FIBRÉS UNIFORMES DE TYPE $(0, \dots, 0, -1, \dots, -1)$ SUR $\mathbb{P}_2$

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire

1. Introduction

Soient K un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle, V un K-espace vectoriel de dimension 3, $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif des droites de V. Tous les fibrés vectoriels considérés seront algébriques (sur $\mathbb{P}(V)$ ou sur une variété algébrique sur K). On note $\mathcal{O}(1)$ le sous-fibré universel de rang 1 de $\mathbb{P}(V) \times V$, et Q le fibré universel quotient de rang 2 de $\mathbb{P}(V) \times V$. Ce travail est une contribution à l'étude des fibrés vectoriels uniformes sur $\mathbb{P}(V)$.

Voici quelques définitions et résultats connus : Si E est un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$ et ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$, la restriction $E_{|\ell}$ est isomorphe à une somme directe de fibrés en droites :

$$E_{|\ell} \;\simeq\; \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}(a_i^\ell)\ ,$$

les a_i^ℓ étant des entiers tels que $a_1^\ell \geq a_2^\ell \geq \cdots \geq a_r^\ell$, et la suite (a_i^ℓ) est uniquement déterminée. C'est le théorème de Birkhoff-Grothendieck ([8] et [12]).

Il existe une suite unique $(a_1, \dots, a_r)$ d'entiers telle que l'ensemble des droites ℓ de $\mathbb{P}(V)$ telles que $(a_i^\ell) = (a_i)$ soit un ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{P}(V^*)$. On appelle cette suite le *type de décomposition générique de E*. Si cet ouvert est égal à $\mathbb{P}(V^*)$, autrement dit si pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$, on a $(a_i^\ell) = (a_i)$, le fibré E est dit *uniforme*, et la suite (a_i) est appelée le *type de décomposition* ou plus simplement le *type* de E.

Un fibré vectoriel E sur $\mathbb{P}(V)$ est dit *homogène* si pour tout automorphisme α de $\mathbb{P}(V)$, les fibrés $\alpha^*(E)$ et E sont isomorphes. Un fibré homogène est uniforme.

A. Van de Ven ([13]) et G. Elencwajg ([4]) se sont intéressés à la réciproque. Elle est vraie pour $\text{rg}(E) = 2$ (Van de Ven) et pour $\text{rg}(E) = 3$ (Elencwajg). Dans les deux cas, on montre en fait que les seuls fibrés uniformes sont les fibrés “évidents” (c'est-à-dire construits a partir des fibrés en droites et de Q).

G. Elencwajg ([5] et [6]) a entrepris l'étude des fibrés uniformes de rang 4. On peut se ramener à l'étude des fibrés normalisés, c'est à dire vérifiant $-\operatorname{rg}(E) < c_1(E) \leq 0$. Dans ce cas, Elencwajg montre que si le type de E est différent de $(0,0,-1,-1)$ et $(1,0,0,-1)$ alors E est isomorphe à un des fibrés “évidents” et est homogène. Il présente de plus des exemples de fibrés uniformes non homogènes de type $(0,0,-1,-1)$ de deuxième classe de Chern 4. L'auteur du présent article a résolu le cas des fibrés uniformes de type $(1,0,0,-1)$, en montrant qu'ils sont tous homogènes dans [2].

On apporte ici quelques précisions supplémentaires à propos des fibrés uniformes de type $(0,0,-1,-1)$. Plus généralement, on obtiendra des résultats concernant les fibrés uniformes de type $(0,\ldots,0,-1,\ldots,-1)$, qui seront dits pour simplifier *uniformes de type 2* (dans [2] les fibrés uniformes de type $(1,0,\ldots,0,-1)$ sont dits de type 1). On peut se limiter au cas où $-\operatorname{rg}(E)+1 < c_1(E) < -1$, car on peut montrer comme dans [13] qu'un fibré uniforme de type $(0,\ldots,0)$ est trivial, et Elencwajg a prouvé qu'un fibré uniforme de type $(0,\ldots,0,-1)$ est isomorphe à un des deux fibrés $\mathcal{O}(-1)\oplus k\mathcal{O}$ et $Q^*\oplus k\mathcal{O}$ (cf. [7]).

Il sera utile d'examiner d'abord le cas des fibrés dits *s-stables*. Suivant Hulek [9], on dit qu'un fibré E sur $\mathbb{P}(V)$ est s-stable si pour tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(V)$ et tout morphisme non nul $L \to E$ (resp. $E \to L$), on a

$$\frac{c_1(E)}{\operatorname{rg}(E)} \;>\; c_1(L) \qquad \text{(resp. } \frac{c_1(E)}{\operatorname{rg}(E)} \;<\; c_1(L)) \;.$$

Un fibré vectoriel E sur $\mathbb{P}(V)$ est dit *stable* si pour tout fibré non nul F sur $\mathbb{P}(V)$ et tout morphisme génériquement injectif $F \to E$, on a

$$\frac{c_1(E)}{\operatorname{rg}(E)} \;>\; \frac{c_1(F)}{\operatorname{rg}(F)} \;.$$

Un fibré stable est s-stable. La réciproque est vraie en rangs 2 et 3. Quelques propriétés des fibrés s-stables sont données dans la partie A des Préliminaires.

Soient r et c_1 deux entiers tels que $-r+1 < c_1 < -1$. On pose

$$f(r,c_1) \;= \operatorname{Max}\big(r + \frac{c_1(c_1+3)}{2}, \frac{r}{2} + \frac{c_1(c_1+1)}{2}, \frac{c_1(c_1-1)}{2}\big) \;.$$

On démontre le

Théorème 1 : *Il existe un fibré uniforme de type 2, non homogène et s-stable, de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2 si et seulement si on a $c_2 \geq f(r,c_1)$.*

En particulier, il existe un fibré s-stable uniforme de type $(0,0,-1,1)$ de deuxième classe de Chern c_2 et non homogène si et seulement si on a $c_2 \geq 4$. Les fibrés uniformes de type $(1,1,0,0)$ de deuxième classe de Chern 4 sont les fibrés trouvés par G. Elencwajg dans [4], on les appellera les *fibrés d'Elencwajg*.

La démonstration de ce théorème est purement algébrique : on construit des fibrés à l'aide de monades. Il en existe une autre, due à J. Le Potier, utilisant des propriétés des fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}(V)$.

On donne ensuite une description des fibrés uniformes de type 2 non s-stables, qui permet de montrer que les seuls fibrés non s-stables uniformes de type $(0,0,-1,-1)$ sont, à isomorphisme près, les fibrés $2\mathcal{O} \oplus 2\mathcal{O}(-1)$ et $Q^* \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$. Le seul fibré uniforme de type $(0,0,-1,-1)$ et de deuxième classe de Chern 3 est $2Q^*$.

En utilisant ce qu'on sait déjà au sujet des fibrés uniformes de rangs 2, 3 et 4, on peut démontrer le

Théorème 2 : *Pour $c_1 = -2$, -3 ou -4, il existe un nombre fini de fibrés homogènes de type 2, de première classe de Chern c_1 et de rang donné.*

On peut en donner la liste, ce qui conduit à la

Proposition 3 : *Les fibrés homogènes de rang 4 sont, à isomorphisme près, les fibrés $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c) \oplus \mathcal{O}(d)$, $Q(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c)$, $Q(a) \oplus Q(b)$, $S^2Q(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ et $S^3Q(a)$, a, b, c et d étant des entiers.*

On s'intéresse ensuite aux sections globales des fibrés uniformes de type $(1,1,0,0)$. Les fibrés d'Elencwajg sont engendrés par leurs sections globales, l'espace de ces sections étant de dimension 5. On a la

Proposition 4 : *Soit E un fibré uniforme de type $(1,1,0,0)$. Alors si $c_2(E) \geq 5$, on a $h^0(E) \leq 4$.*

Par conséquent, un fibré uniforme E de type $(1,1,0,0)$ est engendré par ses sections globales si et seulement si on a $c_2(E) \leq 4$.

On obtient ainsi des fibrés uniformes de type positif non engendrés par leurs sections globales.

Ce travail s'achève par la démonstration du

Théorème 5 : *Un fibré uniforme E de type $(0,0,-1,-1)$ est stable si et seulement si $c_2(E) \geq 4$.*

Je tiens à remercier J. Le Potier pour de nombreuses discussions qui m'ont beaucoup aidé.

2. Préliminaires

A – Monades et fibrés s-stables

Soit E un fibré sur $\mathbb{P}(V)$. Soit $z \in V^*$, qui définit un morphisme $E(-2) \to E(-1)$ et donc une application linéaire

$$\tau_E(z) : H^1(E(-2)) \longrightarrow H^1(E(-1)) \ .$$

On obtient ainsi un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V^*)$:

$$\tau_E : \mathcal{O}(-1) \otimes H^1(E(-2)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(E(-1)) \ .$$

Le morphisme τ_E définit un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$a_E : \wedge^2 Q^* \otimes H^1(E(-2)) \longrightarrow Q^* \otimes H^1(E(-1)) \ .$$

En un point x de $\mathbb{P}(V)$, la fibre Q_x^* de Q^* est l'ensemble des formes linéaires sur V s'annulant sur x. Alors a_E est défini par :

$$a_{E,x}((z \wedge z') \otimes h) \ = \ z \otimes \tau_E(z')(h) - z' \otimes \tau_E(z)(h) \ ,$$

z et z' étant des formes linéaires s'annulant sur x et h un élément de $H^1(E(-2))$.

Le morphisme $\tau_{E(1)}$ définit un morphisme de fibrésâĂŸ sur $\mathbb{P}(V)$:

$$b_E : Q^* \otimes H^1(E(-1)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(E)$$

par :

$$b_E(z \otimes h) \ = \ \tau_{E(1)}(z)(h) \ ,$$

z étant une forme linéaire s'annulant sur x et h un élément de $H^1(E(-1))$. On a $b_E \circ a_E = 0$.

Rappelons qu'étant donnés des morphismes de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$, $a : F \to F'$ et $b : F' \to F''$, on dit que le couple (a, b) est une *monade* si a est injectif, b est surjectif et si $b \circ a = 0$. La *cohomologie* de (a, b) est par définition le fibré $\ker(b)/\operatorname{im}(a)$.

Proposition 6 : *Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$. On a $h^0(E) = h^0(E^*(-1)) = 0$ si et seulement si (a_E, b_E) est une monade. Dans ce cas, E est isomorphe à la cohomologie de cette monade.*

Pour une démonstration de cette proposition et des applications, voir Barth [1] et Le Potier [11].

Réciproquement, soient H, H', H'' des K-espaces vectoriels de dimension finie. Un morphisme de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(V)$

$$a : \wedge^2 Q^* \otimes H \longrightarrow Q^* \otimes H'$$

est donné par un élément f de $\mathcal{L}(V^*, \mathcal{L}(H, H'))$:

$$a_x((z \wedge z') \otimes h) \ = \ z \otimes f(z')(h) - z' \otimes f(z)(h) \ ,$$

x étant un point de $\mathbb{P}(V)$, h un élément de H, z et z' des formes linéaires sur V s'annulant sur x. Le morphisme a est injectif si et seulement si pour tout couple (z, z') d'éléments linéairement indépendants de V^*, on a $\ker(f(z)) \cap \ker(f(z')) = \{0\}$.

Un morphisme de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(V)$

$$b : Q^* \otimes H' \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H''$$

est donné par un élément g de $\mathcal{L}(V^*, \mathcal{L}(H', H''))$:

$$b_x(z \otimes h') \ = \ g(z)(h') \ ,$$

x étant un point de $\mathbb{P}(V)$, h' un élément de H', z une forme Iinéaire sur V s'annulant sur x. Le morphisme b est surjectif si et seulement si pour tout couple (z, z') d'éléments linéairement indépendants de V^*, on a $\mathrm{im}(g(z)) + \mathrm{im}(g(z')) = H''$.

On a $b \circ a = 0$ si et seulement si pour tout couple (z, z') d'éléments de V^*, on a $g(z') \circ f(z) = g(z) \circ f(z')$.

Si (a, b) est une monade, la cohomologie E de cette monade vérifie $h^0(E) = h^0(E^*(-1)) = 0$, et la monade (a_E, b_E) est isomorphe à (a, b), c'est-à-dire qu'il existe des isomorphismes

$$A : H \to H^1(E(-2)), \quad A' : H' \to H^1(E(-1)), \quad A'' : H'' \to H^1(E)$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\wedge^2 Q^* \otimes H \arrow[r, "a"] \arrow[d, "I_{\wedge^2 Q^*} \otimes A"] & Q^* \otimes H' \arrow[r, "b"] \arrow[d, "I_{Q^*} \otimes A'"] & \mathcal{O} \otimes H'' \arrow[d, "A''"] \\
\wedge^2 Q^* \otimes H^1(E(-2)) \arrow[r, "a_E"] & Q^* \otimes H^1(E(-1)) \arrow[r, "b_E"] & \mathcal{O} \otimes H^1(E)
\end{tikzcd}$$

On a alors, avec $c_1 = c_1(E)$, $c_2 = c_2(E)$, $r = \mathrm{rg}(E)$,

$$\dim(H) = h^1(E(-2)) \ = \ c_2 - \frac{c_1(c_1 - 1)}{2} \ ,$$
$$\dim(H') = h^1(E(-1)) \ = \ c_2 - \frac{c_1(c_1 + 1)}{2} \ ,$$
$$\dim(H'') = h^1(E) \ = \ c_2 - r - \frac{c_1(c_1 + 3)}{2} \ .$$

Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$ tel que $-\mathrm{rg}(E) < c_1(E) < 0$. On voit aisément que E est s-stable si et seulement si on a $h^0(E) = h^0(E^*(-1)) = 0$. Les monades précédentes sont donc bien adaptées à l'étude des fibrés s-stables uniformes de type 2.

B – La variété d'incidence

Soit $D(V)$ l'ensemble des couples (x, ℓ), x étant un point de $\mathbb{P}(V)$ et ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$ contenant x. C'est une sous-variété fermée de $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$, appelée la *variété d'incidence*. On note $p : D(V) \to \mathbb{P}(V)$, $q : D(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ les restrictions des projections. On pose

$$h = c_1(p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))), \quad u = c_1(q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1))).$$

Alors l'anneau de Chow de $D(V)$ est engendré par u et h, avec les relations

$$u^3 = 0, \quad h^3 = 0, u^2 + h^2 - uh = 0 \ .$$

En particulier, $1, u, h, u^2, h^2, u^2h = uh^2$ en est une base.

Soit k un entier, alors on a

$$\begin{array}{llll}
p_*(q^*(\mathcal{O}(k))) & = & 0 & \text{si } \ k < 0 \ , \\
 & = & S^k Q & \text{si } \ k \geq 0 \ , \\
R^1 p_*(q^*(\mathcal{O}(k))) & = & 0 & \text{si } \ k > -2 \ , \\
 & = & (S^k Q^*)(-1) & \text{si } \ k \leq -2 \ .
\end{array}$$

3. Fibrés uniformes s-stables

Le but de ce chapitre est de prouver le théorème 1 énoncé dans l'Introduction.

Soient r et c_1 deux entiers tels que $-r+1<c_1<-1$. Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$, s-stable, de rang r et de première classe de Chern c_1.

Proposition 7 : *Le fibré E est uniforme de type 2 si et seulement si pour tout élément z non nul de V^*, l'application $\tau_E(z)$ est injective, et l'application $\tau_{E(1)}(z)$ surjective.*

Démonstration. Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$, définie par un élément z de V^*. La restriction $E_{|\ell}$ est isomorphe à un fibré du type $k\mathcal{O}\oplus k'\mathcal{O}(-1)$ si et seulement si $h^0(E(-1)_{|\ell})=h^1(E_{|\ell})=0$. Considérons la suite exacte définie par la multiplication par z :

$$0\longrightarrow E(-2)\longrightarrow E(-1)\longrightarrow E(-1)_{|\ell}\longrightarrow 0\ .$$

On en déduit la suite exacte longue

$$H^0(E(-1))\longrightarrow H^0(E(-1)_{|\ell})\longrightarrow H^1(E(-2))\xrightarrow{\tau_E(z)} H^1(E(-1)).$$

On a $h^0(E(-1))=0$, car E est s-stable. Donc $h^0(E(-1)_{|\ell})=0$ si et seulement si $\tau_E(z)$ est injective. Considérons la suite exacte définie par la multiplication par z :

$$0\longrightarrow E(-1)\longrightarrow E\longrightarrow E_{|\ell}\longrightarrow 0\ .$$

On en déduit la suite exacte longue

$$H^1(E(-1))\xrightarrow{\tau_{E(1)}(z)} H^1(E)\longrightarrow H^1(E_{|\ell})\longrightarrow H^2(E(-1))\ .$$

Or on a

$$\begin{aligned} h^2(E(-1)) &= h^0(E^*(-2)) \quad \text{(par dualité de Serre)} \\ &= 0 \qquad \text{car } E \text{ est } s\text{-stable}\ . \end{aligned}$$

Donc $h^1(E_{|\ell})=0$ si et seulement si $\tau_{E(1)}(z)$ est surjective. Ceci achève la démonstration de la proposition 7. □

A – Nécessité de la condition $c_2\geq f(r,c_1)$

Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$, s-stable et uniforme de type 1, de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2. On a

$$h^1(E(-2))=c_2-\frac{c_1(c_1-1)}{2}\ \geq\ 0,\qquad h^1(E)=c_2-r-\frac{c_1(c_1+3)}{2}\ \geq\ 0\ .$$

Donc si $c_2<f(r,c_1)$, on a $c_2<\frac{r}{2}+1+\frac{c_1(c_1+1)}{2}$, et $h^1(E(-2))+h^1(E)<2$. Il faut montrer que dans ce cas, E est homogène.

Si $h^1(E(-2))=h^1(E)=0$, $E\simeq H^1(E(-1))\otimes Q^*$ est homogène. Si $h^1(E(-2))=1$ et $h^1(E)=0$, E est isomorphe au conoyau d'un morphisme injectif de fibrés $\wedge^2Q^*\to Q^*\otimes H^1(E(-1))$, défini par un sous espace vectoriel de dimension 3 de $H^1(E(-1))$. Il est aisé de constater que E est homogène, c'est le fibré Q_2^* défini dans le chapitre 5.

Le cas où $h^1(E(-2))=0$ et $h^1(E)=1$ est analogue.

B – Suffisance de la condition $c_2 \geq f(r, c_1)$

La méthode employée ici est basée sur les résultats de la partie A des Préliminaires. C'est une généralisation de la méthode d'Elencwajg ([5]).

Posons

$$m \;=\; c_2 - \frac{c_1(c_1-1)}{2}, \quad n \;=\; m - c_1 \; .$$

Il s'agit de trouver une monade

$$\wedge^2 Q^* \otimes H \xrightarrow{a} Q * \otimes H' \xrightarrow{b} \mathcal{O} \otimes H'' \; ,$$

H, H' et H'' étant des K-espaces vectoriels de dimensions respectives m, n et $n - c_1 + r$, a étant défini par $f \in \mathcal{L}(V^*, \mathcal{L}(H, H'))$ et b par $g \in \mathcal{L}(V^*, \mathcal{L}(H', H''))$, tels que : pour tout $z \in V^*$ non nul, $f(z)$ est injective et $g(z)$ surjective, et pour tous $z, z' \in V^*$, on a $g(z') \circ f(z) = g(z) \circ f(z')$.

Le fibré E cohomologie de la monade (a, b) est de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2 et est uniforme de type 2, car (a, b) étant isomorphe à la monade (a_E, b_E), pour $z \in V^*$ non nul, $\tau_E(z)$ est injective et $\tau_{E(1)}(z)$ est surjective, de telle sorte que les conditions requises par la proposition 7 sont vérifiées.

Le critère de non-homogénéité est le suivant : si le morphisme de fibrés $b_{E(-1)}$ n'est pas de rang constant, alors E n'est pas homogène.

On peut supposer que $r \geq -2c_1$, car il revient au même de trouver E et $E^*(-1)$. On a alors $m > 0$.

Soient H' un K-espace vectoriel de dimension n, et A un automorphisme de H' possédant n valeurs propres distinctes. Il existe donc une base de H' composée de vecteurs propres de A, et tout sous espace vectoriel de H' stable par A est engendré par un certain nombre de ces vecteurs. Soit x un élément de H' dont les composantes suivant une base de vecteurs propres de A sont non nulles. Alors $x, A(x), \ldots, A^{n-1}(x)$ est une base de H'.

Soit H le sous espace vectoriel de H' engendré par $x, A(x), \ldots, A^{m-1}(x)$. Soit D un plan de H' engendré par deux vecteurs propres de A, alors on a $H \cap D = \{0\}$: en effet, puisque $m \leq n-2$, si y est un élément non nul de H, y, $A(y)$ et $A^2(y)$ sont linéairement indépendants, alors que pour tout $u \in D$, u, $A(u)$ et $A^2(u)$ sont liés.

Soit (z_0, z_1, z_2) une base de V^*, (e_0, e_1, e_2) la base duale. On note $i : H \to H'$ l'inclusion. Pour tout $(u_0, u_1, u_2) \in K^3$, on pose

$$f(u_0 z_0 + u_1 z_1 + u_2 z_2) \;=\; (u_0 I_{H'} + u_1 A + u_2 A^2) \circ i \; \in \mathcal{L}(H, H') \; .$$

Alors pour $(u_0, u_1, u_2) \neq 0$, $f(u_0 z_0 + u_1 z_1 + u_2 z_2)$ est injective : dans les seuls cas où $u_0 I_{H'} + u_1 A + u_2 A^2$ n'est pas injective, son noyau est contenu dans un plan de H' engendré par deux vecteurs propres de A, et ne rencontre pas H.

Soit L un sous-espace vectoriel de H' de dimension $r + c_1$, $H'' = H'/L$ et $\pi : H' \to H''$ la projection. Pour tout élément (u_0, u_1, u_2) de K^3, on pose

$$g(u_0 z_0 + u_1 z_1 + u_2 z_2) \;=\; \pi \circ (u_0 I_{H'} + u_1 A + u_2 A^2) \; .$$

Soit $z = u_0 z_0 + u_1 z_1 + u_2 z_2$, supposé non nul. Alors $g(z)$ est surjectif si et seulement si $L + \operatorname{im}(u_0 I_{H'} + u_1 A + u_2 A^2) = H'$.

Soient $L_1, \ldots, L_{n(n-1)/2}$ les orthogonaux des plans de H'^* engendrés par les couples de vecteurs propres de ${}^tA$. Alors l'image de $u_0 I_{H'} + u_1 A + u_2 A^2$ contient au moins l'un des sous-espaces

L_i. Donc $g(z)$ sera surjective (pour tout z non nul) si on choisit L de telle sorte que l'on ait $L + L_i = H'$ pour $1 \leq i \leq n(n-1)/2$. Ceci est possible car $r + c_1 \geq 2$.

Pour tous z, z' dans V^*, il est immédiat que $g(z') \circ f(z) = g(z) \circ f(z')$.

Le fibré E obtenu à partir de f et g n'est pas homogène : s'il l'était, le morphisme $b_{E(-1)} : Q * \otimes H \to \mathcal{O} \otimes H'$ serait de rang constant. Or, au dessus de Ke_2 il est de rang $m+1$, car $\dim(\mathrm{im}(f(z_0)) + \mathrm{im}(f(z_1))) = m+1$, et au dessus de Ke_1 il est de rang $m+2$, car $\dim(\mathrm{im}(f(z_0)) + \mathrm{im}(f(z_2))) = m+2$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Une variante de la méthode précédente permet de prouver la

Proposition 8 : *Soient k et c_2 des entiers, avec $k \geq 2$. Il existe un fibré s-stable uniforme non homogène de type 2, de rang $2k$, de classes de Chern $-k$ et c_2, pouvant être muni d'une forme symplectique non dégénérée à valeurs dans $\mathcal{O}(-1)$ si et seulement si on a*

$$c_2 \ \geq \ 1 + \frac{k(k+1)}{2}.$$

Démonstration. La condition portant sur c_2 est la même que celle du théorème 1, dans ce cas particulier. Il faut donc montrer qu'elle est suffisante. On prend f comme plus haut, et on munit H' d'une forme quadratique non dégénérée pour laquelle A est symétrique. On prend $H'' = H^*$, et pour g l'application définie par $g(z) = {}^t f(z)$ pour tout z dans V^*. Le fibré E obtenu est uniforme non homogène, il est muni de la forme symplectique non dégénérée à valeurs dans $\mathcal{O}(-1)$ définie par : pour tout $x \in \mathbb{P}(V)$ et tous $e, e' \in E_x$, représentés respectivement par $\sum z_i \otimes h_i, \sum z'_i \otimes h'_i \in \ker(b_x)$, on pose

$$S(e, e') \ = \ \sum <h_i, h_j> z_i \wedge z'_j.$$

Les verifications ne sont pas difficiles. □

Remarque : Si un fibré vectoriel E sur $\mathbb{P}(V)$ est muni d'une forme symplectique non dégénérée à valeurs dans $\mathcal{O}(-1)$, les fibrés E et $E^*(-1)$ sont isomorphes, et on a donc $\mathrm{rg}(E) = -2c_1(E)$.

4. Fibrés uniformes quelconques

Si E est un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$, on note $h_E : \mathcal{O} \otimes H^0(E) \to E$ le morphisme canonique d'évaluation.

L'étude des fibrés uniformes non nécessairement s-stables est basée sur le

Lemme 9 : *Soit E un fibré uniforme de type 2 sur $\mathbb{P}(V)$. Alors le couple $(h_E, {}^t h_{E^*(-1)} \otimes I_{\mathcal{O}(-1)})$ est une monade, dont la cohomologie est un fibré s-stable uniforme de type 2.*

Le fibré s-stable obtenu est noté $S(E)$.

Démonstration. Le morphisme h_E est injectif : il suffit de montrer qu'une section non nulle de E ne s'annule en aucun point de $\mathbb{P}(V)$. Soient $s \in H^0(E)$ et x un point de $\mathbb{P}(V)$ où s s'annule. Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$, alors on a $E_{|\ell} \simeq k\mathcal{O}_\ell \oplus k'\mathcal{O}_\ell(-1)$, donc $s_{|\ell}$ est injective ou nulle. Donc $s_{|\ell} = 0$ pour toute droite ℓ passant par x, donc $s = 0$. De même, ${}^t h_{E^*(-1)}$ est surjectif. On a $({}^t h_{E^*(-1)} \otimes I_{\mathcal{O}(-1)}) \circ h_E = 0$, puisque c'est un morphisme de $\mathcal{O} \otimes H^0(E)$ dans $\mathcal{O}(-1) \otimes H^0(F^*(-1))^*$. Il est aisé, en considérant le déploiement de $(h_E, {}^t h_{E^*(-1)} \otimes I_{\mathcal{O}(-1)})$, de montrer que $S(E)$ est s-stable et uniforme de type 2. Ceci achève la démonstration du lemme 9. $\square$

Remarquons que la classe d'isomorphisme de $S(E)$ ne dépend que de celle de E. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés s-stables uniformes de type 2, et $\mathcal{Z}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés uniformes de type 2 n'ayant pas de facteur direct isomorphe à $\mathcal{O}$ où à $\mathcal{O}(-1)$. Le lemme 9 permet de définir une application

$$S : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{S} .$$

Si i désigne l'inclusion $\mathcal{S} \to \mathcal{Z}$, on a évidemment $S \circ i = I_{\mathcal{S}}$.

Pour tout K-espace vectoriel L, on note $\mathrm{Gr}(L)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de L. Dans ce qui suit, on s'intéresse aux fibres de S. Le résultat est la

Proposition 10 : *Soient $e \in \mathcal{S}$, E un de ses représentants. Alors il existe une bijection canonique*

$$S^{-1}(e) \;\simeq\; \big(\mathrm{Gr}(H^1(E^*)) \times \mathrm{Gr}(H^1(E(1)))\big)/\operatorname{Aut}(E) .$$

Ce résultat est semblable à la proposition 7 de [2].

Démonstration. Soit F un représentant d'un élément de $S^{-1}(e)$. Soit $f : S(F) \to E$ un isomorphisme. On a une suite exacte de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

(1) $$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(F) \longrightarrow \ker({}^t h_{F^*(-1)} \otimes I_{\mathcal{O}(-1)}) \longrightarrow S(F) \longrightarrow 0 .$$

Soit

$$d : H^0(F)^* \longrightarrow H^1(S(F)^*)$$

le morphisme de liaison provenant de la transposée de la suite exacte précédente. On peut voir d comme l'élément de $\mathrm{Ext}^1(S(F), \mathcal{O} \otimes H^0(F))$ associé à la suite exacte précédente.

On a une suite exacte de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$0 \longrightarrow S(F) \longrightarrow \operatorname{coker}(h_F) \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes H^0(F^*(-1))^* \longrightarrow 0 .$$

Soit

$$d' : H^0(F^*(-1))^* \longrightarrow H^1(S(F)(1))$$

le morphisme de liaison provenant de la suite exacte obtenue en multipliant la précédente par $\mathcal{O}(1)$. On peut voir d' comme l'élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-1) \otimes H^0(F^*(-1))^*, S(F))$ associé à la suite exacte précédente.

L'élément $\big(H^1({}^t f^{-1})(\mathrm{im}(d)), H^1(f \otimes I_{\mathcal{O}(1)})(\mathrm{im}(d'))\big)$ de $\mathrm{Gr}(H^1(E^*)) \times \mathrm{Gr}(H^1(E(1)))$ dépend évidemment de f, mais son image dans $\big(\mathrm{Gr}(H^1(E^*)) \times \mathrm{Gr}(H^1(E(1)))\big)/\operatorname{Aut}(E)$ ne dépend que de F. En fait, elle ne dépend que de la classe d'isomorphisme de F, comme on peut le voir aisément. On a donc bien défini une application

$$j : S^{-1}(e) \longrightarrow \big(\operatorname{Gr}(H^1(E^*)) \times \operatorname{Gr}(H^1(E(1)))\big)/\operatorname{Aut}(E).$$

L'application j est injective

Remarquons d'abord qu'avec les notations précédentes, les applications d et d' sont injectives : supposons que d ne soit pas injective et soient $D = \ker(d)$, L un supplémentaire de D dans $H^0(F)^*$. Le morphisme $d_{|L}$, qu'on peut voir comme un élément de $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}\otimes L, S(F)^*)$, définit une suite exacte

$$0 \longrightarrow S(F)^* \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{O}\otimes L \longrightarrow 0$$

dont la somme directe avec la suite exacte

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{O}\otimes D = \mathcal{O}\otimes D \longrightarrow 0$$

donne une suite exacte dont l'élément associé de $\operatorname{Ext}^1(S(F), \mathcal{O}\otimes H^0(F))$ est d. Donc on a

$$\ker({}^t h_{F^*(-1)} \otimes I_{\mathcal{O}(-1)}) \ \simeq\ G^* \oplus (\mathcal{O}\otimes D^*).$$

On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^* \oplus (\mathcal{O}\otimes D^*) \longrightarrow F \xrightarrow{{}^t h_{F^*(-1)}\otimes I_{\mathcal{O}(-1)}} \mathcal{O}(-1)\otimes H^1(F^*(-1))^* \longrightarrow 0\ .$$

En faisant un raisonnement analogue au précédent, on trouve que F a un facteur direct isomorphe à $\mathcal{O}\otimes D^*$, ce qui est faux par hypothèse. L'application d est donc injective. De même, l'injectivité de d' provient du fait que F n'a pas de facteur direct isomorphe à $\mathcal{O}(-1)$.

Soit F_0 un fibré dont la classe d'isomorphisme est dans $S^{-1}(e)$ et dont l'image par j est la même que celle de F. On peut choisir des isomorphismes $f : S(F) \to E$ et $f_0 : S(F_0) \to E$ de telle sorte que

$$\big(H^1({}^t f)(\operatorname{im}(d)), H^1(f\otimes I_{\mathcal{O}(1)})(\operatorname{im}(d'))\big) \ =\ \big(H^1({}^t f_0)(\operatorname{im}(d_0)), H^1(f_0\otimes I_{\mathcal{O}(1)})(\operatorname{im}(d'_0))\big)\ ,$$

d_0 et d'_0 étant les morphismes de liaison pour F_0 analogues à d et d'. Puisque d et d_0 sont injectives, il existe un isomorphisme $c : H^0(F_0)^* \to H^0(F)^*$ tel que

$$H^1({}^t f^{-1})\circ d\circ c = H^1({}^t f_0^{-1})\circ d_0\ .$$

Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow S(F_0)^* \xrightarrow{i} \ker({}^t h_{F_0^*(-1)}\otimes I_{\mathcal{O}(-1)})^* \xrightarrow{p} \mathcal{O}\otimes H^0(F_0)^* \longrightarrow 0\ .$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow S(F)^* \xrightarrow{i'} \ker({}^t h_{F_0^*(-1)}\otimes I_{\mathcal{O}(-1)})^* \xrightarrow{p'} \mathcal{O}\otimes H^0(F)^* \longrightarrow 0\ ,$$

avec $i' = i\circ {}^t f_0 \circ {}^t f^{-1}$, $p' = c\circ p$, dont l'élément associé de $\operatorname{Ext}^1((\mathcal{O}\otimes H^0(F)^*, S(F)^*)$ est d. On a donc un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S(F^*) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ker({}^t h_{F^*(-1)}\otimes I_{\mathcal{O}(-1)})^* \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & \mathcal{O}\otimes H^0(F)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & S(F^*) \arrow[r, "i'"] & \ker({}^t h_{F_0^*(-1)}\otimes I_{\mathcal{O}(-1)})^* \arrow[r, "p'"] & \mathcal{O}\otimes H^0(F)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(la suite exacte du haut étant la duale de (1)) d'où on déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(F^*(-1))^* \arrow[dl, "\partial"'] \arrow[dr, "d'"] & \\
H^1(\ker({}^t h_{F^*(-1)} \otimes I_{\mathcal{O}(-1)})(1)) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, "\Psi"] & & H^1(S(F)(1)) \arrow[d, "\simeq"] \\
H^1(\ker({}^t h_{F_0^*(-1)} \otimes I_{\mathcal{O}(-1)})(1)) \arrow[rr, "\simeq"] & & H^1(S(F_0)(1)) \\
 & H^0(F_0^*(-1))^* \arrow[ul, "\partial_0"] \arrow[ur, "d_0'"'] &
\end{tikzcd}$$

les applications ∂ et ∂_0 étant les morphismes de liaison provenant des suites exactes

$$0 \longrightarrow \ker({}^t h_{F^*(-1)} \otimes I_{\mathcal{O}(-1)})(1) \longrightarrow F(1) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(F^*(-1))^* \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow \ker({}^t h_{F_0^*(-1)} \otimes I_{\mathcal{O}(-1)})(1) \longrightarrow F_0(1) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(F_0^*(-1))^* \longrightarrow 0 \ ,$$

respectivement. On en déduit que puisque d' et d_0' sont injectives, il en est de même de ∂ et ∂_0. Puisque $H^1((f_0^{-1} \circ f) \otimes I_{\mathcal{O}(1)})(\mathrm{im}(d')) = \mathrm{im}(d_0')$, on a $\Psi(\mathrm{im}(\partial)) = \mathrm{im}(\partial_0)$, et en raisonnant comme précédemment, on en déduit que $F(1)$ et $F_0(1)$ sont isomorphes, donc F et F_0 sont isomorphes. Ceci prouve que j est injective.

L'application j est surjective

Soit $(M, N) \in \mathrm{Gr}(H^1(E^*)) \times \mathrm{Gr}(H^1(E(1)))$. L'inclusion de M dans $H^1(E^*)$ peut être vue comme un élément de $\mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{O} \otimes M^*)$, et définit donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes M^* \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow 0 \ .$$

De cette suite exacte on déduit un isomorphisme $H^1(G(1)) \simeq H^1(E(1))$, qui permet de voir l'inclusion de N dans $H^1(E(1))$ comme un élément de $Ext^1((\mathcal{O}(-1) \otimes N, G)$, qui définit une suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes N \longrightarrow 0 \ .$$

On vérifie aisément que la classe d'isomorphisme de F est un élément de $S^{-1}(e)$, dont l'image par j est la classe de (M, N). Ceci prouve la surjectivité de j.

Ceci achève la démonstration de la proposition 10. $\square$

5. Fibrés homogènes

A – Exemples de fibrés homogènes de type 2

Voir les Préliminaires B.

Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$Q_n \ = \ (p_* q^*((S^{n-1}Q)(1)))^*(1) \ .$$

C'est un fibré homogène sur $\mathbb{P}(V)$de rang $\frac{n(n+3)}{2}$. Le fibré Q_1 est isomorphe à Q.

1 – On a une suite exacte canonique de fibrés sur $\mathbb{P}(V^*)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}\otimes S^{n-2}V^* \longrightarrow \mathcal{O}(1)\otimes S^{n-1}V^* \longrightarrow (S^{n-1}Q)(1) \longrightarrow 0$$

d'où la suite exacte de fibrés sur $D(V)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}\otimes S^{n-2}V^* \longrightarrow q^*(\mathcal{O}(1))\otimes S^{n-1}V^* \longrightarrow q^*((S^{n-1}Q)(1)) \longrightarrow 0$$

et la suite exacte de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}\otimes S^{n-2}V^* \longrightarrow Q\otimes S^{n-1}V^* \longrightarrow Q_n^*(1) \longrightarrow 0\ .$$

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow Q_n \longrightarrow Q\otimes S^{n-1}V \xrightarrow{f_n} \mathcal{O}(1)\otimes S^{n-2}V \longrightarrow 0\ ,$$

f_n étant défini par l'application canonique

$$\tau_n : V^* \longrightarrow \mathcal{L}(S^{n-1}V, S^{n-2}V)$$

isomorphe à τ_{Q_n}. Pour tout $z\in V^*$ non nul, $\tau_{Q_n}(z)$ est surjective. D'autre part on a $h^1(Q_n(-3))=0$, donc $\tau_{Q_n(-1)}(z)$ est injective. Donc le fibré Q_n est s-stable, et $Q_n(-1)$ est uniforme de type 2. La suite exacte précédente permet de calculer les classes de Chern : $c_1(Q_n)=n$, $c_2(Q_n)=n^2$.

