VARIÉTÉS DE MODULES EXTRÉMALES DE FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire

1. Introduction

Soient r, c_1, c_2 des entiers, avec $r \geq 1$. On note $M(r, c_1, c_2)$ la variété de modules des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On dit que $M(r, c_1, c_2)$ est *extrémale* si

$$\dim(M(r, c_1, c_2)) \ > \ 0 \quad \text{et} \quad \dim(M(r, c_1, c_2 - 1)) \ \leq \ 0 \ .$$

On se propose ici de donner une description de certaines de ces variétés.

D'après [1], [3], il existe une unique fonction $\delta : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que

$$\dim(M(r, c_1, c_2) \ > \ 0 \iff \Delta \ \geq \ \delta\left(\frac{c_1}{r}\right) \ ,$$

avec

$$\Delta \ = \ \frac{1}{r}\left(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2\right) \ .$$

La fonction δ est construite à l'aide des *fibrés exceptionnels*. Par définition, un fibré exceptionnel est un fibré vectoriel algébrique stable E sur $\mathbb{P}_2$ tel que $\operatorname{Ext}^1(E, E) = \{0\}$ (cf. 3). Un fibré exceptionnel F est entièrement déterminé (à isomorphisme près) par sa pente, c'est à dire le nombre rationnel $\dfrac{c_1(F)}{\operatorname{rg}(F)}$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des pentes des fibrés exceptionnels. À tout élément on de $\mathcal{E}$ correspond donc un fibré exceptionnel E_α, de rang r_α. On note

$$I_{E_\alpha} \ = \,]\alpha - x_\alpha, \alpha + x_\alpha[\ \subset \ \mathbb{Q} \ ,$$

où x_α est la plus petite solution de l'équation $X^2 - 3X + \dfrac{1}{r_\alpha^2} = 0.$

On a d'après [3]

$$\mathbb{Q} \;=\; \coprod_{\alpha\in\mathcal{E}} I_{E_\alpha} \ ,$$

et sur l'intervalle I_{E_α}, la fonction δ est définie à l'aide de E_α (cf. 3).

On suppose maintenant que $\dfrac{c_1}{r} \in I_{E_\alpha}$, et $\dfrac{c_1}{r} \leq \alpha$ (le cas $\dfrac{c_1}{r} > \alpha$ est en quelque sorte dual du précédent). On définit dans [3] la *hauteur* de $M(r,c_1,c_2)$, qui est l'entier

$$h \;=\; h(M(r,c_1,c_2)) \;=\; r_\alpha r\left(\Delta - \delta\left(\frac{c_1}{r}\right)\right) \ .$$

On pose $F = E_\alpha$. On verra que si E_0 est un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, et si $\dim(M(r,c_1,c_2)) > 0$, alors $h = h^1(F^*\otimes E_0)$. Dans ce cas il est aussi facile de voir que $M(r,c_1,c_2)$ est extrémale si et seulement si $h \leq r_\alpha - 1$. Dans toute la suite on suppose que $M(r,c_1,c_2)$ est extrémale.

Il existe des triplets particuliers de fibrés exceptionnels, appelés *triades* dans [2], à partir desquels on peut construire des résolutions de la diagonale de $\mathbb{P}_2\times\mathbb{P}_2$, donnant naissance à des généralisations de la suite spectrale de Beilinson (cf. 3). On considère une triade du type (F,E',L'). Alors à tout faisceau cohérent E_0 sur $\mathbb{P}_2$ est associée une suite spectrale $E_r^{p,q}$ de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, convergeant vers E_0 en degré 0, vers 0 en tout autre degré, telle que les termes $E_1^{p,q}$ éventuellement non nuls soient

$$E_1^{-2,i} \;=\; F(-3)\otimes H^i(F^*\otimes E_0) \ , \qquad E_1^{-1,i} \;=\; G'(-3)\otimes H^i(L'^*(3)\otimes E_0) \ ,$$

(G' désignant le noyau du morphisme canonique $E'\otimes \mathrm{Hom}(E',L') \to L'$),

$$E_1^{0,i} \;=\; E'(-3)\otimes H^1(E'^*(3)\otimes E_0) \ ,$$

pour $i = 0,1,2$.

Supposons que E_0 soit semi-stable, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. L'annulation d'un certain nombre de termes $E_1^{p,q}$ est une conséquence immédiate de la semi-stabilité de E_0. En faisant des hypothèses supplémentaires sur la hauteur de $M(r,c_1,c_2)$ on obtient l'annulation d'autres termes.

On dit que la variété de modules extrémale $M(r,c_1,c_2)$ est *de faible hauteur* si $h \leq 4$, et si $h \leq 1$ dans le cas où α est un multiple entier impair de $1/2$, et $h = 0$ si α est entier. Une des raisons de cette notion est la

Proposition A : *Soit U un faisceau cohérent sans torsion sur $\mathbb{P}_2$ tel que* $\mathrm{Hom}(U,F(-1)) = \{0\}$*. Soit $h_0 = h^1(F^*\otimes U)$. Alors on a*

$$h^1(E'^*(3)\otimes U) \;=\; h^1(L'^*(3)\otimes U) \;=\; 0$$

dans les cas suivants :

(i) α n'est pas un multiple entier de $1/2$ et $h_0 \leq 4$,

(ii) α est un multiple entier impair de $1/2$ et $h_0 \leq 2$,

(iii) α est entier et $h_0 \leq 1$.

Si $\alpha = 0$, on a $F = \mathcal{O}$, et si on prend $(F,E',L') = (\mathcal{O},\mathcal{O}(1),\mathcal{O}(2))$, on trouve $h^1(U(1)) = 0$ si $h^1(U) \leq 1$, résultat bien connu (cf. [7]). La proposition A s'applique en particulier au cas où U est semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, dans le cas où $M(r,c_1,c_2)$ est de faible hauteur. Je conjecture qu'elle est aussi vraie si $M(r, c_1, c_2)$ est extrémale. Faute d'avoir ce résultat, on supposera dans toute la suite que $M(r, c_1, c_2)$ est de faible hauteur. En utilisant la suite spectrale de Beilinson généralisée, on aura alors

Proposition B : *Supposons que $M(r, c_1, c_2)$ est de faible hauteur et soit U un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Alors on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \big(G'(-3) \otimes H^0(L'^*(3) \otimes U)\big) \oplus \big(F(-3) \otimes H^1(F^* \otimes U)\big) \longrightarrow$$
$$E'(-3) \otimes H^0(E'^*(3) \otimes U) \longrightarrow U \longrightarrow 0\ .$$

En utilisant une autre triade, on peut aussi démontrer le résultat suivant : soit X le conoyau du morphisme canonique $F \to E' \otimes \mathrm{Hom}(F, E')^*$. Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E'(-3) \otimes H^1(E'^* \otimes U) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (X(-3) \otimes H^1(F^* \otimes U)) \oplus (E'(-3) \otimes H^0(L'^*(3) \otimes U)) \longrightarrow U \longrightarrow 0\ .$$

On n'utilisera pas cette suite exacte par la suite.

Les entiers

$$q \ = \ h^0(L'^*(3) \otimes U)\ , \quad h \ = h^1(F^* \otimes U)\ , \quad n \ = \ h^0(E'^*(3) \otimes U)\ ,$$

ne dépendent que de r, c_1, c_2. Ce qui nous conduit à nous intéresser à des complexes du type

$$\begin{array}{ccc} K^\bullet : \big(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q\big) \oplus \big(F(-3) \otimes \mathbb{C}^h\big) & \xrightarrow{\ \phi\ } & E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n \\ \| & & \| \\ K^0 & & K^1 \end{array}$$

Soit W l'espace vectoriel de tels complexes. Sur W agit de manière évidente le groupe algébrique $G = (\mathrm{Aut}(K^0) \times \mathrm{Aut}(K^1))/\mathbb{C}^*$. Notons que si $h \neq 0$, ce groupe n'est pas réductif. Cela est dû au sous-groupe H isomorphe à $\mathrm{Hom}(F(-3) \otimes \mathbb{C}^h, G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q)$ de $\mathrm{Aut}(K^0)$. On dit que deux éléments de W sont *équivalents* s'ils sont dans la même H-orbite. On pose

$$a_1 \ = \ n\,\mathrm{rg}(F) + h\,\mathrm{rg}(E')\ , \quad a_2 \ = \ n\,\mathrm{rg}(L') - q\,\mathrm{rg}(E')\ .$$

Soit $K^\bullet$ un complexe comme précédemment. On appelle *sous-complexe* de $K^\bullet$ un complexe

$$\begin{array}{ccc} K'^\bullet : \big(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^{q'}\big) \oplus \big(F(-3) \otimes \mathbb{C}^{h'}\big) & \xrightarrow{\ \phi'\ } & E'(-3) \otimes \mathbb{C}^{n'} \\ \| & & \| \\ K'^0 & & K'^1 \end{array}$$

tel que $\mathbb{C}^{q'} \subset \mathbb{C}^q$, $\mathbb{C}^{h'} \subset \mathbb{C}^h$, $\mathbb{C}^{n'} \subset \mathbb{C}^n$, qu'on ait

$$\phi(\big(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^{q'}\big) \oplus \big(F(-3) \otimes \mathbb{C}^{h'}\big)) \subset E'(-3) \otimes \mathbb{C}^{n'}$$

et que ϕ' soit la restriction de ϕ. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K'^{\bullet} : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^{q'}\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^{h'}\big) & \xrightarrow{\phi'} & E'(-3)\otimes\mathbb{C}^{n'} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ K^{\bullet} : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^{q}\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^{h}\big) & \xrightarrow{\phi} & E'(-3)\otimes\mathbb{C}^{n} \end{array} .$$

On pose alors

$$\Delta_1(K'^{\bullet},K^{\bullet}) \ = \ q'n-qn' \ , \quad \Delta_2(K'^{\bullet},K^{\bullet}) = h'n-hn' \ .$$

On dit que $K^{\bullet}$ est *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout complexe $K_0^{\bullet}$, équivalent à $K^{\bullet}$, et tout sous-complexe $K'^{\bullet}_0$ de $K_0^{\bullet}$, on a

$$a_1\Delta_1(K'^{\bullet}_0,K_0^{\bullet})+a_2\Delta_2(K'^{\bullet}_0,K_0^{\bullet}) \ \leq 0 \ ,$$

et si en cas d'égalité on a $\Delta_2(K'^{\bullet}_0,K_0^{\bullet})\geq 0$ (resp. >0). On suppose maintenant qu'il existe une triade du type (F,L',H') (voir 3.3.2 pour la signification de cette hypothèse). On a alors le

Théorème C : *Le complexe $K^{\bullet}$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si le morphisme de faisceaux ϕ est injectif et* $\mathrm{coker}(\phi)$ *semi-stable (resp. stable).*

Notons que ce résultat est valable même si $M(r,c_1,c_2)$ est extrémale (et pas seulement de faible hauteur). Le fait que $M(r,c_1,c_2)$ est de faible hauteur assure simplement que tout faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 est conoyau d'un tel morphisme.

La démonstration du théorème C donne quelques résultats sur la structure des faisceaux semi-stables non localement libres, dans le cas où $M(r,c_1,c_2)$ est de faible hauteur. Si $\dfrac{c_1}{r}\neq\alpha$, tout faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 est localement libre. Si $\dfrac{c_1}{r}=\alpha$, il peut se produire qu'un faisceau semi-stable E_0 ne soit pas libre en un point x de $\mathbb{P}_2$. Dans ce cas il contient un sous-faisceau d'un type particulier : $F(H_0)\subset E_0$, H_0 étant un sous-espace vectoriel de F_x distinct de F_x, et $F(H_0)$ le noyau du morphisme $\phi : F\otimes H_0^{\perp}\to\mathbb{C}_x$, $\mathbb{C}_x$ désignant le faisceau concentré en x, de fibre $\mathbb{C}$ en ce point, ϕ étant la restriction du morphisme trace $F\otimes F_x^*\to\mathbb{C}_x$.

Soit $\mathcal{M}$ l'ouvert de W constitué des complexes semi-stables. Sur $\mathcal{M}\times\mathbb{P}_2$ existe un *complexe universel* dont le conoyau est une famille de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, paramétrée par $\mathcal{M}$. On déduit de cette famille un morphisme

$$\pi : \mathcal{M}\longrightarrow M(r,c_1,c_2) \ ,$$

et on a le

Théorème D : *Le morphisme π est un bon quotient de $\mathcal{M}$ par G.*

On obtient ainsi une description de $M(r,c_1,c_2)$ comme bon quotient d'un ouvert d'un espace affine par un groupe algébrique. Il peut être intéressant de généraliser un peu ce problème de quotient : soient W_0, W_1, W_2 des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie (dans le cas de $M(r,c_1,c_2)$ on a $W_0=\mathrm{Hom}(G',E')$, $W_1=\mathrm{Hom}(F,E')$, $W_2=\mathrm{Hom}(F,G')$). Soit $\sigma : W_0\otimes W_2\to W_1$ une application linéaire (dans le cas de $M(r,c_1,c_2)$ c'est l'application canonique). On considère l'espace vectoriel

$$W \;=\; L(W_0^*\otimes\mathbb{C}^q,\mathbb{C}^n)\times L(W_1^*\otimes\mathbb{C}^h,\mathbb{C}^n)\ .$$

Soient H le groupe additif $L(W_2^*\otimes\mathbb{C}^h,\mathbb{C}^q)$, $G_0'=\mathrm{GL}(q)\times\mathrm{GL}(h)\times\mathrm{GL}(n)$, et G le produit semi-direct de H et G_0' relativement au morphisme

$$\begin{array}{ccc} G_0' & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(H) \\ (g,g',g'') & \longmapsto & \big(t\mapsto g\circ t\circ(I_{W_1^*}\otimes g'^{-1})\big) \end{array}$$

On peut voir les éléments de G comme des couples (A,g''), avec $g''\in\mathrm{GL}(n)$, A étant une matrice de la forme $\begin{pmatrix} g & t\\ 0 & g'\end{pmatrix}$ avec g, g',t dans $\mathrm{GL}(q)$, $\mathrm{GL}(h)$ et H respectivement. On a une action de G sur W :

$$(A,g'').(\phi_0,\phi_1) \;=\; (\phi_0',\phi_1')\ ,$$

avec

$$\phi_0' \;=\; g''\circ\phi_0\circ(I_{W_0^*}\otimes g^{-1})\ ,\quad \phi_1' \;=\; g''\circ\big(\phi_1\circ(I_{W_1^*}\otimes g'^{-1})+\phi_0\circ(I_{W_0^*}\otimes t)\circ({}^t\sigma\otimes I_{W_1^*})\big)\ .$$

Il s'agit de trouver des bons quotients d'ouverts adéquats de W, qui soient des variétés projectives.

Résumé. Dans le chapitre 2 on donne les définitions de base et quelques résultats généraux utilisés plus loin. Le chapitre 3 est consacré à des rappels sur les fibrés exceptionnels. On y démontre aussi des résultats nouveaux qui seront utilisés dans la démonstration du théorème C. Le chapitre 4 est consacré à la démonstration des propositions A et B. Dans le chapitre 5 on étudie les complexes dont il est question dans le théorème C. Dans le chapitre 6 on démontre les théorèmes C et D.

2. Préliminaires

2.1 – Formulaire et notations

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, de rang $r>0$, et de classes de Chern c_1, c_2. On pose

$$\Delta(E) \;=\; \Delta(r,c_1,c_2) \;=\; \frac{1}{r}\left(c_2-\frac{r-1}{2r}c_1^2\right)\ ,$$

qu'on appelle le *discriminant* de E. On appelle *pente* de E le nombre rationnel $\dfrac{c_1}{r}$, et on le note $\mu(E)$. Soit $P(X)=\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{3}{2}X+1$. Le théorème de Riemann-Roch s'écrit :

$$\chi(E) \;=\; r(P(\mu(E))-\Delta(E))\ ,$$

$\chi(E)$ désignant la caractéristique d'Euler-Poincaré de E. Si E, F sont des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, on pose

$$\chi(E,F) \;=\; \sum_{0\le i\le 2}(-1)^i\dim(\mathrm{Ext}^i(E,F))\ .$$

Alors on a, si $\mathrm{rg}(E) > 0$ et $\mathrm{rg}(F) > 0$,

$$\chi(E,F) \ = \ \mathrm{rg}(E)\,\mathrm{rg}(F)(P(\mu(F)-\mu(E)) - \Delta(E) - \Delta(F))$$

(prop. (1.1) de [1]). On a, pour tout entier $i \geq 0$, un isomorphisme
$\mathrm{Ext}^i(E,F) \simeq \mathrm{Ext}^{2-i}(F,E(-3))^*$ (dualité de Serre, prop. (1.2) de [1]), même si $\mathrm{rg}(E)$ ou $\mathrm{rg}(F)$ est nul.

On note Q le fibré quotient canonique de $\mathcal{O}\otimes H^0((\mathcal{O}(1))^*$ sur $\mathbb{P}_2$. On note Q_2 le fibré quotient canonique de $\mathcal{O}\otimes H^0((\mathcal{O}(2))^*$, c'est à dire qu'on a une suite exacte

$$O \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}\otimes H^0(\mathcal{O}(2)) \longrightarrow Q_2 \longrightarrow 0 \ .$$

2.2 – Faisceaux semi-stables

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. On dit que E est *semi-stable* (resp. *stable*) s'il est sans torsion, et si pour tout sous-faisceau propre F de E on a $\mu(F) \leq \mu(E)$, et en cas d'égalité $\dfrac{\chi(F)}{\mathrm{rg}(F)} \leq \dfrac{\chi(E)}{\mathrm{rg}(E)}$ (resp . $<$). Il revient au même de dire qu'on a

$$\frac{P_F(m)}{\mathrm{rg}(F)} \ \leq \ \frac{P_E(m)}{\mathrm{rg}(E)} \quad (\text{resp} <) \ \ \text{pour } m \gg 0 \ ,$$

où pour tout faisceau cohérent U sur $\mathbb{P}_2$, P_U désigne le polynôme de Hilbert de U. Cette notion de stabilité est celle de Gieseker [5] et Maruyama [9].

Si E est semi-stable, il existe une filtration de E, dite *de Jordan-Hölder* :
$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$, telle que pour $1 \leq i \leq n$, E_i/E_{i-1} soit stable et de mêmes pente et discriminant que E. Une telle filtration n'est pas toujours unique, mais la classe d'isomorphisme du gradué (c'est à dire la somme directe des E_i/E_{i-1}) ne dépend que de celle de E. On notera $\mathrm{Gr}(E)$ la classe d'isomorphisme du gradué.

Soit E un faisceau cohérent sans torsion sur $\mathbb{P}_2$. Il existe une unique filtration de E : $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_m = E$, telle que, pour $1 \leq i \leq m$, E_i/E_{i-1} soit l'unique sous-faisceau G de E/E_{i-1} possédant la propriété suivante : pour tout sous-faisceau propre H de E/E_{i-1}, on a

$$\frac{P_H(m)}{\mathrm{rg}(H)} \ \leq \ \frac{P_G(m)}{\mathrm{rg}(G)} \quad \text{pour } m \gg 0 \ ,$$

et en cas d'égalité, $\mathrm{rg}(H) \leq \mathrm{rg}(G)$. Cette filtration s'appelle la *filtration de Harder-Narasimhan* de E.

2.3 – Variétés de modules

Soit $\mathbf{F}$ le foncteur contravariant de la catégorie des variétés algébriques dans celle des ensembles, associant à S l'ensemble des classes d'équivalence de faisceaux E sur $S\times\mathbb{P}_2$, plats sur S, tels que pour tout point fermé s de S, $E_s = E_{|\{s\}\times\mathbb{P}_2}$ soit semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Par définition, deux tels faisceaux E, E' sont dits *équivalents* s'il existe un fibré en droites L sur S tel que $E'\otimes p_S^*(L) \simeq E$, p_S désignant la projection $S\times\mathbb{P}_2 \to S$. Il existe alors une variété algébrique, notée $M(r,c_1,c_2)$, et appelée la *variété de modules des faisceaux* *semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2*, unique à isomorphisme près, caractérisée par les deux propriétés suivantes :

(i) Il existe un morphisme de foncteurs $\mathbf{F} \to \mathrm{Hom}(\bullet, M(r, c_1, c_2))$.

(ii) Si M est une variété algébrique, et $\mathbf{F} \to \mathrm{Hom}(\bullet, M)$ un morphisme de foncteurs, il existe un unique morphisme $f : M(r, c_1, c_2) \to M$ tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(\bullet, M(r, c_1, c_2)) \arrow[dd, "\mathrm{Hom}(\bullet, f)"] \\ \mathbf{F} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathrm{Hom}(\bullet, M) \end{tikzcd}$$

Soit S une variété algébrique. On appelle *famille de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par S* un faisceau cohérent E sur $S \times \mathbb{P}_2$, plat sur S, tel que pour tout point fermé s de S, E_s soit semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. D'après (i) on déduit d'un tel E un morphisme

$$f_E : S \longrightarrow M(r, c_1, c_2)$$

qui ne dépend en fait que de la classe d'équivalence de E.

La construction de $M(r, c_1, c_2)$ est donnée dans [5] et [9]. Cette variété est projective, irréductible d'après [1], et localement factorielle d'après [4]. Les points fermés de $M(r, c_1, c_2)$ sont les classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 (deux tels faisceaux E, E' étant équivalents si $\mathrm{Gr}(E) = \mathrm{Gr}(E')$).

2.4 – Faisceaux p-semi-stables

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. On dit que E est *p-semi-stable* (resp. *p-stable*) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau non nul F de E tel que $\mathrm{rg}(E) < \mathrm{rg}(F)$ on a $\mu(F) \leq \mu(E)$ (resp. $<$). On a les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd} E \text{ p-stable} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & E \text{ p-semi-stable} \\ E \text{ stable} \arrow[r, Rightarrow] & E \text{ semi-stable} \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Soit F un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, libre en un point x de $\mathbb{P}_2$. On note $\mathbb{C}_x$ le faisceau cohérent concentré en x, de fibre $\mathbb{C}$ en ce point, $F_x = F \otimes \mathbb{C}_x$. Soit H un sous-espace vectoriel de F_x distinct de F_x. On note $F(H)$ le noyau de la restriction à $F \otimes H^\perp$ du morphisme canonique $F \otimes F_x^* \to \mathbb{C}_x$.

Proposition 2.1 : *On suppose que F est p-stable. Alors $F(H)$ est stable.*

Démonstration. Puisque $F(H) \subset F \otimes H^\perp$, on a, pour tout sous-faisceau propre E de $F(H)$, $\mu(E) \leq \mu(F \otimes H^\perp) = \mu(F)$.

Supposons que $\mu(E) = \mu(F \otimes H^\perp) = \mu(F)$. On peut supposer aussi que $F(H)/E$ est sans torsion. En effet, dans le cas contraire, soit T le sous-faisceau de torsion de $F(H)/E$, E' son image réciproque dans $F(H)$. On a une suite exacte $0 \to E \to E' \to T \to 0$. Le faisceau T est concentré en un nombre fini de points, car sinon on aurait $\mu(E') > \mu(E) = \mu(F(H))$. On a donc $\chi(T) \geq 0$, donc $\chi(E') \geq \chi(E)$, et si on prouve que $\chi(E') \leq \chi(F(H))$, on aura aussi $\chi(E) \leq \chi(F(H))$. On peut donc supposer que $E = E'$, c'est à dire que $F(H)/E$ est sans torsion. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow F(H)/E \longrightarrow F \otimes H^\perp/E \longrightarrow F \otimes H^\perp/F(H) = \mathbb{C}_x \longrightarrow 0$$

on déduit que le sous-faisceau de torsion de $F \otimes H^\perp/E$ est 0 ou $\mathbb{C}_x$.

Lemme 2.2 : *Soient K un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nul, et U un sous-faisceau de $F \otimes K$ tel que $F \otimes K/U$ soit sans torsion, et $\mu(U) = \mu(F)$. Alors il existe un sous-espace vectoriel K' de K tel que $U = F \otimes K'$.*

Supposons ce lemme démontré et achevons la démonstration de la proposition 2.1. Deux cas se présentent :

Premier cas : $F \otimes H^\perp/E$ est sans torsion. On peut donc mettre E sous la forme $E = F \otimes H'$. Mais ceci est impossible car $F \otimes H'$ n'est pas contenu dans $F(H)$.

Deuxième cas : le sous-faisceau de torsion de $F \otimes H^\perp/E$ est $\mathbb{C}_x$. Soit E' l'image réciproque de $\mathbb{C}_x$ dans $F \otimes H^\perp$ (par la projection $F \otimes H^\perp \to F \otimes H^\perp/E$). On a une suite exacte $0 \to E \to E' \to \mathbb{C}_x \to 0$.

Le faisceau $F \otimes H^\perp/E'$ est sans torsion, donc E' se met sous la forme $E' = F \otimes H'$. Donc

$$\chi(E') = \dim(H')\chi(F) , \quad \chi(E) = \dim(H')\chi(F) - 1 .$$

D'où

$$\frac{\chi(E)}{\mathrm{rg}(E)} = \frac{\dim(H')\chi(F) - 1}{\dim(H')\,\mathrm{rg}(F)} \leq \frac{\dim(H^\perp)\chi(F) - 1}{\dim(H^\perp)\,\mathrm{rg}(F)} = \frac{\chi(F(H))}{\mathrm{rg}(F(H))} ,$$

avec égalité si et seulement si $E = F(H)$. Ceci prouve que $F(H)$ est stable et démontre la proposition 2.1. $\square$

Démontrons le lemme 2.2, par récurrence sur $\dim(K)$, le résultat étant évident pour $\dim(K) = 1$. Supposons le vérifié pour $\dim(K) < p$, et prouvons qu'il est vrai si $\dim(K) = p$.

Soit $L \subset K$ un sous-espace vectoriel propre. Supposons d'abord que $(F \otimes L) \cap U \neq 0$. Soit $\psi : U \to F \otimes (K/L)$ le morphisme composé

$$U \hookrightarrow F \otimes K \to F \otimes (K/L) .$$

Puisque F est p-stable, on a $\mu(\mathrm{im}(\psi)) \leq \mu(F)$ et $\mu(\ker(\psi)) \leq \mu(F)$. Donc $\mu(\ker(\psi)) = \mu(F)$. On a $\ker(\psi) = (F \otimes L) \cap U$. On a

$$F \otimes L/((F \otimes L) \cap U) \subset F \otimes K/U ,$$

donc $F \otimes L/((F \otimes L) \cap U)$ est sans torsion. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un sous-espace vectoriel $L' \subset L$ non nul tel que $(F \otimes L) \cap U = F \otimes L'$. Soit U' l'image de U dans $F \otimes (K/L')$. On a $F \otimes (K/L')/U' = F \otimes K/U$, donc $F \otimes (K/L')/U'$ est sans torsion. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un sous-espace vectoriel K' de K/L' tel que $U' = F \otimes K'$. On en déduit que $U = F \otimes K''$, où K'' est l'image inverse de K' dans K, ce qui démontre le lemme 2.2.

On suppose maintenant que $(F\otimes L)\cap U=0$ pour tout sous-espace vectoriel propre L de K. On prend pour L un hyperplan de K. Soit L' une droite de K supplémentaire de L. Le morphisme composé

$$U \hookrightarrow F\otimes K \xrightarrow{\text{proj.}} F\otimes L'$$

est injectif, donc U est un sous-faisceau de F. Puisque F est p-stable et $\mu(U)=\mu(F)$, F/U est de torsion, et $\mathrm{Hom}(U,F)=\mathbb{C}i$, i désignant l'inclusion de U dans F. Il en découle que si $(k_1,\ldots,k_p)$ est une base de K, identifiant K à $\mathbb{C}^p$, l'inclusion $U\hookrightarrow F\otimes K$ est de la forme $(\lambda_1 i,\ldots,\lambda_p i)$, où $\lambda_1,\ldots,\lambda_p\in\mathbb{C}$. Il en découle que

$$U \ \subset\ F\otimes\left(\sum_{1\leq j\leq p}\lambda_j k_j\right) ,$$

et donc

$$F\otimes K/U \ \simeq (F/U)\oplus(F\otimes\mathbb{C}^{p-1}) .$$

Comme $F\otimes K/U$ est sans torsion, on a $F/U=0$, donc $U=F$. Ceci achéve la démonstration du lemme 2.2. $\Box$

3. Fibrés exceptionnels

3.1 – Définition et premières propriétés des fibrés exceptionnels

On appelle *fibré exceptionnel* sur $\mathbb{P}_2$ un fibré vectoriel algébrique stable E sur $\mathbb{P}_2$ tel que $\mathrm{Ext}^1(E,E)=\{0\}$) (cf. [1]. On montre qu'il est équivalent de dire que E est un fibré vectoriel algébrique simple, c'est à dire $\mathrm{End}(E)=\mathbb{C}$, et rigide, c'est à dire $\mathrm{Ext}^1(E,E)=\{0\}$ (cf. [2]).

Les résultats qui suivent sont démontrés dans [1]. Un fibré exceptionnel est entièrement déterminé par sa pente. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des pentes des fibrés exceptionnels. Si $\alpha\in\mathcal{E}$, on note E_α un fibré exceptionnel de pente α, et r_α son rang. On montre que r_α est exactement le dénominateur de α, c'est à dire que r_α et $c_1(E_\alpha)$ sont premiers entre eux. Soit $\Delta_\alpha=\Delta(E_\alpha)$. On a la formule

$$\Delta_\alpha \ = \ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r_\alpha^2}\right) ,$$

qui est simplement une transcription de l'égalité $\chi(E_\alpha,E_\alpha)=1$.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres rationnels diadiques, c'est à dire pouvant se mettre sous la forme $\frac{p}{2^q}$, p et q étant des entiers, $q\geq 0$. On a une bijection $\epsilon:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$. Cette application est entièrement déterminée par les propriétés suivantes :

(i) on a $\epsilon(k)=k$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$,

(ii) pour tous $p,q\in\mathbb{Z}$, avec $q\geq 0$, on a

$$\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) \ = \ \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right).\epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right) ,$$

où . est la loi suivante

$$\alpha.\beta \;=\; \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\Delta_\alpha - \Delta_\beta}{3+\alpha-\beta} \;,$$

pour tous α, β dans $\mathcal{E}$ tels que $3+\alpha-\beta \neq 0$.

Donnons une explication de (ii). On considère dans le plan de coordonnées (μ, Δ) la courbe C_1 d'équation

$$\Delta \;=\; P\left(\mu - \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)\right) - \Delta_{\epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)} \;.$$

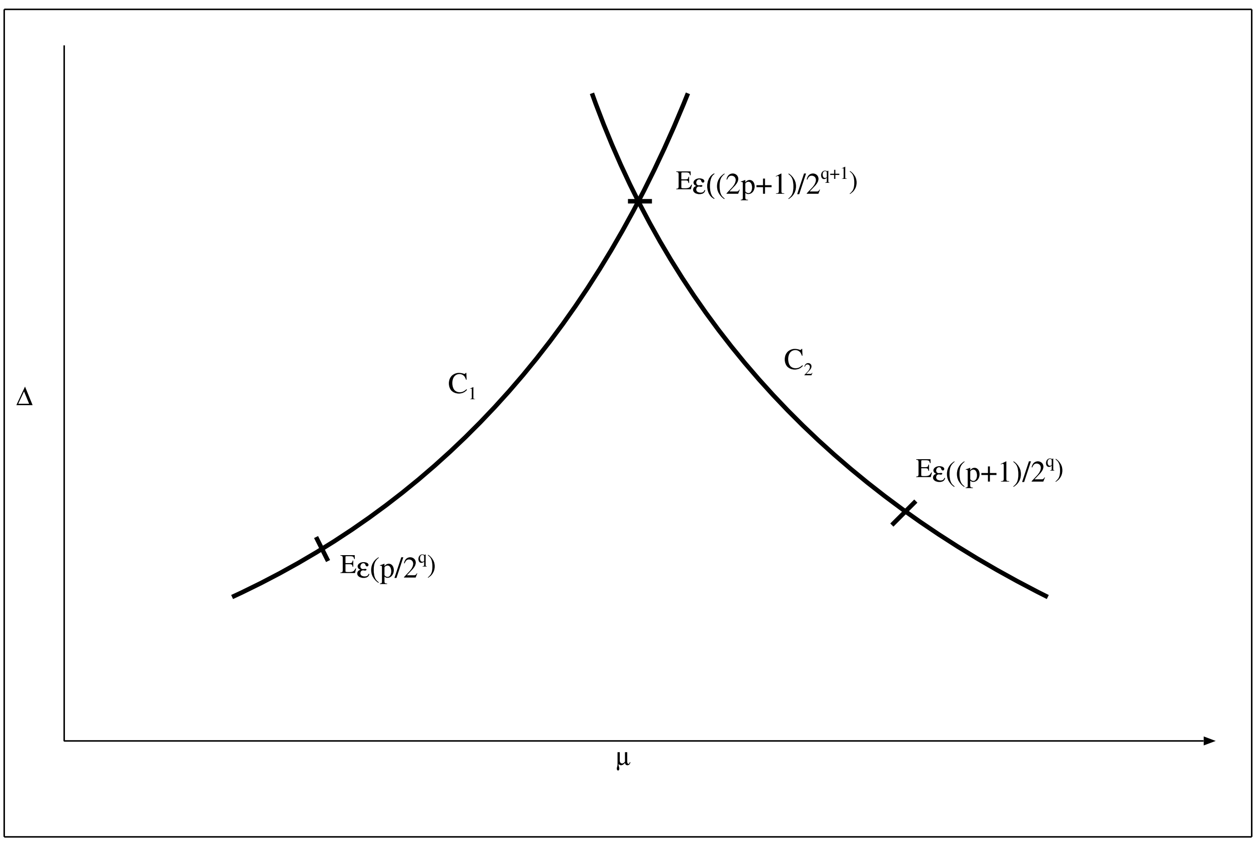
La courbe C_1 contient les points $(\mu(E), \Delta(E))$, E étant un faisceau cohérent tel que $\chi(E_{\epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)}, E) = 0$. Soit de même C_2 la courbe d'équation

$$\Delta \;=\; P\left(\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) - \mu\right) - \Delta_{\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)} \;.$$

Cette courbe contient les points $(\mu(E), \Delta(E))$, E étant un faisceau cohérent tel que $\chi(E, E_{\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)}) = 0$. L'égalité (ii) dit précisément que le point correspondant à $E_{\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)}$ est l'intersection de C_1 et C_2. Autrement dit, on a

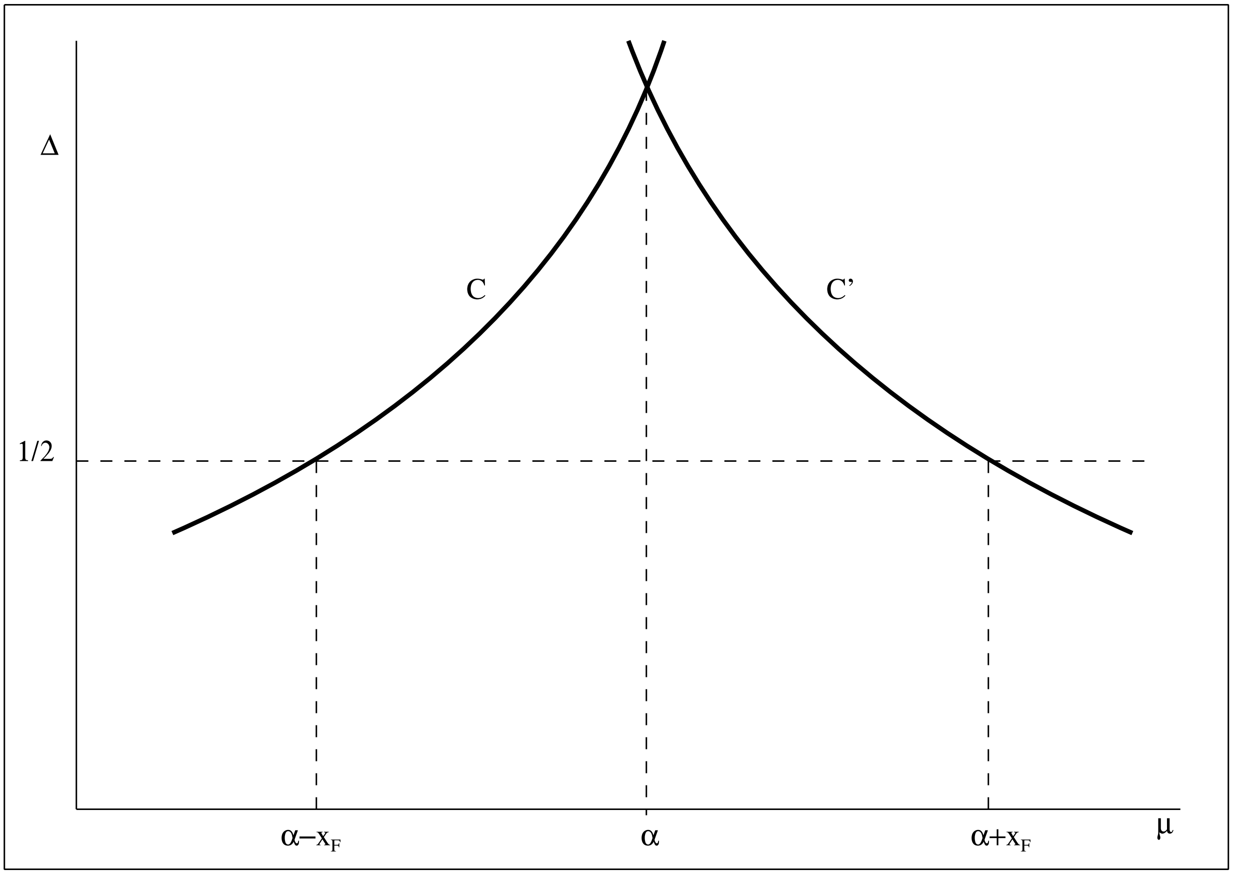
$$\chi(E_{\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)}, E_{\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)}) \;=\; \chi(E_{\epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)}, E_{\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)}) \;=\; 0 \;.$$

Ces deux courbes sont représentées ci-dessous :



Soit $F = E_\alpha$ un fibré exceptionnel. On notera x_F la plus petite solution de l'équation $X^2 - 3X + \dfrac{1}{r_\alpha^2} = 0$, et $I_F =]\alpha - x_F, \alpha + x_F[$.

Soit C (resp. C') la parabole correspondant aux faisceaux E tels que $\chi(F,E)=0$ (resp. $\chi(E,F)=0$). Ces courbes coupent l'horizontale $\Delta = \frac{1}{2}$ au point d'abscisse $\alpha - x_F$ pour C et $\alpha + x_F$ pour C' :



On montre dans [3] que $\mathbb{Q} = \coprod_{\beta\in\mathcal{E}} I_{E_\beta}$.

3.2 – Conditions d'existence des faisceaux semi-stables

(cf. [1], [3])

Il existe une unique application $\delta : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ possédant la propriété suivante : pour tous entiers r, c_1, c_2, avec $r \geq 1$, on a $\dim(M(r,c_1,c_2)) > 0$ si et seulement si $\Delta(r,c_1,c_2) \geq \delta(\frac{c_1}{r})$. Il suffit de construire δ sur chaque intervalle I_{E_α}, puisque ces intervalles constituent une partition de $\mathbb{Q}$. Le graphe de la restriction de δ à I_{E_α} est constitué de C sur la première moitié de I_{E_α}, et de C' sur la seconde (cf. 3.1).

Soient r, c_1, c_2 des entiers tels que $r \geq 1$ et $\Delta(r,c_1,c_2) \geq \delta(\frac{c_1}{r})$. On suppose que $\frac{c_1}{r} \in I_{E_\alpha}$. Soit E un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On pose

$$h(r,c_1,c_2) \;=\; r_\alpha r\left(\Delta(r,c_1,c_2) - \delta(\frac{c_1}{r})\right) .$$

D'après les formules définissant la fonction δ il est aisé de voir que $h(r, c_1, c_2)$ est un entier positif ou nul. On l'appelle la *hauteur* de $M(r, c_1, c_2)$. On a

$$\begin{aligned} h(r, c_1, c_2) &= -\chi(E_\alpha, E) \ \text{si} \ \frac{c_1}{r} \leq \alpha, \\ &= -\chi(E, E_\alpha) \ \text{si} \ \frac{c_1}{r} > \alpha. \end{aligned}$$

3.3 – Triades de fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée

(cf. [2])

3.3.1 – On dit que deux fibrés exceptionnels E_α, E_β, sont *consécutifs* si on peut écrire

$$\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^n}\right) \ , \ \beta = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^n}\right) \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^n}\right) - 3 \ , \ \beta = \epsilon\left(\frac{p}{2^n}\right) \ ,$$

p et n étant des entiers avec $n \geq 0$. Dans le premier cas on dit que E_α et E_β sont *consécutifs proches.*

On appelle *triade* de fibrés exceptionnels un triplet $(E_\alpha, E_\gamma, E_\beta)$ de tels fibrés, E_α, E_β étant consécutifs proches et $\gamma = \alpha.\beta$. On convient aussi d'appeler triade tout triplet du type $(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(k+1), \mathcal{O}(k+2))$. Cette définition d'une triade est un peu plus restrictive que celle de [2]. La notion de triade est liée à la construction des fibrés exceptionnels. En effet, soit $(E_\alpha, E_\gamma, E_\beta)$ une triade. Alors E_α, E_γ (resp. E_γ, E_β) sont consécutifs, et $E_{\alpha.\gamma}$ (resp. $E_{\gamma.\beta}$) est simplement le noyau (resp. conoyau) du morphisme canonique surjectif (resp. injectif)

$$\mathrm{ev} : E_\gamma \otimes \mathrm{Hom}(E_\gamma, E_\beta) \longrightarrow E_\beta \ , \qquad (\text{ resp. } \ \mathrm{ev}^* : E_\alpha \longrightarrow E_\gamma \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\gamma)^* \ ) \ .$$

En partant de la triade $(E_\alpha, E_\gamma, E_\beta)$ on obtient ainsi deux autres triades, $(E_\alpha, E_{\alpha.\gamma}, E_\gamma)$ et $(E_\gamma, E_{\gamma.\beta}, E_\beta)$. On obtient tous les fibrés exceptionnels par ce procédé en partant des triades simples $(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(k+1), \mathcal{O}(k+2))$. Le morphisme canonique $\mathrm{ev}^* : E_\gamma \to E_\beta \otimes \mathrm{Hom}(E_\gamma, E_\beta)^*$ est injectif, et son conoyau est un fibré exceptionnel S. Le morphisme canonique $\mathrm{ev} : E_\alpha \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\gamma) \to E_\gamma$ est surjectif, et son noyau est isomorphe àfl $S(-3)$. Les suites exactes

$$0 \to E_\gamma \longrightarrow E_\beta \otimes \mathrm{Hom}(E_\gamma, E_\beta)^* \longrightarrow S \to 0 \ , \ 0 \to S(-3) \longrightarrow E_\alpha \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\gamma) \longrightarrow E_\gamma \to 0$$

induisent des isomorphismes $\mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\gamma) \simeq \mathrm{Hom}(S, E_\alpha(3))^*$ et $\mathrm{Hom}(E_\gamma, E_\beta) \simeq \mathrm{Hom}(E_\beta, S)^*$. On en déduit une suite de morphisme de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$:

$$E_\alpha \boxtimes E_\alpha^*(-3) \xrightarrow{A} E_\gamma \boxtimes S^* \xrightarrow{B} E_\beta \boxtimes E_\beta^*$$

(où pour tous faisceaux cohérents U_1, U_2 sur $\mathbb{P}_2$, $U_1 \boxtimes U_2$ désigne $p_1^*(U_1) \otimes p_2^*(U_2)$, p_1, p_2 étant les projections $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$). Soient Δ la diagonale de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ et $\mathrm{tr} : E_\beta \boxtimes E_\beta^* \to \mathcal{O}_\Delta$ le morphisme trace. On montre que la suite

$$0 \longrightarrow E_\alpha \boxtimes E_\alpha^*(-3) \xrightarrow{A} E_\gamma \boxtimes S^* \xrightarrow{B} E_\beta \boxtimes E_\beta^* \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0$$

est exacte. On associe donc à la triade $(E_\alpha, E_\gamma, E_\beta)$ une résolution de $\mathcal{O}_\Delta$. On en déduit, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{P}_2$ une suite spectrale de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, convergeant vers $\mathcal{V}$ en degré 0, vers 0 en tout autre degré. Les termes $E_1^{p,q}$ éventuellement non nuls sont les suivants :

$$E_1^{-2,q} = H^q(\mathcal{V} \otimes E_\alpha^*(-3)) \otimes E_\alpha, \quad E_1^{-1,q} = H^q(\mathcal{V} \otimes S^*) \otimes E_\gamma, \quad E_1^{0,q} = H^q(\mathcal{V} \otimes E_\beta^*) \otimes E_\beta,$$

pour $q = 0, 1, 2$.

La construction des fibrés exceptionnels et leur organisation en triades permettent de faire des démonstrations par récurrence. Par exemple, considérons une propriété $P(E)$ d'un fibré exceptionnel E. Supposons qu'on ait prouvé :

– $P(\mathcal{O}(k))$ est vraie pour tout entier k.

– Si pour deux fibrés exceptionnels consécutifs proches E_α, E_β, les propriétés $P(E_\alpha)$ et $P(E_\beta)$ sont vraies, il en est de même de $P(E_{\alpha.\beta})$.

Il en découlera alors que P(E) est vraie pour tout fibré exceptionnel E. On peut aussi démontrer des propriétés $P(E, F)$, E, F étant des fibrés exceptionnels proches. Les deux étapes de la démonstration par récurrence sont :

– $P(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(k+1))$ est vraie pour tout entier k.

– Si pour une triade $(E_\alpha, E_\gamma, E_\beta)$, les propriétés $P(E_\alpha, E_\gamma)$, $P(E_\gamma, E_\beta)$ (et éventuellement $P(E_\alpha, E_\beta)$) sont vraies, il en est de même de $P(E_\alpha, E_{\alpha.\gamma})$, $P(E_{\alpha.\gamma}, E_\gamma)$, $P(E_\gamma, E_{\gamma.\beta})$ et $P(E_{\gamma.\beta}, E_\beta)$.

3.3.2 – Suites de fibrés exceptionnels associées à un fibré exceptionnel – Soit $F = E_\alpha$ un fibré exceptionnel. Il existe alors une unique triade de la forme (U, F, V). Si $\alpha = \epsilon\left(\dfrac{2p+1}{2^n}\right)$, $n \geq 1$, on a $U = E_{\epsilon\left(\frac{p}{2^{n-1}}\right)}$, $V = E_{\epsilon\left(\frac{p+1}{2^{n-1}}\right)}$, et si $F = \mathcal{O}(k)$, $U = \mathcal{O}(k-1)$, $V = \mathcal{O}(k+1)$.

Posons $F_0 = U$, $F'_0 = V$. On définit par récurrence sur n les fibrés exceptionnels F_n, F'_n, $n \geq 1$. Le fibré F_1 (resp. F'_1) est le noyau (resp. conoyau) du morphisme canonique

$$\mathrm{ev} : F \otimes \mathrm{Hom}(F, F'_0) \longrightarrow F'_0 \ , \quad (\text{ resp. } \mathrm{ev}^* : F_0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(F_0, F)^* \otimes F \ ) \ ,$$

et pour $n \geq 2$, F_n (resp. F'_n) est le conoyau (resp. noyau) du morphisme canonique injectif (resp. surjectif)

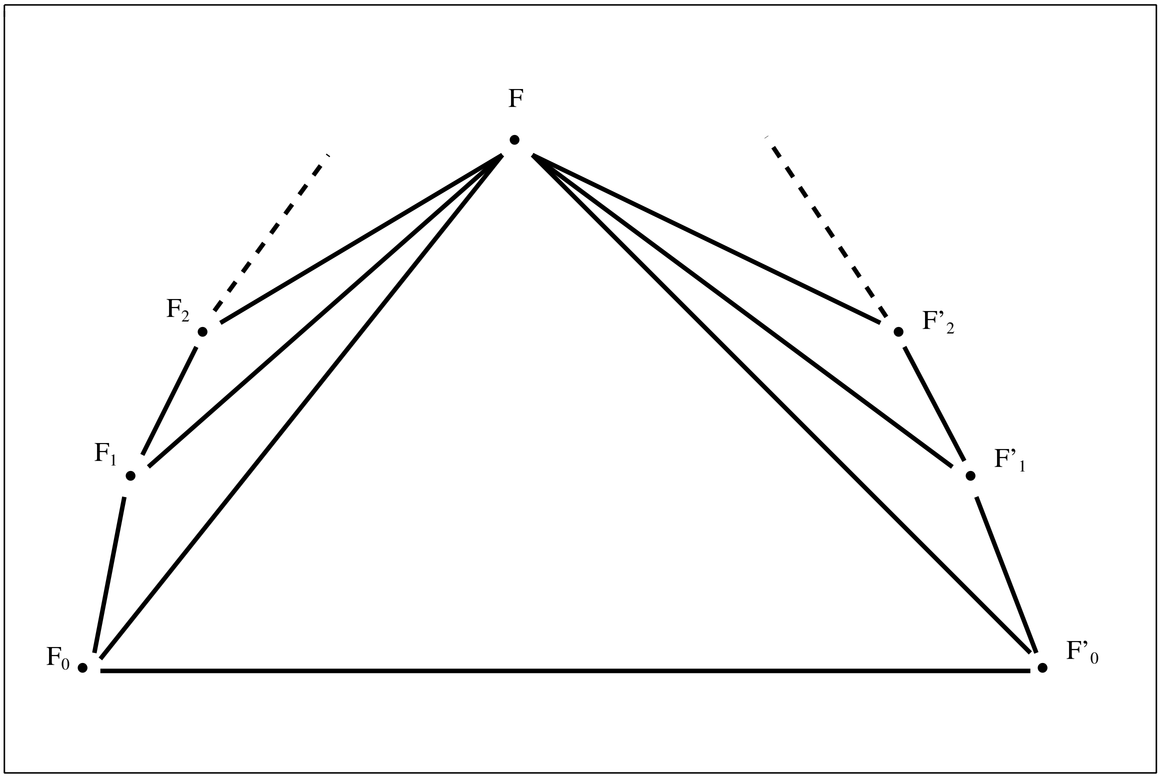
$$\mathrm{ev}^* : F_{n-2} \longrightarrow F_{n-1} \otimes \mathrm{Hom}(F_{n-2}, F_{n-1})^* \ , \quad (\text{ resp. } \mathrm{ev} : F'_{n-1} \otimes \mathrm{Hom}(F'_{n-1}, F'_{n-2}) \longrightarrow F'_{n-2} \ ) \ .$$

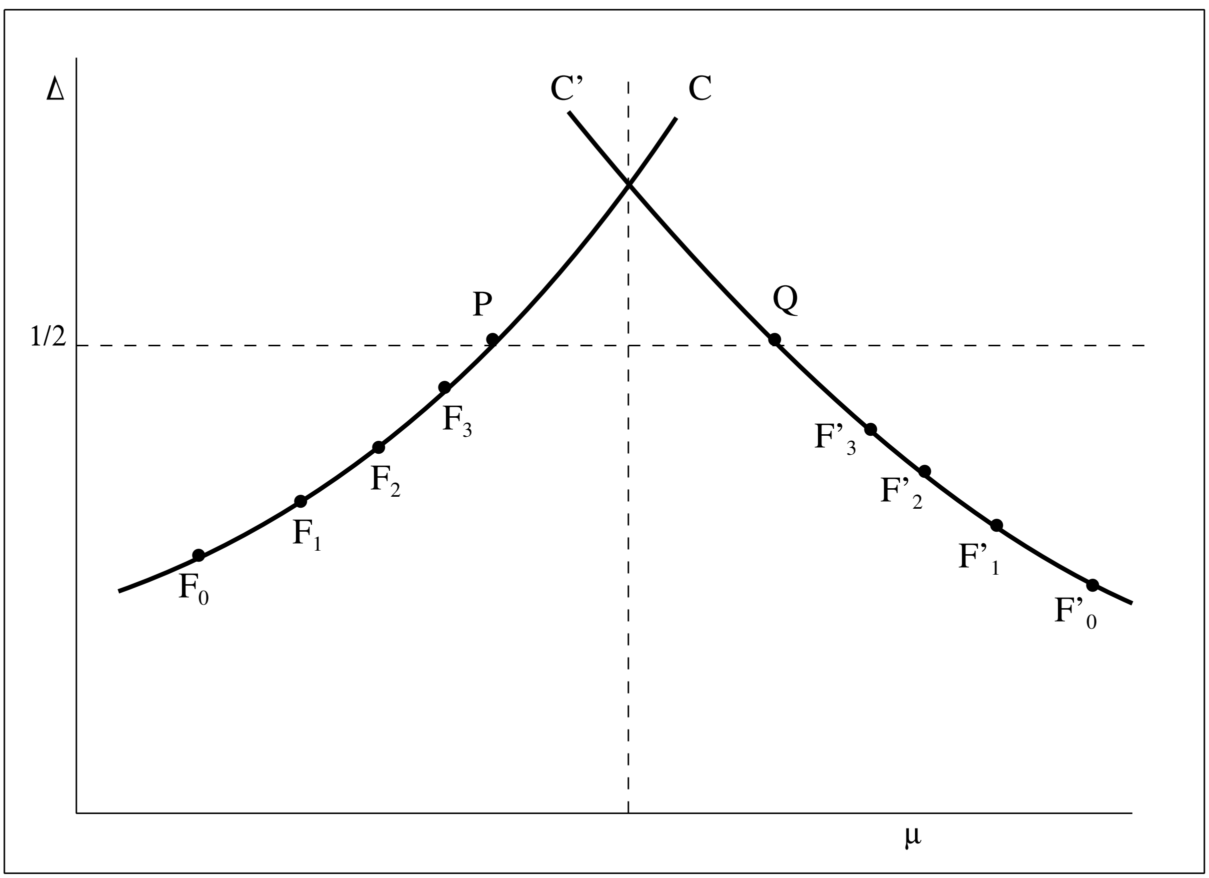
On a des isomorphismes canoniques, pour $n \geq 0$:

$$\mathrm{Hom}(F_n, F_{n+1}) \ \simeq \ \mathrm{Hom}(F_{n+1}, F_{n+2})^* \ , \ \mathrm{Hom}(F'_{n+1}, F'_n) \simeq \mathrm{Hom}(F'_{n+2}, F'_{n+1})^* \ ,$$

et tous ces espaces vectoriels sont de dimension $3r_\alpha$.

Dans le plan de coordonnés (μ, Δ) la suite des points correspondant aux F_n (resp. F'_n) tend vers le point P (resp. Q) dont l'abscisse est le nombre irrationnel $\alpha - x_F$, (resp. $\alpha + x_F$) et l'ordonnée $1/2$. Dans le cas $\alpha = 0$, on peut même faire partir les suites de $F_0 = \mathcal{O}(-2)$ et $F'_0 = \mathcal{O}(2)$ (au lieu de $F_0 = \mathcal{O}(-1)$ et $F'_0 = \mathcal{O}(1)$ comme précédemment).


F
F_2
F_1
F_0
F'_2
F'_1
F'_0


Δ
C'
C
P
Q
1/2
F_3
F_2
F_1
F_0
F'_3
F'_2
F'_1
F'_0
μ

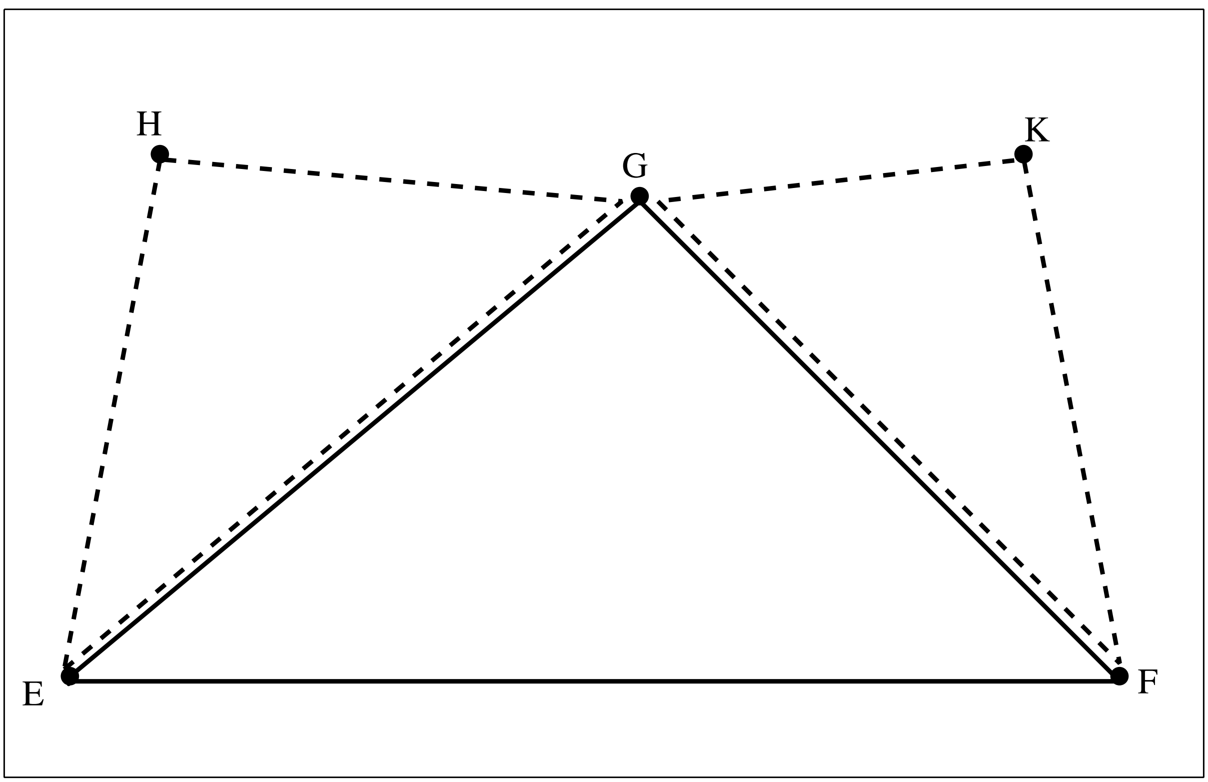
3.3.3 – Propriétés numériques – Soit (E,G,F) une triade, S le conoyau du morphisme canonique $G \to F \otimes \mathrm{Hom}(G,F)^*$. On a alors

$$\chi(G,F) \;=\; 3\,\mathrm{rg}(E)\;, \quad \chi(F,G) \;=\; \chi(F,E) \;=\; 0\;, \quad \chi(E,F) \;=\; 3\,\mathrm{rg}(S)\;,$$
$$\mathrm{rg}(E)^2 + \mathrm{rg}(G)^2 + \mathrm{rg}(F)^2 \;=\; 3\,\mathrm{rg}(E)\,\mathrm{rg}(G)\,\mathrm{rg}(F)\;,$$
$$c_1(E^* \otimes G) \;=\; \mathrm{rg}(F), \quad c_1(G^* \otimes F) \;=\; \mathrm{rg}(E)\;.$$

3.4 – Surjectivité de quelques morphismes canoniques

Proposition 3.1 : *Soient E, F des fibrés exceptionnels consécutifs proches. Alors le morphisme canonique*
$$\alpha_{E,F} : \mathrm{Hom}(F,E(2)) \otimes H^0((\mathcal{O}(1)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F,E(3))$$
est surjectif.

Démonstration. Appelons $P(E,F)$ la propriété énoncée dans la proposition. On va montrer qu'elle est vraie par récurrence au sens de 3.3.1. Il est évident que $P((\mathcal{O}(k),\mathcal{O}(k+1))$ est vraie pour tout entier k. Soit (E,G,F) une triade telle que $P(E,G)$ et $P(G,F)$ soient vraies. Soit H (resp. K) le fibré excepnonnel noyau (resp. conoyau) de $\mathrm{ev} : G \otimes \mathrm{Hom}(G,F) \to F$ (resp. $\mathrm{ev}^* : E \to G \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^*$). Il suffit de montrer que $P(E,H)$, $P(H,G)$, $P(G,K)$ et $P(K,F)$ sont vraies.



Dans la figure ci-dessus les triangles représentent les triades.

Considérons la suite exacte $0 \to H \to G \otimes \operatorname{Hom}(G,F) \to F \to 0$. Elle induit un isomorphisme $\operatorname{Hom}(G,F) \simeq \operatorname{Hom}(H,G)^*$, et une suite exacte

$$\operatorname{Hom}(H,G) \otimes \operatorname{Hom}(G,E(3)) \xrightarrow{u} \operatorname{Hom}(H,E(3)) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(F,E(3)) \ .$$

On a $\operatorname{Ext}^1(F,E(3)) \simeq \operatorname{Ext}^1(E,F)^*$ (dualité de Serre), et $\operatorname{Ext}^1(E,F) = \{0\}$ d'après le théorème 6, 1 de [2]. Donc u est surjectif. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(H,E(2)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \arrow[r, "\alpha_{E,H}"] & \operatorname{Hom}(H,E(3)) \\
\operatorname{Hom}(H,G) \otimes \operatorname{Hom}(G,E(2)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \arrow[u, "v \otimes I_{H^0(\mathcal{O}(1))}"] \arrow[r, "I_{\operatorname{Hom}(H,G)} \otimes \alpha_{E,G}"] & \operatorname{Hom}(H,G) \otimes \operatorname{Hom}(G,E(3)), \arrow[u, "u"]
\end{tikzcd}$$

v étant le morphisme canonique. Puisque u et $\alpha_{E,G}$ sont surjectifs, il en est de même de $\alpha_{E,H}$. Donc $P(E,H)$ est vraie.

Montrons que $P(H,G)$ est vraie.

On a une suite exacte $0 \to F(-3) \to E \otimes \operatorname{Hom}(F(-3),E)^* \to H \to 0$, induisant un isomorphisme $\operatorname{Hom}(F(-3),E)^* \simeq \operatorname{Hom}(E,H)$ et une suite exacte

$$\operatorname{Hom}(G,E(3)) \otimes \operatorname{Hom}(E,H) \xrightarrow{u'} \operatorname{Hom}(G,H(3)) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(E(3),F(3)).$$

On a $\operatorname{Ext}^1(E(3),F(3)) = \operatorname{Ext}^1(E,F) = \{0\}$, donc u' est surjectif. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(G,H(2)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \arrow[r, "\alpha_{H,G}"] & \operatorname{Hom}(G,H(3)) \\
\operatorname{Hom}(E,H) \otimes \operatorname{Hom}(G,E(2)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \arrow[u, "v' \otimes I_{H^0(\mathcal{O}(1))}"] \arrow[r, "I_{\operatorname{Hom}(E,H)} \otimes \alpha_{E,G}"] & \operatorname{Hom}(E,H) \otimes \operatorname{Hom}(G,E(3)), \arrow[u, "u'"]
\end{tikzcd}$$

v' étant le morphisme canonique. Puisque u' et $\alpha_{E,G}$ sont surjectifs, il en est de même de $\alpha_{H,G}$. Donc $P(H,G)$ est vraie.

La démonstration de la véracité de $P(G,K)$ et $P(K,F)$ est analogue. Ceci prouve la proposition 3.1. $\square$

On démontre de la même façon la

Proposition 3.2 : *Soient E, F des fibrés exceptionnels consécutifs proches. Alors le morphisme canonique*

$$\operatorname{Hom}(F,E(1)) \otimes H^0(\mathcal{O}(2)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(F,E(3))$$

est surjectif.

3.5 – Propriétés des morphismes d'évaluation

Soient E, F des fibrés exceptionnels, avec $\mu(E) < \mu(F)$. On démontre dans [2], théorème 6, le résultat suivant : soit $x \in \mathbb{P}_2$, alors l'application canonique

$$\mathrm{ev}_x : E_x \otimes \mathrm{Hom}(E, F) \longrightarrow F_x$$

est *stable*, c'est à dire que si $H \subset E_x$ est un sous-espace vectoriel non nul, et si $K = \mathrm{ev}_x(H \otimes \mathrm{Hom}(E, F))$, on a

$$\frac{\dim(K)}{\dim(H)} \geq \frac{\mathrm{rg}(F)}{\mathrm{rg}(E)} ,$$

l'inégalité étant stricte si $H \neq E_x$ (la terminologie vient du fait que $\mathbb{C}\mathrm{ev}_x$ est stable sous l'action du groupe $\mathrm{SL}(E_x) \times \mathrm{SL}(F_x)$, cf. [3], prop. 15).

Soit (F, E', L') une triade de fibrés exceptionnels, et G' le fibré exceptionnel noyau du morphisme canonique $E' \otimes \mathrm{Hom}(E', L') \to L'$

Proposition 3.3 : *Soient $x \in \mathbb{P}_2$, H un sous-espace vectoriel propre de F_x, et $\mathrm{ev}_x : F_x \otimes \mathrm{Hom}(F, G') \to G'_x$ le morphisme canonique. Alors la restriction de ev_x à $H \otimes \mathrm{Hom}(F, G')$ est injective.*

Démonstration. Pour démontrer la proposition 3.3 on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow L'(-3) \longrightarrow F \otimes \mathrm{Hom}(F, G') \xrightarrow{\mathrm{ev}} G' \longrightarrow 0$$

(cf. 3.3.1). Elle induit un isomorphisme $\mathrm{Hom}(L'(-3), F) \simeq \mathrm{Hom}(F, G')^*$. Soit $u = f_1 \otimes \phi_1 + \cdots + f_k \otimes \phi_k$ un élément de $\ker(\mathrm{ev}_x) \cap (H \otimes \mathrm{Hom}(F, G'))$, $f_1, \ldots, f_k$ étant des éléments de F_x, $\phi_1, \ldots, \phi_k$ des morphismes linéairement indépendants de F dans G', et $k \leq \dim(H)$. On peut compléter $(\phi_1, \ldots, \phi_k)$ en une base (ϕ_i) de $\mathrm{Hom}(F, G')$. On considère la base duale (ϕ_i^*) de (ϕ_i). On peut voir chaque ϕ_i^* comme un morphisme $L'(-3) \to F$. On a

$$\begin{aligned} \phi_i^*(u) &= f_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k, \\ &= 0 \quad \text{pour } k+1 \leq i \leq 3\,\mathrm{rg}(E') . \end{aligned}$$

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}(L'(-3), F)$ constitué des Ψ tels que $\Psi_x(u) = 0$. Il découle de ce qui précéde que

$$\mathrm{codim}_{\mathrm{Hom}(L'(-3),F)}(W) \leq k < \mathrm{rg}(F) .$$

Pour démontrer que $u = 0$ il suffit de prouver que $L'^*(3) \otimes F$ est engendré par ses sections globales. En effet, cette assertion entraine que

$$\mathrm{codim}_{\mathrm{Hom}(L'(-3),F)}(W) = \mathrm{rg}(F) .$$

Soit n le plus petit entier tel que $\mu(F(n)) \geq 0$. On a alors $\mu((L'(n))^*(3)) > 0$. Donc $F(n)$ et $(L'(n))^*(3)$ sont engendrés par leurs sections globales (cela découle par exemple du fait que les applications canoniques

$$(\mathcal{O}_x \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, F(n)) \longrightarrow F(n)_x \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_x \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, (L'(n))^*(3)) \longrightarrow (L'(n))^*(3)_x$$

sont stables). Donc $F \otimes L'^*(3) = F(n) \otimes (L'(n))^*(3)$ est aussi engendré par ses sections globales. Ceci démontre la proposition 3.3. □

Remarques : 1 – Ce résultat est en général plus fort que la stabilité de ev_x. Compte tenu des égalités

$$\mathrm{rg}(G') \;=\; 3\,\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(E') - \mathrm{rg}(L')\ , \quad \dim(\mathrm{Hom}(F,G')) \;=\; 3\,\mathrm{rg}(E')\ ,$$

la semi-stabilité de ev_x signifie que si $K = \mathrm{ev}_x(H \otimes \mathrm{Hom}(F,G'))$, on a

$$\frac{\dim(K)}{\dim(H)} \;>\; 3\,\mathrm{rg}(E') - \frac{\mathrm{rg}(L')}{\mathrm{rg}(F)}\ ,$$

tandis que la proposition 3.3 signifie que

$$\frac{\dim(K)}{\dim(H)} \;\geq\; 3\,\mathrm{rg}(E')\ .$$

2 – Les fibrés L', E', G' sont des termes consécutifs de la suite (F'_n) de fibrés exceptionnels associée à F (cf. 3.3.2). La proposition 3.3 est donc vraie si on remplace G' par F'_k, avec $k \geq 2$. Mais elle est en général fausse pour $k = 0$ ou 1 (par exemple pour $F = Q_2^*$, elle est fausse pour F'_1 à la place de G').

3.6 – Modèles de faisceaux non localement libres

3.6.1 – On suppose qu'on est dans la situation de 3.5 : (F, E', L') est une triade de fibrés exceptionnels, et G' est le fibré exceptionnel noyau du morphisme canonique $E' \otimes \mathrm{Hom}(E', L') \to L'$. Soit K' le noyau de $G' \otimes \mathrm{Hom}(G', E') \to E'$, de telle sorte que L', E', G', K' sont des termes consécutifs de la suite (F'_n) de fibrés exceptionnels associée à F (cf. 3.3.2).

Soient $x \in \mathbb{P}_2$ et $\mathrm{tr}_x : F \otimes F_x^* \to \mathbb{C}_x$ le morphisme trace. Soient h' un entier tel que $0 \leq h' < \mathrm{rg}(F)$, et H_0 un sous-espace vectoriel de F_x de dimension h', $H_0^\perp \subset F_x^*$ son orthogonal. Le noyau de la restriction de tr_x, $F \otimes H_0^\perp \to \mathbb{C}_x$, est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, noté $F(H_0)$, et qui est stable d'après la proposition 2.1. On se propose de représenter $F(H_0)$ comme conoyau de certains morphismes.

3.6.2 – On considère un fibré exceptionnel Γ dans la suite (F'_n) de fibrés exceptionnels associée à F. On suppose que $\Gamma \neq F'_0, F'_1$. Alors, d'après la proposition 3.3, la restriction à $H_0 \otimes \mathrm{Hom}(F,\Gamma)$ de $\mathrm{ev}_x : F_x \otimes \mathrm{Hom}(F,\Gamma) \to \Gamma_x$ est injective. On note

$$\Gamma^{H_0} \;=\; \mathrm{ev}(H_0 \otimes \mathrm{Hom}(F,\Gamma)) \;\subset\; \Gamma_x\ , \quad \Gamma_{H_0} \;=\; (\Gamma^{H_0})^\perp \;\subset\; \Gamma_x^*\ .$$

On considère la triade (F, K', G'), à laquelle est associée la résolution

$$0 \longrightarrow F \boxtimes F^*(-3) \longrightarrow K' \boxtimes E'^* \longrightarrow G' \boxtimes G'^* \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0\ .$$

En prenant la transposée de cette résolution, tordue par $\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}(-3)$, puis en permutant les facteurs, on obtient une nouvelle résolution

$$0 \longrightarrow G'(-3) \boxtimes G'^* \xrightarrow{A} E'(-3) \boxtimes K'^* \xrightarrow{B} F \boxtimes F^* \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0$$

(celle-ci provient de $(G'(-3), E'(-3), F)$, qui est une triade au sens de [2]). En restreignant la suite exacte précédente à $\mathbb{P}_2 \times \{x\} \simeq \mathbb{P}_2$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow G'(-3) \otimes {G'_x}^* \xrightarrow{A_x} E'(-3) \otimes {K'_x}^* \xrightarrow{B_x} F(\{0\}) \longrightarrow 0.$$

Lemme 3.4 : *On a* $A_x(G'(-3)\otimes G'_{H_0})\subset E'(-3)\otimes K'_{H_0}$ *et* $B_x(E'(-3)\otimes K'_{H_0})\subset F(H_0)$.

Démonstration. Le morphisme A est défini de la façon suivante : on déduit de la suite exacte $0\to K'\to G'\otimes\mathrm{Hom}(G',E')\to E'\to 0$ un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(K',G')\simeq\mathrm{Hom}(G',E')^*$, et A provient de l'identité de $\mathrm{Hom}(G',E')\otimes\mathrm{Hom}(G',E')^*\simeq\mathrm{Hom}(G',E')\otimes\mathrm{Hom}(G'^*,K'^*)$. Il en découle que A_x est de la forme

$$A_x \ = \ \sum\epsilon_k\otimes\delta_{kx}\ ,$$

avec $\epsilon_k : G'(-3)\to E'(-3)$ et $\delta_k : G'^*\to K'^*$. La première assertion découle du fait que pour tout morphisme $\phi : G'^*\to K'^*$, on a $\phi(G'_{H_0})\subset K'_{H_0}$. La seconde assertion se démontre de la même manière. Ceci prouve le lemme 3.4. $\square$

On note E_0 le conoyau de la restriction de A_x

$$A'_x : G'(-3)\otimes G'_{H_0}\longrightarrow E'(-3)\otimes K'_{H_0}\ .$$

On se propose de démontrer la

Proposition 3.5 : *Il existe un morphisme* $\psi : F(-3)\otimes H_0^*\longrightarrow E'(-3)\otimes K'_{H_0}$ *tel qu'on ait une suite exacte*

$$0\longrightarrow (G'(-3)\otimes G'_{H_0})\oplus(F(-3)\otimes H_0^*)\xrightarrow{(A'_x,\psi)} E'(-3)\otimes K'_{H_0}\longrightarrow F(H_0)\longrightarrow 0.$$

Démonstration. On a une suite exacte de complexes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G'(-3)\otimes G'_{H_0} \arrow[r] \arrow[d, "A'_x"] & G'(-3)\otimes {G'_x}^* \arrow[r] \arrow[d, "A_x"] & G'(-3)\otimes({G'}^{H_0})^* \arrow[r] \arrow[d, "\overline{A_x}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'(-3)\otimes K'_{H_0} \arrow[r] & E'(-3)\otimes {K'_x}^* \arrow[r] & E'(-3)\otimes({K'}^{H_0})^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(les complexes en question sont les lignes verticales).

3.6.3 – Étude de $\overline{A_x}$. Soit $\Theta : G'(-3)\otimes\mathrm{Hom}(F,G')^*\to E'(-3)\otimes\mathrm{Hom}(F,K')^*$ le morphisme canonique. Sa définition est la suivante : on a un isomorphisme $\mathrm{Hom}(K',G')\simeq\mathrm{Hom}(G',E')^*$, et Θ provient de la composition $\mathrm{Hom}(F,K')\otimes\mathrm{Hom}(K',G')\to\mathrm{Hom}(F,G')$, vue comme élément de

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(F,K')^*\otimes\mathrm{Hom}(K',G')^*\otimes\mathrm{Hom}(F,G')\\ &\qquad\simeq\ \mathrm{Hom}(G'(-3)\otimes\mathrm{Hom}(F,G')^*,E'(-3)\otimes\mathrm{Hom}(F,K')^*)\ .\end{aligned}$$

Le morphisme canonique $\mathrm{ev}^* : F(-3)\to G'(-3)\otimes\mathrm{Hom}(F,G')^*$ est injectif. Soit X son conoyau. D'après 3.1.3, X est isomorphe au noyau du morphisme canonique surjectif $\mathrm{ev} : E'(-3)\otimes\mathrm{Hom}(E'(-3),F)\to F$, tandis que $E'(-3)$ est isomorphe au noyau de $F\otimes\mathrm{Hom}(F,K')\to K'$, ce qui prouve l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(F,K')^*\simeq\mathrm{Hom}(E'(-3),F)$.

Les deux assertions suivantes proviennent de [2], IV [1] :

1. cf. aussi la nouvelle version http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/83/26/89/PDF/exc1.pdf, chap. 5

(i) Le morphisme σ est, à une constante non nulle près, le composé

$$G'(-3)\otimes \mathrm{Hom}(F,G')^* \longrightarrow X \longrightarrow E'(-3)\otimes \mathrm{Hom}(E'(-3),F) \ \simeq\ E'(-3)\otimes \mathrm{Hom}(F,K')^* \ .$$

(ii) On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
G'(-3)\otimes {G'_x}^* \arrow[r, "A_x"] \arrow[d, "I_{G'(-3)}\otimes\lambda_0"] & E'(-3)\otimes {K'_x}^* \arrow[d, "I_{E'(-3)}\otimes\lambda_1"] \\
G'(-3)\otimes \mathrm{Hom}(F,G')^*\otimes F_x^* \arrow[r, "\Theta\otimes I_{F_x^*}"] & E'(-3)\otimes \mathrm{Hom}(F,K')^*\otimes F_x^*,
\end{tikzcd}$$

λ_0, λ_1 étant les transposés des évaluations.

On a des isomorphismes

$${G'}^{H_0} \ \simeq\ H_0\otimes \mathrm{Hom}(F,G')\ , \qquad {K'}^{H_0} \ \simeq\ H_0\otimes \mathrm{Hom}(F,K')\ ,$$

et il découle de ce qui précède que

$$\overline{A_x} \ =\ \Theta\otimes I_{H_0^*}\ , \quad \ker(\overline{A_x}) \ \simeq\ F(-3)\otimes H_0^*\ , \quad \mathrm{coker}(\overline{A_x}) \ \simeq\ F\otimes H_0^*\ .$$

3.6.4 – Complexe associé à $F(H_0)$. On considère la suite exacte longue associée à la suite exacte de complexes de 3.6.2 :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\overline{A_x}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_0 \arrow[r] & F(\{0\}) \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{coker}(\overline{A_x}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0. \\
 & F(-3)\otimes H_0^* & & & F\otimes H_0^* &
\end{tikzcd}$$

Le noyau de ϕ n'est autre que $F(H_0)$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow F(-3)\otimes H_0^* \xrightarrow{\eta} E_0 \longrightarrow F(H_0) \longrightarrow 0\ .$$

Puisque $\mathrm{Ext}^1(F,G')=\{0\}$, le morphisme η se relève en un morphisme

$$\psi : F(-3)\otimes H_0^* \longrightarrow E'(-3)\otimes K'_{H_0}\ ,$$

et on obtient la proposition 3.5. $\square$

4. Propriétés des variétés de modules de faible hauteur

4.1 – Annulation de certains groupes de cohomologie

On démontre ici la proposition A. Soit $F=E_\alpha$ un fibré exceptionnel. On a défini dans 3.3.2 la suite $(F'_k)_{k\geq 0}$ de fibrés exceptionnels associée à F. La démonstration de la proposition A repose sur deux lemmes :

Lemme 4.1 : *Soient $k \geq 0$ un entier, U un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$ tel que $h^2({F'_{k+2}}^* \otimes U) = 0$, et V un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_2$ tel que le morphisme canonique*

$$\mathrm{ev}_1 : F^* \otimes \mathrm{Hom}(F^*, V) \longrightarrow V$$

soit surjectif, ainsi que l'application canonique

$$\nu : \mathrm{Hom}(F^*, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, {F'_k}^*(3)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F^*, {F'_k}^*(3)) \ .$$

Alors, si $h^1(V \otimes U) = 0$, on a aussi $h^1({F'_k}^*(3) \otimes U) = 0$.

Lemme 4.2 : *Soient $k \geq 0$ un entier, U un faisceau cohérent sans torsion sur $\mathbb{P}_2$ tel que* $\mathrm{Hom}(U, F(-1)) = \{0\}$. *Soit $h_0 = h^1(F \otimes U)$. Alors on a $h^1(F^*(2) \otimes U) = 0$ dans les cas (i), (ii) et (iii) de la proposition A.*

On a $h^1(F^*(1) \otimes U) = 0$ dans le cas (iii), et si $h_0 \leq 2$ si α n'est pas entier.

4.1.1 – Démonstration du lemme 4.1. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F^* \otimes \mathrm{Hom}(F^*, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, {F'_k}^*(3)) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "\Phi"] & V \otimes \mathrm{Hom}(V, {F'_k}^*(3)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_2"] \\
F^* \otimes \mathrm{Hom}(F^*, {F'_k}^*(3)) \arrow[r, "\mathrm{ev}_0"] & {F'_k}^*(3),
\end{tikzcd}$$

ev_0 et ev_2 étant les morphismes canoniques, $u = \mathrm{ev}_1 \otimes I_{\mathrm{Hom}(V, {F'_k}^*(3))}$, $v = I_{F^*} \otimes \nu$.

Considérons la triade (F, F'_{k+2}, F'_{k+1}). D'après 3.3.1, le morphisme canonique

$$\mathrm{ev} : F \otimes \mathrm{Hom}(F, F'_{k+2}) \longrightarrow F'_{k+2} \ , \quad (\text{resp. } \mathrm{ev}^* : F'_{k+2} \longrightarrow F'_{k+1} \otimes \mathrm{Hom}(F'_{k+2}, F'_{k+1})^* \ )$$

est surjectif (resp. injectif), et on a $\ker(\mathrm{ev}) \simeq \mathrm{coker}(\mathrm{ev}^*)(-3) \simeq F'_k(-3)$. De plus, $\mathrm{Hom}(F, F'_{k+2})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(F'_k(-3), F)^*$. Il en découle que $\ker(\mathrm{ev}_0) \simeq {F'_{k+2}}^*$. On a

$$\ker(\Phi) \ = \ u^{-1}(\ker(\mathrm{ev}_2)) \ = \ v^{-1}(\ker(\mathrm{ev}_0)) \ = \ v^{-1}({F'_{k+2}}^*) \ .$$

On peut écrire, puisque v est surjectif : $v^{-1}({F'_{k+2}}^*) = {F'_{k+2}}^* \oplus (F^* \otimes \mathbb{C}^m)$, pour un entier m convenable. Par surjectivité de u, la restriction de u

$${F'_{k+2}}^* \oplus (F^* \otimes \mathbb{C}^m) = u^{-1}(\ker(\mathrm{ev}_2)) \longrightarrow \ker(\mathrm{ev}_2)$$

est surjective. Il en découle que $h^2(\ker(\mathrm{ev}_2) \otimes U) = 0$. En effet, on a $h^2({F'_{k+2}}^* \otimes U) = 0$ par hypothèse, et ceci entraine aussi $h^2(F^* \otimes U) = 0$, car le morphisme canonique ${F'_{k+2}}^* \otimes \mathrm{Hom}({F'_{k+2}}^*, F^*) \to F^*$ est surjectif.

Puisque ev_0 et ν sont surjectifs, le diagramme commutatif précédent montre que ev_2 l'est aussi. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(\mathrm{ev}_2) \longrightarrow V \otimes \mathrm{Hom}(V, {F'_{k+2}}^*) \xrightarrow{\mathrm{ev}_2} {F'_{k+2}}^* \longrightarrow 0,$$

d'où on déduit la suite exacte

$$\{0\} = H^1(V \otimes U) \otimes \mathrm{Hom}(V, {F'_k}^*(3)) \longrightarrow H^1({F'_k}^*(3) \otimes U) \longrightarrow H^2(\ker(\mathrm{ev}_2) \otimes U) = \{0\} \ .$$

Donc $h^1({F'_k}^*(3) \otimes U) = 0$, ce qui démontre le lemme 4.1. $\square$

4.1.2 – Démonstration du lemme 4.2. Ce sera une conséquence immédiate du lemme 4.5 qui suit. D'après [1], les fibrés exceptionnels sont uniformes de type rigide. Cela signifie qu'il existe des entiers a, b, p, avec $b > 0$, tels que pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}_2$, on ait $F_{|\ell} \simeq a\mathcal{O}_\ell(p) \oplus b\mathcal{O}_\ell(p+1)$.

Lemme 4.3 : *Soient ℓ une droite de $\mathbb{P}_2$, U un faisceau cohérent sans torsion sur $\mathbb{P}_2$ tel que* $\mathrm{Hom}(U, F(-1)) = \{0\}$. *Alors*

1 – *Si* $h^1(U \otimes F^*) < 2r_\alpha + b$, *on a* $h^1(U \otimes F^*(2)_{|\ell}) = 0$.

2 – *Si* $h^1(U \otimes F^*) < r_\alpha + b$, *on a* $h^1(U \otimes F^*(1)_{|\ell}) = 0$.

Démonstration. Pour tout entier i, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F^* \otimes U(i-1) \longrightarrow F^* \otimes U(i) \longrightarrow F^* \otimes U(i)_{|\ell} \longrightarrow 0 \ ,$$

d'où la suite exacte $H^1(F^* \otimes U(i)) \to H^1(F^* \otimes U(i)_{|\ell}) \to H^2(F^* \otimes U(i-1))$.

On a, par dualité de Serre, $H^2(F^* \otimes U(i-1)) \simeq \mathrm{Hom}(U, F(-2-i))$, donc $h^2(F^* \otimes U(i-1)) = 0$ si $i \geq -1$, et dans ce cas on a une surjection $H^1(F^* \otimes U(i)) \to H^1(F^* \otimes U(i)_{|\ell})$.

Supposons que $H^1(F^* \otimes U(2)_{|\ell}) \neq \{0\}$. D'après [6] il existe des entiers $m_1, \ldots, m_r$ tels que $U_\ell \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{O}_\ell(m_i)$. Donc

$$F^* \otimes U(2)_{|\ell} \ \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \big(a\mathcal{O}_\ell(m_i + 2 - p) \oplus b\mathcal{O}_\ell(m_i + 1 - p) \big) \ .$$

Il en découle que $h^1(F^* \otimes U(2)_{|\ell}) \geq b$, d'où $h^1(F^* \otimes U(1)_{|\ell}) \geq b + r_\alpha$ et $h^1(F^* \otimes U_{|\ell}) \geq b + 2r_\alpha$. On en déduit **1**. La démonstration de **2** est analogue. Ceci prouve le lemme 4.3. □

Lemme 4.4 : *Soient c, d, n des entiers, tels que $n \geq 2$, $c, d > 0$, et*

$$\phi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1) \otimes \mathbb{C}^c \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \otimes \mathbb{C}^d$$

un morphisme surjectif. Alors on a $c - d \geq n$.

Démonstration. De ϕ on déduit une application linéaire $\psi : H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))^* \to L(\mathbb{C}^c, \mathbb{C}^d)$ qui est injective car ϕ est surjectif. L'image de ψ ne rencontre la sous-variété homogène des applications linéaires non surjectives qu'en 0, et cette sous-variété est de codimension $c - d + 1$. On a donc $n \leq c - d$, ce qui prouve le lemme 4.4. □

Lemme 4.5 : *Soit U un faisceau cohérent sans torsion sur $\mathbb{P}_2$ tel que* $\mathrm{Hom}(U, F(-1)) = \{0\}$. *Alors*

1 – *Si* $h^1(U \otimes F^*) < \inf(5, r_\alpha + b)$, *on a* $h^1(U \otimes F^*(2)) = 0$.

2 – *Si* $h^1(U \otimes F^*) < \inf(3, r_\alpha + b)$, *on a* $h^1(U \otimes F^*(1)) = 0$.

Démonstration. Démontrons 1 (2 est analogue). Supposons que $h^1(U \otimes F^*) < r_\alpha + b$. On a donc a fortiori $h^1(U \otimes F^*) < 2r_\alpha + b$, donc d'après le lemme 4.3,1 le morphisme canonique

$$H^1(U \otimes F^*(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \longrightarrow H^1(U \otimes F^*(2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}$$

est surjectif. Donc d'après le lemme 4.4, on a $h^1(U \otimes F^*(1)) \geq 2 + h^1(U \otimes F^*(2))$. De même, le morphisme canonique

$$H^1(U \otimes F^*) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \longrightarrow H^1(U \otimes F^*(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}$$

est surjectif, donc $h^1(U \otimes F^*) \geq 2 + h^1(U \otimes F^*(1))$, d'où $h^1(U \otimes F^*) \geq 4 + h^1(U \otimes F^*(2))$. Ceci prouve **1** et le lemme 4.5. $\square$

4.1.3 – Démonstration de la proposition A. Il existe un entier $m \geq 0$ tel que $E' = F'_{m+1}$ et $L' = F'_m$. Il suffit donc d'après les lemmes 4.1 et 4.2 de montrer que $V = F^*(2)$ satisfait aux hypothèses du lemme 4.1. La surjectivité de ev_1 découle de 3.3.1, celle de ν de la proposition 3.2. La proposition A est donc démontrée.

