EXEMPLES DE FIBRÉS UNIFORMES NON HOMOGÈNES SUR $\mathbb{P}_n$

JEAN–MARC DRÉZET

On donne ici des exemples de fibrés vectoriels uniformes non homogènes sur $\mathbb{P}_n$ de rang r, pour tout $r \geq 2n$.

Soit K un corps commutatif algébriquement clos. Tous les fibrés vectoriels considérés seront algébriques sur une variété algébrique sur K. Soient n un entier positif et V un K-espace vectoriel de dimension $n+1$. On note $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif des droites de V, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ le sous-fibré universel de rang 1 de $\mathbb{P}(V) \times V$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)^{\otimes -k}$ pour tout entier k. Rappelons que tout fibré en droites sur $\mathbb{P}(V)$ est isomorphe à un de ces fibrés.

Si $n = 1$, autrement dit si $\mathbb{P}(V)$ est une droite projective ℓ, on sait que tout fibré vectoriel E sur ℓ est isomorphe à une somme directe de fibrés en droites

$$E \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_\ell(a_i) ,$$

les a_i étant des entiers tels que $a_1 \geq \cdots \geq a_r$. De plus, la suite (a_i) est uniquement determinée. C'est le théorème de Grothendieck ([4] et [5]).

Si $n > 1$, soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$. À toute droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$ on peut associer une suite $(a_1^\ell, \ldots, a_r^\ell)$ décroissante d'entiers telle que

$$E_{|\ell} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_\ell(a_i^\ell) .$$

Le fibré E est dit *uniforme* si cette suite est indépendante de la droite ℓ, et on l'appelle dans ce cas le *type de décomposition de* E.

Un fibré vectoriel F sur $\mathbb{P}(V)$ est dit *homogène* si pour tout automorphisme σ de $\mathbb{P}(V)$, les fibrés vectoriels F et $\sigma^*(F)$ sont isomorphes. Il est clair qu'un fibré vectoriel homogène est uniforme. On peut alors se poser le problème suivant : quel est le plus grand entier $k(n)$ tel que tout fibré vectoriel uniforme de rang $r \leq k(n)$ sur $\mathbb{P}(V)$ soit aussi homogène ?

A. Van de Ven ([8]) et G. Elencwajg ([1] et [3]) ont prouvé que $k(2) = 3$. E. Sato ([6]), G. Elencwajg, A. Hirschowitz et M. Schneider ([2]) ont montré que $n \leq k(n) \leq 3n-2$. Plus récemment, P. Ellia a obtenu dans [7] que $k(n) \leq 2n$. Je me propose ici de montrer que $k(n) \leq 2n-1$. Plus précisément on a la :

Proposition : *Pour tout entier $r \geq 2n$, il existe un fibré vectoriel uniforme non homogène de rang r sur $\mathbb{P}(V)$, qui n'est pas somme directe de sous-fibrés vectoriels de rangs inférieurs à r.*

Pour tout K-espace vectoriel de dimension finie M, on note $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes M$ le fibré trivial sur $\mathbb{P}(V)$ de fibre M.

Soient p un entier tel que $p \geq 2$, et H un sous-espace vectoriel de S^pV. Au-dessus d'un point x de $\mathbb{P}(V)$, la fibre de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)$ est la droite x^p at de S^pV. Ceci permet de définir un morphisme de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(V)$:

$$f_H : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H)$$

par $(f_H)_x(y) = y + H$, x étant un point de $\mathbb{P}(V)$ et y un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)_x$. Il est immédiat que le morphisme f est injectif si et seulement si 0 est le seul élément de H de la forme u^p, u étant un élément de V. Si tel est le cas, on note $E(H)$ le fibré conoyau de f_H.

Lemme 1 : *Le fibré vectoriel $E(H)$ est uniforme de type $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ si et seulement si on a, pour tout plan D de V,*

$$S^pD \cap H \ = \ \{0\}.$$

Démonstration. Soit r le rang de $E(H)$. Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$; on a alors une suite exacte de fibrés vectoriels sur ℓ :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-p) \longrightarrow \mathcal{O}_\ell \otimes (S^pV/H) \longrightarrow E(H)_{|\ell} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_\ell(a_i^\ell) \longrightarrow 0.$$

On a alors $h^0(\mathcal{O}_\ell(a_i^\ell)) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$, donc $a_i^\ell \geq 0$. On a donc $(a_i^\ell) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ si et seulement si $a_i^\ell \leq 1$ pour $1 \leq i \leq r$, ce qui équivaut à

$$h^0(E(H)(-2)_{|\ell}) \ = \ 0 \ .$$

Par dualité de Serre, le terme de gauche est égal à $h^1(E(H)^*_{|\ell})$. Supposons que $\ell = \mathbb{P}(D)$, D étant un plan de V. On a une suite exacte de fibrés vectoriels sur ℓ

$$0 \longrightarrow E(H)^*_{|\ell} \longrightarrow \mathcal{O}_\ell \otimes (S^pV/H)^* \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(p) \longrightarrow 0.$$

Comme $h^1(\mathcal{O}_\ell) = 0$, on a $h^1(E(H)^*_{|\ell}) = 0$ si et seulement si l'application

$$H^0({}^t f_{H|\ell}) : (S^pV/H)^* \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_\ell(p)) = S^pD^*$$

est surjective. Or, c'est la transposée de l'application canonique $S^pD \to S^pV/H$. On en déduit immédiatement le lemme 1. $\square$

Soient G la grassmannienne des plans de V, et Z la réunion des sous-ensembles S^pD de S^pV, D parcourant G. D'après ce qui précède, si H est un sous-espace vectoriel de S^pV, le morphisme de fibrés f_H est injectif et le fibré vectoriel $E(H)$ est uniforme de type $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ si et seulement si on a $Z \cap H = \{0\}$.

Lemme 2 : *L'ensemble Z est une sous-variété fermée homogène de S^pV, de dimension $2n + p - 1$.*

Démonstration. Il est évident que Z est homogène. Soit F sous-fibré universel de $G \times V$ (pour tout élément D de G, on a $F_D = D$). Soit $\mathbb{P}(S^pF)$ le fibré en espaces projectifs associé au fibré vectoriel S^pF. Soit g la restriction à $\mathbb{P}(S^pF)$ de la projection $\mathbb{P}(G \times S^pV) \to \mathbb{P}(S^pV)$. L'application g est régulière et $\mathbb{P}(Z)$ est son image, donc Z est bien une sous-variété fermée de S^pV. Pour calculer sa dimension, remarquons que la fibre de g au dessus d'un point générique de $\mathbb{P}(Z)$ est réduite à un point, donc $\mathbb{P}(Z)$ et $\mathbb{P}(S^pF)$ ont la même dimension, ce qui prouve le lemme 2. $\square$

On en déduit qu'on peut trouver un sous-espace vectoriel H_p de S^pV de codimension $2n+p-1$, tel que $H_p \cap Z = \{0\}$. Le fibré vectoriel $E(H_p)$ est uniforme de type $(1,\dots,1,0,\dots,0)$ et de rang $2n+p-2$. Montrons que $E(H_p)$ n'est pas homogène.

Soit α un automorphisme de $\mathbb{P}(V)$, représenté par un élément A de $\mathrm{GL}(V)$. Le fibré vectoriel $\alpha^*(E(H_p))$ est isomorphe au conoyau du morphisme injectif de fibrés vectoriels

$$A^*(f_{H_p}) : \alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H_p)\ .$$

On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)) \arrow[r, "A^*(f_{H_p})"] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H_p) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \arrow[r, "f_{(S^pA)^{-1}(H_p)}"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/(S^pA)^{-1}(H_p))\ ,
\end{tikzcd}$$

les isomorphismes ϕ et ψ étant induits par l'application $(S^pA)^{-1}$. On en déduit immédiatement que $\alpha^*(E(H_p))$ est isomorphe à $E((S^pA)^{-1}(H_p))$.

Lemme 3 : *Si H et H' sont deux sous-espaces vectoriels de S^pV tels que les morphismes de fibrés vectoriels f_H et $f_{H'}$ soient injectifs, les fibrés vectoriels $E(H)$ et $E(H')$ sont isomorphes si et seulement si $H = H'$.*

Démonstration. Puisque S^pV/H s'identifie à $H^0(E(H))$ et qu'on a la même chose pour H', un isomorphisme $g : E(H) \to E(H')$ se prolonge en un isomorphisme de suites exactes de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H) \arrow[r] \arrow[d, "I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}} \otimes H^0(g)"] & E(H) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H') \arrow[r] & E(H') \arrow[r] & 0\ .
\end{tikzcd}$$

Le lemme 3 en découle aisément. $\square$

L'existence de fibrés $E(H_p)$ non homogènes découle du

Lemme 4 : *Pour tout entier k tel que $1 \le k < \dim(S^pV)$, il existe un sous-espace vectoriel de S^pV de dimension k qui n'est pas stable par tous les automorphismes S^pA, $A \in \mathrm{GL}(V)$. Les sous-espaces de dimension k ayant cette propriété constituent un ouvert de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(k, S^pV)$ des sous-espaces vectoriels de dimension k de S^pV.*

Si K est de caractéristique nulle, soit H un sous-espace vectoriel de S^pV, distinct de $\{0\}$ et de S^pV. Alors il existe un automorphisme A de V tel que H ne soit pas stable par S^pA.

Démonstration. Supposons que tous les sous-espaces vectoriels de dimension k de S^pV soient invariants par tous les automorphismes S^pA. Il en serait de même de toutes les intersections de ces sous-espaces, donc aussi de toutes les droites de S^pV, ce qui est absurde. Pour tout $A \in \mathrm{GL}(V)$, les sous-espaces vectoriels de dimension k de S^pV invariants par S^pA constituent une sous-variété fermée de $\mathrm{Gr}(k, S^pV)$. Donc l'ensemble des sous-espaces invariants par tous les S^pA aussi, puisque c'est l'intersection des précédents. Ceci démontre la première assertion.

Démontrons maintenant la seconde assertion, on suppose donc que K est de caractéristique nulle. Supposons que $H \neq \{0\}$ soit invariant par tous les automorphismes S^pA, $A \in \mathrm{GL}(V)$. Soit $e_0, \ldots, e_n$ une base de V. Soit I_p l'ensemble des multi-indices $\eta = (i_0, \ldots, i_n)$, où les i_j sont des entiers tels que $i_j \geq 0$ et $i_0 + \cdots + i_n = p$. Pour tout $\eta = (i_0, \ldots, i_n) \in I_p$, soient $e(\eta) = e_o^{i_0} \cdots e_n^{i_n} \in S^pV$, et si $y = (y_0, \ldots, y_n) \in K^n$, $a(y, \eta) = y_0^{i_0} \cdots y_n^{i_n} \in K$. Les $e(\eta)$ constituent une base de S^pV. Soit $u = \displaystyle\sum_{\eta \in I} x_\eta e(\eta)$ un élément non nul de H, l'ensemble de multi-indices I étant choisi de manière que pour tout $\eta \in I$, on ait $x_\eta \neq 0$. Soit W le sous-espace vectoriel de S^pV engendré par les $e(\eta)$ tels que $\eta \in I$. Montrons que $W \subset H$. Soit $y = (y_0, \ldots, y_n) \in (K^*)^n$. En considérant l'automorphisme A de V défini par $A(e_i) = y_i e_i$ pour $0 \leq i \leq n$, on voit que $u_y = \displaystyle\sum_{\eta \in I} a(y, \eta) x_\eta e(\eta) \in H$. En considérant la base $(x_\eta e(\eta))_{\eta \in I}$ de W on est ramené à prouver le résultat suivant : il n'existe aucun hyperplan de K^I contenant tous les $(a(y, \eta))_{\eta \in I}$. On peut trouver des entiers positifs $r_0, \ldots, r_n$, $m_\eta, \eta \in I$ tels que les m_η soient distincts deux Ãă deux, et que pour tout $\lambda \in K^*$, si $y_\lambda = (\lambda^{r_j})_{0 \leq j \leq n}$, on ait $a(y_\lambda, \eta) = \lambda^{m_\eta}$. On est donc ramené à prouver qu'aucun hyperplan de K^I ne contient tous les (λ^{m_η}), ce qui est évident. Donc $W \subset H$, et en particulier H contient un élément de la forme $e(\eta_0)$, pour un $\eta_0 = (i_0, \ldots, i_n) \in I$. Il en découle que pour des $u_0, \ldots, u_n$ génériques dans V, on a $v = u_0^{i_0} \cdots u_n^{i_n} \in H$. On peut écrire $u_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} e_j$, $\alpha_{ij} \in K$, et pour des coefficients génériques α_{ij}, tous les coefficients des $e(\eta), \eta \in I_p$ de v sont non nuls. Il en découle d'après ce qui précède que pour tout $\eta \in I_p$ on a $e(\eta) \in H$, et donc $H = S^pV$, ce qui démontre la seconde assertion. □

Il reste à prouver que $E(H_p)$ n'est pas somme directe de sous-fibrés de rangs inférieurs à celui de $E(H_p)$. Supposons le contraire. Alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H_p) \longrightarrow E(H_p) \longrightarrow 0$$

se décompose aussi en somme directe de deux suites exactes non nulles de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(V)$, puisque S^pV/H_p s'identifie à $H^0(E(H_p))$. Ceci entraine, puisque le fibré vectoriel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)$ est de rang 1, que $E(H_p)$ posséde un facteur direct isomorphe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$, ce qui est absurde, car d'aprés la suite exacte précédente, on a $h^0(E(H_p)^*) = 0$.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Remarque : On peut montrer facilement que si $n = 2$, les fibrés $E(H_p)$ de rang 4 construits précédemment sont isomorphes à ceux qui ont été construits par G. Elencwajg dans [3].

Références

[1] Elencwajg, G. *Les fibrés uniformes de rang 3 sur* $\mathbb{P}_2$ *sont homogènes.* Math. Ann., 231 (1978), 217-227.

[2] Elencwajg, G., Hirschowitz, A., Schneider, M. *Les fibrés uniformes de rang au plus n sur* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *sont ceux qu'on croit.* Vector bundles and differential equations (Proc. Conf., Nice, 1979), Progr. Math., 7, Birkhäuser, Boston, Mass., (1980), 37-63.

[3] Elencwajg, G. *Des fibrés uniformes non homogènes.* Math. Ann., 239 (1979), 185-192.

[4] Grothendieck, A. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sph ère de Riemann.* Amer. J. Math. 79 (1957), 121-138.

[5] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H. *Vector bundles on complex projective spaces.* Corrected reprint of the 1988 edition. With an appendix by S. I. Gelfand. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[6] Sato, E. *Uniform vector bundles on a projective space.* J. Math. Soc. Japan 28, 1 (1976), 123-132.

[7] Ellia, P. *Des fibrés uniformes non homogènes et indécomposables de rang* $(2n+1)$ *sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$*,* $n \geq 3$. J. Reine Angew. Math. 321 (1981), 113-119.

[8] Van de Ven, A. *On uniform vector bundles.* Math. Ann., 195 (1972), 245-248.

Notes : Ce texte reproduit l'article

Exemples de fibrés uniformes non homogènes sur $\mathbb{P}_n$*.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 291 (1980), no. 2, 125-128.

avec quelques améliorations dans la rédaction et la bibliographie. Le corps de base n'est plus supposé de caractéristique nulle et la démonstration du lemme 4 a été modifiée en conséquence.

Soit $k(n)$ le plus grand entier tel que tout fibré vectoriel uniforme de rang $r \leq k(n)$ sur $\mathbb{P}_n$ soit homogène. Le présent article montre que $k(n) \leq 2n-1$. On peut énoncer la

Conjecture : On a $k(n) = 2n-1$.

Elle est vraie pour $n = 2$ d'après [8] et [1]. Elle a été démontrée aussi pour $n = 3$ dans les articles

Ellia, P. *Sur les fibrés uniformes de rang* $(n+1)$ *sur* $\mathbb{P}^n$*.* Mém. Soc. Math. France (N.S.) 7 (1982).

Ballico, E., Ellia, P. *Fibrés uniformes de rang 5 sur* $\mathbb{P}^3$*.* Bull. Soc. Math. France 111, 1 (1983), 59-87.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr