Fonctions dont les intégrales orbitales et celles de leurs transformées de Fourier sont à support topologiquement nilpotent

J.-L. Waldspurger

10 octobre 2019

Abstract Let F be a p-adic field and let G be a connected reductive group defined over F. We assume p is big. Denote $\mathfrak{g}$ the Lie algebra of G. To each vertex s of the reduced Bruhat-Tits' building of G, we associate as usual a reductive Lie algebra $\mathfrak{g}_s$ defined over the residual field $\mathbb{F}_q$. We normalize suitably a Fourier-transform $f \mapsto \hat{f}$ on $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. We study the subspace of functions $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ such that the orbital integrals of f and of $\hat{f}$ are 0 for each element of $\mathfrak{g}(F)$ which is not topologically nilpotent. This space is related to the characteristic functions of the character-sheaves on the spaces $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$, for each vertex s, which are cuspidal and with nilpotent support. We prove that our subspace behave well under endoscopy.

Introduction

Soient F une extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_p$ et G un groupe réductif connexe défini sur F. On impose que p est grand relativement à G. Introduisons l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe adjoint G_{AD}. Il est décomposé en facettes et on note $S(G)$ l'ensemble des sommets. A $s \in S(G)$, on associe un sous-groupe parahorique $K_s^0 \subset G(F)$ et son plus grand sous-groupe distingué pro-p-unipotent K_s^+. D'après Bruhat et Tits, il existe un groupe réductif connexe G_s défini sur le corps résiduel $\mathbb{F}_q$ tel que $K_s^0/K_s^+ = G_s(\mathbb{F}_q)$. On note par des lettres gothiques les algèbres de Lie de nos différents groupes. Dans $\mathfrak{g}(F)$, on a de façon similaire une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre $\mathfrak{k}_s$ (où $\mathfrak{o}_F$ est l'anneau des entiers de F) et une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre $\mathfrak{k}_s^+$, de sorte que $\mathfrak{k}_s/\mathfrak{k}_s^+ = \mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$. Toute fonction définie sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ se relève en une fonction sur $\mathfrak{k}_s$ et s'étend par 0 hors de $\mathfrak{k}_s$ en une fonction définie sur $\mathfrak{g}(F)$. Lusztig a introduit la notion de faisceau-caractère sur $\mathfrak{g}_s$. Notons $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ l'espace engendré par les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères définis sur $\mathfrak{g}_s$ qui sont cuspidaux, à support nilpotent et invariants par l'action de Frobenius. Par le procédé ci-dessus, on considère $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ comme un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. On note $fc(\mathfrak{g}(F))$ la somme de ces sous-espaces sur tous les sommets $s \in S(G)$. Introduisons l'espace $I(\mathfrak{g}(F))$ qui est le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions dont toutes les intégrales orbitales sont nulles. L'espace qui nous intéresse est l'image $FC(\mathfrak{g}(F))$ de $fc(\mathfrak{g}(F))$ dans $I(\mathfrak{g}(F))$. Pourquoi ? Parce que cet espace joue un rôle crucial dans deux travaux antérieurs : l'un sur les intégrales orbitales nilpotentes stables pour les groupes classiques non ramifiés, l'autre, avec C. Moeglin, sur les paquets stables de représentations de réduction unipotente des groupes $SO(2n+1)$. Il nous semble que, pour généraliser ces travaux à des groupes quelconques, il est utile de connaître un peu mieux les propriétés de cet espace $FC(\mathfrak{g}(F))$, en particulier son comportement par endoscopie.

Notre premier résultat caractérise cet espace $FC(\mathfrak{g}(F))$. On sait que l'on peut définir une transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ de sorte que, en notant $\mathbf{1}_{k_s}$ et $\mathbf{1}_{k_s^+}$ les fonctions caractéristiques de k_s et k_s^+, la fonction $\hat{\mathbf{1}}_{k_s}$ soit proportionnelle à $\mathbf{1}_{k_s^+}$ pour tout $s \in S(G)$. Cette transformation de Fourier se descend à l'espace $I(\mathfrak{g}(F))$. Notons $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des fonctions $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ telles que les intégrales orbitales $I^G(X, f)$ soient nulles pour tout élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ qui est semi-simple régulier et non elliptique.

Proposition. *L'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ coïncide avec celui des $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ telles que les intégrales orbitales $I^G(X, f)$ soient nulles pour tout élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ qui est semi-simple régulier et non topologiquement nilpotent et telles que les intégrales orbitales $I^G(X, \hat{f})$ vérifient la même propriété. De plus, $FC(\mathfrak{g}(F))$ est contenu dans l'espace $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$.*

Cette proposition est l'analogue du résultat de Lusztig ([2]) sur les groupes finis.

La théorie de l'endoscopie est assez simple quand on la restreint à l'espace $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Notons $Endo_{ell}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G (cf. par exemple [3] chapitre I ; une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ détermine un groupe endoscopique G' mais la notion de donnée endoscopique est plus fine que celle de groupe endoscopique). On a une décomposition

$$I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}'} I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}'),$$

où $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ est le sous-espace des $f \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ dont les transferts à toute donnée $\mathbf{G}'' \neq \mathbf{G}'$ sont nuls. Supposons G quasi-déployé. Il y a une donnée endoscopique elliptique principale $\mathbf{G}$, pour laquelle le groupe endoscopique est G lui-même. On note $I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G})$. Revenons au cas général. Pour $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, le transfert se restreint en un isomorphisme

$$transfert^{\mathbf{G}'} : I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}') \to I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}'(F))^{Aut(\mathbf{G}')},$$

où, à droite, il s'agit du sous-espace des invariants par l'action du groupe fini $Aut(\mathbf{G}')$ des automorphismes de $\mathbf{G}'$.

Pour tout $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, posons $FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}') = FC(\mathfrak{g}(F)) \cap I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$. Dans le cas où G est quasi-déployé, on pose simplement $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G})$. Notre second résultat exprime que les espaces $FC(\mathfrak{g}(F))$ se comportent "bien" par endoscopie. Précisément

Proposition. *(i) On a l'égalité*

$$FC(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)} FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}').$$

(ii) Supposons G quasi-déployé. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est invariant par tout automorphisme de G.

(iii) Pour $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, le transfert se restreint en un isomorphisme de $FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Aut(\mathbf{G}')}$.

Dans le paragraphe 7, nous définirons une application antilinéaire injective $D^G : FC(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$, ce dernier espace étant celui des distributions sur $\mathfrak{g}(F)$ invariantes par conjugaison par $G(F)$. En renforçant l'hypothèse sur p, nous montrerons au paragraphe 12 que les espaces images $D^G(FC(\mathfrak{g}(F)))$ vérifient des propriétés analogues à celles de la proposition ci-dessus.

1 Notations

Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. On note E^G l'ensemble des points fixes. Pour $e \in E$, on note $Z_G(e)$ le fixateur de e dans G. Pour un sous-ensemble $E' \subset E$, on note $Norm_G(E')$ le stabilisateur de E' dans G.

Soient k un corps commutatif parfait. On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Pour toute extension k' de k contenue dans $\bar{k}$, on note $\Gamma_{k'/k}$ le groupe de Galois de k'/k. On pose simplement $\Gamma_k = \Gamma_{\bar{k}/k}$.

Si E est un espace vectoriel sur k, on note E^* son dual. Pour tout groupe algébrique H défini sur k, on note H^0 sa composante neutre. Soit T un tore défini sur k. On note $X_*(T)$ le groupe des sous-groupes à un paramètre de T, $X^*(T)$ le groupe des caractères de T et on pose $\mathcal{T} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Remarquons que $X^*(T)$ s'identifie à un ensemble de formes linéaires sur $\mathcal{T}$.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur k. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On identifie G et $\mathfrak{g}$ à leurs ensembles de points $G(\bar{k})$ et $\mathfrak{g}(\bar{k})$ définis sur $\bar{k}$. On appelle conjugaison l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ et on la note selon le cas $(g, X) \mapsto gXg^{-1}$ ou $(g, X) \mapsto Ad(g)(X)$. Pour une fonction f sur $\mathfrak{g}(k)$ et pour $g \in G(k)$, on note ${}^g f$ la fonction $X \mapsto f(g^{-1}Xg)$.

On note $Z(G)$ le centre de G, G_{AD} le groupe adjoint de G et G_{SC} le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G. Notons $h(G)$ le plus grand nombre de Coxeter des composantes irréductibles de G_{AD}. Si k est de caractéristique $p > 0$, on suppose $p > h(G)$.

On a la décomposition canonique

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(G) \oplus \mathfrak{g}_{SC}.$$

On note $\mathfrak{g}_{nil}$ le sous-ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$. Tous les sous-groupes algébriques de G seront implicitement supposés définis sur k, sauf mention explicite du contraire. Pour un sous-groupe parabolique P de G, on note U_P son radical unipotent. On appelle groupe de Levi de G toute composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de G (tous deux définis sur k).

Il arrivera que l'on définisse un objet relatif au groupe G sans faire figurer la lettre G dans la notation. Quand on aura besoin du même objet relatif à un autre groupe H, on ajoutera la lettre H dans la notation.

2 Groupes sur un corps fini

Soit q une puissance entière d'un nombre premier p. On note $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. On note Fr l'élément de Frobenius qui engendre $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$. Comme dans le paragraphe précédent, on suppose $p > h(G)$.

On note $C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$, à valeurs complexes. Il est muni du produit hermitien non dégénéré

$$(f', f) = |G(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q} \bar{f}'(X) f(X).$$

On note $C_{inv}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace des fonctions qui sont invariantes par conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$.

(1) **Remarque.** La notation est imprécise car G_{SC} et G_{AD} ont la même algèbre de Lie mais l'invariance par conjugaison par $G_{SC}(\mathbb{F}_q)$ est plus faible que l'invariance par $G_{AD}(\mathbb{F}_q)$. Quand il y aura une ambiguïté sur le groupe en question, on notera plutôt $C_{inv}^G(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ l'espace ci-dessus. La même remarque s'applique à différents espaces de fonctions associés dans la suite à des algèbres de Lie, par exemple l'espace $I(\mathfrak{g}(F))$ du paragraphe 3 ou l'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ du paragraphe 9.

On note $C_{cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace des fonctions cuspidales, c'est-à-dire des fonctions $f \in C_{inv}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ qui vérifient la condition suivante : soient P un sous-groupe parabolique propre de G et M une composante de Levi de P ; alors, pour tout $X \in \mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité

$$\sum_{Y \in \mathfrak{u}_P(\mathbb{F}_q)} f(X+Y) = 0.$$

Fixons une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< .,. >$ sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ invariante par conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$. Fixons aussi un caractère non trivial $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$. On définit la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ par

$$\hat{f}(X) = q^{-dim(\mathfrak{g})/2} \sum_{Y \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)} f(Y)\psi(< X, Y >)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$.

On note $C_{nil}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace de $C_{inv}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ formé des fonctions à support nilpotent. On pose $C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = C_{nil}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) \cap C_{cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. On note $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace des fonctions $f \in C_{nil}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ telles que $\hat{f}$ appartient elle-aussi à $C_{nil}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. Par définition, l'espace $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ est invariant par transformation de Fourier.

On a

(2) si $Z(G)^0 \neq \{1\}$, $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) = 0$.

En effet, on a $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) \subset FC^{Z(G)^0}(\mathfrak{z}(G)(\mathbb{F}_q)) \otimes_{\mathbb{C}} FC^{G_{SC}}(\mathfrak{g}_{SC}(\mathbb{F}_q))$ et il suffit de prouver que $FC^{Z(G)^0}(\mathfrak{z}(G)(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. L'espace des fonctions à support nilpotent dans $\mathfrak{z}(G)(\mathbb{F}_q)$ est la droite portée par la fonction caractéristique de $\{0\}$. La transformée de Fourier de celle-ci est une fonction constante non nulle. Cette dernière est à support nilpotent si et seulement si $\mathfrak{z}(G)(\mathbb{F}_q) = \{0\}$. Cette condition équivaut à $Z(G)^0 = \{1\}$. $\square$

Supposons donc $Z(G)^0 = \{1\}$, c'est-à-dire G semi-simple. Lusztig a prouvé en [2] que $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ avait pour base les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères cuspidaux qui sont invariants par Γ_k, considérées à homothétie près (là encore, la notion de faisceau-caractère dépend du groupe G et pas seulement de $\mathfrak{g}$). En particulier, $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)) \subset C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$.

3 Groupes sur un corps p-adique

Soit p un nombre premier et F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On utilise les notations usuelles : $\mathfrak{o}_F$ est l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p}_F$ est son idéal maximal, $\mathbb{F}_q$ est le corps résiduel, $|.|_F$ et val_F sont les valeur absolue et valuation usuelles et on fixe une uniformisante ϖ_F. On note F^{nr} la plus grande extension de F contenue dans $\bar{F}$ et non ramifiée sur F.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. Notons $rg(G)$ le rang de G sur $\bar{F}$. On suppose

(1) $p \geq sup(2h(G)+1, rg(G)+2)$.

Cette hypothèse implique que G est déployé sur une extension galoisienne finie F' de F de degré premier à p, a fortiori modérément ramifiée. On note A_G le plus grand tore déployé contenu dans le centre de G, G_{reg} l'ensemble des éléments semi-simples fortement réguliers de G et $G_{ell}(F)$ le sous-ensemble de $G_{reg}(F)$ formé des éléments elliptiques, c'est-à-dire des $x \in G_{reg}(F)$ dont le centralisateur $T = Z_G(x)$ vérifie $A_T = A_G$ (la notation est contestable : il n'y a pas de sous-ensemble algébrique G_{ell}). On utilise les notations analogues $\mathfrak{g}_{reg}$, $\mathfrak{g}_{ell}(F)$, pour l'algèbre de Lie.

On note $Imm(G_{AD})$ l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe G_{AD} sur F. Le groupe $G_{AD}(F)$, a fortiori le groupe $G(F)$, agit sur $Imm(G_{AD})$. Cet immeuble est muni d'une décomposition en facettes. Pour chaque facette $\mathcal{F}$, on introduit le groupe $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ des éléments de $G(F)$ dont l'action conserve la facette, le sous-groupe parahorique $K_{\mathcal{F}}^0$ et son radical pro-p-unipotent $K_{\mathcal{F}}^+$. Bruhat et Tits ont défini un groupe réductif connexe $G_{\mathcal{F}}$ défini sur $\mathbb{F}_q$ tel que $K_{\mathcal{F}}^0/K_{\mathcal{F}}^+ \simeq G_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Aux groupes $K_{\mathcal{F}}^0$ et $K_{\mathcal{F}}^+$ sont associées des sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbres $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0}$ et $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0+}$ de $\mathfrak{g}(F)$. On a $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0}/\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0+} \simeq \mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Sous l'hypothèse (1), on peut munir et on munit $\mathfrak{g}(F)$ de la mesure de Haar telle que $mes(\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0}) = |\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)|^{1/2}$ pour toute facette $\mathcal{F}$. On a alors $mes(\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0+}) = |\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)|^{-1/2}$. On peut munir et on munit $G(F)$ de la mesure de Haar telle que $mes(K_{\mathcal{F}}^+) = mes(\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0+})$ pour toute facette $\mathcal{F}$. Les mêmes choix de mesures vaudront pour tout sous-groupe réductif connexe de G. Sous l'hypothèse (1), on sait que l'on peut choisir et on choisit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< .,. >$ sur $\mathfrak{g}(F)$, invariante par l'action adjointe de $G_{AD}(F)$ et vérifiant la condition suivante. Pour tout $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(F)$, notons $\mathfrak{h}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g}(F); \forall Y \in \mathfrak{h}, < Y, X > \in \mathfrak{p}_F\}$. Alors $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0}^{\perp} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F},0+}$ pour toute facette $\mathcal{F}$. On fixe un caractère $\psi : F \to \mathbb{C}^{\times}$ de conducteur $\mathfrak{p}_F$. On définit la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))$ par

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\psi(< Y, X >)\, dY.$$

La mesure que l'on a fixée est autoduale pour cette transformation. Soit $\mathcal{F}$ une facette de l'immeuble. De la forme $< .,. >$ se déduit naturellement une forme encore notée $< .,. >$ sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Du caractère ψ se déduit aussi un caractère encore noté ψ de $\mathbb{F}_q$. Ces données permettent de définir une transformation de Fourier dans $C(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q))$. Soit $f \in \mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. On relève f en une fonction sur $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0}$ invariante par translations par $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0+}$. On prolonge cette fonction en une fonction sur $\mathfrak{g}(F)$ nulle hors de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0}$. On note $f_{\mathcal{F}}$ la fonction ainsi obtenue. On vérifie que $(f_{\mathcal{F}})\hat{} = (\hat{f})_{\mathcal{F}}$.

Pour $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ et $f \in C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))$, on définit l'intégrale orbitale

$$I^G(X, f) = d^G(X)^{1/2} \int_{Z_G(X)(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}Xg)\, dg.$$

Puisque X est régulier, le centralisateur $Z_G(X)$ est un tore et il est muni de la mesure analogue à celle que l'on a fixée sur $G(F)$. Le terme $d^G(X)$ est l'habituel discriminant de Weyl. On étend cette définition à tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ en posant simplement

$$I^G(X, f) = \int_{Z_G(X)(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}Xg)\, dg$$

pour $X \in \mathfrak{g}(F) - \mathfrak{g}_{reg}(F)$, où on fixe arbitrairement une mesure de Haar sur $Z_G(X)(F)$.

On note $I(\mathfrak{g}(F))$ le quotient de $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions f telles que $I^G(X, f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ (ou tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, les deux conditions sont équivalentes). Le dual $I(\mathfrak{g}(F))^*$ est l'espace des distributions sur $\mathfrak{g}(F)$ invariantes par conjugaison par $G(F)$. Les intégrales orbitales peuvent être considérées comme des éléments de ce dual. On note $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace de $I(\mathfrak{g}(F))$ formé des éléments $f\in I(\mathfrak{g}(F))$ tels que $I^G(X,f)=0$ pour tout $X\in G_{reg}(F)-G_{ell}(F)$. La transformation de Fourier se descend en une transformation de $I(\mathfrak{g}(F))$ et celle-ci préserve le sous-espace $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$.

Pour $f,f'\in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, on définit le produit scalaire elliptique $J^G_{ell}(f',f)$ de la façon suivante. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{T}_{ell}$ des classes de conjugaison par $G(F)$ des sous-tores maximaux elliptiques de G, c'est-à-dire des sous-tores maximaux T tels que $A_T=A_G$. Pour tout tel tore T, posons $W^G(T)=Norm_{G(F)}(T)/T(F)$. Alors

$$(2)\qquad J^G_{ell}(f',f)=\sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}}|W^G(T)|^{-1}mes(A_G(F)\backslash T(F))\int_{\mathfrak{t}(F)}I^G(X,\bar{f}')I^G(X,f)\,dX.$$

Ce produit est défini positif.

Remarque. Conformément à nos conventions, la mesure sur $A_G(F)$ est ici la mesure analogue à celle que l'on a fixée sur $G(F)$. Dans ses articles, Arthur choisit celle pour laquelle la mesure du plus sous-groupe compact maximal de $A_G(F)$ vaut 1. Cela ne change rien aux propriétés que nous utiliserons du produit scalaire.

Les données F et G seront désormais conservées pour tout l'article.

4 Réseaux de Moy-Prasad

Soit $x\in Imm(G_{AD})$. Pour tout réel $r\geq 0$, Moy et Prasad ont défini un sous-groupe $K_{x,r}\subset G(F)$. Si $s>r$, $G_{x,s}$ est un sous-groupe distingué de $G_{x,r}$ et l'application $r\mapsto G_{x,r}$ est localement constante à gauche. On pose $G_{x,r+}=\cup_{s>r}G_{x,s}=G_{x,r+\epsilon}$ pour $\epsilon>0$ assez petit. En notant $\mathcal{F}$ la facette à laquelle appartient x, on a $K_{x,0}=K^0_{\mathcal{F}}$ et $K_{x,0+}=K^+_{\mathcal{F}}$. Aux groupes $G_{x,r}$ et $G_{x,r+}$ sont associées des sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbres $\mathfrak{g}_{x,r}$ ou $\mathfrak{g}_{x,r+}$ de $\mathfrak{g}(F)$. On peut d'ailleurs définir ces objets pour tout $r\in\mathbb{R}$, sans la restriction $r\geq 0$ (pour $r<0$, ce ne sont plus des algèbres, seulement des $\mathfrak{o}_F$-réseaux). On a les égalités $\mathfrak{g}_{x,r+1}=\mathfrak{p}_F\mathfrak{g}_{x,r}$ et $\mathfrak{g}^{\perp}_{x,r}=\mathfrak{g}_{x,(-r)+}$.

On note $\mathfrak{g}(F)_r$ la réunion des $\mathfrak{g}_{x,r}$ quand x parcourt $Imm(G_{AD})$. On définit $\mathfrak{g}(F)_{r+}$ de façon similaire. Dans le cas $r=0$, on pose $\mathfrak{g}_{ent}(F)=\mathfrak{g}(F)_0$, $\mathfrak{g}_{tn}(F)=\mathfrak{g}(F)_{0+}$. Les éléments de $\mathfrak{g}_{ent}(F)$ sont dits entiers, ceux de $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ sont dit topologiquement nilpotents.

Précisons nos notations en y glissant le corps de base F : $Imm_F(G_{AD})$, $\mathfrak{g}_{F,x,r}$. Fixons une extension galoisienne finie F'/F de degré premier à p, telle que G soit déployé sur F'. Notons $e(F'/F)$ l'indice de ramification. Le groupe $\Gamma_{F'/F}$ agit sur $Imm_{F'}(G_{AD})$ et $Imm_F(G_{AD})$ s'identifie canoniquement au sous-ensemble des points fixes $(Imm_{F'}(G_{AD}))^{\Gamma_{F'/F}}$. L'action de $G(F)$ est la restriction de celle de $G(F')$. Pour tous $x\in Imm_F(G_{AD})$ et $r\in\mathbb{R}$, on a $\mathfrak{g}_{F,x,r}=\mathfrak{g}_{F',x,er}\cap\mathfrak{g}(F)$. Cela ramène la description de ces réseaux au cas où G est déployé.

Supposons donc G déployé sur F. Fixons un sous-tore maximal déployé T de G. Pour tout $r\in\mathbb{R}$, on note $\mathfrak{t}(F)_r$ le sous-ensemble des $X\in\mathfrak{t}(F)$ tels que $val_F(x^*(X))\geq r$ pour tout $x^*\in X^*(T)$. Au tore T est associé un appartement dans $Imm(G_{AD})$ qui est un espace affine sous $\mathcal{T}/\mathcal{A}_G$. Fixons un sommet hyperspécial s de cet appartement. On identifie celui-ci à $\mathcal{T}/\mathcal{A}_G$ en envoyant s sur 0. Notons Σ l'ensemble des racines de T dans G et, pour tout $\alpha\in\Sigma$, notons $\mathfrak{u}_\alpha\subset\mathfrak{g}$ la droite radicielle associée à α. On peut en fixer un vecteur de base E_α de sorte que

$$\mathfrak{g}_{s,0} = \mathfrak{t}_0 \oplus (\oplus_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{o}_F E_\alpha).$$

Soient $x \in \mathcal{T}/\mathcal{A}_G$ et $r \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha \in \Sigma$, notons $n_{x,r,\alpha}$, resp. $n_{x,r+,\alpha}$, le plus petit entier relatif n tel que $r - \alpha(x) \leq n$, resp. $r - \alpha(x) < n$. Alors

$$\mathfrak{g}_{x,r} = \mathfrak{t}(F)_r \oplus (\oplus_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{p}_F^{n_{x,r,\alpha}} E_\alpha),$$

$$\mathfrak{g}_{x,r+} = \mathfrak{t}(F)_{r+} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{p}_F^{n_{x,r+,\alpha}} E_\alpha).$$

5 Quelques espaces de fonctions

Pour un sous-$\mathfrak{o}_F$-module $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(F)$ et un sous-$\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{h}$, notons $C_c(\mathfrak{h}/\mathfrak{l})$ le sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ formé des fonctions à support dans $\mathfrak{h}$ et invariantes par translations par $\mathfrak{l}$. On supprime l'indice c si $\mathfrak{h}$ est compact. Posons

$$\mathcal{H}_r = \sum_{x\in Imm(G_{AD})} C_c(\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_{x,r}),$$

$$\mathcal{H}_{r+} = \sum_{x\in Imm(G_{AD})} C_c(\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_{x,r+}),$$

$$\mathcal{H}_{r,r+} = \sum_{x\in Imm(G_{AD})} C(\mathfrak{g}_{x,r}/\mathfrak{g}_{x,r+}).$$

On a évidemment $\mathcal{H}_{r,r+} \subset \mathcal{H}_{r+} \subset \mathcal{H}_s$ pour tout $s > r$.

Soit $x \in Imm(G_{AD})$. Notons $\mathfrak{L}_{x,r}$ l'ensemble des $\mathfrak{o}_F$-réseaux $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}(F)$ tels que, pour tout voisinage V de x dans $Imm(G_{AD})$, il existe $y \in V$ de sorte que $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{y,r}$. On montrera ci-dessous que

(1) on a $\mathfrak{g}_{x,r+} \subset \mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}_{x,r}$ pour tout $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}_{x,r}$.

A fortiori, $\mathfrak{L}_{x,r}$ est fini. On pose

$$\mathcal{H}_r^\sharp = \sum_{x\in Imm(G_{AD})} \sum_{\mathfrak{l}\in\mathfrak{L}_{x,r}} C(\mathfrak{g}_{x,r}/\mathfrak{l}).$$

Pour x et $\mathfrak{l}$ intervenant dans cette somme, il existe par définition $y \in Imm(G_{AD})$ tel que $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{y,r}$ donc $C(\mathfrak{g}_{x,r}/\mathfrak{l}) \subset C_c(\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_{y,r})$. D'où l'inclusion $\mathcal{H}_r^\sharp \subset \mathcal{H}_r$.

Lemme. *Soit $r \in \mathbb{R}$. Il existe un réel $\epsilon_0 > 0$ tel que*

(i) on a les égalités $\mathfrak{g}(F)_{r-\epsilon} = \mathfrak{g}(F)_r$ et $\mathcal{H}_{r-\epsilon} = \mathcal{H}_r$ pour tout $\epsilon \in [0, \epsilon_0[$;

(ii) l'espace $\mathcal{H}_{r-\epsilon,(r-\epsilon)+}$ ne dépend pas de ϵ pour $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ et est inclus dans $\mathcal{H}_r^\sharp$.

Remarque. La première propriété de (i) résulte du fait connu que l'application $r \mapsto \mathfrak{g}(F)_r$ est localement constante à gauche et que ses sauts sont un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$. La deuxième propriété de (i) nous semble moins évidente.

Preuve. On fixe $r \in \mathbb{R}$. L'immeuble $Imm(G_{AD})$ est muni d'une distance, on note $|y - x|$ la distance entre deux points x, y de l'immeuble. Montrons que

(2) pour tout $x \in Imm(G_{AD})$, il existe $\epsilon_x, \eta_x > 0$ tels que, pour tout $\epsilon \in [0, \epsilon_x[$ et pour tout $y \in Imm(G_{AD})$ tel que $|y - x| < \eta_x$, on a $\mathfrak{g}_{x,r+} \subset \mathfrak{g}_{y,(r-\epsilon)+} \subset \mathfrak{g}_{y,r-\epsilon} \subset \mathfrak{g}_{x,r}$.

Fixons une extension galoisienne finie F'/F de degré premier à p telle que G soit déployé sur F'. Si l'on démontre l'assertion (2) pour le corps de base F', la même assertion s'en déduit sur le corps de base F en prenant les invariants par $\Gamma_{F'/F}$ de chacun des réseaux. Autrement dit, en oubliant cette extension F', on peut supposer G déployé sur F. Un voisinage de x dans l'immeuble est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'appartements. On peut fixer un appartement associé à un tore maximal déployé T et auquel appartient x et se limiter à considérer des points y dans cet appartement. Avec les notations du paragraphe précédent, l'assertion (2) se traduit par les deux assertions suivantes :

(3) il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $\mathfrak{t}(F)_{r-\epsilon} = \mathfrak{t}(F)_r$ pour tout $\epsilon \in [0, \epsilon_1[$;

(4) il existe $\epsilon_x, \eta_x > 0$ tels que, pour tout $\epsilon \in [0, \epsilon_x[$, pour tout $y \in \mathcal{T}/\mathcal{A}_G$ tel que $|y-x| < \eta_x$ et pour tout $\alpha \in \Sigma$, on a les inégalités $n_{x,r,\alpha} \leq n_{y,r-\epsilon,\alpha} \leq n_{y,(r-\epsilon)+,\alpha} \leq n_{x,r+,\alpha}$.

L'assertion (3) résulte immédiatement de la définition de $\mathfrak{t}(F)_r$. Pour tout $\alpha \in \Sigma$, on a les inégalités $n_{x,r,\alpha} - 1 < r - \alpha(x) \leq n_{x,r,\alpha}$ et $n_{x,r+,\alpha} - 1 \leq r - \alpha(x) < n_{x,r+,\alpha}$. On peut fixer $\eta_x > 0$ de sorte que, pour $y \in \mathcal{T}/\mathcal{A}_G$, la condition $|y - x| < \eta_x$ entraîne $\alpha(y) - \alpha(x) < \frac{1}{2}(r - \alpha(x) - n_{x,r,\alpha} + 1)$ et $\alpha(x) - \alpha(y) < n_{x,r+,\alpha} - r + \alpha(x)$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. On peut fixer $\epsilon_x > 0$ tel que $\epsilon_x < \frac{1}{2}(r - \alpha(x) - n_{x,r,\alpha} + 1)$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Supposons alors $\epsilon \in [0, \epsilon_x[$ et $|y - x| < \eta_x$. Soit $\alpha \in \Sigma$. On a

$$r-\epsilon-\alpha(y) = r-\alpha(x)-\epsilon+\alpha(x)-\alpha(y) > r-\alpha(x)-(r-\alpha(x)-n_{x,r,\alpha}+1) = n_{x,r,\alpha}-1.$$

Par définition, cela entraîne $n_{y,r-\epsilon,\alpha} \geq n_{x,r,\alpha}$. On a aussi

$$r-\epsilon-\alpha(y) \leq r-\alpha(y) = r-\alpha(x)-\alpha(y)+\alpha(x) < r-\alpha(x)+(n_{x,r+,\alpha}-r+\alpha(x)) = n_{x,r+,\alpha}.$$

Par définition, cela entraîne $n_{y,(r-\epsilon)+,\alpha} \leq n_{x,r+,\alpha}$. Cela démontre (4), d'où (2).

L'assertion (2) entraîne l'assertion (1) précédant l'énoncé. En fait, pour $x \in Imm(G_{AD})$ et η_x comme en (2), on a

(5) $\mathfrak{L}_{x,r}$ est l'ensemble des réseaux $\mathfrak{g}_{y,r}$ pour $y \in Imm(G_{AD})$ tel que $|y - x| < \eta_x$.

En effet, $\mathfrak{L}_{x,r}$ est contenu dans cet ensemble de réseaux par définition. Inversement, soit $y \in Imm(G_{AD})$ tel que $|y - x| < \eta_x$. Notons $[x, y]$ la géodésique joignant x à y, que l'on peut identifier au segment réel $[0, 1]$. Pour $t \in]0, 1]$, notons y_t l'élément de la géodésique qui s'identifie à $t \in [0, 1]$. Comme dans la preuve de (2), on étend le corps de définition F et on fixe un appartement associé à un tore maximal déployé T qui contient x et y. Un calcul analogue à ceux de la preuve de (2) montre que $\mathfrak{g}_{y_t,r} = \mathfrak{g}_{y,r}$. Pour tout voisinage V de x dans $Imm(G_{AD})$, il existe $t \in]0, 1]$ tel que $y_t \in V$. En appliquant la définition de $\mathfrak{L}_{x,r}$, il en résulte que $\mathfrak{g}_{y,r} \in \mathfrak{L}_{x,r}$. D'où (5).

Il existe un sous-ensemble compact $\Delta \subset Imm(G_{AD})$ tel que $Imm(G_{AD}) = \cup_{g\in G(F)} g\Delta$. Fixons un tel Δ. Pour tout $x \in \Delta$, fixons ϵ_x et η_x de sorte que (2) soit vérifié. L'ensemble Δ est recouvert par les ouverts $V_x = \{y \in Imm(G_{AD}); |y-x| < \eta_x\}$ quand x parcourt Δ. On en extrait un recouvrement fini $\Delta \subset \cup_{i=1,\ldots,n} V_{x_i}$. Posons $\epsilon_2 = inf_{i=1,\ldots,n} \epsilon_{x_i}$. Notons $\mathcal{R}_{r,\epsilon_2}$ l'ensemble des réseaux $\mathfrak{g}_{x,r-\epsilon}$ quand x décrit $Imm(G_{AD})$ et ϵ décrit $[0, \epsilon_2[$. Montrons que

(6) l'ensemble des orbites de l'action de $G(F)$ dans $\mathcal{R}_{r,\epsilon_2}$ est fini.

On peut se limiter à considérer les réseaux $\mathfrak{g}_{x,r-\epsilon}$ quand x décrit Δ et ϵ décrit $[0, \epsilon_2[$. Or, d'après (2), ces réseaux appartiennent à la réunion sur $i = 1, ..., n$ des ensembles de $\mathfrak{o}_F$ réseaux $\mathfrak{l}$ tels que $\mathfrak{g}_{x_i,r+} \subset \mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}_{x_i}$. Ces derniers ensembles étant finis, (6) s'ensuit.

Notons $\mathcal{R}_r$ l'ensemble des réseaux $\mathfrak{g}_{x,r}$ quand x décrit $Imm(G_{AD})$. Montrons que

(7) il existe $\epsilon_3 > 0$ tel que, pour $\epsilon \in [0, \epsilon_3[$, on a $\mathcal{R}_r = \mathcal{R}_{r-\epsilon}$.

D'après (6), on peut fixer des points $z_j \in Imm(G_{AD})$, $j = 1, ..., m$ de sorte que, pour tout $x \in Imm(G_{AD})$ et tout $\epsilon \in [0, \epsilon_2[$, il existe $j \in \{1, ..., m\}$ et $g \in G(F)$ de sorte que $\mathfrak{g}_{x,r-\epsilon} = Ad(g)(\mathfrak{g}_{z_j,r-\epsilon})$. Pour tout j, il existe $\epsilon_{3,j} > 0$ de sorte que $\mathfrak{g}_{z_j,r-\epsilon} = \mathfrak{g}_{z_j,r}$ pour tout $\epsilon \in [0, \epsilon_{3,j}[$. On pose $\epsilon_3 = inf(\epsilon_2, inf_j\epsilon_{3,j})$. Pour $x \in Imm(G_{AD})$ et $\epsilon, \epsilon' \in [0, \epsilon_3[$, soit $g \in G(F)$ et $j \in \{1, ..., m\}$ de sorte que $\mathfrak{g}_{x,r-\epsilon} = Ad(g)(\mathfrak{g}_{z_j,r-\epsilon})$. On a aussi $\mathfrak{g}_{x,r-\epsilon} = Ad(g)(\mathfrak{g}_{z_j,r-\epsilon'}) = \mathfrak{g}_{gz_j,r-\epsilon'}$, donc $\mathfrak{g}_{x,r-\epsilon}$ appartient à $\mathcal{R}_{r-\epsilon'}$. Cela prouve (7).

L'assertion (7) et les définitions entraînent que $\mathfrak{g}(F)_r = \mathfrak{g}(F)_{r-\epsilon}$ et $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_{r-\epsilon}$ pour $\epsilon \in [0, \epsilon_3[$. Cela démontre le (i) de l'énoncé (en supposant $\epsilon_0 \leq \epsilon_3$).

Montrons que

(8) pour ϵ, ϵ' tels que $0 < \epsilon' < \epsilon < \epsilon_2$, on a $\mathcal{H}_{r-\epsilon,(r-\epsilon)+} \subset \mathcal{H}_{r-\epsilon',(r-\epsilon')+}$.

Avec les notations déjà introduites, on peut fixer $i \in \{1, ..., n\}$, $y \in V_{x_i}$ et il suffit de prouver qu'il existe $z \in [x_i, y]$ tel que $\mathfrak{g}_{z,r-\epsilon'} = \mathfrak{g}_{y,r-\epsilon}$ et $\mathfrak{g}_{z,(r-\epsilon')+} = \mathfrak{g}_{y,(r-\epsilon)+}$. On pose simplement $x = x_i$. Comme dans la preuve de (2), on étend le corps de définition F et on fixe un appartement associé à un tore maximal déployé T qui contient x et y. On voit que la condition $\mathfrak{g}_{z,r-\epsilon'} = \mathfrak{g}_{y,r-\epsilon}$ et $\mathfrak{g}_{z,(r-\epsilon')+} = \mathfrak{g}_{y,(r-\epsilon)+}$ équivaut à la réunion sur $\alpha \in \Sigma$ des conditions suivantes

$r - \epsilon - \alpha(y) < n_{x,r,\alpha}$, resp. $r - \epsilon - \alpha(y) = n_{x,r,\alpha}$, resp. $r - \epsilon - \alpha(y) > n_{x,r,\alpha}$, équivaut à $r - \epsilon' - \alpha(z) < n_{x,r,\alpha}$, resp. $r - \epsilon' - \alpha(z) = n_{x,r,\alpha}$, resp. $r - \epsilon' - \alpha(z) > n_{x,r,\alpha}$.

Pour une racine α telle que $r - \alpha(x) < n_{x,r,\alpha}$, on a $r - \epsilon - \alpha(y) < n_{x,r,\alpha}$ et $r - \epsilon' - \alpha(z) < n_{x,r,\alpha}$ d'après la définition de η_{x_i} et ϵ_{x_i}. La condition ci-dessus est donc automatique. Supposons $r - \alpha(x) = n_{x,r,\alpha}$. Alors les conditions $r - \epsilon - \alpha(y) < n_{x,r,\alpha}$, resp. $r - \epsilon - \alpha(y) = n_{x,r,\alpha}$, resp. $r - \epsilon - \alpha(y) > n_{x,r,\alpha}$, équivalent à $\alpha(x) - \alpha(y) < \epsilon$, resp. $\alpha(x) - \alpha(y) = \epsilon$, resp. $\alpha(x) - \alpha(y) > \epsilon$. On traduit de façon analogue les conditions concernant z et ϵ'. Pour $z = y_{\epsilon'/\epsilon}$, on a $\alpha(x) - \alpha(z) = \frac{\epsilon'}{\epsilon}(\alpha(x) - \alpha(y))$ et on voit que les conditions relatives à y et ϵ sont bien équivalentes à celles relatives à z et ϵ'. Cela prouve (8).

Il résulte de (6), ou plus exactement de sa preuve, que, quand ϵ décrit $]0, \epsilon_2[$, les espaces $\mathcal{H}_{r-\epsilon,(r-\epsilon)+}$ ne parcourent qu'un nombre fini de sous-espaces de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. L'assertion (8) dit que l'application $\epsilon \mapsto \mathcal{H}_{r-\epsilon,(r-\epsilon)+}$ est décroissante. Elle est donc constante au voisinage de 0. C'est la première assertion du (ii) de l'énoncé. Pour la seconde assertion, il suffit de prouver que, pour $\epsilon \in]0, \epsilon_2[$ et pour $y \in Imm(G_{AD})$, il existe $x \in Imm(G_{AD})$ et $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}_{x,r}$ de sorte que $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}_{y,(r-\epsilon)+} \subset \mathfrak{g}_{y,r-\epsilon} \subset \mathfrak{g}_{x,r}$. A conjugaison près, on peut supposer qu'il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $y \in V_{x_i}$. Alors le point $x = x_i$ et le réseau $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{y,r}$ vérifient ces conditions d'après (2) et (5). $\square$

On note $\mathcal{H}_r^\natural$ l'espace $\mathcal{H}_{r-\epsilon,(r-\epsilon)+}$ pour un $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ quelconque. Il est inclus dans $\mathcal{H}_r^\sharp$.

Considérons le cas $r = 0$. Soit $x \in Imm(G_{AD})$, notons $\mathcal{F}$ la facette à laquelle il appartient. On a $\mathfrak{g}_{x,0} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F},0}$. Il résulte de (5) que, quand $\mathfrak{l}$ décrit $\mathfrak{L}_{x,0}$, les espaces $C(\mathfrak{g}_{x,0}/\mathfrak{l})$ s'identifient aux espaces de fonctions sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)/\mathfrak{p}(\mathbb{F}_q)$ où P décrit les sous-groupes paraboliques de $G_{\mathcal{F}}$. Ce sont aussi les images par transformation de Fourier des espaces de fonctions sur $\mathfrak{u}_P(\mathbb{F}_q)$. La somme sur P de ces derniers espaces n'est autre que l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ à support nilpotent.

6 Le résultat de DeBacker

Notons $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ le sous-espace des distributions invariantes sur $\mathfrak{g}(F)$ à support nilpotent. Si on fixe un ensemble de représentants $\mathcal{N}$ des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\mathfrak{g}_{nil}(F)$, $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ a pour base les intégrales orbitales $I^G(N, .)$ pour $N \in \mathcal{N}$.

Soit $r \in \mathbb{R}$. On note $I(\mathfrak{g}(F))^*_r$, resp. $I(\mathfrak{g}(F))^*_{r+}$, le sous-espace des distributions invariantes sur $\mathfrak{g}(F)$ à support dans $\mathfrak{g}(F)_r$, resp. $\mathfrak{g}(F)_{r+}$. On a les homomorphismes évidents

$$I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil} \xrightarrow{a_r} I(\mathfrak{g}(F))^*_r \xrightarrow{b_r} \mathcal{H}^*_r \xrightarrow{c_r} \mathcal{H}^{\sharp,*}_r \xrightarrow{d_r} \mathcal{H}^{\natural,*}_r.$$

Proposition. *Les applications b_r et $b_r \circ a_r$ ont même image. Les restrictions de c_r et $d_r \circ c_r$ à l'image de b_r sont injectives. Les applications $b_r \circ a_r$, $c_r \circ b_r \circ a_r$ et $d_r \circ c_r \circ b_r \circ a_r$ sont injectives.*

Preuve. Soit ϵ_0 comme dans le lemme précédent et $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$. On peut remplacer ci-dessus les espaces $I(\mathfrak{g}(F))^*_r$, $\mathcal{H}^*_r$ et $\mathcal{H}^{\natural,*}_r$ par $I(\mathfrak{g}(F))^*_{(r-\epsilon)+}$, $\mathcal{H}^*_{(r-\epsilon)+}$ et $\mathcal{H}^*_{r-\epsilon,(r-\epsilon)+}$. Alors le théorème 2.1.5 de [1] dit que les applications b_r et $b_r \circ a_r$ ont même image et que la restriction de $d_r \circ c_r$ à l'image de b_r est injective. Evidemment, la restriction de c_r à cette image l'est aussi. Pour $\lambda \in F^\times$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, notons f^λ la fonction $f^\lambda(X) = f(\lambda X)$. On peut fixer une famille $(f_N)_{N\in\mathcal{N}}$ d'éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ de sorte que la matrice $(I^G(N, f_{N'}))_{N,N'\in\mathcal{N}}$ soit inversible. On sait que, pour tout $N \in \mathcal{N}$,, il existe un entier $d(N) \in \mathbb{Z}$ de sorte que $I^G(N, f^{\lambda^2}) = |\lambda|_F^{d(N)} I^G(N, f)$ pour tout $\lambda \in F^\times$. La matrice $(I^G(N, f^{\lambda^2}_{N'}))_{N,N'\in\mathcal{N}}$ est donc elle-aussi inversible. Mais on peut choisir λ tel que toutes les fonctions $f_N^{\lambda^2}$ appartiennent à $\mathcal{H}_r$. Il en résulte que $b_r \circ a_r$ est injective. Alors $c_r \circ b_r \circ a_r$ et $d_r \circ c_r \circ b_r \circ a_r$ sont aussi injectives puisque les restrictions de c_r et $d_r \circ c_r$ à l'image de b_r sont injectives. $\square$

7 L'espace $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ et une formule de produit

Notons $S(G)$ l'ensemble des sommets de l'immeuble $Imm(G_{AD})$. Posons

$$\mathcal{S}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \sum_{s\in S(G)} C_{cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)).$$

Ici, chaque espace $C_{cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est identifié à un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par l'application $f \mapsto f_s$. L'espace $\mathcal{S}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ est donc lui-aussi un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. En fait, les éléments de $\mathcal{S}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ sont cuspidaux, c'est-à-dire que l'image de $\mathcal{S}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ dans $I(\mathfrak{g}(F))$ est contenue dans $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, cf. [5] lemme 10.1 (ce lemme concerne des fonctions sur le groupe $G(F)$ mais la même démonstration s'applique à des fonctions sur $\mathfrak{g}(F)$).

Pour $f \in \mathcal{S}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, on définit une distribution invariante D^G_f sur $\mathfrak{g}(F)$ par

$$D^G_f(f') = \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \int_{\mathfrak{g}(F)} f'(g^{-1}Xg)\bar{f}(X)\, dX\, dg.$$

La double intégrale est convergente dans cet ordre.

Soit M un groupe de Levi de G. On définit l'espace $\mathcal{S}_{cusp}(\mathfrak{m}(F))$. Pour $f \in \mathcal{S}_{cusp}(\mathfrak{m}(F))$, on définit la distribution $D^M_f \in I(\mathfrak{m}(F))^*$ puis la distribution induite $D^G_f = Ind^G_M(D^M_f) \in I(\mathfrak{g}(F))^*$. Posons

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}(F)) = \sum_M \mathcal{S}(\mathfrak{m}(F)),$$

où M parcourt les groupes de Levi de G. On a alors un homomorphisme antilinéaire $D^G : \mathcal{S}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$. Le groupe $G(F)$ agit naturellement sur l'espace $\mathcal{S}(\mathfrak{g}(F))$: un élément $g \in G(F)$ transporte un Levi M sur le Levi $M' = gMg^{-1}$, un sommet

$s \in S(M)$ sur un sommet $gs \in S(M')$ et une fonction $f \in C_{cusp}(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))$ sur une fonction ${}^g f \in C_{cusp}(\mathfrak{m}'_{gs}(\mathbb{F}_q))$. On note $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ l'espace des coinvariants de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}(F))$ pour cette action de $G(F)$. L'homomorphisme D^G se quotiente en un homomorphisme antilinéaire encore noté $D^G : \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$.

Il est facile de décrire concrètement l'espace $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$. Soit M un Levi de G. Le groupe $Norm_{G(F)}(M)$ agit naturellement sur $S(M)$. On fixe un ensemble de représentants $\underline{S}^G(M)$ pour cette action. Pour tout $s \in S(M)$, notons $K_s^{\dagger,G}$ le sous-groupe des $g \in Norm_{G(F)}(M)$ tels que $gs = s$. Ce groupe agit naturellement sur $C_{cusp}(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))$ et on note comme toujours $C_{cusp}(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^{\dagger,G}}$ le sous-espace des invariants. Fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{L}}$ des classes de conjugaison par $G(F)$ de Levi de G. On voit alors que le sous-espace

$$\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}} \oplus_{s\in\underline{S}^G(M)} C_{cusp}(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^{\dagger,G}}$$

de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}(F))$ s'envoie bijectivement sur $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$.

Soient M, M' deux Levi de G, $s \in S(M)$, $s' \in S(M')$, $f \in C_{cusp}(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))$ et $f' \in C_{cusp}(\mathfrak{m}'_{s'}(\mathbb{F}_q))$. A la suite de bien d'autres auteurs, on a décrit dans [4] 3.7 une façon non canonique de "relever" s en une facette $\mathcal{F}(s)$ de $Imm(G_{AD})$. On ne rappelle pas la définition. La propriété essentielle de $\mathcal{F}(s)$ est que l'espace $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}(s)}$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{m}_s$. En particulier, f s'identifie à un élément de $C_{cusp}(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}(s)}(\mathbb{F}_q))$, ce qui permet de définir la fonction $f_{\mathcal{F}(s)} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Notons $N(M, s, M', s')$ l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $gMg^{-1} = M'$ et $gs = s'$. Cet ensemble peut être vide. Il est invariant à gauche par $A_{M'}(F)K_{s'}^0$, on note $\underline{N}(M, s, M', s')$ un ensemble de représentants du quotient $A_{M'}(F)K_{s'}^0\backslash N(M, s, M', s')$. Enfin, on note $A_G(F)_c$ le plus grand sous-groupe compact de $A_G(F)$.

Proposition. *Sous ces hypothèses, on a :*
(i) si $N(M, s, M', s') = \emptyset$, $D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}(s)}) = 0$ *;*
(ii) si $N(M, s, M', s') \neq \emptyset$,

$$D^G_{f'}(f_{\mathcal{F}(s)}) = mes(K^0_{\mathcal{F}(s)})mes(K^0_{s'})mes(A_{M'}(F)_c)^{-1} \sum_{g\in\underline{N}(M,s,M',s')} (f', {}^g f).$$

On a démontré en [4] 3.6 une proposition analogue pour des fonctions sur le groupe $G(F)$. La preuve est similaire pour les fonctions sur l'algèbre de Lie.

8 L'espace $I_\star(\mathfrak{g}(F))$

On note $I_\star(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ tels que $I^G(X, f) = 0$ pour $X \notin \mathfrak{g}_{tn}(F)$ et $I^G(X, \hat{f}) = 0$ pour $X \notin \mathfrak{g}_{ent}(F)$. Notons $Fac(G)$ l'ensemble des facettes de $Imm(G_{AD})$. Posons

$$\mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F)) = \sum_{\mathcal{F}\in Fac(G)} C_{nil}(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)).$$

Comme dans le paragraphe précédent, les espaces intervenant sont identifiés à des sous-espaces de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Avec les notations de ce paragraphe, posons aussi

$$\mathcal{E}_{nil,\star}(\mathfrak{g}(F)) = \sum_{M\in\underline{\mathcal{L}}} \sum_{s\in\underline{S}^G(M)} C_{nil,cusp}(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^{\dagger,G}}.$$

On envoie cet espace dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ de la façon (non canonique) suivante : pour tout Levi $M \in \underline{\mathcal{L}}$ et tout $s \in S^G(M)$, on fixe une facette $\mathcal{F}(s)$ comme dans le paragraphe précédent ; alors $C_{nil,cusp}(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^{\dagger,G}}$ s'identifie à un sous-espace de $C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}(s)}(\mathbb{F}_q))$ et on envoie toute fonction $f \in C_{nil,cusp}(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^{\dagger,G}}$ sur la fonction $f_{\mathcal{F}(s)}$. Pour tout sous-espace $E \subset C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, notons IE son image naturelle dans $I(\mathfrak{g}(F))$.

Lemme. *On a les égalités $I\mathcal{E}_{nil,\star}(\mathfrak{g}(F)) = I\mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F)) = I_\star(\mathfrak{g}(F))$. L'homomorphisme naturel $\mathcal{E}_{nil,\star}(\mathfrak{g}(F)) \to I_\star(\mathfrak{g}(F))$ est bijectif.*

Preuve. Par définition, on a l'inclusion $\mathcal{E}_{nil,\star}(\mathfrak{g}(F)) \subset \mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F))$. La même preuve qu'en [4] lemme 3.7 (qui concernait les groupes) montre que cette inclusion devient une égalité dans l'espace $I(\mathfrak{g}(F))$, c'est-à-dire $I\mathcal{E}_{nil,\star}(\mathfrak{g}(F)) = I\mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F))$. Pour $\mathcal{F} \in Fac(G)$ et $f \in C_{nil}(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q))$, la fonction $f_{\mathcal{F}}$ est à support topologiquement nilpotent et sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est à support entier. D'où l'inclusion $I\mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F)) \subset I_\star(\mathfrak{g}(F)$.

Pour plus de clarté, notons ϕ la transformation de Fourier dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ ou $I(\mathfrak{g}(F))$. L'espace $\phi(\mathcal{H}_0)$ est la somme sur $\mathcal{F} \in Fac(G)$ des sous-espaces des fonctions à support dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F},0+}$. Puisque la réunion de ces ensembles est $\mathfrak{g}_{tn}(F)$, $\phi(\mathcal{H}_0)$ est l'espace des fonctions à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Soit $f \in I_\star(\mathfrak{g}(F)$. Puisque les intégrales orbitales de f sont nulles hors de $\mathfrak{g}_{tn}(F)$, on a $f \in \phi(I(\mathcal{H}_0))$, ou encore $\phi(f) \in I(\mathcal{H}_0)$. Supposons que $\phi(f)$ soit annulée par $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$. La proposition 6 dit que $\phi(f)$ est aussi annulée par $I(\mathfrak{g}(F))^*_0$, autrement dit que les intégrales orbitales $I^G(X,\phi(f))$ sont nulles pour $X \in \mathfrak{g}_{ent}(F)$. Par hypothèse elles sont nulles aussi pour $X \not\in \mathfrak{g}_{ent}(F)$. Donc $\phi(f) = 0$. Il en résulte que l'homomorphisme naturel

$$I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil} \to \phi(I_\star(\mathfrak{g}(F)))^*$$

est surjectif. Il résulte de ce que l'on a dit à la fin du paragraphe 5 que $I\mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F)) = \phi(I\mathcal{H}_0^\sharp)$ (les espaces $\mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F))$ et $\phi(\mathcal{H}_0^\sharp)$ ne sont pas tout-à-fait égaux car les fonctions attachées à une facette $\mathcal{F}$ sont supposées invariantes par conjugaison par $G_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ dans le cas de l'espace $\mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F))$ mais cela ne fait pas de différence quand on envoie les espaces dans $I(\mathfrak{g}(F))$). L'homomorphisme ci-dessus se prolonge en la suite

$$I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil} \to \phi(I_\star(\mathfrak{g}(F)))^* \to \phi(I\mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F)))^* = I\mathcal{H}_0^{\sharp,*}.$$

La proposition 6 dit que la composée est injective. Puisque le premier homomorphisme est surjectif, le second est injectif. Dualement et après transformation de Fourier, cela nous dit que l'inclusion $I\mathcal{E}_{nil}(\mathfrak{g}(F)) \to I_\star(\mathfrak{g}(F))$ est surjective. Cela démontre la première assertion de l'énoncé.

Dans le paragraphe précédent, on a défini un espace $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$. Il se construit à l'aide d'espace $C_{cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. En remplaçant dans les définitions chacun de ces espaces par $C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$, on construit de même un espace $\mathcal{D}_{nil}(\mathfrak{g}(F))$, qui est un sous-espace de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$. La description que l'on a donnée de cet espace et la proposition 7 entraînent que l'on peut fixer des bases $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathcal{D}_{nil}(\mathfrak{g}(F))$ et $(\varphi_i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathcal{E}_{nil,\star}(\mathfrak{g}(F))$ de sorte que la matrice $(D^G_{f_i}(\varphi_j))_{i,j=1,\dots,n}$ soit inversible. A fortiori, les images des φ_i dans $I(\mathfrak{g}(F))$ sont linéairement indépendantes. Donc l'homomorphisme naturel $\mathcal{E}_{nil,\star}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))$ est injectif. Alors la seconde assertion de l'énoncé se déduit de la première. $\square$

9 L'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$

On note $FC(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des fonctions $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ telles que $I^G(X,f) = I^G(X,\hat{f}) = 0$ pour tout $X \not\in \mathfrak{g}_{tn}(F)$. Autrement dit, en notant encore ϕ la transformation de Fourier, $FC(\mathfrak{g}(F)) = I_\star(\mathfrak{g}(F)) \cap \phi(I_\star(\mathfrak{g}(F))$.

Remarque. Comme on l'a dit au paragraphe 2, l'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ dépend du groupe G et pas seulement de son algèbre de Lie.

Pour tout $s \in S(G)$, on définit l'espace $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \subset C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$, cf. paragraphe 2. Posons

$$fc(\mathfrak{g}(F)) = \sum_{s \in S(G)} FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)).$$

Proposition. *On a l'égalité* $Ifc(\mathfrak{g}(F)) = FC(\mathfrak{g}(F))$ *et l'inclusion* $FC(\mathfrak{g}(F)) \subset I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$.

Preuve. L'inclusion $Ifc(\mathfrak{g}(F)) \subset FC(\mathfrak{g}(F))$ est immédiate. Soit $f \in FC(\mathfrak{g}(F))$. Puisque $FC(\mathfrak{g}(F)) \subset I_\star(\mathfrak{g}(F))$, on peut d'après le lemme précédent relever f en un unique élément $\varphi \in \mathcal{E}_{nil,\star}(\mathfrak{g}(F))$. Conformément à la définition de cet espace, écrivons

$$\varphi = \sum_{M \in \underline{\mathcal{L}}} \sum_{s \in \underline{S}^G(M)} \varphi_{M,s},$$

avec $\varphi_{M,s} \in C_{nil,cusp}(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^{\dagger,G}}$. Pour tout couple (M,s), décomposons $\hat{\varphi}_{M,s}$ en $h_{nil,M,s} + h_{M,s}^+$, où $h_{nil,M,s}$ est à support nilpotent et le support de $h_{M,s}^+$ ne contient pas de nilpotents. Ces fonctions restent cuspidales et invariantes par $K_s^{\dagger,G}$. On a les égalités

$$D^G_{h^+_{M,s}}(\hat{f}) = D^G_{h^+_{M,s}}(\hat{\varphi}) = \sum_{M' \in \underline{\mathcal{L}}} \sum_{s' \in \underline{S}^G(M')} D^G_{h^+_{M,s}}((\hat{\varphi}_{M,s})_{\mathcal{F}(s)}).$$

Appliquons la proposition 7 : tous les termes sont nuls sauf celui indexé par $M' = M$ et $s' = s$. Pour celui-ci, on a

$$D^G_{h^+_{M,s}}((\hat{\varphi}_{M,s})_{\mathcal{F}(s)}) = c(h^+_{M,s}, \hat{\varphi}_{M,s}) = c(h^+_{M,s}, h^+_{M,s}),$$

où c est une certaine constante strictement positive. D'où

(1) $D^G_{h^+_{M,s}}(\hat{f}) = c(h^+_{M,s}, h^+_{M,s})$.

Le support de la fonction $(h^+_{M,s})_s \in C_c^\infty(\mathfrak{m}(F))$ ne contient pas d'élément topologiquement nilpotent car un élément de $\mathfrak{k}_s \subset \mathfrak{m}(F)$ est topologiquement nilpotent si et seulement si sa réduction dans $\mathfrak{m}_s$ est nilpotente. Il résulte alors des définitions que, pour $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{m}(F))$, $D^M_{h^+_{M,s}}(\phi) = 0$ si le support de ϕ est inclus dans $\mathfrak{m}_{tn}(F)$. Cette propriété se conserve par induction : pour $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, $D^G_{h^+_{M,s}}(\phi) = 0$ si le support de ϕ est inclus dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Par hypothèse, les intégrales orbitales de $\hat{f}$ sont à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Il en résulte que l'on peut représenter $\hat{f}$ par un élément de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ qui est à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ (on représente $\hat{f}$ par une fonction quelconque et on remplace celle-ci par son produit avec la fonction caractéristique de $\mathfrak{g}_{tn}(F)$). Donc $D^G_{h^+_{M,s}}(\hat{f}) = 0$. Avec (1), cela entraîne que $h^+_{M,s} = 0$. Autrement dit, la fonction $\hat{\varphi}_{M,s}$ est à support nilpotent. Puisque $\varphi_{M,s}$ a la même propriété, on a $\varphi_{M,s} \in FC(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))$. Si $M \neq G$, on a $Z(M_s)^0 \neq \{1\}$ et l'espace $FC(\mathfrak{m}_s(\mathbb{F}_q))$ est nul d'après 2 (2). Mais alors, la fonction φ appartient à $fc(\mathfrak{g}(F))$ et f appartient à $Ifc(\mathfrak{g}(F))$. Cela démontre la première égalité de l'énoncé.

On a l'inclusion $fc(\mathfrak{g}(F)) \subset \mathcal{S}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et on a dit au paragraphe 7 que $I\mathcal{S}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ était inclus dans $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. D'où la seconde assertion de l'énoncé. $\square$

On note simplement $\underline{S}(G) = \underline{S}^G(G)$, c'est-à-dire que $\underline{S}(G)$ est un ensemble de représentants des orbites de l'action de $G(F)$ dans $S(G)$. Comme au paragraphe 7, on voit que le sous-espace

$$(2) \qquad \sum_{s \in \underline{S}(G)} FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^\dagger}$$

de $fc(\mathfrak{g}(F))$ s'envoie bijectivement sur $FC(\mathfrak{g}(F))$.

Notons A_G^{nr} le plus grand sous-tore de $Z(G)$ qui soit déployé sur F^{nr}. On a

(3) si $A_G^{nr} \neq \{1\}$, $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$.

En effet, soit $s \in S(G)$. L'hypothèse $A_G^{nr} \neq \{1\}$ entraîne que $Z(G_s)^0 \neq \{1\}$ donc aussi $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après 2(2).

10 Endoscopie

Supposons G quasi-déployé sur F. Pour $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on définit l'intégrale orbitale stable $S^G(X, f) = \sum_{X'} I^G(X', f)$, où X' parcourt un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable de X. On note $SI(\mathfrak{g}(F))$ le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des f telles que $S^G(X, f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Les intégrales orbitales stables peuvent être considérées comme des formes linéaires sur ce quotient.

Notons $I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace de $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ formé des $f \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ dont les intégrales orbitales sont constantes sur les classes de conjugaison stable. On sait que cet espace s'envoie bijectivement sur le sous-espace $SI_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ de $SI(\mathfrak{g}(F))$ formé des $f \in SI(\mathfrak{g}(F))$ telles que $S^G(X, f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F) - \mathfrak{g}_{ell}(F)$, cf. [3] proposition I.4.11. On identifie ces deux espaces.

Revenons au cas général où G n'est pas supposé quasi-déployé. On fixe un ensemble $Endo_{ell}(G)$ de classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G. On adopte pour ces données les notations et définitions de [3] chapitre I. Soit $\mathbf{G}' = (G', s, \mathcal{H}) \in Endo_{ell}(G)$. On fixe un facteur de transfert $\Delta^{\mathbf{G}'}$ sur $\mathfrak{g}'(F) \times \mathfrak{g}(F)$ (précisément, il est défini sur un sous-ensemble déterminé par des conditions de régularité, on ne perd rien à considérer ici qu'il est nul en dehors). Cela permet de définir l'application de transfert

$$transfert^{\mathbf{G}'} : I(\mathfrak{g}(F)) \to SI(\mathfrak{g}'(F)).$$

Le groupe d'automorphismes $Aut(\mathbf{G}')$ agit naturellement sur l'espace d'arrivée et l'image du transfert est contenu dans le sous-espace des invariants.

Remarque. On utilise la définition de [3] I.2.6 de cette action du groupe d'automorphismes, qui n'est pas celle que l'on trouve dans d'autres références. Un automorphisme $x \in Aut(\mathbf{G}')$ détermine un automorphisme algébrique α_x de G', uniquement défini à automorphismes intérieurs près. Il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que, pour tous $(X', X) \in \mathfrak{g}'(F) \times \mathfrak{g}(F)$, on ait $\Delta^{\mathbf{G}'}(\alpha_x(X'), X) = c\Delta^{\mathbf{G}'}(X', X)$. Pour $f \in SI(\mathfrak{g}'(F))$, l'image de f par x est alors la fonction $x(f)$ définie par l'égalité $x(f)(X') = cf(\alpha_x^{-1}(X'))$ pour tout $X' \in \mathfrak{g}'(F)$. La constante c vaut 1 si G est quasi-déployé.

Notons $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ le sous-espace des $f \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ telles que $transfert^{\mathbf{G}''}(f) = 0$ pour tout $\mathbf{G}'' \in Endo_{ell}(G) - \{\mathbf{G}'\}$. Alors le transfert se restreint en un isomorphisme de $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ sur $I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Aut(\mathbf{G}')}$. Ce dernier est une similitude pour les produits scalaires elliptiques, cf. [3] I.4.17. Précisément, posons

$$c(G, \mathbf{G}') = |\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})||\pi_0(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F})|^{-1}|Aut(\mathbf{G}')|^{-1}.$$

Soient $f_1, f_2 \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$, notons $f_i' = transfert^{\mathbf{G}'}(f_i)$ pour $i = 1, 2$. Alors

$$(1) \qquad J_{ell}^G(f_1, f_2) = c(G, \mathbf{G}') J_{ell}^{G'}(f_1', f_2').$$

On a fixé une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< ., . >$ sur $\mathfrak{g}(F)$. Il lui correspond une forme analogue sur $\mathfrak{g}'(F)$, que l'on note encore $< ., . >$, qui est caractérisée par la propriété suivante. Soit T' un sous-tore maximal elliptique de G'. On sait qu'il existe un sous-tore maximal elliptique T de G et un isomorphisme $\xi : T \to T'$ défini sur F tel que, pour $X \in \mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$, la classe de conjugaison stable de X correspond à celle de $X' = \xi(X)$. On a alors $< X, Y >=< \xi(X), \xi(Y) >$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{t}(F)$. Cette forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}'(F)$ a les mêmes propriétés que la forme initiale sur $\mathfrak{g}(F)$. A l'aide de cette forme, on définit la transformation de Fourier dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}'(F))$. Il existe une constante $\gamma_\psi(G, G') \in \mathbb{C}^\times$ vérifiant $\gamma_\psi(G, G')^4 = 1$ et telle que, pour tout $f \in I(\mathfrak{g}(F))$, on ait

(2) $transfert^{\mathbf{G}'}(\hat{f}) = \gamma_\psi(G, G')(transfert^{\mathbf{G}'}(f))\hat{}$.

On a l'égalité

$$(3) \qquad I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)} I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$$

et cette décomposition est orthogonale pour le produit scalaire elliptique. Il y a dans $Endo_{ell}(G)$ une donnée "principale" $\mathbf{G} = (G^*, 1, {}^L G)$, où G^* est la forme intérieure quasi-déployée de G. Si G est quasi-déployé, on a l'égalité $I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}(F)) = I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G})$.

11 Endoscopie et espaces $FC(\mathfrak{g}(F))$

Pour tout $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, posons $FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}') = FC(\mathfrak{g}(F)) \cap I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$. Dans le cas où G est quasi-déployé, notons $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G})$.

Proposition. *(i) On a l'égalité*

$$FC(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)} FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}').$$

(ii) Supposons G quasi-déployé. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est invariant par tout automorphisme de G. L'image de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ dans $SI(\mathfrak{g}(F))$ est le sous-espace des $f \in SI(\mathfrak{g}(F))$ telles que $SI^G(X, f) = SI^G(X, \hat{f}) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ qui n'est pas topologiquement nilpotent.

(iii) Pour $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, le transfert se restreint en un isomorphisme de $FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ sur $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Aut(\mathbf{G}')}$.

Preuve. Rappelons la propriété basique du transfert endoscopique. Soit $X \in \mathfrak{g}_{ell}(F)$. L'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ contenues dans la classe de conjugaison stable de X est naturellement muni d'une structure d'espace homogène principal sous un certain groupe abélien fini $K(X)$. On choisit une famille $(X_k)_{k \in K(X)}$ de représentants de ces classes de sorte que $X_0 = X$ et que cette action soit la translation sur l'ensemble d'indices. Notons $K(X)^\vee$ le groupe des caractères de $K(X)$. Soit $f \in I(\mathfrak{g}(F))$. Pour $\kappa \in K(X)^\vee$, on pose

$$J^\kappa(X, f) = \sum_{k \in K(X)} \kappa(k) J^G(X_k, f).$$

Il existe un unique $\mathbf{G}'_\kappa \in Endo_{ell}(G)$ et un élément $X'_\kappa \in \mathfrak{g}'_{ell}(F)$ de sorte que, pour tout $f \in I(\mathfrak{g}(F))$, on ait

$$(1) \qquad SI^{G'_\kappa}(X'_\kappa, transfert^{\mathbf{G}'_\kappa}(f)) = \Delta^{\mathbf{G}'}(X'_\kappa, X)J^\kappa(X, f).$$

Remarque. L'élément X'_κ n'est pas unique mais, si X'_κ vérifie la propriété ci-dessus, un autre élément $Y'_\kappa \in \mathfrak{g}'_{ell}(F)$ la vérifie aussi si et seulement s'il existe un automorphisme α de G' associé à un élément de $Aut(\mathbf{G}')$ tel que Y'_κ soit stablement conjugué à $\alpha(X'_\kappa)$.

Par inversion de Fourier sur le groupe $K(X)$, on a l'égalité

$$J^G(X, f) = |K(X)|^{-1} \sum_{\kappa \in K(X)^\vee} J^\kappa(X, f).$$

Supposons $f \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et écrivons $f = \sum_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)} f_{\mathbf{G}'}$ conformément à la décomposition 10(3). Pour tout $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, on a alors l'égalité

$$(2) \qquad J^G(X, f_{\mathbf{G}'}) = |K(X)|^{-1} \sum_{\kappa \in K(X)^\vee, \mathbf{G}'_\kappa = \mathbf{G}'} J^\kappa(X, f).$$

Il résulte de ces formules que les intégrales orbitales de f sont à support topologiquement nilpotent si et seulement si il en est de même pour toutes les fonctions $f_{\mathbf{G}'}$. D'autre part, d'après 10(2), on a l'égalité $(\hat{f})_{\mathbf{G}'} = (f_{\mathbf{G}'})\hat{}$ pour tout $\mathbf{G}'$. Donc les intégrales orbitales de $\hat{f}$ sont à support topologiquement nilpotent si et seulement s'il en est de même pour toutes les fonctions $(f_{\mathbf{G}'})\hat{}$. Ces deux propriétés réunies entraînent l'assertion (i) de l'énoncé.

La première propriété du (ii) est immédiate, les espaces $FC(\mathfrak{g}(F))$ et $I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ étant tous deux invariants par automorphismes. Notons pour le temps de cette démonstration $SI^\natural(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des $f \in SI(\mathfrak{g}(F))$ telles que $SI^G(X, f) = SI^G(X, \hat{f}) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ qui n'est pas topologiquement nilpotent. Posons $SI^\natural_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = SI^\natural(\mathfrak{g}(F)) \cap I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. L'inclusion $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \subset SI^\natural_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ est claire. Inversement, soit $f \in SI^\natural_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Comme on l'a dit, on considère f comme un élément de $I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, a fortiori comme un élément de $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Pour $X \in \mathfrak{g}_{ell}(F)$, on a l'égalité $J^G(X, f) = |K(X)|^{-1}S^G(X, f)$. Puisque les intégrales orbitales stables de f sont à support topologiquement nilpotent, ses intégrales orbitales le sont aussi. Il en est de même pour $\hat{f}$. Donc $f \in FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, ce qui démontre l'égalité

$$FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = SI^\natural_{cusp}(\mathfrak{g}(F)).$$

Il nous reste à prouver l'égalité

(3) $SI^\natural(\mathfrak{g}(F)) = SI^\natural_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$.

Il y a une filtration $(\mathcal{F}^n SI(\mathfrak{g}(F)))_{n=n_0,..,n_1}$ de l'espace $SI(\mathfrak{g}(F))$, cf. [3] I.4.15. On a $n_0 = dim(A_G)-1$ et n_1 est la dimension d'un plus grand sous-tore de G déployé sur F. On a $\mathcal{F}^{n_0}SI(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$ et $\mathcal{F}^{n_0+1}SI(\mathfrak{g}(F)) = I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. En général, pour $n = n_0, ..., n_1$, $\mathcal{F}^n SI(\mathfrak{g}(F))$ est le sous-espace des $f \in SI(\mathfrak{g}(F))$ tels que $SI^G(X, f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ tel que $dim(A_{Z_G(X)}) > n$. Le quotient $\mathcal{F}^n SI(\mathfrak{g}(F))/\mathcal{F}^{n-1}SI(\mathfrak{g}(F))$ s'envoie injectivement dans l'espace

$$\sum_M I^{st}_{cusp}(\mathfrak{m}(F)),$$

où M parcourt les Levi de G tels que $dim(A_M) = n$ (précisément, le groupe $G(F)$ agit naturellement sur cet espace et l'image de l'application ci-dessus est exactement le sous-espace des invariants). Posons $\mathcal{F}^n SI^\natural(\mathfrak{g}(F)) = \mathcal{F}^n SI(\mathfrak{g}(F)) \cap SI^\natural(\mathfrak{g}(F))$. Il résulte de la définition de l'application ci-dessus, cf [3]1.4.15, que le quotient $\mathcal{F}^n SI^\natural(\mathfrak{g}(F))/\mathcal{F}^{n-1} SI^\natural(\mathfrak{g}(F))$ s'envoie injectivement dans l'espace

$$\sum_M SI^\natural_{cusp}(\mathfrak{m}(F)),$$

qui n'est autre que

$$\sum_M FC^{st}(\mathfrak{m}(F))$$

d'après ce que l'on a déjà démontré. Mais, si $n > 0$, a fortiori si $n > dim(A_G)$, ces espaces sont nuls d'après 9(3) . Donc $\mathcal{F}^n SI^\natural(\mathfrak{g}(F)) = \mathcal{F}^{n-1} SI^\natural(\mathfrak{g}(F))$. Par récurrence sur n, cela entraîne l'égalité (3) et achève la preuve de (ii).

Soient $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, $f \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ et $f' = transfert^{\mathbf{G}'}(f)$. Une intégrale orbitale stable $S^{G'}(X', f')$ est par définition combinaison linéaire d'intégrales orbitales $I^G(X, f)$ pour des $X \in \mathfrak{g}(F)$ correspondant à X'. Inversement, les formules (1) et (2) montrent qu'une intégrale orbitale $I^G(X, f)$ est combinaison linéaire d'intégrales orbitales stables $S^{G'}(X', f')$ pour des $X' \in \mathfrak{g}'(F)$ correspondant à X. Pour X et X' se correspondant, il est immédiat que X est topologiquement nilpotent si et seulement s'il en est de même de X'. Donc les intégrales orbitales de f sont à support topologiquement nilpotent si et seulement si les intégrales orbitales stables de f' le sont. Il en est de même pour les transformeées de Fourier d'après 10(1). Cela entraîne l'assertion (iii) de l'énoncé. □

Remarque. On a remarqué en 2 que des notations telles que $I(\mathfrak{g}(F))$ ou $FC(\mathfrak{g}(F))$ manquaient de précision car ces objets dépendent du groupe G et pas seulement de son algèbre de Lie. Mais, dans le cas où G est quasi-déployé, les objets stables $I^{st}(\mathfrak{g}(F))$ ou $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ ne dépendent bien que de cette algèbre. Cela résulte du fait qu'une distribution stable est invariante par l'action du groupe adjoint. Enonçons une conséquence, où nous ajoutons des exposants G pour préciser quel est le groupe concerné. On suppose G quasi-déployé. On a déjà dit que, si $A_G^{nr} \neq \{1\}$, on avait $FC(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$, a fortiori $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \{0\}$. Supposons $A_G^{nr} = \{1\}$. Alors de la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(G) \oplus \mathfrak{g}_{AD}$ se déduit un isomorphisme

$$FC^{G,st}(\mathfrak{g}(F)) = FC^{Z(G)^0}(\mathfrak{z}(G)(F)) \otimes_{\mathbb{C}} FC^{G_{AD},st}(\mathfrak{g}_{AD}(F))$$

et l'espace $FC^{Z(G)^0}(\mathfrak{z}(G)(F))$ est la droite portée par la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathfrak{z}(G)_{tn}(F)$. On peut évidemment remplacer ci-dessus G_{AD} par G_{SC}.

12 Traduction en termes de distributions

Dans ce paragraphe, on renforce la condition reliant p et G en imposant la condition $(Hyp)_{endo}(G)$ définie en [4] 7.1. Disons seulement ici que cette condition est de la forme

$$(1) \qquad p \geq c(G)(2 + val_F(p))$$

où $c(G)$ est une certaine constante dépendant de G.

Supposons G quasi-déployé. L'espace dual $SI(\mathfrak{g}(F))^*$ s'identifie au sous-espace des $D \in I(\mathfrak{g}(F))^*$ telles que $D(f) = 0$ pour toute fonction $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ dont la projection naturelle dans $SI(\mathfrak{g}(F))$ est nulle. Revenons au cas général. Pour une donnée endoscopique $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, l'application de transfert $transfert^{\mathbf{G}'} : I(\mathfrak{g}(F)) \to SI(\mathfrak{g}'(F))$ se dualise en une application de transfert $transfert^{\mathbf{G}',*} : SI(\mathfrak{g}'(F))^* \to I(\mathfrak{g}(F))^*$.

Proposition. *(i) Supposons G quasi-déployé, soit $f \in FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Alors $D_f^G \in SI(\mathfrak{g}(F))^*$.*

(ii) Soit $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$ et $f \in FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$. Posons $f' = transfert^{\mathbf{G}'}(f) \in FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))^{Aut(\mathbf{G}')}$. Alors $c(G, \mathbf{G}')transfert^{\mathbf{G}',*}(D_{f'}^{G'}) = D_f^G$.

Preuve. Sous l'hypothèse (1), l'exponentielle est un isomorphisme de $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ sur l'ensemble $G_{tu}(F)$ des éléments topologiquement unipotents de $G(F)$. On peut relever nos fonctions et distributions sur $\mathfrak{g}(F)$ en fonctions et distributions définies sur $G_{tu}(F)$ et appliquer à celles-ci les résultats démontrés en [4] 8.3 et 8.5. Il en résulte que les assertions de la proposition sont vérifiées si et seulement si leurs "restrictions à $\mathfrak{g}_{ell}(F)$" le sont.

Précisément, pour l'assertion (i), il suffit de prouver que $D_f^G(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ dont l'image dans $SI(\mathfrak{g}(F))$ est nulle. D'après la preuve de la formule des traces locale d'Arthur, on a l'égalité $D_f^G(\varphi) = J_{ell}^G(f, \varphi)$ (cela résulte de l'appartenance à $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ des deux fonctions f et φ). Les intégrales orbitales elliptiques de f sont constantes sur les classes de conjugaison stable tandis que les intégrales orbitales stables de φ sont nulles. Il résulte alors directement de la définition 3 (2) que $J_{ell}^G(f, \varphi) = 0$, ce qui démontre (i).

Pour l'assertion (ii), il suffit de prouver que $c(G, \mathbf{G}')transfert^{\mathbf{G}',*}(D_{f'}^{G'})(\varphi) = D_f^G(\varphi)$ pour tout $\varphi \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Cela équivaut à $c(G, \mathbf{G}')D_{f'}^{G'}(\varphi') = D_f^G(\varphi)$, où $\varphi' = transfert^{\mathbf{G}'}(\varphi)$. Pour la même raison que ci-dessus, cela équivaut à $c(G, \mathbf{G}')J_{ell}^{G'}(f', \varphi') = J_{ell}^G(f, \varphi)$. On peut supposer $\varphi \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}'')$ pour une certaine donnée $\mathbf{G}'' \in Endo_{ell}(G)$. Si $\mathbf{G}'' \neq \mathbf{G}'$, on a $\varphi' = 0$ et $D_f^G(\varphi) = 0$ puisque $f \in FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ et que cet espace est orthogonal à $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}'')$. Alors $J_{ell}^{G'}(f', \varphi') = 0 = J_{ell}^G(f, \varphi)$. Si $\mathbf{G}'' = \mathbf{G}'$, l'égalité à démontrer n'est autre que 10 (2). Cela achève la preuve. $\square$

Références

[1] S. DeBacker : *Homogeneity results for invariant distributions of a reductive p-adic group*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 35 (2002), p. 391-422

[2] G. Lusztig : *Fourier transforms on a semi-simple Lie algebra over* $\mathbb{F}_q$, in *Algebraic groups- Utrecht 1986*, Springer LN 1271 (1987), p. 177-188

[3] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Stabilisation de la formule des traces tordue, volume 1*, Progress in Math. 316, Birkhäuser 2016

[4] J.-L. Waldspurger : *Représentations et quasi-caractères de niveau* 0*; endoscopie*, prépublication 2018

[5] J.-L. Waldspurger : *Caractères de représentations de niveau* 0, Ann. Fac. Sc. Toulouse 27 (2018), p. 925-984