4.2 – Démonstration de la proposition B

Soit $M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de faible hauteur. On suppose que $\dfrac{c_1}{r} \in I_F$, $\frac{c_1}{r} \leq \alpha$. Soient $(F'_k)_{k \geq 0}$ la suite de fibrés exceptionnels associée à F (cf. 3.3.2), et $k \geq 0$ un entier. On pose $L' = F'_k$, $E' = F'_{k+1}$, $G' = F'_{k+2}$. On considère la triade $(F(-3), G'(-3), E'(-3))$. Soit U un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Il est clair que U vérifie les hypothèses de la proposition A. On a donc

$$h^1(U \otimes L'^*(3)) \;=\; h^1(U \otimes E'^*(3)) \;=\; 0 \;.$$

D'autre part, la semi-stabilité de U et la dualité de Serre entrainent

$$h^2(U \otimes F^*) \;=\; h^2(U \otimes L'^*(3)) \;=\; h^2(U \otimes E'^*(3)) \;=\; 0 \;.$$

Enfin, on a $h^0(U \otimes F^*) = 0$ par semi-stabilité de U. Donc les seuls termes $E_1^{p,q}$ éventuellement non nuls de la suite spectrale de Beilinson associée à $(F(-3), G'(-3), E'(-3))$ et U sont ceux figurant ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \uparrow q \\
0 & 0 & 0 & \\
H^1(U \otimes F^*) \otimes F(-3) & 0 & 0 & \\
0 & H^0(U \otimes L'^*(3)) \otimes G'(-3) & H^0(U \otimes E'^*(3)) \otimes E'(-3) & \xrightarrow{p}
\end{array}$$

On en déduit que le morphisme de faisceaux

$$d_1^{-1,0} : H^0(U \otimes L'^*(3)) \otimes G'(-3) \longrightarrow H^0(U \otimes E'^*(3)) \otimes E'(-3)$$

est injectif, et qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(U \otimes F^*) \otimes F(-3) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{coker}(d_1^{-1,0}) \longrightarrow U \longrightarrow 0 \;.$$

Puisque $\mathrm{Ext}^1(F, G') = \{0\}$, le morphisme λ se relève en un morphisme

$$\phi : H^1(U \otimes F^*) \otimes F(-3) \longrightarrow H^0(U \otimes E'^*(3)) \otimes E'(-3) \;.$$

On obtient donc finalement la suite exacte

$$0 \longrightarrow \big(H^0(U\otimes L'^*(3))\otimes G'(-3)\big)\oplus\big(H^1(U\otimes F^*)\otimes F(-3)\big)$$
$$\xrightarrow{(d_1^{-1,0},\phi)} H^0(U\otimes E'^*(3))\otimes E'(-3)\longrightarrow 0\ ,$$

ce qui démontre la proposition B.

4.3 – Cas d'une famille de faisceaux

On se place sous les mêmes hypothèses que précédemment. Soient X une variété algébrique et E un famille de faisceaux de $M(r,c_1,c_2)$ paramétrée par X. On a alors une *suite spectrale de Beilinson relative* pour E, avec les morphismes

$$d_1^{-1,0} : p_X^*(p_{X*}(E\otimes L'^*(3)))\otimes p_2^*(G'(-3)) = T \longrightarrow p_X^*(p_{X*}(E\otimes E'^*(3)))\otimes p_2^*(E'(-3)) = V\ ,$$
$$d_2^{-2,1} : p_X^*(p_{X*}(E\otimes F^*))\otimes p_2^*(F(-3)) = W \longrightarrow \mathrm{coker}(d_1^{-1,0})$$

(p_X, p_2 désignant les projections $X\times\mathbb{P}_2\to X$, $X\times\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_2$ respectivement), $d_1^{-1,0}$ étant injectif, les faisceaux T, V, W étant localement hbres. On a une suite exacte de fibrés vectoriels sur X

$$0\longrightarrow p_{X*}(\mathrm{Hom}(W,T))\longrightarrow p_{X*}(\mathrm{Hom}(W,V))\longrightarrow p_{X*}(\mathrm{Hom}(W,\mathrm{coker}(d_1^{-1,0})))\longrightarrow 0\ .$$

L'image réciproque de $d_2^{-2,1}$ est une sous-variété fermée de $p_{X*}(\mathrm{Hom}(W,V))$, notée $Y(E)$. En utilisant des scindages locaux de la suite exacte précédente, il est facile de voir que la projection $Y(E)\to X$ admet des sections locales, et que c'est en fait un fibré en espaces affines.

Une variété du type $Y(E)$ sera utilisée dans la démonstration du théorème D.

5. Étude d'un type de complexes

Il s'agit des complexes du type

$$\big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big)\longrightarrow E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n\ ,$$

apparaissant dans la proposition B.

5.1 – Lien entre complexes et faisceaux

5.1.1 – Soient

$$K^\bullet : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big)\xrightarrow{(\epsilon,\phi)} E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n\ ,$$

$$K'^\bullet : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^{q'}\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^{h'}\big)\xrightarrow{(\epsilon',\phi')} E'(-3)\otimes\mathbb{C}^{n'}$$

deux complexes. Un morphisme $K^\bullet \to K'^\bullet$ équivaut à la donnée de deux morphismes

$$f : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big) \longrightarrow (G'(-3)\otimes\mathbb{C}^{q'})\oplus(F(-3)\otimes\mathbb{C}^{h'}) \ ,$$

$$g : E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n \longrightarrow E'(-3)\otimes\mathbb{C}^{n'}$$

tels que $g\circ(\epsilon,\phi) = (\epsilon',\phi')\circ f$. On a $\mathrm{Hom}(G',F)=\{0\}$, donc f équivaut a trois morphismes

$$f_1 : G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q \longrightarrow G'(-3)\otimes\mathbb{C}^{q'} \ , \quad f_2 : F(-3)\otimes\mathbb{C}^h \longrightarrow F(-3)\otimes\mathbb{C}^{h'} \ ,$$

$$f_3 : F(-3)\otimes\mathbb{C}^h \longrightarrow G'(-3)\otimes\mathbb{C}^{q'} \ .$$

La condition $g\circ(\epsilon,\phi) = (\epsilon',\phi')\circ f$ équivaut à $g\circ\epsilon = \epsilon'\circ f_1$ et $g\circ\phi = \epsilon'\circ f_3 + \phi'\circ f_2$.

Lemme 5.1 : *Soient*

$$K^\bullet : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big) \xrightarrow{\Phi} E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n \ ,$$

$$K'^\bullet : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^{q'}\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^{h'}\big) \xrightarrow{\Phi'} E'(-3)\otimes\mathbb{C}^{n'}$$

des complexes, les morphismes de faisceaux Φ et Φ' étant injectifs. Soient $E=\mathrm{coker}(\Phi)$, $E'=\mathrm{coker}(\Phi')$. Alors on a des isomorphismes

$$H^q(\mathrm{Hom}(K^\bullet,K'^\bullet)) \ \simeq \ \mathrm{Ext}^q(E,E') \quad \textit{pour} \quad q\geq 0 \ .$$

Démonstration. Analogue à celle du lemme 23 de [8]. On utilise le fait que si U, V sont des fibrés parmi E', G', F, alors on a $\mathrm{Ext}^i(U,V)=\{0\}$ pour $i>0$. □

Corollaire 5.2 : *Soit E_0 un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, conoyau d'un morphisme du type*

$$\big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big) \xrightarrow{\phi} E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n \ ,$$

injectif sauf en un nombre fini de points. Alors E_0 est sans torsion, et on a

$$h^0(E_0\otimes F^*) \ = \ h^2(E_0\otimes F^*) \ = 0 \ ,$$
$$h^1(E_0\otimes E'^*(3)) \ = \ h^2(E_0\otimes E'^*(3)) \ = \ 0 \ ,$$
$$h^1(E_0\otimes L'^*(3)) \ = \ h^2(E_0\otimes L'^*(3)) \ = \ 0 \ .$$

Le complexe ϕ est isomorphe aux complexes associés à E_0 :

$$(G'(-3)\otimes H^0(E_0\otimes L'^*(3)))\oplus(F(-3)\otimes H^1(E_0\otimes F^*)) \longrightarrow E'(-3)\otimes H^0(E_0\otimes E'^*(3)) \ .$$

Les complexes associés à E_0 sont ceux de la proposition B, dont la démonstration utilise uniquement les égalités précédentes. Le corollaire 5.2 est une conséquence immédiate de la définition de E_0 et du lemme 5.1.

5.1.2 – Sous-faisceaux et sous-complexes. Soit

$$K^\bullet : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big) \xrightarrow{(\epsilon,\phi)} E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n$$

un complexe. Un complexe *équivalent* à $K^\bullet$ est un morphisme de la forme $(\epsilon, \phi + \epsilon \circ \beta)$, où $\beta : F(-3) \otimes \mathbb{C}^h \to G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q$ est un morphisme. Soit

$$K'^\bullet : \big(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^{q'}\big) \oplus \big(F(-3) \otimes \mathbb{C}^{h'}\big) \xrightarrow{(\epsilon', \Phi')} E'(-3) \otimes \mathbb{C}^{n'}$$

un autre complexe. Un *quasi-morphisme* $K^\bullet \to K'^\bullet$ est un triplet (f, g, k) d'applications linéaires

$$f : \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^{q'} \ , \quad g : \mathbb{C}^h \longrightarrow \mathbb{C}^{h'} \ , \quad k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n'} \ ,$$

tel qu'il existe des complexes $K_0^\bullet$, $K_0'^\bullet$ équivalents à $K^\bullet$, $K'^\bullet$ respectivement, tels que $((I_{G'(-3)} \otimes f, I_{F(-3)} \otimes g), I_{E'(-3)} \otimes k)$ soit un morphisme $K_0^\bullet \to K_0'^\bullet$. Cela revient à dire qu'il existe des morphismes $\beta : F(-3) \otimes \mathbb{C}^h \to G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q$ et $\beta' = F(-3) \otimes \mathbb{C}^{h'} \to G'(-3) \otimes \mathbb{C}^{q'}$ tels que $\epsilon' \circ f = k \circ \epsilon$ et $(\phi' + \epsilon' \circ \beta') \circ g = k \circ (\phi + \epsilon \circ \beta)$.

On appelle *quasi-sous-complexe* de $K'^\bullet$ un quasi-morphisme $(f, g, k) : K^\bullet \to K'^\bullet$ tel que f, g, k soient injectives. On dit aussi dans ce cas que $K^\bullet$ est un quasi-sous-complexe de $K'^\bullet$.

On considère maintenant un faisceau cohérent E_0 sur $\mathbb{P}_2$, tel que $h^0(E_0 \otimes F^*) = 0$, et $h^i(E_0 \otimes L'^*(3)) = h^i(E_0 \otimes E'^*(3)) = 0$ pour $i > 0$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow (G'(-3) \otimes H^0(E_0 \otimes L'^*(3))) \oplus (F(-3) \otimes H^1(E_0 \otimes F^*)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow E'(-3) \otimes H^0(E_0 \otimes E'^*(3)) \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0 \ .$$

Soit U un sous-faisceau de E_0 tel que $h^1(U \otimes L'^*(3)) = 0$. On va associer à U un morphisme

$$(G'(-3) \otimes H^0(U \otimes L'^*(3))) \oplus (F(-3) \otimes H^1(U \otimes F^*)) \longrightarrow E'(-3) \otimes H^0(U \otimes E'^*(3))$$

(qui peut ne pas être injectif). Pour cela on considère la suite spectrale de Beilinson associée à U et à la triade $(F(-3), G'(-3), E'(-3))$. Les termes $E_1^{p,q}$ qui pourraient être non nuls se trouvent dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \uparrow q \\
F(-3) \otimes H^2(U \otimes F^*) & G'(-3) \otimes H^2(U \otimes L'^*(3)) & E'(-3) \otimes H^2(U \otimes E'^*(3)) & \\
F(-3) \otimes H^1(U \otimes F^*) & 0 & E'(-3) \otimes H^1(U \otimes E'^*(3)) & \\
F(-3) \otimes H^0(U \otimes F^*) & G'(-3) \otimes H^0(U \otimes L'^*(3)) & E'(-3) \otimes H^0(U \otimes E'^*(3)) & \xrightarrow{p}
\end{array}$$

On en déduit les morphismes

$$d_1^{-1,0} : G'(-3) \otimes H^0(U \otimes L'^*(3)) \longrightarrow E'(-3) \otimes H^0(U \otimes E'^*(3)) \ ,$$
$$d_2^{-2,1} : F(-3) \otimes H^1(U \otimes F^*) \longrightarrow \operatorname{coker}(d_1^{-1,0}) \ .$$

Lemme 5.3 : *Le morphisme $d_2^{-2,1}$ se relève en un morphisme*

$$F(-3) \otimes H^1(U \otimes F^*) \longrightarrow E'(-3) \otimes H^0(U \otimes E'^*(3)) \ .$$

Démonstration. Comme $E_r^{p,q}$ converge vers U en degré 0 et vers 0 en tout autre degré, on a $\ker(d_1^{-1,0}) \simeq \mathrm{im}(d_1^{-2,0})$, et $d_1^{-2,0}$ est injectif. On a donc les suites exactes

$$0 \longrightarrow F(-3) \otimes H^1(U \otimes F^*) \longrightarrow G'(-3) \otimes H^0(U \otimes L'^*(3)) \longrightarrow \mathrm{im}(d_1^{-1,0}) \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}(d_1^{-1,0}) \longrightarrow E'(-3) \otimes H^0(U \otimes E'^*(3)) \longrightarrow \mathrm{coker}(d_1^{-1,0}) \longrightarrow 0 \ .$$

De la seconde on déduit la suite exacte

$$\mathrm{Hom}(F(-3) \otimes H^1(U \otimes F^*), E'(-3) \otimes H^0(U \otimes E'^*(3))) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}(F(-3) \otimes H^1(U \otimes F^*), \mathrm{coker}(d_1^{-1,0})) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F(-3), \mathrm{im}(d_1^{-1,0})) \otimes H^1(U \otimes F^*) \ .$$

De la première on déduit la suite exacte

$$H^0(U \otimes L'^*(3)) \otimes \mathrm{Ext}^1(F, G') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F(-3), \mathrm{im}(d_1^{-1,0})) \longrightarrow H^1(U \otimes F^*) \otimes \mathrm{Ext}^2(F, F) \ .$$

On a $\mathrm{Ext}^2(F,F) = \mathrm{Ext}^1(F,G') = \{0\}$, donc $\mathrm{Ext}^1(F(-3), \mathrm{im}(d_1^{-1,0)})) = \{0\}$. Il en découle que ψ est surjective, ce qui démontre le lemme 5.3. □

On peut donc associer à U un complexe

$$K_1^\bullet : \big(G'(-3) \otimes H^0(U \otimes L'^*(3))\big) \oplus \big(F(-3) \otimes H^1(U \otimes F^*)\big) \longrightarrow E'(-3) \otimes H^0(U \otimes E'^*(3)) \ .$$

On note $K_0^\bullet$ un complexe associé à E_0. Notons que $K_0^\bullet$ et $K_1^\bullet$ ne sont pas uniques, mais leur classe d'équivalence est entièrement déterminée. Soient

$$j_L : H^0(U \otimes L'^*(3)) \longrightarrow H^0(E_0 \otimes L'^*(3)) \ ,$$
$$j_F : H^1(U \otimes F^*) \longrightarrow H^1(E_0 \otimes F^*) \ ,$$
$$j_E : H^0(U \otimes E'^*(3)) \longrightarrow H^0(E_0 \otimes E'^*(3))$$

les applications linéaires déduites de l'inclusion $U \subset E_0$.

Proposition 5.4 : *Si* $h^0((E_0/U) \otimes F^*) = 0$,

$$((j_L, j_F), j_E) : K_1^\bullet \longrightarrow K_0^\bullet$$

est un quasi-sous-complexe de $K_0^\bullet$.

Démonstration. C'est une conséquenoe de la fonctorialité de la suite spectrale de Beilinson généralisée. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & E'(-3)\otimes H^0(U\otimes E'^*(3)) \arrow[dl, "p'"] \arrow[ddd, "I_{E'(-3)}\otimes j_E"] \\
F(-3)\otimes H^1(U\otimes F^*) \arrow[r, "d'"] \arrow[urr, "\phi'"] \arrow[d, "I_{F(-3)}\otimes j_F"] & \mathrm{coker}(\phi') \arrow[d, "u"] & \\
F(-3)\otimes H^1(E_0\otimes F^*) \arrow[r, "d"] \arrow[drr, "\phi"'] & \mathrm{coker}(\phi) & \\
 & & E'(-3)\otimes H^0(E_0\otimes E'^*(3)) \arrow[ul, "p"']
\end{tikzcd}$$

où d, d' sont les $d_2^{-2,1}$ de la suite spectrale de Beilinson, u le morphisme induit par $I_{E'(-3)}\otimes j_E$, p, p' les surjections canoniques et ϕ, ϕ' les morphismes venant de $K_0^\bullet$, $K_1^\bullet$ respectivement. On en déduit

$$p\circ(I_{E'(-3)}\otimes j_E)\circ\phi' \;=\; u\circ p'\circ\phi' \;=\; u\circ d' \;=\; d\circ(I_{F(-3)}\otimes j_F) \;=\; p\circ\phi\circ(I_{F(-3)}\otimes j_F)\ .$$

Posons $\lambda=(I_{E'(-3)}\otimes j_E)\circ\phi'-\phi\circ(I_{F(-3)}\otimes j_F)$. C'est un morphisme $F(-3)\otimes H^1(U\otimes F^*)\to E'(-3)\otimes H^0(E_0\otimes E'^*(3))$, qui est d'après ce qui précéde à valeurs dans $\ker(p)\simeq G'(-3)\otimes H^0(E_0\otimes L'^*(3))$. D'autre part, puisque $h^0((E_0/U)\otimes F^*)=0$, j_F est injective. Il en découle que λ se prolonge en un morphisme

$$\beta : F(-3)\otimes H^1(E_0\otimes F^*)\longrightarrow G'(-3)\otimes H^0(E_0\otimes L'^*(3))\ .$$

Si on remplace ϕ par $\phi+\epsilon\circ\beta$, ϵ désignant le morphisme canonique

$$G'(-3)\otimes H^0(E_0\otimes L'^*(3))\longrightarrow E'(-3)\otimes H^0(E_0\otimes E'^*(3))\ ,$$

il est clair que $((j_L,j_F),j_E)$ devient un morphisme $K_1^\bullet\to K_0^\bullet$. Comme j_L et j_E sont injectives, $((j_L,j_F),j_E)$ est un quasi-sous-complexe de $K_0^\bullet$. Ceci démontre la proposition 5.4. □

5.2 – Résultats numériques

Soit $K^\bullet:\cdots\to K^i\to K^{i+1}\to\cdots$ un complexe fini de morphismes de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$. On définit comme dans [1] :

$$\mathrm{rg}(K^\bullet) \;=\; \sum(-1)^i\,\mathrm{rg}(K^i)\ ,\quad c_1(K^\bullet)\;=\;\sum(-1)^i c_1(K^i)\ ,\quad \chi(K^\bullet)\;=\;\sum(-1)^i\chi(K^i)\ ,$$

et si $\mathrm{rg}(K^\bullet)\neq 0$,

$$\mu(K^\bullet)\;=\;\frac{c_1(K^\bullet)}{\mathrm{rg}(K^\bullet)}\ ,\quad \Delta(K^\bullet)\;=\;P(\mu(K^\bullet))-\frac{\chi(K^\bullet)}{\mathrm{rg}(K^\bullet)}$$

(P est défini dans 2.1). On pose aussi pour tout entier m

$$P_{K^\bullet}(m) \ = \ \sum(-1)^i P_{K^i}(m) \ .$$

Les nombres $\mathrm{rg}(K^\bullet)$, $c_1(K^\bullet)$, $\chi(K^\bullet)$, $\mu(K^\bullet)$, $\Delta(K^\bullet)$ s'appellent respectivement le *rang*, la *première classe de Chern*, la *caractéristique d'Euler-Poincaré*, la *pente* et le *discriminant* de $K^\bullet$. Le polynôme $P_{K^\bullet}$ s'appelle le *polynôme de Hilbert* de $K^\bullet$. Quand on considèrera des complexes du type

$$\big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big)\longrightarrow E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n \ ,$$

on supposera toujours que le terme de degré 0 est $E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n$.

Si V est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, on notera aussi V le complexe égal à V en degré 0 et à 0 en tout autre degré. Si $K^\bullet$, $K'^\bullet$ sont des complexes de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, on posera

$$c_1(K^\bullet, K'^\bullet) \ = \ c_1(\mathcal{H}om(K^\bullet, K'^\bullet)) \ .$$

Rappelons que K' désigne le fibré exceptionnel noyau de $\mathrm{ev} : G'\otimes\mathrm{Hom}(G',E')\to E'$.

Lemme 5.5 : *Soit* $K^\bullet : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big)\to E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n$ *un complexe de rang* $r\neq 0$. *Alors on a*

$$\mu(F)-\mu(K^\bullet) \ = \ \frac{n\,\mathrm{rg}(G') - 3h\,\mathrm{rg}(F)^2 - q\,\mathrm{rg}(K')}{r\,\mathrm{rg}(F)} \ .$$

Démonstration. Il suffit de montrer, puisque $\mu(F)-\mu(K^\bullet) = \dfrac{c_1(K^\bullet,F)}{r\,\mathrm{rg}(F)}$, que

$$c_1(E'(-3),F) \ = \ \mathrm{rg}(G') \ , \quad c_1(G'(-3),F) \ = \ \mathrm{rg}(K') \ , \quad c_1(F(-3),F) \ = \ 3\,\mathrm{rg}(F)^2 \ .$$

La dernière égalité est évidente. Les deux autres sont analogues. On ne démontrera que la première. On a

$$c_1(E'(-3),F) \ = \ \mathrm{rg}(E')\,\mathrm{rg}(F)(3+\mu(F)-\mu(E')) \ = \ \mathrm{rg}(G') \ ,$$

d'après la proposition (5.1) de [1]. Ceci démontre le lemme 5.5. □

Soient

$$K^\bullet : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big)\longrightarrow E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n \ ,$$
$$K'^\bullet : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^{q'}\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^{h'}\big)\longrightarrow E'(-3)\otimes\mathbb{C}^{n'}$$

des complexes. On pose

$$\Delta_1(K'^\bullet, K^\bullet) \ = \ q'n - qn' \ , \quad \Delta_2(K'^\bullet, K^\bullet) \ = \ h'n - hn' \ ,$$
$$a_1(K^\bullet) \ = \ n\,\mathrm{rg}(F) + h\,\mathrm{rg}(E') \ , \ a_2(K^\bullet) \ = \ n\,\mathrm{rg}(L') - q\,\mathrm{rg}(E').$$

Lemme 5.6 : *On suppose que* $\mathrm{rg}(K^\bullet) > 0$ *et* $\mu(K^\bullet)\leq\mu(F)$. *Alors on a* $a_2(K^\bullet) > 0$.

Démonstration. D'après le lemme 5.5, on a $h \leq \dfrac{n - \mathrm{rg}(G') - q\,\mathrm{rg}(K')}{3\,\mathrm{rg}(F)}$, donc $\dfrac{q}{n} \leq \dfrac{\mathrm{rg}(L')}{\mathrm{rg}(E')}$. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{\mathrm{rg}(G')}{\mathrm{rg}(K')} < \dfrac{\mathrm{rg}(L')}{\mathrm{rg}(E')}$. Mais on a d'après 3.3

$$\mathrm{rg}(K') \ = \ 3\,\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(G') - \mathrm{rg}(E')\ , \quad \mathrm{rg}(L') \ = \ 3\,\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(E') - \mathrm{rg}(G')\ ,$$

donc l'inégalité $\mathrm{rg}(K')\,\mathrm{rg}(L') - \mathrm{rg}(E')\,\mathrm{rg}(G') > 0$ équivaut à

$$3\,\mathrm{rg}(F)\big(3\,\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(E')\,\mathrm{rg}(G') - \mathrm{rg}(E')^2 - \mathrm{rg}(G')^2\big) \ > \ 0\ ,$$

qui est vérifiée, car on a d'après 3.3.3

$$3\,\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(E')\,\mathrm{rg}(G') - \mathrm{rg}(E')^2 - \mathrm{rg}(G')^2 \ = \ \mathrm{rg}(F)^2\ .$$

Ceci démontre le lemme 5.6. □

Lemme 5.7 : *On a* $c_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) = -\dfrac{1}{n}\big(a_1(K^{\bullet})\Delta_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) + a_2(K^{\bullet})\Delta_2(K'^{\bullet}, K^{\bullet})\big)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
c_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) \ &= \ n'c_1(E'(-3), K^{\bullet}) - h'c_1(F(-3), K^{\bullet}) - q'c_1(G'(-3), K^{\bullet}) \\
&= \ n'nc_1(E'(-3), E'(-3)) - n'hc_1(E'(-3), F(-3)) - n'qc_1(E'(-3), G'(-3)) \\
&\quad -h'nc_1(F(-3), E'(-3)) + h'hc_1(F(-3), F(-3)) + h'qc_1(F(-3), G'(-3)) \\
&\quad -q'nc_1(G'(-3), E'(-3)) + q'hc_1(G'(-3).F(-3)) + q'qc_1(G'(-3), G'(-3))\ .
\end{aligned}$$

On a

$$c_1(E'(-3), E'(-3)) \ = \ c_1(G'(-3), G'(-3)) \ = \ c_1(F(-3), F(-3)) \ = \ 0\ ,$$

et $c_1(E'(-3), G'(-3)) = -\,\mathrm{rg}(F)$ d'après 3.3.3 , et de même

$$c_1(E'(-3), F(-3)) \ = \ -\,\mathrm{rg}(L')\ , \quad c_1(G'(-3), F(-3)) \ = \ -\,\mathrm{rg}(E')\ .$$

Donc

$$c_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) \ = \ -\Delta_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet})\,\mathrm{rg}(F) - \Delta_2(K'^{\bullet}, K^{\bullet})\,\mathrm{rg}(L') + (qh' - q'h)\,\mathrm{rg}(E').$$

Mais on a

$$qh' - qh' \ = \ \frac{q}{n}\Delta_2(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) - \frac{h}{n}\Delta_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet})\ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
c_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) \ &= \ \Big(-\,\mathrm{rg}(F) - \frac{h}{n}\,\mathrm{rg}(E')\Big)\Delta_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) - \Big(\mathrm{rg}(L') - \frac{q}{n}\,\mathrm{rg}(E')\Big)\Delta_2(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) \\
&= \ -\frac{1}{n}\big(a_1(K^{\bullet})\Delta_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) + a_2(K^{\bullet})\Delta_2(K'^{\bullet}, K^{\bullet})\big)\ ,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme 5.7. □

Lemme 5.8 : *On a, si* $\mathrm{rg}(K^{\bullet}) \neq 0$, $\Delta(K^{\bullet}) = \dfrac{h}{\mathrm{rg}(K^{\bullet})\,\mathrm{rg}(F)} - \Delta(F) + P(\mu(K^{\bullet}) - \alpha)$.

Démonstration. Rappelons que $\alpha = \mu(F)$. Si $K^\bullet$ est le complexe apparaissant dans la proposition B, le lemme 5.8 signifie simplement que $h = h(M(r, c_1, c_2))$. Dans le cas général, l'égalité du lemme 5.8 équivaut à

$$\chi(K^\bullet) \;=\; -\frac{h}{\mathrm{rg}(F)} + \alpha c_1(K^\bullet) + \left(\Delta(F) - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}\alpha\right) \mathrm{rg}(K^\bullet) \;.$$

(par définition de P et $\Delta(K^\bullet)$). Les deux termes de cette égalité sont des formes 1inéaires en n, q, h. Il suffit donc de montrer que leurs coefficients sont égaux, c'est à dire

$$\begin{aligned}
\chi(E'(-3)) &= \alpha c_1(E'(-3)) + \left(\Delta(F) - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}\alpha\right) \mathrm{rg}(E'(-3)) \;, \\
\chi(G'(-3)) &= \alpha c_1(G'(-3)) + \left(\Delta(F) - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}\alpha\right) \mathrm{rg}(G'(-3)) \;, \\
\chi(F(-3)) &= \frac{1}{\mathrm{rg}(F)} + \alpha c_1(F(-3)) + \left(\Delta(F) - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}\alpha\right) \mathrm{rg}(F) \;.
\end{aligned}$$

Les deux premières égalités sont analogues. On ne démontrera que la première et la troisième. On a $\chi(E', F) = 0$, c'est à dire

$$P(\alpha - \mu(E')) - \Delta(E') - \Delta(F) \;=\; 0 \;,$$

d'où

$$(*) \qquad \mu(E')^2 - \frac{3}{2}\mu(E') + 1 - \Delta(E') \;=\; -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha\mu(E') - \frac{3}{2}\alpha + \Delta(F) \;.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\chi(E'(-3)) &= \mathrm{rg}(E')(P(\mu(E') - 3) - \Delta(E')) \\
&= \mathrm{rg}(E') \left(\frac{\mu(E')^2}{2} - \frac{3}{2}\mu(E') + 1 - \Delta(E')\right) \\
&= \mathrm{rg}(E') \left(-\frac{\alpha^2}{2} + \alpha\mu(E') - \frac{3}{2}\alpha + \Delta(F)\right) \text{ d'après (*)} \\
&= \mathrm{rg}(E') \left(-\frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \mu(F)\right) + \alpha c_1(E'(-3)) \;,
\end{aligned}$$

ce qui démontre la première égalité.

Démontrons la troisième. On a

$$\begin{aligned}
\chi(F(-3)) &= \mathrm{rg}(F)(P(\alpha - 3) - \Delta(F)) \\
&= \mathrm{rg}(F) \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{2}\alpha + 1 - \Delta(F)\right) \;,
\end{aligned}$$

et $\alpha c_1(F(-3)) = \alpha^2 \,\mathrm{rg}(F) - 3\alpha \,\mathrm{rg}(F)$, donc

$$\alpha c_1(F(-3)) + \left(\Delta(F) - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}\alpha\right) \mathrm{rg}(F) \;=\; \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{2}\alpha + \Delta(F)\right) \mathrm{rg}(F) \;,$$

et il suffit de montrer que

$$\mathrm{rg}(F)(1 - \Delta(F)) \;=\; \frac{1}{\mathrm{rg}(F)} + \Delta(F)\,\mathrm{rg}(F) \;,$$

ce qui découle de 3.1. Ceci achève la démonstration du lemme 5.8. □

Corollaire 5.9 : *On suppose que* $\mu(K^\bullet) = \mu(K'^\bullet)$*. Alors on a*

$$\Delta(K^\bullet) - \Delta(K'^\bullet) \;=\; -\frac{1}{\mathrm{rg}(K'^\bullet)a_1(K^\bullet)}\Delta_2(K'^\bullet, K^\bullet)\ .$$

Démonstration. D'après le lemme 5.8, on a

$$\begin{aligned}\Delta(K^\bullet) - \Delta(K'^\bullet) &= \frac{1}{\mathrm{rg}(F)}\left(\frac{h}{\mathrm{rg}(K^\bullet)} - \frac{h'}{\mathrm{rg}(K'^\bullet)}\right)\\ &= \frac{h\,\mathrm{rg}(K'^\bullet) - h'\,\mathrm{rg}(K^\bullet)}{\mathrm{rg}(K^\bullet)\,\mathrm{rg}(K'^\bullet)\,\mathrm{rg}(F)}\\ &= \frac{\mathrm{rg}(E')(hn' - h'n) + \mathrm{rg}(G')(h'q - hq')}{\mathrm{rg}(K^\bullet)\,\mathrm{rg}(K'^\bullet)\,\mathrm{rg}(F)}\end{aligned}$$

On a

$$h'q - hq' \;=\; \frac{q}{n}\Delta_2(K'^\bullet, K^\bullet) - \frac{h}{n}\Delta_1(K'^\bullet, K^\bullet)\ ,$$

et d'après le lemme 5.7, on a, puisque $c_1(K'^\bullet, K^\bullet) = 0$,

$$\Delta_1(K'^\bullet, K^\bullet) \;=\; -\frac{a_2(K^\bullet)}{a_1(K^\bullet)}\Delta_2(K'^\bullet, K^\bullet)\ .$$

Donc

$$h'q - hq' \;=\; \left(\frac{q}{n} + \frac{h}{n}\frac{a_2(K^\bullet)}{a_1(K^\bullet)}\right)\Delta_2(K'^\bullet, K^\bullet)\ ,$$

et

$$\Delta(K^\bullet) - \Delta(K'^\bullet) \;=\; \left(-\,\mathrm{rg}(E') + \mathrm{rg}(G')\left(\frac{q}{n} + \frac{h}{n}\frac{a_2(K^\bullet)}{a_1(K^\bullet)}\right)\right)\frac{\Delta_2(K'^\bullet, K^\bullet)}{\mathrm{rg}(K^\bullet)\,\mathrm{rg}(K'^\bullet)\,\mathrm{rg}(F)}\ .$$

On a

$$\begin{aligned}&-\,\mathrm{rg}(E') + \mathrm{rg}(G')\left(\frac{q}{n} + \frac{h}{n}\frac{a_2(K^\bullet)}{a_1(K^\bullet)}\right)\\ &\qquad= \frac{-\,\mathrm{rg}(E')a_1(K^\bullet)n + \mathrm{rg}(G')(a_1(K^\bullet)q + a_2(K^\bullet)h)}{a_1(K^\bullet)n}\\ &\qquad= \frac{-\,\mathrm{rg}(E')\,\mathrm{rg}(F)n + (\mathrm{rg}(G')\,\mathrm{rg}(L') - \mathrm{rg}(E')^2)h + \mathrm{rg}(G')\,\mathrm{rg}(F)q}{a_1(K^\bullet)}\ .\end{aligned}$$

On a $\mathrm{rg}(G') = 3\,\mathrm{rg}(E')\,\mathrm{rg}(F) - \mathrm{rg}(L')$, donc

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(G')\,\mathrm{rg}(L') - \mathrm{rg}(E')^2 &= 3\,\mathrm{rg}(E')\,\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(L') - \mathrm{rg}(L')^2 - \mathrm{rg}(E')^2\\ &= \mathrm{rg}(F)^2\end{aligned}$$

d'après 3.3.3. Donc

$$\begin{aligned}-\,\mathrm{rg}(E') + \mathrm{rg}(G')\left(\frac{q}{n} + \frac{h}{n}\frac{a_2(K^\bullet)}{a_1(K^\bullet)}\right) &= -\frac{\mathrm{rg}(F)}{a_1(K^\bullet)}(\mathrm{rg}(E')n - \mathrm{rg}(G')q - \mathrm{rg}(F)h)\\ &= -\frac{\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(K^\bullet)}{a_1(K^\bullet)}\ ,\end{aligned}$$

et finalement

$$\Delta(K^\bullet) - \Delta(K'^\bullet) \;=\; -\frac{1}{\mathrm{rg}(K'^\bullet)a_1(K^\bullet)}\Delta_2(K'^\bullet, K^\bullet)\ ,$$

ce qui démontre le corollaire 5.9. □

Remarques : 1 – Sous les hypothèses du corollaire 5.9 on a aussi

$$\Delta(K^\bullet) - \Delta(K'^\bullet) \;=\; \frac{1}{\mathrm{rg}(K'^\bullet)a_2(K^\bullet)}\Delta_1(K'^\bullet, K^\bullet)\ .$$

2 – Pour compléter le lemme 5.5, on montre aisément que si $\mathrm{rg}(K^\bullet) > 0$, on a $\mu(K^\bullet) > \mu(F) - x_F$ si et seulement si

$$h \;>\; \frac{(\mathrm{rg}(F)x_F n - q)(\mathrm{rg}(G') - \mathrm{rg}(E')\,\mathrm{rg}(F)x_F)}{\mathrm{rg}(F)}\ .$$

6. Complexes semi-stables et faisceaux semi-stables

6.1 – Complexes semi-stables

Soit $K^\bullet : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big)\to E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n$ un complexe de rang $r>0$. On dit que $K^\bullet$ est *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout quasi-sous-complexe propre $K'^\bullet$ de $K^\bullet$ on a

$$\mathrm{rg}(K^\bullet)P_{K'^\bullet}(m) - \mathrm{rg}(K'^\bullet)P_{K^\bullet}(m) \;\leq\; 0 \qquad (\text{resp. } <0)$$

pour $m \gg 0$. Ceci équivaut à dire que $c_1(K^\bullet, K'^\bullet) \leq 0$, et en cas d'égalité $\Delta(K'^\bullet) \geq \Delta(K^\bullet)$ (resp. $>$). Compte tenu du lemme 5.7 et du corollaire 5.9, ceci équivaut à dire que

$$(**) \qquad a_1(K^\bullet)\Delta_1(K'^\bullet, K^\bullet) + a_2(K^\bullet)\Delta_2(K'^\bullet, K^\bullet) \;\leq 0\ ,$$

et en cas d'égalité $\Delta_2(K'^\bullet, K^\bullet) \geq 0$ (resp. >0), cette dernière condition pouvant être remplacée par $\Delta_1(K'^\bullet, K^\bullet) \leq 0$ (resp. <0). Un calcul simple montre aussi que la condition $(**)$ équivaut à

$$n' \;\geq\; \frac{a_1(K^\bullet)q' + a_2(K^\bullet)h'}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h}\ .$$

On dit que $K^\bullet$ est *p-semi-stable* (resp. *p-stable*) si pour tout quasi-sous-complexe propre $K'^\bullet$ de $K^\bullet$ on a l'inégalité $(**)$ (resp. une inégalité stricte). Un complexe semi-stable est p-semi-stable et un complexe p-stable est stable.

Dans ce qui suit on entend par complexe un complexe du type

$$\big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^{q_0}\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^{h_0}\big)\longrightarrow E'(-3)\otimes\mathbb{C}^{n_0}\ .$$

Soient $K_1^\bullet$, $K_2^\bullet$ des complexes. On pose

$$d(K_1^\bullet, K_2^\bullet) \;=\; \mathrm{rg}(K_1^\bullet)P_{K_2^\bullet} - \mathrm{rg}(K_2^\bullet)P_{K_1^\bullet}\ .$$

On peut considérer qu'un quasi-sous-complexe $K'^\bullet$ d'un complexe

$$K^\bullet = (\epsilon,\phi) : \big(G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q\big)\oplus\big(F(-3)\otimes\mathbb{C}^h\big)\longrightarrow E'(-3)\otimes\mathbb{C}^n$$

est défini par la donnée de sous-espaces vectoriels H_0 de $\mathbb{C}^q$, H_1 de $\mathbb{C}^h$, H_2 de $\mathbb{C}^n$, et d'un morphisme $\beta : F(-3)\otimes\mathbb{C}^h \to G'(-3)\otimes\mathbb{C}^q$ tels que

$$\epsilon(G'(-3)\otimes H_0) \;\subset\; E'(-3)\otimes H_2 \quad \text{et} \quad (\phi+\epsilon\circ\beta)(F(-3)\otimes H_1) \;\subset\; E'(-3)\otimes H_2\ .$$

Notons que $K'^{\bullet}$ n'est pas entièrement déterminé par (H_0, H_1, H_2). C'est à dire que si $\beta' : F(-3) \otimes \mathbb{C}^h \to G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q$ est un autre morphisme tel que $(\phi + \epsilon \circ \beta')(F(-3) \otimes H_1) \subset E'(-3) \otimes H_2$, les complexes

$$(\epsilon, \phi + \epsilon \circ \beta), (\epsilon, \phi + \epsilon \circ \beta') : \big(G'(-3) \otimes H_0\big) \oplus \big(F(-3) \otimes H_1\big) \to E'(-3) \otimes H_2$$

ne sont pas nécessairement isomorphes. Ils le seront si on a par exemple $(\beta - \beta')(F(-3) \otimes H_1) \subset G'(-3) \otimes H_0$. On notera

$$(H_0, H_1, H_2, \beta) \; = \; K'^{\bullet} \; .$$

On note $K^{\bullet}/K'^{\bullet}$ le *complexe quotient*

$$(\overline{\epsilon}, \overline{\phi + \epsilon \circ \beta}) : \big(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q/H_0\big) \oplus \big(F(-3) \otimes \mathbb{C}^h/H_1\big) \longrightarrow E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n/H_2 \; ,$$

$\overline{\epsilon}, \overline{\phi + \epsilon}$ étant induits par ϵ, $\phi + \epsilon$ respectivement.

Soient $K_1^{\bullet} = (H_0, H_1, H_2, \beta)$ un quasi-sous-complexe de $K^{\bullet}$ et $K_2^{\bullet} = (H'_0, H'_1, H'_2, \beta')$ un quasi-sous-complexe de $K_1^{\bullet}$. Soit

$$\beta_0 : F(-3) \otimes C^h \longrightarrow G'(-3) \otimes H_1 \; \subset \; G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q$$

une extension de β'. Alors $(H'_0, H'_1, H'_2, \beta + \beta'_0)$ est un quasi-sous-complexe de $K^{\bullet}$, qui est indépendant, à équivalence près, du choix de β'_0. Autrement dit, un quasi-sous-complexe d'un quasi-sous-complexe de $K^{\bullet}$ est un quasi-sous-complexe de $K^{\bullet}$. Cependant il est faux en général que si $K'^{\bullet} = (H'_0, H'_1, H'_2, \beta'')$ est un quasi-sous-complexe de $K^{\bullet}$, avec $H'_i \subset H_i$ pour $i = 0, 1, 2$, $K'^{\bullet}$ puisse être considéré comme un quasi-sous-complexe de $K_1^{\bullet}$.

On voit aisément que si $K_2^{\bullet} = (H''_0, H''_1, H''_2, \beta'')$ est un quasi-sous-complexe de $K^{\bullet}$, $K_1^{\bullet} = (H_0, H_1, H_2, \beta)$ un quasi-sous-complexe de $K_2^{\bullet}$, on peut voir $K_2^{\bullet}/K_1^{\bullet}$ comme un quasi-sous complexe de $K^{\bullet}/K_1^{\bullet}$ et réciproquement.

Enfin, soient $K_i^{\bullet} = (H_{0i}, H_{1i}, H_{2i}, \beta_i)$, $i = 1, 2$, des quasi-sous-complexes de $K^{\bullet}$. On construit un quasi-sous-complexe $(H_{01} + H_{02}, H_{11} + H_{12}, H_{21} + H_{22}, \beta)$ de $K^{\bullet}$ de la façon suivante : soient N_1 un sous-espace vectoriel de H_{11} supplémentaire de $H_{11} \cap H_{12}$, N_2 un supplémentaire de $H_{11} \cap H_{12}$ dans H_{12}, N un supplémentaire de $H_{11} + H_{12}$ dans $\mathbb{C}^h$. On définit β par :

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_1 \text{ sur } H_{11} \otimes F(-3), \\ \beta &= \beta_2 \text{ sur } N_2 \otimes F(-3), \\ \beta &= 0 \text{ sur } N \otimes F(-3). \end{aligned}$$

Si on avait pris $\beta = \beta_1$ sur $N_1 \otimes F(-3)$, $\beta = \beta_2$ sur $H_{12} \otimes F(-3)$, on aurait obtenu un quasi-sous-complexe de $K^{\bullet}$ non nécessairement isomorphe au précédent. La “somme” de deux quasi-sous-complexes n'est donc pas une opération commutative.

Lemme 6.1 : 1 − *Soient $K_1^{\bullet}$, $K_2^{\bullet}$, $K_3^{\bullet}$ des complexes. Alors on a*

$$\mathrm{rg}(K_1^{\bullet}) d(K_2^{\bullet}, K_3^{\bullet}) + \mathrm{rg}(K_2^{\bullet}) d(K_3^{\bullet}, K_1^{\bullet}) + \mathrm{rg}(K_3^{\bullet}) d(K_1^{\bullet}, K_2^{\bullet}) \; = \; 0$$

2 − *Supposons que $K_1^{\bullet} \subset K_2^{\bullet} \subset K^{\bullet}$. Alors on a*

$$d(K^{\bullet}/K_1^{\bullet}, K_2^{\bullet}/K_1^{\bullet}) \; = \; d(K^{\bullet}, K_2^{\bullet}) - d(K^{\bullet}, K_1^{\bullet}) + d(K_2^{\bullet}, K_1^{\bullet}) \; .$$

Démonstration. Immédiat. Pour **2-** on utilise le fait que si $K''^{\bullet} \subset K'^{\bullet}$, on a

$$\mathrm{rg}(K'^{\bullet}/K''^{\bullet}) \;=\; \mathrm{rg}(K'^{\bullet}) - \mathrm{rg}(K''^{\bullet}) \;, \qquad P_{K'^{\bullet}/K''^{\bullet}} \;=\; P_{K'^{\bullet}} - P_{K''^{\bullet}} \;.$$

□

Corollaire 6.2 : *Soient $K_1^{\bullet} \subset K^{\bullet}$ des complexes, tels que $K^{\bullet}$ soit semi-stable et $d(K^{\bullet}, K_1^{\bullet}) = 0$. Alors $K_1^{\bullet}$ et $K^{\bullet}/K_1^{\bullet}$ sont semi-stables.*

Démonstration. On peut supposer que $K_1^{\bullet} \neq 0, K^{\bullet}$. Remarquons que $d(K^{\bullet}, K_1^{\bullet}) = 0$ équivaut à $\Delta_1(K^{\bullet}, K_1^{\bullet}) = \Delta_2(K^{\bullet}, K_1^{\bullet}) = 0$. Si

$$K^{\bullet} : \big(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q\big) \oplus \big(F(-3) \otimes \mathbb{C}^h\big) \longrightarrow E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n \;,$$

il existe donc un diviseur commun d à q, h, n tel que $K_1^{\bullet}$ soit de la forme

$$K^{\bullet} : \big(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^{q/d}\big) \oplus \big(F(-3) \otimes \mathbb{C}^{h/d}\big) \longrightarrow E'(-3) \otimes \mathbb{C}^{n/d} \;.$$

Alors on a $\mathrm{rg}(K_1^{\bullet}) = \dfrac{\mathrm{rg}(K^{\bullet})}{d} > 0$ et $\mathrm{rg}(K^{\bullet}) > \mathrm{rg}(K_1^{\bullet})$.

Montrons que $K_1^{\bullet}$ est semi-stable. Soit $K_2^{\bullet}$ un quasi-sous-complexe de $K_1^{\bullet}$. C'en est aussi un de $K^{\bullet}$. On a d'après la lemme 6.1

$$d(K_1^{\bullet}, K_2^{\bullet}) \;=\; \frac{\mathrm{rg}(K_1^{\bullet})}{\mathrm{rg}(K^{\bullet})} d(K^{\bullet}, K_2^{\bullet}) \;\leq 0 \;,$$

car $K^{\bullet}$ est semi-stable. Donc $K_1^{\bullet}$ est semi-stable.

Montrons que $K^{\bullet}/K_1^{\bullet}$ est semi-stable. Soit $K_2^{\bullet}/K_1^{\bullet}$ un quasi-sous-complexe de $K^{\bullet}/K_1^{\bullet}$, $K_2^{\bullet}$ en étant un de $K^{\bullet}$. On a, d'après le lemme 6,1 2-

$$d(K^{\bullet}/K_1^{\bullet}, K_2^{\bullet}/K_1^{\bullet}) \;=\; d(K^{\bullet}, K_2^{\bullet}) + d(K_2^{\bullet}, K_1^{\bullet}) \;.$$

D'après le lemme 6.1, 1-, on a

$$d(K_2^{\bullet}, K_1^{\bullet}) \;=\; -\frac{\mathrm{rg}(K_1^{\bullet})}{\mathrm{rg}(K^{\bullet})} d(K^{\bullet}, K_2^{\bullet}) \;,$$

donc

$$d(K^{\bullet}/K_1^{\bullet}, K_2^{\bullet}/K_1^{\bullet}) \;=\; \left(1 - \frac{\mathrm{rg}(K_1^{\bullet})}{\mathrm{rg}(K^{\bullet})}\right) d(K^{\bullet}, K_2^{\bullet}) \;\leq 0 \;,$$

car $K^{\bullet}$ est semi-stable. Donc $K^{\bullet}/K_1^{\bullet}$ est semi-stable. Ceci démontre le corollaire 6.2. □

On montre aisément que le corollaire 6.2 est aussi vrai pour les complexes p-semi-stables, en remplaçant évidemment $d(K^{\bullet}, K_1^{\bullet})$ par $c_1(K^{\bullet}, K_1^{\bullet})$.

Autre définition équivalente de la (semi-)stabilité – Soient a, b des nombres rationnels positifs. Soit $K^{\bullet}$ un complexe. On dit que $K^{\bullet}$ est (a, b)-semi-stable (resp. (a, b)-stable) si pour tout quasi-sous-complexe propre $K'^{\bullet}$ de $K^{\bullet}$ on a

$$a\Delta_1(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) + b\Delta_2(K'^{\bullet}, K^{\bullet}) \;\leq 0 \quad (\text{resp. } < 0) \;.$$

Le résultat suivant se démontre aisément :

Lemme 6.2b : *Soient q, h, n est entiers positifs. Il existe un $\epsilon_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\epsilon_0 > 0$ et que pour tout $\epsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ et tout complexe*

$$K^\bullet : \big(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q\big) \oplus \big(F(-3) \otimes \mathbb{C}^h\big) \longrightarrow E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n \ ,$$

$K^\bullet$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si $K^\bullet$ est $(a_1(K^\bullet)+\epsilon, a_2(K^\bullet))$-semi-stable (resp. $(a_1(K^\bullet)+\epsilon, a_2(K^\bullet))$-stable).

6.2 – Démonstration du théorème C

6.2.1 – On ne démontrera que l'assertion concernant la semi-stabilité, le cas de la stabilité étant analogue. On procèdera en trois étapes :

(i) $\left.\begin{array}{l}\text{Le morphisme de fibrés } \phi \text{ est injectif}\\ \text{sauf en un nombre fini de points et coker}(\phi)\\ \text{n'est pas semi-stable.}\end{array}\right\} \Longrightarrow K^\bullet$ n'est pas semi-stable.

(ii) $K^\bullet$ est p-semi-stable $\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Le morphisme de fibrés } \phi \text{ est injectif sauf en un nombre}\\ \text{fini de points.}\end{array}\right.$

(iii) $\left.\begin{array}{l}\text{Le morphisme de fibrés } \phi \text{ est injectif}\\ \text{sauf en un nombre fini de points et } K^\bullet \text{ n'est}\\ \text{pas semi-stable.}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ coker(ϕ) n'est pas semi-stable.

6.2.2 – Démonstration de (i). Supposons que ϕ soit injectif sauf en au plus un nombre fini de points et que $U = \mathrm{coker}(\phi)$ ne soit pas semi-stable. Prouvons d'abord que U est sans torsion. Son sous-faisceau de torsion T est concentré en les points où ϕ n'est pas injectif, donc son support est fini. Il suffit donc pour montrer que $T = 0$ de prouver que $h^0(U \otimes F^*) = 0$, ce qui découle de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \big(G'(-3) \otimes C^q\big) \oplus \big(F(-3) \otimes \mathbb{C}^h\big) \longrightarrow E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow U \longrightarrow 0 \ ,$$

et du fait que $\mathrm{Hom}(F, E'(-3)) = \mathrm{Ext}^1(F, F(-3)) = \mathrm{Ext}^1(F, G'(-3)) = 0$.

Montrons maintenant que $K^\bullet$ n'est pas semi-stable. Pour cela, on va d'abord prouver l'existence d'un sous-faisceau propre V de U tel que

(a) On a $\mu(V) > \dfrac{c_1}{r}$, et en cas d'égalité, on a $\dfrac{\chi(V)}{\mathrm{rg}(V)} > \dfrac{\chi(U)}{\mathrm{rg}(U)}$. Cette condition équivaut à la suivante : on a $\dfrac{P_V(X)}{\mathrm{rg}(V)} > \dfrac{P_U(X)}{r}$ pour $X \gg 0$.

(b) $\mathrm{Hom}(F, U/V) = \{0\}$.

(c) $\mathrm{Hom}(V, F(-1)) = \{0\}$.

Soit $U_0 = 0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_m = U$ la filtration de Harder-Narasimhan de U (cf. 2.4.1). On prend pour V le faisceau U_j tel que j soit le plus petit entier tel que pour $i > j$ on ait

$$\frac{P_{U_i/U_{i-1}}(X)}{\mathrm{rg}(U_i/U_{i-1})} \leq \frac{P_U(X)}{r} \quad \text{pour } X \gg 0 \ .$$

Vérifions que V possède bien les propriétés requises. La condition (a) est immédiate. Démontrons (b). Puisque U est de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, on a

$$\frac{P_U(X)}{\mathrm{rg}(U)} \ < \ \frac{P_F(X)}{\mathrm{rg}(F)} \quad \text{pour } X \gg 0 \ .$$

Il en découle que pour $i > j$ on a

$$\frac{P_{U_i/U_{i-1}}(X)}{\mathrm{rg}(U_i/U_{i-1})} \ < \ \frac{P_F(X)}{\mathrm{rg}(F)} \quad \text{pour } X \gg 0 \ .$$

d'où, F étant stable, $\mathrm{Hom}(F, U_i/U_{i-1}) = \{0\}$. Montrons maintenant par récurrence sur $i \geq j$ que $\mathrm{Hom}(F, U_i/U_j) = \{0\}$. En faisant $i = m$ on aura (b). Pour $i = j$ c'est évident. Supposons que ce soit vrai pour $i < m$. Soit $\sigma : F \to U_{i+1}/E_j$ un morphisme. Le morphisme $F \to U_{i+1}/E_i$ déduit de σ est nul puisque $\mathrm{Hom}(F, U_{i+1}/U_i) = \{0\}$. Donc σ est à valeurs dans U_i/U_j, donc $\sigma = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. Ceci démontre (b).

Prouvons maintenant (c). On a, pour tout $i < j$,

$$\frac{P_{U_i/U_{i-1}}(X)}{\mathrm{rg}(U_i/U_{i-1})} \ > \ \frac{P_U(X)}{r} \ > \ \frac{P_{F(-1)}(X)}{\mathrm{rg}(F)} \quad \text{pour } X \gg 0 \ .$$

(la seconde inégalité découlant du fait que $\mu > \alpha - 1$). On a donc $\mathrm{Hom}(U_i/U_{i-1}, F(-1)) = \{0\}$, et un raisonnement analogue à celui de (b) permet de prouver que $\mathrm{Hom}(V, F(-1)) = \{0\}$. Ceci démontre (c).

On va maintenant utiliser le faisceau V pour construire un quasi-sous-complexe de $K^\bullet$ contredisant la semi-stabilité de $K^\bullet$. On a $\mathrm{Hom}(V, F(-1)) = \{0\}$, et puisque $h^0(F^* \otimes U/V) = 0$, on a $h^1(V \otimes F^*) \leq h^1(U \otimes F^*)$. On peut donc appliquer la proposition A, donc

$$h^1(V \otimes L'^*(3)) \ = \ h^1(V \otimes E'^*(3)) \ = \ 0 \ .$$

D'après la proposition 5.4 et le corollaire 5.2 on en déduit un quasi-sous-complexe de $K^\bullet$

$$K'^\bullet : \big(G'(-3) \otimes H^0(V \otimes L'^*(3))\big) \oplus \big(F(-3) \otimes H^1(V \otimes F^*)\big) \xrightarrow{\phi'} E'(-3) \otimes H^0(V \otimes E'^*(3)).$$

De plus, $\mathrm{coker}(\phi')$ est isomorphe à V. Ce quasi-sous-complexe de $K^\bullet$ contredit la semi-stabilité de $K^\bullet$, puisque la condition

$$\mathrm{rg}(K^\bullet) P_{K'^\bullet}(m) - \mathrm{rg}(K'^\bullet) P_{K^\bullet}(m) \ \gg 0 \quad \text{pour } m \gg 0 \ .$$

équivaut à (a). Ceci démontre (i).

6.2.3 – Démonstration de (ii). Supposons que $K^\bullet$ soit semi-stable. Soit $x \in \mathbb{P}_2$ et $u \in \ker(\phi_x)$. On peut écrire

$$u \ = \ \sum_{i=1}^{q'} g_i \otimes \alpha_i + \sum_{j=1}^{h'} f_j \otimes \beta_j \ ,$$

avec $g_i \in G'(-3)_x$, $\alpha_i \in \mathbb{C}^{q'}$, $f_j \in F(-3)_x$, $\beta_j \in \mathbb{C}^h$, les familles (g_i), (α_i), (f_j), (β_j) étant libres. Supposons que

$$\phi \ = \ \sum_{k=1}^{3\,\mathrm{rg}(F)} \delta_k \otimes \epsilon_k + \sum_{l=1}^{3\,\mathrm{rg}(L')} \phi_l \otimes \mu_l \ ,$$

où (δ_k) (resp. (ϕ_l) est une base de $\mathrm{Hom}(G'(-3), E'(-3))$ (resp. $\mathrm{Hom}(F(-3), E'(-3))$). La condition $\phi_x(u) = 0$ s'écrit donc

$$\sum_{k,i} \delta_k(g_i) \otimes \epsilon_k(\alpha_i) + \sum_{l,j} \phi_l(f_j) \otimes \mu_l(\beta_j) \ = \ 0.$$

Posons

$$H_1 \ = \ \sum_{k,i} \mathbb{C}\epsilon_k(\alpha_i) + \sum_{l,j} \mathbb{C}\mu_l(\beta_j) \ \subset \ \mathbb{C}^n \ , \quad U \ = \ \sum_{k,i} \mathbb{C}\delta_k(g_i) + \sum_{l,j} \mathbb{C}\phi_l(f_j) \ \subset \ E'(-3)_x \ .$$

D'après [3], lemme 28, on a

$$(***) \qquad \dim(H_1) + \dim(U) \ \leq \ 3\,\mathrm{rg}(F)q' + 3\,\mathrm{rg}(L')h' \ .$$

Posons

$$H'_0 \ = \ \sum_{i=1}^{q'} \mathbb{C}g_i \ \subset \ G'(-3)_x \ , \quad K'_0 \ = \ \sum_{i=1}^{q'} \mathbb{C}\alpha_i \ \subset \ \mathbb{C}^q \ ,$$

$$H_0 \ = \ \sum_{j=1}^{h'} \mathbb{C}f_j \ \subset \ F(-3)_x \ , \quad K_0 \ = \ \sum_{j=1}^{h'} \mathbb{C}\beta_j \ \subset \ \mathbb{C}^h \ .$$

La restriction de ϕ définit donc un sous-complexe de $K^\bullet$:

$$K''^\bullet : \big(G'(-3) \otimes K'_0\big) \oplus \big(F(-3) \otimes K_0\big) \longrightarrow E'(-3) \otimes H_1 \ .$$

Lemme 6.3 : *On suppose que $u \neq 0$. Alors on a $\mu(K^\bullet) = \alpha$, et quitte à remplacer $K^\bullet$ par un complexe équivalent, on peut se ramener au cas où*

$$\dim(U) \ = \ \frac{\mathrm{rg}(E')}{\mathrm{rg}(G')}(3\,\mathrm{rg}(E')h' + q') \ .$$

Démonstration. D'après la semi-stabilité de $K^\bullet$ on a

$$\dim(H_1) \ \geq \ \frac{a_1(K^\bullet)q' + a_2(K^\bullet)h'}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h} \ .$$

On en déduit à l'aide de $(***)$ que

$$\dim(U) \ \leq \ \left(3\,\mathrm{rg}(L') - \frac{a_2(K^\bullet)}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h}\right) h' + \left(3\,\mathrm{rg}(F) - \frac{a_1(K^\bullet)}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h}\right) q' \ .$$

On a $\mu(K^\bullet) \leq \alpha$, donc d'après le lemme 5.5 on a

$$n \ \geq \ \frac{3\,\mathrm{rg}(F)^2}{\mathrm{rg}(G')}h + \frac{\mathrm{rg}(K')}{\mathrm{rg}(G')}q \ ,$$

d'où on déduit, puisque $a_2(K^\bullet) = \mathrm{rg}(L')n - \mathrm{rg}(E')q$,

$$3\,\mathrm{rg}(L') - \frac{a_2(K^\bullet)}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h} \ \leq \ \frac{3\,\mathrm{rg}(L')\,\mathrm{rg}(F) + \mathrm{rg}(E') - \mathrm{rg}(L')\,\mathrm{rg}(K')/\,\mathrm{rg}(G')}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h}$$
$$+ \frac{3\,\mathrm{rg}(L')^2 - 3\,\mathrm{rg}(F)^2\,\mathrm{rg}(L')/\,\mathrm{rg}(G')}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h} \ .$$

Des égalités

$$\mathrm{rg}(L') \;=\; 3\,\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(E') - \mathrm{rg}(G')\ ,\quad \mathrm{rg}(F)^2 + \mathrm{rg}(G')^2 + \mathrm{rg}(E')^2 = 3\,\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(G')\,\mathrm{rg}(E')\ ,$$

(cf. 3.3) on déduit

$$3\,\mathrm{rg}(L')^2 - 3\,\mathrm{rg}(F)^2\,\mathrm{rg}(L')/\,\mathrm{rg}(G') \;=\; \frac{3\,\mathrm{rg}(L')\,\mathrm{rg}(E')^2}{\mathrm{rg}(G')}\ .$$

De même on a

$$3\,\mathrm{rg}(L')\,\mathrm{rg}(F) + \mathrm{rg}(E') - \mathrm{rg}(L')\,\mathrm{rg}(K')/\,\mathrm{rg}(G') \;=\; \frac{3\,\mathrm{rg}(F)\,\mathrm{rg}(E')^2}{\mathrm{rg}(G')}\ .$$

D'où finalement

$$3\,\mathrm{rg}(L')^2 - \frac{a_2(K^\bullet)}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h} \;\leq\; \frac{3\,\mathrm{rg}(E')^2}{\mathrm{rg}(G')}\ ,$$

avec égalité si et seulement si $\mu(K^\bullet) = \alpha$. On montre de même qu'on a

$$3\,\mathrm{rg}(F) - \frac{a_1(K^\bullet)}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h} \;\leq\; \frac{\mathrm{rg}(E')}{\mathrm{rg}(G')}\ ,$$

avec égalité si et seulement si $\mu(K^\bullet) = \alpha$. On obtient donc

$$\dim(U) \;\leq\; \frac{\mathrm{rg}(E')}{\mathrm{rg}(G')}(3\,\mathrm{rg}(E')h' + q')\ ,$$

avec égalité si et seulement si $\mu(K^\bullet) = \alpha$. Il suffit pour démontrer le lemme 6.3 de prouver l'inégalité inverse, $K^\bullet$ étant éventuellement remplacé par un complexe équivalent (et u changeant bien sûr aussi dans cette opération).

Posons $H_0'' = G'^{H_0} = \mathrm{ev}_x(H_0 \otimes \mathrm{Hom}(F, G'))$, ev_x désignant le morphisme canonique $F(-3) \otimes \mathrm{Hom}(F, G') \to G'(-3)$. On va montrer qu'en remplaçant au besoin $K^\bullet$ par un complexe équivalent, on peut supposer que $H_0' \cap H_0'' = \{0\}$. Supposons que $\dim(H_0' \cap H_0'') = m > 0$, et que $H_0' \cap H_0''$ soit engendré par $g_1, \ldots, g_m$. On peut donc écrire, pour $1 \leq i \leq m$,

$$g_i \;=\; \sum_{i=1}^{q'} \nu_{ij}(f_j)\ ,$$

où $\nu_{ij} : F(-3) \to G'(-3)$. Posons $\phi = (\epsilon, \psi)$, où

$$\epsilon : G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q \longrightarrow E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n\ ,\quad \psi : F(-3) \otimes \mathbb{C}^h \longrightarrow E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n\ .$$

Soit $\beta : F(-3) \otimes \mathbb{C}^h \to G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q$. Alors $\phi_\beta = (\epsilon, \psi + \epsilon \circ \beta)$ définit un complexe équivalent à $K^\bullet$. Posons $u = v + w$, avec $v \in G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q$ et $w \in F(-3) \otimes \mathbb{C}^h$. Alors $(v - \beta(w)) + w \in \ker(\phi_{\beta x})$, et est non nul si $u \neq 0$. Rappelons que $w = \sum_{j=1}^{h'} f_j \otimes \alpha_j$.

Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq m'$, soit $\theta_{ij} : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^h$ une application linéaire telle que $\theta_{ij}(\beta_j) = \alpha_i$ et $\theta_{ij}(\beta_k) = 0$ si $k \neq j$. On a alors, si

$$\beta \;=\; \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{h'} \nu_{ij} \otimes \theta_{ij}\ ,$$

$$\beta(w) \;=\; \sum_{i=1}^{m} g_i \otimes \alpha_i \quad \text{et} \quad v - \beta(w) \;=\; \sum_{i=m+1}^{q'} g_i \otimes \alpha_i \ .$$

On peut donc bien supposer que $H'_0 \cap H''_0 = \{0\}$.

On a $h'' \leq h < \mathrm{rg}(F)$, car $M(r, c_1, c_2)$ est extrémale. Donc d'après la proposition 3.3 la restriction de ev_x à $H'_0 \otimes \mathrm{Hom}(F, G')$ est injective. On a donc

$$\dim(H''_0) \;=\; 3\,\mathrm{rg}(E')h' \ , \quad \dim(H'_0 + H''_0) \;=\; 3\,\mathrm{rg}(E')h' + q' \ .$$

Si ev désigne maintenant le morphisme canonique $G'(-3) \otimes \mathrm{Hom}(G', E') \to E'(-3)$, on a

$$\mathrm{ev}_x((H'_0 + H''_0) \otimes \mathrm{Hom}(G', E')) \;\subset\; U \ ,$$

donc par semi-stabilité de ev, (cf. 3.5) on a

$$\dim(U) \;\geq\; \frac{\mathrm{rg}(E')}{\mathrm{rg}(G')}(3\,\mathrm{rg}(E')h' + q') \ ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 6.3. □

On étudie maintenant le sous-complexe

$$K''^{\bullet} : \big(G'(-3) \otimes K'_0\big) \oplus \big(F(-3) \otimes K_0\big) \xrightarrow{(\epsilon'', \psi'')} E'(-3) \otimes H_1$$

de $K^{\bullet}$. On considère un complexe associé à $F(H_0)$:

$$K_1^{\bullet} : \big(G'(-3) \otimes G'_{H_0}\big) \oplus \big(F(-3) \otimes H_0^*\big) \xrightarrow{(\epsilon_1, \psi_1)} E'(-3) \otimes K'_{H_0}$$

(cf. 3.6).

Lemme 6.4 : *Les complexes $K''^{\bullet}$ et $K_1^{\bullet}$ sont quasi-isomorphes.*

Démonstration. Puisque $ev_x((H'_0 \oplus H''_0) \otimes \mathrm{Hom}(G', E')) \subset U$, et $\dim(U) = \dfrac{\mathrm{rg}(E')}{\mathrm{rg}(G')}(3\,\mathrm{rg}(E')h' + q')$, on a $H'_0 \oplus H''_0 = G'(-3)_x$ par stabilité de ev_x. Donc $\dim(K'_0) = \mathrm{rg}(G') - 3\,\mathrm{rg}(E')h' = q'$.

Montrons que $\dim(H_1) = \mathrm{rg}(K') - 3\,\mathrm{rg}(G')h'$. On part des égalités

$$\dim(H_1) \;=\; \frac{a_1(K^{\bullet})q' + a_2(K^{\bullet})h'}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h} \ , \quad 3\,\mathrm{rg}(L') - \frac{a_2(K^{\bullet})}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h} \;=\; \frac{3\,\mathrm{rg}(E')^2}{\mathrm{rg}(G')} \ ,$$

$$3\,\mathrm{rg}(F) - \frac{a_1(K^{\bullet})}{\mathrm{rg}(F)q + \mathrm{rg}(L')h} \;=\; \frac{\mathrm{rg}(E')}{\mathrm{rg}(G')} \ ,$$

les deux dernières venant de la démonstration du lemme 6.3. On en déduit

$$\begin{aligned}
\dim(H_1) &= \left(3\operatorname{rg}(F) - \frac{\operatorname{rg}(E')}{\operatorname{rg}(G')}\right) q' + \left(3\operatorname{rg}(L') - \frac{3\operatorname{rg}(E')^2}{\operatorname{rg}(G')}\right) h' \\
&= \frac{\operatorname{rg}(K')}{\operatorname{rg}(G')} q' + \frac{3\operatorname{rg}(F)^2}{\operatorname{rg}(G')} h' \\
&= \frac{\operatorname{rg}(K')}{\operatorname{rg}(G')} (\operatorname{rg}(G') - 3\operatorname{rg}(E')h') + \frac{3\operatorname{rg}(F)^2}{\operatorname{rg}(G')} h' \\
&= \operatorname{rg}(K') + \frac{3\operatorname{rg}(F)^2 - 3\operatorname{rg}(E')\operatorname{rg}(K')}{\operatorname{rg}(G')} h' \\
&= \operatorname{rg}(K') - 3\operatorname{rg}(G')h' \ .
\end{aligned}$$

On a donc $\dim(K'_0) = \dim(G'_{H_0})$, $\dim(K_0) = \dim(H_0^*)$, $\dim(H_1) = \dim(K'_{H_0})$. On définit maintenant des isomorphismes $\gamma : G'_{H_0} \to K'_0$ et $\eta : H_0^* \to K_0$.

On considère la base (f_j^*) de H_0^* duale de (f_j). Alors $\eta(f_j^*) = \beta_j$ pour $1 \leq j \leq h'$. Pour définir γ, on étend la base $(g_1, \ldots, g_{q'})$ de H'_0 en une base (g_i) de $G'(-3)_x$. Soit (g_i^*) la base duale de (g_i), qu'on peut voir comme une base de G'^*_x (en choisissant un élément non nul de $\mathcal{O}(-3)_x$). Alors $(g_1^*, \ldots, g_{q'}^*)$ est une base de $G'_{H_0} = H_0''^{\perp} \simeq H_0'^*$. On pose $\gamma(g_i^*) = \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq q'$.

On va maintenant définir un isomorphisme $\theta : K'_{H_0} \to H_1$. On part pour cela de la suite exacte

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow G' \otimes \operatorname{Hom}(G', E') \longrightarrow E' \longrightarrow 0$$

induisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow (K'_{H_0})^* \longrightarrow (G'_{H_0})^* \otimes \operatorname{Hom}(G', E') \xrightarrow{\text{ev}} (E'_{H_0})^* \longrightarrow 0 \ .$$

On va définir une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_1^* \longrightarrow (G'_{H_0})^* \otimes \operatorname{Hom}(G', E') \xrightarrow{\text{ev}} (E'_{H_0})^* \longrightarrow 0 \ ,$$

ce qui donnera immédiatement l'isomorphisme θ. On pose, pour tout $\rho \in H_1^*$,

$$\Phi(\rho) \ = \ \sum_{i,k} \rho(\epsilon_k(\alpha_i))\overline{g_i} \otimes \delta_k \ ,$$

$\overline{g_i}$ désignant l'image de g_i dans $(G'_{H_0})^*$ ($(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_{q'}})$ est une base de $(G'_{H_0})^*$). Le morphisme Φ est injectif car H_1 est engendré par les $\epsilon_k(\alpha_i)$. Pour avoir la suite exacte précédente, il suffit de vérifier que $\text{ev} \circ \Phi = 0$, car on sait déjà que $\dim(H_1^*) = \dim((K'_{H_0})^*)$. Pour tout $\rho \in H_1^*$ on a

$$\text{ev} \circ \Phi(\rho) \ = \ \sum_{i,k} \rho(\epsilon_k(\alpha_i))\overline{\delta_k}(g_i)$$

($\overline{\delta_k}$ désignant le morphisme $(G'_{H_0})^* \to (E'_{H_0})^*$ induit par $\delta_k : G'_x \to E'_x$). Donc

$$\text{ev} \circ \Phi(\rho) \ = \ p\left(\sum_{i,k} \rho(\epsilon_k(\alpha_i))\delta_k(g_i)\right) \ ,$$

p désignant la projection $E'_x \to E'_x/(H_0 \otimes \operatorname{Hom}(G', E'))$, et

$$\text{ev} \circ \Phi(\rho) \ = \ (I \otimes \rho)(p \otimes I)\left(\sum_{i,k} \delta_k(g_i) \otimes \epsilon_k(\alpha_i)\right) \ .$$

Mais on a
$$\sum_{i,k}\delta_k(g_i)\otimes\epsilon_k(\alpha_i) \ = \ -\sum_{j,l}\phi_l(f_j)\otimes\mu_l(\beta_j)\ ,$$
c'est donc un élément de $\mathrm{ev}(H_0\otimes\mathrm{Hom}(F,E'))\otimes\mathbb{C}^n$, et par conséquent
$$(p\otimes I)\left(\sum_{i,k}\delta_k(g_i)\otimes\epsilon_k(\alpha_i)\right) \ = \ 0,$$
d'où $\mathrm{ev}\circ\Phi(\rho)=0$.

Maintenant il reste à prouver que (γ,η,θ) est un quasi-isomorphisme $K_1^\bullet\to K''^\bullet$.

De $\epsilon'' : G'(-3)\otimes K'_0\to E'(-3)\otimes H_1$ on déduit $\tau'' : H_1^*\to {K'_0}^*\otimes\mathrm{Hom}(G',E')$. De même, de $\epsilon_1 : G'(-3)\otimes G'_{H_0}\to K'_{H_0}$ on déduit une application linéaire $(K'_{H_0})^*\to(G'_{H_0})^*\otimes\mathrm{Hom}(G',E')$, qui n'est autre que la restriction du morphisme canonique $\mathrm{ev}^* : K'\to G'\otimes\mathrm{Hom}(G',E')$, compte tenu de l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(G',E')\simeq\mathrm{Hom}(K',G')^*$. Montrons qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_1^* \arrow[r, "\tau''"] \arrow[d, "{}^t\theta"] & {K'_0}^*\otimes\mathrm{Hom}(G',E') \arrow[d, "{}^t\gamma\otimes I_{\mathrm{Hom}(G',E')}"] \\
(K'_{H_0})^* \arrow[r, "\mathrm{ev}^*"] & (G'_{H_0})^*\otimes\mathrm{Hom}(G',E')
\end{tikzcd}$$

On a $\mathrm{ev}^*\circ{}^t\theta=\Phi$. Il faut donc montrer que $({}^t\gamma\otimes I_{\mathrm{Hom}(G',E')})\circ\tau''=\Phi$. Soit $\rho\in H_1^*$. On a

$$\begin{aligned}
&(1) &\quad ({}^t\gamma\otimes I_{\mathrm{Hom}(G',E')})\circ\tau''(\rho) \ &= \ ({}^t\gamma\otimes I_{\mathrm{Hom}(G',E')})\left(\sum_k(\rho\circ\epsilon_k)\otimes\delta_k\right)\\
&(2) & &= \ \sum_{k,i}{}^t\gamma(\rho\circ\epsilon_k)\otimes\delta_k\\
&(3) & &= \ \sum_{k,i}\rho(\epsilon_k(\alpha_i))\overline{g_i}\otimes\delta_k\\
&(4) & &= \ \Phi(\rho)\ ,
\end{aligned}$$

donc le carré est bien commutatif. On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G'(-3)\otimes G'_{H_0} \arrow[r, "\epsilon''"] \arrow[d, "I_{G'(-3)}\otimes\gamma"] & E'(-3)\otimes K'_{H_0} \arrow[d, "I_{E'(-3)}\otimes\theta"] \\
G'(-3)\otimes K'_0 \arrow[r, "\epsilon_1"] & E'(-3)\otimes H_1.
\end{tikzcd}$$

Pour démontrer que (γ, η, θ) est un quasi-isomorphisme, il reste à prouver que le carré

$$\begin{tikzcd} F(-3) \otimes K_0 \arrow[r, "\overline{\psi''}"] \arrow[d, "I_{F(-3)} \otimes \eta"] & \operatorname{coker}(\alpha'') \arrow[d, "\nu"] \\ F(-3) \otimes H_0^* \arrow[r, "\overline{\psi_1}"] & \operatorname{coker}(\alpha_1) \end{tikzcd}$$

$\overline{\psi''}$, $\overline{\psi_1}$, ν étant induits par ψ'', ψ_1 et θ respectivement, est commutatif. Pour cela on remarque d'abord que

$$\overline{\psi_1}\left(\sum_{1\leq j\leq h'} f_j \otimes f_j^*\right) \ = \ 0 \ ,$$

ce qui peut se voir par exemple en utilisant la suite exacte de complexes de 3.6.2. D'autre part, puisque $F(H_0)$ est semi-stable (proposition 2.1), $K_1^\bullet$ l'est aussi d'après (i). Il en découle, d'après ce qu'on vient de faire, qu'on peut supposer, quitte à remplacer $K_1^\bullet$ par un complexe équivalent, que

$$\sum_{1\leq i\leq q'} g_i \otimes g_i^* + \sum_{1\leq j\leq h'} f_j \otimes f_j^* \ \in \ \ker((\epsilon_{1x}, \psi_{1x})) \ .$$

On a alors

$$\overline{\psi''} \circ (I_{F(-3)} \otimes \eta)\left(\sum_{1\leq j\leq h'} f_j \otimes f_j^*\right) \ = \ (I_{E'(-3)} \otimes \theta) \circ \psi_1 \left(\sum_{1\leq j\leq h'} f_j \otimes f_j^*\right) \ .$$

On aura donc finalement $\overline{\psi''} \circ (I_{F(-3)} \otimes \eta) = (I_{E'(-3)} \otimes \theta) \circ \psi_1$ si on prouve l'assertion suivante : soit $\lambda : F(-3) \otimes \mathbb{C}^{h'} \to E'(-3) \otimes \mathbb{C}^{n'}$ un morphisme tel que

$$\lambda_x\left(\sum_{1\leq j\leq h'} f_j \otimes e_j\right) \ = \ 0 \ ,$$

(e_j) désignant la base canonique de $\mathbb{C}^{h'}$. Alors on a $\lambda = 0$. Pour cela, on peut supposer que $n' = 1$. Posons

$$\lambda \ = \ \sum_{1\leq l\leq \mathrm{rg}(L')} \alpha_l \otimes \mu_l \ ,$$

(α_l) désignant une base de $\mathrm{Hom}(F, E')$, et $\mu_l : \mathbb{C}^{h'} \to \mathbb{C}$. On a

$$\sum_{j,l} \mu_l(e_j)\alpha_l(f_j) \ = \ 0 \ .$$

C'est à dire que si $\mathrm{ev} : F \otimes \mathrm{Hom}(F, E') \to E'$ est le morphisme canonique, on a

$$\mathrm{ev}_x\left(\sum_{j,l} \mu_l(e_j)\alpha_l \otimes f_j\right) \ = \ 0 \ .$$

On va maintenant appliquer l'hypothèse du théorème C (voir Introduction) : il existe une triade du type (F, L', H'). Cela implique qu'on peut utiliser la proposition 3.3, ce qui implique que

$$\sum_{j,l} \mu_l(e_j)\alpha_l \otimes f_j \ = \ 0 \ ,$$

d'où $\lambda = 0$. On a donc bien montré que (γ, η, θ) était un quasi-isomorphisme. Ceci achéve la démonstration du lemme 6.4. $\square$

Démontrons maintenant (ii), c'est à dire que ϕ est injectif sauf en au plus un nombre fini de points. On peut supposer que $K''^{\bullet}$ est un sous-complexe de $K^{\bullet}$. Dans ce cas $K^{\bullet}/K''^{\bullet}$ est p-semi-stable, d'après le corollaire 6.2 et le fait que $c_1(K''^{\bullet}, K^{\bullet}) = 0$. Posons

$$K^{\bullet}/K''^{\bullet} : \left(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^{q-q'}\right) \oplus \left(F(-3) \otimes \mathbb{C}^{h-h'}\right) \xrightarrow{\phi'} E'(-3) \otimes \mathbb{C}^{n-n'} \ .$$

On peut supposer, en faisant un raisonnement par récurrence, que ϕ' est non injectif en au plus un ensemble fini Z de points de $\mathbb{P}_2$. D'autre part, (ϵ'', ψ'') est non injectif seulement en x, puisque $\operatorname{coker}((\epsilon'', \psi'')) \simeq F(H_0)$. Il en découle que l'ensemble des points où ϕ n'est pas injectif est contenu dans $Z \cup \{x\}$, et est donc fini. Ceci démontre (ii).

6.3.4 – Démonstration de (iii). Supposons que $K^{\bullet}$ ne soit pas semi-stable. Soit $K_1^{\bullet}$ un quasi-sous-complexe maximal de $K^{\bullet}$, c'est-à-dire que $d(K^{\bullet}, K_1^{\bullet})$ est maximal et que pour tout quasi-sous-complexe $K_2^{\bullet}/K_1^{\bullet}$ de $K^{\bullet}/K_1^{\bullet}$, on a $d(K^{\bullet}, K_2^{\bullet}) \geq d(K^{\bullet}, K_1^{\bullet})$ si et seulement si $K_1^{\bullet} = K_2^{\bullet}$. Supposons

$$K^{\bullet}/K_1^{\bullet} = \tau'' : \left(G'(-3) \otimes H_0''\right) \oplus \left(F(-3) \otimes H_1''\right) \longrightarrow E'(-3) \otimes H_2'' \ .$$

Alors τ'' est un morphisme injectif de faisceaux. En effet, puisque $d(K^{\bullet}, K_1^{\bullet}) > 0$, on a $\mu(K^{\bullet}/K_1^{\bullet}) \leq \mu(F)$, et $K^{\bullet}/K_1^{\bullet}$ est p-semi-stable par maximalité de $K_1^{\bullet}$. On peut donc appliquer (ii). Supposons que

$$K_1^{\bullet} = \tau' : \left(G'(-3) \otimes H_0'\right) \oplus \left(F(-3) \otimes H_1'\right) \longrightarrow E'(-3) \otimes H_2' \ .$$

Alors l'injectivité de τ'' entraine que $\operatorname{coker}(\tau')$ est un sous-faisceau de $\operatorname{coker}(\phi)$. L'hypothèse $d(K^{\bullet}, K_1^{\bullet}) > 0$ entraine

$$\frac{P_{\operatorname{coker}(\tau')}(m)}{\operatorname{rg}(\operatorname{coker}(\tau'))} > \frac{P_{\operatorname{coker}(\phi)}(m)}{\operatorname{rg}(\operatorname{coker}(\phi))} \quad \text{pour } m \gg 0 \ .$$

Donc $\operatorname{coker}(\phi)$ n'est pas semi-stable. Ceci démontre (iii) et achève la démonstration du théorème C.

6.3 – Démonstration du théorème D

Soit $\mathcal{M}^{ss}$ l'ouvert de $\operatorname{Hom}(G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q, E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n) \times \operatorname{Hom}(F(-3) \otimes \mathbb{C}^h, E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n)$ constitué des complexes semi-stables. C'est une variété lisse, sur laquelle opère algébriquement le groupe

$$G \;=\; \left[\operatorname{Aut}\left((G'(-3) \otimes \mathbb{C}^q) \oplus (F(-3) \otimes \mathbb{C}^h)\right) \times \operatorname{Aut}(E'(-3) \otimes \mathbb{C}^n)\right] / \mathbb{C}^* \ .$$

Ce groupe n'est pas réductif si $h > 0$.

Rappelons qu'un *bon quotient* de $\mathcal{M}^{ss}$ par G est un morphisme de variétés algébriques $f : \mathcal{M}^{ss} \to M$ tel que

(i) f est G-invariant, affine et surjectif.

(ii) Pour tout ouvert U de M, f induit un isomorphisme $\mathcal{O}(U) \simeq \mathcal{O}(f^{-1}(U))^G$, le dernier terme désignant l'algèbre des fonctions régulières G-invariantes sur $f^{-1}(U)$.

(iii) Pour tous fermés G-invariants disjoints W_1, W_2 de $\mathcal{M}^{ss}$, $f(W_1)$ et $f(W_2)$ sont des fermés disjoints de M.

(Cf. [11], [10]).

Soit $p : \mathcal{M}^{ss} \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la projection. On définit de manière évidente un “complexe universel”

$$\big(p^*(G'(-3)) \otimes \mathbb{C}^q\big) \oplus \big(p^*(F(-3)) \otimes \mathbb{C}^h\big) \longrightarrow p^*(E'(-3)) \otimes \mathbb{C}^n ,$$

qui est un morphisme injectif de faisceaux sur $\mathcal{M}^{ss} \times \mathbb{P}_2$, et dont le conoyau $\mathbb{E}$ est une famille de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 sur $\mathbb{P}_2$, paramétrée par $\mathcal{M}^{ss}$, d'après le théorème C. On en déduit un morphisme

$$f : \mathcal{M}^{ss} \longrightarrow M(r, c_1, c_2)$$

($f = f_{\mathbb{E}}$, avec les notations de 2.3). Il faut montrer que f est un bon quotient de $\mathcal{M}^{ss}$ par G.

La démonstration est calquée sur celle de la proposition (2.6) de [1]. On utilise la construction de $M(r, c_1, c_2)$ par Gieseker ([5]) et Maruyama ([9]). Il existe un entier m_0 tel que pour tout entier $m \geq m_0$ et tout faisceau semi-stable E sur $\mathbb{P}_2$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, on ait $h^1(E(m)) = 0$ pour $i > 0$ et que $E(m)$ soit engendré par ses sections globales. On pose $N = h^0(E(m_0))$, qui ne dépend que de r, c_1, c_2. Soit $\widetilde{\mathcal{M}}$ la variété des couples (z, σ), où $z \in \mathcal{M}^{ss}$ et σ est un isomorphisme $\mathbb{C}^N \simeq H^0(\mathbb{E}_z(m_0))$. Soit $\widetilde{p}$ la projection $\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$. Sur $\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{P}_2$ on a un morphisme surjectif

$$\omega : \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{P}_2} \otimes \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{E}(m_0) = \mathbb{E} \otimes \overline{p}^*(\mathcal{O}(m_0))$$

défini comme suit : au dessus de $(z, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{M}}$, ω est le composé

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \otimes \mathbb{C}^N \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \otimes H^0(\mathbb{E}_z(m_0)) \longrightarrow \mathbb{E}_z(m_0) ,$$

le second morphisme étant le morphisme canonique. D'autre part, considérons la variété $\mathrm{Quot}^H(\mathcal{O}(-m_0) \otimes \mathbb{C}^N)$, où H est le polynôme de Hilbert d'un faisceau de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Soit $\mathbb{F}$ le faisceau universel sur $\mathrm{Quot}^H(\mathcal{O}(-m_0) \otimes \mathbb{C}^N) \times \mathbb{P}_2$. Soit R^{ss} l'ouvert de $\mathrm{Quot}^H(\mathcal{O}(-m_0) \otimes \mathbb{C}^N)$ constitué des points q tels que $\mathbb{F}_q$ soit semi-stable, et que l'application $\mathbb{C}^N \to H^0(\mathbb{F}_q(m_0))$ induite par la surjection canonique soit un isomorphisme. Soit enfin $\widetilde{R}$ la variété des $(y, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, où $y \in Y(\mathbb{F})$ (cf. 4.3), et

$$\sigma_1 : H^0(\mathbb{F}_q \otimes L'^*(3)) \simeq \mathbb{C}^q , \quad \sigma_2 : H^0(\mathbb{F}_q \otimes E'^*(3)) \simeq \mathbb{C}^n , \quad \sigma_3 : H^1(\mathbb{F}_q \otimes F^*) \simeq \mathbb{C}^h$$

sont des isomorphismes. De ω on déduit un morphisme $\Psi : \widetilde{\mathcal{M}} \to \widetilde{R}$ qui est en fait un isomorphisme dont la construction de l'inverse est immédiate. La variété R^{ss} est munie d'une action naturelle de $\mathrm{GL}(N)$. On en déduit une action de $G \times \mathrm{GL}(N)$ sur $\widetilde{R}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}$ qui fait de Ψ un $(G \times \mathrm{GL}(N))$-isomorphisme. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\phi_1"] & \widetilde{R} \arrow[d, "\phi_2"] \\
\mathcal{M}^{ss} \arrow[dr, "f"] & R^{ss} \arrow[d, "\pi"] \\
& M(r, c_1, c_2)
\end{tikzcd}$$

où $\pi = f_{\mathbb{F}}$, ϕ_1 et ϕ_2 étant les morphismes d'oubli. D'après Gieseker et Maruyama, π est un bon quotient par $\mathrm{GL}(N)$, et il est immédiat qu'il en est de même pour ϕ_1. D'autre part, ϕ_2 est un bon quotient par G (c'est un G-fibré principal car la projection $Y(\mathbb{F}) \to R^{ss}$ possède des sections locales). Il en découle aisément que f est un bon quotient par G.

Références

[1] Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[2] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 275 (1986), 25-48.

[3] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. Reine Angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[4] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Ann. Inst. Fourier 38 (1988), 105-168.

[5] Gieseker, D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. Math. 106 (1977), 45-60.

[6] Grothendieck, A. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann.* Am. J. Math. 79 (1957), 121-138.

[7] Le Potier, J. *Stabilité et amplitude sur* $\mathbb{P}_2$. Vector bundles and differential equations. Progr. Math. 7, Birkhäuser (1980), 145-182.

[8] Le Potier, J. *Fibrés stables de rang 2 sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 241 (1979), 217-256.

[9] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 557-614.

[10] Mumford, D., Fogarty, J. *Geometric invariant theory.* Ergeb. Math. Grenzgeb. 34 (1982).

[11] Newstead, P.E. *Introduction to moduli problems and orbit spaces.* TIFR Lect. Notes Math. 51, Springer (1978).

Note : Ce texte reproduit l'article

Drézet, J.-M. *Variétés de modules extrémales de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 290 (1991), 727-770.

avec quelques corrections d'erreurs mineures et des améliorations dans la rédaction, et l'ajout du lemme 6.2b.

Les quotients par des groupes non réductifs apparaissant dans le texte ont été étudiés en toute généralité dans

Drézet, J.-M., Trautmann, G. *Moduli Spaces of Decomposable Morphisms of Sheaves and Quotients Modulo Non-reductive Groups* Ann. Inst. Fourier 53 (2003), no. 1, 107-192.

Le lemme 6.2b a été rajouté dans le but de montrer que les définitions de la (semi-)stabilité dans les deux articles sont équivalentes.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: jean-marc.drezet@imj-prg.fr