

## Imagerie médicale : le Scanner

Jean-Michel Kantor

(Institut Mathématique de Jussieu et Irem Paris 7)

### Plan

1. TPE : réflexions préalables
2. Limites, frontières et historique
3. Algèbre linéaire, résolution exacte ;
4. Conclusions

Annexe 1 Résolutions approchées de systèmes surdéterminés d'équations linéaires.

Références

### 1. TPE : réflexions préalables

Le document qui suit est destiné aux professeurs de première S et aux amateurs de tous bords. Il a pour but de traiter un exemple de TPE mathématiques/physique autour du thème des images, ici de l'imagerie médicale, sans aborder les questions liées aux SVT (interprétation anatomique). C'est l'occasion de montrer que contrairement au discours répandu chez les non-spécialistes par a-priori idéologique (ou simplement par bêtise, voir les fadaises dignes de Monsieur Homais sur la "réalité insaisissable" [1]), les mathématiques ont un lien crucial avec le monde, qui ne se limite pas à des mots-valises comme "modèle" qu'on place à toutes les sauces. A l'heure de progrès colossaux en physique, en biologie et en mathématiques exploitant des fertilisations croisées il est urgent de montrer aux élèves ces relations étroites entre les sciences, et sous un jour moderne (voir [2], [3])

Que ceux qui en doutent s'engagent à ne jamais passer au scanner !

De ce point de vue l'initiative des TPE est excellente.

Citons un spécialiste :

*Mathematics is not subordinate to natural science. But it is fair to say that M is the language of science in a deep sense ... and just as language of true literacy not only specifies and expresses thoughts and processes of thinking but also creates them in turn, so does mathematics not only specify, clarify and make rigorously workable concepts ... but at certain crucial instances it is an indispensable constituent of their creation and emergence as well.*

*S.Bochner (The role of mathematics in the rise of science, Princeton University Press, 1981).*

Cette fécondation mutuelle ne peut que profiter aux enseignants et aux élèves des autres disciplines. L'exemple de l'imagerie médicale (scanner) permet aussi de montrer des développements récents des mathématiques et des technologies nouvelles. De plus l'exemple choisi permet d'envisager les sérieuses difficultés qui peuvent se rencontrer et

qui ne peuvent être résolues que par un véritable travail pluri-disciplinaire. Par exemple, dans le cas qui nous intéresse, le seul article en français que nous ayons trouvé sur les mathématiques de l'imagerie médicale [4] mélange allègrement les fondements, les détails techniques et les apports des sciences physiques et des mathématiques.

## 2. Limites, frontières et historique

Nous précisons les limites de l'imagerie médicale, car les sujets voisins sont nombreux. Le terme technique qui prétend tout recouvrir dans le langage mathématique appliqué est :  
contrôle non-destructif (cf [5,6]).

Par exemple aujourd'hui on peut avec des ondes sonores vous vendre un camembert sans blanc sans avoir pressé le doigt dessus.

On trouve ainsi le contrôle non-destructif en acoustique, en recherche pétrolifère, en stéréométrie mais il y a aussi recoupement avec la morphologie mathématique. Ces sujets ne seront pas abordés ici, ni non plus la magnifique géométrie intégrale qui prétend retrouver par exemple un convexe par ses projections (cf [7]).

Commençons donc par le Vocabulaire :

**scanner** (anglais *to scan* : examiner, scruter)

tomographie (grec *tomos* : "morceau coupé")

scanner CT *computerized tomography, tomographie numérique*

À la fin des années 60 l'ingénieur Hounsfield imagine la situation suivante :

On envoie un mince faisceau parallèle  $F$  de rayons X sur un objet (un cerveau), avec l'idée de faire varier la direction. Pour une direction donnée l'intensité du rayon recueilli fournit une information sur les tissus traversés.

Le manque d'information par la technique de rayons classique peut se représenter grâce au schéma suivant :

Figure 1

On a le même résultat (intensité obtenue  $I$ ) selon les deux différentes positions de la tache (a/,b/) ou même avec une tache diffuse (cas c/).

La tache  $T$  à l'intérieur concentrée ou non, donne la même information quand on mesure l'atténuation dans une seule direction et on ne peut distinguer les deux positions

en  $a$  et  $b$ . On renouvelle la mesure sous différents angles d'un plan donné, il faut encore "recoller l'information" obtenue par les multiples "clichés" à l'aide d'un ordinateur qui reconstitue la vue d'une tranche du corps. On peut espérer résoudre le problème. Par exemple à la Figure 2 on distingue déjà les positions de la tache.

Figure 2

Plus facile à dire qu'à réaliser ! Il faudra plus de dix ans de travail. Les premiers essais pratiques utilisent 28 800 clichés à partir desquels 24 000 points de trame sont calculés. Neuf jours d'enregistrement et une nuit de calcul sont nécessaires... Mais l'ambition de Hounsfield ne se limite ni à énoncer une théorie, ni à créer un système de calcul. Il veut créer un produit commercialisable. En 1979, il sera récompensé du prix Nobel avec le physicien Allan McLod Cormak, de l'université Tufts (Massachusetts). Ce dernier est l'auteur des travaux théoriques.

Quelques années plus tard Mc Cormack découvre par hasard en bavardant à Harvard que ses calculs à la base de la tomographie ont été faits, en 1929, sous le nom de transformée de Radon (Il s'agit en fait d'une interprétation géométrique de la transformation de Fourier). Belle leçon d'humilité pour les mathématiciens -demiurges : oui, on peut arriver à se passer de nous !

Le principe est simple : le passage de rayons X dans une seule direction ne suffit pas, de multiples passages dans des directions différentes vont permettre de reconstituer le paysage (ici une section plane d'un cerveau).

Essayons de comprendre le processus qui donne l'intensité  $I$  à partir de l'intensité initiale  $A$  et des tissus traversés.

D'abord comme dans toute approximation numérique chaque quantité dépendant de paramètres continus est discrétisée. Pour les images on remplace par exemple les points d'une photo par une grille de 100 x 100. De plus à chaque case est attaché un nombre qui tient compte de l'intensité de couleur (ou plus simplement 0 ou 1 suivant qu'il s'agit de noir ou blanc).

A/ Dans le cas de l'imagerie médicale imaginons qu'un rayon traverse une bande de  $n$  cases :

Figure 3

et que dans chaque case le rayon soit atténué d'un facteur  $f(i)$  qui dépende de la case  $i$ , et qui mesure les capacités d'absorption de la matière présente.

À la sortie le rayon a une intensité

$$I = A.f(1)...f(n)$$

$$\log I = \log A + \Sigma \log f(i).$$

Autrement dit –le passage aux logarithmes est secondaire– connaissant  $A$  on connaît la somme des  $g(i)$  où

$$g(i) = \Sigma \log f(i).$$

B/ Pour se représenter le problème, on va imaginer une grille carrée de  $N$  cases, d'abord pour de très faibles valeurs de  $N$ , qui conduisent à l'idée de solution approchée (étudiée en Appendice 1).

Le rayon  $X$  soit traverse la case  $(i, j)$  soit ne la traverse pas ; quand il la traverse il est absorbé selon un facteur  $f(i, j)$ , et à la sortie il ne reste qu'une portion de l'intensité du rayon initial.

L'objet à deux dimensions que nous devons analyser par la tomographie est quadrillé en général par une grille  $80 \times 80 = 6400$  cases.

#### 4. Exemples miniature

C/ Examinons d'abord un carré de deux mailles ; on considère l'opération suivante : On trace un rayon et on ajoute les nombres qui sont dans les cases que le rayon traverse

Figure 4

1. Les quatre sommes associées à la figure 4 nous permettent-elles de reconstituer les nombres  $(a, b, c, d)$  ?
2. Fixez l'un des nombres et cherchez les autres. Conclusions ?
3. On ajoute deux rayons diagonaux correspondant aux sommes  $U$  et  $V$  :

Figure 5

Peut-on résoudre ?

4. En général les conditions expérimentales ne donnent que des données approchées. Voici un exemple :

$$\begin{aligned}
 X &= a + b = 4 \\
 Y &= c + d = 6 \\
 Z &= a + c = 5 \\
 T &= b + d = 5 \\
 U &= a + d = 7 \\
 V &= c + b = 3
 \end{aligned}$$

(I)

Résolvez le système puis remplacez deux des équations par les suivantes :

$$\begin{aligned}
 a + b &= 4,01 \\
 b + d &= 5,02
 \end{aligned}$$

Essayez de résoudre ; que constatez-vous ?

Écrire les deux conditions de compatibilité.

Même si on part d'un système qui possède une solution (ou une infinité les données approchées peuvent conduire à un système impossible à résoudre.

Le système précédent représente en miniature le problème du scanner discrétisé (il faudra remplacer le carré par une grille de côté  $N$ ). Même pour le carré de côté 2, il n'y a pas de système naturel qui possède de solution unique et bien déterminée, c'est là la

difficulté intrinsèque. Regardons par exemple la question 4 de l'exercice précédent : on a six équations linéaires dans un espace vectoriel de dimension quatre : pas de solutions en général, il y a des conditions de compatibilité.

Exercice 1. On généralise avec  $3 \times 3$

### Figure 6

Peut-on étendre la stratégie précédente ?

Comment ?

Montrer qu'avec le choix des seules horizontales et diagonales on ne peut trouver les variables, mais que le choix de certaines directions supplémentaires le permet.

Rappelons que cette méthode doit être étendue à  $80 \times 80$  pour s'appliquer à la tomographie !

Évidemment il n'est pas question d'étudier solutions et solutions approchées en général : on renvoie soit aux cours d'algèbre linéaire soit aux cours d'analyse numérique. Cependant le point commun à tous ces exemples, ainsi que celui du scanner, c'est qu'il s'agit de systèmes linéaires d'équations, qui sont plus nombreuses que le nombre d'inconnues. En général de tels systèmes n'ont pas de solutions ! Il faut que des conditions de compatibilité soient satisfaites.

Considérons un système de trois équations à deux inconnues qui représentent l'essence de la difficulté du problème : dans le plan des coordonnées  $(x, y)$  les équations sont représentées par des droites.

Figure 7

Si elles sont concourantes on a une unique solution  $A$  ; on peut d'ailleurs écrire la condition de compatibilité sous forme de la nullité d'un déterminant ; sinon il n'y a que des solutions approchées qu'on peut représenter par le triangle  $ABC$ , qui est une sorte de "solution généralisée". Dans le cas général où il y a 80 variables, on utilise une méthode de résolution approchée que j'explique en appendice, d'abord à deux dimensions.

En conclusion, précisons que l'imagerie médicale est un immense domaine où peuvent se rencontrer des sujets raisonnables de TPE (mathématiques, SVT, sciences physiques) et d'autres qui le sont beaucoup moins, prendre garde !



## Appendice 1

Résolution approchée d'équations linéaires avec trop d'équations (systèmes surdéterminés).

On étudie le cas de trois équations avec deux inconnues.

Considérons un système (coordonnées  $x, y$ )

$$ax + by = u$$

$$cx + dy = v$$

$$ex + fy = w$$

On ne connaît pas dans la pratique les six coefficients, mais on sait que le système possède une solution ; on se donne un nouveau système, connu, lui, et qui est proche (l'erreur étant due aux conditions physiques, au bruit...).

Étant donné un point  $P(p_1, p_2)$  et une droite  $L$  d'équation  $ax + by = c$

$$\vec{A} = (a, b)$$

La projection orthogonale  $Q$  de  $P$  sur  $L$  a pour coordonnées  $(q_1, q_2)$  avec  $R$

$$\vec{q} = \vec{p} + \left( \frac{c - \vec{A} \cdot \vec{p}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} \right) \vec{A}$$

Figure 8

Étant donné les trois droites  $L_i$  dont on ne connaît pas les intersections deux à deux on part d'un point  $P_0$  quelconque et on définit

$$\begin{array}{ll} P_1 & P_4 \\ P_2 & P_5 \\ P_3 & P_6 \end{array}$$

...où  $P_1$  est la projection de  $P_0$  sur  $L_1$ ,  $P_2$  celle de  $P_1$  sur  $L_2$ ,... et on recommence.

Figure 9

Exemples

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 4y = 4 \\ 3x - y = -1 \end{array}$$

Exercice

Partez de  $A_0 = (2, 3)$  et appliquez la construction précédente, par exemple avec une calculatrice programmable ; que remarquez-vous ?

On peut montrer qu'en partant d'un point arbitraire on obtient ainsi trois suites qui convergent vers trois points des côtés du triangle, et que ces points-limite ne dépendent pas du point de départ (à condition que les trois droites ne soient pas parallèles).

L'un des intérêts de cette méthode est le suivant : si on part d'un système avec  $N$  équations et environ  $N$  inconnues la méthode de résolution classique utilise environ  $N^3$  opérations de multiplication ou division, celle-ci environ  $N^2$  seulement.

Exemple : on considère le cas

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= 6 \\
 x_3 + x_4 &= 12,02 \\
 x_1 + x_3 &= 7,9 \\
 x_2 + x_4 &= 10 \\
 x_2 + x_3 &= 9,94 \\
 x_1 + x_4 &= 8,12
 \end{aligned}$$

On peut construire l'analogie de la situation précédente : les droites sont remplacées par des hyperplans de  $R^4$ , l'analogie de la formule permet de construire un algorithme et trois suites de points ; par exemple partant de  $(0, 0, 0)$  on obtient

$P_0$	0.00	0.00	0.00	0.00
$P_1$	3.00	3.00	0.00	0.00
$P_2$	3.00	3.00	6.01	6.01
$P_3$	2.44	3.49	5.45	6.01
$P_4$	2.44	3.49	5.45	6.51
$P_5$	2.44	3.99	5.95	6.51
$P_6$	2.03	3.99	5.95	6.09
$P_1$	2.02	3.98	5.95	6.09
$P_2$	2.02	3.98	5.94	6.08
$P_3$	1.99	3.95	5.91	6.08
$P_4$	1.99	3.95	5.91	6.05
$P_5$	1.99	3.99	5.95	6.05
$P_6$	2.03	3.99	5.95	6.09
$P_1$	2.02	3.98	5.95	6.09
$P_2$	2.02	3.98	5.94	6.08
$P_3$	1.99	3.98	5.91	6.08
$P_4$	1.99	3.95	5.91	6.05
$P_5$	1.99	3.99	5.95	6.05
$P_6$	2.03	3.99	5.95	6.09

On peut encore montrer que l'algorithme détermine six suites qui convergent séparément vers six points de chaque hyperplan l'espace  $R^4$ . Dans la technique de l'imagerie

on choisit (avec des critères complémentaires) l'un des points comme solution approchée et donne un point de l'image.

### Références

- [1] Repères, (N° 36, Juillet 1999)
- [2] Bender Edward, An introduction to mathematical modelling, Dover 2000
- [3] Umap, Bulletin, ainsi que toutes les publications du Consortium of mathematics and applications (Comap) Boston (USA)
- [4] A. Amsalem, Bases physiques et mathématiques du scanner aux rayons X (exploration tomodynamométrique) Bulletin Apmep, 563, Déc. 88
- [5] J. Serra, Image analysis and mathematical morphology, Academic Press 1982
- [6] Sur le contrôle non-destructif : La Recherche : N° 291, 10/96 M.Fink et al.: Ultrasons : remonter le temps malgré le désordre  
— Non destructive testing”, R. Halmshaw Editor E.Arnold London (1991)  
— Industrial radiology : theory and practice”, R. Halmshaw, Applied Science London and New Jersey (1982)
- [7] Gardiner, Geometric tomography, Cambridge University Press
- [8] Santalo L. Kac M., Integral geometry and geometric probability Encyclopedia of mathematics and its applications Addison-Wesley, 1976
- [9] Herman G.T. Image reconstruction from projections, the fundamentals of computerized tomography, New York, Academic Press

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 = 4$$

$$3x_1 - x_2 = -1$$