2 – On définit de manière évidente un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$g_n : \mathcal{O}(-n) \longrightarrow \mathcal{O}\otimes S^nV\ .$$

Alors *le conoyau de g_n est isomorphe à Q_n*, de telle sorte qu'on a une suite exacte

(2) $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \longrightarrow \mathcal{O}\otimes S^nV \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0\ .$$

En effet, de l'application $\tau_{n+1} : V^* \to \mathcal{L}(S^nV, S^{n-1}V)$ on déduit un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$\phi : \mathcal{O}\otimes S^nV \longrightarrow Q\otimes S^{n-1}V\ .$$

Comme on a, pour tous $z,z'\in V^*$, $\tau_{n+1}(z)\circ\tau_n(z') = \tau_{n+1}(z')\circ\tau_n(z)$, on a $f_n\circ\phi=0$, donc le fibré $\mathrm{im}(\phi)$ est contenu dans le sous fibré Q_n de $Q\otimes S^{n-1}V$.

Sur $\mathbb{P}(V^*)$, on a un morphisme surjectif défini aussi par τ_{n+1}

$$\Psi : \mathcal{O}\otimes S^nV \longrightarrow \mathcal{O}(1)\otimes S^{n-1}V\ ,$$

dont le noyau est S^nQ^*, et on a $\phi = p_*(q^*(\Psi))$, de telle sorte que $\ker(\phi) = p_*(q^*(S^nQ^*))$, qui est un fibré de rang 1, donc

$$\mathrm{rg}(\mathrm{im}(\phi)) \;=\; \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \;=\; \frac{n(n+3)}{2} \;=\; \mathrm{rg}(Q_n)$$

et par conséquent $\mathrm{im}(\phi)=Q_n$. Le morphisme ϕ définit donc un morphisme surjectif de fibrés $\phi' : \mathcal{O}\otimes S^nV \to Q_n$, dont le noyau est forcément isomorphe $\mathcal{O}(-n)$, et l'injection obtenue $\mathcal{O}(-n)\to S^nV$ est égale à l'injection canonique. On a donc bien un isomorphisme $Q_n \simeq \mathrm{coker}(g_n)$.

3 – De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes S^{n-2}V^* \longrightarrow Q \otimes S^{n-1}V^* \longrightarrow Q_n^*(1) \longrightarrow 0$$

on déduit que $h^1(Q_n^*(1)) = 0$. De la suite exacte (2) on déduit un isomorphisme $H^1(Q_n) \simeq H^2(\mathcal{O}(-n))$. On a d'autre part $H^1(Q_n^*(1)) = \{0\}$.

D'après le chapitre 4, tout sous-espace vectoriel L de $H^2(\mathcal{O}(-n))$ définit un fibré uniforme $E(L)$ de type 2 sur $\mathbb{P}(V)$, et l'application qui à L associe la classe d'isomorphisme de $E(L)$ est une bijection de $\mathrm{Gr}(H^2(\mathcal{O}(-n)))$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés E uniformes de type 2 sans facteur direct isomorphe à $\mathcal{O}$ ou à $\mathcal{O}(-1)$ et tels que $S(E) = Q_n(-1)$.

Lemme 11 : *Le fibré $E(L)$ est homogène si et seulement si $L = \{0\}$ (et alors $E(L) \simeq Q_n(-1)$) ou $L = H^2(\mathcal{O}(-n))$.*

Démonstration. Tout élément $a = KA$ de $\mathrm{PGL}(V)$, $A \in \mathrm{GL}(V)$, induit un automorphisme $\overline{A}$ de $H^2(\mathcal{O}(-n))$. Pour tout sous-espace vectoriel L de $H^2(\mathcal{O}(-n))$, les fibrés $a^*(E(L))$ et $E(\overline{A}(L))$ sont isomorphes, et le lemme 11 découle du fait que les seuls sous-espaces vectoriels de $H^2(\mathcal{O}(-n))$ stables par tous les $\overline{A}$ sont $\{0\}$ et $H^2(\mathcal{O}(-n))$. □

On note $Q'_n = E(H^2(\mathcal{O}(-n)))(1)$. On a une suite exacte de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$0 \longrightarrow Q_n \longrightarrow Q'_n \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^2(\mathcal{O}(-n)) \longrightarrow 0 .$$

On a $Q'_n = Q_n$ pour $n = 1$ ou 2. Le rang de Q'_n est $n^2 + 1$, et si $n \geq 3$, Q'_n est un fibré homogène de type de décomposition positif non engendré par ses sections globales.

4 – (cf [3]) De la suite exacte (2) on déduit un isomorphisme $S^nV \simeq H^0(Q_n)$. Soit L un sous-espace vectoriel de S^nV. Alors le morphisme $f_L : \mathcal{O} \otimes L \to Q_n$ restriction du morphsme canonique $\mathcal{O} \otimes H^0(Q_n) \to Q_n$ est injectif si et seulement si L ne contient aucun élément de la forme x^n, x étant un élément non nul de V. Si tel est le cas, le fibré $F(L)$ conoyau de f_L est s-stable, et est isomorphe au conoyau du morphisme injectif de fibrés $\mathcal{O}(-n) \to \mathcal{O} \otimes (S^nV/L)$ défini par la projection $S^nV \to S^nV/L$. On montre que $F(L)(-1)$ est uniforme de type 2 si et seulement si pour tout plan D de V, on a $S^nD \cap L = \{0\}$.

Lemme 12 : *Le fibré $F(L)$ est homogène si et seulement si $L = \{0\}$.*

Remarque : Dans le cas $n = 2$, si $L = Kg$, avec $g \in S^2V$ qui n'est pas de la forme x^2, avec $x \in V$, le fibré $F(L)$ est de rang 4, de classes de Chern 2 et 4, et est uniforme de type $(1, 1, 0, 0)$ si et seulement si la conique de $\mathbb{P}(V^*)$ définie par g est non dégénérée. Dans ce cas, d'après le lemme 12, $F(L)$ n'est pas homogène. Les fibrés $F(L)$ sont les mêmes que ceux trouvés par G. Elencwajg dans [4].

B – Démonstration du théorème 2

L'énoncé est

Théorème 2 : *Pour $c_1 = -2$, -3 ou -4, il existe un nombre fini de fibrés homogènes de type 2, de première classe de Chern c_1 et de rang donné.*

Plus précisément, on peut donner la liste des fibrés homogènes de type 2, n'ayant pas de facteur direct isomorphe à $\mathcal{O}$ ou à $\mathcal{O}(-1)$ dans les cas où $c_1 = -2, -3, -4$.

Cas $c_1 = -2$

Fibrés	s-stable	rang	c_2
$2Q^*$	oui	4	3
Q_2^*	oui	5	4

Cas $c_1 = -3$

Fibrés	s-stable	rang	c_2
$Q_2(-1)$	oui	5	6
$3Q^*$	oui	6	6
$Q_2^* \oplus Q^*$	oui	7	7
Q_3^*	oui	9	9
${Q'_3}^*$	non	10	9

Cas $c_1 = -4$

Fibrés	s-stable	rang	c_2
$Q_2(-1) \oplus Q^*$	oui	7	9
$4Q^*$	oui	8	10
$Q_2^* \oplus 2Q^*$	oui	9	11
$2Q_2^*$	oui	10	12
$Q_3^* \oplus Q^*$	oui	11	12
${Q'_3}^* \oplus Q^*$	non	12	12
Q_4^*	oui	14	16
${Q'_4}^*$	non	17	16

On peut aussi déduire de ces listes celle des fibrés homogènes de type 2 de rang au plus 9. Par exemple, les fibrés homogènes de type 2 de rang 4 de première classe de Chern -2 sont (à isomorphisme près) :

$$2\mathcal{O} \oplus 2\mathcal{O}(-1), \quad Q^* \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1), \quad \text{et} \quad 2Q^* .$$

En utilisant les résultats d'Elencwajg ([6]) et de [2], on en déduit la

Proposition 3 : Les fibrés homogènes de rang 4 sur $\mathbb{P}(V)$ sont (à isomorphisme près) :

$$\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c) \oplus \mathcal{O}(d), \quad Q(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c), \quad Q(a) \oplus Q(b),$$

$$S^2Q(a) \oplus \mathcal{O}(b) \quad \text{et} \quad S^3Q(a).$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Démontrons maintenant le théorème 2.

Si E est un fibré homogène de type 2, il est aisé de voir que le fibré $S(E)$ est aussi homogène. Il suffira donc, d'après le lemme 11, la proposition 10 et le fait que $h^1(Q) = 0$, de montrer que les seuls fibrés s-stables homogènes de type 2 sont ceux mentionnés dans les listes précédentes. Si E est un fibré s-stable homogène de type 2, le fibré E' conoyau du morphisme injectif de fibrés sur $\mathbb{P}(V^*)$

$$\mathcal{O}(-1) \otimes H^1(E(-2)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(E(-1))$$

défini par τ_E est aussi homogène et de rang $-c_1$. On peut alors utiliser ce qu'on sait des fibrés homogènes de rang 2, 3 ou 4.

Le cas $c_1 = -2$. D'apres Van de Ven [13], le fibré E' est isomorphe à $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ ou à $Q(a)$, a et b étant des entiers. Si $h^1(E(-2)) = 0$, E est isomorphe au noyau d'un morphisme surjectif de fibrés $2Q^* \to \mathcal{O} \otimes H$, H étant un K-espace vectoriel de dimension finie. Puisque E est uniforme de type 2, on a $\mathrm{rg}(E) \geq 4$, donc $E \simeq 2Q^*$.

Si $h^1(E(-2)) \neq 0$, on a $H^1(E'^*(-1)) \simeq H^1(E(-2))^* \neq \{0\}$, ce qui force E' à être isomorphe à Q, et τ_E est isomorphe à $\tau_2 : V* \to \mathcal{L}(K, V*)$. Donc E est isomorphe au noyau d'un morphisme surjectif de fibrés $Q_2^* \to \mathcal{O} \otimes H$, H étant un K-espace vectoriel de dimension finie. D'après le lemme 12, H est nul, et E est isomorphe à Q_2^*.

Le cas $c_1 = -3$. D'après le Elencwajg [4], E' est isomorphe à $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c)$, $Q(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ ou $S^2Q(a)$, a, b et c étant des entiers.

Si $h^1(E(-2)) = 0$, le fibré E est isomorphe au noyau d'un morphisme surjectif de fibrés $3Q^* \to \mathcal{O} \otimes H$, H étant un K-espace vectoriel de dimension finie. Si H est nul, E est isomorphe à $3Q^*$, et si H n'est pas nul, c'est forcément une droite, car sinon E est de rang ≤ 4, $c_1(E) = -3$, ce qui contredit l'hypothèse $-\mathrm{rg}(E) + 1 < c_1(E) < -1$. Donc E est de rang 5. D'après le cas précédent ($c_1 = -2$), $E^*(-1)$ est isomorphe à Q_2^*, donc $E \simeq Q_2(-1)$.

Si $h^1(E(-2)) \neq 0$, on a $H^1(E'^*(-1)) \simeq H^1(E(-2))^* \neq \{0\}$, et E' est homogène, engendré par ses sections globales, et on a $h^0(E'(-1)) = 0$. Les seuls choix possibles pour E' sont donc $Q \oplus \mathcal{O}$ ou S^2Q.

Si E' est isomorphe S^2Q, de la même façon que dans le cas précédent on montre que E est isomorphe à Q_3^*.

Si E' est isomorphe à $Q \oplus \mathcal{O}$, E est isomorphe au noyau d'un morphisme surjectif de fibrés

$$g : Q_2^* \oplus Q^* \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H \ ,$$

H étant un K-espace vectoriel de dimension finie. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\lambda} Q_2^* \oplus Q^* \xrightarrow{g} \mathcal{O} \otimes H \longrightarrow 0 \ .$$

Le groupe $\mathrm{GL}(V)$ opère sur $Q_2^* \oplus Q^*$ et donc sur $\mathrm{Hom}(Q_2^* \oplus Q^*, \mathcal{O} \otimes H)$. Si $f \in \mathrm{Hom}(Q_2^* \oplus Q^*, \mathcal{O} \otimes H)$ et $\alpha = KA \in \mathrm{PGL}(V)$, avec A dans $\mathrm{GL}(V)$, les fibrés $\alpha^*(\ker(f))$ et $\ker(Af)$ sont isomorphes. Puisque E est homogène on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mu} Q_2^* \oplus Q^* \xrightarrow{Ag} \mathcal{O} \otimes H \longrightarrow 0\ .$$

On va montrer qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal] & Q_2^* \oplus Q^* \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{O} \otimes H \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\mu"] & Q_2^* \oplus Q^* \arrow[r, "Ag"] & \mathcal{O} \otimes H \arrow[r] & 0\ ,
\end{tikzcd}$$

ψ et ϕ étant des isomorphismes.

Du fait que $h^i(Q_2^*) = h^i(Q^*) = 0$ pour $i = 0, 1$ le morphisme canonique $\mathrm{End}(Q_2^* \oplus Q^*) \to \mathrm{Hom}(E, Q_2^*)$ provenant de la suite exacte du haut est un isomorphisme. On en déduit l'existence du diagramme commutatif précédent, et il reste à voit que ψ et ϕ sont des isomorphismes. Ce diagramme montre que $\ker(\phi) \simeq \ker(\psi)$ et $\mathrm{coker}(\phi) \simeq \mathrm{coker}(\psi)$. Mais $\mathrm{coker}(\phi)$ est un fibré trivial et $h^0(Q_2^*) = h^0(Q^*) = 0$. Donc $\mathrm{coker}(\phi) = 0$, donc $\ker(\phi) = 0$, d'où $\ker(\psi) = \mathrm{coker}(\psi) = 0$.

De la suite exacte (2) (pour $n = 2$) on déduit que $\mathrm{Hom}(Q_2^*, Q^*) = \{0\}$, donc ψ induit un automorphisme ψ' de Q_2^*, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Q_2^* \arrow[rr, "g_{|Q_2^*}"] \arrow[d, "\psi'"] & & \mathcal{O} \otimes H \arrow[d, "\phi"] \\
Q_2^* \arrow[rr, "(Ag)_{|Q_2^*}"] & & \mathcal{O} \otimes H\ .
\end{tikzcd}$$

Comme $(Ag)_{|Q_2^*} = A(g_{|Q_2^*})$, on en déduit que le faisceau F noyau de $g_{|Q_2^*}$ est homogène. En particulier c'est un fibré. Le morphisme ${}^t(g_{|Q_2^*})$ se factorise de la fagon suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O} \otimes H^* \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend right, "{}^t(g_{|Q_2^*})"'] & \mathcal{O} \otimes H^0(Q_2) \arrow[r, "S"] & Q_2
\end{tikzcd}$$

S étant le morphisme canonique et b donné par une application linéaire $B : H^* \to H^0(Q_2) = S^2V$. Le morphisme $S_{|\mathrm{im}(b)}$ est de rang constant. Si $S_{|\mathrm{im}(b)}$ n'est pas injectif, on voit aisément que $\mathrm{im}(B)$ contient tous les éléments de S^2V de la forme x^2, avec x dans V, donc B est surjective. Dans ce cas, ${}^t(g_{|Q_2^*})$ est injectif et $\mathrm{rg}(E) \leq 2$, ce qui est absurde. Donc $S_{|\mathrm{im}(b)}$ est injectif et d'apres le Lemme 12, $\mathrm{im}(b) = \{0\}$, et $g_{|Q_2^*} = 0$. Puisqu'il n'y a pas de morphisme surjectif $Q^* \to \mathcal{O}$, on a $H = \{0\}$, et E est isomorphe à $Q_2^* \oplus Q*$.

Le cas $c_1 = -4$. La proposition 3 utilise seulement le cas $c_1 = -2$ du théoreme 2, on peut donc s'en servir ici. On en déduit que le fibré E' est isomorphe à $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c) \oplus \mathcal{O}(d)$, ,$Q(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c)$, $Q(a) \oplus Q(b)$, $S^2Q(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ ou $S^3Q(a)$, a, b, c, d étant des entiers.

Si $h^1(E(-2)) = 0$, et si $h^1(E) = 0$, le fibré E est isomorphe à $4Q^*$. Si $h^1(E) \neq 0$, en étudiant $E^*(-1)$ on est ramené aux cas précédents, et on trouve que E est isomorphe à $Q_2(-1) \oplus Q^*$.

Si $h^1(E(-2)) \neq 0$, on a $H^1(E'^*(-1)) \simeq H^1(E(-2))^* \neq \{0\}$, donc E' est isomorphe à $2Q$, $Q \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$, $S^2Q(-1) \oplus \mathcal{O}(a)$, $S^2Q \oplus \mathcal{O}(a)$, $S^3Q(-2)$, $S^3Q(-1)$ ou S^3Q, a et b étant des entiers qui sont nuls car E' est engendré par ses sections globales et $E'(-1)$ n'a pas de sections globales non nulles. Puisque $h^0(S^2Q(-1)) = h^0(S^3Q(-2)) = h^0(S^3Q(-1)) = 0$, E' est isomorphe à $2Q$, $Q \oplus 2\mathcal{O}$, $S^2Q \oplus \mathcal{O}$ ou S^3Q.

Si E' est isomorphe à $Q \oplus 2\mathcal{O}$, (resp. $S^2Q \oplus \mathcal{O}$, S^3Q), on montre de la même facon que dans les cas précédents que E est isomorphe à $Q_2^* \oplus 2Q^*$ (resp. $Q_3^* \oplus Q^*$, Q_4^*).

Reste le cas on E' est isomorphe à $2Q$. Alors E est isomorphe au noyau d'un morphisme surjectif de fibrés

$$g : 2Q_2^* \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H \ ,$$

h étant un K-espace vectoriel de dimension finie. On peut, en utilisant les cas $c_1 = -2, -3$ étudiés précédemment, et en considérant le fibré $E^*(-1)$, se ramener au cas où H est de dimension au plus 2. Le morphisme ${}^tg$ se factorise de la façon suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \otimes H^* \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend right, "{}^tg"'] & \mathcal{O} \otimes (H^0(Q_2) \otimes K^2) \arrow[r, "S"] & Q_2 \otimes K^2 \end{tikzcd}$$

S étant le morphisme canonique et b donné par une application linéaire injective

$$H^* \longrightarrow H^0(Q_2) \otimes K^2 = S^2V \otimes K^2 \ .$$

On peut considérer que H^* est un sous espace vectoriel de $S^2V \otimes K^2$. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \otimes K^2 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes (S^2V \otimes K^2/H^*) \longrightarrow E^* \longrightarrow 0 \ ,$$

et l'homogénéité de E se traduit de la façon suivante : pour tout automorphisme A de V, il existe un automorphisme σ de K^2 tel que

$$(S^2A \otimes I_{K^2})(H^*) = (I_{S^2V} \otimes \sigma)(H^*) \ .$$

Supposons maintenant que $H \neq \{0\}$, et soit w un élément non nul de H^*. Il existe une base (e_1, e_2, e_3) de V telle que $w = e_1^2 + me_2^2 + ne_3^2$, avec m, n égaux à 0 ou 1. En considérant successivement les automorphismes de V dont les matrices relativement à (e_1, e_2, e_3) sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

on voit que $\dim(H) \geq 3$, ce qui est faux par hypothèse. Donc $H = \{0\}$, et E est isomorphe à $2Q_2^*$.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Remarque. Si $c_1 \leq -5$, la situation peut être plus compliquée : V peut être considéré comme un sous-espace vectoriel de $V^* \otimes S^2V$. Ceci permet de construire un fibré E, conoyau du morphisme injectif de fibrés

$$\mathcal{O}(-2) \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{O} \otimes (V^* \otimes S^2V/V)$$

défini par la projection $V^* \otimes S^2V \to V^* \otimes S^2V/V$. Alors le fibré E^* est s-stable, homogène de type 2, et on a $c_1(E) = 6$, $c_2(E) = 24$, $\mathrm{rg}(E) = 12$. On a une suite exacte $0 \to \mathcal{O} \otimes V \to Q_2 \otimes V^* \to E \to 0$.

On vérifie aisément que E n'est pas isomorphe à une somme directe de fibrés du type $\mathcal{O}$, Q_p ou $Q_p^*(1)$.

6. Fibrés uniformes de type $(1,1,0,0)$

A – Fibrés non s-stables

Puisque $h^1(Q) = 0$, les fibrés non s-stables uniformes de type $(1,1,0,0)$ sont (à isomorphisme près) : $2\mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O}$ et $Q \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}$. Ces fibrés sont engendrés par leurs sections globales, la dimension de l'espace de ces sections est respectivement 8 et 7, la deuxième classe de Chern 1 et 2.

B – Fibrés s-stables – Sections globales des fibrés uniformes de type $(1,1,0,0)$

1 – On a, pour un fibré vectoriel E s-stable uniforme de type $(1,1,0,0)$: $c_2(E) \geq 3$. Si $c_2(E) = 3$, on a $h^1(E(-3)) = h^1(E(-1)) = 0$, donc E est isomorphe à $2Q$ (la monade $(a_{E(-1)}, b_{E(-1)})$ se réduisant à $0 \to Q^* \otimes H^1(E(-2)) \to 0$). Donc, à isomorphisme près, $2Q$ est le seul fibré uniforme de type $(1,1,0,0)$ de deuxième classe de Chern 3.

2 – Les fibrés uniformes de type $(1,1,0,0)$ de deuxième classe de Chern 4 sont appelés les *fibrés d'Elencwajg*. Pour un tel fibré E, on a des suites exactes

$$0 \to \mathcal{O} \to Q_2 \to E \to 0, \quad 0 \to \mathcal{O}(-2) \to \mathcal{O} \otimes H \to E \to 0 ,$$

H étant un K-espace vectoriel de dimension 5. Ce sont effectivement les fibrés trouvés par Elencwajg dans [5]. De la suite exacte précédente, on déduit qu'un fibré d'Elencwajg est engendré par ses sections globales et que l'espace de ces sections est de dimension 5.

Remarquons pour finir que ces fibrés sont les fibrés $X(f)$ associés aux 5-modules de Kronecker de rang 4 étudiés dans [2]. Il en découle qu'il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés d'Elencwajg sur $\mathbb{P}(V)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés uniformes s-stables de type $(1,0,0,0,-1)$ sur $\mathbb{P}(V^*)$, de deuxième classe de Chern 5.

3 – On démontre ici la proposition 4 énoncée dans l'Introduction. Compte tenu de ce qui précède, il suffit de démontrer l'assertion suivante : *si E est un fibré uniforme de type $(1,1,0,0)$ de deuxième classe de Chern $c_2 \geq 5$, alors on a $h^0(E) \leq 4$.*

D'après **A**, E est nécessairement s-stable. On a $h^1(E(-1)) = c_2 - 3$. Pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$ définie par $z \in V^*$, la multiplication par z induit une suite exacte $0 \to E(-1) \to E \to E_{|\ell} \to 0$, d'où on déduit, du fait que $h^0(E(-1)) = h^1(E_{|\ell}) = 0$, une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(E) \longrightarrow H^0(E_{|\ell}) \longrightarrow H^1(E(-1)) \xrightarrow{{}^t\tau_{E(1)}(z)} H^1(E) \longrightarrow 0 .$$

On a, puisque $h^0(E_{|\ell}) = 6$, $h^1(E) = c_2 - 9 + h^0(E)$. Le morphisme dc fibrés sur $\mathbb{P}(V^*)$

$$\mathcal{O}(-1) \otimes H^1(E(-1)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(E)$$

défini par $\tau_{E(1)}$ est surjectif, d'après la suite exacte précédente, donc si $h^1(E) \neq 0$, on a $h^1(E(-1)) - h^1(E) \geq 2$, c'est-à-dire

$$c_2 - 3 - (c_2 - 9 + h^0(E)) \ = \ 6 - h^0(E) \ \geq 2 \ ,$$

d'où le résultat. Si $h^1(E) = 0$, on a $h^0(E) = 9 - c_2 \leq 4$, puisque $c_2 \geq 5$ (cette démonstration est due à J. Le Potier.)

Remarques : On peut montrer que si un fibré vectoriel E sur $\mathbb{P}(V)$, de classes de Chern c_1 et c_2 est engendré par ses sections globales, alors on a $c_2 \leq c_1^2$ (voir par exemple [10]). On peut montrer qu'il existe des fibrés E uniformes de type $(1,1,0,0)$ avec les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 pour $h^0(E)$.

C – Stabilité

On démontre ici le

Théorème 5 : *Un fibré uniforme E de type $(1,1,0,0)$ est stable si et seulement si $c_2(E) \geq 4$.*

La condition est nécessaire car les fibrés uniformes de type $(1,1,0,0)$ de deuxième classe de Chern ≤ 3 sont (à isomorphisme près) les fibrés évidents, qui ne sont pas stables. Soit E un fibré uniforme de type $(1,1,0,0)$ de deuxième classe de Chern $c_2 \geq 4$. Alors E est s-stable. Il faut montrer que si F est un fibré de rang 2 et $f : F \to E$ un morphisme de fibrés génériquement de rang 2, alors on a $c_1(F) < 1$.

Soit (m,n) le type de décomposition générique de F, on a alors $m \leq 1$ et $n \leq 1$, puisque f est génériquement injectif. Il faut donc étudier les cas $(m,n) = (1,1)$ et $(m,n) = (1,0)$, et montrer qu'en fait ils ne peuvent pas se produire.

Le cas $(m,n) = (1,1)$. Il existe une droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$ telle que $F_{|\ell}$ soit isomorphe à $2\mathcal{O}_\ell(1)$ et que $f_{|\ell}$ soit génériquement injectif. Le fibre $E_{|\ell}$ étant isomorphe à $2\mathcal{O}_\ell(1) \oplus 2\mathcal{O}_\ell$, $f_{|\ell}$ est injectif en tout point de ℓ. Soit (si possible) ℓ' une droite exceptionnelle pour F, alors $F_{|\ell'}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\ell'}(a) \oplus \mathcal{O}_{\ell'}(b)$, a et b étant des entiers tels que $a \geq b$, $a + b = 2$, et $(a,b) \neq (1,1)$. On a alors $a \geq 2$, et par conséquent $f_{|\ell'}$ est de rang au plus 1, ce qui est impossible car $f_{|\ell'}$ est de rang 2 au point d'intersection de ℓ et ℓ'. Il n'y a donc pas de droite exceptionnelle pour F, c'est-à-dire que F est uniforme. D'après [13], F est isomorphe à $2\mathcal{O}(1)$, ce qui est absurde, car $h^0(E(-1)) = 0$. Ceci prouve que le cas $(m,n) = (1,1)$ ne peut pas se produire.

Le cas $(m,n) = (1,0)$. Voir les Préliminaires B. Le faisceau $q^*q_*p^*(E(-1))$ est un fibré de rang 2 sur $D(V)$, et le morphisme canonique $q^*q_*p^*(E(-1)) \to p^*(E(-1))$ est injectif, car E est uniforme de type $(1,1,0,0)$. On a donc un morphisme injectif de fibrés

$$a : p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*q_*p^*(E(-1)) \longrightarrow p^*(E) \ .$$

On a de même un morphisme injectif de fibrés

$$b : q^*q_*p^*(E^*) \longrightarrow p^*(E^*) \ .$$

On a ${}^tb \circ a = 0$, ce qui se vérifie sur chaque fibre de q. Posons $U = q_*p^*(E(-1))$, $W = (q_*p^*(E*))^*$. On a une suite exacte de fibrés sur $D(V)$

$$0 \longrightarrow p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*(U) \longrightarrow p^*(E) \longrightarrow q^*(W) \longrightarrow 0 \ ,$$

donc en ce qui concerne les classes de Chern on a

$$c(p^*(E)) \ = \ c(p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*(U))c(q^*(W)) \ .$$

Posons $c = c_1(U)$, $c' = c_1(W)$, $d = c_2(U)$, $d' = c_2(W)$. Alors

$$c(p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*(U)) \ = \ 1 + (cu + 2h) + ((d+c)u^2 + (c+1)h^2) \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} 1 + 2h + c_2h^2 &= (1 + c'u + d'u^2)\big(1 + (cu+2h) + ((d+c)u^2 + (c+1)h^2)\big) \\ &= 1 + (c+c')u + 2h + (d' + cc' + 2c' + d + c)u^2 + (2c' + c + 1)h^2 \\ &\quad +(cc' + c' + 2d')uh^2, \end{aligned}$$

d'où $c + c' = 0$, $2c' + c + 1 = c_2$, et donc $c = -c' = 1 - c_2$.

Supposons maintenant que F n'est pas uniforme. Soit ℓ' une droite exceptionnelle pour F. Le fibré $F_{|\ell'}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$, a et b étant des entiers tels que $a \geq b$, $a + b = 1$, $(a, b) \neq (1, 0)$. On a donc $a \geq 2$, et $f_{\ell'}$ n'est injectif en aucun point de ℓ'. Soil Z l'ensemble des droites ℓ_0 de $P(V)$ telles que $f_{|\ell_0}$ n'est injectif en aucun point de ℓ_0. L'ensemble Z est un fermé propre de $\mathbb{P}(V^*)$ et contient les droites exceptionnelles pour F. Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$ n'appartenant pas Z. Alors $f_{|\ell}$ n'est pas injectif au point commun de ℓ et ℓ', et $\mathrm{im}(f_{|\ell})$ est contenu dans le facteur direct de $E_{|\ell}$ isomorphe à $2\mathcal{O}(1)$, c'est une conséquence du

Lemme 13 : *Soient H un K-espace de dimension finie et*

$$f : \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O} \longrightarrow 2\mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O}$$

un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(H)$, non injectif mais génériquement injectif. Alors on a $\mathrm{im}(f) \subset 2\mathcal{O}(1)$.

Démonstration. Soient

$$i_1 : \mathcal{O}(1) \to \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}, \quad i_2 : \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}$$

les inclusions, et

$$p_1 : 2\mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O} \to 2\mathcal{O}(1), \quad p_2 : 2\mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O} \to 2\mathcal{O}$$

les projections. Il faut montrer que $p_2 \circ f = 0$. On a déjà $p_2 \circ f \circ i_1 = 0$, car c'est un morphisme de $\mathcal{O}(1)$ dans $\mathcal{O}$. Il reste donc à montrer que $p_2 \circ f \circ i_2 = 0$.

Le morphisme $p_2 \circ f \circ i_2$ de $\mathcal{O}$ dans $2\mathcal{O}$ est nul ou injectif. Supposons le injectif. Par hypothèse, il existe un point x de $\mathbb{P}(H)$ et un élément non nul (z, y) de $\mathcal{O}(1)_x \oplus \mathcal{O}_x$ dans le noyau de f_x. On a $p_2 \circ f \circ i_1 = 0$, donc

$$(p_2 \circ f)_x(z, y) = (p_2 \circ f \circ i_2)_x(y) = 0,$$

donc $y = 0$ puisque $p_2 \circ f \circ i_2$ est injectif. Puisque $p_2 \circ f \circ i_1 = 0$, $p_1 \circ f \circ i_1$ est génériquement injectif, donc injectif, car c'est un morphisme de $\mathcal{O}(1)$ dans $2\mathcal{O}(1)$. On a alors

$$(p_1 \circ f)_x(z, y) = (p_1 \circ f \circ i_1)_x(z) = 0,$$

donc $z = 0$, et $(z, y) = 0$, ce qui est absurde. On a donc bien $p_2 \circ f \circ i_2 = 0$, ce qui prouve le lemme 13. □

Examinons maintenant la situation sur $D(V)$. Sur l'ouvert non vide $q^{-1}(\mathbb{P}(V^*)\backslash Z)$ de $D(V)$, on a

$$(p^*(f))(p^*(F)) \ \subset \ p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*(U) \ ,$$

et cet ouvert étant dense, c'est vrai sur tout $D(V)$. On peut donc considérer que le morphisme $p^*(f)$ est à valeurs dans $p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*(U)$. On a donc un morphisme génériquement injectif de fibrés sur $D(V)$

$$p^*(F) \longrightarrow p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*(U) \ ,$$

et donc un morphisme non nul

$$\wedge^2(p^*(F)) \longrightarrow \wedge^2(p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*(U)) \ .$$

Le fibré $\wedge^2(p^*(F))$ est isomorphe à $p^*(\mathcal{O}(1))$, tandis que le fibré $\wedge^2(p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*(U))$ est isomorphe à $p^*(\mathcal{O}(2)) \otimes q^*(\mathcal{O}(1-c_2))$. Mais puisque $c_2 > 1$, on a

$$\mathrm{Hom}(p^*(\mathcal{O}(1)), p^*(\mathcal{O}(2)) \otimes q^*(\mathcal{O}(1-c_2))) \ = \ \{0\} \ ,$$

comme on le voit en examinant ce qui se passe sur les fibres de p. On aboutit donc à une contradiction, et ceci prouve que F est uniforme. D'après [13], F est isomorphe à $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}$ ou à Q.

Le fibré F ne peut pas être isomorphe à $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}$, car $E(-1)$ n'a pas de section globale non nulle. Supposons que F soit isomorphe à Q. Alors f est injective : on a montré plus haut que sur une droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$, f est génériquement de rang 2. Si $f_{|\ell}$ n'est pas injectif, $\mathrm{im}(f_{|\ell})$ est contenu dans le facteur direct de $E_{|\ell}$ isomorphe à $2\mathcal{O}(1)$ d'après le lemme 13, et il en est de même pour toute droite de $\mathbb{P}(V)$ passant par le point x de ℓ où f n'est pas injectif. On en déduit un morphisme génériquement injectif de fibrés sur $p^{-1}(x)$:

$$p^*(F)_{|p^{-1}(x)} \longrightarrow (p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q^*(U))_{||p^{-1}(x)} \ ,$$

et comme plus haut, ceci est impossible. Le morphisme f est donc injectif. D'après ce qui précède, le conoyau de f est isomorphe à Q. On a donc une suite exate $0 \to Q \to E \to Q \to 0$, ce qui entraine $c_2 = 3$, ce qui contredit l'hypothèse $c_2 \geq 4$. Donc F ne peut pas non plus être isomorphe à Q.

Ceci achève la démonstration du théorème 5.

Remarque : On montre aisément que les seuls fibrés stables de rang 4, et de classes de Chern 2 et 4 sont les fibrés uniformes de type $(1,1,0,0)$ de mêmes classes de Chern.

Références

[1] Barth, W. *Moduli of vector bundles on the projective plane.* Invent. Math. 42 (1977), 63-91.

[2] Drézet, J.-M. *Fibrés uniformes de type* $(1,0,\ldots,0,-1)$ *sur* $\mathbb{P}_2$. Annales de l'Inst. Fourier 31,1 (1981), 99-134.

[3] Drézet, J.-M. *Exemples de fibrés uniformes non homogènes sur* $\mathbb{P}_n$. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 291 (1980), no. 2, 125-128.

[4] Elencwajg, G. *Les fibrés uniformes de rang 3 sur* $\mathbb{P}_2$ *sont homogènes.* Math. Ann., 231 (1978), 217-227.

[5] Elencwajg, G. *Des fibrés uniformes non homogènes.* Math. Ann., 239 (1979), 185-192.

[6] Elencwajg, G. *Concernant les fibrés uniformes de rang 4 sur* $\mathbb{P}_2$. Thèse (1979).

[7] Elencwajg, G. *Fibrés uniformes de rang élevé sur* $\mathbf{P}_2$. Annales de l'Inst. Fourier 31,4 (1981), 89-114.

[8] Grothendieck, A. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann.* Amer. J. Math. 79 (1957), 121-138.

[9] Hulek, K. *On the classification of stable rank-r vector bundles on the projective plane.* Vector bundles and differential equations (Proc. Conf., Nice, 1979), Progr. Math., 7, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.113-144.

[10] S. L. Kleiman, S. L. *Amples vector bundles on surfaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1969), 673-676.

[11] Le Potier, J. *Fibrés stables de rang 2 sur* $\mathbb{P}_2$. Math. Ann. 241 (1979), 217-256.

[12] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H. *Vector bundles on complex projective spaces.* Corrected reprint of the 1988 edition. With an appendix by S. I. Gelfand. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[13] Van de Ven, A. *On uniform vector bundles.* Math. Ann., 195 (1972), 245-248.

Notes : Ce texte reproduit l'article

Fibrés uniformes de type $(0,\ldots,0,-1,\ldots,-1)$ *sur* $\mathbb{P}_2$. Journ. für die reine und angew. Math. 325 (1981), 1-27.

avec quelques améliorations dans la rédaction et la bibliographie.

Les fibrés vectoriels en question ont été étudiés par la suite par J. Brun et A. Hirschowitz dans

Droites de saut des fibrés stables de rang élevé sur $\mathbb{P}_2$. Math. Zeits. 191 (1982), 171-178.

Ils montrent que si r, c_1, c_2 sont des entiers tels que $r \geq 4$, $-r+1 < c_2 < 1$, et si $M(r, c_1, c_2)$ désigne la variété de modules des fibrés stables sur $\mathbb{P}_2$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 (supposée non vide), alors le fibré générique de toute composante irréductible de $M(r, c_1, c_2)$ est uniforme de type $(0,\ldots,0,-1,\ldots,-1)$ (en fait ces variétés de modules sont irréductibles).

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr