}$  tels que  $\hat{T} \subset \hat{M}$  et que  $\Sigma^P$ , resp.  $\Sigma^M$ , soit l'ensemble des racines de  $\hat{T}$  dans  $\hat{P}$ , resp.  $\hat{M}$ . Conjuguer nos données par un même élément de  $N_{\hat{G}}(\hat{T})$  conjugue notre couple  $(\hat{P}, \hat{M})$  par le même élément. On peut donc supposer  $\hat{B} \subset \hat{P}$ . Il résulte de la construction que

(1) tout automorphisme de  $\hat{G}$  qui conserve  $\hat{T}$  et fixe  $s$  conserve aussi la paire  $(\hat{P}, \hat{M})$ .

Notons  $\Delta^M = \Delta \cap \Sigma^M$  et  $\Delta_M = \Delta \setminus \Delta^M$ . L'ensemble  $\Delta^M$  est un ensemble de racines simples pour  $\hat{M}$ . Introduisons la relation d'équivalence dans  $\Delta_M$  définie par

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow p(\alpha(s)) = p(\beta(s)).$$

Notons  $(\Delta_i)_{i=1,\dots,m}$  l'ensemble des classes d'équivalence. Pour  $i = 1, \dots, m$ , fixons une racine  $\delta_i \in \Delta_i$ . Fixons un entier  $b \in \mathbb{N}_{>0}$  tel que :

- $\alpha(s)^b = 1$  pour tout  $\alpha \in \Sigma^M$  ;
- $\alpha(s)^b = \beta(s)^b$  pour tous  $\alpha, \beta \in \Sigma$  tels que  $p(\alpha(s)) = p(\beta(s))$ .

Posons  $c = \sum_{i=1,\dots,m} \sum_{\alpha \in \Delta_i} id(\alpha)$  et  $d = 3cb$ . Définissons un élément  $t \in T$  par les égalités :

- $\alpha(t) = \alpha(s)$  pour tout  $\alpha \in \Delta^M$  ;
- pour  $i = 1, \dots, m$  et pour tout  $\alpha \in \Delta_i$ ,  $\alpha(t) = \zeta_d^i \alpha(s) \alpha(\delta_i)^{-1}$ .

Montrons que

(2) tout automorphisme de  $\hat{G}$  qui conserve  $\hat{T}$  et fixe  $t$  conserve aussi la paire  $(\hat{P}, \hat{M})$ .

Pour tout  $\alpha \in \Sigma$ , on a  $\alpha(t) = \zeta_d^{m(\alpha)}$  pour un élément bien défini  $m(\alpha) \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Introduisons les ensembles  $S^M$ , resp.  $S^U$ ,  $S^{\bar{U}}$ , des racines  $\alpha \in \Sigma$  qui vérifient les conditions  $m(\alpha) \in 3c\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , resp.  $m(\alpha) \in (\{1, \dots, c\} + 3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z}$ , resp.  $m(\alpha) \in (\{-1, \dots, -c\} + 3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z}$ . Il résulte des définitions que l'on a les inclusions  $\Sigma^M \subset S^M$ ,  $(\Sigma^P \setminus \Sigma^M) \subset S^U$  et  $\{-\alpha; \alpha \in \Sigma^P - \Sigma^M\} \subset S^{\bar{U}}$ . Il résulte aussi des définitions que les ensembles  $S^M$ ,  $S^U$  et  $S^{\bar{U}}$  sont disjoints. Les inclusions précédentes sont des égalités. Par définition de ces ensembles,  $S^M$ ,  $S^U$  et  $S^{\bar{U}}$  sont conservés par tout automorphisme de  $\hat{G}$  qui conserve  $\hat{T}$  et qui fixe  $t$ . Il en est donc de même de  $\Sigma^P$  et  $\Sigma^M$ , donc de  $\hat{P}$  et  $\hat{M}$ . Cela prouve (2).

Montrons que

(3) tout automorphisme de  $\hat{G}$  qui conserve  $\hat{T}$  fixe  $s$  si et seulement s'il fixe  $t$ .

On considère un automorphisme  $u$  de  $\hat{G}$  qui conserve  $\hat{T}$  et qui fixe l'un des éléments  $s$  ou  $t$ . On veut prouver qu'il fixe l'autre. D'après (1) et (2),  $u$  conserve la paire  $(\hat{P}, \hat{M})$ . On sait que l'on peut écrire  $u = \text{Int}_n \circ v$  pour un élément  $n \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$  et un automorphisme  $v$  de  $\hat{G}$  qui conserve la paire  $(\hat{B}, \hat{T})$ . Alors la paire  $(v(\hat{P}), v(\hat{M}))$  est conjuguée par  $n^{-1}$  à  $(\hat{P}, \hat{M})$ . Les deux paires  $(\hat{P}, \hat{M})$  et  $(v(\hat{P}), v(\hat{M}))$  étant standard, il en résulte qu'elles sont égales. Donc  $v$  et  $\text{Int}_n$  conservent la paire  $(\hat{P}, \hat{M})$ . Il en résulte que  $n \in N_{\hat{M}}(\hat{T})$ . On note  $w$  l'image de  $n$  dans le groupe de Weyl  $W^M$  de  $\hat{M}$  relatif à  $\hat{T}$ . Puisque  $v$  conserve  $(\hat{P}, \hat{M})$ ,  $v$  conserve  $\Delta^M$  et  $\Delta_M$ .

Montrons que

(4) pour  $i = 1, \dots, m$ ,  $v$  conserve  $\Delta_i$ .

Notons  $y$  l'élément  $s$  ou  $t$  que l'on suppose conservé par  $u$ . On a  $wv(y) = y$ . Soit  $\alpha \in \Delta_i$ , et posons  $\beta = v(\alpha)$ . On a  $\beta(y) = v(\alpha)(wv(y)) = w'(\alpha)(y)$ , où  $w' = v^{-1}w^{-1}v$ . Cet élément  $w'$  appartient encore à  $W^M$ . Il est connu que  $w'(\alpha)$  s'écrit  $\alpha + \sum_{\alpha' \in \Delta^M} c(\alpha')\alpha'$ , avec des coefficients  $c(\alpha') \in \mathbb{Z}$ . Par définition de  $t$  et  $y$ , on a  $\alpha'(y) = \alpha'(s)$  pour tout  $\alpha' \in \Delta^M$  et ce terme est une racine de l'unité d'ordre au plus  $b$ . Il en résulte que  $\beta(y)^b \alpha(y)^{-b} = 1$ . Si  $y = s$ , alors  $p(\alpha(s)) = p(\beta(s))$  donc  $\beta \in \Delta_i$  par définition des classes d'équivalence  $\Delta_i$ . Si  $y = t$ , on a  $m(\beta) \in (m(\alpha) + 3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z} = (i + 3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z}$  et l'on voit que cette relation caractérise les éléments de  $\Delta_i$ , donc encore  $\beta \in \Delta_i$ . Cela prouve (4).

Posons  $x = s/t$ . Pour achever la preuve de (3), il suffit de prouver que  $w(x) = v(x) = x$ . On a  $\alpha(x) = 1$  pour tout  $\alpha \in \Delta^M$ , ce qui implique que  $x$  appartient au centre de  $\hat{M}$  donc est fixé par  $w \in W^M$ . Pour  $i = 1, \dots, m$ ,  $\alpha(x)$  est constant quand  $\alpha$  parcourt  $\Delta_i$ , cela par définition de  $t$ . Avec (4), on voit que  $v(\alpha)(x) = \alpha(x)$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ , donc  $v(x) = x$ . Cela achève de prouver (3).

Posons  $\mathbf{G}_1'' = (G_1', \mathcal{G}_1', t)$  et  $\mathbf{G}_2'' = (G_2', \mathcal{G}_2', t)$ . Il résulte facilement de (3) que ces triplets sont des données endoscopiques de  $G$ . Il en résulte tout aussi facilement que les données  $\mathbf{G}_1'$  et  $\mathbf{G}_2'$  sont équivalentes si et seulement si les données  $\mathbf{G}_1''$  et  $\mathbf{G}_2''$  le sont. La même chose vaut pour les données localisées en une place  $v$ . Alors l'assertion de la proposition pour  $\mathbf{G}_1'$  et  $\mathbf{G}_2'$  équivaut à la même assertion pour la paire  $\mathbf{G}_1''$  et  $\mathbf{G}_2''$ . Mais on peut appliquer à cette dernière paire la proposition de ???. Cela achève la preuve de la proposition de ??? dans le cas où  $\hat{G} = \hat{G}_{\text{AD}}$  est simple (pour la forme « galoisienne » des  $L$ -groupes). Cette preuve s'adapte aisément à la forme « groupes de Weil » des  $L$ -groupes, ce qui d'après ??? prouve la proposition de ??? dans le cas général.

## 2. Description des données endoscopiques elliptiques

**2.1. Construction de données endoscopiques elliptiques.** — Les hypothèses sont comme en ???. Notons  $\underline{\mathcal{E}}(G)$  l'ensemble des couples  $(\omega_{G'}, \mathcal{O})$  où :

- $\omega_{G'} : \Gamma_F \rightarrow \Omega$  est une application telle que l'application  $\sigma \mapsto \sigma_{G'} \stackrel{\text{déf}}{=} \omega_{G'}(\sigma)\sigma_G$  soit un homomorphisme de  $\Gamma_F$  dans  $\text{Aut}(\mathcal{D}_a)$  ;
- $\mathcal{O}$  est un sous-ensemble non vide de  $\Delta_a$  qui est conservé par l'action  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$  et qui forme une unique orbite pour cette action.

Disons que deux tels couples  $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$  et  $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$  sont équivalents si et seulement si il existe  $\omega \in \Omega$  tel que  $\mathcal{O}_2 = \omega(\mathcal{O}_1)$  et  $\sigma_{G'_2} = \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_F$ . Notons  $\underline{\mathcal{E}}(G)$  l'ensemble des classes d'équivalence dans  $\underline{\mathcal{E}}(G)$ . Nous allons associer à tout élément de  $\underline{\mathcal{E}}(G)$  une donnée endoscopique elliptique de  $G$ .

Considérons un couple  $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$ . Posons

$$d = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha).$$

Soit  $s$  l'unique élément de  $\hat{T}$  tel que  $\alpha(s) = 1$  pour tout  $\alpha \in \Delta \setminus (\mathcal{O} \cap \Delta)$  et  $\alpha(s) = \zeta_d$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$ . La relation ???(1) implique que ces égalités s'étendent à  $\Delta_a$ , c'est-à-dire  $\alpha(s) = 1$  pour tout  $\alpha \in \Delta_a \setminus \mathcal{O}$  et  $\alpha(s) = \zeta_d$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Puisque  $\mathcal{O}$  est stable par l'action galoisienne  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ , le point  $s$  est fixe par cette action. Posons  $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ . Ce groupe contient  $\hat{T}$ . Notons  $\mathcal{G}'$  le sous-ensemble de  ${}^L G$  formé des éléments  $(g\tilde{\omega}_{G'}(\sigma), \sigma)$  pour  $g \in \hat{G}'$  et  $\sigma \in \Gamma_F$ , où  $\tilde{\omega}_{G'}(\sigma)$  est un représentant quelconque de  $\omega_{G'}(\sigma)$  dans  $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ . L'ensemble  $\mathcal{G}'$  un groupe qui normalise  $\hat{G}'$ . On en déduit de la façon habituelle une  $L$ -action de  $\Gamma_F$  sur  $\hat{G}'$  et on introduit le groupe réductif connexe  $G'$  défini et quasi-déployé sur  $F$  dont  $\hat{G}'$ , muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. On vérifie que le triplet  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  est une donnée endoscopique de  $G$ .



Puisque  $\mathcal{O}$  est non vide, les éléments de  $\Delta_a \setminus \mathcal{O}$  sont linéairement indépendants. Notons  $\Sigma_0$  l'ensemble des éléments de  $\Sigma$  qui sont combinaisons linéaires des éléments de  $\Delta_a \setminus \mathcal{O}$  à coefficients entiers relatifs. Notons  $\Sigma_0^+$ , resp.  $\Sigma_0^-$ , le sous-ensemble des éléments de  $\Sigma_0$  pour lesquels ces coefficients sont tous positifs ou nuls, resp. négatifs ou nuls. Évidemment,  $\Sigma_0^- = -\Sigma_0^+$ . Notons  $\Sigma^{G'}$  l'ensemble des racines de  $\hat{T}$  dans  $\hat{G}'$ . Montrons :

(1) on a les égalités  $\Sigma^{G'} = \Sigma_0 = \Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^-$ .

L'ensemble  $\Sigma^{G'}$  est celui des  $\alpha \in \Sigma$  tels que  $\alpha(s) = 1$ . L'inclusion  $\Sigma_0 \subset \Sigma^{G'}$  est évidente. Soit  $\beta \in \Sigma^{G'}$ . Quitte à remplacer  $\beta$  par  $-\beta$ , on suppose  $\beta \in \Sigma^+$ . Écrivons  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\alpha$ , avec des coefficients  $m(\alpha) \in \mathbb{N}$ . D'après ??.(3), on a  $m(\alpha) \leq d(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ . Posons  $m = \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta} m(\alpha)$ . Les inégalités précédentes impliquent  $0 \leq m \leq d$  et même  $m \leq d-1$  si  $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ . L'égalité  $\beta(s) = 1$  implique  $\zeta_d^m = 1$ , donc  $m$  est divisible par  $d$ . Si  $\alpha_0 \in \mathcal{O}$  cela force  $m = 0$ . Si  $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$ , on a seulement  $m = 0$  ou  $m = d$ . Si  $m = 0$ , on a  $m(\alpha) = 0$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$ , donc  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus (\mathcal{O} \cap \Delta)} m(\alpha)\alpha$  et  $\beta$  appartient à  $\Sigma_0^+$ . Supposons  $m = d$ , ce qui impose  $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$ . L'égalité  $m = d$  et les inégalités  $m(\alpha) \leq d(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta = \mathcal{O}$  impliquent  $m(\alpha) = d(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Alors

$$\begin{aligned} \beta &= \left( \sum_{\alpha \in \Delta} (m(\alpha) - d(\alpha))\alpha \right) + \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha)\alpha \right) \\ &= \left( \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \mathcal{O}} (m(\alpha) - d(\alpha))\alpha \right) - \alpha_0. \end{aligned}$$

C'est une combinaison linéaire à coefficients entiers négatifs ou nuls d'éléments de  $\Delta_a \setminus \mathcal{O}$ . Donc  $\beta \in \Sigma_0^-$ . Cela prouve (1).

Cette propriété entraîne qu'il existe un unique sous-groupe de Borel  $\hat{B}'$  contenant  $\hat{T}$  de sorte que l'ensemble de racines positives dans  $\hat{G}'$  associé à ce Borel soit  $\Sigma_0^+$ . L'ensemble de racines simples  $\Delta^{G'}$  est alors  $\Delta_a \setminus \mathcal{O}$ .

Montrons que

(2) la donnée  $\mathbf{G}'$  est elliptique.

Notons  $X^*(\hat{T})$  le groupe des caractères algébriques de  $\hat{T}$  et  $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}} = X^*(\hat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Pour tout ensemble fini  $E \subset \Delta_a$  stable par l'action galoisienne  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ , notons  $\mathbb{Q}[E]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  de base  $E$ . Si  $E \neq \Delta_a$  l'espace  $\mathbb{Q}[E]$  se plonge naturellement dans  $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$ . On munit  $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$  et  $\mathbb{Q}[E]$  de cette action galoisienne  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ . Dire que la donnée  $\mathbf{G}'$  est elliptique est équivalent à l'égalité

$$X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{\Gamma_F} = \mathbb{Q}[\Delta^{G'}]^{\Gamma_F},$$

les exposants signifiants que l'on prend les sous-espaces de points fixes. On a une projection naturelle  $p : \mathbb{Q}[\Delta_a] \rightarrow X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$  dont le noyau est l'espace engendré par la relation (1) de ??, laquelle est fixe par  $\Gamma_F$ . De plus, cette projection est l'identité sur  $\mathbb{Q}[\Delta^{G'}]$  (qui est plongé à la fois dans les espaces de départ et d'arrivée). L'ellipticité se traduit donc par l'égalité

$$\dim(\mathbb{Q}[\Delta_a]^{\Gamma_F}) = 1 + \dim(\mathbb{Q}[\Delta^{G'}]^{\Gamma_F}).$$

Cela équivaut à  $\dim(\mathbb{Q}[\mathcal{O}]^{\Gamma_F}) = 1$ . Mais ceci résulte de l'hypothèse que  $\mathcal{O}$  est une unique orbite pour l'action de  $\Gamma_F$ .

**2.2. Injectivité.** — Continuons avec les notations de ???. Munissons  $\Sigma$  de l'ordre partiel  $\leq_{\hat{B}'}$ , défini en ??? : pour  $\alpha, \beta \in \Sigma$ , on a  $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$  si et seulement si  $\beta - \alpha$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{N}$  d'éléments de  $\Delta_a \setminus \mathcal{O}$ . Posons

$$\mathfrak{S} = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(s) = \zeta_d\}.$$

Cet ensemble contient  $\mathcal{O}$ .

Montrons que

(1) pour tout  $\beta \in \mathfrak{S}$ , il existe  $\alpha \in \mathcal{O}$  tel que  $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$ .

