

FIBRÉS STABLES ET FIBRÉS EXCEPTIONNELS SUR \mathbb{P}_2

JEAN-MARC DRÉZET
JOSEPH LE POTIER

RÉSUMÉ. Soient r un entier > 1 , c_1 et $c_2 \in \mathbb{Z}$. Dans cet article, nous déterminons quelles conditions doivent satisfaire r , c_1 et c_2 pour qu'il existe, sur le plan projectif \mathbb{P}_2 des fibrés vectoriels algébriques stables de rang r de classes de Chern c_1 et c_2 . Ces conditions font jouer un rôle particulier aux fibrés E qui sont à la fois stables et rigides, c'est-à-dire tels que $\text{Ext}^1(E, E) = 0$: nous les appelons exceptionnels. La construction donnée permet en outre de démontrer que l'espace de modules de Maruyama des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang et de classes de Chern donnés est irréductible. Pour $r = 2$ ces résultats étaient connus de Schwarzenberger et Maruyama.

Let r, c_1, c_2 be integers, with $r > 1$. In this paper, we determine which conditions must r, c_1, c_2 verify for a stable rank r vector bundle on the projective plane \mathbb{P}_2 , with Chern classes c_1, c_2 to exist. In these conditions a crucial role will be played by the stable vector bundles E which are rigid, i. e. such that $\text{Ext}^1(E, E) = 0$: we call them exceptional. We give a construction of the Maruyama's moduli space of equivalence classes of semi-stable sheaves with fixed rank and Chern classes which allows us to prove its irreducibility. For $r = 2$ these results have been proved by Schwarzenberger and Maruyama.

SOMMAIRE

1. Généralités	5
2. Variétés de modules de Maruyama des faisceaux semi-stables sur \mathbb{P}_2	13
3. Stratification de Shatz	25
4. Théorèmes d'existence	30
5. Pente des fibrés exceptionnels	39
Références	49

INTRODUCTION

Soient r un entier > 1 , c_1 et $c_2 \in \mathbb{Z}$. On sait qu'il existe des fibrés vectoriels algébriques sur \mathbb{P}_2 , de rang r , de classes de Chern c_1 et c_2 : c'est un cas particulier d'un résultat que Schwarzenberger démontre plus généralement sur toute surface projective. L'objet du présent travail est de déterminer quelles conditions (nécessaires et suffisantes) nous devons imposer à r, c_1 et c_2 pour

J. Le Potier est décédé le 8 Décembre 2005.

qu'il existe au moins un fibré vectoriel stable de rang r , de classes de Chern c_1 et c_2 . Pour $r = 2$ ces conditions s'écrivent d'après Schwarzenberger [18] :

$$c_2 - \frac{c_1^2}{4} \geq \begin{cases} 2 & \text{si } c_1 \text{ est pair,} \\ 3 & \text{si } c_1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour énoncer de façon satisfaisante nos résultats, nous introduisons pour chaque fibré vectoriel E de rang r , de classes de Chern c_1 et c_2 sur \mathbb{P}_2 les nombres rationnels suivants

- la pente $\mu(E) = \frac{c_1}{r}$,
- le discriminant $\Delta(E) = \frac{1}{r} \left(c_2 - \frac{r-1}{2r} c_1^2 \right)$.

Avec ces notations, la formule de Riemann-Roch devient $\chi(E) = r(P(\mu) - \Delta)$ où $\chi(E)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de E , et P le polynôme

$$P(X) = 1 + \frac{3X}{2} + \frac{X^2}{2}.$$

Ce polynôme P est aussi le polynôme de Hilbert du fibré trivial de rang 1 sur \mathbb{P}_2 . Il revient au même de se donner (r, c_1, c_2) , ou de se donner (r, μ, Δ) satisfaisant aux conditions suivantes

$$r\mu \in \mathbb{Z}, \quad r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}.$$

0.1 – Fibrés exceptionnels (§4.2). Soit $M_s^0(r, \mu, \Delta)$ l'espace de modules des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels algébriques stables de rang r , de pente μ et de discriminant Δ . Si cet espace de modules n'est pas vide, c'est une variété algébrique lisse de dimension $r^2(2\Delta - 1) + 1$ [16]. Si $\Delta < \frac{1}{2}$, on montrera au paragraphe 4.2 que cet espace est ou vide, ou réduit à un point.

Soit E un fibré vectoriel algébrique stable de rang r , de pente μ , de discriminant Δ ; on dira que E est *exceptionnel* si $\Delta < \frac{1}{2}$, ou, ce qui revient au même, si E est rigide, c'est-à-dire $\text{Ext}^1(E, E) = 0$. Si E est un tel fibré, l'espace de modules correspondant est alors réduit au point défini par E . En fait, un tel fibré est déterminé à isomorphisme près par sa pente μ : son rang r est en effet le plus petit dénominateur positif de μ , et son discriminant est donné par

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right).$$

Nous répondrons en premier lieu (théorème A) à la question suivante : quels sont les nombres rationnels qui sont pentes de fibrés exceptionnels? Dans la suite, nous désignons par \mathfrak{E} cet ensemble de nombres rationnels.

0.2 – L'application $\epsilon : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{Q}$ (§5.1). Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$; on appellera rang r_α de α le plus petit entier $r > 0$ tel que $r\alpha \in \mathbb{Z}$, autrement dit son plus petit dénominateur, et discriminant de α le nombre rationnel

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r_\alpha^2} \right).$$

Soit (α, β) un couple de nombres rationnels tels que $3 + \alpha - \beta \neq 0$. On pose

$$\alpha.\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta}.$$

Soit $\mathfrak{D} \subset \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels de la forme $p/2^q$, où $p \in \mathbb{Z}$, et où q est un entier ≥ 0 . Considérons l'application $\epsilon : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par récurrence sur q de la manière suivante

$$(1) \quad \epsilon(n) = n \text{ pour } n \in \mathbb{Z},$$

$$(2) \quad \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \cdot \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right).$$

On verra au paragraphe 5.1 que cette construction est possible. L'application $\epsilon : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{Q}$ obtenue est strictement croissante, et $\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)$ est de rang $\geq 2^q$ si p est impair. De plus, pour $\rho \in \mathfrak{D}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\epsilon(-\rho) = -\epsilon(\rho)$ et $\epsilon(\rho + n) = \epsilon(\rho) + n$; ainsi, ϵ est parfaitement connue dès que l'on connaît sa restriction à l'intervalle $[0, 1/2] \cap \mathfrak{D}$. Le calcul explicite donne par exemple pour $q = 4$

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\epsilon(p/2^4)$	0	$\frac{13}{34}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{75}{194}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{179}{433}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{70}{169}$	$\frac{1}{2}$

0.3 – Les résultats

Théorème A : Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$. Pour qu'il existe un fibré exceptionnel de pente α , il faut et il suffit que α soit dans l'image de ϵ .

Autrement dit $\epsilon(\mathfrak{D}) = \mathfrak{E}$. Il en résulte que pour tout réel R , l'ensemble des éléments $\alpha \in \mathfrak{E}$ tels que $r_\alpha \leq R$ est localement fini.

Théorème B : Soient r un entier > 1 , c_1 et $c_2 \in \mathbb{Z}$; on pose

$$\mu = \frac{c_1}{r}, \quad \Delta = \frac{1}{r} \left(c_2 - \frac{r-1}{2r} c_1^2 \right).$$

Soient α le plus grand des éléments de \mathfrak{E} tels que $r_\alpha \leq r/2$ et $\alpha \leq \mu$, et β le plus petit des éléments de \mathfrak{E} tels que $r_\beta \leq r/2$ et $\mu \leq \beta$.

Pour qu'il existe un fibré stable de rang r , de classes de Chern c_1 et c_2 sur \mathbb{P}_2 il faut et il suffit que

$$\Delta \geq P(\alpha - \mu) - \Delta_\alpha \quad \text{et} \quad \Delta \geq P(\mu - \beta) - \Delta_\beta.$$

Le calcul peut être mené jusqu'à son terme : par exemple, pour $r = 20$ et $c_1 = 9$, on a $\mu = 0,45$; le tableau ci-dessus montre que $\alpha = 0,4$ et $\beta = 0,5$. Les conditions ci-dessus s'écrivent

$$\Delta \geq P(-0,05) - \frac{12}{25} \quad \text{et} \quad \Delta \geq P(-0,05) - \frac{3}{8}$$

et sont équivalentes à $\Delta \geq 0,55125$, c'est-à-dire $c_2 \geq 50$.

La démonstration des théorèmes A et B sera donnée au chapitre 5 ; elle passe par l'intermédiaire suivant, qui sera démontré au chapitre 4 (§4.5) :

Théorème C : *Soient r un entier > 1 , μ et Δ deux rationnels. Pour qu'il existe un fibré stable sur \mathbb{P}_2 de rang r , de pente μ , de discriminant Δ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites*

$$(S) \quad \begin{cases} (1) & r\mu \in \mathbb{Z}, \quad r(P(\mu - \Delta)) \in \mathbb{Z} . \\ (2) & \text{Pour tout } \alpha \in \mathfrak{E} \text{ tel que } r_\alpha < r \text{ et } |\alpha - \mu| \leq 1, \text{ on a } \Delta \geq P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha . \end{cases}$$

Le fait que ces conditions soient nécessaires résulte facilement de la formule de Riemann-Roch (proposition (4.5) et remarque (4.6)). L'existence de fibrés stables quand les conditions (S) sont satisfaites ne sera démontrée au paragraphe 4.5 qu'avec l'hypothèse $\Delta \neq \frac{1}{2}$. Au chapitre 5, cette difficulté technique sera levée puisque nous montrerons que les conditions (S) imposent $\Delta \neq \frac{1}{2}$.

La démonstration du théorème d'existence s'inspire de la construction déjà proposée pour les fibrés de rang 2 dans [14]. Elle consiste à construire une grande famille $(E_s)_{s \in S}$ de fibrés vectoriels de rang r sur \mathbb{P}_2 , paramétrée par une variété algébrique lisse irréductible S (c'est en fait un ouvert de \mathbb{C}^n , avec n convenable). De cette famille on doit enlever le fermé de Zariski correspondant aux fibrés non stables et vérifier que l'ouvert qui reste est non vide. Ceci se montre en minorant la codimension : c'est plus ou moins la stratification de Shatz [20] dont nous proposons une version raffinée au chapitre 3. Elle est adaptée à la notion de stabilité et de semi-stabilité qui nous a paru la meilleure ici, et qui est celle de Gieseker et Maruyama (cf. §2.1) ([7], [16]).

0.4 – Compléments. Une variante de la méthode ci-dessus permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème D : *Soit $M = M(r, \mu, \Delta)$ l'espace de modules de Maruyama des faisceaux semi-stables de rang r , de pente μ , de discriminant Δ . Alors M est irréductible.*

La démonstration de ce résultat s'appuie de façon essentielle sur le résultat d'Ellingsrud donnant déjà l'irréductibilité de l'ouvert de M correspondant aux fibrés stables ([7], cf. §4.1) ; il suffirait donc de savoir que cet ouvert est partout dense : c'est vrai, sauf peut-être si $\Delta \leq \frac{1}{2}$, et ceci repose sur les deux assertions suivantes :

- (a) Les points de M correspondant aux faisceaux stables forment un ouvert partout dense dans M si $\Delta > \frac{1}{2}$ (cf. théorèmes (4.10) et (4.11)).
- (b) Les points de M qui proviennent de faisceaux localement libres forment un ensemble partout dense dans M si $r > 1$ (cf. corollaire (2.9)).

La démonstration de (b) repose sur une description de $M = M(r, \mu, \Delta)$ qui nous a conduit à introduire au chapitre 2 les complexes de Kronecker stables et semi-stables, et à établir une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux semi-stables normalisés et non triviaux, et celle des complexes de Kronecker semi-stables (normalisés) (cf. proposition (2.3)). Cette description a aussi son intérêt propre : elle résout les questions que pose Hulek dans [12] en termes de “modules de Kronecker” pour les fibrés de classe de Chern $c_1 = 0$. C’est sans doute Barth qui le premier a considéré de tels complexes pour l’étude des espaces de modules de fibrés stables sur \mathbb{P}_2 ([2]).

Nous remercions le Referee dont les suggestions nous ont permis de clarifier la présentation, notamment du chapitre 5.

Terminologie – Par variété algébrique, on entend schéma de type fini sur \mathbb{C} , séparé. Ces variétés ne sont pas obligatoirement intègres. Par point, on entend point fermé,

Si une variété algébrique X est munie d’un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}_X(1)$, on pose pour tout \mathcal{O}_X -module E

$$E(m) = E \otimes \mathcal{O}_X(m) .$$

Un fibré vectoriel algébrique sur X sera identifié avec le \mathcal{O}_X -module localement libre qu’il définit.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1 – Pente, discriminant. Soit E un faisceau algébrique cohérent sur le plan projectif complexe \mathbb{P}_2 , de rang $r > 0$, de classes de Chern c_1 et c_2 . On appelle *pente* de E le rationnel

$$(1.1) \quad \mu(E) = \frac{c_1}{r}$$

et *discriminant* de E le rationnel

$$(1.2) \quad \Delta(E) = \frac{1}{r} \left(c_2 - \frac{c_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{2r} \right) .$$

1.2 – Formule de Riemann-Roch. On désigne par P le polynôme

$$P(X) = 1 + \frac{3X}{2} + \frac{X^2}{2} .$$

Soit E un faisceau algébrique cohérent de rang $r > 0$, de pente μ , de discriminant Δ . Le théorème de Riemann-Roch prend la forme suivante :

$$(1.3) \quad \chi(E) = r(P(\mu) - \Delta) ,$$

où $\chi(E) = \sum (-1)^i \dim(H^i(\mathbb{P}_2, E))$. En particulier, le polynôme de Hilbert de E $P_E(m) = \chi(E(m))$ est donné par

$$P_E(m) = r(P(\mu + m) - \Delta) .$$

1.3 – Les espaces vectoriels $\text{Ext}^i(E, E')$. Soient E et E' deux faisceaux algébriques cohérents de rangs $r > 0$ et $r' > 0$, de pentes respectives μ et μ' , de discriminants respectifs Δ et Δ' .

On pose $\chi(E, E') = \sum_i (-1)^i \dim(\text{Ext}^i(E, E'))$.

Proposition (1.1) (Riemann-Roch) : *On a*

$$(1.4) \quad \chi(E, E') = rr'(P(\mu' - \mu) - \Delta - \Delta') .$$

Démonstration. Soient c_i et c'_i les classes de Chern respectives de E et E' . La formule (1.4) est encore équivalente à

$$(1.5) \quad \chi(E, E') = rr' + \frac{3}{2}(rc'_1 - r'c_1) + r' \left(\frac{1}{2}c_1^2 - c_2 \right) + r \left(\frac{1}{2}c_1'^2 - c_2' \right) - c_1c_1' .$$

Si on choisit pour chacun des faisceaux E et E' une résolution gauche par un complexe fini de fibrés vectoriels, on se ramène à prouver cette formule pour E et E' localement libres.

Si E et E' sont localement libres,

$$\text{Ext}^i(E, E') = H^i(\mathbb{P}_2, \mathcal{H}om(E, E')) .$$

Le calcul du caractère de Chern du fibré $\mathcal{H}om(E, E')$:

$$\text{ch}(\mathcal{H}om(E, E')) = \text{ch}(E')\text{ch}(E^*)$$

donne pour les classes de Chern les formules suivantes

$$(1.6) \quad \begin{aligned} c_1(\mathcal{H}om(E, E')) &= rc'_1 - r'c_1 , \\ \left(\frac{1}{2}c_1^2 - c_2 \right) (\mathcal{H}om(E, E')) &= r' \left(\frac{1}{2}c_1^2 - c_2 \right) + r \left(\frac{1}{2}c_1'^2 - c_2' \right) - c_1c_1' . \end{aligned}$$

Le théorème de Riemann-Roch appliqué au fibré $\mathcal{H}om(E, E')$ conduit à la formule (1.5). \square

1.4 – Dualité de Serre. Soit E un faisceau algébrique cohérent sur une variété projective lisse X , de dimension n ; on désigne par Ω_X le faisceau des n -formes différentielles régulières sur X . On a alors un morphisme “trace” :

$$\text{Tr} : \text{Ext}^n(E, E \otimes \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C} ,$$

qu'on peut construire de la manière suivante : soit $R^\bullet \rightarrow E$ une résolution gauche finie de E par un complexe fini de faisceaux localement libres. Le groupe $\text{Ext}^i(E, E \otimes \Omega_X)$ s'identifie à l'hypercohomologie $\mathbf{H}^i(X, \mathcal{H}om^\bullet(R^\bullet, R^\bullet \otimes \Omega_X))$ de X à valeurs dans le complexe des fibrés d'homomorphismes défini en degré q par

$$\mathcal{H}om^q(R^\bullet, R^\bullet \otimes \Omega_X) = \prod_i \mathcal{H}om(R^i, R^{i+q} \otimes \Omega_X)$$

et de différentielle évidente.

On peut alors définir un morphisme trace :

$$\text{tr} : \mathcal{H}om^\bullet(R^\bullet, R^\bullet \otimes \Omega_X) \longrightarrow \Omega_X ,$$

par la formule, pour $f = (f_i) \in \mathcal{H}om^q(R^\bullet, R^\bullet \otimes \Omega_X)$

$$\text{tr}(f) = \begin{cases} \sum_i (-1)^i \text{trace}(f_i) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q \neq 0 . \end{cases}$$

Le morphisme Tr est par définition le morphisme induit en hypercohomologie ; il ne dépend pas de la résolution choisie.

Si F est un autre faisceau algébrique cohérent, on obtient en composant avec l'accouplement de Yoneda un accouplement

$$\text{Ext}^i(E, F) \times \text{Ext}^{n-i}(F, E \otimes \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C} .$$

Proposition (1.2) (Dualité de Serre) . *L'application linéaire*

$$d : \text{Ext}^i(E, F) \longrightarrow (\text{Ext}^{n-i}(F, E \otimes \Omega_X))^* ,$$

induite par l'accouplement ci-dessus est un isomorphisme.

Démonstration. La proposition est bien connue si F est localement libre (Hartshorne [11], théorème 7.6). Dans le cas général, en prenant une résolution gauche finie de F par des faisceaux localement libres, on se ramène par récurrence sur la longueur de la résolution à vérifier l'assertion suivante : soit

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux algébriques cohérents sur X ; si la proposition est vraie pour (E, F') et (E, F) , elle est vraie pour (E, F'') . Il suffit donc de constater que dans le diagramme associé aux suites exactes longues et induit par d

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ext}^i(E, F') & \longrightarrow & \text{Ext}^i(E, F) & \longrightarrow & \text{Ext}^i(E, F'') & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Ext}^{n-i}(F', E \otimes \Omega_X)^* & \longrightarrow & \text{Ext}^{n-i}(F, E \otimes \Omega_X)^* & \longrightarrow & \text{Ext}^{n-i}(F'', E \otimes \Omega_X)^* & \longrightarrow & \\ & & \longrightarrow & \text{Ext}^{i+1}(E, F') & \longrightarrow & \text{Ext}^{i+1}(E, F) & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & \text{Ext}^{n-i-1}(F', E \otimes \Omega_X)^* & \longrightarrow & \text{Ext}^{n-i-1}(F, E \otimes \Omega_X)^* & \end{array}$$

les carrés sont soit commutatifs, soit anticommutatifs, et d'appliquer le lemme des cinq. \square

1.5 – Filtrations . Soit K un complexe de \mathcal{O}_X -modules au-dessus d'une variété algébrique X , borné à gauche, muni d'une filtration croissante F

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{l-1} \subset F_l = K .$$

On pose

$$\mathrm{gr}_i(K) = F_i/F_{i-1} .$$

Il existe alors une résolution injective¹ R , munie d'une filtration finie notée encore F , telle que le morphisme d'augmentation $\epsilon : K \rightarrow R$ soit compatible avec les filtrations, et que les morphismes associés sur les gradués

$$\mathrm{gr}_i(K) \longrightarrow \mathrm{gr}_i(R) ,$$

soient des résolutions injectives. Soit $\mathrm{Hom}_{F,-}^\bullet(K, R) \subset \mathrm{Hom}^\bullet(K, R)$ le sous-complexe des éléments $f = (f_q) \in \mathrm{Hom}^i(K, R)$, $f_q : K^q \rightarrow R^{i+q}$, compatibles avec les filtrations, c'est-à-dire $f_q(F_p K)^q \subset (F_p R)^{q+i}$; le complexe quotient sera noté $\mathrm{Hom}_{F,+}^\bullet(K, R)$. On désigne par $\mathrm{Ext}_{F,-}^i(K, K)$ et $\mathrm{Ext}_{F,+}^i(K, K)$ les groupes de cohomologie respectifs; à isomorphisme près, ils sont indépendants de la résolution choisie, et on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_{F,-}^i(K, K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(K, K) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{F,+}^i(K, K) \longrightarrow \cdots$$

Proposition (1.3) *Soit K un complexe de \mathcal{O}_X -modules borné à gauche, muni d'une filtration croissante finie F .*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E_1^{p,q}$ est donné par

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} \prod_i \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathrm{gr}_i(K), \mathrm{gr}_{i-p}(K)) & \text{si } p < 0 \\ 0 & \text{si } p \geq 0. \end{cases}$$

et d'aboutissement $\mathrm{Ext}_{F,+}^\bullet(K, K)$.

Démonstration. Considérons la résolution injective R ci-dessus, et désignons par $\mathrm{Hom}^{p,\bullet}(K, R)$ le sous-complexe de $\mathrm{Hom}^\bullet(K, R)$ des éléments $f = (f_q) \in \mathrm{Hom}^i(K, R)$, $f_q : K^q \rightarrow R^{i+q}$, tels que $f_q(F_j) \subset F_{j-p}$ pour tout $j = 1, \dots, l$.

Ceci définit une filtration décroissante finie du complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(K, R)$:

$$\mathrm{Hom}_{F,-}^\bullet(K, R) \subset \mathrm{Hom}^{-1,\bullet}(K, R) \subset \mathrm{Hom}^{-2,\bullet}(K, R) \subset \cdots$$

et par suite une filtration décroissante de $\mathrm{Hom}_{F,+}^\bullet(K, R)$ dont le gradué en degré $p < 0$ s'identifie à

$$\bigoplus_i \mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{gr}_i(K), \mathrm{gr}_{i-p}(R))$$

et est nul en degré ≥ 0 .

Il suffit donc d'écrire la suite spectrale d'un complexe filtré pour obtenir la proposition (1.3). \square

1. Par résolution injective d'un complexe de \mathcal{O}_X -modules borné à gauche on entend un morphisme de complexes de \mathcal{O}_X -modules bornés à gauche $\epsilon : K \rightarrow R$ induisant un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie, où R est un complexe de \mathcal{O}_X -modules injectifs

Remarque : On construit de la même façon une suite spectrale d'aboutissement $\text{Ext}_{F,-}^\bullet(K, K)$ de terme E_1 donné par

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0, \\ \prod_i \text{Ext}^{p+q}(\text{gr}_i(K), \text{gr}_{i-p}(K)) & \text{si } p \geq 0. \end{cases}$$

Proposition (1.4) : Soit K un complexe de \mathcal{O}_X -modules, muni d'une filtration F

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{l-1} \subset F_l = K .$$

Considérons le complexe K/F_1 , muni de la filtration F/F_1 . On a une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \text{Ext}_{F/F_1,+}^q(K/F_1, K/F_1) &\longrightarrow \text{Ext}_{F,+}^q(K, K) \longrightarrow \text{Ext}^q(F_1, K/F_1) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_{F/F_1,+}^{q+1}(K/F_1, K/F_1) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de constater que pour la résolution injective R considérée ci-dessus on a une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{F/F_1,+}^\bullet(K/F_1, R/F_1R) \longrightarrow \text{Hom}_{F,+}^\bullet(K, R) \longrightarrow \text{Hom}^\bullet(F_1, R/F_1R) \longrightarrow 0$$

et de dérouler la suite exacte longue associée. □

1.6 – Drapeaux de Grothendieck [8]. Soit X une variété algébrique projective, lisse, munie d'un faisceau inversible ample $\mathcal{O}_X(1)$. On considère un \mathcal{O}_X -module cohérent E , et on désigne pour toute variété algébrique S par E_S l'image réciproque de E par la projection $pr_2 : S \times X \rightarrow X$.

Le foncteur $\text{Quot}^H(E)$ qui associe à S l'ensemble des \mathcal{O}_X -modules cohérents quotients G de E_S , S -plats et tels que pour tout $s \in S$ le polynôme de Hilbert de $G(s)$ soit un polynôme donné H , est représentable par une variété algébrique projective $\text{Quot}^H(E)$.

Les points de $\text{Quot}^H(E)$ sont donc les \mathcal{O}_X -modules cohérents quotients $G = E/F$, de polynôme de Hilbert H .

Les points suivants sont connus ([8], [15]) :

- (a) l'espace tangent de Zariski au point E/F est $\text{Hom}(F, E/F)$.
- (b) Si $\text{Ext}^1(F, E/F) = 0$, alors $\text{Quot}^H(E)$ est lisse au voisinage du point E/F^2 .

Plus généralement, soient H_1, \dots, H_l des polynômes à coefficients rationnels tels que $\sum_{i=1}^l H_i$ soit le polynôme de Hilbert de E . Le foncteur qui à la variété algébrique S associe l'ensemble des drapeaux de $\mathcal{O}_{S \times X}$ -modules cohérents

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_l = E_S ,$$

satisfaisant aux conditions suivantes

- (P) pour tout i , $\text{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ est S -plat ;

2. Ceci résulte aussi de : Luc Illusie. *Complexe cotangent et déformations I*. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 239, p.260.

(H) pour tout $s \in S$, le polynôme de Hilbert de $\text{gr}_i(s)$ est H_i

est représentable par une variété projective, notée $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E)$, dont les points sont les drapeaux F

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_l = E ,$$

tels que $\text{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ ait H_i pour polynôme de Hilbert. Au point F , l'espace tangent de Zariski à $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E)$ est l'espace $\text{Ext}_{F,+}^0(E, E)$ relatif à la filtration F ; de plus, si $\text{Ext}_{F,+}^1(E, E) = 0$, alors $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E)$ est lisse au voisinage de F .

Variante à paramètres – Soit S une variété algébrique. On se donne un $\mathcal{O}_{S \times X}$ -module E cohérent S -plat, et des polynômes H_1, \dots, H_l à coefficients rationnels. Pour tout morphisme $f : S' \rightarrow S$, on désigne par $E_{S'}$ le $\mathcal{O}_{S' \times X}$ -module

$$E_{S'} = (f \times \text{id}_X)^* E$$

et on considère le foncteur qui à S' associe l'ensemble des drapeaux de $\mathcal{O}_{S' \times X}$ -modules cohérents

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_l = E_{S'} ,$$

tels que les conditions suivantes soient satisfaites

(P) le quotient $\text{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ est S' -plat;

(H) pour tout $s \in S'$ le polynôme de Hilbert de $\text{gr}_i(s)$ est H_i .

Ce foncteur est représentable par une variété projective relative $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E) \rightarrow S$ dont la fibre au-dessus de $s \in S$ n'est autre que $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E(s))$.

Proposition (1.5) : *Soient E un $\mathcal{O}_{S \times X}$ -module cohérent S -plat, H_1, \dots, H_l des polynômes à coefficients rationnels. Soient $s \in S$ et $F \in \text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E(s))$. On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{F,+}^0(E(s), E(s)) \longrightarrow T_F \text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E) \longrightarrow T_s S \xrightarrow{\omega_+} \text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s)),$$

où ω_+ est le morphisme composé

$$T_s S \xrightarrow{\omega} \text{Ext}^1(E(s), E(s)) \longrightarrow \text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s)),$$

du morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira-Spencer ω et du morphisme canonique décrit au paragraphe 1.5.

Rappelons la définition du morphisme ω de Kodaira-Spencer. Soient $s \in S$, m_s l'idéal de s . Soit $X(s)$ la fibre de $X \times S$ au-dessus de s , et $X(s)^{(2)}$ le voisinage infinitésimal d'ordre 2 de la fibre $X(s)$. Sur $X(s)^{(2)}$ on a une suite exacte de modules

$$0 \longrightarrow T_s^* S \otimes E(s) \longrightarrow E/m_s^2 E \longrightarrow E(s) \longrightarrow 0$$

et la projection $X(s)^{(2)} \rightarrow X(s)$ permet de regarder cette suite exacte comme une suite exacte de modules sur $X(s)$. L'obstruction au scindage définit un élément

$$\omega \in \text{Ext}^1(E(s), T_s^* S \otimes E(s)) \simeq T_s^* S \otimes \text{Ext}^1(E(s), E(s)) ,$$

qui est par définition l'invariant de Kodaira-Spencer.

Lemme (1.6) : Soient G un \mathcal{O}_X -module cohérent, E un $\mathcal{O}_{S \times X}$ -module cohérent S -plat quotient de G_S par un sous-module K et tel que pour tout $s \in S$, le polynôme de Hilbert de $E(s)$ soit H . Considérons le morphisme défini par E :

$$f : S \rightarrow \text{Quot}^H(G) .$$

Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} T_s S & \xrightarrow{T_s f} & \text{Hom}(K(s), E(s)) \\ & \searrow \omega & \downarrow \delta \\ & & \text{Ext}^1(E(s), E(s)) \end{array}$$

dans lequel ω est le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira-Spencer de E et δ l'homomorphisme de liaison, est commutatif.

Démonstration. Vu la platitude de E sur S , on a un diagramme de suites exactes courtes (où on a posé $T_s = T_s S$) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T_s^* \otimes K(s) & \longrightarrow & K/m_s^2 K & \longrightarrow & K(s) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow \sigma & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T_s^* \otimes G & \longrightarrow & G/m_s^2 G & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \rho_1 & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T_s^* \otimes E(s) & \longrightarrow & E/m_s^2 E & \longrightarrow & E(s) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

La suite exacte relative à G se scinde canoniquement. Ce scindage induit un morphisme $\rho_1 \sigma : G \rightarrow E/m_s^2 E$ ce qui permet de construire un morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K(s) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & E(s) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \rho_1 \sigma & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & T_s^* \otimes E(s) & \longrightarrow & E/m_s^2 E & \longrightarrow & E(s) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Au signe près, le morphisme ϕ obtenu s'identifie au transposé de l'application linéaire tangente $T_s \rightarrow \text{Hom}(K(s), E(s))$; si on écrit pour ce diagramme les suites exactes dérivées du foncteur $\text{Hom}(\bullet, T_s^* \otimes E(s))$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(K(s), T_s^* \otimes E(s)) & \xrightarrow{\delta} & \text{Ext}^1(E(s), T_s^* \otimes E(s)) \\ \uparrow & & \parallel \\ \text{Hom}(T_s^* \otimes E(s), T_s^* \otimes E(s)) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(E(s), T_s^* \otimes E(s)) \end{array}$$

où δ est l'homomorphisme de liaison. Il en résulte $\delta(\phi) = -\omega$ ce qui démontre le lemme (1.6). \square

Démonstration de la proposition (1.5). La première partie de la suite exacte résulte du fait que la fibre du morphisme projectif $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E) \rightarrow S$ au-dessus de s n'est autre que $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E(s))$. Reste à obtenir l'exactitude au niveau $T_s S$. On peut supposer, quitte à se limiter à un ouvert de S , que le polynôme de Hilbert de $E(s)$ ne dépend pas de s . Choisissons un fibré très ample L sur X tel que pour tout $s \in S$

1. $E(s) \otimes L$ soit engendré par ses sections,
2. $H^q(E(s) \otimes L) = 0$ pour $q \geq 1$.

Posons $N = \chi(E(s) \otimes L)$, $G = L^* \otimes \mathbb{C}^N$. Sur $S \times X$, on a alors un morphisme d'évaluation surjectif

$$\text{ev} : pr_2^*(G) = G_S \longrightarrow E,$$

dont on désigne le noyau par K . Soit $f : S \rightarrow \text{Quot}^H(G)$ le morphisme défini par E , H désignant le polynôme de Hilbert de E . Soit H_0 le polynôme de Hilbert des noyaux des morphismes surjectifs $G \rightarrow E(s)$. Considérons la double flèche

$$S \times \text{Drap}^{H_0, \dots, H_l}(G) \rightrightarrows \text{Quot}^H(G),$$

où $H = \sum_{i \geq 1} H_i$, définie par f et par le morphisme $(s, F'_0, \dots, F'_l) \mapsto G/F'_0$. Le noyau de cette

double flèche s'identifie à $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E)$. Soient $s \in S$, $F \in \text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E(s))$ et F'_i l'image réciproque de F_i dans G . Posons enfin $F' = (K(s), F'_1, \dots, F'_l)$. On a donc la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T_F \text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E) \longrightarrow T_s S \oplus T_{F'} \text{Drap}^{H_0, \dots, H_l}(G) \longrightarrow \text{Hom}(K(s), E(s)) \\ (u, v) \longmapsto T f(u) - jv \end{aligned}$$

où j est le morphisme qui figure dans la suite exacte de la proposition (1.4) :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{F,+}^0(E(s), E(s)) \longrightarrow \text{Ext}_{F',+}^0(G, G) \xrightarrow{j} \text{Hom}(K(s), E(s)) \xrightarrow{\delta_+} \text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s)).$$

Il en résulte l'exactitude de la suite exacte de la proposition (1.5) avec $\omega_+ = \delta_+ T_s f$. Or, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Ext}^1(E(s), E(s)) \\ & \nearrow \delta & \downarrow p \\ \text{Hom}(K(s), E(s)) & & \\ & \searrow \delta_+ & \text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s)) \end{array}$$

où p est l'homomorphisme canonique. Il résulte du lemme (1.6) que $\omega_+ = p \circ \delta \circ T_s f = p \circ \omega$. D'où la proposition. \square

Proposition (1.7) : *On garde les notations de la proposition (1.5), et on suppose en outre que S est lisse et que (s, F) satisfait aux conditions suivantes*

1. $\text{Ext}^2(E(s), E(s)) = 0$.

2. le morphisme ω_+ est surjectif.

Alors $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E)$ est lisse au voisinage du point F .

Démonstration. Vérifions d'abord que $\text{Quot}^H(G)$ est lisse au voisinage du point $E(s)$. Par définition de L , on a $H^1(E(s) \otimes L) = 0 = H^2(E(s) \otimes L)$. La suite exacte longue dérivée du foncteur $\text{Hom}(\bullet, E(s))$, appliquée à la suite exacte $0 \rightarrow K(s) \rightarrow G \rightarrow E(s) \rightarrow 0$ conduit à l'isomorphisme

$$\text{Ext}^1(K(s), E(s)) \simeq \text{Ext}^2(E(s), E(s))$$

et donc $\text{Ext}^1(K(s), E(s)) = 0$.

Montrons maintenant que $\text{Drap}^{H_0, \dots, H_l}(G)$ est lisse au voisinage de F' . Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_s S \oplus T_{F'} \text{Drap}^{H_0, \dots, H_l}(G) & \xrightarrow{(u,v) \mapsto Tf(u) - jv} & \text{Hom}(K(s), E(s)) \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow \delta_+ \\ T_s S & \xrightarrow{\omega_+} & \text{Ext}_{F',+}^1(E(s), E(s)) \end{array}$$

montre, ω_+ étant surjective ainsi que pr_1 , que δ_+ est surjective. La suite exacte de la proposition (1.4), compte tenu du fait que $\text{Ext}^1(K(s), E(s)) = 0$, s'écrit :

$$\text{Hom}(K(s), E(s)) \xrightarrow{\delta_+} \text{Ext}_{F',+}^1(E(s), E(s)) \longrightarrow \text{Ext}_{F',+}^1(G, G) \longrightarrow 0$$

et par suite $\text{Ext}_{F',+}^1(G, G) = 0$.

Vérifions que l'application linéaire $(u, v) \mapsto Tf(u) - jv$ est surjective. Si $w \in \text{Hom}(K(s), E(s))$, il existe puisque ω_+ est surjective, $(u, v) \in T_s S \oplus T_{F'} \text{Drap}^{H_0, \dots, H_l}(G)$ tels que $\delta_+ w = \delta_+(Tf(u) - jv)$ et il suffit donc de remarquer que $\ker(\delta_+) \subset \text{im}(j)$. Le théorème de submersion donne alors la lissité de $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E)$ au voisinage de F . \square

2. VARIÉTÉS DE MODULES DE MARUYAMA DES FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR \mathbb{P}_2

2.1 – Faisceaux semi-stables . Les notions de stabilité et semi-stabilité que nous rappelons ici sont celles de Gieseker et Maruyama ([7], [16]).

Soit E un faisceau algébrique cohérent sur \mathbb{P}_2 . On dit que E est *stable* (resp. *semi-stable*) si E est sans torsion, et si pour tout sous-module cohérent F , $0 \neq F \neq E$ on a

$$\mu(F) \leq \mu(E)$$

et en cas d'égalité $\Delta(F) > \Delta(E)$ (resp. $\Delta(F) \geq \Delta(E)$).

Il revient au même d'écrire que pour les polynômes de Hilbert de F et E on a

$$\frac{P_F(m)}{r(F)} < \frac{P_E(m)}{r(E)} \quad (\text{resp. } \leq)$$

pour $m \gg 0$, $r(E)$ et $r(F)$ désignant les rangs respectifs de E et F .

Les faisceaux semi-stables de pente μ , de discriminant Δ constituent une catégorie abélienne, noethérienne et artinienne, stable par extensions. On peut donc définir une filtration de Jordan-Hölder pour E semi-stable

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{l-1} \subset F_l = E ,$$

telle que $\text{gr}_i(E) = F_i/F_{i-1}$ soit stable, de pente μ , de discriminant Δ . La classe d'isomorphisme de

$$\text{gr}(E) = \bigoplus_i F_i/F_{i-1}$$

ne dépend pas de la filtration. L'espace de modules de Maruyama $M_{\mathbb{P}_2}(r, \mu, \Delta)$ (aussi noté $M(r, \mu, \Delta)$) des faisceaux semi-stables de rang r , de pente μ , de discriminant Δ a pour ensemble sous-jacent l'ensemble des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables pour la relation d'équivalence : $E \sim F$ si et seulement si les gradués de Jordan-Hölder $\text{gr}(E)$ et $\text{gr}(F)$ sont isomorphes ([16]).

On se propose dans ce paragraphe de donner une description de $M_{\mathbb{P}_2}(r, \mu, \Delta)$. On peut naturellement se borner au cas $-1 < \mu \leq 0$: nous dirons que les faisceaux correspondants sont *normalisés*.

Le résultat suivant sera généralisé au paragraphe 4.3.

Lemme (2.1) : *Soit E un faisceau semi-stable normalisé non trivial. Alors $h^0(E) = 0$, et $\text{Hom}(E, \mathcal{O}(-1)) = 0$.*

Démonstration. La condition $-1 < \mu$ entraîne évidemment $\text{Hom}(E, \mathcal{O}(-1)) = 0$.

Si $h^0(E) \neq 0$, il existe un morphisme injectif de faisceaux $\mathcal{O} \rightarrow E$, et par semi-stabilité de E on a $\mu \geq 0$, donc $\mu = 0$, et $\Delta \leq 0$. La semi-stabilité de E entraîne aussi que $h^0(E(-1)) = 0$. Puisque $\text{Hom}(E, \mathcal{O}(-1)) = 0$, par dualité de Serre, il en résulte $h^2(E(-2)) = 0$, et par suite $h^2(E(i)) = 0$ pour $i \geq -2$. Il résulte du théorème de Riemann-Roch que

$$\chi(E(-1)) = -r\Delta \leq 0 ,$$

donc $\Delta \geq 0$ et finalement $\Delta = 0$.

Considérons une filtration de Jordan-Hölder de E : chaque $\text{gr}_i(E)$ est stable de pente 0, de discriminant 0. Soit r_i le rang du faisceau $\text{gr}_i(E)$; d'après le théorème de Riemann-Roch, $\chi(\text{gr}_i(E)) = r_i$; ce faisceau a donc une section non nulle, ce qui fournit un morphisme injectif $\mathcal{O} \rightarrow \text{gr}_i(E)$. À cause de la stabilité, c'est un isomorphisme. Ceci entraîne que la filtration se scinde, et par suite $E \simeq \mathcal{O}^r$. \square

2.2 – Filtration de Harder-Narasimhan. La filtration que nous décrivons ici généralise celle que proposent Harder et Narasimhan sur les courbes [10]. Elle est plus fine que celle de Shatz [20]³.

3. Cette filtration peut en fait se définir sur toute surface projective X munie d'un faisceau inversible ample $\mathcal{O}_X(1)$

Lemme (2.2) : Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module cohérent sans torsion de rang r .

(a) Le degré des sous-modules cohérents $F \subset E$ est majoré.

(b) La caractéristique d'Euler-Poincaré des sous-modules cohérents $F \subset E$ de degré fixé d est majorée.

Démonstration. Par récurrence sur le rang r ; le résultat est trivial pour $r = 1$. Pour $r > 1$, on peut trouver des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -modules cohérents sans torsion E' et E'' de rang inférieur tels que E s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0 .$$

Soient C' et C'' des majorants pour le degré des sous-modules cohérents de E' et E'' respectivement. Si F est un sous-module cohérent de E , on désigne par F'' son image dans E'' et par F' l'intersection $E' \cap F$. Alors

$$c_1(F) = c_1(F') + c_1(F'') \leq C' + C'' .$$

Si $c_1(F) = d$, les inégalités $C' \geq c_1(F') \geq d - C''$ et $C'' \geq c_1(F'') \geq d - C'$ et l'hypothèse de récurrence montrent que $\chi(F')$ et $\chi(F'')$ sont majorés. Il en est de même de $\chi(F) = \chi(F') + \chi(F'')$. D'où le lemme. \square

Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module sans torsion, de rang $r > 0$, de pente μ et de discriminant Δ . Il existe alors un unique sous-module cohérent $F_1 \subset E$ satisfaisant à la propriété suivante : pour tout sous-module cohérent $0 \neq F' \subset E$, on a $\mu(F') \leq \mu(F_1)$, et en cas d'égalité, $\Delta(F') \geq \Delta(F_1)$. De plus, si $\mu(F') = \mu(F_1)$ et $\Delta(F') = \Delta(F_1)$, $r(F') \leq r(F_1)$.

Le sous-faisceau $F_1 \subset E$ ainsi construit est évidemment semi-stable; on l'appelle le *sous-faisceau semi-stable maximal*. Le quotient $E_1 = E/F_1$ est alors cohérent et sans torsion; s'il est non nul, on peut recommencer la construction ci-dessus. On obtient ainsi une filtration de E par des sous-modules cohérents

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{l-1} \subset F_l = E ,$$

telle que $\text{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit semi-stable et telle que

$$\text{soit } \mu(\text{gr}_{i+1}) < \mu(\text{gr}_i),$$

$$\text{soit } \mu(\text{gr}_{i+1}) = \mu(\text{gr}_i) \text{ et } \Delta(\text{gr}_{i+1}) > \Delta(\text{gr}_i).$$

Cette filtration est la seule filtration de E qui satisfasse à ces propriétés; on l'appelle la *filtration de Harder-Narasimhan*.

2.3 – Complexes de Kronecker. Soit K un complexe fini de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -modules cohérents. On définit le rang $r = r(K)$, le degré $c_1 = c_1(K)$, la caractéristique d'Euler $\chi = \chi(K)$, et le polynôme de Hilbert P_K de K par les formules

$$r = \sum_i (-1)^i r(K^i), \quad c_1 = \sum_i (-1)^i c_1(K^i), \quad \chi = \sum_i (-1)^i \chi(K^i), \quad P_K(m) = \sum_i (-1)^i P_{K^i}(m).$$

On appelle *complexe de Kronecker* un complexe de type

$$0 \longrightarrow H_{-1} \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{u} H_0 \otimes Q^* \xrightarrow{v} H_1 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow -0 ,$$

où les H_i sont des espaces vectoriels de dimension finie, et Q le fibré quotient universel de rang 2 sur \mathbb{P}_2 .

Les complexes de Kronecker forment une catégorie abélienne. Soit K un complexe de Kronecker de rang r , de degré c_1 , de caractéristique χ ; on dit que K est *stable* (resp. *semi-stable*) si pour tout sous-complexe de Kronecker $0 \subsetneq K' \subsetneq K$, de rang $r' = r(K')$ on a pour $m \gg 0$

$$rP_{K'}(m) - r'P_K(m) < 0 \quad (\text{resp. } \leq 0) .$$

On peut bien entendu traduire cette condition en termes de degré et de caractéristique : elle est équivalente à

$$rc_1(K') - r(K')c_1 \leq 0$$

et, en cas d'égalité, $r\chi(K') - r(K')\chi < 0$ (resp. ≤ 0).

On dit qu'un complexe de Kronecker K de rang r , de degré c_1 est *normalisé* si $-r < c_1 \leq 0$.

La dimension des espaces vectoriels H_i est déterminée par r , c_1 et χ . La condition de normalisation ci-dessus peut alors se lire sur les conditions suivantes

$$\dim(H_{-1}) \leq \dim(H_0) , \quad \dim(H_0) > \dim(H_1) .$$

Proposition (2.3) : *Soit K un complexe de Kronecker semi-stable normalisé de rang r , de degré c_1 , de caractéristique d'Euler χ :*

$$0 \longrightarrow H_{-1} \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{u} H_0 \otimes Q^* \xrightarrow{v} H_1 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0 .$$

(1) *Le morphisme u est injectif en dehors d'un nombre fini de points; le morphisme v est surjectif et le faisceau de cohomologie $E = H^0(K)$ est sans torsion.*

(2) *Si K et K' sont deux complexes de Kronecker normalisés et semi-stables de faisceaux de cohomologie E et E' respectivement⁴*

$$H^q(\text{Hom}^\bullet(K, K')) = \text{Ext}^q(K, K') = \text{Ext}^q(E, E') .$$

(3) *Le faisceau de cohomologie $E = H^0(K)$ est semi-stable de rang r , de degré c_1 , de caractéristique d'Euler χ . De plus, K est stable si et seulement si E est stable.*

(4) *Tout faisceau semi-stable normalisé non trivial est le faisceau de cohomologie d'un complexe de Kronecker normalisé semi-stable.*

Cet énoncé signifie en particulier que la catégorie des complexes de Kronecker semi-stables normalisés est équivalente à celle des faisceaux semi-stables normalisés.

Démonstration. Appelons *élémentaire* un complexe de Kronecker d'un des types suivants

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 , \\ \text{II} & 0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \longrightarrow Q^* \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 , \\ \text{III} & 0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \longrightarrow Q^* \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0 , \\ \text{IV} & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0 , \\ \text{IV} & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0 , \end{array}$$

où les complexes II, III, IV sont associés à une section non nulle du fibré canonique Q .

4. Rappelons que $\text{Ext}^q(K, K') = H^q[\text{Hom}(K, R')]$, où R' est une résolution injective de K' .

(1) *Injectivité de u en dehors d'un nombre fini des points.* Remarquons d'abord que si u n'est pas injectif comme morphisme de fibrés vectoriels, il contient obligatoirement un sous-complexe élémentaire de type I, II ou III.

Supposons d'abord $c_1 < 0$. Il existe une filtration de K par des sous-complexes de Kronecker

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_l \subset K$$

telle que $\text{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit élémentaire de type III et telle que K/F_l ne contienne pas de sous-complexe de type III. Montrons que K/F_l ne contient pas de sous-complexe de type I, ni du type II. Si tel était le cas, il existerait par image réciproque dans K un sous-complexe $K' \subset K$ de même rang et de même classe de Chern que l'un des complexes I ou II. Le tableau suivant montre que ceci est exclu à cause de la semi-stabilité de K :

	$c_1(K')$	$r(K')$	$rc_1(K') - c_1r(K')$
I	1	-1	$c_1 + r > 0$
II	0	1	$-c_1 > 0$

Supposons maintenant $c_1 = 0$. Il existe une filtration de K

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_l \subset K$$

par des sous-complexes de Kronecker tels que $\text{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit élémentaire de type II ou III et tels que K/F_l ne contienne pas de sous-complexe élémentaire de type II ou III. Alors K/F_l ne contient pas non plus de sous-complexe élémentaire de type I : en effet, si c'était le cas, il existerait par image réciproque dans K un sous-complexe $K' \subset K$ de degré $c_1(K') > 0$, et alors

$$rc_1(K') - c_1r(K') = rc_1(K') > 0 ,$$

ce qui contredit la semi-stabilité de K .

Dans les deux situations, le morphisme u est injectif, sauf peut-être en l points.

Surjectivité de v . Si v n'était pas surjectif, K aurait un quotient élémentaire L de type III, IV ou V. Or, le tableau suivant montre que la semi-stabilité de K exclut ces trois cas :

	$c_1(L)$	$\chi(L)$	$r(L)$	$rc_1(L) - r(L)c_1$	$r\chi(L) - r(L)\chi$
III	0	-1	0	0	$-r < 0$
IV	-1	-1	1	$-(c_1 + r) < 0$	-
V	0	-1	-1	$c_1 \leq 0$	$-r + \chi < 0$

Le faisceau $E = H^0(K)$ est sans torsion. Dans le cas $c_1 < 0$, on remarque que pour la filtration donnée ci-dessus, le morphisme canonique

$$H^0(K) \longrightarrow H^0(K/F_l) ,$$

est injectif (comme morphisme de faisceaux), et que $H^0(K/F_l)$ est localement libre. Dans le cas $c_1 = 0$, on constate encore que la filtration décrite ci-dessus permet d'obtenir sur $H^0(K)$ une filtration dont le gradué est sans torsion.

(2) La démonstration est la même que celle de [13], lemme 23.

(3) *Semi-stabilité de $E = H^0(K)$.* Remarquons d'abord que $h^0(E) = 0 = h^2(E(-2))$.

Si E n'est pas semi-stable, il a un sous-faisceau $0 \neq F \subsetneq E$ satisfaisant aux conditions suivantes

(A) $\mu(F) \geq \mu$, et en cas d'égalité $\frac{\chi(F)}{r(F)} > \frac{\chi}{r}$.

(B) $h^0(E/F) = 0$, et E/F est sans torsion.

Considérons en effet la filtration de Harder-Narasimhan de E

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_l = E .$$

Pour $m \gg 0$, on a

$$\frac{P_{\text{gr}_l(E)}(m)}{r(\text{gr}_l(E))} < \frac{P_E(m)}{r} .$$

Il découle de la semi-stabilité de $\text{gr}_l(E)$ que $h^0(\text{gr}_l(E)) = 0$. D'autre part, pour $m \gg 0$

$$\frac{P_{F_{l-1}}(m)}{r(F_{l-1})} > \frac{P_E(m)}{r} .$$

Il suffit donc de choisir $F = F_{l-1}$.

Au faisceau E , on peut associer une suite spectrale, dite de Beilinson ([13], [21]), dont le terme E_1 est donné par

$$E_1^{p,q} = H^q(E(p)) \otimes \wedge^{-p} Q^*$$

et qui a pour aboutissement E en degré 0, 0 en degré $\neq 0$. De même à F on associe une suite spectrale de Beilinson, et l'inclusion $F \rightarrow E$ conduit à un morphisme sur ces suites spectrales,

et par suite sur les complexes de Kronecker $K(F)$ et $K(E)$ qui figurent dans le terme E_1 de ces suites spectrales :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(F(-2)) \otimes \wedge^2 Q^* & \longrightarrow & H^1(F(-1)) \otimes Q^* & \longrightarrow & H^1(F) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(E(-2)) \otimes \wedge^2 Q^* & \longrightarrow & H^1(E(-1)) \otimes Q^* & \longrightarrow & H^1(E) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Les conditions $h^0(E) = h^2(E(-2)) = 0$ impliquent que les faisceaux de cohomologie de $K(E)$ sont $(0, E, 0)$. On déduit de (2) un isomorphisme $K(E) \simeq K$. Le complexe $K(F)$ s'identifie à un sous-complexe de K d'après la condition (B) ; ses faisceaux de cohomologie sont $(0, G_0, G_1)$, et la suite spectrale de Beilinson de F conduit à une suite exacte

$$0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow G_1 \longrightarrow 0 ,$$

où G est le noyau du morphisme de fibrés vectoriels $d_1^{-2,2}$ (obligatoirement de rang constant)

$$H^2(F(-2)) \otimes \wedge^2 Q^* \longrightarrow H^2(F(-1)) \otimes Q^* .$$

On a alors

$$rc_1(K(F)) - r(K(F))c_1 = rc_1(F) - r(F)c_1 - (rc_1(G) - r(G)c_1) .$$

Si $G \neq 0$, on a $\mu(G) \leq \mu(\wedge^2 Q^*) = -1 < \frac{c_1}{r} = \mu$. D'après la condition (A) on obtient $rc_1(K(F)) - r(K(F))c_1 > 0$, ce qui contredit la semi-stabilité de K . Si $G = 0$, alors $K(F)$ et F ont même rang, même degré et même caractéristique d'Euler. La condition (A) contredit encore la semi-stabilité de K .

Stabilité de E si K est stable. Supposons E non stable ; il a alors un sous-faisceau semi-stable $0 \neq F \subsetneq E$ de même pente et même discriminant que E . On a donc

$$(A') \quad \mu(F) = \mu \leq 0 ; \quad \frac{\chi(F)}{r(F)} = \frac{\chi}{r} \leq 0$$

et la même chose pour le quotient E/F . Puisque E/F est semi-stable, ceci entraîne d'après le lemme (2.1) :

$$(B) \quad h^0(E/F) = 0 .$$

Comme ci-dessus, la suite spectrale de Beilinson de F donne lieu à un sous-complexe $0 \neq K(F) \subsetneq K$, et la semi-stabilité de K impose encore que les faisceaux de cohomologie de $K(F)$ sont $(0, F, 0)$. D'après la stabilité de K , on a

$$r\chi(K(F)) - r(K(F))\chi < 0 ,$$

ce qui est en contradiction avec la condition (A').

(4) *Complexe associé à un faisceau – Sous-complexe maximal.* Soit K un complexe de Kronecker normalisé de rang r , de degré c_1 , de caractéristique d'Euler χ . On dit qu'un sous-complexe de Kronecker $K' \subset K$ est *maximal* si

- (1) K' réalise le maximum de $rc_1(K') - r(K')c_1$,
- (2) parmi les sous-complexes de K qui réalisent le maximum de (1), K' réalise le maximum de $r\chi(K') - r(K')\chi$.

Les lemmes suivants étendent à un complexe normalisé quelconque les résultats de l'assertion (1) de la proposition.

Lemme (2.4) : *Soit $K' \subset K$ un sous-complexe maximal de K . Alors $H^1(K') = 0$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que K' n'a pas de quotient élémentaire L de type III, IV ou V. Si tel était le cas, désignons par L' le noyau de la projection $K' \rightarrow L$. On aurait

$$rc_1(L') - r(L')c_1 = rc_1(K') - r(K')c_1 - (rc_1(L) - r(L)c_1)$$

et la même chose en remplaçant degré par caractéristique d'Euler. Or, le second tableau de la démonstration de (1) montre que K' ne serait pas maximal. \square

Lemme (2.5) : *Soit K' un sous-complexe maximal de K , $K'' = K/K'$ le quotient. Alors $H^{-1}(K'') = 0$.*

Démonstration. Supposons $c_1 < 0$. Il existe une filtration

$$K' = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = K ,$$

telle que $\text{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit élémentaire de type III et tel que K/F_l ne contienne pas de sous-complexe élémentaire de type III. Alors K/F_l ne contient pas non plus de sous-complexe élémentaire L de type I ou II, car si c'était le cas, on aurait pour son image réciproque L' dans K

$$rc_1(L') - r(L')c_1 = rc_1(K') - r(K')c_1 + rc_1(L) - r(L)c_1 .$$

Or, premier tableau de la démonstration de (1) (avec L à la place de K') montre que le sous-complexe L' contredit la maximalité de K' .

Supposons $c_1 = 0$. Il existe une filtration de K

$$K' = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = K ,$$

telle que $\text{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit élémentaire de type II ou III et telle que K/F_l ne contienne pas de sous-complexe élémentaire de type II ou III. Alors $c_1(K') = c_1(F_l)$. Le complexe K/F_l ne peut contenir de sous-complexe élémentaire de type I, car si c'était le cas, il existerait un sous-complexe $L' \supset F_l \supset K'$ tel que

$$rc_1(L') - r(L')c_1 = r(c_1(K') + 1) > rc_1(K') - r(K')c_1 ,$$

ce qui contredit le fait que K' est maximal.

Dans les deux situations ci-dessus, on a $H^{-1}(F_i/F_{i-1}) = 0$ pour $i \geq 1$, et $H^{-1}(K/F_l) = 0$. Par suite $H^{-1}(K/K') = 0$. \square

Fin de la démonstration de la proposition (2.3). Soit E un faisceau semi-stable normalisé de rang r , de degré c_1 de caractéristique d'Euler χ . Si E n'est pas trivial on a d'après le lemme (2.1) : $h^0(E) = 0$, et $\text{Hom}(E, \mathcal{O}(-1)) = 0$, c'est-à-dire par dualité de Serre $h^2(E(-2)) = 0$. Le complexe de Kronecker $K = K(E)$ associé à E par la suite spectrale de Beilinson a alors pour faisceaux de cohomologie $(0, E, 0)$. Il s'agit de vérifier que le complexe normalisé K est semi-stable.

Soit $K' \subset K$ un sous-complexe maximal de K , $K'' = K/K'$. D'après les lemmes (2.4) et (2.5) on a $H^1(K') = 0$ et $H^{-1}(K'') = 0$. Il en résulte que les faisceaux de cohomologie de K' sont de la forme $(0, E', 0)$ et que le morphisme $E' \rightarrow E$ induit par l'inclusion $K' \rightarrow K$ fait de E' un sous-faisceau de E . Puisque E et K (resp. E' et K') ont même rang, même degré et même caractéristique, la semi-stabilité de E entraîne $rc_1(K') - r(K')c_1 \leq 0$, et en cas d'égalité $r\chi(K') - r(K')\chi \leq 0$.

Puisque K' est maximal, c'est encore vrai quand on remplace K' par n'importe quel autre sous-complexe de Kronecker ; donc K est semi-stable.

Stabilité de $K = K(E)$ quand E est stable. Supposons que le faisceau E soit stable. Si K n'était pas stable, il aurait un sous-complexe maximal $0 \subsetneq K' \subsetneq K$. On aurait alors, avec les notations ci-dessus, $0 \neq E' \subsetneq E$ et la stabilité de E implique $rc_1(K') - r(K')c_1 \leq 0$, et en cas d'égalité $r\chi(K') - r(K')\chi \leq 0$. Ceci contredit la définition de K' . \square

2.4 – L'espace de modules de Maruyama. Soient r un entier > 0 , c_1 et $\chi \in \mathbb{Z}$ tels que $-r < c_1 \leq 0$, $\chi \leq 0$ et $\chi \leq 2c_1 + r$. On pose

$$\mu = \frac{c_1}{r}, \quad \Delta = P(\mu) - \frac{\chi}{r}.$$

Considérons trois espaces vectoriels $(H_i)_{i=-1,0,1}$ de dimension r_i donnés par

$$r_{-1} = 2c_1 + r - \chi, \quad r_0 = c_1 + r - \chi, \quad r_1 = -\chi.$$

Considérons la variété algébrique (éventuellement réductible) des complexes de Kronecker :

$$0 \longrightarrow H_{-1} \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{u} H_0 \otimes Q^* \xrightarrow{v} H_1 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire des couples de morphismes (u, v) tels que $v \circ u = 0$. Les points correspondants à des complexes de Kronecker stables (respectivement semi-stables) forment un ouvert \mathcal{M}_s (resp. \mathcal{M}). Le groupe

$$G = \prod_{i=-1,0,1} \mathrm{GL}(H_i)$$

opère algébriquement sur \mathcal{M} par la formule

$$(f_{-1}, f_0, f_1).(u, v) = (f_0 u f_{-1}^{-1}, f_1 v f_0^{-1})$$

et l'ouvert \mathcal{M}_s est invariant sous l'action de G .

Au-dessus de $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2$, on définit de manière évidente un complexe de Kronecker universel \mathbb{K} , dont on désigne par \mathbb{E} le faisceau de cohomologie. Le faisceau \mathbb{E} est \mathcal{M} -plat, et pour tout $(u, v) \in \mathcal{M}$, le faisceau $E(u, v)$ induit par le morphisme $\mathbb{P}_2 \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{P}_2$ défini par le point (u, v) est semi-stable d'après la proposition (2.3). D'après la propriété universelle de l'espace de modules de Maruyama $M = M(r, \mu, \Delta)$ (cf. [16], theorem 4.11) le faisceau \mathbb{E} définit un morphisme

$$\phi : \mathcal{M} \longrightarrow M,$$

équivant et surjectif d'après la proposition (2.3).

Proposition (2.6) : (1) *L'ouvert \mathcal{M} est lisse, de dimension*

$$r^2(2\Delta - 1) + \sum_{i=-1,0,1} r_i^2 .$$

(2) *Le morphisme ϕ défini ci-dessus fait de M un bon quotient de \mathcal{M} par l'action de G sur \mathcal{M} .*

(3) *L'ouvert $M_s \subset M$ correspondant aux faisceaux stables est un quotient géométrique de \mathcal{M}_s .*

(1) Soit $(u, v) \in \mathcal{M}$, $E = E(u, v)$ le faisceau de cohomologie du complexe de Kronecker $K = K(u, v)$. La dérivée du morphisme $(u', v') \mapsto v'u'$ n'est autre que la différentielle

$$\mathrm{Hom}^1(K, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}^2(K, K)$$

du complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(K, K)$. Son conoyau s'identifie donc d'après la proposition (2.3) à $\mathrm{Ext}^2(E, E)$. Par dualité de Serre (proposition (1.2)), On a $\mathrm{Ext}^2(E, E) = 0$. La variété \mathcal{M} est donc lisse d'après le théorème de submersion, et a pour espace tangent l'espace $Z^1(K, K)$ des 1-cocycles du complexe ci-dessus. Le calcul de la dimension résulte donc de la formule

$$\dim(\mathrm{Hom}^0(K, K)) - \dim(Z^1(K, K)) = \chi(E, E) .$$

(2) *Bons quotients.* Il s'agit de vérifier que :

(a) le morphisme ϕ est surjectif et affine ;

(b) $\phi_*((\mathcal{O}_{\mathcal{M}})^G) = \mathcal{O}_M$;

(c) les images par ϕ de deux fermés G -saturés disjoints sont deux fermés disjoints de M (cf. [19]).

Pour vérifier ceci, nous utilisons les résultats de Maruyama [16]. Rappelons d'abord le lemme suivant, conséquence facile du théorème B de Serre, déjà utilisé au paragraphe 1.6.

Lemme (2.7) : *Soient S une variété algébrique, E un $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{P}_2}$ -module cohérent S -plat. Il existe un entier m_0 tel que pour tout $s \in S$ et $m \geq m_0$ on ait :*

(1) $E(s)(m_0)$ est engendré par ses sections ;

(2) $H^q(E(s)(m)) = 0$ pour $q \geq 1$.

On applique ce résultat au $\mathcal{O}_{\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2}$ -module universel \mathbb{E} ; on pose dans la suite

$N = r(P(\mu + m_0) - \Delta)$ et on désigne par $\widetilde{\mathcal{M}}$ la variété des couples $((u, v), g)$ où $(u, v) \in \mathcal{M}$, et où $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \Gamma(\mathbb{E}(u, v)(m_0))$ est un isomorphisme. Autrement dit, $\widetilde{\mathcal{M}}$ est la variété des repères du fibré vectoriel $pr_{1*}(\mathbb{E}(m_0))$, fibré de rang N au dessus de \mathcal{M} . Sur $\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{P}_2$, on a un morphisme surjectif associé à l'évaluation

$$p : \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{P}_2}^N \longrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}(m_0) ,$$

où $\widetilde{\mathbb{E}}$ désigne l'image réciproque de \mathbb{E} sur $\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{P}_2$.

Considérons la variété projective $\mathrm{Quot}^N(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^N)$ qui représente les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -modules cohérents quotients de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^N$ de polynôme de Hilbert H , où

$$H(m) = r(P(\mu + m_0 + m) - \Delta)$$

et désignons par U le module quotient universel sur $\mathrm{Quot}^N(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^N) \times \mathbb{P}_2$. Les points

$q \in \mathrm{Quot}^N(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^N)$ tels que $U(q)$ soit sans torsion, semi-stable et tels que le morphisme

$\mathbb{C}^N \rightarrow \Gamma(U(q))$ induit par la projection canonique soit un isomorphisme, forment un ouvert lisse [16] qu'on désigne par \mathcal{Q} . Désignons d'autre part $\tilde{\mathcal{Q}}$ la variété des points $(q, (g_i)_{i=-1,0,1})$ où $q \in \mathcal{Q}$, et où :

$$g_i : H_i \longrightarrow H^1(U(q)(-m_0 + i - 1))$$

est un isomorphisme. Autrement dit, si R_i est la variété des repères du fibré vectoriel $R^1 pr_{1*}(U(-m_0 + i - 1))|_{\mathcal{Q}}$, $\tilde{\mathcal{Q}}$ est le produit fibré

$$\tilde{\mathcal{Q}} = R_{-1} \times_{\mathcal{Q}} R_0 \times_{\mathcal{Q}} R_1 .$$

Le faisceau $\tilde{\mathbb{E}}$ définit un morphisme canonique

$$\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{M}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$$

associé à p et aux trivialisations

$$g_i : \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Q}}} \otimes H_i \simeq R^1 pr_{1*}(\tilde{\mathbb{E}}(i - 1)) \quad (i = -1, 0, 1) .$$

Ce morphisme est en fait un isomorphisme, car on en construit trivialement un inverse, associé au faisceau \tilde{U} image réciproque de $U|_{\mathcal{Q}}$ sur $\tilde{\mathcal{Q}}$. De plus, sur $\tilde{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\mathcal{Q}}$ le groupe $\tilde{G} = G \times GL(\mathbb{C}^N)$ opère et cet isomorphisme est \tilde{G} -équivariant. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{\mathcal{Q}} \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 \\ \mathcal{M} & & \mathcal{Q} \\ & \searrow & \downarrow \alpha_3 \\ & & M \end{array}$$

est alors commutatif. D'après Maruyama, le morphisme α_3 est un bon quotient sous l'action de $GL(\mathbb{C}^N)$. D'autre part, les morphismes α_1 et α_2 sont trivialement des bons quotients sous l'action de $GL(\mathbb{C}^N)$ et G respectivement. Des propriétés de transitivité des bons quotients [19], il découle que le composé $\tilde{\mathcal{M}} \rightarrow M$ est un bon quotient sous l'action de \tilde{G} , et que le morphisme $\phi : \mathcal{M} \rightarrow M$ est un bon quotient sous l'action de G .

(3) Quotient géométrique. Un bon quotient est dit *géométrique* si les orbites sont fermées.

Désignons par \mathcal{M}_s l'ouvert de \mathcal{M} correspondant aux complexes stables, et par \mathcal{Q}_s l'ouvert de \mathcal{Q} des points q tels que $U(q)$ soit stable.

Ces ouverts sont invariants sous l'action de G et $GL(\mathbb{C}^N)$ respectivement. Désignons par $\tilde{\mathcal{M}}_s$ et $\tilde{\mathcal{Q}}_s$ leur image réciproque dans $\tilde{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\mathcal{Q}}$. Par l'isomorphisme $\tilde{\phi}$ ci-dessus, $\tilde{\mathcal{M}}_s$ a exactement pour image $\tilde{\mathcal{Q}}_s$. D'autre part $\mathcal{Q}_s \rightarrow M_s$ est un quotient géométrique d'après Maruyama. Par suite, il en est de même de $\mathcal{M}_s \rightarrow M_s$.

En fait, la même démonstration que dans [13] montre que l'action de G/\mathbb{C}^* sur \mathcal{M}_s est propre et libre.

2.5 – Densité des fibrés vectoriels. Désignons par $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ l'ouvert des couples (u, v) tels que u soit injectif. C'est un ouvert de Zariski, dont l'image dans M contient l'ouvert M_0

de M des classes de fibrés vectoriels E semi-stables tels que le gradué de Jordan-Hölder $\text{gr}(E)$ soit encore localement libre.

Proposition (2.8) : *Le complémentaire Y de \mathcal{M}_0 dans \mathcal{M} est un fermé de codimension $\geq r - 1$.*

Corollaire (2.9) : *Si $r > 1$, l'ouvert M_0 de $M = M(r, \mu, \Delta)$ défini ci-dessus est partout dense.*

Démonstration de la proposition (2.8). Soient $x \in \mathbb{P}_2$, $Q(x)$ la fibre de Q au point x . Les complexes d'espaces vectoriels K'

$$0 \longrightarrow H_{-1} \otimes \wedge^2 Q(x)^* \xrightarrow{u'} H_0 \otimes Q(x)^* \xrightarrow{v'} H_1 \longrightarrow 0,$$

où v' est une application linéaire surjective, forment une variété algébrique lisse \mathcal{M}' dont l'espace tangent au point (u', v') s'identifie à l'espace $Z^1(K', K')$ des 1-cocycles du complexe $\text{Hom}^\bullet(K', K')$.

Dans \mathcal{M}' , les couples (u', v') tels que $\dim(\ker(u')) = l$ forment une sous-variété lisse Z'_l localement fermée, de codimension $l(r + l)$, dont l'espace normal en (u', v') s'identifie à $\text{Hom}(H^{-1}(K'), H^0(K'))$.

Lemme (2.10) : *Le morphisme de restriction*

$$\begin{aligned} r_x : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M}' \\ (u, v) &\longmapsto (u(x), v(x)) \end{aligned}$$

est transverse à Z'_l .

Démonstration. Soient $K = K(u, v)$ le complexe de Kronecker défini par $(u, v) \in \mathcal{M}$, $K' = K(x)$ le complexe d'espaces vectoriels induit par K au point x . Il s'agit de vérifier que le morphisme composé

$$Z^1(K, K) \xrightarrow{\rho(x)} Z^1(K(x), K(x)) \longrightarrow \text{Hom}(H^{-1}(K(x)), H^0(K(x))),$$

où $\rho(x)$ est le morphisme de restriction, est surjectif. Ce diagramme se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z^1(K, K) & \longrightarrow & Z^1(K(x), K(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ext}^1(K, K) & \xrightarrow{\beta_1} & \text{Hom}(H^{-1}(K(x)), H^0(K(x))) \end{array}$$

et il suffit de constater que la flèche β_1 est surjective. Or, pour $E = E(u, v)$ on a

$$\text{Ext}^2(E, E \otimes I_x) = 0,$$

où I_x désigne le faisceau d'ideaux défini par le point x . En effet, cet espace est dual de $\text{Hom}(E \otimes I_x, E(-3))$ (cf. proposition (1.2)); le faisceau E étant sans torsion,

$$\text{Hom}(E \otimes I_x, E(-3)) \simeq \text{Hom}(I_x E, E(-3))$$

et cet espace est nul par semi-stabilité de E , compte tenu du fait que $\mu(E(-3)) < \mu(I_x E) = \mu(E)$. Ceci signifie que $\text{Ext}^2(K, K \otimes I_x) = 0$, et par suite que la flèche

$$\text{Ext}^1(K, K) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(K, K(x)) = \text{Ext}_{\mathbb{C}}^1(K(x), K(x)) ,$$

est surjective, d'où le lemme. \square

Fin de la démonstration de la proposition (2.8). Considérons le fermé Z des couples $(x, (u, v)) \in \mathbb{P}_2 \times \mathcal{M}$ tels que l'application linéaire $u(x)$ ne soit pas injective. La projection $pr_1 : Z \rightarrow \mathbb{P}_2$ est localement triviale, et la fibre $Z(x)$ est l'image réciproque par la restriction r_x du fermé des couples (u', v') tels que u' ne soit pas injectif; ce fermé est de codimension $\geq r + 1$. Par suite, $\text{codim}(Z(x)) \geq r + 1$.

Par la projection $pr_2 : \mathbb{P}_2 \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ce fermé Z a pour image Y , qui est donc de codimension $\geq r - 1$. \square

3. STRATIFICATION DE SHATZ

Ce chapitre est un raffinement de la stratification introduite par Shatz dans [20]. Il étend à \mathbb{P}_2 les résultats obtenus par Atiyah et Bott dans [1], dans le cadre des surfaces de Riemann.

3.1 – Poids. Soient r un entier > 0 , H un polynôme à coefficients rationnels. On considère les suites d'entiers positifs $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_l)$ et de polynômes $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_l)$ satisfaisant aux conditions suivantes

$$(N) \quad \sum_{i=1}^l r_i = r, \quad \sum_{i=1}^l H_i = H .$$

Un tel couple sera appelé *poids de longueur l* associé à (r, H) .

Au poids (\mathbf{r}, \mathbf{H}) , on associe pour chaque entier m la fonction linéaire par morceaux $\mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{H}, m) : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe joint les points de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} & (0, 0) \\ & (r_1, H_1(m)) \\ & (r_1 + r_2, H_1(m) + H_2(m)) \\ & \vdots \\ & (r, H(m)) \end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{H}, m)$ est concave pour $m \gg 0$ si le poids satisfait à la condition (C) :

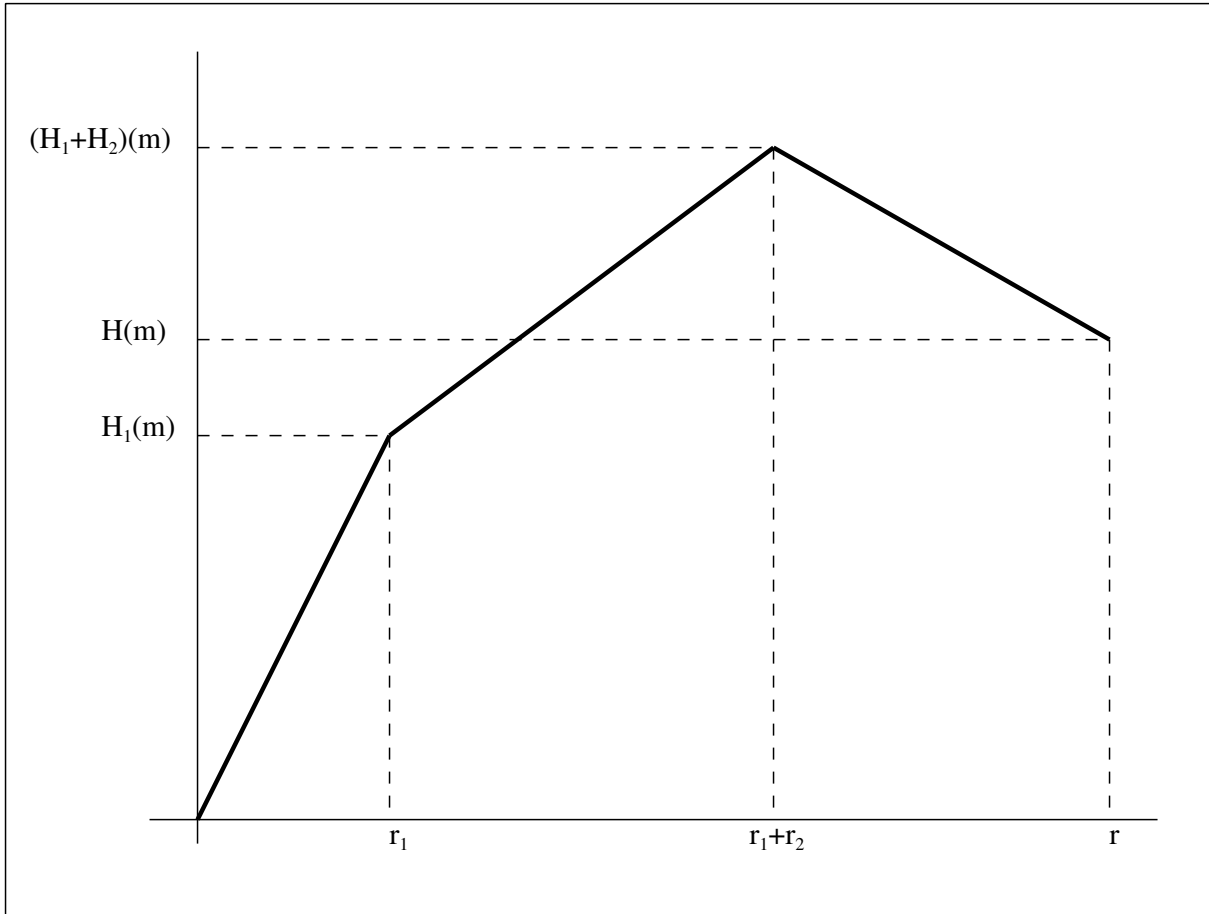
$$(C) \quad \frac{H_i(m)}{r_i} > \frac{H_{i+1}(m)}{r_{i+1}} \quad \text{pour } m \gg 0 .$$

On dit alors que le poids (\mathbf{r}, \mathbf{H}) est *concave*.

Si $(\mathbf{r}', \mathbf{H}')$ est un autre poids de longueur l' associé à (r, H) on écrit

$$(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \leq (\mathbf{r}', \mathbf{H}')$$

si on a $\mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{H}, m) \leq \mathcal{P}(\mathbf{r}', \mathbf{H}', m)$ pour $m \gg 0$. On obtient ainsi une relation de pré-ordre sur l'ensemble des poids associés à (r, H) .



3.2 – Poids d'un faisceau. Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -module cohérent sans torsion de rang $r > 0$, de pente μ , de discriminant Δ . On considère le polynôme de Hilbert de E :

$$H(m) = r(P(\mu + m) - \Delta) .$$

Considérons d'autre part la filtration de Harder-Narasimhan de E :

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_l = E .$$

Si on pose

$$\text{gr}_i = F_i/F_{i-1} , \quad r = r(\text{gr}_i) \text{ (rang)} , \quad H_i = P_{\text{gr}_i} \text{ (polynôme de Hilbert)} ,$$

les suites $\mathbf{r}(E) = (r_1, \dots, r_l)$ et $\mathbf{H}(E) = (H_1, \dots, H_l)$ définissent un poids concave associé à (r, H) , qu'on appellera *poids de E*.

Plus généralement, à n'importe quelle filtration F finie croissante de E par des sous-modules cohérents de rang strictement croissant on associe de la même façon un poids (\mathbf{r}, \mathbf{H}) . La fonction $\mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{H}, m)$ n'est plus obligatoirement concave pour $m \gg 0$. En prenant l'enveloppe concave, on détermine une filtration F' de E de poids concave $(\mathbf{r}', \mathbf{H}')$ tel que $(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \leq (\mathbf{r}', \mathbf{H}')$.

Lemme (3.1) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module cohérent sans torsion de rang r . Les poids des filtrations F de E satisfaisant à la condition (C) sont en nombre fini.*

Démonstration. Soit F une filtration de E de poids concave :

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = E .$$

Par concavité, on a pour $m \gg 0$

$$\frac{P_{F_i}(m)}{r(F_i)} \geq \frac{P_E(m)}{r} .$$

Soit μ la pente de E . De l'inégalité ci-dessus on tire $\mu(F_i) \geq \mu$. Il résulte alors du lemme (2.2) que les valeurs possibles pour le degré de F_i sont en nombre fini, ainsi que les valeurs possibles pour la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(F_i)$. Par suite, les polynômes de Hilbert P_{F_i} sont en nombre fini, ainsi que les polynômes de Hilbert $H_i = P_{F_i} - P_{F_{i-1}}$ du gradué gr_i . D'où le lemme. \square

Proposition (3.2) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module cohérent sans torsion de rang r , de polynôme de Hilbert H . Pour toute filtration F de E de poids (\mathbf{r}, \mathbf{H}) on a*

$$(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \leq (\mathbf{r}(E), \mathbf{H}(E)) .$$

Démonstration. D'après le lemme (3.1), on peut supposer que la filtration F :

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = E$$

est de poids maximal et strictement concave, c'est-à-dire qu'il est concave et qu'il n'existe aucun entier i tel que

$$\frac{P_{F_i/F_{i-1}}(m)}{r(F_i/F_{i-1})} = \frac{P_{F_{i+1}/F_i}(m)}{r(F_{i+1}/F_i)} \quad \text{pour } m \gg 0 .$$

Il s'agit alors de vérifier que F est la filtration de Harder-Narasimhan.

On raisonne par récurrence sur r , le cas $r = 1$ étant trivial. Considérons l'image réciproque F'_1 du sous-module de torsion de E/F_1 : elle détermine une filtration F'

$$0 \subset F'_1 \subset F_2 + F'_1 \subset \cdots \subset F_l = E$$

de poids $(\mathbf{r}, \mathbf{H}')$ supérieur ou égal à (\mathbf{r}, \mathbf{H}) . Puisque le poids de F est supposé maximal, ceci impose $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$ et par suite $F_1 = F'_1$. Ainsi, E/F_1 est sans-torsion, et la filtration F_i/F_1 de E/F_1 est de poids maximal. Par hypothèse de récurrence, c'est donc la filtration de Harder-Narasimhan de E/F_1 .

Reste à voir que F_1 est le sous-faisceau semi-stable maximal de E . On a déjà

$$\frac{P_{F_1}(m)}{r(F_1)} > \frac{P_{F_2}(m)}{r(F_2)} \quad \text{pour } m \gg 0 ,$$

car dans le cas contraire le poids de F ne serait pas strictement concave. Soit E' le sous-faisceau semi-stable maximal de E . On a alors

$$\frac{P_{F_1}(m)}{r(F_1)} \leq \frac{P_{E'}(m)}{r(E')} \quad \text{pour } m \gg 0 .$$

Si on a égalité, on a $F_1 \subset E'$, et si $F_1 \neq E'$, alors $F_2 = E'/F_1$, ce qui contredit la stricte concavité du poids de F . Si l'inégalité est stricte, il en découle que $\text{Hom}(E', E/F_1) = 0$, donc $E' \subset F_1$, mais c'est impossible puisque l'inégalité est stricte, donc en rajoutant E' à la filtration F on obtient une nouvelle filtration contredisant la maximalité de F .

Ceci démontre la proposition (3.2). □

3.3 – La stratification. Soit S une variété algébrique lisse, E un $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{P}_2}$ -module cohérent S -plat tel que pour tout $s \in S$, $E(s)$ soit sans torsion de rang r , de polynôme de Hilbert H . On suppose satisfaites les conditions suivantes

(L) Pour tout $s \in S$, $\text{Ext}^2(E(s), E(s)) = 0$.

(KS) Pour tout $s \in S$, le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira-Spencer

$$T_s S \longrightarrow \text{Ext}^1(E(s), E(s))$$

est surjectif.

Soit (\mathbf{r}, \mathbf{H}) un poids associé à (r, H) . On se propose d'étudier l'ensemble des points $s \in S$ tels que $E(s)$ soit de poids (\mathbf{r}, \mathbf{H}) .

Proposition (3.3) : *Soit E un $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{P}_2}$ -module cohérent S -plat, tel que pour tout $s \in S$, $E(s)$ soit sans torsion, de rang r , de polynôme de Hilbert H , satisfaisant aux conditions (L) et (KS). Soit (\mathbf{r}, \mathbf{H}) un poids associé à (r, H) :*

(a) *L'ensemble des points $s \in S$ tels que $(\mathbf{r}, \mathbf{H}) < (\mathbf{r}(E(s)), \mathbf{H}(E(s)))$ est un fermé de S .*

Soit $\Omega(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ le complémentaire de ce fermé.

(b) *Les points $s \in \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ tel que $E(s)$ soit de poids (\mathbf{r}, \mathbf{H}) forment une sous-variété fermée lisse, dont l'espace normal en s est canoniquement isomorphe à $\text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s))$, F désignant la filtration de Harder-Narasimhan de $E(s)$.*

Le reste du chapitre est consacré à la démonstration de cette proposition. Le lemme qui suit sera amélioré au chapitre 4.

Lemme (3.4) : *Soit E un faisceau semi-stable sur \mathbb{P}_2 , de discriminant Δ . Alors $\Delta \geq 0$.*

Démonstration. On peut supposer E normalisé. Soient μ sa pente et χ sa caractéristique d'Euler-Poincaré. Dans la démonstration du lemme (2.1), on a déjà vu que si E n'est pas trivial, $\chi \leq 0$. Ceci s'écrit

$$r(P(\mu) - \Delta) \leq 0 .$$

Par suite $\Delta \geq P(\mu) \geq 0$. Si E est trivial, $\Delta = 0$. □

Lemme (3.5) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module cohérent sans torsion sur \mathbb{P}_2 , de filtration de Harder-Narasimhan F . Alors*

$$\text{Ext}_{F,-}^2(E, E) = 0 .$$

Démonstration. On utilise la suite spectrale du paragraphe 1.5, qui a pour aboutissement $\text{Ext}_{F,-}^\bullet(E, E)$, de terme E_1 donné par

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0, \\ \prod_i \text{Ext}^{p+q}(\text{gr}_i(K), \text{gr}_{i-p}(K)) & \text{si } p \geq 0. \end{cases}$$

On sait d'après la dualité de Serre (proposition (1.2)) que $\text{Ext}^2(\text{gr}_i(E), \text{gr}_{i-p}(E))$ est le dual de $\text{Hom}(\text{gr}_{i-p}(E), \text{gr}_i(E)(-3))$, qui est nul pour $p \geq 0$ car $\mu(\text{gr}_{i-p}(E)) > \mu(\text{gr}_i(E)) - 3$ et $\text{gr}_i(E)$ est semi-stable. \square

Lemme (3.6) : *Soient S une variété algébrique, E un $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{P}_2}$ -module cohérent S -plat, tel que pour tout $s \in S$, $E(s)$ soit sans torsion de rang r , de polynôme de Hilbert H .*

L'application $s \mapsto (\mathbf{r}(E(s)), \mathbf{H}(E(s)))$ définie sur S à valeurs dans l'ensemble des poids associés à (r, H) prend un nombre fini de valeurs.

Démonstration. Considérons d'abord la pente $\mu_i(s) = \mu(\text{gr}_i(E(s)))$. Soit $r_i(s)$ le rang de $\text{gr}_i(E(s))$. Il existe une constante C telle que pour tout $s \in S$ et toute droite d de \mathbb{P}_2 on ait

$$\dim(\text{Ext}^1(E(s)|_d, E(s)|_d)) \leq C .$$

Soit $d \subset \mathbb{P}_2$ une droite ne passant pas par les points singuliers des $\text{gr}_i(E(s))$ (qui sont en nombre fini). Le morphisme canonique

$$\text{Ext}^1(E(s)|_d, E(s)|_d) \longrightarrow \text{Ext}^1(\text{gr}_1(E(s))|_d, \text{gr}_l(E(s))|_d) ,$$

où l est la longueur de la filtration de Harder-Narasimhan, est surjectif. Par définition, $\mu_1(s) \geq \mu_i(s) \geq \mu_{i+1}(s) \geq \mu_l(s)$ et d'après le théorème de Riemann-Roch :

$$C \geq \dim(\text{Ext}^1(\text{gr}_1(E(s)), \text{gr}_l(E(s)))) \geq r_1(s)r_l(s)(\mu_1(s) - \mu_l(s) - 1) .$$

Par suite, il existe une constante C_1 telle que pour tout s et pour tous i, j , $\mu_i(s) - \mu_j(s) \leq C_1$.

Puisque $\mu = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^l r_i(s)\mu_i(s)$, on voit que les pentes $\mu_i(s)$ restent bornées sur S . Par suite, les valeurs prises par ces pentes sont en nombre fini.

Soit $\Delta_i(s) = \Delta(\text{gr}_i(E(s)))$. On a

$$\chi(E(s)) = \sum_{i=1}^l \chi(\text{gr}_i(E(s))) = \sum_{i=1}^l r_i(s)(P(\mu_i(s)) - \Delta_i(s))$$

et par suite, $\sum r_i(s)\Delta_i(s) \leq Cte$. D'après le lemme (3.4) on a $\Delta_i(s) \geq 0$. Par suite, les $\Delta_i(s)$ prennent un nombre fini de valeurs. \square

Démonstration de la proposition (3.3). **(a)** Pour tout poids (\mathbf{r}, \mathbf{H}) associé à (r, H) , de longueur l , désignons par $S(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ l'ensemble des points $s \in S$ tels que $E(s)$ soit de poids (\mathbf{r}, \mathbf{H}) , et par $Y(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ l'image du morphisme canonique

$$\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E) \longrightarrow S .$$

Alors $Y(\mathbf{r}, \mathbf{H})$, image d'un morphisme propre, est un fermé. La proposition (3.2) permet d'écrire les inclusions

$$\text{Adhérence}(S(\mathbf{r}', \mathbf{H}')) \subset Y(\mathbf{r}', \mathbf{H}') \subset \bigcup_{(\mathbf{r}'', \mathbf{H}'') \geq (\mathbf{r}', \mathbf{H}')} S(\mathbf{r}'', \mathbf{H}'') .$$

D'après le lemme 3.6 la réunion $\bigcup S(\mathbf{r}', \mathbf{H}')$ où $(\mathbf{r}', \mathbf{H}') > (\mathbf{r}, \mathbf{H})$ est une réunion finie. Il en résulte que cet ensemble est fermé.

(b) Soit $\Omega(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ l'ouvert complémentaire de ce fermé. Considérons le morphisme canonique

$$\pi : \text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E|_{\Omega(\mathbf{r}, \mathbf{H})}) \longrightarrow \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{H}) .$$

Soit $F \in \text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E(s))$, avec $s \in \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{H})$. D'après la proposition (3.2), F est la filtration de Harder-Narasimhan de $E(s)$. D'autre part, le morphisme canonique

$$\text{Ext}^1(E(s), E(s)) \longrightarrow \text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s))$$

est surjectif d'après le lemme (3.5). L'hypothèse (KS) entraîne donc que le morphisme composé

$$\omega_+ : T_s S \longrightarrow \text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s))$$

est surjectif. La proposition (1.7) entraîne alors que $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(E|_{\Omega(\mathbf{r}, \mathbf{H})})$ est lisse.

Or, le morphisme π a exactement pour image $S(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ et la fibre au-dessus d'un point $s \in S(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ est réduite au point F défini par la filtration de Harder-Narasimhan de $E(s)$. D'autre part, on a pour $i < j$, vu la semi-stabilité de $\text{gr}_i(E(s))$ et la condition (C),

$$\text{Hom}(\text{gr}_i(E(s)), \text{gr}_j(E(s))) = 0 ,$$

et, par suite (cf. proposition (1.3))

$$\text{Ext}_{F,+}^0(E(s), E(s)) = 0 .$$

Il découle de la proposition (1.5) que π est une immersion ; puisqu'elle est injective et propre, c'est un plongement. Donc l'image est une sous-variété lisse de S , et l'espace normal en s s'identifie d'après la proposition (1.5) à $\text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s))$.

4. THÉORÈMES D'EXISTENCE

4.1 – Irréductibilité selon Ellingsrud. Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module cohérent sans torsion non nul de pente μ . On dira que E est p-stable⁵ si pour tout module cohérent non nul $F \subset E$ de rang $r(F) < r$ on a $\mu(F) < \mu$.

C'est donc la notion de stabilité introduite à l'origine par Mumford et que Maruyama appelle p-stabilité [16]. Si E est p-stable, il est stable au sens de la définition que nous avons rappelée au paragraphe 2.1.

Considérons le $\mathcal{O}_{\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2}$ -module universel \mathbb{E} construit au paragraphe 2.3. L'ensemble des points $s \in \mathcal{M}$ tels que $\mathbb{E}(s)$ soit p-stable est un ouvert contenu dans \mathcal{M}_s (cf. théorème 4.11). La projection $\mathcal{M}_s \rightarrow \mathcal{M}$ étant ouverte, son image est un ouvert qu'on note M_{ps} . On notera M_{ps}^0 l'ouvert défini par les classes d'isomorphisme de fibrés p-stables.

⁵ p comme pente

Proposition (4.1) (Ellingsrud [6]) : *L'ouvert M_{ps}^0 est irréductible.*

4.2 – Fibrés exceptionnels. Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module cohérent sans torsion de rang r , de pente μ , de discriminant Δ . On dit que E est *exceptionnel* (resp. *semi-exceptionnel*) si E est stable (resp. semi-stable) et si $\Delta < \frac{1}{2}$.

Exemples – Le fibré trivial de rang 1, le fibré tangent $T(\mathbb{P}_2)$, le fibré noyau du morphisme canonique $\text{ev} : \Gamma(\mathcal{O}(2)) \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(2)$ (noté Q_2^* dans [5]) sont des fibrés exceptionnels de pente respective $0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{5}$. Si E est exceptionnel, il en est de même de $E(m)$.

Lemme (4.2) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module stable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) E est exceptionnel ;
- (2) $\text{Ext}^1(E, E) = 0$; autrement dit, E est rigide ;
- (3) $\chi(E, E) = 1$.

Démonstration. Si E est stable, $\text{Hom}(E, E) = 0$ et $\text{Ext}^2(E, E) = 0$. On a donc

$$\chi(E, E) = 1 - \dim(\text{Ext}^1(E, E)) = r^2(1 - 2\Delta) .$$

L'assertion (1) équivaut donc à $\chi(E, E) > 0$, ou encore à $\text{Ext}^1(E, E) = 0$. □

Lemme (4.3) : *Tout faisceau exceptionnel est localement libre et p -stable. Étant donné un rationnel μ , il existe au plus un fibré exceptionnel de pente μ , à isomorphisme près.*

Démonstration. Soit E un faisceau exceptionnel de rang r , de classes de Chern c_1 et c_2 . La relation $\chi(E, E) = 1$ s'écrit

$$1 = r^2 - 2rc_2 + (r - 1)c_1^2 .$$

Si $c_1 = 0$, ceci impose $r = 1, c_2 = 0$. Par suite $E = \mathcal{O}$. Si $c_1 \neq 0$, c_1 et r sont premiers entre eux : la fraction $\frac{c_1}{r}$ est irréductible, et par suite E est p -stable.

D'autre part, la variété M_s correspondant aux classes de Chern ci-dessus est de dimension 0 ; c'est donc un nombre fini de points, et chacun de ces points est invariant sous l'action du groupe projectif $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Un représentant est donc obligatoirement localement libre. On a donc $M_{ps}^0 = M_s$.

D'après le résultat d'Ellingsrud, M_{ps}^0 est irréductible. Par suite, M_s est réduit à un point.

Pour terminer la démonstration, il suffit d'observer que le rang r est déterminé par la pente, puisque c'est le plus petit dénominateur > 0 d'une fraction représentant μ , et que le discriminant s'obtient à partir de r par la formule

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) .$$

□

Problème – Pour quelles valeurs de μ existe-il un fibré exceptionnel de pente μ ? Ce problème sera résolu au chapitre 5.

Proposition (4.4) : *Un faisceau semi-exceptionnel de pente μ est somme directe de fibrés exceptionnels de pente μ .*

Démonstration. Puisqu'il est semi-stable, un tel faisceau E a une filtration de Jordan-Hölder

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = E .$$

Le gradué $\text{gr}_i(E)$ est exceptionnel de pente μ . D'après le lemme (4.3) ces gradués sont isomorphes à un fibré exceptionnel F de pente μ . Puisque $\text{Ext}^1(F, F) = 0$, on voit que la filtration ci-dessus se scinde : $E = F \oplus \cdots \oplus F$. D'où la proposition (4.4). \square

4.3 – Conditions nécessaires. On désigne par \mathfrak{E} l'ensemble des rationnels qui sont pentes de fibrés exceptionnels; cet ensemble sera déterminé au chapitre 5. Pour $\alpha \in \mathfrak{E}$, on note r_α le plus petit dénominateur positif de α , et par Δ_α le discriminant

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r_\alpha^2} \right) .$$

Proposition (4.5) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module semi-stable de rang r , de pente μ , de discriminant $\Delta \geq \frac{1}{2}$. Alors :*

(1) $r\mu \in \mathbb{Z}$, $r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}$.

(2) Pour tout $\alpha \in \mathfrak{E}$ tel que $|\alpha - \mu| < 3$, on a

$$P(-|\alpha - \mu|) \leq \Delta_\alpha + \Delta .$$

Démonstration. La condition (1) traduit le fait que c_1 et la caractéristique d'Euler-Poincaré χ de E sont des entiers. Vérifions (2). Si E_α est exceptionnel de pente $\alpha > \mu$, on a $\text{Hom}(E_\alpha, E) = 0$. D'autre part, $\text{Ext}^2(E_\alpha, E)$ est le dual de $\text{Hom}(E, E_\alpha(-3))$, donc est nul si $\alpha - \mu < 3$. Par suite,

$$\chi(E_\alpha, E) = -\dim(\text{Ext}^1(E_\alpha, E)) \leq 0 .$$

La proposition (1.1) montre alors que $P(\mu - \alpha) \leq \Delta_\alpha + \Delta$.

Le même résultat reste vrai si $\alpha = \mu$, car l'hypothèse $\Delta \geq \frac{1}{2}$ entraîne $\Delta_\alpha < \Delta$. Par définition de la semi-stabilité, on a encore

$$\text{Hom}(E_\alpha, E) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Ext}^2(E_\alpha, E) = 0$$

et l'inégalité $\chi(E_\alpha, E) \leq 0$ s'écrit $P(0) \leq \Delta_\alpha + \Delta$.

Pour $\alpha < \mu$, on a $\text{Hom}(E, E_\alpha) = 0$ et $\text{Ext}^2(E, E_\alpha)$, dual de $\text{Hom}(E_\alpha, E(-3))$ est nul si $\mu - \alpha < 3$. L'inégalité $\chi(E, E_\alpha) \leq 0$ donne encore le résultat. \square

Remarque (4.6) : Pour un fibré semi-exceptionnel de pente μ , l'énoncé ci-dessus n'est plus vrai. Cependant, on a encore la propriété suivante : pour tout $\alpha \in \mathfrak{E}$ tel que $|\alpha - \mu| < 3$, $\alpha \neq \mu$, on a

$$P(-|\alpha - \mu|) \leq \Delta_\alpha + \Delta .$$

4.4. – Existence des faisceaux semi-stables. Soient r un entier > 1 , μ et Δ deux rationnels satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(S) \quad \begin{cases} (1) & r\mu \in \mathbb{Z}, \quad r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}, \\ (2) & \text{pour tout } \alpha \in \mathfrak{E} \text{ tel que } r_\alpha < r \text{ et } |\alpha - \mu| \leq 1, \text{ on a} \\ & P(-|\alpha - \mu|) \leq \Delta_\alpha + \Delta . \end{cases}$$

On se propose de montrer que si ces conditions sont satisfaites, il existe un fibré stable de rang r , de pente μ , de discriminant Δ . On commence par l'existence de fibrés semi-stables ; dans les paragraphes (4.5) et (4.6) nous montrons la densité des ouverts M_s (resp. M_{ps}) de faisceaux stables (resp. p-stables) dans $M = M(r, \mu, \Delta)$.

On verra au chapitre 5 qu'on peut affaiblir les conditions (S) : il suffit en effet de vérifier la condition (2) pour les éléments $\alpha \in \mathfrak{E}$ tels que $r_\alpha \leq \frac{r}{2}$ et qui encadrent μ .

Théorème (4.7) : Soient r un entier > 1 , μ et Δ deux rationnels satisfaisant aux conditions (S). Alors il existe un faisceau semi-stable de rang r , de pente μ et de discriminant Δ .

Le lemme suivant est la clé de la démonstration.

Lemme (4.8) : Soient d une droite de \mathbb{P}_2 , E un fibré vectoriel algébrique sur \mathbb{P}_2 de rang r , de pente μ , de discriminant Δ , (r, μ, Δ) satisfaisant aux conditions (S). On suppose en outre

$$(3) \quad E|_d \text{ est rigide.}$$

Si E n'est pas semi-stable, on a, pour la filtration de Harder-Narasimhan :

$$\dim(\text{Ext}_{F,+}^1(E, E)) > 0 .$$

Démonstration. Supposons que E ne soit pas semi-stable, et considérons la filtration de Harder-Narasimhan de E

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_l = E ,$$

de gradué $\bigoplus_{i=1}^l \text{gr}_i(E)$. Posons $r_i = r(\text{gr}_i(E))$, $\mu_i = \mu(\text{gr}_i(E))$, $\Delta_i = \Delta(\text{gr}_i(E))$. On a $\mu_i \geq \mu_j$ pour $i < j$, et en cas d'égalité, $\Delta_i < \Delta_j$. Nous allons d'abord vérifier que la condition (3) impose $\mu_1 - \mu_l \leq 1$. On peut supposer E normalisé : $-1 < \mu \leq 0$.

Les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -modules $\text{gr}_i(E)$ sont sans torsion ; les points au voisinage desquels ils ne sont pas localement libres sont en nombre fini. On peut donc supposer que $\text{gr}_i(E)$ est localement libre au voisinage de d , puisque l'ensemble des droites d telles que $E|_d$ soit rigide est un ouvert.

On a alors une filtration de $E|_d$ par les sous-fibrés $F_{i|d}$. Par rigidité, on obtient

$$h^0(E(-1)|_d) = 0, \quad h^1(E|_d) = 0 .$$

Il en résulte $h^0(F_1(-1)|_d) = 0$, $h^1(E/F_{l-1}|_d) = 0$.

Par suite, $\mu_1 = \mu(F_1) \leq 0$ et $\mu_l = \mu(E/F_{l-1}) \geq -1$. Ainsi, $\mu_1 - \mu_l \leq 1$.

On a déjà vu que pour $i < j$,

$$\text{Hom}(\text{gr}_i(E), \text{gr}_j(E)) = 0, \quad \text{Ext}^2(\text{gr}_i(E), \text{gr}_j(E)) = 0.$$

Par suite

$$\chi(\text{gr}_i(E), \text{gr}_j(E)) = -\dim(\text{Ext}^1(\text{gr}_i(E), \text{gr}_j(E))).$$

Or, la suite spectrale (1.3) nous donne une filtration de $\text{Ext}_{F,+}^1(E, E)$ dont le gradué est

$$\bigoplus_{p>0, i} \text{Ext}^1(\text{gr}_i(E), \text{gr}_{i+p}(E)).$$

On est donc ramené à montrer qu'il existe un couple (i, j) tel que $i < j$ et $\chi(\text{gr}_i(E), \text{gr}_j(E)) < 0$. Supposons que pour tout couple (i, j) avec $i < j$, on ait $\chi(\text{gr}_i(E), \text{gr}_j(E)) = 0$. Alors, l'un des deux faisceaux $\text{gr}_1(E)$, $\text{gr}_l(E)$ est semi-exceptionnel. En effet, on aurait d'après la proposition (1.1)

$$0 = \chi(\text{gr}_1(E), \text{gr}_l(E)) = r_1 r_l (P(\mu_l - \mu_1) - \Delta_l - \Delta_1)$$

et par suite $\Delta_1 + \Delta_l = P(\mu_l - \mu_1)$.

Si $\mu_l < \mu_1$, ceci entraîne $\Delta_1 + \Delta_l < 1$, et donc soit $\Delta_1 < \frac{1}{2}$, soit $\Delta_l < \frac{1}{2}$. Si $\mu_l = \mu_1$, alors $\Delta_l > \Delta_1$, $\Delta_1 + \Delta_l = 1$, et donc $\Delta_1 < \frac{1}{2}$.

Supposons $\text{gr}_l(E)$ semi-exceptionnel. On peut alors écrire

$$\chi(E, \text{gr}_l(E)) = \sum_{i \leq l} \chi(\text{gr}_i(E), \text{gr}_l(E)) = \chi(\text{gr}_l(E), \text{gr}_l(E)),$$

et donc, puisque $\text{gr}_l(E)$ est somme directe de fibrés exceptionnels de même pente μ_l (proposition (4.4)), on obtient $\chi(E, \text{gr}_l(E)) > 0$. Or, la condition (S) entraîne

$$\chi(E, \text{gr}_l(E)) = r r_l (P(\mu_l - \mu) - \Delta_l - \Delta) \leq 0,$$

ce qui est contradictoire.

Supposons $\text{gr}_1(E)$ semi-exceptionnel. On a encore

$$\chi(\text{gr}_1(E), E) = \chi(\text{gr}_1(E), \text{gr}_1(E)) > 0,$$

ce qui contredit à nouveau l'hypothèse (S). □

Démonstration du théorème (4.7) – (a) Construction d'une grande famille de fibrés vectoriels de rang r sur \mathbb{P}_2 . On reprend la construction proposée pour les fibrés de rang 2 dans [14].

La suite $H(m) = r(P(\mu + m) - \Delta)$ est croissante pour $m + \mu > -\frac{3}{2}$; si $-2 \leq \mu + m \leq 0$, elle est négative : en effet la condition (S) appliquée au fibré exceptionnel $\mathcal{O}(-m)$ (de discriminant nul) s'écrit pour $-1 \leq \mu + m \leq 0$

$$P(\mu + m) - \Delta \leq 0$$

et en outre $P(\mu + m - 1) = P(\mu + m) - (\mu + m + 1) \leq \Delta$.

Soit m_0 le plus petit des entiers $m > 0$ tels que $H(m) > 0$. On pose

$$N_0 = H(m_0), \quad N_1 = -H(m_0 - 1), \quad N_2 = -H(m_0 - 2).$$

On a donc $N_0 > 0$, $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$. La relation $P(X) + P(X - 2) - 2P(X - 1) = 1$ montre que $N_0 + 2N_1 - N_2 = r$. Considérons les morphismes $\mathcal{O}(-1)^{N_2} \rightarrow Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0}$.

Le fibré

$$V = \mathcal{H}om(\mathcal{O}(-1)^{N_2}, Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0})$$

est engendré par ses sections, Par suite, les couples $(x, s) \in \mathbb{P}_2 \times \Gamma(V)$ tels que $s(x)$ ne soit pas injectif forment un sous-ensemble algébrique Y de codimension $2N_1 + N_0 - N_2 + 1 = r + 1$. La projection de Y sur $\Gamma(V)$ est un sous-ensemble algébrique de codimension $\geq r - 1$. Si $r > 1$, on voit donc qu'il existe des morphismes injectifs, comme morphismes de fibrés :

$$s : \mathcal{O}(-1)^{N_2} \rightarrow Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0}.$$

Le conoyau $F(s)$ d'un tel morphisme est un fibré vectoriel algébrique de rang r , de pente $\mu + m$, de discriminant Δ . On pose $E(s) = F(s)(-m_0)$. On obtient ainsi une famille algébrique $E \rightarrow \Omega \times \mathbb{P}_2$ de fibrés vectoriels algébriques sur \mathbb{P}_2 , de rang r , de pente μ , de discriminant Δ , paramétrée par l'ouvert Ω des morphismes injectifs.

Lemme (4.9) : (L) *Pour tout $s \in \Omega$*

$$\text{Ext}^2(E(s), E(s)) = 0.$$

(KS) *Le morphisme de Kodaira-Spencer $\omega : T_s\Omega \rightarrow \text{Ext}^1(E(s), E(s))$ est surjectif en tout point $s \in \Omega$.*

De plus, si d est une droite de \mathbb{P}_2 , l'ouvert S de Ω des s tels que $E(s)|_d$ soit rigide est non vide.

Démonstration. Soit K le complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{N_2} \xrightarrow{s} Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0} \longrightarrow 0.$$

Les espaces $\text{Ext}^i(E(s), E(s))$ s'identifient à $\text{Ext}^i(K, K)$ c'est-à-dire encore, puisque $H^q(\mathbb{P}_2, \mathcal{H}om^j(K, K)) = 0$ pour $q > 0$, à $H^i(\text{Hom}^\bullet(K, K))$. Puisque $\text{Hom}^q(K, K) = 0$ si $q \geq 2$, on obtient (L), et un épimorphisme canonique

$$\text{Hom}(\mathcal{O}(-1)^{N_2}, Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0}) \longrightarrow \text{Ext}^1(E(s), E(s)),$$

qui n'est autre que le morphisme composé

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathcal{O}(-1)^{N_2}, Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0}) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \text{Hom}(\mathcal{O}(-1)^{N_2}, F(s)) & \xrightarrow{\delta} & \text{Ext}^1(F(s), F(s)) \end{array}$$

où δ est l'opérateur de liaison associé à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{N_2} \longrightarrow Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0} \longrightarrow F(s) \longrightarrow 0.$$

D'après le lemme (1.6) ce morphisme composé n'est autre que le morphisme de Kodaira-Spencer.

On peut en fait améliorer l'assertion (L), pour obtenir

$$(L') \quad \text{Ext}^2(E(s), E(s)(-1)) = 0 .$$

En effet, dans la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}_2, \mathcal{H}om^p(K, K(-1))) ,$$

d'aboutissement $\text{Ext}^\bullet(E(s), E(s)(-1))$, on a $E_1^{p,q} = 0$ si $p + q > 1$ ce qui entraîne (L').

L'argument qui suit s'inspire de Brun et Hirschowitz [4].

Soient $s_0 \in \Omega$ et M_0 l'espace de modules locaux de déformation de $E(s_0)|_d$. C'est une variété lisse dont l'espace tangent au point de base s'identifie à $\text{Ext}_{\mathcal{O}_d}^1(E(s_0)|_d, E(s_0)|_d)$. La famille $E_{|\Omega \times \mathbb{P}_2}$ définit alors un morphisme au voisinage S' de s_0

$$\rho : S' \longrightarrow M_0$$

qui a pour application linéaire tangente en s_0 l'application

$$T_{s_0}\Omega \longrightarrow \text{Ext}^1(E(s_0)|_d, E(s_0)|_d)$$

donnée par le morphisme de Kodaira-Spencer. C'est aussi le morphisme composé

$$\begin{array}{ccc} T_{s_0}\Omega & \xrightarrow{\omega} & \text{Ext}^1(E(s_0), E(s_0)) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Ext}^1(E(s_0)|_d, E(s_0)|_d) \end{array}$$

où la flèche verticale est la flèche canonique de restriction. Elle s'insère dans une suite exacte

$$\text{Ext}^1(E(s_0), E(s_0)) \longrightarrow \text{Ext}^1(E(s_0)|_d, E(s_0)|_d) \longrightarrow \text{Ext}^2(E(s_0), E(s_0)(-1)) ,$$

ce qui montre qu'elle est surjective. Le morphisme ρ est donc une submersion au voisinage de s_0 . Son image rencontre l'ouvert non vide d'après Brieskorn [3] des points de M_0 correspondant aux fibrés rigides sur d . \square

(b) *Construction de fibrés semi-stables* – Les hypothèses de la proposition (3.3) sont satisfaites pour le $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{P}_2}$ -module E . Par conséquent, l'ensemble des points $s \in S$ tels que $E(s)$ soit de poids (\mathbf{r}, \mathbf{H}) est une sous-variété lisse de codimension égale à $\dim(\text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s)))$. D'après le lemme (4.8), cette codimension est > 0 si la longueur l de (\mathbf{r}, \mathbf{H}) est supérieure à 1. Les poids concaves étant en nombre fini, on voit que l'ouvert des points s tels que $E(s)$ soit semi-stable est non vide.

4.5 – Densité des faisceaux stables. Dans l'énoncé suivant, on fait l'hypothèse $\Delta \neq \frac{1}{2}$. On verra au chapitre 5 qu'en fait il n'existe pas de faisceau semi-stable de discriminant $\frac{1}{2}$.

Théorème (4.10) : Soient r un entier > 1 , μ et Δ deux rationnels tels que $\Delta \neq \frac{1}{2}$ et satisfaisant aux conditions (S). Alors l'ouvert M_s de $M = M(r, \mu, \Delta)$ correspondant aux faisceaux stables est partout dense.

Démonstration. Considérons le $\mathcal{O}_{\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2}$ -module universel \mathbb{E} construit au paragraphe 2.4. Soient r_1, \dots, r_l des entiers > 0 tels que $\sum_{i=1}^l r_i = r$; posons

$$H_i(m) = r_i(P(\mu + m) - \Delta) .$$

Considérons le morphisme canonique

$$\pi : \text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{M} .$$

On a déjà vu dans la proposition (2.6) que le $\mathcal{O}_{\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2}$ -module \mathbb{E} satisfait à la condition (L), et le morphisme de déformation de Kodaira-Spencer ω est donné au point $(u, v) \in \mathcal{M}$ par la projection canonique

$$Z^1(K, K) \longrightarrow \text{Ext}^1(K, K) ,$$

où $K = K(u, v)$ est le complexe de Kronecker défini par (u, v) .

Par conséquent, la propriété (KS) est aussi satisfaite. Comme dans le lemme (3.5), on a pour $s \in \mathcal{M}$ et $F \in \text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(\mathbb{E}(s))$

$$\text{Ext}_{F,-}^2(\mathbb{E}(s), \mathbb{E}(s)) = 0 ,$$

car les faisceaux gr_i associés à la filtration F de $\mathbb{E}(s)$ sont obligatoirement semi-stables de même pente μ ; par suite ω_+ est surjectif.

D'après la proposition (1.7), $\text{Drap}^{H_1, \dots, H_l}(\mathbb{E})$ est lisse et le morphisme π est de rang $\leq \dim(\mathcal{M}) - \dim(\text{Ext}_{F,+}^1(E(s), E(s)))$ en F . Si gr_i est le gradué associé à F , on a d'après le théorème de Riemann-Roch (1.1) et la suite spectrale (1.3)

$$\sum_i (-1)^i \dim(\text{Ext}_{F,+}^i(\mathbb{E}(s), \mathbb{E}(s))) = \sum_{1 \leq i < j \leq l} \chi(\text{gr}_i, \text{gr}_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq l} r_i r_j (1 - 2\Delta) .$$

Par suite $\dim(\text{Ext}_{F,+}^1(\mathbb{E}(s), \mathbb{E}(s))) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq l} r_i r_j (2\Delta - 1)$.

Supposons d'abord $2\Delta > 1$. L'image de π est alors un fermé de dimension $< \dim(\mathcal{M})$. Quand (r_1, \dots, r_l) varie, on obtient un nombre fini de tels fermés. Le complémentaire de leur réunion est un ouvert partout dense, qui n'est autre que l'ouvert \mathcal{M}_s des points $s \in \mathcal{M}$ tels que $\mathbb{E}(s)$ soit stable. Par suite, M_s est un ouvert partout dense.

Si $2\Delta < 1$, pour $s \in \mathcal{M}$, $\mathbb{E}(s)$ serait un fibré semi-exceptionnel de pente μ , donc d'après la proposition (4.4) somme directe de fibrés exceptionnels de même pente μ . Les conditions (S) imposent en fait à $\mathbb{E}(s)$ d'être exceptionnel. Par suite $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}$, et donc $M_s = M$. \square

On verra au chapitre 5 (proposition (5.8)) que les conditions (S) imposent $\Delta \neq \frac{1}{2}$.

Démonstration du théorème C – Les conditions (S) sont nécessaires d'après la proposition (4.5) si $\Delta \geq \frac{1}{2}$, ou la remarque (4.6) si $\mu \in \mathfrak{E}$.

Réciproquement, si $\Delta \neq \frac{1}{2}$, et si les conditions (S) sont satisfaites, il existe au moins un fibré stable de rang r , de pente μ , de discriminant Δ . En effet, d'après le théorème (4.7) M n'est pas vide et l'intersection des ouverts partout denses M_0 (défini au paragraphe 2.5) et M_s (cf. théorème (4.10)) est encore un ouvert partout dense.

4.6 – Densité des faisceaux p-stables. Le résultat suivant précise le théorème (4.10); la démonstration en est voisine.

Théorème (4.11) : *Soient r un entier > 1 , μ et Δ deux rationnels tels que $\Delta > \frac{1}{2}$ et satisfaisant aux conditions (S). Alors l'ouvert M_{ps} de $M = M(r, \mu, \Delta)$ correspondant aux faisceaux p-stables est partout dense.*

Démonstration. Considérons le module $\mathbb{E}_{|\mathcal{M}_s \times \mathbb{P}_2}$, déjà envisagé dans la démonstration du théorème (4.10). Soit $t \in \mathcal{M}_s$; si $\mathbb{E}(t)$ n'est pas p-stable, il a un sous-module cohérent $F_1 \subset \mathbb{E}(t)$ de pente μ , de rang $0 < r_1 < r$, et tel que pour tout sous-module cohérent $F' \subset \mathbb{E}(t)$ de même pente μ , de rang $0 < r' < r$ on ait

$$\frac{\chi(F')}{r'} \leq \frac{\chi(F_1)}{r_1} .$$

Le faisceau F_1 est alors semi-stable de pente μ ; de même, le quotient $\text{gr}_2 = F/F_1$ est sans torsion et semi-stable, de pente μ . En effet, si $G_2 \subset \text{gr}_2$ est un sous-module cohérent, il définit par image réciproque un sous-module G'_2 de $\mathbb{E}(t)$, et on a la suite exacte $0 \rightarrow F_1 \rightarrow G'_2 \rightarrow G_2 \rightarrow 0$. Alors $\mu(G_2) \leq \mu$ et en cas d'égalité

$$\frac{\chi(G_2)}{r(G_2)} \leq \frac{\chi(F_1)}{r_1} < \frac{\chi}{r} < \frac{\chi(\text{gr}_2)}{r(\text{gr}_2)} .$$

Soient r_1 et r_2 deux entiers positifs, Δ_1 et Δ_2 deux rationnels tels que

$$r_1 + r_2 = r , \quad r_1 \Delta_1 + r_2 \Delta_2 = r \Delta , \quad \Delta_1 > \Delta_2 \geq 0 .$$

Posons

$$H_i(m) = r_i(P(\mu + m) - \Delta_i) .$$

Considérons le morphisme canonique

$$\pi : \text{Drap}^{H_1, H_2}(\mathbb{E}_{|\mathcal{M}_s \times \mathbb{P}_2}) \longrightarrow \mathcal{M}_s$$

et montrons que l'image de π est un fermé de codimension > 0 .

Comme dans la démonstration du théorème (4.10), \mathbb{E} satisfait aux conditions (L), (KS), et pour $t \in \mathcal{M}_s$ et $F \in \text{Drap}^{H_1, H_2}(\mathbb{E}(t))$ on a $\text{Ext}_{F,-}^2(\mathbb{E}(t), \mathbb{E}(t)) = 0$, pourvu que F_1 et $\text{gr}_2 = F/F_1$ soient semi-stables. Ces conditions définissent un ouvert D de $\text{Drap}^{H_1, H_2}(\mathbb{E}_{|\mathcal{M}_s \times \mathbb{P}_2})$ sur lequel ω_+ est surjectif. Par suite D est lisse (proposition (1.7)) et π est de rang $\leq \dim(\mathcal{M}) - \dim(\text{Ext}_{F,+}^1(\mathbb{E}(t), \mathbb{E}(t)))$ au point F de D . Quand r_i et Δ_i varient, les images des ouverts D ainsi construits, en nombre fini, recouvrent l'image de π . On est donc ramené à minorer, pour $F \in D$, la dimension de $\text{Ext}_{F,+}^1(\mathbb{E}(t), \mathbb{E}(t))$.

D'après le théorème de Riemann-Roch (1.1), on a

$$\dim(\text{Ext}_{F,+}^1(\mathbb{E}(t), \mathbb{E}(t))) = \dim(\text{Ext}^1(F_1, \text{gr}_2)) \geq r_1 r_2 (\Delta_1 + \Delta_2 - 1) .$$

Vérifions que cette dimension est strictement positive. Si elle était nulle, on aurait $\Delta_1 + \Delta_2 \leq 1$ et par suite $\Delta_2 < \frac{1}{2}$. Par suite, gr_2 serait semi-exceptionnel. D'autre part, $\chi(F_1, \text{gr}_2)$ serait ≥ 0 . De la formule

$$\chi(\mathbb{E}(t), \text{gr}_2) = \chi(F_1, \text{gr}_2) + \chi(\text{gr}_2, \text{gr}_2) ,$$

on déduit alors $\chi(\mathbb{E}(t), \text{gr}_2) > 0$. Mais ceci contredit les conditions (S).

Ainsi, l'image de π est un fermé de codimension > 0 . Les fermés obtenus, déterminés par r_1 et Δ_1 , sont en nombre fini. Le complémentaire de la réunion de ces fermés est un ouvert partout dense, qui n'est autre que l'ouvert \mathcal{M}_{ps} des points t tels que $\mathbb{E}(t)$ soit p -stable. \square

Corollaire (4.12) : *Sous les mêmes conditions, l'ouvert M_{ps}^0 des fibrés p -stables est dense dans M et non vide.*

Démonstration. On a $M_{ps}^0 = M_{ps} \cap M_0$, avec M_0 dense dans M d'après le corollaire (2.9). \square

Démonstration du théorème D – Supposons d'abord $r > 1$.

Il s'agit de démontrer que la variété $M = M(r, \mu, \Delta)$ est irréductible. Si M n'est pas vide et si $\Delta > \frac{1}{2}$, les conditions (S) sont satisfaites d'après la proposition (4.5). D'après le résultat d'Ellingsrud, M_{ps}^0 est irréductible; il est dense dans M d'après le corollaire (4.12). Donc M est irréductible. Si $\Delta \leq \frac{1}{2}$, M est réduite à un point ou vide (cf. proposition (4.4) et corollaire (5.9)).

Si $r = 1$ et si M est non vide, Δ est un entier ≥ 0 . Si $\Delta > 0$, $M \simeq \text{Hilb}_\Delta(\mathbb{P}_2)$; d'après Fogarty [9], M est encore irréductible. Si $\Delta = 0$, M est réduite à un seul point.

5. PENTE DES FIBRÉS EXCEPTIONNELS

Comme au chapitre précédent, \mathfrak{E} désigne l'ensemble des nombres rationnels qui sont pentes de fibrés exceptionnels. On se propose dans ce chapitre de décrire \mathfrak{E} (théorème A) et de démontrer le théorème B.

5.1 – Arithmétique : l'application $\epsilon : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{Q}$. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$; on appelle *rang* r_α de α le plus petit entier $r > 0$ tel que $r\alpha \in \mathbb{Z}$; les nombres rationnels

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r_\alpha^2} \right) , \quad \chi_\alpha = r_\alpha(P(\alpha) - \Delta_\alpha) ,$$

seront appelés respectivement *discriminant* et *caractéristique* de α .

Pour tout couple (α, β) de rationnels tels que $3 + \alpha - \beta \neq 0$, l'équation en t :
 $P(\alpha - t) - \Delta_\alpha = P(t - \beta) - \Delta_\beta$ a une solution unique qu'on notera $t = \alpha.\beta$ donnée par

$$\alpha.\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta}.$$

Un couple (α, β) de nombres rationnels est dit *admissible* s'il satisfait aux conditions suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} 0 < \beta - \alpha \leq 1, \\ P(\alpha - \beta) = \Delta_\alpha + \Delta_\beta, \\ \chi_\alpha \in \mathbb{Z}, \quad \chi_\beta \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Proposition (5.1) : *Soit (α, β) un couple admissible de rationnels. Alors :*

- (a) $\alpha < \alpha.\beta < \beta$;
- (b) le rationnel $\alpha.\beta$ est de rang $r_{\alpha.\beta} = r_\alpha r_\beta (3 + \alpha - \beta)$;
- (c) les couples $(\alpha, \alpha.\beta)$ et $(\alpha.\beta, \beta)$ sont admissibles.

Démonstration. Pour vérifier (a) il suffit de constater que

$$\frac{|\Delta_\alpha - \Delta_\beta|}{3 + \alpha - \beta} < \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Or, la condition $P(\alpha - \beta) = \Delta_\alpha + \Delta_\beta$ se lit aussi de manière équivalente

$$\begin{aligned} \Delta_\beta - \Delta_\alpha &= 1 - 2\Delta_\alpha + \frac{\alpha - \beta}{2}(3 + \alpha - \beta), \\ \Delta_\alpha - \Delta_\beta &= 1 - 2\Delta_\beta + \frac{\alpha - \beta}{2}(3 + \alpha - \beta). \end{aligned}$$

Puisque $1 - 2\Delta_\alpha > 0$ et $1 - 2\Delta_\beta > 0$, ceci entraîne l'assertion (a).

Posons $\mu = \alpha.\beta$, $r = r_\alpha r_\beta (3 + \alpha - \beta)$, $\Delta = P(\alpha - \mu) - \Delta_\alpha = P(\mu - \beta) - \Delta_\beta$.

Lemme (5.2) : *Si (α, β) est un couple admissible, on a*

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right).$$

Démonstration. Par définition de μ et Δ on a

$$\Delta = P\left(\frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta}\right) - \Delta_\alpha = P\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \frac{1}{2}(\Delta_\alpha + \Delta_\beta) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_\alpha - \Delta_\beta}{3 + \alpha - \beta}\right)^2,$$

par application de la formule de Taylor au polynôme P . D'autre part, par définition du polynôme P

$$P\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 1 + \frac{3}{4}(\alpha - \beta) + \frac{1}{8}(\alpha - \beta)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\alpha - \beta) - \frac{1}{8}(\alpha - \beta)^2.$$

D'après l'hypothèse, on a $P(\alpha - \beta) = \Delta_\alpha + \Delta_\beta$, puisque (α, β) est admissible ; par suite, on obtient successivement

$$\Delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_\alpha - \Delta_\beta}{3 + \alpha - \beta}\right)^2 - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8} = \frac{1}{2} - \frac{(1 - 2\Delta_\alpha)(1 - 2\Delta_\beta)}{2(3 + \alpha - \beta)^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right).$$

□

Lemme (5.3) : Soient $c_1 = r\mu$, $\chi = r(P(\mu) - \Delta)$. Alors c_1 et χ sont entiers.

Démonstration. Par définition de μ , on a

$$\mu = \frac{(P(\alpha) - \Delta_\alpha) - (P(-\beta) - \Delta_\beta)}{3 + \alpha - \beta}.$$

Par suite,

$$c_1 = r_\beta \chi_\alpha - r_\alpha \chi_{-\beta}.$$

Par hypothèse, χ_α et χ_β sont entiers; $\chi_{-\beta}$ est aussi entier. et par suite c_1 est lui aussi entier. Par définition de Δ , on a

$$\frac{\chi}{r} = P(\mu) - P(\mu - \beta) + \Delta_\beta = 1 + \beta\mu - (P(-\beta) - \Delta_\beta),$$

d'où

$$\frac{\chi}{r} + \frac{\chi_{-\beta}}{r_\beta} = \beta\mu + 1,$$

ce qui donne d'après la formule donnant c_1

$$\chi = r - (3 + \alpha)r_\alpha \chi_{-\beta} + \beta r_\beta \chi_\alpha.$$

Par suite, χ est lui aussi entier. □

Fin de la démonstration de la proposition (5.1) – Vérifions (b). D'après le lemme (5.3), $c_1 = r\mu$ est entier; il suffit donc de vérifier que c_1 et r sont premiers entre eux. D'après le lemme (5.2) et la définition de χ , on a le système

$$(2\Delta - 1)r^2 = 1, \quad r(P(\mu) - \Delta) = \chi.$$

Par élimination de Δ , on obtient $2r^2P(\mu) - r^2 - 2r\chi = 1$, c'est-à-dire en introduisant c_1 :

$$c_1(c_1 + 3) + r(r - 2\chi) = 1.$$

Par suite, c_1 et r sont premiers entre eux et donc $r_\mu = r$.

Vérifions (c), par exemple que le couple (α, μ) est admissible. D'après le lemme (5.2), on a aussi $\Delta_\mu = \Delta$. Compte tenu de l'assertion (a) et du lemme (5.3), il reste seulement à vérifier que $P(\alpha - \mu) = \Delta_\alpha + \Delta_\mu$; mais ceci se lit sur la définition de Δ . □

Le lemme suivant servira dans la démonstration du théorème B.

Lemme (5.4) : Soit (α, β) un couple admissible. Alors

$$\alpha.\beta - \alpha \leq \frac{1}{2r_\alpha^2} \quad \text{et} \quad \beta - \alpha.\beta \leq \frac{1}{2r_\beta^2}.$$

Démonstration. Les formules déjà utilisées pour un couple admissible

$$\Delta_\beta - \Delta_\alpha = \frac{1}{r_\alpha^2} + \frac{\alpha - \beta}{2}(3 + \alpha - \beta), \quad \Delta_\alpha - \Delta_\beta = \frac{1}{r_\beta^2} + \frac{\alpha - \beta}{2}(3 + \alpha - \beta),$$

permettent d'écrire aussi

$$\alpha.\beta = \alpha + \frac{1}{r_\alpha^2(3 + \alpha - \beta)} = \beta - \frac{1}{r_\beta^2(3 + \alpha - \beta)}.$$

Le lemme résulte donc de la majoration $\beta - \alpha \leq 1$. \square

Soit \mathfrak{D} l'ensemble des nombres rationnels de la forme $p/2^q$, où $p \in \mathbb{Z}$, et où q est un entier ≥ 0 . Considérons l'application $\epsilon : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par récurrence sur q , en posant

- (1) $\epsilon(n) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$,
- (2) $\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \cdot \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)$.

La proposition suivante montre que cette construction est possible :

Proposition (5.5) : (1) *L'application ϵ est bien définie et strictement croissante.*

(2) *Les couples $\left(\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right), \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)\right)$ sont admissibles.*

(3) *Si p est impair, le rang de $\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)$ est $\geq 2^q$.*

(4) *Pour $\rho \in \mathfrak{D}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\epsilon(\rho + n) = \epsilon(\rho) + n$, et $\epsilon(-\rho) = -\epsilon(\rho)$.*

Démonstration. L'injection $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ satisfait sur \mathbb{Z} aux propriétés (1), (2), (3), (4). Soit q un entier ≥ 0 ; désignons par \mathfrak{D}_q l'ensemble des nombres rationnels de la forme $p/2^{q'}$, avec $q' \leq q$. Supposons l'application $\epsilon : \mathfrak{D}_q \rightarrow \mathbb{Q}$ construite, satisfaisant sur \mathfrak{D}_q aux propriétés (1), (2), (3),

(4). Le couple $\left(\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right), \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)\right)$ est admissible; par suite la formule $\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \cdot \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)$ a bien un sens, ce qui permet de définir $\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$. D'après la proposition (5.1), les couples

$$\left(\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right), \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)\right) \quad \text{et} \quad \left(\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right), \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)\right)$$

sont admissibles. En outre, l'assertion (b) de la proposition (5.1) montre que $\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$ est

de rang $r_\alpha \geq 2^q \cdot 2 = 2^{q+1}$. Reste à vérifier l'assertion (4). Par hypothèse de récurrence, pour $\rho \in \mathfrak{D}_q$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\epsilon(\rho + n) = \epsilon(\rho) + n$, et $\epsilon(-\rho) = -\epsilon(\rho)$; par conséquent $\epsilon(\rho)$, $\epsilon(-\rho)$ et $\epsilon(\rho + n)$ ont même rang et par suite même discriminant. Il résulte de la définition de l'opération \cdot que les formules $\epsilon(\rho + n) = \epsilon(\rho) + n$, et $\epsilon(-\rho) = -\epsilon(\rho)$ restent vraies si $\rho \in \mathfrak{D}_{q+1}$. D'où la proposition. \square

5.2 – Description de \mathfrak{E} .

Lemme (5.6) : *Soient*

$$\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right), \quad \beta = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right), \quad \mu = \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right).$$

On suppose que α et $\beta \in \mathfrak{E}$. Alors :

(1) *Pour tout $\mu' \in \mathfrak{E}$ tel que $\alpha < \mu' < \beta$, on a $r_{\mu'} \geq r_{\mu}$.*

(2) *$\mu \in \mathfrak{E}$.*

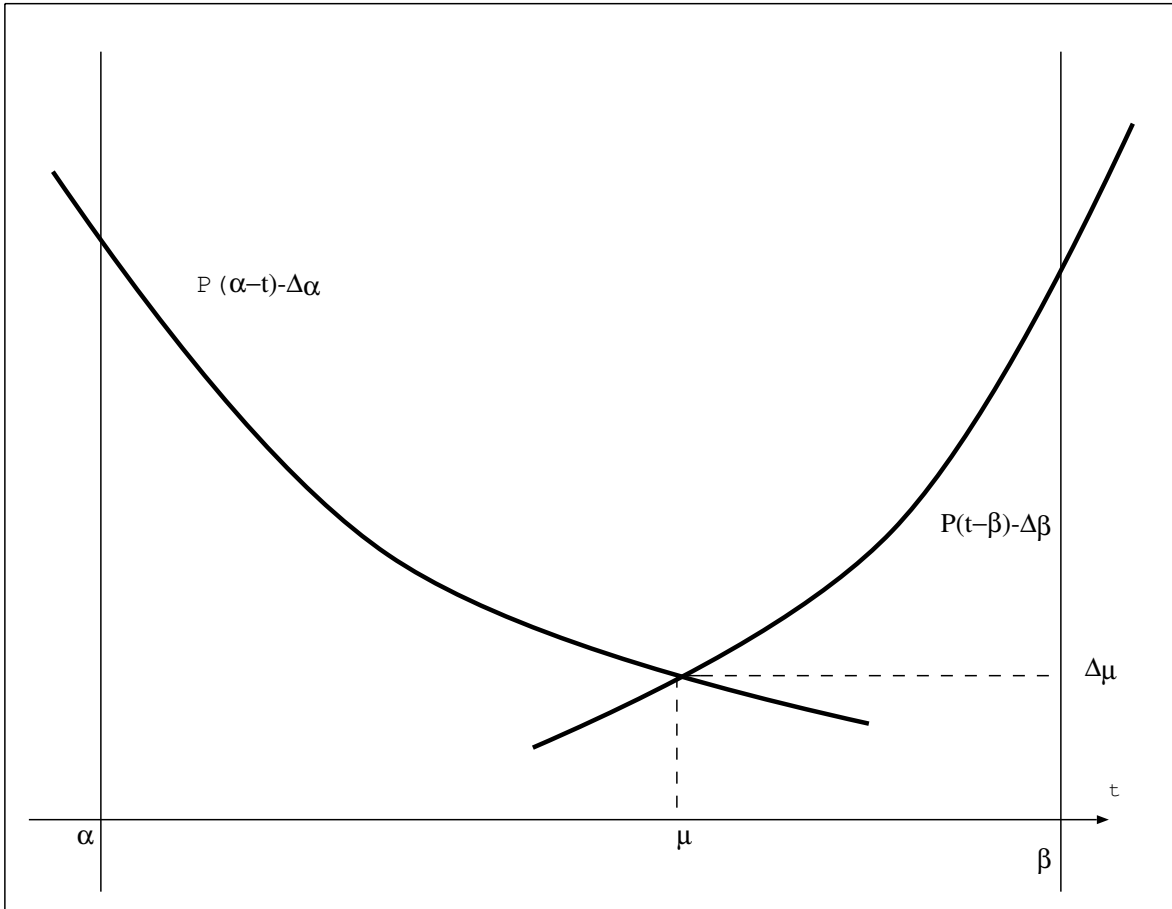
Démonstration. (1) – Soit E' un fibré exceptionnel de pente μ' , avec $\alpha < \mu' < \beta$. Son rang est $r_{\mu'}$, et son discriminant $\Delta' = \Delta_{\mu'}$, d'après le paragraphe 4.2. D'après la remarque (4.6), on a puisque α et $\beta \in \mathfrak{E}$ et $|\mu' - \alpha| < 3$, $|\mu' - \beta| < 3$

$$\Delta' \geq P(\alpha - \mu') - \Delta_{\alpha} \quad \text{et} \quad \Delta' \geq P(\mu' - \beta) - \Delta_{\beta}.$$

Or, les fonctions $t \mapsto P(\alpha - t) - \Delta_{\alpha}$ et $t \mapsto P(t - \beta) - \Delta_{\beta}$ ont respectivement pour dérivée

$$-\left(\frac{3}{2} + \alpha - t\right) \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} + t - \beta;$$

elles sont donc respectivement décroissante et croissante sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et égales pour $t = \mu$, où elles valent Δ_{μ} d'après le paragraphe 5.1.



Il en résulte que $\Delta' \geq \Delta_\mu$. Par définition du discriminant, on obtient

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r_{\mu'}^2} \right) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r_\mu^2} \right),$$

c'est-à-dire $r_{\mu'} \geq r_\mu$.

(2) – Il s'agit de montrer qu'il existe un fibré stable de rang $r = r_\mu$, de pente μ , de discriminant $\Delta = \Delta_\mu$; puisque $\Delta \neq \frac{1}{2}$, on peut appliquer le théorème C (cf. §4.5). On doit donc vérifier que les conditions (S) sont satisfaites pour le triplet (r, μ, Δ) :

- $r\mu \in \mathbb{Z}$ et $r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}$: ceci résulte de la définition de r , et de la proposition (5.5) ;
- pour tout $\alpha' \in \mathfrak{E}$, tel que $|\alpha' - \mu| < 1$ et $r_{\alpha'} < r$,

$$P(-|\alpha' - \mu|) - \Delta_{\alpha'} \leq \Delta.$$

Soit un tel élément α' . D'après la partie (1) on a $\alpha' \notin]\alpha, \beta]$. Supposons d'abord $\alpha' \leq \alpha$. La fonction $t \mapsto P(\alpha' - t) - \Delta_{\alpha'} - (P(\alpha - t) - \Delta_\alpha)$ a pour dérivée $\alpha - \alpha'$ et donc est croissante. Le couple (α, β) étant admissible, pour $t = \beta$ elle vaut $P(\alpha' - \beta) - \Delta_{\alpha'} - \Delta_\beta$. Puisque $|\alpha' - \beta| \leq 2$, cette quantité est négative d'après la remarque (4.6). Pour $t = \mu$, on obtient, compte tenu du fait que le couple (α, μ) est admissible, $P(\alpha' - \mu) - \Delta_{\alpha'} - \Delta \leq 0$.

De même, si $\beta \leq \alpha'$, la fonction $t \mapsto P(t - \alpha') - \Delta_{\alpha'} - (P(t - \beta) - \Delta_\beta)$ de dérivée $\beta - \alpha'$ est décroissante, et négative pour $t = \alpha$. Pour $t = \mu$, en utilisant le fait que le couple (μ, β) est admissible, on obtient $P(\mu - \alpha') \leq \Delta_{\alpha'} + \Delta$, ce qui achève la démonstration. \square

Démonstration du théorème A (cf. introduction) – Soit \mathfrak{D}_q l'ensemble des éléments de \mathfrak{D} de la forme $p/2^{q'}$, avec $q' \leq q$. Montrons d'abord par récurrence sur q que $\epsilon(\mathfrak{D}_q) \subset \mathfrak{E}$. On a par définition $\epsilon(\mathfrak{D}_0) = \mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z} \subset \mathfrak{E}$ puisque tout entier est la pente d'un fibré de rang 1, lequel est exceptionnel. Supposons le résultat démontré pour \mathfrak{D}_q , et considérons l'élément $\rho = \frac{2p+1}{2^{q+1}} \in \mathfrak{D}_{q+1}$. D'après le lemme ci-dessus, $\epsilon(\rho) \in \mathfrak{E}$. Par suite $\epsilon(\mathfrak{D}_{q+1}) \subset \mathfrak{E}$.

Montrons que $\mathfrak{E} \subset \epsilon(\mathfrak{D})$. Soient $\mu \in \mathfrak{E}$, et q un entier tel que $2^q \geq r_\mu$. Soit $\frac{p}{2^q}$ l'élément de \mathfrak{D} tel que

$$\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \leq \mu < \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right).$$

D'après la proposition (5.5), $\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$ est de rang $\geq 2^{q+1}$, donc supérieur à r_μ . La partie (1) du lemme (5.6) impose $\mu = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)$ et par suite $\mu \in \epsilon(\mathfrak{D})$.

5.3 – La condition $\Delta \neq \frac{1}{2}$. Soient R un réel > 1 , $\mathfrak{E}(R)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{E} = \epsilon(\mathfrak{D})$ tels que $r_\alpha \leq R$. Cet ensemble est localement fini d'après la proposition (5.5). Soient $\mu \in \mathbb{Q}$, et $\alpha \leq \mu \leq \beta$ les éléments de $\mathfrak{E}(R)$ qui encadrent μ : $\beta - \alpha$ est donc minimum.

Lemme (5.7) : Si $\alpha \neq \beta$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que

$$\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right), \quad \beta = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right).$$

Démonstration. Si α et $\beta \in \mathbb{Z}$, le résultat est trivial. Sinon, on peut écrire

$$\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right), \quad \beta = \epsilon\left(\frac{p'}{2^q}\right) \quad \text{avec } q \geq 1$$

et p ou p' impair, par exemple $p = 2m + 1$. D'après la proposition (5.1), l'élément $\epsilon\left(\frac{m+1}{2^{q-1}}\right)$ est de rang $\leq R$ donc appartient à $\mathfrak{E}(R)$. Par définition de α et β , on a

$$\beta \leq \epsilon\left(\frac{m+1}{2^{q-1}}\right)$$

et par suite $p' \leq 2m + 2$. □

L'énoncé suivant complète la démonstration du théorème C (cf. §4.5).

Proposition (5.8) : Soient r un entier > 1 , μ et $\Delta \in \mathbb{Q}$ satisfaisant aux conditions (S). Alors $\Delta \neq \frac{1}{2}$.

Démonstration. Supposons $\Delta = \frac{1}{2}$. Soient $\alpha \leq \mu \leq \beta$ les éléments de $\mathfrak{E}(r-1)$ qui encadrent μ . D'après les conditions (S)

$$\Delta \geq P(\alpha - \mu) - \Delta_\alpha \quad \text{et} \quad \Delta \geq P(\mu - \beta) - \Delta_\beta.$$

Ceci entraîne $\alpha \neq \beta$. D'après le lemme (5.7) et la proposition (5.5), le couple (α, β) est admissible ; considérons l'élément $\alpha.\beta$, qui appartient à \mathfrak{E} d'après le théorème A. Par définition de α et β , $r_{\alpha.\beta} \geq r$, car d'après la proposition (5.1), $\alpha \leq \alpha.\beta \leq \beta$.

On a $\mu \neq \alpha.\beta$: sinon $\mu = \alpha.\beta$ et $r_{\alpha.\beta}$ diviserait r , et par suite $r_{\alpha.\beta} \leq r$ et on pourrait écrire

$$r_{\alpha.\beta}(P(\alpha.\beta) - \Delta_{\alpha.\beta}) - r(P(\mu) - \Delta) = r(\Delta - \Delta_{\alpha.\beta}) = \frac{1}{2r},$$

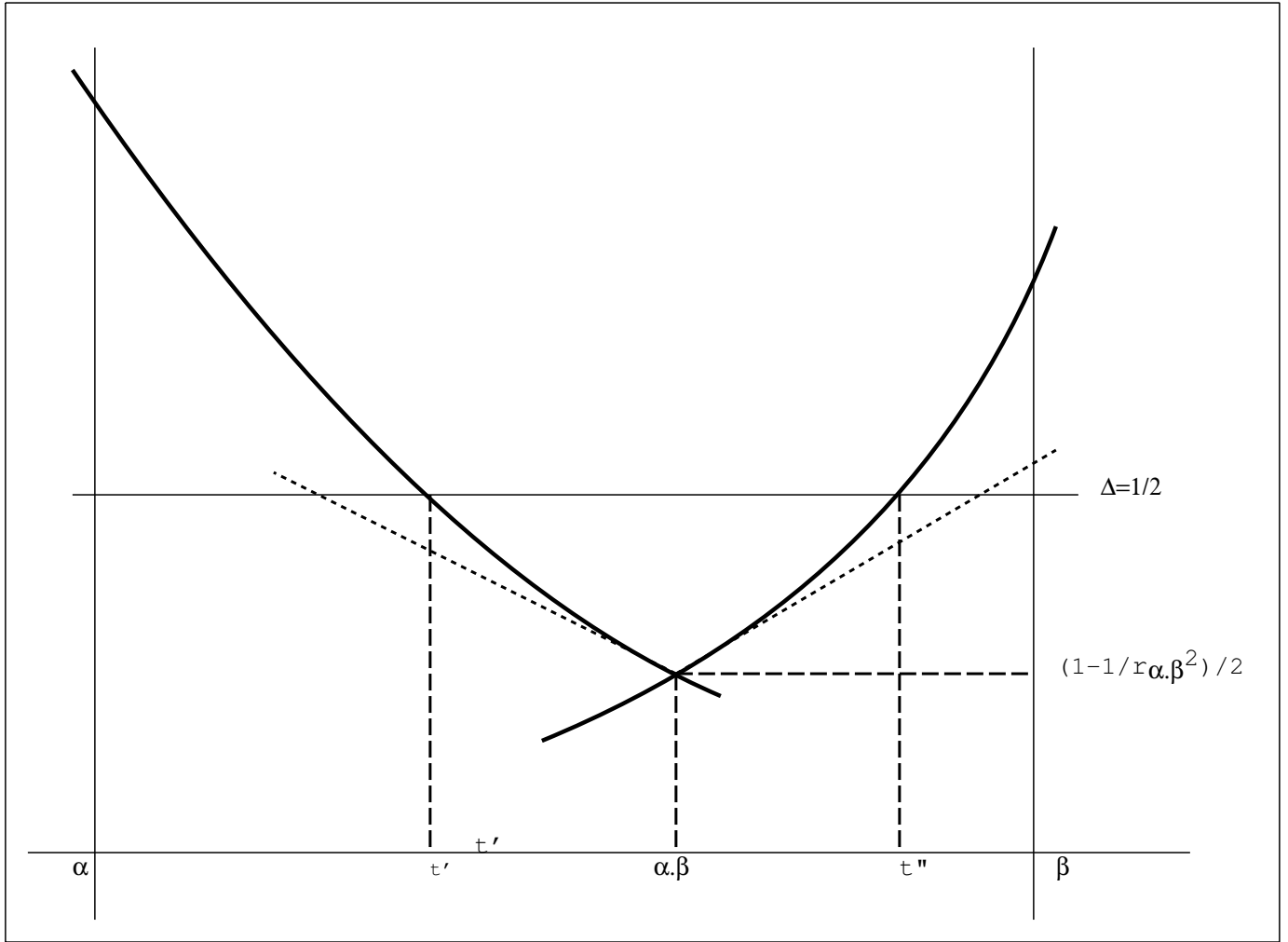
ce qui est absurde puisque cette quantité doit être entière. Donc $\mu \neq \alpha.\beta$, et puisque $r \leq r_{\alpha.\beta}$:

$$|\mu - \alpha.\beta| \geq \frac{1}{r_{\alpha.\beta}r} \geq \frac{1}{r_{\alpha.\beta}^2}.$$

Les équations $P(\alpha - t) = \Delta_\alpha + \frac{1}{2}$ et $P(t - \beta) = \Delta_\beta + \frac{1}{2}$ ont chacune une solution, respectivement t' et t'' , telle que $\alpha \leq t' \leq \alpha.\beta$ et $\alpha.\beta \leq t'' \leq \beta$. Alors

$$\alpha.\beta - t' \leq \frac{1}{2r_{\alpha.\beta}^2}, \quad t'' - \alpha.\beta \leq \frac{1}{2r_{\alpha.\beta}^2}.$$

En effet, les pentes des deux tangentes en $\alpha.\beta$ sont respectivement $-\left(\frac{3}{2} + \alpha - \alpha.\beta\right)$ et $\frac{3}{2} - \beta + \alpha.\beta$, donc minorées par 1 en valeur absolue (cf. lemme (5.4)). L'assertion en résulte par convexité.



Par suite, $\mu \notin [t', t'']$. Ceci implique $\Delta > \frac{1}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse. \square

Corollaire (5.9) : *Il n'existe pas de faisceau semi-stable de discriminant $\frac{1}{2}$.*

Démonstration. Si E est un faisceau semi-stable de rang r , de pente μ , de discriminant $\Delta = \frac{1}{2}$, le triplet $(r, \mu, \frac{1}{2})$ satisfait aux conditions (S) d'après la proposition (4.5). Ceci contredit la proposition (5.8). \square

5.4. – Démonstration du théorème B. (cf. introduction). Soient (α, β) les éléments de $\mathfrak{E}(\frac{r}{2})$ qui encadrent μ . D'après le théorème C, les conditions

$$\Delta \geq P(\alpha - \mu) - \Delta_\alpha, \quad \Delta \geq P(\mu - \beta) - \Delta_\beta$$

sont évidemment nécessaires pour qu'il existe un fibré stable de rang r , de pente μ , de discriminant Δ . Réciproquement, supposons $r\mu \in \mathbb{Z}$, $r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}$, et ces conditions satisfaites. D'après le théorème (C), pour obtenir l'existence d'un fibré stable de rang r , de pente μ , de discriminant Δ , il suffit de vérifier les conditions (S), c'est-à-dire : pour tout $\alpha' \in \mathfrak{E}$ tel que $r_{\alpha'} < r$ et $|\alpha' - \mu| \leq 1$, $P(-|\alpha' - \mu|) \leq \Delta_{\alpha'} + \Delta$.

D'après le lemme (5.7), ou $\alpha = \beta$, ou il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que

$$\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \quad \text{et} \quad \beta = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right).$$

Le même argument que dans la démonstration du lemme (5.6) montre que

$$\text{si } \alpha' \leq \alpha, \quad P(\alpha' - \mu) - \Delta_{\alpha'} \leq P(\alpha - \mu) - \Delta_\alpha,$$

et

$$\text{si } \alpha' \geq \beta, \quad P(\mu - \alpha') - \Delta_{\alpha'} \leq P(\mu - \beta) - \Delta_\beta.$$

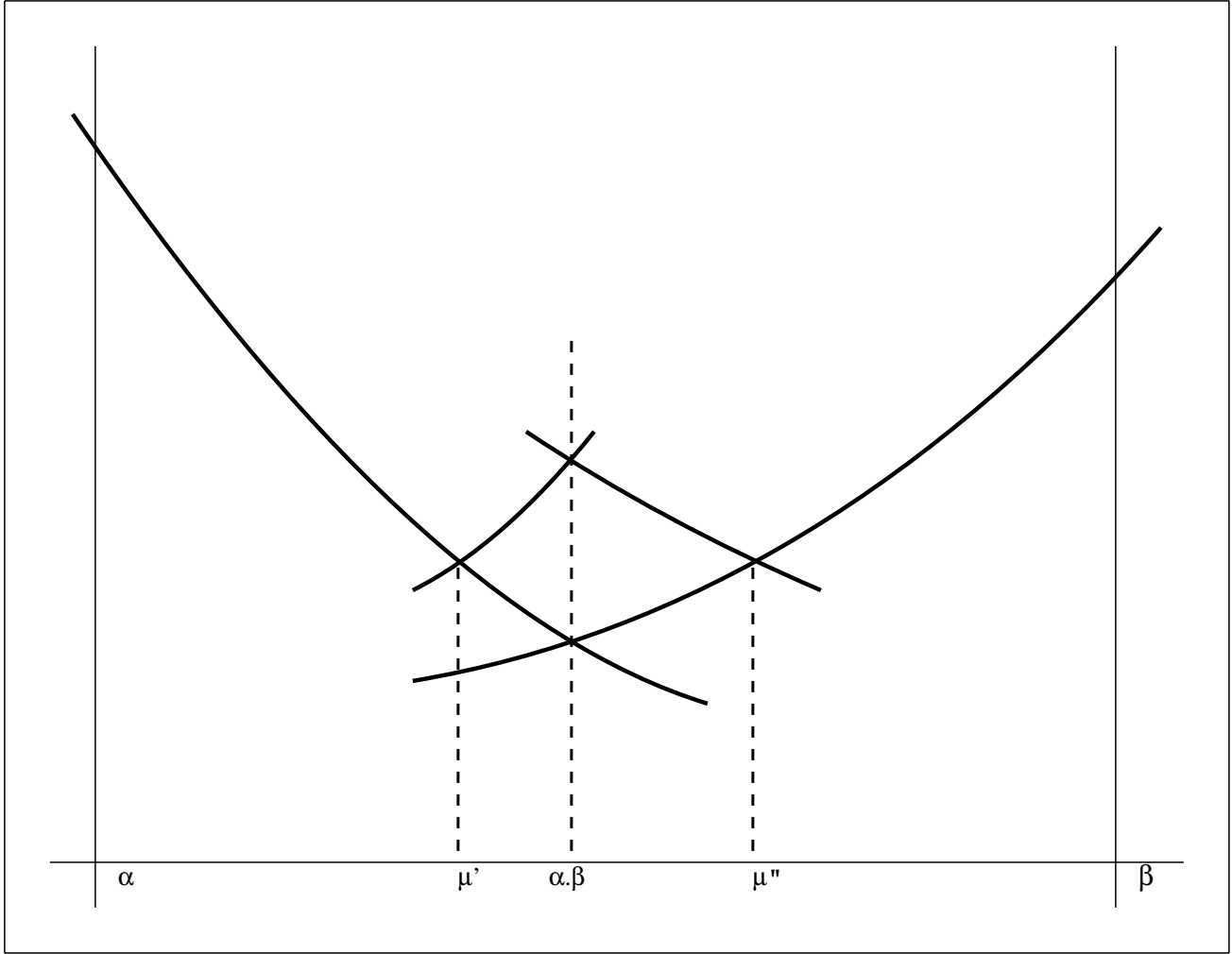
Pour ces α' , l'hypothèse entraîne donc $P(-|\mu - \alpha'|) \leq \Delta_{\alpha'} + \Delta$.

Reste à examiner le cas où $\alpha < \beta$ et où il existe $\alpha' \in \mathfrak{E}$ tel que $r_{\alpha'} < r$ et $\alpha < \alpha' < \beta$. Par définition de α et β , on doit avoir

$$(*) \quad \frac{r}{2} < r_{\alpha'} < r$$

et la seule possibilité est $\alpha' = \alpha.\beta = \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$. Mais alors $\mu \neq \alpha.\beta$ car sinon $r_{\alpha.\beta}$ diviserait r , et donc $r \geq 2r_{\alpha.\beta}$, ce qui contredit (*). Par suite

$$|\mu - \alpha.\beta| \geq \frac{1}{r_{\alpha.\beta}r} > \frac{1}{2r_{\alpha.\beta}^2}.$$



Considérons $\mu' = \alpha.(\alpha.\beta)$ et $\mu'' = (\alpha.\beta).\beta$. D'après le lemme (5.4), on a

$$\alpha.\beta - \mu' \leq \frac{1}{2r_{\alpha.\beta}^2}, \quad \mu'' - \alpha.\beta \leq \frac{1}{2r_{\alpha.\beta}^2}.$$

Il en résulte que $\mu \notin [\mu', \mu'']$. Si $\mu < \mu'$, on a

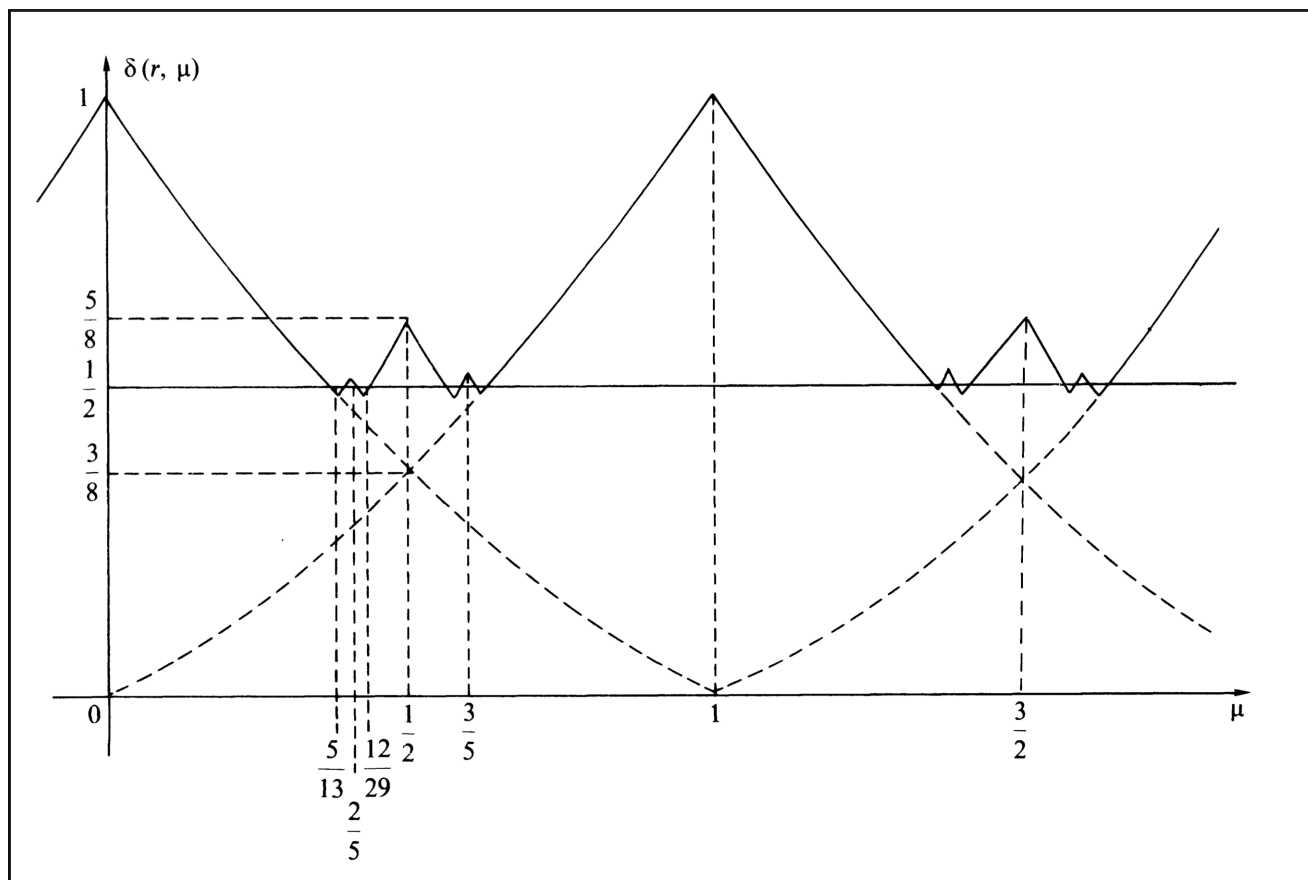
$$P(\mu - \alpha.\beta) - \Delta_{\alpha.\beta} \leq P(\mu' - \alpha.\beta) - \Delta_{\alpha.\beta} = P(\alpha - \mu') - \Delta_{\alpha} \leq P(\alpha - \mu) - \Delta_{\alpha} \leq \Delta.$$

De même, si $\mu'' < \mu$, $P(\alpha.\beta - \mu) - \Delta_{\alpha.\beta} \leq \Delta$. Ainsi, les conditions (S) sont satisfaites pour le triplet (r, μ, Δ) , et le théorème est démontré.

5.5. – La fonction $\mu \mapsto \delta(r, \mu)$. Soit r un entier > 1 ; on pose

$$\delta(r, \mu) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{E}(\frac{r}{2}); |\alpha - \mu| \leq 1} (P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_{\alpha}),$$

de sorte que les conditions (S) se lisent aussi $r\mu \in \mathbb{Z}$, $r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}$ et $\Delta \geq \delta(r, \mu)$. Le graphe de la fonction $\mu \mapsto \delta(r, \mu)$ est formé d'arcs de paraboles se coupant en des points d'abscisse $\alpha \in \mathfrak{E}$. Le schéma suivant représente le graphe de $\mu \mapsto \delta(r, \mu)$, pour $10 \leq r \leq 25$.



RÉFÉRENCES

- [1] M. F. Atiyah, M. F., Bott, R. *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*. Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 308, (1982), 523-615.
- [2] Barth, W. *Moduli of vector bundles on the projective plane*. Invent. Math. 42 (1977) 63-91.
- [3] Brieskorn, E. *Über holomorphe \mathbb{P}_n -Bündel über \mathbb{P}_1* . Math. Ann. 157 (1967), 343-357.
- [4] Brun, J., Hirschowitz, A. *Droites de saut des fibrés stables de rang élevé sur \mathbb{P}_2* . Math. Z. 181, (1982), 171-178.
- [5] Drézet, J.-M. *Fibrés uniformes de type $(0, \dots, 0, -1, \dots, -1)$ sur \mathbb{P}_2* . Journ. für die reine und angew. Math. 325 (1981), 1-27.
- [6] Ellingsrud, G. *Sur l'irréductibilité du module des fibrés stables sur \mathbb{P}_2* . Math. Z. 192 (1983), 189-192.
- [7] Gieseker, D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*. Ann. of Math. 105 (1977) 45-60.
- [8] Grothendieck, A. *Techniques de construction en géométrie algébrique*. Sémin. Bourbaki 221 (1961).
- [9] Fogarty, J. *Algebraic families on an algebraic surface*. Amer. Journ. of Math. 90 (1968), 511-521.
- [10] Harder, G., Narasimhan, M.S. *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*. Math. Ann. 212 (1975) 215-248.
- [11] Hartshorne, R. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New-York (1977).

- [12] Hulek, K. *On the classification of stable rank- r vector bundles on the projective plane*. Vector bundles and differential Equations. (Proceedings, Nice, 1979). Progress in Math. 7 (1980) 113-144.
- [13] Le Potier, J. *Fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$* . Math. Ann. 241 (1979), 217-256.
- [14] Le Potier, J. *Stabilité et amplitude sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$* . Vector bundles and differential Equations. (Proceedings, Nice, 1979). Progress in Math. 7 (1980), 146-181.
- [15] Le Potier, J. *Un critère de lissité pour le module de Douady-Grothendieck*.
<http://www.institut.math.jussieu.fr/projets/tge/jlp/scandrezetX2.pdf>
- [16] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II*. Journ. of Math. of Kyoto Univ. 18, 3 (1978), 557-614.
- [17] Schwartzenberger, R.L.E. *Vector bundles on algebraic surfaces*. Proc. of London Math. Soc. (3), 11 (1961), 601-622.
- [18] Schwartzenberger, R.L.E. *Vector bundles on the projective plane*. Proc. of London Math. Soc. (3), 11 (1961), 623-640.
- [19] Seshadri, C.S. *Mumford's conjecture for $GL(2)$ and applications*. Algebraic Geometry. Bombay Colloquium, 1968-1969, 347-371.
- [20] Shatz, S. *The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles*. Compos. Math. 35, (2) (1977), 163-187.
- [21] Verdier, J.-L. *Instantons*. Les équations de Yang-Mills. Astérisque 71-72 (1980), 105-134.

Note : Ce texte reproduit l'article

Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur \mathbb{P}_2* . Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

La construction et des propriétés supplémentaires des fibrés exceptionnels ont ensuite été données dans

Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur \mathbb{P}_2* . Math. Ann 275 (1986), 25-48. (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00832689v1>)

et des applications aux variétés de modules de faisceaux semi-stables sur \mathbb{P}_2 dans

Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$* . Journ. für die reine und angew. Math. 380 (1987), 14-58. (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00864252v1>)

La notion de fibré exceptionnel a été généralisée aux espaces projectifs \mathbb{P}_n , et à d'autres variétés dans

Gorodentsev, A.L., Rudakov, A.N. *Exceptional vector bundles on projective spaces*. Duke Math. Journ. 54 (1987), 115-130.

Rudakov A.N. et al. *Helices and Vector Bundles : séminaire Rudakov*. London Math. Soc. Lect. Note Series 148. Cambridge Univ. Press (1990)

Les conditions d'existence des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, en fonction de leur classes de Chern, sont décrites dans

Rudakov A.N. *A description of Chern classes of semi-stable sheaves on a quadric surface*. J. reine angew. Math. 453 (1994), 113-135.

Elles s'expriment en fonction des fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

La construction des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur \mathbb{P}_2 comme bon quotients de variétés de monades, donnée dans le chapitre 2, est obtenue par une autre méthode dans

Le Potier, J. *À propos de la construction de l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif*. Bull. Soc. math. France 122 (1994), 363-369.

J.-M. DRÉZET – INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, CASE 247, 4 PLACE JUSSIEU, F-75252 PARIS, FRANCE

E-mail address: `jean-marc.drezet@imj-prg.fr`