# GROUPE DE PICARD DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FIBRÉS SEMI-STABLES SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES

J.–M. DRÉZET ET M.S. NARASIMHAN

Sommaire



## 0 – Introduction

Soient $X$ une courbe algébrique projective lisse de genre $g \geq 2$ sur $\mathbb{C}$, $r$, $d$ des entiers, avec $r \geq 2$. On note $U(r,d)$ la variété de modules des fibrés algébriques semi-stables sur $X$ de rang $r$ et de degré $d$, $U_s(r,d)$ l'ouvert de $U(r,d)$ correspondant aux fibrés stables. On sait que $U(r,d)$ est une variété algébrique projective irréductible et normale. Si $r$ et $d$ ne sont pas premiers entre eux, $U(r,d)$ n'est pas lisse, sauf dans une exception : le cas ou $g=2$, $r=2$, et $d$ est pair (cf. [17]). On supposera par la suite qu'on n'est pas dans ce cas, On a alors $\mathrm{codim}_{U(r,d)}(U(r,d)\backslash U_s(r,d)) \geq 2$, et $U(r,d)\backslash U_s(r,d)$ est le lieu des points singuliers de $U(r,d)$. Si $L$ est un fibré en droites de degré $d$ sur X, on note $U(r,L)$ (resp. $U_s(r,L)$) la sous-variété fermée de $U(r,d)$ (resp. $U_s(r,d)$) correspondant aux fibrés vectoriels de déterminant isomorphe a $L$. Le but de ce travail est l'étude de Pic($U(r,d)$) et Pic($U(r,L)$).

### 0.1 – Factorialité de $U(r,d)$ et $U(r,L)$

Le premier résultat est le

**Théorème A :** *Les variétés $U(r,d)$ et $U(r,L)$ sont localement factorielles.*

Donnons une idée de la démonstration de ce théorème. Pour toute variété algébrique $Y$ on note Cl($Y$) le groupe des classes d'équivalence linéaire de diviseurs de Weil de $Y$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Pic}(U(r,d)) & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathrm{Cl}(U(r,d)) \\ \downarrow{\scriptstyle r_1} & & \downarrow{\scriptstyle r_2} \\ \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) & \xrightarrow{\ \phi_s\ } & \mathrm{Cl}(U_s(r,d))\end{array}$$

les flèches horizontales étant les morphismes canoniques, les verticales étant les restrictions. Le morphisme $\phi_s$ est bijectif car $U_s(r,d)$ est lisse, et il en est de même de $r_2$ car $\mathrm{codim}_{U(r,d)}(U(r,d)\backslash U_s(r,d)) \geq 2$. Nous verrons que $U(r,d)$ est localement factorielle si et seulement si $\phi$ est un isomorphisme, et ceci se produit si et seulement si $r_1$ en est un. L'injectivité de $r_1$ découle de la normalité de $U(r,d)$. Nous devrons donc essentiellement prouver que $r_1$ est surjectif.

Pour cela, on considère la construction habituelle de $U(r,d)$ comme bon quotient d'un ouvert lisse $R^{ss}$ d'un schéma de Grothendieck par un groupe du type $\mathrm{PGL}(q)$ (cf. 1.1.4). Soient

$$\pi : R^{ss} \longrightarrow U(r,d)$$

le morphisme quotient, $R^s = \pi^{-1}(U_s(r,d))$, et $\pi_s : R^s \to U_s(r,d)$ la restriction de $\pi$. On note $\mathrm{Pic}^G(R^{ss})$ le groupe des classes d'isomorphisme de $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur $R^{ss}$ (un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur $R^{ss}$ étant un fibré en droites algébrique sur $R^{ss}$ muni d'une action linéaire algébrique de $\mathrm{PGL}(q)$ au dessus de l'action de ce groupe sur $R^{ss}$). On définit de même $\mathrm{Pic}^G(R^s)$.

Du fait notamment que $\mathrm{PGL}(q)$ agit librement sur $R^s$, nous verrons qu'on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \;\simeq\; \mathrm{Pic}^G(R^s)$$

(si $L$ est un fibré en droites sur $U_s(r,d)$, on lui associe le $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites $\pi_s^*(L)$ sur $R^s$, et réciproquement, si $L'$ est un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur $R^s$, il existe un bon quotient $L'/\,\mathrm{PGL}(q)$, qui a une structure naturelle de fibré en droites algébrique sur $U_s(r,d)$, et c'est ce fibré qui est associé à $L'$).

Ensuite, on montre que le morphisme de restriction

$$\mathrm{Pic}^G(R^{ss}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(R^s)$$

est surjectif. Partant d'un fibré en droites $L$ sur $U_s(r,d)$ nous pouvons donc définir un $PGL(q)$-fibré en droites $L'$ sur $R^{ss}$ tel que $\pi_s^*(L) \simeq L'_{|R^s}$.

Pour continuer nous utiliserons un “lemme de descente” donnant des conditions suffisantes pour qu'il existe un fibré en droites $\overline{L}$ sur $U(r,d)$ tel que $\pi^*(\overline{L}) \simeq L'$. Ce lemme de descente, dans sa version finale, est dû à Kempf. Nous avions précédemment une version plus compliquée (qui nécessitait plus de vérifications sur $L'$), inspirée de ([1], prop. 2.3). La condition à vérifier sur $L'$ est la suivante : pour tout point fermé $y$ de $R^{ss}$ tel que l'orbite de $y$ dans $R^{ss}$ soit fermée, le stabilisateur de $y$ dans $\mathrm{PGL}(q)$ agit trivialement sur la fibre $L'_y$. Nous verrons que ceci est vrai, d'où l'existence de $\overline{L}$.

Ce fibré en droites $\overline{L}$ obtenu sur $U(r,d)$ est le prolongement voulu de $L$. On obtient aussi en cours de démonstration un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \;\simeq\; \mathrm{Pic}^G(R^{ss}) \;.$$

En ce qui concerne $U(r,L)$, il suffit de faire la même démonstration, avec $\pi^{-1}(U(r,L))$ à la place de $R^{ss}$.

*Remarque.* On voit facilement que les complétés des anneaux locaux des points singuliers de $U(r,d)$ ne sont pas nécessairement factoriels (cf. [3]).

### 0.2 – Description de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ et $\mathrm{Pic}(U(r,L))$

Nous avons deux descriptions de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$. La première fait intervenir une généralisation aux variétés de modules de fibrés semi-stables de la notion de “diviseur théta” des jacobiens. La seconde utilise un sous-groupe du groupe de Grothendieck $K(X)$ de $X$.

*0.2.1 – Diviseurs théta généralisés.* Posons $n = \mathrm{PGCD}(r,d)$. Soit $F$ un fibré vectoriel sur $X$ tel que

$$\deg(F) \;=\; \frac{-d+r(g-1)}{n} \;, \quad \mathrm{rg}(F) \;=\; \frac{r}{n} \;.$$

Ces conditions entrainent que $\chi(E\otimes F)=0$ pour tout fibré vectoriel $E$ sur $X$ de rang $r$ et de degré $d$. D'après [8], on peut trouver un tel $F$ tel qu'il existe un fibré stable $E$ sur $X$, de rang $r$ et de degré $d$, tel que

$$H^0(X,E\otimes F) \;=\; H^1(X,E\otimes F) \;=\; 0 \;.$$

Dans ces conditions soit $\Theta_F^s$ (resp. $\Theta_{F,L}^s$) l'ensemble des points de $U_s(r,d)$ (resp. $U_s(r,L)$) correspondant aux fibrés stables $E$ tels que

$$H^0(X,E\otimes F) \;\neq\; 0.$$

Nous verrons que c'est une hypersurface de $U_s(r,d)$ (resp. $U_s(r,L)$). Soit $\Theta_F$ (resp. $\Theta_{F,L}$) l'adhérence de $\Theta_F^s$ (resp. $\Theta_{F,L}^s$) dans $U(r,d)$ (resp. $U(r,L)$). Les hypersurfaces $\Theta_F$ et $\Theta_{F,L}$ sont appelées *diviseurs théta.*

D'après le théorème A, le faisceau d'idéaux de $\Theta_F$ (resp. $\Theta_{F,L}$) est un fibré en droites $\mathcal{O}(\Theta_F)$ (resp. $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$). On peut aussi définir ces fibrés par une propriété universelle : par exemple $\mathcal{O}(\Theta_F)$ est entièrement déterminé par la propriété suivante : pour toute variété algébrique $S$ et toute famille plate $E$ de fibrés vectoriels semi-stables sur $X$ , de rang $r$ et de degré $d$ paramétrée par $S$, on peut définir un “sous-schéma de saut” $Z$ de $S$, dont les points fermés sont les points $s$ tels que $H^0(E_s\otimes F)\neq 0$, et dont le faisceau d'idéaux $\mathcal{O}(Z)$ est localement libre. Alors, si $f_E : S\to U(r,d)$ est le morphisme canonique déduit de $E$, on a un isomorphisme

$$f_E^*(\mathcal{O}(\Theta_F)) \;\simeq\; \mathcal{O}(Z) \;.$$

On a une propriété universelle analogue pour définir $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$ (ces faits ne seront pas utilisés dans la suite). On démontrera le

**Théorème B : (a)** *Le fibré en droites $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$ est indépendant du choix de $F$.*

**(b)** *Le groupe $\mathrm{Pic}(U(r,L))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et est engendré par $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$.*

L'isomorphisme $\mathrm{Pic}(U(r,L))\simeq\mathbb{Z}$ dans le cas $n=1$ a été prouvé d'une autre façon par Seshadri (cf. [20]).

Examinons maintenant $\mathrm{Pic}(U(r,d))$. Soit $J^{(d)}$ le jacobien des fibrés en droites de degré $d$ sur $X$. On a un morphisme canonique

$$\det : U(r,d) \longrightarrow J^{(d)}$$

qui permet de considérer $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$. On a alors le

**Théorème C :** *Les inclusions* $\mathrm{Pic}(J^{(d)}) \subset \mathrm{Pic}(U(r,d))$ *et* $\mathbb{Z}.\mathcal{O}(\Theta_F) \subset \mathrm{Pic}(U(r,d))$ *induisent un isomorphisme*

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \;\simeq\; \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \oplus \mathbb{Z}\ .$$

Nous verrons dans l'autre description que nous donnons de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ quelle est la dépendance de $\mathcal{O}(\Theta_F)$ en $F$.

*0.2.2 – Groupe de Grothendieck de X et* $\mathrm{Pic}(U(r,d))$. Soit $S$ une variété algébrique. Une *famille de fibrés de* $U(r,d)$ *paramétrée par* $S$ est un fibré vectoriel $E$ sur $S \times X$, plat sur $S$, tel que pour tout point fermé $s$ de $S$, $E_s = E_{|\{s\}\times X}$ soit semi-stable de rang $r$ et de degré $d$. On note $p_S$, $p_X$ les projections $S \times X \to S$ et $S \times X \to X$ respectivement. Deux telles familles $E$, $E'$ paramétrées par $S$ sont dites *équivalentes* s'il existe un fibré en droites $L$ sur $S$ et un isomorphisme $E' \simeq E \otimes p_S^*(L)$.

On note $F(r,d)$ le foncteur contravariant

$$\text{Variétés algébriques} \longrightarrow \text{Ensembles}$$

associant à $S$ l'ensemble des classes d'équivalence de familles de fibrés de $U(r,d)$ paramétrées par $S$. Si $f : S' \to S$ est un morphisme de variétés algébriques, et si E est une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $S$, l'image par $F(r,d)(f)$ de la classe de $E$ est celle de $f^*(E)$. On sait qu'on a un morphisme canonique de foncteurs

$$F(r,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, U(r,d))\ .$$

Autrement dit, à toute famille $E$ de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $S$ on associe un morphisme

$$f_E : S \longrightarrow U(r,d)$$

ne dépendant que de la classe d'équivalence de $E$.

Si $Y$ est une variété algébrique, on note $K(Y)$ le groupe de Grothendieck de $Y$, et si $E$ est un faisceau cohérent sur $Y$, $[E]$ désigne la classe de $E$ dans $K(Y)$. Soient $\eta$ la classe dans $K(X)$ d'un fibré vectoriel de rang $r$ et de degré $d$, $H$ le noyau du morphisme

$$\begin{aligned} K(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \alpha &\longmapsto \chi(\alpha\otimes\eta) \end{aligned}$$

En fait, $H$ ne dépend que de $r$ et $d$, c'est pourquoi on notera $H = H(r,d)$. La classe du fibré $F$ considéré dans 0.2.1 est par exemple un élément de $H(r,d)$. On peut voir $\mathrm{Pic}^0(X)$ comme un sous-groupe de $H(r,d)$ (cf. 3.3), et on a

$$H(r,d) \;\simeq\; \mathrm{Pic}^0(X) \oplus \mathbb{Z}[F]\ .$$

Soient $E$ une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par une variété lisse $S$, et $\alpha$ un élément de $H(r,d)$. On définit successivement les éléments

$$\begin{aligned} E\otimes p_X^*(\alpha) &\quad \text{de} \quad K(S\times X)\ , \\ p_{S!}(E\otimes p_X^*(\alpha)) &\quad \text{de} \quad K(S)\ , \\ \gamma_E(\alpha)=\det(p_{S!}(E\otimes p_X^*(\alpha))) &\quad \text{de} \quad \mathrm{Pic}(S) \end{aligned}$$

(en fait ceci est possible même si $S$ est seulement intègre). Il est aisé de voir que puisque $\alpha$ est dans $H(r,d)$, $\gamma_E(\alpha)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de $E$. Les $\gamma_E(\alpha)$ dépendent fonctoriellement de $E$ et nous verrons qu'on définit ainsi un élément de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$, le *groupe de Picard du foncteur F(r,d)* (cf. §3).

Rappelons que $\mathrm{Pic}^0(X)$ peut être vu naturellement comme un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ ou $H(r,d)$, On prouvera le

**Théorème D : (a)** *Soit $\alpha$ un élément de $H(r,d)$. Il existe un unique $\mathbb{L}(\alpha)$ dans $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ tel que pour toute variété lisse $S$ et toute famille $E$ de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $S$, on ait*

$$\gamma_E(\alpha) \ \simeq\ f_E^*(\mathbb{L}(\alpha))\ .$$

**(b)** *Le morphisme de groupes* $\mathbb{L}: H(r,d)\to \mathrm{Pic}(U(r,d))$ *est injectif.*

**(c)** *On a* $\mathrm{Pic}(U(r,d)) = \mathrm{im}(\mathbb{L})\oplus \mathrm{Pic}(J^{(d)})$*, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & H(r,d) \arrow[ddl, "\mathbb{L}"] \\ \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \arrow[d, hook, "\det^*"] & \\ \mathrm{Pic}(U(r,d)) & \end{tikzcd}$$

*et on a*

$$\mathrm{im}(\mathbb{L})\cap \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \ =\ \mathbb{L}(\mathrm{Pic}^0(X)) \ =\ \det{}^*(\mathrm{Pic}^0(X))\ .$$

On a une inclusion naturelle $i: \mathrm{Pic}(U(r,d))\to \mathrm{Pic}(F(r,d))$, et on a défini un morphisme de groupes $\gamma: H(r,d)\to \mathrm{Pic}(F(r,d))$. La partie (a) du théorème D dit simplement que l'image de $\gamma$ est contenue dans celle de $i$. Nous montrerons qu'on a en fait $\mathrm{Pic}(U(r,d)) = \mathrm{Pic}(F(r,d))$.

Pour faire le lien entre les deux descriptions, notons qu'on a

$$\mathcal{O}(\Theta_F) \ =\ \mathbb{L}(-[F])\ .$$

On déduit de (c) que si $F'$ est un autre fibré sur $X$ ayant les mêmes propriétés que $F$, on a

$$\mathcal{O}(\Theta_{F'}) \ =\ \mathcal{O}(\Theta_F)\otimes \det{}^*(\det(F')\otimes\det(F)^{-1})$$

($\det(F')\otimes\det(F)^{-1}$ étant vu comme un élément de $\mathrm{Pic}^0(X)\subset \mathrm{Pic}(J^{(d)})$).

Donnons maintenant une idée des démonstrations des théorèmes B, C, D. On utilise une construction due à Seshadri. On peut toujours supposer $d$ aussi grand qu'on le veut, et dans ce cas tout fibré semi-stable $E$ de rang $r$ et de degré $d$ peut s'écrire comme extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow E \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \ ,$$

$L_0$ étant un fibré en droites isomorphe à $\det(E)$. La famille de toutes ces extensions est un fibré en espaces projectifs $\mathbb{P}$ sur $J^{(d)}$ (cf. §7). Soit $\mathbb{P}^s$ l'ouvert des extensions dont le terme du milieu est stable. On peut déduire $\mathrm{Pic}(U_s(r,d))$ de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s)$, qui on le verra est isomorphe à $\mathrm{Pic}(\mathbb{P})$, par une étude précise du morphisme canonique $\mathbb{P}^s \to U_s(r,d)$.

### 0.3 – Faisceau dualisant et faisceau canonique

On peut calculer le faisceau dualisant de $U(r,d)$ ou $U(r,L)$. Soit $T_U$ le faisceau tangent de $U(r,d)$. Puisqu'il est localement libre en dehors d'un fermé de codimension au moins 2, on peut définir son déterminant qui est un fibré en droites $\Delta$ sur $U(r,d)$. On note $\omega$ le dual de $\Delta$. On définit de même le fibré en droites $\omega_L$ sur $U(r,L)$.

**Théorème E : (a)** *Soit $F_0$ un fibré vectoriel sur $X$ de rang $2r$ et de degré $2(-d+r(g-1))$. Alors on a*

$$\omega \ \simeq \ \mathbb{L}([F_0]) \otimes \det{}^*(\Lambda) \ ,$$

*où $\Lambda$ est le fibré en droites sur $J^{(d)}$*

$$\Lambda \ = \ \big(\det(p_{J!}([L])) \otimes \det(p_{J!}([L^*]))\big)^{r-1} \otimes \det(p_{J!}([L \otimes p_X^*(F_0)]))^{-1} \ ,$$

*$L$ désignant un fibré de Poincaré sur $J^{(d)} \times X$, et $p_J$, $p_X$ les projections $J^{(d)} \times X \to J^{(d)}$ et $J^{(d)} \times X \to X$.*

**(b)** *Le faisceau dualisant de $U(r,d)$ est isomorphe à $\omega$.*

Rappelons que $n = \mathrm{PGCD}(r,d)$. On a alors le

**Théorème F : (a)** *On a $\omega_L \simeq \mathcal{O}(-2n\Theta_{F,L})$.*

**(b)** *Le faisceau dualisant de $U(r,L)$ est isomorphe à $\omega_L$.*

### 0.4 – Résultats annexes

Soit $U$ un ouvert non vide de $U_s(r,d)$. On appelle *fibré de Poincaré sur $U$* un fibré vectoriel $E$ sur $U \times X$ tel que pour tout point fermé $u$ de $U$, $E_u$ soit stable de rang $r$ et de degré $d$, et que $u$ soit le point de $U_s(r,d)$ correspondant à $E_u$. Cela revient à dire que le morphisme canonique $f_E : U \to U(r,d)$ est l'inclusion. Nous donnons une autre démonstration d'un résultat de Ramanan [20] : si $n > 1$, il n'existe pas de fibré de Poincaré sur $U$ (théorème 5.5).

Ce résultat découle de l'étude des GL(q)-fibrés en droites sur $R^{ss}$. Si $L$ en est un, il existe un entier $k$ tel qu'en tout point $y$ de $R^{ss}$, l'action d'un élément t de $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}(q)$ soit la multiplication par $t^k$. Nous verrons que $k$ est toujours multiple de $n$ (proposition 5.1), et que l'existence d'un fibré de Poincaré sur $U$ entraînerait celle d'un $L$ pour lequel on aurait $k = 1$.

Notre méthode s'applique aussi aux variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ (et sans doute à d'autres cas aussi). Plus précisément, soient $r \geq 2$, $c_1$, $c_2$ des entiers, $M(r, c_1, c_2)$ la variété de modules des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$, $M_s(r, c_1, c_2)$ l'ouvert de $M(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux stables. On suppose que $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$. Posons

$$\chi \;=\; r - c_2 + \frac{c_1(c_1+3)}{2}$$

(c'est la caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$ sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$). Si $r$, $c_1$ et $\chi$ sont premiers entre eux, il existe un faisceau de Poincaré sur $M_s(r, c_1, c_2)$ (Maruyama [13], theorem 6.11). Dans les autres cas nous obtenons

**Théorème G :** *Si $r$, $c_1$ et $\chi$ ne sont pas premiers entre eux, et si $U$ est un ouvert non vide de $M_s(r, c_1, c_2)$, il n'existe pas de faisceau de Poincaré sur $U$.*

### 0.5 – Le cas $g = 2$, $r = 2$ et $d$ pair

Dans ce cas il existe une description explicite dc $U(r, d)$ et $U(r, L)$ permettant de prouver les théorèmes A à F (cf. [18]).

Le premier auteur remercie le National Board for Higher Mathematics pour l'avoir invité à passer quelques semaines en Inde, durant lesquelles ce travail a été commencé. Le second auteur remercie le DFG et l'université de Kaiserslautern pour leur hospitalité pendant la réalisation de cet article.

*Définitions et notations*

Si $X_1, \ldots, X_p$ sont des ensembles, on notera $p_{X_i}$ la projection $X_1 \times \cdots \times X_p \to X_i$.

Si $f : S' \to S$ est un morphisme de variétés algébriques, et $F$ un faisceau cohérent sur $S \times X$, on posera $f^\#(F) = (f \times I_X)^*(F)$.

Soient $G$ un groupe algébrique et $Y$ une variété algébrique sur laquelle $G$ opère algébriquement. Un $G$-fibré sur $Y$ est un fibré vectoriel algébrique sur $Y$ sur lequel $G$ opère linéairement et algébriquement, au dessus de l'action de $G$ sur $Y$.

Si $E = Y \times \mathbb{C}^r$ est un fibré trivial, l'action de $G$ sur $E$ triviale sur les fibres est par définition l'action produit sur $Y \times \mathbb{C}^r$, $\mathbb{C}^r$ étant muni de l'action triviale de $G$.

Soit E un faisceau cohérent sur une variété algébrique projective $Y$. S'il n'y a pas d'ambigüité, on posera

$$H^i(E) \;=\; H^i(Y, E) \quad \text{et} \quad h^i(E) \;=\; \dim_{\mathbb{C}}(H^i(Y, E))$$

pour tout entier $i$.

Soit $m$ un entier tel que $m \geq 1$. On notera $m.E$ le faisceau $E \oplus \cdots \oplus E$, somme directe de $m$ copies de $E$.

Soient $Y$ une variété algébrique et $H$ un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(Y)$. Soit $L$ un fibré en droites sur Y. Nous dirons pour simplifier que $\mathrm{Pic}(Y)$ est isomorphe à $H \oplus \mathbb{Z}L$ si le morphisme

$$i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y)$$

$$m \longrightarrow L^m$$

est injectif, et si on a $\mathrm{Pic}(Y) = H \oplus \mathrm{im}(i)$.

## 1. Préliminaires

### 1.1 – Variétés de modules de fibrés semi-stables

*1.1.1 – Fibrés stables et fibrés semi-stables.* Soit $E$ un fibré vectoriel non nul sur $X$. On pose

$$\mu(E) \;=\; \frac{\deg(E)}{\mathrm{rg}(E)} \ ,$$

qu'on appelle la *pente* de $E$. On dit que $E$ est *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout sous-fibré propre $F$ de $E$ on a

$$\mu(F) \;\leq\; \mu(E) \quad (\text{resp.} \ < ) \ .$$

*1.1.2 – Variétés de modules.* Soient $r$, $d$ des entiers, avec $r \geq 1$. On a défini dans l'Introduction les familles de fibrés semi-stables de rang $r$ et de degré $d$ paramétrées par une variété algébrique $S$, ainsi que la notion d'équivalence de telles familles, et le foncteur $F(r,d)$. La variété de modules $U(r,d)$ est définie (à isomorphisme près) par les deux propriétés suivantes :

(i) Il existe un morphisme de foncteurs :

$$\Psi : F(r,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, U(r,d)) \ ,$$

donc à toute famille $E$ de fibrés semi-stables sur $X$ de rang $r$ et de degré $d$ paramétrée par $S$ on associe un morphisme

$$f_E : S \longrightarrow U(r,d) \ ,$$

et $f_E$ ne dépend que de la classe d'équivalence de $E$.

(ii) Si $M$ est une variété algébrique, et

$$\Psi' : F(r,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, M)$$

un morphisme de foncteurs, il existe un unique morphisme

$$f : U(r,d) \longrightarrow M$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(r,d) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\Psi'"'] & \mathrm{Hom}(\bullet, U(r,d)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\bullet,f)"] \\ & \mathrm{Hom}(\bullet, M) \end{tikzcd}$$

La variété $U(r,d)$ est projective, normale et irréductible.

*1.1.3 – Filtration de Jordan-Hölder.* Soit $E$ un fibré semi-stable sur $X$. Il existe une filtration de $E$ par des sous-fibrés vectoriels

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_p = E$$

telle que pour $1 \leq i \leq p$, $E_i/E_{i-1}$ soit stable et de même pente que $E$. Une telle filtration n'est pas en général unique, mais la classe d'isomorphisme du gradué $\bigoplus_{1\leq i\leq p} E_i/E_{i-1}$ l'est. La filtration précédente est une *filtration de Jordan-Hölder* de $E$, et on note

$$\mathrm{Gr}(E) \;=\; \bigoplus_{1\leq i\leq p} E_i/E_{i-1}\ .$$

Deux fibrés semi-stables $E$, $E'$ sont dits *équivalents* si $\mathrm{Gr}(E) \simeq \mathrm{Gr}(E')$. Les points fermés de $U(r,d)$ s'identifient naturellement aux classes d'équivalence de fibrés semi-stables sur $X$ de rang $r$ et de degré $d$. En particulier, les classes d'isomorphisme de fibrés stables de rang $r$ et de degré $d$ sur $X$ constituent un ouvert $U_s(r,d)$ de $U(r,d)$. Cet ouvert est non vide et lisse. Si $r$ et $d$ sont premiers entre eux, les notions de stabilité et de semi-stabilité sont équivalentes, donc $U(r,d) = U_s(r,d)$ est une variété lisse. Si $r$ et $d$ ne sont pas premiers entre eux, l'ouvert des points lisses de $U(r,d)$ est réduit à $U_s(r,d)$ sauf dans l'exception mentionnée dans l'Introduction.

*1.1.4 – Construction de U(r,d).* Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un fibré en droites très ample sur $X$. Il existe un entier $m_0$ tel que pour tout entier $m \geq m_0$ et tout fibré semi-stable $E$ de rang $r$ et de degré $d$ sur $X$, $E(m) = E \otimes \mathcal{O}_X(m)$ soit engendré par ses sections, et $h^1(E(m)) = 0$. On pose, si $m \geq m_0$,

$$q \;=\; h^0(E(m)) \;=\; d + r.\deg(\mathcal{O}_X(1))m + r(1-g)\ ,$$

et soit $P$ le polynôme

$$d + r(1-g) + r.\deg(\mathcal{O}_X(1).T\ .$$

Soit

$$R \;=\; \mathrm{Quot}_P(\mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^q)\ .$$

Rappelons que c'est la variété projective représentant le foncteur

$$\Psi_0 : \text{Variétés algébriques} \longrightarrow \text{Ensembles}$$

associant à $S$ l'ensembles des classes d'isomorphisme de morphismes surjectifs de faisceaux sur $S \times X$

$$p_X^*(\mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^q) \longrightarrow E\ ,$$

où $E$ est plat sur $S$, et où pour tout point fermé $s$ de $S$, $E_s$ a pour polynôme de Hilbert $P$ relativement à $\mathcal{O}_X(1)$ (deux tels morphismes $f : p_X^*(\mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^q) \longrightarrow E$ et $f' : p_X^*(\mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^q) \longrightarrow E'$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\phi : E \to E'$ tel qu'on ait $f' = \phi\circ f$). Il existe un morphisme surjectif "universel"

$$\theta : p_X^*(\mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^q) \longrightarrow \mathbb{F}_0$$

sur $R \times X$ (cf. [6]), On note $R^{ss}$ (resp. $R^s$) l'ouvert des points $y$ de $R$ tels que

$$\theta_y : \mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{F}_{0y}$$

induise un isomorphisme

$$\mathbb{C}^q \;\simeq\; H^0(\mathbb{F}_{0y}(m))\ ,$$

et que $\mathbb{F}_{0y}$ soit semi-stable (resp. stable). C'est un ouvert lisse de $R$. De la restriction de $\mathbb{F}_0$ à $R^{ss} \times X$ on déduit un morphisme

$$\pi = f_{\mathbb{F}_0} : R^{ss} \longrightarrow U(r,d) \ .$$

Le groupe $\mathrm{PGL}(q)$ agit de façon naturelle sur $R^{ss}$, et on peut montrer que si $m$ est assez grand, $\pi$ est un bon quotient de $R^{ss}$ par $\mathrm{PGL}(q)$, tandis que la restriction de $\pi : R^s \to U(r,d)$ est un quotient géométrique (cf. par exemple [23]). On supposera toujours dans la suite que $m$ est assez grand pour que les propriétés précédentes soient vérifiées.

De l'action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur $R^{ss}$ on déduit une action de $\mathrm{GL}(q)$. Si $y$ est un point fermé de $R^{ss}$, le stabilisateur de $y$ dans $\mathrm{GL}(q)$ s'identifie naturellement au groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_{0y}$.

## 2. Descente de fibrés vectoriels

Soit $Y$ une variété algébrique intègre sur laquelle opère algébriquement un groupe algébrique réductif $G$. On suppose qu'il existe un bon quotient $\pi : Y \to M$ (cf. [15], [19]).

**Lemme 2.1 :** *Soit $y$ un point fermé de $Y$. Il existe une unique orbite fermée de $Y$ contenue dans $\overline{Gy}$. Cette orbite fermée est aussi la seule qui soit contenue dans $\pi^{-1}(\pi(y))$.*

*Démonstration.* Existence : Il suffit de prendre une orbite de dimension minimale dans $\overline{Gy}$.

Unicité : Soient $\Gamma_1, \Gamma_2$ deux orbites fermées de $Y$ contenues dans $\pi^{-1}(\pi(y))$. Alors on a $\pi(\Gamma_1) = \pi(\Gamma_2) = \{\pi(y)\}$, donc puisque $\pi$ est un bon quotient, et $\Gamma_1, \Gamma_2$ fermées, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est non vide. Donc $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Ceci démontre le lemme 2.1. □

Pour tout fibré vectoriel algébrique $E$ sur $M$, le fibré $\pi^*(E)$ est muni d'une structure naturelle de $G$-fibré vectoriel sur $Y$. Si $F$ est un $G$-fibré vectoriel sur $Y$, on dit que $F$ *descend à* $M$ s'il existe un fibré vectoriel $E$ sur $M$ tel que les $G$-fibrés $F$ et $\pi^*(E)$ soient isomorphes.

**Lemme 2.2 :** *Soit $F$ un $G$-fibré vectoriel de rang $r$ sur $Y$. Alors $F$ descend à $M$ si et seulement si pour tout point fermé $m$ de $M$ il existe un voisinage $U$ de $m$ et un $G$-isomorphisme*

$$F_{|\pi^{-1}(U)} \ \simeq \ r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)} \ ,$$

*l'action de $G$ sur $r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}$ étant triviale sur les fibres.*

*Démonstration.* Nécessité : On prend pour $U$ un voisinage de m tel que $E_{|U}$ soit trivial.

Suffisance : Supposons la condition du lemme réalisée. Il existe alors un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de $M$ tel que pour tout $i$ dans $I$ il existe un $G$-isomorphisme

$$f_i : F_{|\pi^{-1}(U_i)} \xrightarrow{\simeq} r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U_i)} \ ,$$

Posons

$$g_{ij} = f_j \circ f_i^{-1} : r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U_i\cap U_j)} \xrightarrow{\simeq} r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U_i\cap U_j)} \ .$$

Les $g_{ij}$ sont des isomorphismes $G$-invariants et définissent donc des isomorphismes

$$\overline{g}_{ij} : r\mathcal{O}_{U_i\cap U_j} \longrightarrow r\mathcal{O}_{U_i\cap U_j} \ .$$

Les $\overline{g}_{ij}$ constituent une famille de cocycles définissant un fibré vectoriel $E$ sur $M$ tel que $\pi^*(E)$ soit isomorphe à $F$. Ceci démontre le lemme 2.2. $\square$

**Théorème 2.3** (Lemme de descente) : *Soit $F$ un $G$-fibré vectoriel sur $Y$. Alors $E$ descend à $M$ si et seulement si pour tout point fermé $y$ de $Y$ tel que $Gy$ soit fermée, le stabilisateur de $y$ dans $G$ agit trivialement sur $F_y$.*

Ce résultat est dû à Kempf. Nous en avions précédemment une version plus compliquée, limitée au cas où $F$ est de rang 1, avec plus de conditions à vérifier sur le fibré $F$. Cette version s'inspirait de [1], prop. 2.3.

*Démonstration.* Si $F$ descend à $M$, il est immédiat que le stabilisateur de tout point de $Y$ agit trivialement sur la fibre de $F$ en ce point.

Réciproquement, supposons que $F$ possède la propriété du théorème 2.3. Soit $y$ un point fermé de $Y$. D'après le lemme 2.2, il faut montrer qu'il existe un ouvert $U$ de $M$ contenant $\pi(y)$ et un isomorphisme

$$s : r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)} \xrightarrow{\simeq} F_{|\pi^{-1}(U)}$$

$G$-invariant, c'est à dire tel que pour tout point $y'$ de $\pi^{-1}(U)$ et tous $v$ dans $r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U),y'}$, $g$ dans $G$, on ait $s(gv) = gs(v)$. Il revient au même de trouver $r$ sections $G$-invariantes

$$s_i : \mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)} \longrightarrow F_{|\pi^{-1}(U)}$$

qui engendrent $F_{|\pi^{-1}(U)}$. Soit $C = Gz$ l'unique orbite fermée de $Y$ contenue dans $\pi^{-1}(\pi(y))$. Montrons qu'il existe $r$ sections $G$-invariantes

$$\sigma_i : \mathcal{O}_C \longrightarrow F_C$$

engendrant $F_{|C}$ : soient $u_1, \ldots, u_r$ une base de $F_z$, et $G_z$ le stabilisateur de $z$ dans $G$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} g \arrow[d, mapsto] & G \arrow[r, "g\mapsto gu_i"] \arrow[d] & F_{|C} \arrow[d, "\text{projection}"] \\ gz & C \arrow[r, equal] & C \end{tikzcd}$$

Puisque $G_z$ agit trivialement sur $F_z$ on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G/G_z \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & F_{|C} \arrow[d] \\ C \arrow[r, equal] & C \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\phi$ est un isomorphisme. On en déduit

$$\psi\circ\phi^{-1} : C \longrightarrow F_{|C}$$

qui définit la section $G$-invariante $\sigma_i$ de $F_{|C}$. Il est immédiat que ces sections engendrent $F_{|C}$.

Soit $V$ un ouvert affine de $M$ contenant $\pi(y)$. Puisque $\pi$ est un bon quotient, $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert affine de $Y$, qui contient $C$. On considère l'action de $G$ sur $H^0(\pi^{-1}(V),F)$ : $(g,s)\to g.s$, où $g.s(y')=gs(g^{-1}y')$ pour tout $y'$ dans $\pi^{-1}(V)$. Les éléments $G$-invariants de $H^0(\pi^{-1}(V),F)$ sont précisément les sections $G$-invariantes de $F_{|\pi^{-1}(V)}$.

Montrons qu'il existe un opérateur de Reynolds

$$R : H^0(\pi^{-1}(V),F) \longrightarrow H^0(\pi^{-1}(V),F)^G$$

bien que $H^0(\pi^{-1}(V),F)$ ne soit pas de dimension finie. Pour cela il suffit de vérifier que dans $H^0(\pi^{-1}(V),F)$, chaque $G$-orbite est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour cela, on considère un ouvert dense affine $V_0$ de $\pi^{-1}(V)$ sur lequel $F$ est trivial. Soit $s\in H^0(\pi^{-1}(V),F)$. Le morphisme

$$\begin{array}{ccc} G\times V_0 & \longrightarrow & F_{|V_0}\simeq r\mathcal{O}_{V_0} \\ (g,v_0) & \longmapsto & gs(g^{-1}v_0) \end{array}$$

peut être vu comme une fonction régulière

$$f : G\times V_0 \longrightarrow \mathbb{C}^r\ .$$

Puisque $\mathbb{C}[G\times V_0]\simeq\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[V_0]$, on peut mettre $f$ sous la forme

$$f\ =\ \sum_{1\leq i\leq p}\phi_i\otimes\psi_i\ ,$$

où pour $1\leq i\leq p$, $\phi_i : G\to\mathbb{C}$, $\psi_i : V_0\to\mathbb{C}^r$ sont des morphismes. Alors $G.s_{|V_0}$ est contenu dans le sous-espace vectoriel de $H^0(V_0,F)$ engendré par $\psi_1,\ldots,\psi_p$, et $Gs$ est contenu dans l'intersection de ce sous-espace avec $H^0(\pi^{-1}(V),F)$. On a donc prouvé l'existence de $R$.

On a de même un opérateur de Reynolds

$$R' : H^0(C,F)\longrightarrow H^0(C,F)^G\ .$$

Soit $\alpha : r\mathcal{O}_C\to F_{|C}$ un isomorphisme $G$-invariant, dont l'existence a été prouvée précédemment. Soient

$$\alpha_i : \mathcal{O}_C\longrightarrow F_{|C}\ ,\quad 1\leq i\leq r\ ,$$

les restrictions de $\alpha$ aux facteurs directs de $r\mathcal{O}_C$. Puisque $\pi^{-1}(C)$ est une sous-variété fermée de la variété affine $\pi^{-1}(V)$, $\alpha_i$ admet un prolongement

$$\overline{\alpha}_i : \mathcal{O}_{\pi^{-1}(V)}\longrightarrow F_{|\pi^{-1}(V)}\ ,$$

qui est une section non nécessairement $G$-invariante. Mais $R(\overline{\alpha}_i)$ l'est, et $R(\overline{\alpha}_i)_{|C}=\alpha_i$ par fonctorialité de l'opérateur de Reynolds. On pose

$$\overline{\alpha}\ =\ (R(\overline{\alpha}_1),\ldots,R(\overline{\alpha}_p)) : r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(V)}\longrightarrow F_{|\pi^{-1}(V)}\ ,$$

qui est un morphisme $G$-invariant qui prolonge $\alpha$.

Il reste à prouver que l'ouvert $W$ de $\pi^{-1}(V)$ des points au dessus desquels $\overline{\alpha}$ est un isomorphisme contient un ouvert de la forme $\pi^{-1}(U)$, $U$ étant un ouvert de $M$ contenant $\pi(y)$. Les fermés $\pi^{-1}(V)\backslash W$ et $C$ de $\pi^{-1}(V)$ sont G-invariants et disjoints, donc puisque la restriction de $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ est un bon quotient, $\pi(\pi^{-1}(V)\backslash W)$ et $\pi(C) = \{\pi(y)\}$ sont des fermés disjoints de $V$. Il suffit de prendre

$$U = V\backslash\pi(\pi^{-1}(V)\backslash W) .$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.3. □

**Remarque :** Le fibré vectoriel $E$ sur $M$ tel que les $G$-fibrés vectoriels $\pi^*(E)$ et $F$ soient isomorphes est unique à isomorphisme près, car il découle aisément du lemme 2.2 que la projection $\pi^*(E) \to E$ est un bon quotient par $\mathrm{PGL}(q)$. On a donc $E = F/\mathrm{PGL}(q)$.

## 3. Groupe de Picard de $F(r,d)$ et $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur $R^{ss}$

### 3.1 – Définitions

**Définition 1.** Un *fibré en droites $L$ sur $F(r,d)$* est défini par la donnée de

(i) Pour toute famille $F$ de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par une variété lisse $S$, d'un fibré en droites $L_F$ sur $S$, ne dépendant que de la classe d'équivalence de $F$.

(ii) Pour tout morphisme $f : S' \to S$ de variétés lisses, d'un isomorphisme

$$\alpha_F^L(f) : L_{f\#(F)} \xrightarrow{\simeq} f^*(L_F)$$

ne dépendant que de la classe d'équivalence de $F$, tel que si $g : S'' \to S'$ est un autre morphisme de variétés lisses, on ait

$$\alpha_F^L(f \circ g) = \alpha_{f\#(F)}^L(g) \circ g^*(\alpha_F^L(f)) ,$$

(en particulier $\alpha_F^L(I_S) = I_{L_F}$).

**Définition 2.** Soient $L, L'$ des fibrés en droites sur $F(r,d)$. Un *isomorphisme* $L \simeq L'$ est la donnée, pour toute famille $F$ de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par une variété lisse $S$, d'un isomorphisme

$$\sigma_F : L_F \xrightarrow{\simeq} L'_F$$

ne dépendant que de la classe d'équivalence de $F$, tel que si $f : S' \to S$ est un morphisme de variétés lisses, on ait

$$\sigma_{f\#(F)} = \alpha_F^{L'}(f) \circ f^*(\sigma_F) \circ \alpha_F^L(f)^{-1} .$$

**Définition 3.** Les classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur $F(r,d)$ constituent de façon évidente un groupe commutatif, appelé *groupe de Picard de* $F(r,d)$, et noté $\mathrm{Pic}(F(r,d))$.

Soit $L_0$ un fibré en droites sur $U(r,d)$. On en déduit un fibré en droites $L$ sur $F(r,d)$ défini par $L_F = f_F^*(L_0)$, pour toute famille $F$ de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par une variété lisse, les $\alpha_F^L(f)$ étant définis de manière évidente. On obtient ainsi un morphisme de groupes

$$i : \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d)) .$$

**Définition 4.** On dit qu'un élément de $Pic(F(r,d))$ *provient de* $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ s'il est dans l'image de $i$.

**3.2 – Groupe de Picard de $F(r,d)$ et $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur $R^{ss}$ et $R^s$**

Soit

$$\eta : R^{ss}\times \mathrm{PGL}(q) \longrightarrow R^{ss}\times \mathrm{PGL}(q)$$

$$(y,g) \longmapsto (gy,g)$$

**Lemme 3.1 :** *Les familles $\eta^{\#}(p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0))$ et $p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)$ de fibrés de $U(r,d)$ paramétrées par $R^{ss}\times \mathrm{PGL}(q)$ sont équivalentes.*

*Démonstration.* Il est clair que pour tout point $y$ de $R^{ss}$ et tout $g\in \mathrm{PGL}(q)$, on a un isomorphisme

$$\eta^{\#}(p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0))_{|(y,g)\times X} \;\simeq\; p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)_{|(y,g)\times X} \ .$$

Il en découle. par simplicité des fibrés stables, que

$$p_{(R^{ss}\times\mathrm{PGL}(q))*}\big(\mathcal{H}om(\eta^{\#}(p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)), p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)\big)_{|R^s\times \mathrm{PGL}(q)}$$

est un fibré en droites $L$ sur $R^s\times \mathrm{PGL}(q)$. On a donc un isomorphisme

$$p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)_{|R^s\times\mathrm{PGL}(q)\times X} \;\simeq\; p^*_{R^s}(L)\otimes \eta^{\#}(p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0))_{|R^s\times\mathrm{PGL}(q)\times X} \ .$$

Puisque $R^{ss}$ est lisse, $L$ se prolonge en un fibré en droites sur $R^{ss}\times \mathrm{PGL}(q)$, aussi noté $L$. Puisque $\mathrm{codim}_{R^{ss}}(R^{ss}\backslash R^s)\geq 2$, l'isomorphisme précédent se prolonge à $R^{ss}\times\mathrm{PGL}(q)\times X$. Ceci démontre le lemme 3.1. □

Soit $L$ un fibré en droites sur $F(r,d)$. On déduit du lemme 3.1 un isomorphisme

$$\eta^*(p^*_{R^{ss}}(L_{\mathbb{F}_0})) \;\simeq\; p^*_{R^{ss}}(L_{\mathbb{F}_0}) \ .$$

Cet isomorphisme définit une structure de $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur $L_{\mathbb{F}_0}$ (cela découle de la définition 1 (ii)).

On note $\mathrm{Pic}^G(R^{ss})$ le groupe des classes d'isomorphisme de $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur $R^{ss}$. On a donc obtenu un morphisme de groupes

$$\mathrm{Pic}(F(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(R^{ss}) \ .$$

**Lemme 3.2 :** *Le morphisme d'oubli* $\mathrm{Pic}^G(R^{ss})\longrightarrow \mathrm{Pic}(R^{ss})$ *est injectif.*

*Démonstration.* Soit $L$ un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites, trivial comme fibré en droites. Il faut montrer qu'il est aussi trivial comme $\mathrm{PGL}(q)$-fibré. Fixons un isomorphisme $L\simeq \mathcal{O}_{R^{ss}}$. Montrons que l'action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur $L$ est triviale. Une action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur $R^{ss}\times\mathbb{C}$ provient d'un "morphisme croisé", c'est à dire d'un morphisme

$$\chi : \mathrm{PGL}(q)\times R^{ss}\longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tel que

$$(*) \qquad \chi(gg', y) \;=\; \chi(g, g'y)\chi(g', y)$$

pour tous $g, g'$ dans $\mathrm{PGL}(q)$ et $y$ dans $R^{ss}$ (on a alors $g.(y,t) = (gy, \chi(g,y)t)$). Les seules fonctions régulières inversibles sur PGL(q) sont les constantes, donc $\chi(g,y)$ est une fonction de $y$ seulement : $\chi(g,y) = \chi_0(y)$. La relation (*) s'écrit alors

$$\chi_0(y) \;=\; \chi_0(g'y)\chi_0(y) \;,$$

d'où $\chi_0 = 1$, et $\chi = 1$. L'action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur $L$ est donc bien triviale. Ceci démontre le lemme 3.2. □

**Proposition 3.3 :** *Le morphisme de groupes*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(F(r,d)) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(R^{ss}) \\ L & \longmapsto & L_{\mathbb{F}_0} \end{array}$$

*est injectif.*

*Démonstration.* Soit $L$ un fibré en droites sur $F(r,d)$ tel que $L_{\mathbb{F}_0} \simeq \mathcal{O}_{R^{ss}}$. Soient $S$ une variété lisse, et $F$ une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $S$. Montrons qu'on a un isomorphisme canonique

$$u_F : L_F \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_S \;.$$

Le faisceau cohérent $W = p_{S*}(F \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m)))$ est localement libre de rang $q$. Soient $z \in S$ et $U_z$ un voisinage de $z$ tel qu'on ait une trivialisation

$$\beta_z : W_{|U_z} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{U_z} \otimes \mathbb{C}^q \;.$$

On a un morphisme canonique surjectif

$$p_S^*(W) \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(-m)) \longrightarrow F \;,$$

et en utilisant la trivialisation $\beta_z$, on obtient un morphisme surjectif

$$p_X^*(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q) \longrightarrow F_{U_z \times X} \;.$$

On en déduit un morphisme

$$f_z : U_z \longrightarrow R^{ss} \;,$$

et un isomorphisme $f_z^{\#}(\mathbb{F}_0) \simeq F_{|U_z \times X}$. On obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L_{F|U_z} \simeq L_{(F_{|U_z \times X})} \arrow[r, "\alpha^L_{(F_{|U_z \times X})}"] \arrow[ddr, "\lambda_z"'] & f_z^*(L_{\mathbb{F}_0}) \arrow[d, "\simeq"] \\ & f_z^*(\mathcal{O}_{R^{ss}}) \arrow[d, equal] \\ & \mathcal{O}_{U_z} \end{tikzcd}$$

On va montrer que $\lambda_z$ est indépendant de la trivialisation $\beta_z$. Supposons qu'on ait une autre trivialisation

$$\beta'_z : W_{|U_z} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{U_z} \otimes \mathbb{C}^q \;.$$

On en déduit $f'_z : U_z \to R^{ss}$ et $\lambda'_z : L_{F|U_z} \to \mathcal{O}_{U_z}$. La trivialisation $\beta'_z$ est la multiplication de $\beta_z$ et d'un morphisme $\epsilon : U_z \to \mathrm{PGL}(q)$ : pour tout $y \in U_z$ on a

$$\beta'_{z,y} \ = \ \epsilon(y) \circ \beta_{z,y} \ .$$

Il en découle que $f'_z(y) = \epsilon(y).f_z(y)$. On a, pour tout $t \in L_{F,y}$, $\lambda'_z(t) = \epsilon(y).\lambda_z(t)$, (où $\lambda_z(t)$, $\lambda'_z(t)$ sont vus respectivement comme éléments de $L_{\mathbb{F}_0, f_z(y)}$, $L_{\mathbb{F}_0, f'_z(y)}$). Comme l'action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur $L_{\mathbb{F}_0}$ est triviale d'après le lemme 3.2, on a $\lambda'_z(t) = \lambda_z(t)$ (comme nombres complexes). Il en découle que les isomorphismes $\lambda_z$ se recollent et en définissent un

$$u_F : L_F \longrightarrow \mathcal{O}_S \ .$$

Il reste à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec les $\alpha^L_F$, c'est à dire que si $f : S' \to S$ est un morphisme de variétés lisses, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
L_{f\#(F)} \arrow[r, "u_{f\#(F)}"] \arrow[d, "\alpha^L_F(f)"] & \mathcal{O}_{S'} \arrow[d, "\simeq"] \\
f^*(L_F) \arrow[r, "f^*(u_F)"] & f^*(\mathcal{O}_S)
\end{tikzcd}$$

Pour cela, il suffit de montrer que tout point de $S$ possède un voisinage $U$ tel que ce qui précède soit vrai si on remplace $S$, $S'$ par $U$, $f^{-1}(U)$ respectivement, et $F$ par sa restriction à $U$. On choisit $U = U_z$, avec les notations précédentes. Si

$$W' \ = \ p_{S'*}(f^{\#}(F) \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m))) \ ,$$

on déduit de $\beta_z$ une trivialisation de $W'_{|f^{-1}(U)}$ et un morphisme $\lambda' : f^{-1}(U) \to R^{ss}$ tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(U) \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "f"] & R^{ss} \arrow[d, equal] \\
U \arrow[r, "\lambda"] & R^{ss}
\end{tikzcd}$$

d'où, d'après la définition de $u_F$, $u_{f\#(F)}$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
L_{f\#(F)|f^{-1}(U)} \arrow[r, "u_{f\#(F)|f^{-1}(U)}"] \arrow[d, "\alpha^L_F(f)_{|f^{-1}(U)}"] & \mathcal{O}_{f^{-1}(U)} \arrow[d, equal] \\
f^*(L_{F|f^{-1}(U)}) \arrow[r, "f^*(u_{F|f^{-1}(U)})"] & \mathcal{O}_{f^{-1}(U)}
\end{tikzcd}$$

Ceci démontre la proposition 33. □

**Corollaire 3.4 :** *Le morphisme de groupes*

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}(F(r,d)) &\longrightarrow \mathrm{Pic}(R^s) \\ L &\longmapsto L_{\mathbb{F}_0|R^s} \end{aligned}$$

*est injectif.*

*Démonstration.* Cela découle immédiatement de la proposition 3.3 et du fait que $\mathrm{codim}_{R^{ss}}(R^{ss}\backslash R^s) \geq 2$. □

Rappelons (cf. §2) que si $L$ est un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur $R^{ss}$, on dit que $L$ descend à $U(r,d)$ s'il existe un fibré en droites $L_0$ sur $U(r,d)$ tel que les $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés $L$ et $\pi^*(L_0)$ soient isomorphes. Voici une autre conséquence immédiate de la proposition 3.3 :

**Corollaire 3.5 :** *Soit $L$ un élément de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$. Alors $L$ provient de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ si et seulement si $L_{\mathbb{F}_0}$ descend à $U(r,d)$. Si $L_0$ est l'unique élément de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ tel que $L_{\mathbb{F}_0} \simeq \pi^*(L_0)$, on a $L = i(L_0)$.*

### 3.3 – Exemples fondamentaux d'éléments de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$

Soit $K(X)$ le groupe de Grothendieck de $X$. On sait que le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} K(X) &\longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\longmapsto (\det(\alpha), \mathrm{rg}(\alpha)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On note comme dans l'Introduction $H(r,d)$ le sous-groupe de $K(X)$ constitué des $\alpha$ tels que $\chi([E]\otimes\alpha) = 0$, pour un fibré $E$ de rang $r$ et de degré $d$ sur $X$. Cela signifie que

$$rg(\alpha)d + \deg(\alpha)r + \mathrm{rg}(\alpha)r(1-g) \ = \ 0 \ .$$

En particulier, $H(r,d)$ contient tous les $\alpha$ de rang et degré nuls. Ceux-ci constituent un sous-groupe $Z$ de $K(X)$, isomorphe à $\mathrm{Pic}^{(0)}(X)$, l'isomorphisme étant

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}^{(0)}(X) &\longrightarrow Z \\ L &\longmapsto [L_0 \otimes L] - [L_0] \ , \end{aligned}$$

($L_0$ étant un fibré en droites sur $X$ fixé, l'isomorphisme ci-dessus est indépendant du choix de $L_0$).

Soit $\alpha \in H(r,d)$. On va en déduire un élément $\gamma(\alpha)$ de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$. Si $S$ est une variété algébrique lisse, et $F$ une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $S$, on aura

$$\gamma(\alpha)_F \ = \ \det(p_{S!}(F \otimes p_X^*(\alpha))) \ .$$

Vérifions tout de suite que $\gamma(\alpha)_F$ ne dépend que de la classe d'équivalence de $F$. Soit $L$ un fibré en droites sur $S$. Alors on a

$$\gamma(\alpha)_{F\otimes p_S^*(L)} \ = \ \gamma(\alpha)_F \otimes L^{\chi(F_s\otimes\alpha)} \ ,$$

($s$ étant un point fermé quelconque de $S$). Puisque $\alpha \in H(r,d)$, on a $\chi(F_s\otimes\alpha) = 0$. donc $\gamma(\alpha)_{F\otimes p_S^*(L)} = \gamma(\alpha)_F$.

On ne peut pas déduire de $\alpha$ un fibré en droites sur $F(r,d)$, mais un élément de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$. Pour obtenir un fibré en droites $L$ sur $F(r,d)$, on considère une représentation de $\alpha$ sous la forme

$$\alpha \ = \ [E_1] - [E_2] \ ,$$

$E_1, E_2$ étant des fibrés vectoriels sur $X$. On pose

$$L_F \ = \ \det(p_{S!}(F \otimes p_X^*(E_1))) \otimes \det(p_{S!}(F \otimes p_X^*(E_2)))^{-1} \ .$$

Les $\alpha_F^L(f)$ sont définis de manière évidente, et il est aisé de voir que pour des choix différents de $E_1$, $E_2$ (donnant le même $\alpha$), on obtient un fibré en droites sur $F(r,d)$ isomorphe à $L$. Par définition $\gamma(\alpha)$ est la classe d'isomorphisme de $L$.

**Remarque :** Avec les notations précédentes, supposons $S$ seulement intègre. Alors il est facile de voir que $p_{S!}(F \otimes p_X^*(\alpha))$ est contenu dans le sous-groupe de $K(S)$ engendré par les classes des faisceaux localement libres. En utilisant ce fait, on peut donner une définition de $\gamma(\alpha)_F$ dans ce cas aussi. Nous nous sommes limités au cas des variétés lisses pour alléger l'exposé.

**Exemple :** Le cas $r = 1$. Les définitions précédentes s'appliquent aussi dans le cas où $r = 1$. Pour tout $\alpha \in Z$, $\gamma(\alpha)$ provient de $\mathrm{Pic}(U(1,d)) = \mathrm{Pic}(J^{(d)})$, et on peut ainsi considérer $Z = \mathrm{Pic}^{(0)}(X)$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ (cf. [12]).

### 3.4 – Effets de la torsion par un fibré en droites

Soient $k$ un entier et $L_0$ un fibré en droites sur $X$ de degré $k$. On a un isomorphisme

$$U(r,d) \xrightarrow{\phi} U(r, d+kr)$$

associant à la classe d'équivalence de $E$ celle de $E \otimes L_0$. Pour tout fibré en droites $L$ de degré $d$ sur $X$, cet isomorphisme en induit un

$$U(r,L) \longrightarrow U(r, L \otimes L_0^r) \ .$$

L'isomorphisme $\phi$ est compatible avec un isomorphisme évident de foncteurs

$$F(r,d) \longrightarrow F(r, d+kr) \ .$$

On a un automorphisme de groupes

$$\begin{aligned} K(X) &\longrightarrow K(X) \\ \alpha &\longmapsto \alpha \otimes [L_0^{-1}] \ , \end{aligned}$$

induisant un isomorphisme $H(r,d) \to H(r,d+kr)$. Il est immédiat qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H(r,d) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(F(r,d)) \arrow[d] \\ H(r,d+kr) \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Pic}(F(r,d+kr)) \ . \end{tikzcd}$$

Il en découle que pour prouver tous les résultats de l'Introduction, on peut supposer $d$ arbitrairement grand.

## 4. Étude des PGL($q$)-fibrés en droites sur $R^{(ss)}$

Le résultat suivant permet, à l'aide du lemme de descente (§2), de prouver que tout PGL($q$)-fibré en droites sur $R^{ss}$ descend à $U(r,d)$ :

**Proposition 4.1 :** *Soient $L$ un* PGL($q$)*-fibré en droites sur $R^{ss}$, et $y$ un point fermé de $R^{ss}$ tel que l'orbite* PGL($q$)$y$ *soit fermée. Alors le stabilisateur de $y$ dans* PGL($q$) *agit trivialement sur $L_y$.*

**Lemme 4.2 :** *Soit $y$ un point fermé de $R^{ss}$. Alors l'orbite* PGL($q$)$y$ *est fermée si et seulement si le fibré $\mathbb{F}_{0y}$ est isomorphe à une somme directe de fibrés stables.*

*Démonstration.* Soit $y \in R^{ss}$ tel qu'on ait une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \mathbb{F}_{0y} \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0 \ ,$$

$E_1$. $E_2$ étant des fibrés vectoriels de pente $\dfrac{d}{r}$. En utilisant des extensions de $E_2$ par $E_1$ on construit une famille $\mathcal{E}$ de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $\mathbb{C}$ telle que $\mathcal{E}_t = \mathbb{F}_{0y}$ si $t \neq 0$, et $\mathcal{E}_0 = E_1 \oplus E_2$. On en déduit que dans $\overline{\mathrm{PGL}(q)y}$ il existe un point $z$ tel que $\mathbb{F}_{0z} \simeq E_1 \oplus E_2$.

En raisonnant par récurrence on montre que dans l'adhérence de toute orbite il existe un point $z$ tel que $\mathbb{F}_{0z}$ soit isomorphe a une somme directe de fibrés stables. Le lemme 4.2 en découle aisément. $\square$

Démontrons maintenant la proposition 4.1. Soit $y$ un point de $R^{ss}$ tel que PGL($q$)$y$ soit fermée. D'après le lemme 4.1, $\mathbb{F}_{0y}$ est isomorphe à une somme directe de fibrés stables :

$$\mathbb{F}_{0y} \ \simeq \ m_1 E_1 \oplus \cdots \oplus m_p E_p \ ,$$

où pour $1 \leq i \leq p$, $m_i$ est un entier, $m_i \geq 1$, $E_i$ un fibré stable, et $E_i$ n'est pas isomorphe à $E_j$ si $i \neq j$.

Pour tout point $y'$ de $R^{ss}$, on note $G_{y'}$ le stabilisateur de $y'$ dans GL($q$). Alors $G_y$ est isomorphe à GL($m_1$) $\times \cdots \times$ GL($m_p$). L'action de $G_y$ sur $L_y$ est de la forme

$$\begin{aligned} G_y \times L_y &\longrightarrow L_y \\ (g,u) &\longmapsto \lambda(g)u \ , \end{aligned}$$

$\lambda$ étant un caractère de $G_y$ défini par des entiers $n_1, \ldots, n_p$ tels que

$$(*) \qquad m_1 n_1 + \cdots + m_p n_p \ = \ 0 \ ;$$

si $g = (g_1, \ldots, g_p) \in G_y = \mathrm{GL}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(m_p)$, on a

$$\lambda(g) \ = \ \prod_{1 \leq i \leq p} \det(g_i)^{n_i} \ ,$$

(l'équation (*) découle du fait que le sous-groupe des homothéties de GL($q$) agit trivialement sur $L$). Si $p = 1$, c'est à dire si $\mathbb{F}_{0y} \simeq m_1 E_1$, alors la proposition 4.1 est vraie, car le caractère $\lambda$ est trivial.

Il suffit de prouver l'assertion suivante : il existe une variété algébrique intègre $R_0$ et un morphisme $\phi : R_0 \to R^{ss}$ tels que :

(i) L'image de $\phi$ contient $y$.

(ii) L'image de $\phi$ contient un point $y_0$ tel qu'on ait un isomorphisme $\mathbb{F}_{0y_0} \simeq nE$, $E$ étant un fibré stable.

(iii) Pour tout point $y'$ de l'image de $\phi$, on a $G_y \subset G_{y'}$.

En effet, supposons cela vérifié. Alors les propriétés (i), (ii), (iii) sont encore vraies si on remplace l'image de $\phi$ par son adhérence $S$ qui est une sous-variété irréductible de $R^{ss}$, sur laquelle $G_y$ agit trivialement. A priori, l'action de $G_y$ sur $L_{|S}$ s'écrit

$$\begin{aligned} G_y \times L_{|S} &\longrightarrow L_{|S} \\ (g,u) &\longmapsto \lambda_{\alpha(u)}(g)u \ , \end{aligned}$$

où $\alpha : L_{|S} \to S$ est la projection, et pour tout $s \in S$, $\lambda_s$ est un caractère de $G_y$.

Montrons que pour $s \in S$, on a $\lambda_s = \lambda$. Soit $g \in G_y$. En prenant des trivialisations locales de $L_{|S}$, on voit que

$$\begin{aligned} \Psi : G_y \times L_{|S} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (g,u) &\longmapsto \lambda_{\alpha(u)}(g) \end{aligned}$$

est un morphisme. Puisque le groupe des caractères de $G_y$ est dénombrable, pour tout $g \in G_y$ la restriction de $\Psi$

$$\begin{aligned} \Psi : L_{|S} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ u &\longmapsto \lambda_{\alpha(u)}(g) \end{aligned}$$

prend une quantité dénombrable de valeurs, donc est constante. Le caractère $\lambda_s$ ne dépend donc pas du point $s$ de $S$, donc $\lambda_s = \lambda$.

On a vu que $G_{y_0}$ agit trivialement sur $L_{y_0}$, donc il en est de même de $G_y$ d'après (iii). Donc $\lambda$ est trivial, et $G_y$ agit trivialement sur $L_y$, ce qui démontre la proposition 4.1.

Il reste à trouver le morphisme $\phi : R_0 \to R^{ss}$. Un tel morphisme équivaut à la donnée d'un morphisme surjectif de faisceaux sur $R_0 \times X$ :

$$p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^q \xrightarrow{\theta'} \mathbb{E} \ ,$$

où $\mathbb{E}$ est une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $R_0$, tel qu'en tout point fermé z de $R_0$, $\theta'_z$ induise un isomorphisme $\mathbb{C}^q \simeq H^0(X, \mathbb{E}_z(m))$. La condition (iii) équivaut à la suivante : pour tout $g \in G_y$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^q \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "g"] & \mathbb{E} \arrow[d, "\simeq"] \\ p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^q \arrow[r, "\theta'"] & \mathbb{E} \end{tikzcd}$$

($g$ étant vu comme élément de $\mathrm{GL}(q)$).

On considère, pour $1 \leq i \leq p$, l'ouvert $R_i^{ss}$ du schéma de Grothendieck correspondant à $E_i$,

$$\theta_i : p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^{q_i} \longrightarrow \mathbb{F}_{0i}$$

le morphisme surjectif universel sur $R_i^{ss} \times Y$. Fixons des isomorphismes

$$\mathbb{C}^{q_i} \ \simeq \ H^0(E_i(m)) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p \ .$$

Alors du point $y$ on déduit un isomorphisme

$$\mathbb{C}^q \ \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq p} (\mathbb{C}^{q_i})^{m_i} \ \simeq \ \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathbb{C}^{m_i} \otimes \mathbb{C}^{q_i} \ .$$

On prend maintenant $R_0 = R_1^{ss} \times \cdots \times R_p^{ss}$, et $\theta'$ est la composée

$$p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^q \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq p} p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes (\mathbb{C}^{q_i})^{m_i} \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \left(p_{R_i^{ss}}^{\#}(\mathbb{F}_{0i})\right)^{m_i} \ ,$$

le second morphisme étant un produit des $\theta_i$. Il est immédiat que $\theta'$ vérifie bien les conditions requises. La proposition 4.1 est donc démontrée. □

**Corollaire 4.3 :** *Le morphisme canonique*

$$i : \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d))$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Cela découle immédiatement du corollaire 3.5, de la proposition 4.1 et du lemme de descente (théorème 2.3). □

## 5. Étude des GL($q$)-fibrés en droites sur $R^{ss}$

Rappelons que $n = \mathrm{PGCD}(r,d)$, et qu'un GL($q$)-fibré en droites sur $R^s$ est un fibré en droites algébrique sur $R^s$ muni d'une action algébrique linéaire de GL($q$) au dessus de l'action de PGL($q$) sur $R^s$.

Soit $L$ un GL($q$)-fibré en droites sur $R^s$. Alors il existe un entier $p$ tel que pour tout $y \in R^s$ et tout $t \in \mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}(q)$, l'action de $t$ sur $L_y$ soit la multiplication par $t^p$. On posera

$$e(L) \ = \ p \ .$$

Si $e(L) = 0$, $L$ est en fait un PGL($q$)-fibré en droites sur $R^s$.

**Proposition 5.1 :** *Soit $p$ un entier. Alors il existe un* GL($q$)*-fibré en droites $L$ sur $R^s$ tel que $e(L) = p$ si et seulement si $p$ est multiple de $n$.*

*Démonstration.* Soit $p$ un multiple de $n$ : $p = kn$. Montrons l'existence d'un GL($q$)-fibré en droites $L$ sur $R^s$ tel que $e(L) = p$. Il suffit de traiter le cas où $k = 1$, c'est à dire $p = n$, car si $L_0$ est un GL($q$)-fibré en droites sur $R^s$ tel que $e(L_0) = n$, il suffit de prendre $L = L_0^k$.

Considérons l'action de GL($q$) sur $\mathbb{F}_0$. L'action d'un scalaire $t$ sur une fibre de $\mathbb{F}_0$ est la multiplication par $t$. Il en est donc de même en ce qui concerne les GL($q$)-fibrés sur $R^s$

$$E_1 \ = \ p_{R^s *}(\mathbb{F}_0 \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m))) \ , \quad E_2 \ = \ p_{R^s *}(\mathbb{F}_0 \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m) \otimes \Lambda)) \ ,$$

($\Lambda$ étant un fibré en droites de degré 1 sur $X$). On a

$$\mathrm{rg}(E_1) \;=\; d + r(1-g+\deg(\mathcal{O}_X(1))m) \;, \quad \mathrm{rg}(E_2) \;=\; \mathrm{rg}(E_1) + r \;,$$

donc $\mathrm{PGCD}(\mathrm{rg}(E_1), \mathrm{rg}(E_2)) = n$. Il existe donc des entiers $a$, $b$ tels que

$$\mathrm{rg}(E_1)a + \mathrm{rg}(E_2)b \;=\; n \;.$$

et il suffit de prendre

$$L_0 \;=\; \det(E_1)^a \otimes \det(E_2)^b \;.$$

Réciproquement, soit $L$ un $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites sur $R^s$. Il faut prouver que $e(L)$ est multiple de $n$.

**Lemme 5.2 :** *Tout* $\mathrm{GL}(q)$*-fibré en droites sur* $R^{ss}$ *peut être prolongé en un* $\mathrm{GL}(q)$*-fibré en droites sur* $R^{ss}$*.*

Il en découle que tout $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur $R^s$ peut aussi être prolongé en un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur $R^{ss}$ (nous utiliserons ce résultat pour démontrer le théorème A dans le §6).

*Démonstration.* Soit $L$ un $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites sur $R^s$. Puisque $R^{ss}$ est lisse, le fibré en droites $L$ se prolonge en un fibré en droites sur $R^{ss}$, aussi noté $L$. Il faut montrer que la structure de $\mathrm{GL}(q)$-fibré sur $L$ peut aussi être prolongée. Il suffit de montrer que le morphisme

$$\phi : \mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s} \longrightarrow L_{|R^s}$$

(définissant l'action de $\mathrm{GL}(q)$) peut être prolongé en un morphisme $\mathrm{GL}(q) \times L \to L$, car les propriétés que doit vérifier ce morphisme pour qu'il définisse une structure de $\mathrm{GL}(q)$-fibré sur $L$ découleront de celles de $\phi$ par continuité. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert affine de $U(r,d)$. Alors $(\pi^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert affine $\mathrm{PGL}(q)$-invariant de $R^{ss}$. Il suffit de prouver que le morphisme

$$\phi_i : \mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s \cap \pi^{-1}(U_i)} \to L_{|R^s \cap \pi^{-1}(U_i)}$$

restriction de $\phi$ peut être prolongé en un morphisme

$$\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)} \to L_{|\pi^{-1}(U_i)}$$

car tous ces morphismes se recolleront. Du morphisme $\phi_i$ on déduit le morphisme d'anneaux

$$\mathbb{C}[L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)}] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)}] \;.$$

Puisque $\mathrm{codim}_{R^{ss}}(R^{ss}\backslash R^s) \geq 2$, on a

$$\mathbb{C}[L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)}] \;=\; \mathbb{C}[L_{|\pi^{-1}(U_i)}], \quad \mathbb{C}[\mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)}] \;\simeq\; \mathbb{C}[\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)}] \;.$$

On a donc un morphisme

$$\mathbb{C}[L_{|\pi^{-1}(U_i)}] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)}] \;.$$

Puisque les variétés $L_{|\pi^{-1}(U_i)}$ et $GL(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)}$ sont affines, de ce morphisme d'anneaux on déduit un morphisme

$$\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)} \longrightarrow L_{|\pi^{-1}(U_i)} \;,$$

qui est le prolongement recherche de $\phi_i$. Ceci achève la démonstration du lemme 5.2. $\square$

Reprenons maintenant la démonstration de la proposition 5.1. Soit $y \in R^{ss}$ tel que $\mathbb{F}_{0y}$ soit isomorphe à la somme directe de $n$ copies d'un fibré stable : $\mathbb{F}_0 \simeq nE$. Rappelons qu'on note $L$ l'extension à $R^{ss}$ du $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites $L$ sur $R^s$. Alors le stabilisateur $G_y$ de $y$ dans $\mathrm{GL}(q)$ s'identifie à $\mathrm{GL}(n)$. Par conséquent, de l'action de $\mathrm{GL}(q)$ sur L on déduit une action de $\mathrm{GL}(n)$ sur $L_y$, qui est de la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n) \times L_y &\longrightarrow L_y \\ (\sigma, u) &\longmapsto \det(\sigma)^a u \ , \end{aligned}$$

avec $a$ entier : L'action du sous-groupe des homothéties est donc

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times L_y &\longrightarrow L_y \\ (t, u) &\longmapsto t^{an} u \ , \end{aligned}$$

On a donc $e(L) = an$, ce qui démontre la proposition 5.1. □

La proposition 5.1 sera utilisée dans le §7, mais on en donne ici d'autres conséquences. Les résultats qui suivent dans ce chapitre ne sont pas utilisés dans les démonstrations des théorèmes A à F.

### 5.1 – Fibrés universels

Soit $U$ un ouvert non vide de $U_s(r,d)$. Rappelons qu'un fibré de Poincaré sur $U$ est une famille $E$ de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $U$ telle que le morphisme canonique $f_E : U \to U(r,d)$ soit l'inclusion $U \subset U(r,d)$.

**Lemme 5.3 :** *Il existe un fibré de Poincaré sur $U$ si et seulement s'il en existe un sur $U_s(r,d)$.*

*Démonstration.* Il faut montrer que s'il existe un fibré de Poincaré sur $U$ il en existe aussi un sur $U_s(r,d)$. On définit de façon évidente la notion de "fibré projectif universel" sur $U$ : c'est un morphisme lisse

$$\phi : W \longrightarrow U \times X$$

tel que pour tout $u \in U$, $\phi^{-1}(\{u\} \times X)$ soit un fibré en espaces projectifs sur X :
$\phi^{-1}(\{u\} \times X) = \mathbb{P}(E)$ (droites de $E$), $E$ étant un fibré stable de rang $r$ et de degré $d$ sur $X$ dont le point associé de $U(r,d)$ soit $u$.

Il existe un fibré projectif universel sur $U_s(r,d)$ : c'est $\mathbb{P}(\mathbb{F}_0)/\,\mathrm{PGL}(q) = \mathbb{P}_0$.

Soit $V$ un fibré de Poincaré sur $U$. Alors, puisque tout fibré stable sur $X$ est simple,

$$\Lambda \ = \ p_{\pi^{-1}(U)*}(\mathcal{H}om(\mathbb{F}_0, \pi^{\#}(V)))$$

est un fibré en droites sur $\pi^{-1}(U)$. Il en découle un isomorphisme

$$\Lambda \otimes \mathbb{F}_{0|\pi^{-1}(U)\times X} \ \simeq \ \pi^{\#}(V) \ ,$$

d'où un isomorphisme

$$\mathbb{P}(V) \ \simeq \ \mathbb{P}_{0|U} \ ,$$

c'est a dire que $\mathbb{P}_{0|U}$ est banal. Mais la banalité d'un fibré projectif est un problème birationnel (cf. [9]). Donc si $\mathbb{P}_{0|U}$ est banal, il en est de même de $\mathbb{P}_0$, c'est à dire qu'il existe un fibré de Poincaré sur $U_s(r,d)$. Ceci démontre le lemme 5.3. $\square$

**Lemme 5.4 :** *Les assertions suivantes sant équivalentes :*

*(i) Il existe un* $\mathrm{GL}(q)$*-fibré en droites* $L$ *sur* $R^s$ *tel que* $e(L)=1$.

*(ii) Il existe un fibré de Poincaré sur* $U_s(r,d)$.

*Démonstration.* Supposons que $L$ existe. Il suffit de prendre pour fibré de Poincaré le quotient $\big(\mathbb{F}_0\otimes p_X^*(L^{-1})\big)/\,\mathrm{PGL}(q)$.

Réciproquement, si $V$ est un fibré de Poincaré sur $U_s(r,d)$, $L=p_{R^s*}(\mathcal{H}om(\pi^{\#}(V),\mathbb{F}_0)$ est un $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites et $e(L)=1$. $\square$

De la proposition 5.1 et des deux lemmes précédents on déduit le

**Théorème 5.5 :** *Si* $r$ *et* $d$ *ne sont pas premiers entre eux, et si* $U$ *est un ouvert non vide de* $U_s(r,d)$*, il n'existe pas de fibré de Poincaré sur* $U$.

C'est le résultat de Ramanan [20].

**Remarque :** Cette démonstration ne marche pas si $g=2$, $r=2$ et $d$ est pair, car alors $\mathrm{codim}_{R^{ss}}(R^{ss}\backslash R^s)=1$. Mais dans ce cas on dispose d'une description très précise de $U(r,d)$ permettant de faire une démonstration directe du théorème 5.5 (cf. [18]).

### 5.2 – Faisceaux de Poincaré sur les variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

La démonstration du théorème G suit pas à pas celle du théorème 5.5, compte tenu des deux faits suivants :

- $M(r,c_1,c_2)$ s'obtient aussi comme quotient d'un ouvert lisse irréductible d'un schéma de Grothendieck par un groupe du type $\mathrm{PGL}(q)$ (cf. [13]).
- Le nombre maximal de termes d'une somme directe de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ qui est un faisceau semi-stable de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$ est exactement $\mathrm{PGCD}(r,c_1,\chi)$.

Évidemment, ce qui précède n'est valable que si

$$\mathrm{codim}_{M(r,c_1,c_2)}(M(r,c_1,c_2)\backslash M_s(r,c_1,c_2)) \ \geq\ 2\ .$$

Dans le cas constraire, on peut montrer que $M(r,c_1,c_2)$ s'identifie à $\mathbb{P}_5$ (espace des coniques de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$), $M_s(r,c_1,c_2)$ étant l'ouvert des coniques non dégénérées (cf. [2]). Sans entrer dans les détails, disons que pour montrer qu'il n'existe pas de fibré de Poincaré sur $M_s(r,c_1,c_2)$, on utilise le fait qu'il n'existe pas de section de la projection

$$\mathbb{P}_5\times\mathbb{P}_2\ \supset\ Q\longrightarrow\mathbb{P}_5\ ,$$

$Q$ étant la conique universelle.

## 6. Démonstration du théorème A

On veut prouver que $U(r,d)$ et $U(r,L)$ sont localement factorielles. On ne traitera que le cas de $U(r,d)$, celui de $U(r,L)$ étant analogue.

D'après [7], proposition 6.2 et [14], p. 141, $U(r,d)$ est localement factorielle si et seulement si tout diviseur de $U(r,d)$ est localement principal, c'est à dire si et seulement si l'idéal de toute hypersurface de $U(r,d)$ est localement libre.

Cette condition équivaut à la suivante, $U(r,d)$ étant normale : le morphisme canonique

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Cl}(U(r,d))$$

est un isomorphisme.

Nous avons vu dans l'Introduction qu'il suffisait de montrer que le morphisme de restriction

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_s(r,d))$$

est surjectif. Soit $L$ un fibré en droites sur $U_s(r,d)$. Alors $\pi_s^*(L)$ est un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur $R^s$. D'après le lemme 5.2, ce $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites s'étend en un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites $\overline{L'}$ sur $R^{ss}$. D'après la proposition 4.1, $\overline{L'}$ vérifie les hypothèses du lemme de descente (théorème 2.3). Il existe donc un fibré en droites $\overline{L}$ sur $U(r,d)$ tel que les $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites $\overline{L'}$ et $\pi^*(\overline{L})$ soient isomorphes. On a alors

$$\overline{L}_{|R^s} \;=\; L'/\,\mathrm{PGL}(q) \;=\; L\ ,$$

donc $\overline{L}$ est l'extension voulue de $L$.

Le théorème A est donc démontré.

## 7. Description de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ et $\mathrm{Pic}(U(r,L))$

### 7.1 – Fibrés engendrés par leurs sections

**Lemme 7.1 :** *Soit $E$ un fibré vectoriel de rang $r$ sur $X$, engendré par ses sections globales. Alors il existe un sous-espace vectoriel $H$ de $H^0(E)$ de dimension $r-1$, tel que la restriction $H\otimes\mathcal{O}_X \to E$ du morphisme canonique d'évaluation soit un morphisme injectif de fibrés vectoriels.*

*Démonstration.* Soit $x\in X$. Alors le morphisme canonique $H^0(E)\to E_x$ est surjectif. Il en découle que le sous-espace vectoriel de $H^0(E)$ des sections qui s'annulent en $x$ est de codimension $r$. Par conséquent la sous-variété homogène de $H^0(E)$ constitutée des sections s'annulant en au moins un point de $X$ est de codimension $r-1$, Le lemme 7.1 en découle immédiatement. $\square$

Il existe un entier $k_0$ tel que pour tout entier $k\geq k_0$, tout fibré semi-stable de rang $r$ et de degré $d+kr$ soit engendré par ses sections (cf. [23]). D'après 3.4, on peut donc supposer que tout fibré semi-stable de rang $r$ et de degré $d$ est engendré par ses sections. Soit $E$ un tel fibré. On a donc d'après le lemme 7.1 une suite exacte

$$0\longrightarrow \mathcal{O}_X\otimes\mathbb{C}^{r-1}\longrightarrow E\longrightarrow \det(E)\longrightarrow 0\ .$$

### 7.2 – Construction d'une grande famille de fibrés stables

Soient $J^{(d)}$ la jacobienne des fibrés en droites de degré $d$ sur $X$, et $D$ un fibré de Poincaré sur $J^{(d)} \times X$. Posons
$$V \;=\; R^1 p_{J*}(D^* \otimes \mathbb{C}^{r-1}) \;.$$
C'est un fibré vectoriel sur $J^{(d)}$ de rang $(r-1)(g-1+d)$. Soit $\mathbb{P}$ le fibré en espaces projectifs associé à $V$. D'après [23], App. II, prop. 2, il existe un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{P} \times X$ et une suite exacte
$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \pi_0^{\#}(D) \otimes p_{\mathbb{P}}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)) \longrightarrow 0$$
($\pi_0$ désignant la projection $\mathbb{P} \to J^{(d)}$) telle que pour tout $y \in \mathbb{P}$, si $\alpha = \pi_0(y)$, la restriction de (*) à $\{y\} \times X$ :
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E}_y \longrightarrow D_\alpha \otimes y \longrightarrow 0$$
soit associée à l'inclusion
$$y \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1(D_\alpha, \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1}) \;=\; V_\alpha \;,$$
(vue comme élément de $\operatorname{Ext}^1(D_\alpha \otimes y, \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1})$).

On notera $\mathbb{P}_s$ l'ouvert de $\mathbb{P}$ constitué des points $y$ tels que $\mathbb{E}_y$ soit stable. La restriction de $\mathbb{E}$ à $\mathbb{P}_s \times X$, aussi notée $\mathbb{E}$, est une famille de fibrés stables de rang $r$ et de degré $d$ sur $X$. D'après le lemme 7.1, le morphisme canonique $f_{\mathbb{E}} : \mathbb{P}_s \to U_s(r,d)$ est surjectif.

### 7.3 – Autre construction de la même famille

*7.3.1 –* Soit $\mathbb{F}_0$ le fibré canonique sur $R^s \times X$ (cf. 1.1). Alors le faisceau $F_0 = p_{R^s*}(\mathbb{F}_0)$ est localement libre de rang $k = d + r(1-g)$. Soit $\mathrm{Gr}_0$ le fibré en grassmanniennes des sous-espaces de dimension $r-1$ de $F_0$.

Il existe un bon quotient $\mathrm{Gr}_0 / \mathrm{PGL}(q)$ : on considère pour cela l'action de $\mathrm{GL}(q)$ sur $R^s$. Le groupe $\mathrm{GL}(q)$ agit canoniquement sur $\mathbb{F}_0$, donc sur $F_0$ et $\wedge^{r-1}F_0$. La projection $\wedge^{r-1}F_0 \to R^s$ est un $\mathrm{GL}(q)$-morphisme affine. Il en découle d'après Ramanathan ([21], lemma 4.1) qu'il existe un bon quotient $\wedge^{r-1}F_0/\,\mathrm{GL}(q)$. Par conséquent il existe un bon quotient $\mathrm{Gr}_0 / \mathrm{PGL}(q)$. C'est un quotient géométrique. On notera $\Gamma_0 = \mathrm{Gr}_0 / \mathrm{PGL}(q)$.

Soit $p_0 : \Gamma_0 \to U_s(r,d)$ le morphisme déduit de la projection $\mathrm{Gr}_0 \to R^s$. Soit $y \in R^s$. Alors il existe un isomorphisme canonique
$$p_0^{-1}(\pi(y)) \;\simeq\; \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(\mathbb{F}_{0y})) \;.$$
On note $\pi_{\mathrm{Gr}} : \mathrm{Gr}_0 \to \Gamma_0$ le morphisme quotient.

*7.3.2 – Groupe de Picard de* $\Gamma_0$. Soient $Q_{\mathrm{Gr}}$ le fibré quotient canonique relatif sur $\mathrm{Gr}_0$ (si $y \in R^{ss}$, et $H \subset H^0(\mathbb{F}_{0y})$ est de dimension $r-1$, on a $Q_{\mathrm{Gr},H} = H^0(\mathbb{F}_{0y})/H$), et $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1) = \wedge^{k-r+1}Q_{\mathrm{Gr}}$. On sait que
$$\operatorname{Pic}(\mathrm{Gr}_0) \;\simeq \operatorname{Pic}(R^s) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1) \;.$$
Le fibré $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1)$ est muni de l'action canonique de $\mathrm{GL}(q)$, et on a
$$e(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1)) \;=\; k - r + 1$$
(notation analogue à celle du du §5).

**Proposition 7.2 : (a)** *Il existe un fibré en droites sur $\Gamma_0$, noté $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$, tel qu'on ait, pour tout $y \in R^s$*

$$\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)_{|p_0^{-1}(\pi(y))} \;\simeq\; \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(\mathbb{F}_{0y}))}(n) \; .$$

**(b)** *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Pic}(\Gamma_0) \;\simeq\; \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n) \; .$$

*Démonstration.* Construisons d'abord $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$. Le fibré $F_0$ est de rang $k = d + r(1-g)$, et si $x \in X$, $\mathbb{F}_{0x} = \mathbb{F}_{0|R^s \times \{x\}}$ est de rang $r$. On a PGCD$(r.k) = n$, donc il existe des entiers $a$, $b$ tels que

$$ak + br \;=\; -n(k-1+r) \; .$$

Donc, si $L = \det(F_0)^a \otimes \det(\mathbb{F}_{0x})^b$. on a $e(L) = -n(k-1+r)$. Par conséquent on a

$$e(L \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(n)) \;=\; 0 \; ,$$

et $L \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(n)$ est en fait muni d'une action de PGL$(q)$. Puisque $\pi_{\mathrm{Gr}}$ est un quotient géométrique, il existe un fibré en droites $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$ sur $\Gamma_0$ tel que

$$\pi_{\mathrm{Gr}}^*(\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)) \;\simeq\; L \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(n) \; .$$

Il est immédiat que $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$ possède bien la propriété requise. Ceci démontre **(a)**.

Prouvons **(b)**. Si $L$ est un fibré en droites sur $U_s(r,d)$, on a $p_{0*}(p_0^*(L)) \simeq L$, donc $p_0^* : \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \to \mathrm{Pic}(\Gamma_0)$ est injectif. On en déduit avec **(a)** un morphisme injectif

$$\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma_0) \; .$$

Il reste à montrer qu'il est surjectif. Soit $\Delta$ un fibré en droites sur $\Gamma_0$. Alors, puisque $\mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}_0) \simeq \mathrm{Pic}(R^s) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(1)$, il existe un entier $m$ et un fibré en droites $\Lambda'$ sur $R^s$ tels que

$$\pi_{\mathrm{Gr}}^*(\Delta) \;\simeq p_1^*(\Lambda') \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(-m) \; ,$$

$p_1$ désignant la projection $\mathrm{Gr}_0 \to R^s$. Le fibré $\Lambda'$ est muni d'une action de GL$(q)$, et on a

$$e(\Lambda') \;=\; m(k-r+1) \; .$$

D'après la proposition 5.1, $e(\Lambda')$ est un multiple de $n$, et comme $n$ et $k-r+1$ sont premiers entre eux, $n$ divise $m$ : posons $m = -an$. Alors $\pi_{\mathrm{Gr}}^*(\Delta \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^a) = p_1^*(\Lambda'')$, $\Lambda''$ étant un fibré en droites sur $R^s$ avec $e(\Lambda'') = 0$. Il en découle que $\Lambda''$ provient de $U_s(r,d)$. Donc $\Delta \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^a$ aussi. Ceci prouve **(b)** et achève la démonstration de la proposition 7.2. $\square$

*7.3.3 –* Soit $\mathrm{Gr}_0'$ l'ouvert de $\mathrm{Gr}_0$ constitué des points $H$ tels que le morphisme canonique de fibrés vectoriels $\mathcal{O}_X \times H \to \mathbb{F}_{0y}$ soit injectif ($y$ désignant l'image de $H$ dans $R^{ss}$). C'est un ouvert PGL$(q)$-invariant, et $\Gamma_0' = \pi_{\mathrm{Gr}}(\mathrm{Gr}_0')$ est un ouvert de $\Gamma_0$.

**Lemme 7.3 :** *Pour tout point $y$ de $R^{ss}$, $p_0^{-1}(\pi(y)) \cap (\Gamma_0 \backslash \Gamma_0')$ est une hypersurface irréductible de $p_0^{-1}(\pi(y))$.*

*Démonstration.* Cela signifie la chose suivante : si $E$ est un fibré stable de rang $r$ et de degré $d$ sur $X$, la sous-variété fermée $Y$ de $\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ constituée des sous-espaces $H$ tels que le morphisme de fibrés vectoriels $\mathcal{O}_X \otimes H \to E$ soit non injectif est une hypersurface irréductible.

Soit $W$ la sous-variété fermée de $X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ constituée des couples $(x, H)$ tels que l'évaluation en $x : H \to E_x$ ne soit pas injective. Si $p_G : X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E)) \to \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ est la projection, on a $p_G(W) = Y$. Il suffit donc de prouver que $W$ est irréductible de codimension 2, et que les fibres de $p_G : W \to Y$ au dessus d'un point général de Y sont finies. Pour démontrer la première assertion. on remarque que pour tout $x \in X$, $p_X^{-1}(x)$ est une sous-variété fermée irréductible de $\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ qui est de codimension 2 : elle est constituée des sous-espaces $H$ tels que

$$H \cap \ker(H^0(E) \to E_x) \neq \{0\} .$$

Il reste à prouver qu'il existe un point $H$ de $Y$ tel que $\mathcal{O}_x \otimes H \to E$ soit non injectif en seulement un nombre fini de points de $X$. Pour cela, on choisit un point $x$ de $X$ et un sous-espace vectoriel $H$ de dimension $r-1$ de $H^0(E)$ tel que la restriction de l'évaluation $H \to E_x$ soit injective (cela est possible car $H^0(E) \to E_x$ est surjective). Ceci démontre le lemme 7.3. □

**Corollaire 7.4 :** *La sous-variété fermée $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ de $\Gamma_0$ est une hypersurface irréductible.*

*Démonstration.* La restriction de $p_0 : \Gamma_0 \backslash \Gamma_0' \to U_s(r, d)$ est surjective, et ses fibres sont d'après le lemme 7.3 irréductibles et de même dimension. Il en découle d'après [24] (théorème 8, p. 61) que $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ est irréductible. Il est immédiat que c'est une hypersurface. □

**Lemme 7.5 :** *Le faisceau d'idéaux de $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ est de la forme $p_0^*(\Lambda) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^{-d/n}$, avec $\Lambda \in \mathrm{Pic}(U_s(r, d))$.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout fibré stable $E$ de rang $r$ et de degré $d$ sur $X$, l'hypersurface $Y$ de $\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ constituée des sous-espaces $H$ tels que le morphisme de fibrés $\mathcal{O}_x \otimes H \to E$ soit non injectif est de degré $d$. Pour cela, considérons le morphisme canonique de fibrés vectoriels sur $X$

$$\Phi : p_G^*(U) \longrightarrow p_X^*(E) ,$$

$U$ désignant le sous-fibré universel de $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))} \otimes H^0(E)$, $p_G$ la projection $X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E)) \to \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$. Soit $W$ la sous-variété de $X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ constituée des couples $(x, H)$ tels que l'évaluation $H \to E_x$ ne soit pas injective. Alors $W$ est le lieu des points ou $\Phi$ n'est pas injectif. D'après la formule de Porteous (cf. [4]), $c_2(p_X^*(E) - p_G^*(U))$ est un multiple entier de $[W]$ dans $A^2(X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$. On a

$$c_2(p_X^*(E) - p_G^*(U)) \ = \ \alpha_1^2 - \alpha_2 - \alpha_1 \det(E) ,$$

$\alpha_1$, $\alpha_2$ étant respectivement la première et la seconde classe de Chern de $U$. Puisque $c_2(p_X^*(E) - p_G^*(U))$ n'est pas divisible dans $A^2(X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$, on a

$$[W] \ = \ \alpha_1^2 - \alpha_2 - \alpha_1 \det(E) .$$

On a alors dans $A^1(X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$

$$[Y] \ = \ p_G^*([W]) \ = -\deg(E)\alpha_1$$

donc $Y$ est de degré $d$. Ceci démontre le lemme 7.5. $\square$

**Proposition 7.6 :** *On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma'_0) \longrightarrow \mathbb{Z}/(d/n)\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que $\Phi = p_0^* : \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \to \mathrm{Pic}(\Gamma'_0)$ est injectif. Soit $L_0$ un fibré en droites sur $U_s(r,d)$ tel que $p_0^*(L_0)$ soit trivial sur $\Gamma'_0$. On a une suite exacte de groupes

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Pic}(\Gamma_0) \xrightarrow{\text{restriction}} \mathrm{Pic}(\Gamma'_0) \longrightarrow 0$$

([7], proposition II.6.5), le morphisme $i$ associant à $m$ la puissance $m$-iême du faisceau d'idéaux de $\Gamma_0\backslash\Gamma'_0$. Il en découle qu'on a, dans $\mathrm{Pic}(\Gamma_0)$,

$$p_0^*(L_0) \ \simeq \ p_0^*(\Lambda^m) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^{-dm/n} \ ,$$

avec $m$ entier, $p_0^*(\Lambda) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^{-d/n}$ étant le faisceau d'idéaux de $\Gamma_0\backslash\Gamma'_0$, d'après le lemme 7.5. D'après la proposition 7.2(b), on a $m = 0$, d'où $p_0^*(L_0) \simeq \mathcal{O}_{\Gamma_0}$, et on en déduit, toujours à l'aide de la même proposition, que $L_0$ est trivial. Donc $\Phi$ est injectif.

On a un diagramme commutatif de groupes, avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathbb{Z} \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "j"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \arrow[r, "p_0^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Pic}(\Gamma_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Pic}(\Gamma'_0) \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

La première ligne exacte découle de la proposition 7.2(b) et $j$ est la multiplication par $d/n$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pic}(\Gamma'_0)/\,\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \ &= \ \mathrm{Pic}(\Gamma_0)/i(\mathbb{Z})/\,\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \\
&= \ \mathrm{Pic}(\Gamma_0)/(i(\mathbb{Z}) + \mathrm{Pic}(U_s(r,d))) \\
&= \ \mathbb{Z}/j(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(d/n)\mathbb{Z} \ .
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 7.6. $\square$

*7.3.4 –* Soit $U_{\mathrm{Gr}}$ le sous-fibré universel relatif sur $\mathrm{Gr}_0$. Pour tout $y \in R^{ss}$ et tout $H \in \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(\mathbb{F}_{0y}))$, on a $U_{\mathrm{Gr},H} = H$. Soit

$$T \ = \ \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0} \otimes \mathbb{C}^{r-1}, U_{\mathrm{Gr}}) \ ,$$

fibré vectoriel sur $\mathrm{Gr}_0$ muni d'une action évidente de $\mathrm{GL}(q)$. On pose

$$\mathbb{T} \ = \ T/\,\mathrm{GL}(q) \ = \mathbb{P}(T)/\,\mathrm{PGL}(q) \ , \qquad T' \ = \ \mathcal{I}som(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0} \otimes \mathbb{C}^{r-1}, U_{\mathrm{Gr}}) \ .$$

**Lemme 7.7 :** *Il existe sur $\mathbb{T}$ une structure de fibré en espaces projectifs localement trivial sur $\Gamma_0$.*

*Démonstration.* Si $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(1) = \Lambda^{r-1}U_{\mathrm{Gr}}$, muni de l'action de $\mathrm{GL}(q)$ déduite de celle de $\mathrm{GL}(q)$ sur $U_{\mathrm{Gr}}$, on a $e(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(1)) = r-1$. D'autre part, il existe d'après la proposition 5.1 un fibré en droites $L$ sur $\mathrm{Gr}_0$, provenant de $R^{ss}$, tel que $e(L) = n$. Puisque $r-1$ et $n$ sont premiers entre eux, il existe des entiers $a$, $b$ tels que $an + b(r-1) = 1$. Alors, si $L_0 = L^a \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(b)$, on a $e(L_0) = 1$. Il en découle que $T \otimes L_0^{-1}$ est en fait muni d'une action de $\mathrm{PGL}(q)$. Le quotient $(T \otimes L_0^{-1})/\,\mathrm{PGL}(q)$ est un fibré vectoriel sur $\Gamma_0$ dont le fibré en espaces projectifs associé est $\mathbb{T}$. Ceci démontre le lemme 7.7. □

Soit $p'_0 : \mathbb{T} \to \Gamma_0$ le morphisme canonique. Pour tout $y \in R^{ss}$ et tout $H \in p_0^{-1}(\pi(y)) = \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(\mathbb{F}_{0y}))$, on a ${p'_0}^{-1}(H) = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r-1}, H))$. Soit $\mathbb{T}'$ l'ouvert de $\mathbb{T}$ des points au dessus de $\Gamma'_0$, correspondant aux isomorphismes. On a

$${p'_0}^{-1}(H) \cap \mathbb{T}' \ = \ \mathbb{P}(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^{r-1}, H)) \ .$$

**Proposition 7.8 :** *On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma'_0) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

*Démonstration.* La démonstration est analogue a celle de la proposition 7.6, compte tenu du fait que le faisceau d'ideaux de $\mathbb{T}\backslash\mathbb{T}'$ est de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{T}}(r-1) \otimes \phi^*(L)$, $L$ étant un fibré en droites sur $\Gamma'_0$ et $\phi : \mathbb{T}' \to \Gamma'_0$ la projection. □

*7.3.5 – Conclusion*

**Proposition 7.9 :** (Seshadri) *On a un isomorphisme* $\mathbb{P}^s \simeq \mathbb{T}'$.

*Démonstration.* Soit $y \in \mathbb{P}^s$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{E}_y \longrightarrow D_\alpha \otimes y \longrightarrow 0 \ ,$$

avec $\alpha = \pi_0(y)$ (cf. 7.2). De $\mathbb{E}_y$ on déduit un point $z$ de $U_s(r,d)$, de $\mathrm{im}(H^0(i)) \subset H^0(\mathbb{E}_y)$ un point $H$ de $\Gamma'_0$ au dessus de $z$, puis de l'isomorphisme $\mathbb{C}^{r-1} \simeq \mathrm{im}(H^0(i))$ déduit de $i$ un point de $\mathbb{T}'$ au dessus de $H$. Pour montrer qu'on définit ainsi un morphisme $\Phi : \mathbb{P}^s \to \mathbb{T}'$, on considère pour tout $y \in \mathbb{P}^s$ un isomorphisme sur un voisinage $U$ de $y$ :

$$\mathcal{O}_U \otimes \mathbb{C}^q \ \simeq \ p_{P^s *}(\mathbb{E} \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m)))$$

permettant de factoriser $\Phi_{|U}$ à travers $T$.

L'isomorphisme réciproque est défini de la façon suivante : soient $y \in R^{ss}$, $\gamma \in T$ au dessus de $y$. On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{F}_{0y} \longrightarrow \det(\mathbb{F}_{0y}) \longrightarrow 0 \ .$$

Si $\alpha$ est le point de $J^{(d)}$ correspondant à $\det(\mathbb{F}_{0y})$, la suite exacte précédente définit un point de $\mathbb{P}^s$ au dessus de $\alpha$. On obtient ainsi un morphisme $\mathrm{GL}(q)$-invariant $T' \to \mathbb{P}^s$ qui donne par passage au quotient un morphisme $\mathbb{T}' \to \mathbb{P}^s$ inverse de $\Phi$. Ceci démontre la proposition 7.9. $\square$

**Remarques : 1 –** Soient $L$ un fibré en droites de degré $d$ sur $X$,

$$\mathbb{P}_L \ = \ \pi_0^{-1}(L) \ , \qquad \mathbb{P}_L^s \ = \ \mathbb{P}_L \cap \mathbb{P}^s \ ,$$

$\Gamma'_{0L}$, $\mathbb{T}'_L$ les sous-variétés fermées de $\Gamma'_0$, $\mathbb{T}'$ respectivement, images réciproques de $U_s(r,L)$. L'isomorphisme $\Phi$ en induit un $\mathbb{P}_L^s \simeq \mathbb{T}'_L$, et on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_s(r,L)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma'_{0L}) \longrightarrow \mathbb{Z}/(d/n)\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma'_{0L}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_L^s) \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

Remarquons que $\mathbb{P}_L$ est un espace projectif.

**2 –** Soit $p_1 : \mathrm{Gr}'_0 \to R^s$ la projection. On a vu dans le lemme 7.7 qu'il existe un $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites $L$ sur $\mathrm{Gr}'_0$ tel que $e(L) = 1$. Alors $V = p_1^{\#}(\mathbb{F}_{0|R^s \times X}) \otimes L^{-1}$ est en fait un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré vectoriel sur $\mathrm{Gr}'_0 \times X$. Le quotient $\mathbb{E}' = V/\,\mathrm{PGL}(q)$ est une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $\Gamma'_0$. Le morphisme canonique $f_{\mathbb{E}'} : \Gamma'_0 \to U(r,d)$ n'est autre que la restriction de $p_0$, défini en 7.3.1. Si $p' : \mathbb{P}^s = \mathbb{T}' \to \Gamma'_0$ est la projection, il existe un fibré en droites $L_0$ sur $\mathbb{P}^s$ et un isomorphisme $p'^*(\mathbb{E}') \otimes L_0 \simeq \mathbb{E}$ (cela découle aisément de la simplicité des fibrés stables).

### 7.4 – Applications à l'étude de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ et $\mathrm{Pic}(Ur,L))$

*7.4.1 – Étude de l'image de* $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ *dans* $\mathrm{Pic}(U_s(r,d)$. Soit $L_0 \in \mathrm{Pic}^{(0)}(X)$, qu'on peut voir comme un élément de $\mathrm{Pic}^{(0)}(J^{(d)})$, ou de $Z \subset H(r,d)$ (cf. §3). Soit $\det : U(r,d) \to J^{(d)}$ le morphisme canonique. On a défini dans le §3 un morphisme de groupes

$$\gamma : H(r,d) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d)) = \mathrm{Pic}(U(r,d)) \ .$$

**Proposition 7.10 :** *On a* $\gamma(L_0) = \det^*(L_0)$.

**Lemme 7.11 :** *Le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(F(r,d)) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s) \\ L & \longmapsto & L_{\mathbb{E}} \end{array}$$

*est injectif.*

*Démonstration.* On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}' = \mathbb{P}^s & \xrightarrow{f_{\mathbb{E}}} & U_s(r,d) \\ \uparrow{\scriptstyle \pi'} & & \uparrow{\scriptstyle \pi} \\ T' & \xrightarrow{\quad p \quad} & R^{ss}, \end{array}$$

$\pi'$ étant le morphisme quotient, et $p$ la projection canonique. Si $L \in \mathrm{Pic}(F(r,d))$ est tel que $L_{\mathbb{E}}$ soit trivial, $\pi'^*(L_{\mathbb{E}}) = L_{\pi'^*(\mathbb{E})}$ l'est aussi. Mais d'après la remarque 2 de 7.3.4, la famille $\pi'^*(\mathbb{E})$ est équivalente à $p^*(\mathbb{F}_{0|R^s\times X})$. Donc

$$L_{p^*(\mathbb{F}_{0|R^s\times X})} \;=\; p^*\big(L_{\mathbb{F}_{0|R^s\times X}}\big)$$

est aussi trivial. Le morphisme

$$p^* : \mathrm{Pic}(R^{ss}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(T')$$

est injectif : la démonstration est analogue à celle de l'injectivité de $\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \to \mathrm{Pic}(\Gamma'_0)$ dans la proposition 7.6. Il en découle que $L_{\mathbb{F}_{0|R^s\times X}}$ est trivial. D'après le corollaire 3.4, $L$ est aussi trivial. Ceci démontre le lemme 7.11. □

Pour démontrer la proposition 7.10 il suffit donc de prouver que

$$\gamma(L_0)_{\mathbb{E}} \;\simeq\; f_{\mathbb{E}}^*(\det{}^*(L_0)) \ .$$

Soit $L_1$ un fibré en droites de degré 0 sur $X$. L'élément de $Z$ correspondant à $L_0$ est $[L_0 \otimes L_1] - [L_1]$, et l'élément de $\mathrm{Pic}^{(0)}(J^{(d)})$ correspondant à $L_0$ est aussi celui provenant de l'élément précédent de $Z$ (cf. 3.3). D'autre part, le morphisme composé

$$\mathbb{P}^s \longrightarrow U_s(r,d) \xrightarrow{\quad\det\quad} J^{(d)}$$

est celui qui est défini par la famille $\det(\mathbb{E})$ de fibrés en droites de degré $d$ sur $X$. Il suffit donc de prouver le résultat suivant : pour tout fibré en droites $L_1$ de degré 0 sur $X$, on a un isomorphisme

$$(*) \qquad \det\big(p_{\mathbb{P}^s*}(\mathbb{E} \otimes p_X^*(L_1))\big) \;\simeq\; \det\big(p_{\mathbb{P}^s*}(\det(\mathbb{E}) \otimes p_X^*(L_1))\big)$$

et

$$R^1 p_{\mathbb{P}^s*}(\mathbb{E} \otimes p_X^*(L_1)) \;=\; R^1 p_{\mathbb{P}^s*}(\det(\mathbb{E}) \otimes p_X^*(L_1)) \;=\; 0 \ .$$

Les égalités précédentes sont vérifiées car $d$ est positif. Il reste donc à prouver l'isomorphisme (*). D'après la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s\times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \pi_0^{\#}(D) \otimes p_{\mathbb{P}^s}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)) \longrightarrow 0 \ ,$$

on a

$$\det(\mathbb{E}) \;\simeq\; \pi_0^{\#}(D) \otimes p_{\mathbb{P}^s}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)) \ .$$

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s\times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \det(\mathbb{E}) \longrightarrow 0 \ ,$$

et l'isomorphisme (*) en découle immédiatement. Ceci démontre la proposition 7.10. □

*7.4.2 – Démonstration du théorème B.* Soient

$$r' \;=\; \frac{r}{n} \ , \qquad d' \;=\; \frac{-d + r(g-1)}{n} \ .$$

Il existe d'après [8], §4.6, un fibré vectoriel $F$ sur $X$ de rang $r'$ et de degré $d'$ tel qu'il existe un fibré stable de rang $r$ et de degré $d$ tel que

$$h^0(E \otimes F) \ = \ 0 \ .$$

On note comme dans l'Introduction $\Theta^s_{F,L}$ le sous-ensemble de $U_s(r,L)$ constitué des points correspondants aux fibrés stables $E$ tels que $h^0(E \otimes F) \neq 0$.

**Lemme 7.12 :** *Le groupe* $\operatorname{Pic}(U(r,L))$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}$*.*

*Démonstration.* Puisque $\operatorname{codim}_{U(r,L)}(U(r,L) \backslash U_s(r,L)) \geq 2$, et que $U(r,L)$ est localement factorielle. il suffit de montrer que $\operatorname{Pic}(U_s(r,L)) \simeq \mathbb{Z}$. Le groupe de Picard de $\mathbb{P}^s_L$ est un quotient de $\mathbb{Z}$, car $\mathbb{P}^s_L$ est un ouvert d'un espace projectif. Puisque $\operatorname{codim}_{U(r,L)}(U(r,L) \backslash U_s(r,L)) \geq 2$, $\operatorname{Pic}(U_s(r,L))$ possède au moins un élément qui n'est pas d'ordre fini, et comme $\operatorname{Pic}(U_s(r,L)) \subset \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^s_L)$ d'après la remarque 1 de 7.3.5, on a $\operatorname{Pic}(U_s(r,L)) \simeq \mathbb{Z} \simeq \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^s_L)$, ce qui démontre le lemme 7.12. $\square$

**Proposition 7.13 :** *L'image de* $\operatorname{Pic}(U_s(r,L))$ *dans* $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^s_L) \simeq \mathbb{Z}$ *est le sous-groupe* $(r-1)\dfrac{d}{n}\mathbb{Z}$*.*

*Démonstration.* On a d'après 7.3.5 des suites exactes

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic}(U_s(r,L)) \longrightarrow \operatorname{Pic}(\Gamma'_{0L}) \longrightarrow \mathbb{Z}/\frac{d}{n}\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic}(\Gamma'_{0L}) \longrightarrow \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^s_L) \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^s_L)/\operatorname{Pic}(U_s(r,L)) \longrightarrow \mathbb{Z}/\frac{d}{n}\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

On en déduit que $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^s_L)/\operatorname{Pic}(U_s(r,L))$ possède $(r-1)\dfrac{d}{n}$ éléments, ce qui démontre la proposition 7.13. $\square$

D'après le corollaire 4.3, le morphisme canonique

$$i : \operatorname{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \operatorname{Pic}(F(r,d))$$

est un isomorphisme. Posons

$$\mathbb{L} : i^{-1} \circ \gamma : H(r,d) \longrightarrow \operatorname{Pic}(U(r,d))$$

(cf. §3). On note $\mathbb{E}_L$ la restriction de $\mathbb{E}$ à $\mathbb{P}^s_L \times X$, et pour tout entier $m$ on pose $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L}(m)_{|\mathbb{P}^s_L}$.

**Lemme 7.14 :** *On a* $\gamma([F])_{\mathbb{E}_L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}\left(-(r-1)\dfrac{d}{n}\right)$.

*Démonstration.* Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L \times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E}_L \longrightarrow p^*_{\mathbb{P}^s_L}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-1)) \otimes L \longrightarrow 0 \ .$$

On en déduit la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L} \otimes H^0(\mathbb{C}^{r-1} \otimes F) \longrightarrow p_{\mathbb{P}^s_L *}(\mathbb{E}_L \otimes F) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-1) \otimes H^0(F \otimes L) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L} \otimes H^1(\mathbb{C}^{r-1} \otimes F) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s_L *}(\mathbb{E}_L \otimes F) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-1) \otimes H^1(F \otimes L) \longrightarrow 0 \ , \end{aligned}$$

et l'isomorphisme

$$\det(p_{\mathbb{P}^s_L !}(\mathbb{E}_L \otimes F)) \ \simeq \ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-\chi(F \otimes L)) \ .$$

Le lemme 7.14 découle du fait que $\chi(F \otimes L) = (r-1)\dfrac{d}{n}$. □

Pour démontrer le théorème B il reste à prouver $\Theta^s_{F,L}$ est une hypersurface de $U_s(r,L)$ et que

$$\mathcal{O}(-\Theta^s_{F,L}) \ \simeq \ \mathbb{L}([F])_{|U_s(r,L)} \ .$$

Considérons le morphisme

$$\alpha : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-1) \otimes H^0(F \otimes L) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L} \otimes H^1(\mathbb{C}^{r-1} \otimes F)$$

du lemme 7.14. Puisque $p_{\mathbb{P}^s_L *}(\mathbb{E}_L \otimes F)$ est de torsion, $\alpha$ est un morphisme génériquement bijectif, dont le schéma des zéros est exactement $f^{-1}_{\mathbb{E}_L}(\Theta^s_{F,L})$. Il en découle que $f^{-1}_{\mathbb{E}_L}(\Theta^s_{F,L})$ est une hypersurface de $\mathbb{P}^s_L$. Les fibres de $f_{\mathbb{E}_L}$ étant de dimension constante, $\Theta^s_{F,L}$ est bien une hypersurface de $U_s(r,L)$.

Le fibré $\gamma(-[F])_{\mathbb{E}_L}$ est isomorphe au faisceau d'idéaux du schéma des zéros de $\alpha$, et engendre l'image de $\mathrm{Pic}(U_s(r,d))$ dans $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s_L)$ d'après la proposition 7.13. Le fibré $\mathcal{O}(f^{-1}_{\mathbb{E}_L}(\Theta^s_{F,L}))$ est une puissance de $\gamma([F])_{\mathbb{E}_L}$. On doit donc avoir en fait

$$\mathcal{O}(f^{-1}_{\mathbb{E}_L}(\Theta^s_{F,L})) \ = \ \gamma(-[F])_{\mathbb{E}_L} \ ,$$

d'où

$$\mathcal{O}(-\Theta^s_{F,L}) \ = \ \mathbb{L}([F])_{|U_s(r,L)} \ .$$

Ceci achève la démonstration du théorème B.

*7.4.3 – Démonstration du théorème C.* On démontre d'abord de la même façon que pour $U(r,L)$ que l'image de $\mathrm{Pic}(U_s(r,d))$ dans $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s)$ est le sous-groupe engendré par $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}\left((r-1)\dfrac{d}{n}\right)$. Ensuite, comme dans les démonstrations précédentes, on montre que

$$f^*_{\mathbb{E}}(\mathcal{O}(-\Theta^s_F)) \ = \ \gamma([F])_{\mathbb{E}} \ ,$$

et que ce fibré se met sous la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}\left((r-1)\dfrac{d}{n}\right) \otimes L$, le fibré $L$ provenant de $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$. Compte tenu du théorème A, le théorème C en découle immédiatement. On obtient aussi que

$$\mathbb{L}([F]) \ = \ \mathcal{O}(-\Theta_F) \ ,$$

ce qui montre comme indiqué dans l'Introduction que si $F'$ est un fibré vectoriel sur $X$ analogue à $F$, on a

$$\mathcal{O}(\Theta_{F'}) \ = \ \mathcal{O}(\Theta_F) \otimes \det{}^*\left(det(F') \otimes \det(F)^{-1}\right) \ ,$$

$(\det(F') \otimes \det(F)^{-1}$ étant vu comme un élément de $\mathrm{Pic}(J^{(d)}))$.

*7.4.4 – Démonstration du théorème D.* Remarquons que

$$H(r,d) \ = \ Z + \mathbb{Z}[F] \ ,$$

$Z$ désignant le sous-groupe de $H(r,d)$ isomorphe à $\mathrm{Pic}^{(0)}(X)$ (cf. §3). La partie **(a)** du théorème D découle immédiatement du corollaire 4.3.

Prouvons **(b)**. Il suffit de montrer que la restriction de

$$\mathbb{L} : H(r,d) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,d))$$

à $Z$ est injective. En effet, la composée

$$H(r,d) \xrightarrow{\mathbb{L}} \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,L))$$

est triviale sur $Z$ et injective sur $\mathbb{Z}[F]$ d'après 7.4.2. Donc si la restriction de $\mathbb{L}$ a $Z$ est injective, il en est de même de $\mathbb{L}$. D'après la proposition 7.10, il suffit, pour prouver l'injectivité de $\mathbb{L}_{|Z}$, de prouver celle de

$$\det{}^* : \mathrm{Pic}^{(0)}(X) \subset \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,L)) \ .$$

Si $L_0$ est un fibré en droites sur $J^{(d)}$, on a, les fibres de $\det : U(r,d) \to J^{(d)}$ étant projectives et irréductibles

$$\det{}_*(\det{}^*(L_0)) \ \simeq L_0 \ ,$$

donc $\det^*$ est injective. Ceci prouve **(b)**.

Du théorème C et de l'égalité $\mathbb{L}([F]) = \mathcal{O}(-\Theta_F)$ on déduit

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \ = \ \mathrm{im}(\mathbb{L}) + \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \ .$$

L'égalité

$$\mathrm{im}(\mathbb{L}) \cap \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \ = \ \mathrm{Pic}^{(0)}(X)$$

est encore une conséquence du théorème C et de la proposition 7.10. Le théorème D est donc démontré.

### 7.5 – Faisceau canonique et faisceau dualisant

On démontre ici les théorèmes E et F. On ne démontrera que le théorème E, l'autre étant analogue. Prouvons d'abord **(a)**. On note $T_U$ le fibré tangent de $U_s(r,d)$. On a un isomorphisme

$$f_{\mathbb{E}}^*(T_U) \ \simeq \ R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}) \ ,$$

et il suffit de calculer le déterminant de ce dernier faisceau dans $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s)$. On a une suite exacte

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s \times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \pi_0^{\#}(D) \otimes p_{\mathbb{P}^s}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1)) \longrightarrow 0 \ ,$$

d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\#}(D)) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{C}^{r-1}) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}) \longrightarrow 0$$

(car $d \gg 0$). Il en découle que

$$\det(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E})) \ \simeq \ \det(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^*))^{r-1} \otimes \det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\#}(D)))^{-1} \ .$$

En utilisant la suite exacte duale de (**) on trouve la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(1) \otimes R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\pi_0^{\#}(D^*)) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^*) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s} \otimes \mathbb{C}^{(r-1)g} \longrightarrow 0 \ ,$$

d'où un isomorphisme

$$\det(R^1p_{\mathbb{P}^s*}(\mathbb{E}^*)) \ \simeq\ \det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(1)\otimes R^1p_{\mathbb{P}^s*}(\pi_0^{\#}(D^*)))\ .$$

De même, en utilisant la suite exacte duale de (**) on trouve l'isomorphisme

$$\det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1)\otimes p_{\mathbb{P}^s*}(\mathbb{E}^*\otimes\pi_0^{\#}(D))) \ \simeq\ \det(p_{\mathbb{P}^s*}(\pi_0^{\#}(D))\otimes\mathbb{C}^{r-1}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1))\ .$$

Si $L$ est un fibré en droites de degré $d$ sur $X$, on a

$$h^0(L) \ =\ \chi(L)\ =\ d+1-g\ , \qquad h^1(L^*)\ =\ \chi(L^*)\ =\ d+g-1\ ,$$

donc

$$\det(R^1p_{\mathbb{P}^s*}(\mathbb{E}^*)) \ \simeq\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(d+g-1)\otimes\det(R^1p_{\mathbb{P}^s*}(\pi_0^{\#}(D)))\ ,$$

et

$$\det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1)\otimes p_{\mathbb{P}^s*}(\mathbb{E}^*\otimes\pi_0^{\#}(D))) \ \simeq\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}((r-1)(g-d-1))\otimes\det(p_{\mathbb{P}^s*}(\pi_0^{\#}(D)))^{r-1}\ .$$

Finalement, on a

$$\det(R^1p_{\mathbb{P}^s*}(\mathbb{E}^*\otimes\mathbb{E})) \ \simeq\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(2(r-1)d)\otimes\Delta^{r-1}\ ,$$

avec

$$\Delta\ =\ \det(p_{\mathbb{P}^s*}(\pi_0^{\#}(D^*)))\otimes\det(p_{\mathbb{P}^s*}(\pi_0^{\#}(D)))^{-1}\ .$$

Soit $F_0$ un fibré vectoriel de rang $2r$ et de degré $2(-d+r(g-1))$. En utilisant la suite exacte (**) on voit que

$$\gamma([F_0])_{\mathbb{E}} \ \simeq\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-2d(r-1))\otimes\det{}^*(p_{J(d)*}(D\otimes p_X^*(F_0)))\ ,$$

d'où

$$\det(R^1p_{\mathbb{P}^s*}(\mathbb{E}^*\otimes\mathbb{E})) \ \simeq\ \gamma([F_0])_{\mathbb{E}}^{-1}\otimes\det{}^*(p_{J(d)*}(D\otimes p_X^*(F_0)))\otimes\Delta^{r-1}\ ,$$

ce qui démontre **(a)** (la formulation du théorème E est légèrement différente pour être valable même si on n'a pas $d\gg 0$).

Prouvons **(b)**. D'après [22] le faisceau dualisant d'une variété normale est divisoriel, c'est à dire qu'il provient d'un diviseur de Weil de cette variété. Le faisceau dualisant de $U(r,d)$ est donc divisoriel. Mais cette variété est localement factorielle, donc tout diviseur de Weil de $U(r,d)$ est de Cartier, et par conséquent le faisceau dualisant de $U(r,d)$ est localement libre. Il est isomorphe à $\omega$, puisqu'il coïncide avec $\omega$ sur $U_s(r,d)$ et que $\mathrm{codim}_{U(r,d)}(U(r,d)\backslash U_s(r,d)\geq 2$. Ceci achève la démonstration du théorème E.

**Remarque** – Voici une autre démonstration du fait que le faisceau dualisant de $U(r,d)$ est localement libre : du fait que $R^{ss}$ est lisse, $U(r,d)$ est une variété de Cohen-Macaulay (cela découle du théorème de Hochster-Roberts ([15], p. 153, [10, 11]). Et une variété de Cohen-Macaulay localement factorielle est de Gorenstein, c'est à dire que son faisceau dualisant est inversible (cf. [16]).

## Références


[1] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Ann. Inst. Fourier 38 (1988), 105-168.

[2] Drézet. J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. Reine angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[3] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2$. Singularities, Representations of Algebras and Vector Bundles (Proc. Lambrecht 1985) LN 1273 Springer (1987), 337-362.

[4] Fulton, W. *Intersection theory.* Erg. der Math. und ihre Grenzg. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1984).

[5] Gieseker. D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. Math. 106 (1977), 45-60.

[6] Grothendieck, A. *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV - Les schémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki 221, (1960/61).

[7] Hartshorne R. *Algebraic geometry.* Grad. Texts in Math. Vol. 52. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1977).

[8] Hirschowitz A. *Problèmes de Brill-Noether en rang supérieur.* C. R. Acad. Sci. Paris 307 (1988), 153-156.

[9] Hirschowitz. A., Narasimhan, M.S. *Fibrés de t'Hooft spéciaux et applications.* Enumerative geometry and classical algebraic geometry, Progr. Math. 24, Birkhäuser, Boston (1982), 143-164.

[10] Hochster M., Roberts J. *Rings of invariants of reductive groups and on regular rings are Cohen-Macaulay.* Adv. Math. 13, 115 (1974), 115-175.

[11] Kempf, G. *The Hochster-Roberts theorem in invariant theory.* Mich. Math. J. 26 (1979), 19-32.

[12] Lang. S. *Abelian varieties.* New-York, Interscience Publ. 1959.

[13] Maruyama. M. *Moduli of stable sheaves II.* Math. Kyoto Univ. 18,3 (1978), 557-614.

[14] Matsumura. H *Commutative algebra.* New York, W.A. Benjamin Co. (1970).

[15] Mumford, D., Fogarty, J. *Geometric invariant theory.* Erg. der Math. und ihre Grenzg. Berlin-Heidelberg-New York. Springer (1984).

[16] Murthy, M.P. *A note on factorial rings.* Arch. Math. 15 (1964), 418-420.

[17] Narasimhan, M.S., Ramanan. S. *Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface.* Ann. Math. 89 (1969), 14-51.

[18] Narasimhan, M.S., Ramanan. S. *Vector bundles on curves.* Proc. of Bombay Coll. of Algebraic Geometry. Oxford Univ. Press (1969), 335-346.

[19] Newstead, P.E. *Introduction to moduli problems and orbit spaces.* TIFR Lect. Notes 51 (I978).

[20] Ramanan, S. *The moduli spaces or vector bundles on an algebraic curve.* Math. Ann 200 (1973), 69-84.

[21] Ramanathan, A. *Stable principal bundles on a compact Riemann surface, construction of moduli space.* Ph.D. Thesis. Univ. of Bombay (1976).

[22] Reid, M. *Canonical 3-folds.* Journées de Géométrie Algébrique d'Angers (1979), 273-310.

[23] Seshadri, C.S. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque 96 (1982).

[24] Shafarevich, I.R. *Basic algebraic Geometry.* Grundl. Bd 213. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1974).

**Note :** Ce texte reproduit l'article

Drézet, J.-M., Narasimhan, M.S. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*. Invent. Math. 97 (1989), 53-94.

J.-M. Drézet – Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

M.S. Narasimhan – Centre for Applicable Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Bangalore, India