Supposons d'abord  $\beta \in \Sigma^+$ . Écrivons  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\alpha$ . Posons  $m = \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta} m(\alpha)$ . Comme plus haut, on a  $0 \leq m(\alpha) \leq d(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ , d'où  $0 \leq m \leq d$ . On a  $\beta(s) = \zeta_d^m$ . Puisque  $\beta(s) = \zeta_d$ , cela implique  $m \equiv 1 \pmod{d\mathbb{Z}}$ , donc  $m = 1$ . Il existe donc un unique élément  $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$  tel que  $m(\alpha) \neq 0$  et, pour cette unique racine, on a  $m(\alpha) = 1$ . Alors  $\beta = \alpha + \sum_{\alpha' \in \Delta \setminus (\mathcal{O} \cap \Delta)} m(\alpha')\alpha'$ , donc  $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$ . Supposons maintenant  $\beta \in -\Sigma^+$ , écrivons  $-\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\alpha$  et définissons  $m$  comme ci-dessus. On a alors  $\beta(s) = \zeta_d^{-m}$  d'où  $-m \equiv 1 \pmod{d\mathbb{Z}}$ . Cela impose  $m = d - 1$ . Supposons d'abord  $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$ . On a alors  $m = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} m(\alpha)$  et  $d = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha)$ . Les inégalités entre les  $m(\alpha)$  et les  $d(\alpha)$  impliquent qu'il existe un unique élément  $\alpha \in \mathcal{O}$  tel que  $m(\alpha) = d(\alpha) - 1$  et on a  $m(\alpha') = d(\alpha')$  pour tout  $\alpha' \in \mathcal{O} \setminus \{\alpha\}$ . Alors

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha_0 + \sum_{\alpha' \in \Delta} (d(\alpha') - m(\alpha'))\alpha' \\ &= \alpha + \alpha_0 + \sum_{\alpha' \in \Delta \setminus \mathcal{O}} (d(\alpha') - m(\alpha'))\alpha'. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que  $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$ . Supposons maintenant  $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ . On a alors  $m = \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \setminus \{\alpha_0\}} m(\alpha)$  et  $d = 1 + \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \setminus \{\alpha_0\}} d(\alpha)$ . L'égalité  $m = d - 1$  force  $m(\alpha) = d(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$ . On obtient comme ci-dessus

$$\beta = \alpha_0 + \sum_{\alpha' \in \Delta \setminus (\mathcal{O} \cap \Delta)} (d(\alpha') - m(\alpha'))\alpha'$$

et  $\alpha_0 \leq_{\hat{B}'} \beta$ . Cela démontre (1).

Montrons que

(2)  $\mathcal{O}$  est l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{S}$  qui sont minimaux pour l'ordre  $\leq_{\hat{B}'}$ .

La relation (1) entraîne que l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{S}$  minimaux pour l'ordre  $\leq_{\hat{B}'}$  appartient à  $\mathcal{O}$ . Soit maintenant  $\alpha \in \mathcal{O}$  et considérons un élément  $\beta \in \mathfrak{S}$  tel que  $\beta \leq_{\hat{B}'} \alpha$ . D'après (1), on peut fixer  $\alpha' \in \mathcal{O}$  tel que  $\alpha' \leq_{\hat{B}'} \beta$ , donc  $\alpha' \leq_{\hat{B}'} \alpha$ . Supposons  $\alpha' \neq \alpha$ . Alors, par définition de l'ordre  $\leq_{\hat{B}'}$ , on obtient une égalité

$$-\alpha + \alpha' + \sum_{\alpha'' \in \Delta_a \setminus \mathcal{O}} m(\alpha'')\alpha'' = 0,$$

avec des coefficients  $m(\alpha'') \in \mathbb{N}$ . Or les seules relations linéaires entre éléments de  $\Delta_a$  sont proportionnelles à la relation (1) de ??? donc le coefficient de  $\alpha$  et celui de

$\alpha'$  doivent être de même signe. Ce n'est pas le cas. Cette contradiction prouve que  $\alpha' = \alpha$ . Alors, les inégalités  $\alpha = \alpha' \leq_{\hat{B}'} \beta \leq_{\hat{B}'} \alpha$  entraînent  $\beta = \alpha$ , ce qui prouve que  $\alpha$  est minimal. Cela démontre (2).

**PROPOSITION.** — *L'application qui, à un couple  $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$ , associe la donnée  $\mathbf{G}'$ , se quotiente en une injection de  $\underline{E}(G)$  dans l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de  $G$ .*

*Démonstration.* — Soient  $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1), (\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$ . Notons  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  les données endoscopiques de  $G$  associées. La proposition signifie que  $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$  et  $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$  sont équivalentes si et seulement si  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  le sont. Dans un sens, c'est clair : si les couples  $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$  et  $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$  sont conjugués par un élément  $\omega \in \Omega$ , il suffit de relever  $\omega$  en un élément quelconque  $x$  de  $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ . L'élément  $x$  est une équivalence entre les deux données endoscopiques. Inversement, supposons que les données  $\mathbf{G}'_1$  et  $\mathbf{G}'_2$  soient équivalentes. On affecte les objets relatifs à nos deux séries de données d'indices 1 ou 2. En particulier, on introduit les sous-groupes de Borel  $\hat{B}'_1$  de  $\hat{G}'_1$ , resp.  $\hat{B}'_2$  de  $\hat{G}'_2$ , que l'on a défini avant l'assertion ??.(2). Fixons  $x \in \hat{G}$  qui réalise l'équivalence, c'est-à-dire que  $s_2 = xs_1x^{-1}$  et  $\mathcal{G}'_2 = x\mathcal{G}'_1x^{-1}$ . On peut multiplier  $x$  à droite par un élément de  $\hat{G}'_1$  et à gauche par un élément de  $\hat{G}'_2$ . On peut donc supposer que la conjugaison par  $x$  envoie la paire de Borel  $(\hat{B}'_1, \hat{T})$  de  $\hat{G}'_1$  sur la paire de Borel  $(\hat{B}'_2, \hat{T})$  de  $\hat{G}'_2$ . En particulier,  $x$  normalise  $\hat{T}$  et définit un élément  $\omega \in W$ . Puisque, pour  $i = 1, 2$ ,  $\Delta_a \setminus \mathcal{O}_i$  est l'ensemble des racines simples dans  $\Sigma^{G'_i}$  pour le Borel  $\hat{B}'_i$ , on a  $\omega(\Delta_a \setminus \mathcal{O}_1) = \Delta_a \setminus \mathcal{O}_2$ . De même,  $\omega$  transporte l'ordre  $\leq_{\hat{B}'_1}$  en l'ordre  $\leq_{\hat{B}'_2}$ . Pour  $i = 1, 2$ ,  $d_i$  est l'ordre de  $s_i$ . Puisque  $xs_1x^{-1} = s_2$ , on a  $d_1 = d_2$  et on note simplement  $d$  cet entier. Alors la conjugaison par  $\omega$  envoie  $\mathfrak{S}_1$  sur  $\mathfrak{S}_2$ . Puisque cette conjugaison transporte les ordres, l'assertion (2) entraîne qu'elle envoie  $\mathcal{O}_1$  sur  $\mathcal{O}_2$ . Alors, elle conserve  $\Delta_a$ , donc  $\omega \in \Omega$ . Soit  $\sigma \in \Gamma_F$ . Pour  $i = 1, 2$ , l'élément  $\omega_{G'_i}(\sigma)$  est obtenu en choisissant un élément  $(g'_i(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'_i$  qui conserve  $(\hat{B}'_i, \hat{T})$ , puis en posant  $\omega_{G'_i}(\sigma) = \hat{T}g'_i(\sigma)$ . Puisque  $x\mathcal{G}'_1x^{-1} = \mathcal{G}'_2$ , on a  $x(g'_1(\sigma), \sigma)x^{-1} = (hg_2(\sigma), \sigma)$ , pour un  $h \in \hat{G}'$ . Puisque la conjugaison par  $x$  envoie  $(\hat{B}'_1, \hat{T})$  sur  $(\hat{B}'_2, \hat{T})$ , la conjugaison par  $h$  conserve  $(\hat{B}'_2, \hat{T})$ . Donc  $h \in \hat{T}$ . On en déduit  $xg'_1(\sigma)\sigma_G(x)^{-1} \in \hat{T}g'_2(\sigma)$ , ce qui équivaut à  $\omega\omega_{G'_1}(\sigma)\sigma_G(\omega)^{-1} = \omega_{G'_2}(\sigma)$ . Ceci étant vrai pour tout  $\sigma$ , les couples  $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$  et  $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$  sont équivalents.  $\square$

### 2.3. Surjectivité d'après Langlands. —

**PROPOSITION.** — *L'application qui, à un couple  $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$ , associe la donnée  $\mathbf{G}'$ , se quotiente en une bijection de  $\underline{E}(G)$  sur l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de  $G$ .*

*Démonstration.* — L'injectivité ayant déjà été établie, il faut prouver la surjectivité. On considère une donnée endoscopique elliptique  $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$  de  $G$ . Parce qu'elle est elliptique, Langlands prouve (par la méthode que l'on a reprise en ??) que  $s$  est d'ordre fini. On effectue la construction de ??, dont on reprend les notations. Montrons que

- (1) si la donnée  $\mathbf{G}'$  est équivalente à la donnée principale  $\mathbf{G} = (G, 1, {}^L G)$ , on a  $\mathfrak{X} = \Delta$  ; sinon, on a  $\mathfrak{X} = \Delta_a$ , il existe un unique  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  tel que  $\mathfrak{X}_k \neq \emptyset$  et cet unique ensemble  $\mathfrak{X}_k$  forme une unique orbite pour l'action  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ .

Si la donnée  $\mathbf{G}'$  est équivalente à  $\mathbf{G}$ , on a  $s = 1$  donc  $d = 1$  et  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0$ . Puisque ce dernier ensemble est un ensemble de racines simples pour  $\hat{G}'$ , ses éléments sont linéairement indépendants donc  $\mathfrak{X} \neq \Delta_a$ , ce qui implique  $\mathfrak{X} = \Delta$ . Supposons maintenant que la donnée  $\mathbf{G}'$  ne soit pas équivalente à  $\mathbf{G}$ . Alors  $s \neq 1$  et  $d \geq 2$ . Il y a forcément une racine  $\alpha \in \Sigma$  pour laquelle  $\alpha(s) \neq 1$ , donc un  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  tel que  $\mathfrak{Y}_k \neq \emptyset$ . Considérons le plus petit  $k$  pour lequel cette propriété est vérifiée. Alors, par définition,  $\mathfrak{Z}_k = \mathfrak{Y}_k$  donc  $\mathfrak{Z}_k \neq \emptyset$ . L'ensemble  $\mathfrak{X}_k$  des éléments minimaux de  $\mathfrak{Z}_k$  n'est pas vide non plus. Comme dans la preuve de ??(2), l'ellipticité se traduit par l'égalité  $\dim(X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{\Gamma_F}) = \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F})$ . Si  $\mathfrak{X} = \Delta$ , on a

$$\dim(X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{\Gamma_F}) = \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F}) + \sum_{j=1, \dots, d-1} \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_j]^{\Gamma_F}).$$

Mais puisque  $\mathfrak{X}_k$  n'est pas vide, l'espace  $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_k]^{\Gamma_F}$  n'est pas nul : la somme des éléments de  $\mathfrak{X}_k$  appartient à cet espace. Donc  $\dim(X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{\Gamma_F}) > \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F})$ , contradiction. Donc  $\mathfrak{X} = \Delta_a$ . Comme dans la preuve de ??(2), l'ellipticité se traduit alors par l'égalité

$$\dim(\mathbb{Q}[\Delta_a]^{\Gamma_F}) = 1 + \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F}).$$

S'il y a au moins deux  $j \in \{1, \dots, d-1\}$  tels que  $\mathfrak{X}_j \neq \emptyset$ , on voit comme ci-dessus que  $\dim(\mathbb{Q}[\Delta_a]^{\Gamma_F}) \geq 2 + \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F})$ , contradiction. Donc  $k$  est l'unique élément de  $\{1, \dots, d-1\}$  tel que  $\mathfrak{X}_k \neq \emptyset$ . Pour la même raison, on a  $\dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_k]^{\Gamma_F}) = 1$ . Cela prouve (1).

Considérons le couple  $(\omega_G, \{\alpha_0\})$ , où  $\omega_G : \Gamma_F \rightarrow \Omega$  est l'application constante de valeur 1. Ce couple appartient à  $\underline{\mathcal{E}}(G)$  et on voit que la donnée endoscopique qui lui est associée n'est autre que  $\mathbf{G}$ . Cela règle la question pour cette donnée. Supposons maintenant que la donnée  $\mathbf{G}'$  ne soit pas équivalente à  $\mathbf{G}$ . Alors  $\mathfrak{X} = \Delta_a$  et la construction de ?? munit  $\Delta_a$  d'une action galoisienne  $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$  qui est de la forme  $\sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G$ , où  $w_{G'}$  est une application de  $\Gamma_F$  dans  $\Omega$ . On pose  $\mathcal{O} = \mathfrak{X}_k$ , où  $k$  est l'entier de la relation (1). Le couple  $(w_{G'}, \mathcal{O})$  appartient à  $\underline{\mathcal{E}}(G)$ . On lui associe une donnée endoscopique  $\mathbf{G}'' = (G'', \mathcal{G}'', \underline{s})$  comme dans le paragraphe précédent. Il résulte des définitions que  $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}'$ . Il est moins clair que  $\underline{s} = s$ . En effet, les définitions entraînent  $\alpha(s) = \alpha(\underline{s}) = 1$  pour  $\alpha \in \Delta_a \setminus \mathcal{O}$ , mais, pour  $\alpha \in \mathcal{O}$ ,  $\alpha(s) = \zeta_d^k$  tandis que  $\alpha(\underline{s}) = \zeta_{\underline{d}}$ , où  $\underline{d} = \sum_{\beta \in \mathcal{O}} d(\beta)$ . Pour montrer que  $\underline{s} = s$  et donc pour achever la preuve de la proposition, il reste à prouver :

- (2) on a les égalités  $\underline{d} = d$  et  $k = 1$ .

On vient de dire que  $\alpha(s) = 1$  si  $\alpha \in \Delta_a \setminus \mathcal{O}$  et  $\alpha(s) = \zeta_d^k$  si  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Puisque  $d$  est par définition l'ordre de  $s$ , cela entraîne que  $k$  est premier à  $d$ . De plus, la relation ??(1) entraîne que  $\zeta_d^{kd} = 1$ , donc  $d$  divise  $\underline{d}$ . On sait que, pour toute racine positive  $\beta \in \Sigma$ , on peut trouver une suite de racines positives  $(\beta_i)_{i=1, \dots, m}$  de sorte que  $\beta_1 \in \hat{\Delta}$ ,  $\beta_{i+1} - \beta_i \in \Delta$  pour  $i = 1, \dots, m-1$  et  $\beta_m = \beta$ . On applique cela à

$\beta = -\alpha_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} d(\alpha)\alpha$  et on écrit

$$(3) \quad \beta_i = \sum_{\alpha \in \Delta} d_i(\alpha)\alpha.$$

L'application  $i \mapsto d_i = \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta} d_i(\alpha)$  est croissante et on a  $d_{i+1} \leq d_i + 1$ . Pour  $i = m$ , on a  $d_m = \underline{d}$  si  $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$ , et  $d_m = \underline{d} - 1$  si  $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ . Supposons  $d < \underline{d}$ . Alors il existe  $i$  tel que  $d_i = d$ . Fixons un tel  $i$ . On a alors  $\beta_i(s) = \zeta_d^{kd} = 1$ . Donc  $\beta_i \in \Sigma^{G'}$  et  $\beta_i$  est combinaison linéaire des éléments de  $\mathfrak{X}_0 = \Delta_a \setminus \mathcal{O}$ . Écrivons  $\beta_i = \sum_{\alpha \in \Delta_a \setminus \mathcal{O}} m(\alpha)\alpha$ . Si  $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ , seuls interviennent ici des éléments de  $\Delta$  et cette égalité coïncide avec (3). En ce cas  $d_i(\alpha) = 0$  pour  $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$ , donc  $d = d_i = 0$  ce qui est impossible. Si  $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$ , on a

$$\begin{aligned} \beta_i &= m(\alpha_0)\alpha_0 + \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \mathcal{O}} m(\alpha)\alpha \\ &= - \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} m(\alpha_0)d(\alpha)\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \mathcal{O}} (m(\alpha) - m(\alpha_0)d(\alpha))\alpha. \end{aligned}$$

En comparant avec (3), on obtient

$$d = -m(\alpha_0) \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha) = -m(\alpha_0)\underline{d}.$$

On a  $d \geq 1$  par définition de  $d$ . L'égalité précédente contredit l'hypothèse  $d < \underline{d}$ . Cette hypothèse est donc contradictoire, d'où  $d = \underline{d}$ . Le même raisonnement prouve que, pour tout  $e \in \{1, \dots, d-1\}$ , il existe une racine  $\beta_i$  telle que  $\beta_i(s) = \zeta_d^{ke}$ . En choisissant pour  $e$  l'entier tel que  $ke \equiv 1 \pmod{d\mathbb{Z}}$ , on obtient que l'ensemble  $\mathfrak{Y}_1$  n'est pas vide. Comme on l'a vu ci-dessus, cela entraîne  $\mathfrak{X}_1 \neq \emptyset$ , donc  $k = 1$ . Cela démontre (2) et la proposition.  $\square$

## Références

- [Bor] BOREL A., *Automorphic L-functions*, Proc. of Symposia in Pure Math. **33** (1979), part 2, pp. 27-61.
- [BT] BOREL A., TITS J., *Groupes réductifs*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques **27** (1965), pp. 55-150.
- [Bou] BOURBAKI N., *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, 1968.
- [LL] LABESSE J.-P., LAPID E., *Characters of G over local and global fields*, appendice à LAPID E., MAO Z., *A conjecture of Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms*, J. Number Theory **146** (2015), pp. 448-505.
- [L] LANGLANDS R., *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Canad. J. Math. **31** (1979), pp. 700-725.
- [MW] MÆGLIN C., WALDSPURGER J.-L., *Stabilisation de la formule des traces tordue, vol. 1 et 2*, Progress in Math. **316-317**, Birkhäuser, 2016.
- [W] WALDSPURGER J.-L., *Caractères automorphes d'un groupe réductif*, prépublication (2016), arXiv : 1608.07150.

---

BERTRAND LEMAIRE, Institut de Mathématiques de Luminy et UMR 6206 du CNRS, Université  
Aix-Marseille II, Case Postale 907, F-13288 Marseille Cedex 9  
*E-mail* : `Bertrand.Lemaire@univ-amu.fr`

JEAN-LOUP WALDSPURGER, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris-Rive-Gauche, 2  
place Jussieu 75005 Paris • *E-mail* : `jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr`